МЕХАНИКА

Лекция 5

Связь кинетической энергии с работой.

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда, элементарная работа по перемещению тела из т. 1 в т. 2, будет равна произведению силы *F* на перемещение d*r* :

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r, \text{ отсюда } \quad A = \int_1^2 F\mathrm{d}r.$$

Т.к. нам известно, что $F = ma = m\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t},$

а $\mathrm{d}r = \upsilon\mathrm{d}t,$ тогда после замены получим выражение для работы:

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = m\int_1^2 \upsilon\mathrm{d}\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = K_2 - K_1.$$

Следовательно, **работа** силы приложенной к телу на пути r численно равна **изменению кинетической энергии этого тела**:

$$A = \Delta K.$$

Или **изменение кинетической энергии dK равно работе внешних сил:**

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}A.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется **в джоулях**.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется **мощность**.

Мощность есть работа, совершаемая в единицу времени.

Мгновенная мощность $N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

или $N = F\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = F\upsilon.$

Средняя мощность $< N >= \frac{A}{\Delta t}.$

Измеряется мощность в ваттах. 1 Вт = 1 Дж/с.

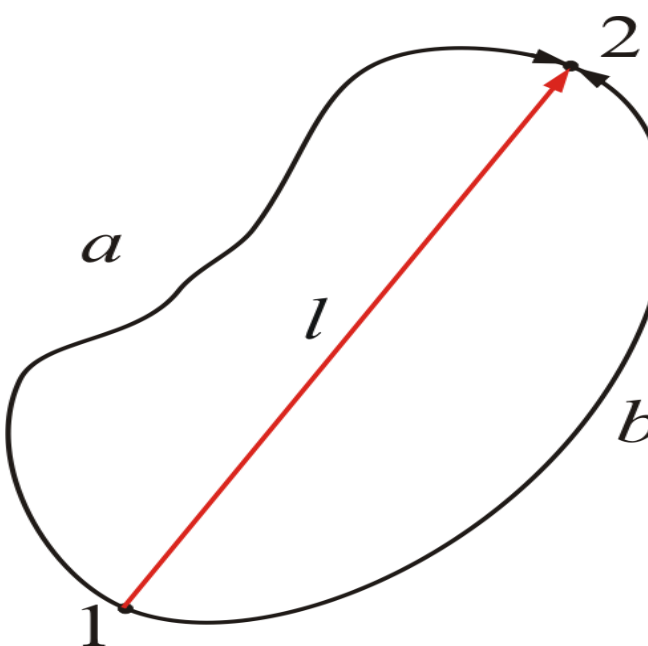
Консервативные силы и системы

Кроме контактных взаимодействий, наблюдаются взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Подобное взаимодействие осуществляется посредством **физических полей** (особая форма материи).

Каждое тело *создает вокруг себя* ***поле****, которое проявляет себя именно воздействием на другие тела.*

Силы, **работа которых не зависит от пути**, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела называются **консервативными**.

Обозначим *A* – работа консервативных сил, по перемещению тела из т. 1 в т. 2



$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

Изменение направления движения на противоположное – вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_L F\mathrm{d}r = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0$$

Интеграл по замкнутому контуру L, $\boxed{\oint_L \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}r}$

