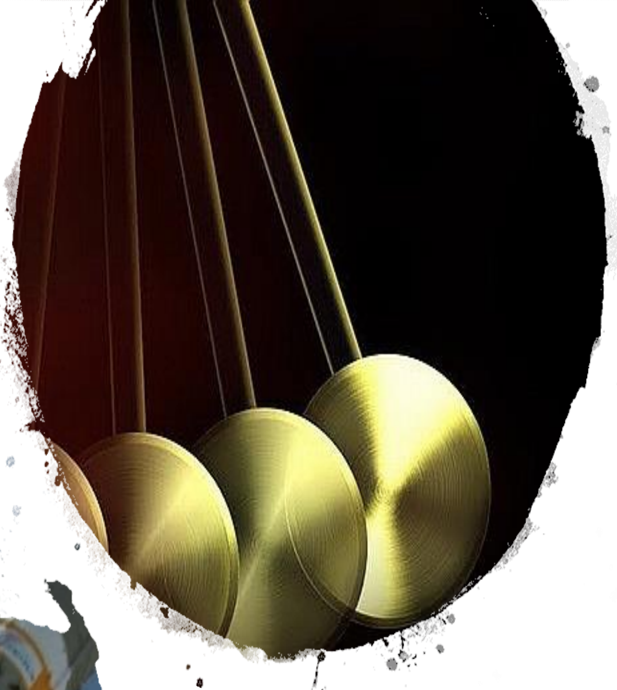


МЕХАНИКА

Лекция 4

Масса, импульс, сила

Замкнутая система тел – система тел, взаимодействующих между собой и не взаимодействующих с другими телами.

Эксперимент: отношение модулей приращения скоростей при взаимодействии двух тел в замкнутой системе не зависит от способа и интенсивности взаимодействия данных двух тел, а зависит только от их масс:

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Масса, импульс, сила

Более инертное тело (тело с большей массой) – меньшее изменение скорости.

С учетом направления

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2.$$

Масса, импульс, сила

Ньютоновская механика ($v \ll c$):
масса тела - постоянная физическая величина,
не зависящая от скорости тела.

С учетом этого

$$\Delta(m_1\vec{v}_1) = -\Delta(m_2\vec{v}_2).$$

$\vec{p} = m\vec{v}$ **- импульс тела.**

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

Масса, импульс, сила

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$\vec{p}$ **- постоянная величина.**

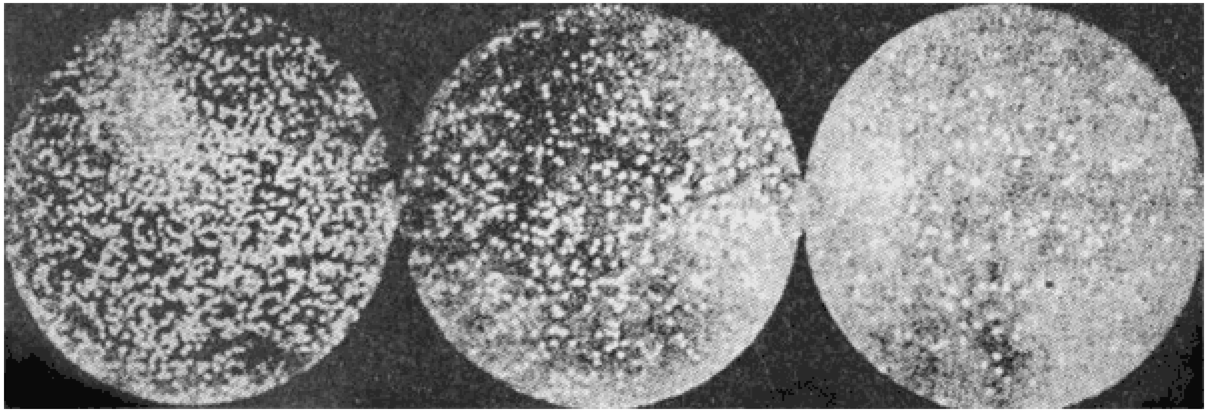
Полный импульс замкнутой системы двух взаимодействующих тел остается постоянным.

Закон сохранения импульса

Система из N взаимодействующих частиц.

$\vec{F}_{ik}$ – **внутренние силы, действующие на i-ую частицу,**

$\vec{F}_{i}$ – **результирующая внешних сил, действующих на i-ую частицу.**



Броуновские частицы

Закон сохранения импульса

Уравнения движения для всех N частиц:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1k} + \ldots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1 = \sum_{k=2}^{N} \vec{F}_{1k} + \vec{F}_1,$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2k} + \ldots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2 = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq 2)}}^{N} \vec{F}_{2k} + \vec{F}_2,$$

....