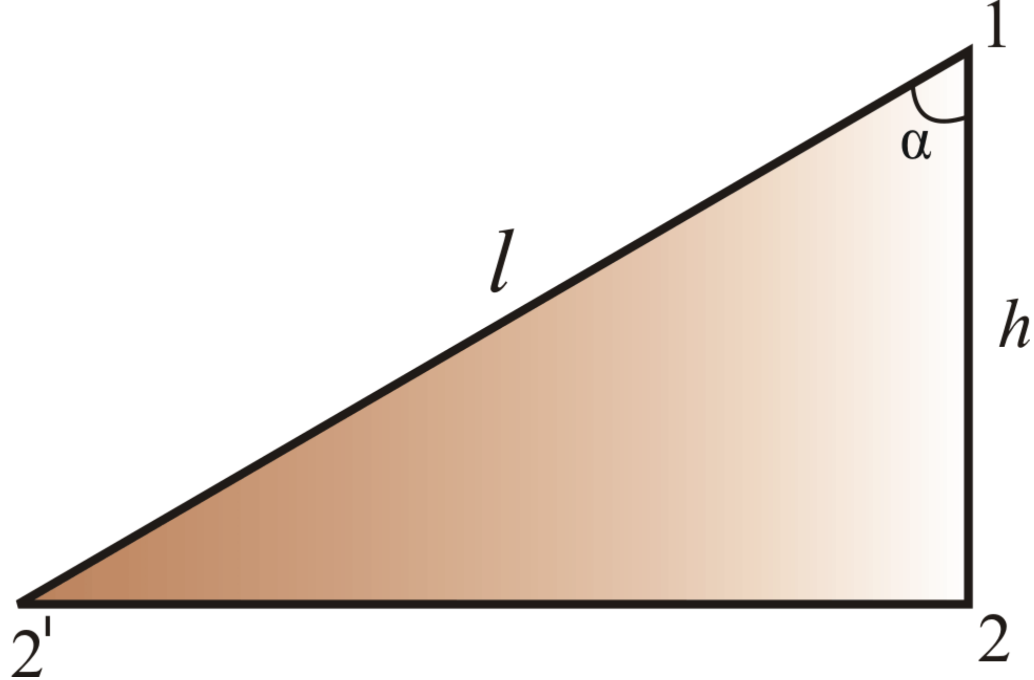
– называется *циркуляцией вектора* $\vec{\mathrm{F}}$

Если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна.

Консервативные силы: сила тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля.

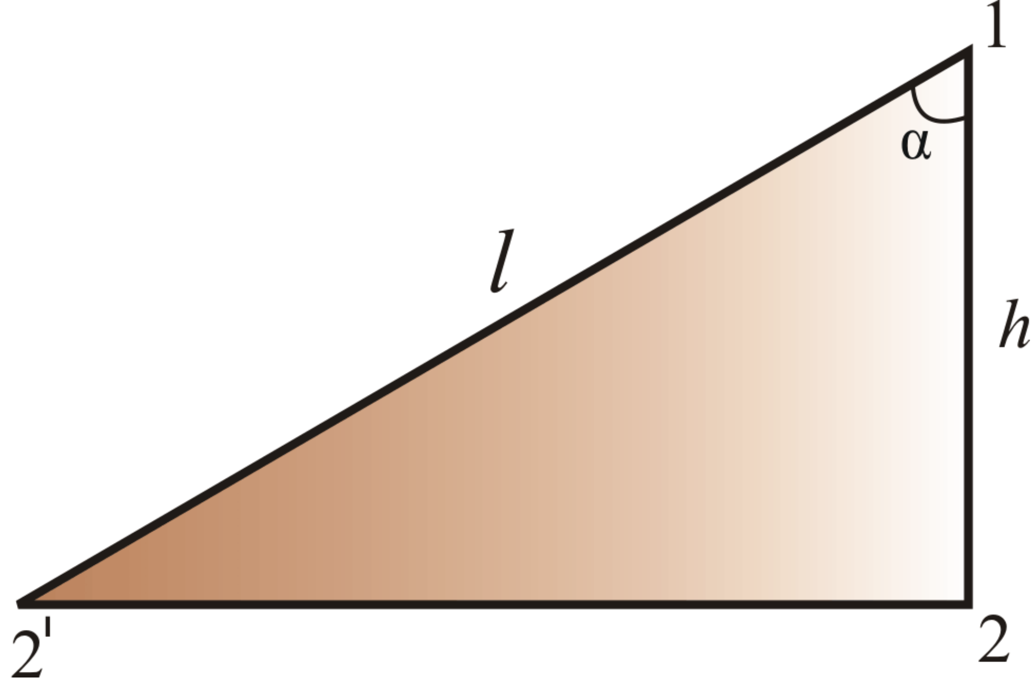
Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля.

Консервативная система – такая, внутренние силы которой только консервативные, внешние – консервативны и стационарны.



Работа по подъему тела массы *m* на высоту *h*, равна: $A_{21} = mgh$

С другой стороны $A_{2'1} = mgl\cos\alpha = mgh$



$$A_{2'1} = A_{21} = mgh$$

Из примера видно, что ***работа не зависит от формы пути, значит, силы консервативны, а поле этих сил потенциально.***

Потенциальная энергия

*Если на систему материальных тел **действуют консервативные силы**, то **можно** ввести понятие **потенциальной энергии.***

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, не зависит от того как было осуществлено это изменение. Работа определяется только **начальной и конечной** конфигурациями системы:

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

Потенциальная энергия $U(x, y, z)$ *– функция состояния системы,* ***зависящая только от координат*** *всех тел системы в поле консервативных сил.*

K – определяется скоростью движения тел системы, а **U** – их взаимным расположением.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U.$$

Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии

Работа тела при падении $A = mgh.$

Или $A = U - U_0.$

Условились считать, что на поверхности земли $(h = 0),\ U_0 = 0$

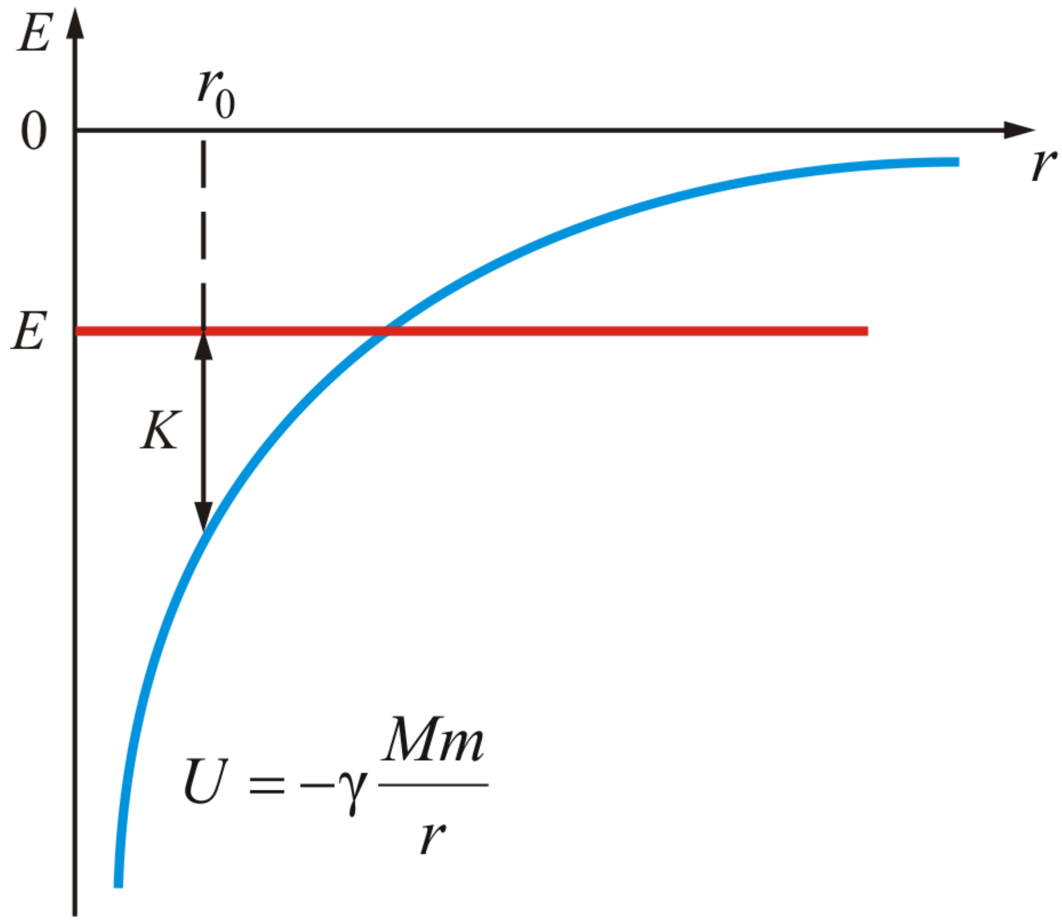
тогда $U = A$ т.е.

$$U = mgh.$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами *M* и *m*, находящимися на расстоянии *r* друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс *M* и *m*.