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{ik} + \ldots + \vec{F}_{iN} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i,$$

....

$$\dot{\vec{p}}_N = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{F}_{Nk} + \ldots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_N = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq N)}}^{N} \vec{F}_{Nk} + \vec{F}_N.$$

Закон сохранения импульса

Операция:

сложение всех левых и всех правых частей уравнений.

В правой части $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ **(третий закон Ньютона) и т.д.**

Результат сложения:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$ **где** $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$ **- импульс системы.**

Закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

Постоянство импульса системы в случае ее замкнутости.

Постоянство импульса системы в случае незамкнутости системы, но равенства нулю равнодействующей внешних сил.

Закон сохранения импульса

Постоянство проекции импульса на некоторое направление x в случае равенства нулю проекции на это направление суммы действующих на систему внешних сил.

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^{N} F_{xi}.$$

Закон сохранения импульса

Центр масс (центр инерции) системы материальных точек – точка C, положение которой задается радиусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}.$$

Закон сохранения импульса

Скорость центра масс $\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C = \dfrac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \dfrac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \dfrac{\vec{p}}{m}.$

Импульс системы частиц $\vec{p} = m\vec{v}_C.$

Следствие закона сохранения импульса –
центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C = \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$$

Закон сохранения импульса

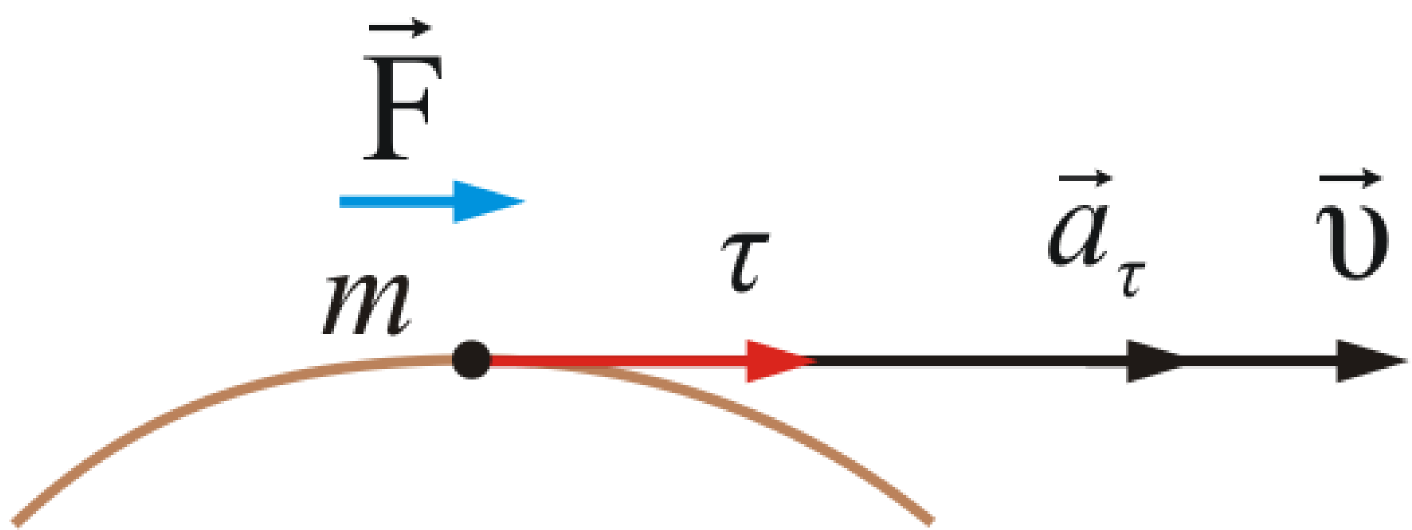
Соответствие движения центра масс системы движению материальной точки с массой, равной массе тел системы, под действием равнодействующей приложенных внешних сил.