Здесь полная энергия $E = K + U.$
Отсюда легко найти кинетическую энергию:

$$K = E - U.$$

Потенциальная энергия упругой деформации (пружины)

Найдём работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$, Сила непостоянна, поэтому элементарная работа

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$$

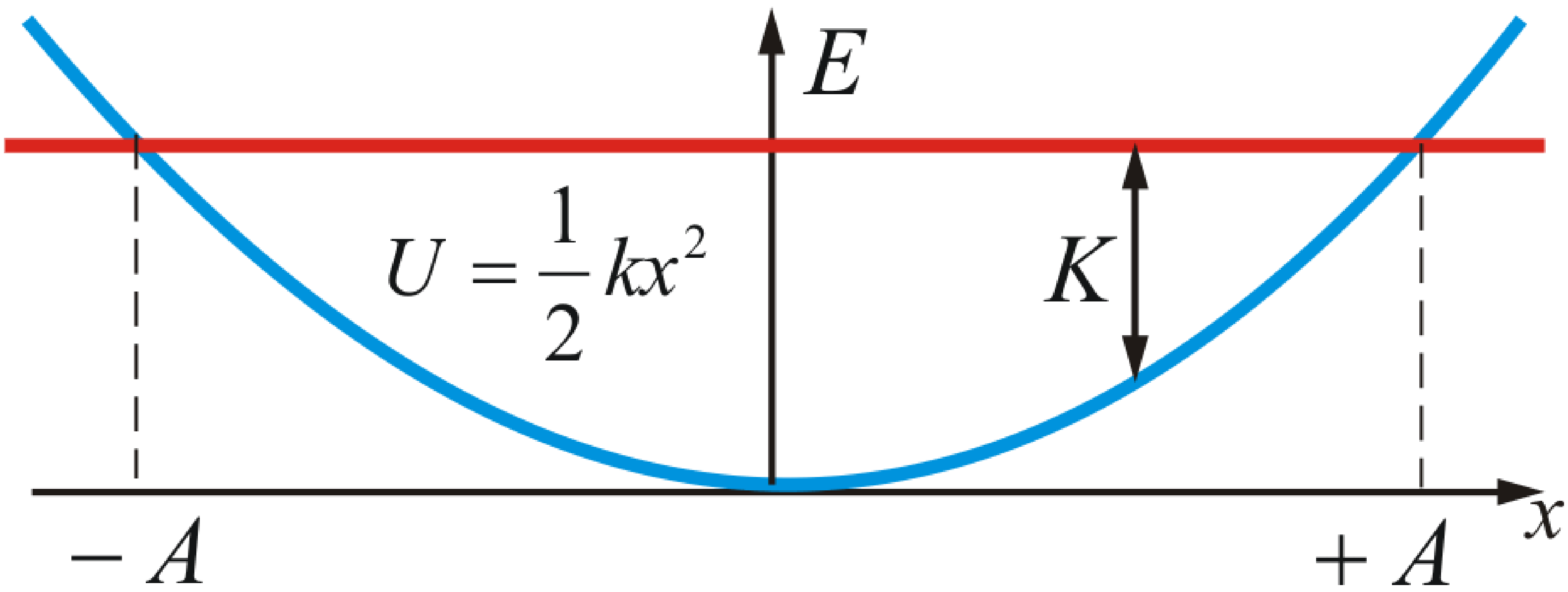
знак минус говорит о том, что работа совершенна над пружиной.

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2},$$

Т.е. $A = U_1 - U_2$ Примем: $U_2 = 0,\ U_1 = U$
тогда

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Диаграмма потенциальной энергии пружины.



Здесь $E = K + U$ – полная механическая энергия системы, *K* – кинетическая энергия в точке x_1

Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется ***потенциальным полем.***

Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$ действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии $\boldsymbol{U}$.

Значит, между силой $\vec{F}$ и $\boldsymbol{U}$ должна быть связь.

Т.к. $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U$

с другой стороны, $\mathrm{d}A = \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$

следовательно, $\vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = -\mathrm{d}U$

отсюда

$$\vec{\mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}.$$

Проекции вектора силы на оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вектор силы можно записать через проекции.

$$\vec{\mathrm{F}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

или

$$\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{grad}\,U,$$

где

$$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

$$\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Градиент *– это вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции*.

Т.к. в формуле стоит знак «минус», то $\vec{\mathrm{F}}$ направлен в сторону наибыстрейшего уменьшения *U*.

$$F = -\mathrm{grad}\,U,$$

Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения сводит воедино результаты, полученные нами раньше.

В сороковых годах девятнадцатого века трудами Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (все в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из *N*-частиц.

Силы взаимодействия между частицами

$(\vec{F}^{\text{внутр.}})$ - консервативные.

Кроме внутренних сил на частицы действуют внешние **консервативные и неконсервативные** силы, т. е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна.

Для консервативной системы частиц можно найти полную энергию системы:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} + U_{\text{внеш.}} = \text{const}$$

Для механической энергии **закон сохранения** звучит так: **полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остаётся постоянной.**

Для ***замкнутой системы***, т.е. для системы на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр.}} = \text{const}$$

т.е. **полная механическая энергия** замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы, **остаётся постоянной**.

$$\vec{F} = -\nabla U\left(\vec{r}\right), \qquad m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla U\left(\vec{r}\right), \qquad m\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla U\left(\vec{r}\right)\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

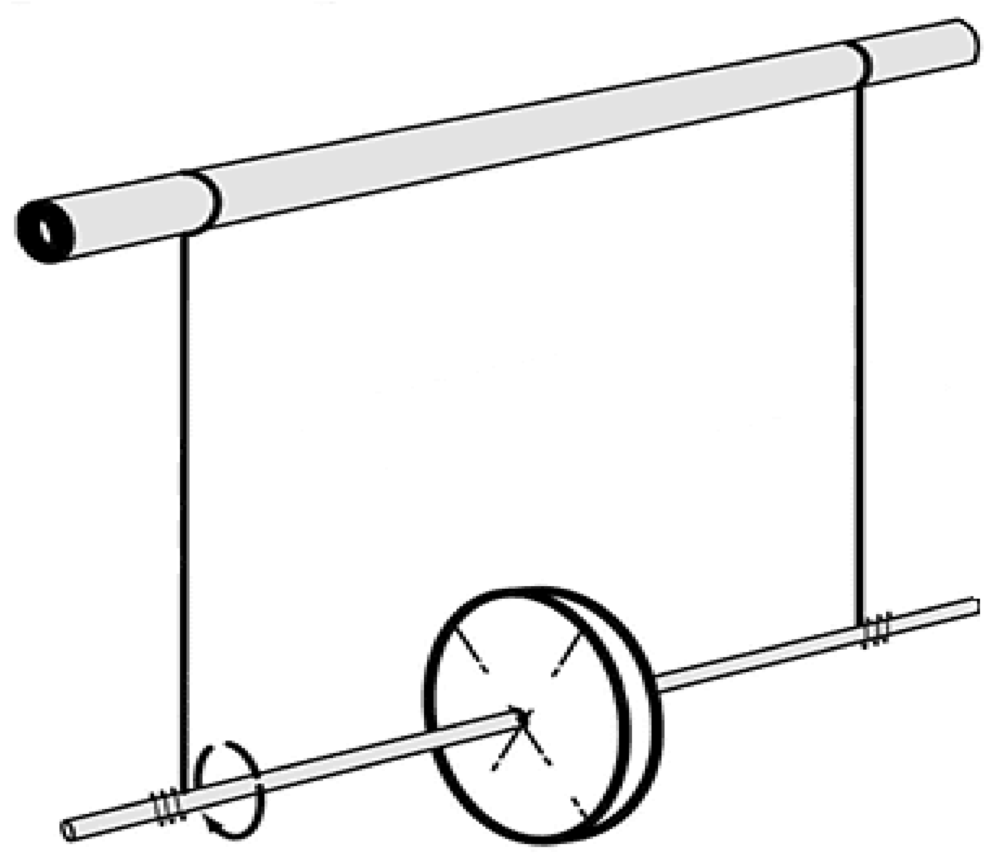
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r})\right] = 0.$$

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии – неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется **диссипативной**, сам процесс перехода называется **диссипацией энергии**.