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_{\text{внешн}}.$$

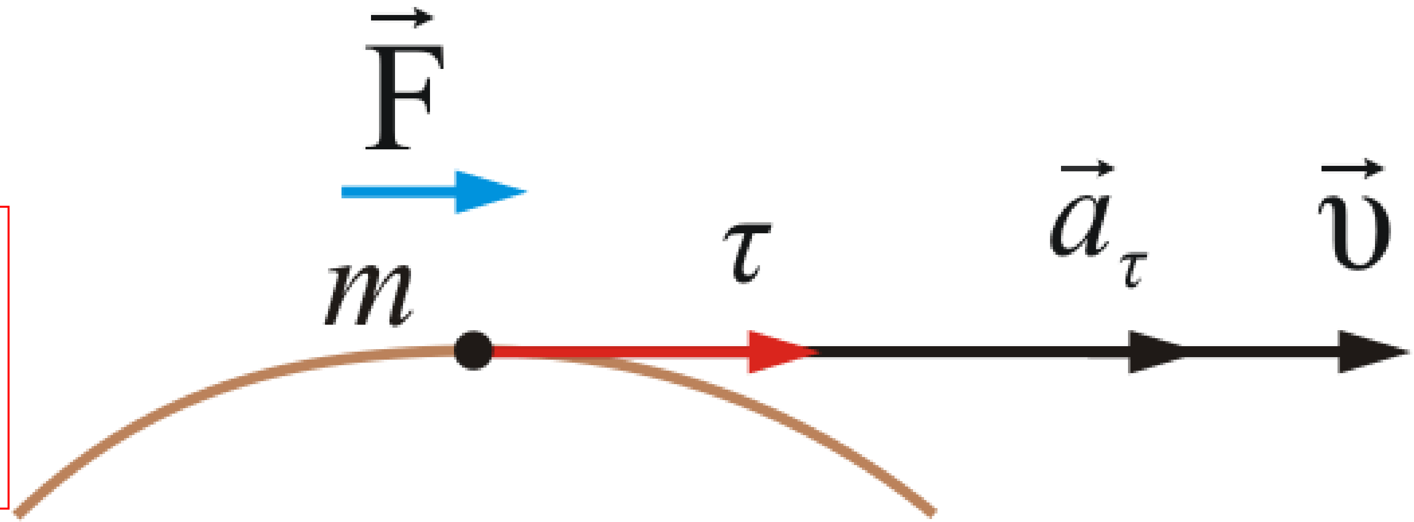
Кинетическая энергия.

Уравнение движения тела под действием внешней силы $\vec{F}$ имеет вид:

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F},}$$ или $$\boxed{m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau.}$$



$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=F_{\tau}.}$$



Умножим обе части этого равенства на $\upsilon\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}r,$ получим: $m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon=F_{\tau}\,\mathrm{d}r.$

Левая часть равенства, есть ***полный дифференциал некоторой функции***:

$$\boxed{m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon=\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^{2}}{2}\right)}\quad \text{или} \quad \boxed{\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^{2}}{2}\right)=F_{\tau}\mathrm{d}r.}$$

Т.о. $\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau \mathrm{d}r.}$

Если система замкнута, то $\vec{\mathrm{F}}^{\text{внеш.}} = 0$ и

$F_\tau = 0,$ тогда и $\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы равен нулю, то эта функция может служить ***характеристикой состояния*** *данной системы.*

Функция состояния *системы, определяемая* ***только скоростью*** *ее движения, называется* ***кинетической энергией****.*

$$\boxed{K = \frac{m\upsilon^2}{2}.}$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.

K – аддитивная величина:

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},}$$

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т.е. в ньютонах на метр: $1\,\text{Н}\cdot м = 1\text{Дж}$

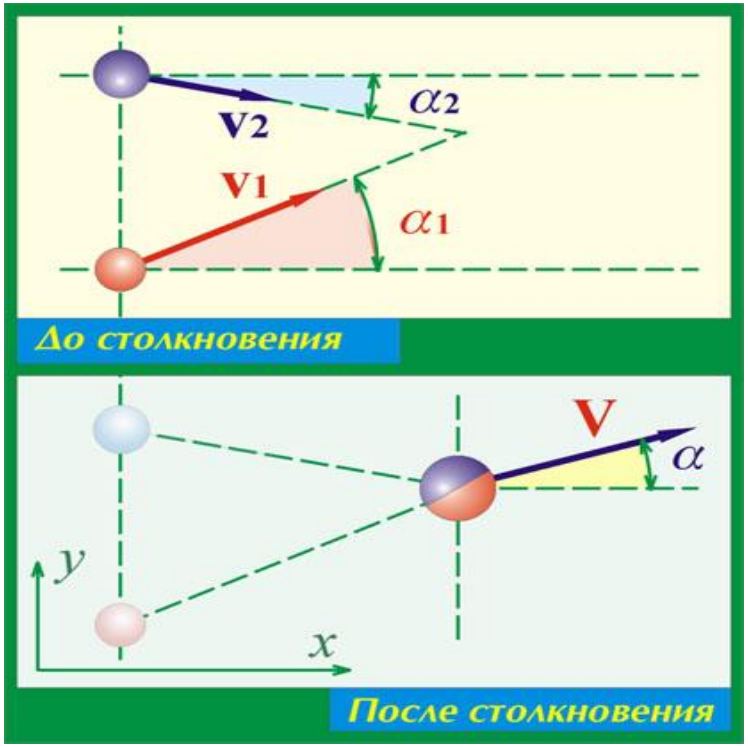
Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ): 1 эВ = 1,6 10^{19} Дж.