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остаётся постоянной сумма всех видов энергии (механической, тепловой и т.д.) Здесь действует общий закон сохранения энергии.

Этот процесс хорошо демонстрирует маятник Максвелла.

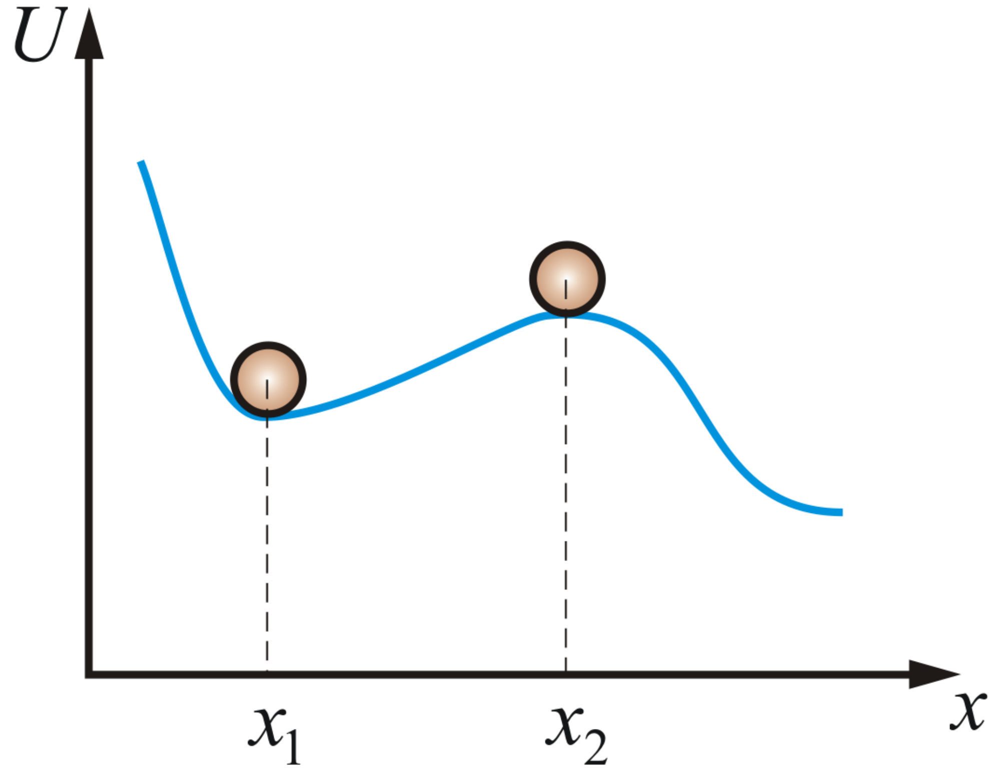


Условие равновесия механической системы

Механическая система будет находиться в ***равновесии****, если на неё не будет действовать сила*.

Это условие *необходимое*, но *недостаточное,* так как система может при этом находиться в равномерном и прямолинейном движении.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. Здесь, даже при отсутствии силы, положение в точке x_2 нельзя назвать **устойчивым равновесием**