Связь кинетической энергии с импульсом p.

Т.к. $$\frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right)=\frac{m^2\upsilon^2}{2m},$$ отсюда

$$\boxed{K=\frac{p^2}{2m}.}$$

АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР



Абсолютно неупругим называется такой удар, при котором возникают только пластические деформации.

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}; \ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta.$$

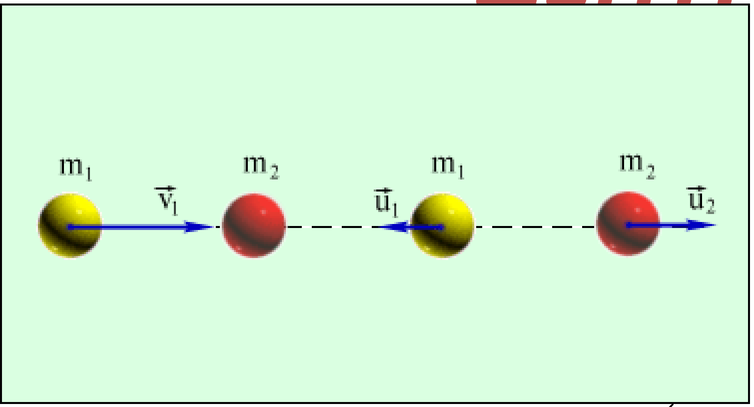
$$(m_1 + m_2)^2 \vec{V}^2 = \left(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2\right)^2 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)^2 V^2 = m_1^2 V_1^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos\beta + m_2^2 V_2^2;$$

$$\sqrt{m_1^2 V_1^2 + 2m_1 m_2 V_1 V_2 \cos\beta + m_2^2 V_2^2}\cos\alpha = m_1 V_1 \cos\alpha_1 + m_2 V_2 \cos\alpha_2.$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + Q.$$

АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР



$$m_1V_{1x}+m_2V_{2x}=m_1U_{1x}+m_2U_{2x};$$

$$\frac{m_1V_{1x}^2}{2}+\frac{m_2V_{2x}^2}{2}=\frac{m_1U_{1x}^2}{2}+\frac{m_2U_{2x}^2}{2}.$$

$$m_1\left(V_{1x}-U_{1x}\right)\left(V_{1x}+U_{1x}\right)=m_2\left(U_{2x}-V_{2x}\right)\left(U_{2x}+V_{2x}\right);$$

$$m_1\left(V_{1x}-U_{1x}\right)=m_2\left(U_{2x}-V_{2x}\right).$$

$$V_{1x}+U_{1x}=V_{2x}+U_{2x}\Rightarrow U_{2x}=U_{1x}+V_{1x}-V_{2x}\Rightarrow$$

$$m_1V_{1x}-m_1U_{1x}=m_2U_{1x}+m_2(V_{1x}-V_{2x})\Rightarrow$$

$$U_{1x}=\frac{2m_2V_{2x}+\left(m_1-m_2\right)V_{1x}}{m_1+m_2};\ U_{2x}=\frac{2m_1V_{1x}+\left(m_2-m_1\right)V_{2x}}{m_1+m_2}.$$

АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР

$$U_{1x} = \frac{2m_2V_{2x} + \left(m_1 - m_2\right)V_{1x}}{m_1 + m_2}; \qquad U_{2x} = \frac{2m_1V_{1x} + \left(m_2 - m_1\right)V_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

$$U_{1x} \neq U_{2x}; \quad U_{1x} = U_{2x} \Rightarrow V_{1x} = V_{2x}.$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow U_{1x} = V_{2x}; U_{2x} = V_{1x}.$$

$$V_{2x} = 0 \Rightarrow U_{1x} = 0; \quad U_{2x} = V_{1x}.$$

$$m_2 \gg m_1 \Rightarrow U_{2x} = V_{2x};$$

$$U_{1x} = 2V_{2x} - V_{1x}.$$

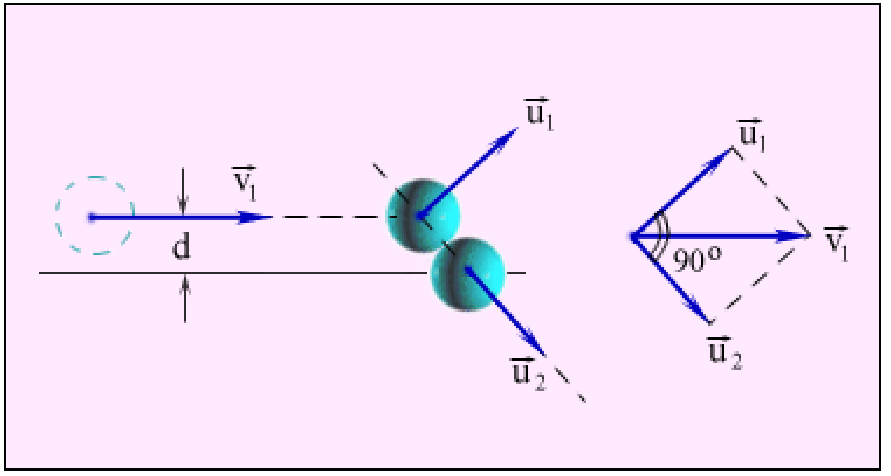
$$V_{2x} = 0 \Rightarrow U_{1x} = -V_{1x}.$$

НЕЦЕНТРАЛЬНЫЙ УПРУГИЙ УДАР

$$m_1 = m_2 = m; \qquad V_2 = 0.$$

$$m\vec{V}_1 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \Rightarrow \vec{V}_1^{\,2} = \left(\vec{U}_1 + \vec{U}_2\right)^2 \Rightarrow$$

$$V_1^2 = U_1^2 + 2U_1U_2\cos\alpha + U_2^2.$$



$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mU_1^2}{2} + \frac{mU_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$V_1^2 = U_1^2 + U_2^2 \Rightarrow$$

$$2U_1U_2\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

Движение тел переменной массы

Переменная масса – масса относительно медленно движущихся тел, меняющаяся за счет потери или приобретения вещества.

Движение тел переменной массы

Уравнения движение тел переменной массы – следствие законов Ньютона.

Выброс с большой скоростью ракетой создаваемых в результате сгорания топлива газов.

**Действие выбрасываемых газов на ракету с равной,
но противоположно направленной силой.
Результат - ускорение ракеты.**

Движение тел переменной массы

Ракета и выброшенное вещество – замкнутая система.

Сохранение во времени импульса данной замкнутой системы в отсутствие внешних сил - следствие выполнения закона сохранения импульса замкнутой системы тел.

Движение тел переменной массы

Более общий случай – наличие действующих на систему внешних сил ($\vec{F}$- геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету).

Пример: движение ракеты под действием гравитационных полей Земли, Солнца, планет, сопротивления атмосферы.

Движение тел переменной массы

m(t) **– масса ракеты в произвольный момент времени,**

$\vec{v}(t)$ **– скорость ракеты в тот же момент времени,**

$m\vec{v}$ **– импульс ракеты в тот же момент времени,**

dm < 0 **и** $d\vec{v}$ **– приращения массы и скорости ракеты за время** dt**,**

$(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})$ **– импульс ракеты в момент времени** t + dt**,**

$dm_{\text{газ}}v_{\text{газ}}$ **– импульс газов, образовавшихся за время** dt**.**

Движение тел переменной массы

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

Приращение импульса системы за время dt

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t).$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$\Delta\vec{p} = \left(m+dm\right)\left(\vec{v}+d\vec{v}\right) + dm_{\text{газ}}\vec{v}_{\text{газ}} - m\vec{v} = \vec{F}dt.$$

$$\left(m+dm\right)\left(\vec{v}+d\vec{v}\right)+dm_{\text{газ}}\vec{v}_{\text{газ}} - m\vec{v}=\vec{F}dt$$

$$m\vec{v}+dm\vec{v}+md\vec{v}+dmd\vec{v}+dm_{\text{газ}}\vec{v}_{\text{газ}}-m\vec{v}=\vec{F}dt.$$

Пренебрегаем бесконечно малой высшего порядка $dmd\vec{v}.$

Учитывая закон сохранения массы $dm+dm_{\text{газ}}=0,$ **заменяем** $dm_{\text{газ}}=-dm.$

Учитываем, что скорость истечения газов относительно ракеты (скорость газовой струи)

$$\vec{v}_{\text{отн}}=\vec{v}_{\text{газ}}-\vec{v}.$$

Получаем $md\vec{v}=\vec{v}_{\text{отн}}dm+\vec{F}dt.$

Уравнение Мещерского
или уравнение движения точки с переменной массой

Российский и советский ученый И.В. Мещерский (1859-1935)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} + \vec{F}.$$

Внешние силы

Реактивная сила

Труды по механике тел переменной массы – теоретическая основа разработки многих проблем реактивной техники.