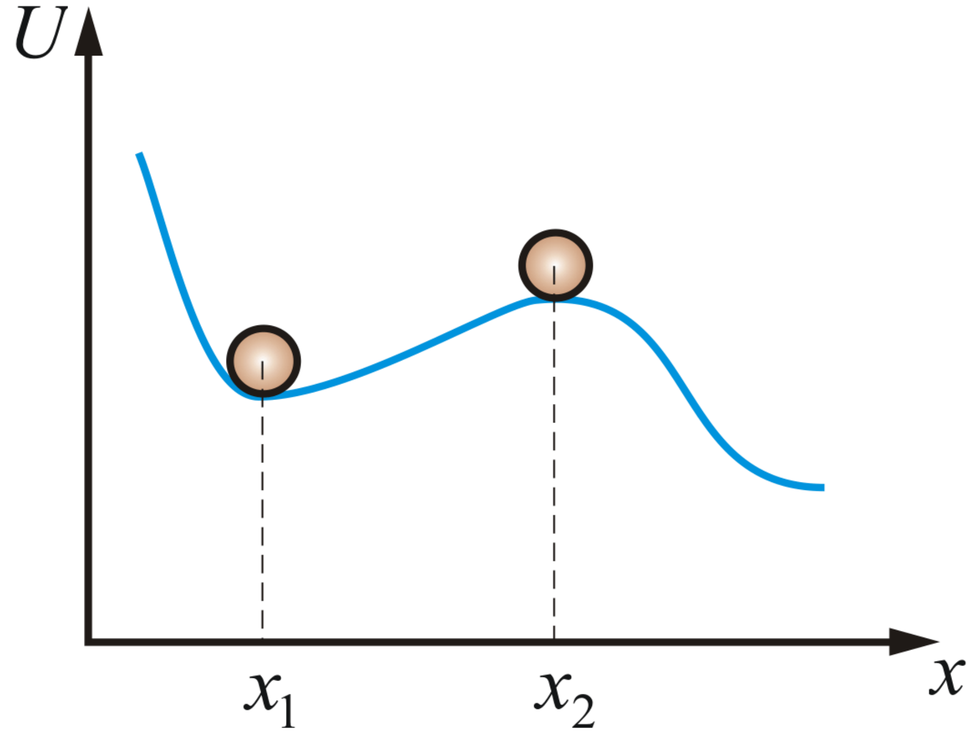


И так, по определению $F_x = 0$ – условие равновесия системы.

Мы знаем, что

$$\left|\vec{F}_x\right| = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

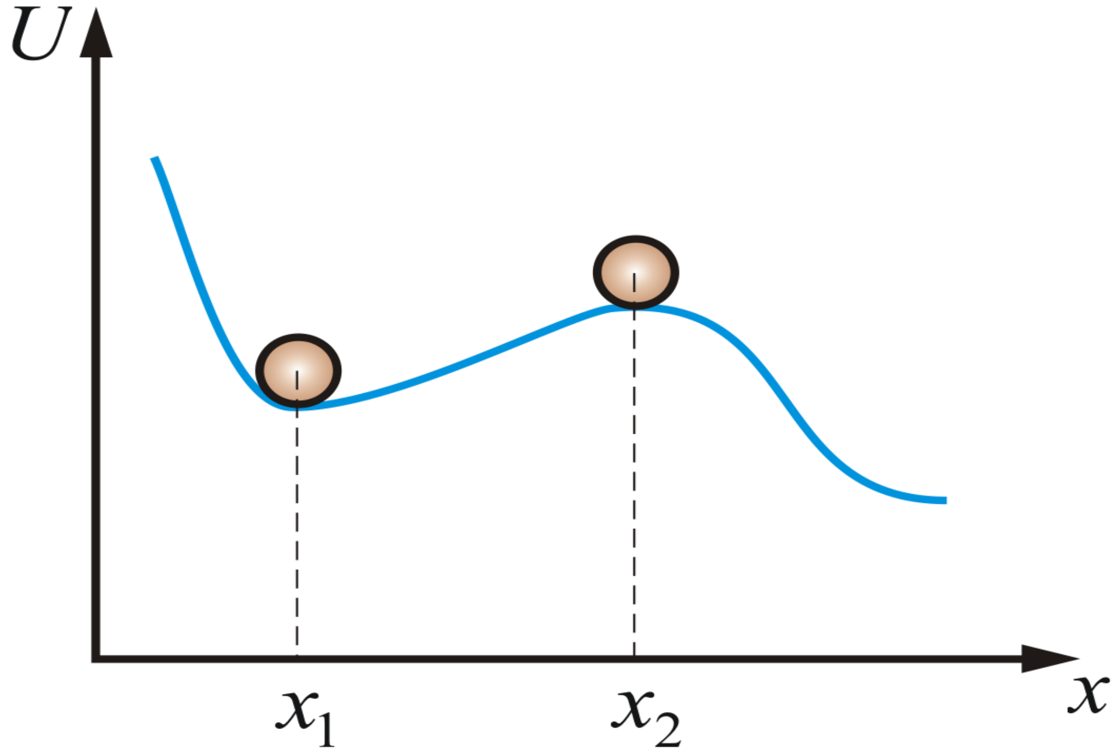
При $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0$ система будет находиться в состоянии равновесия



$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$ при $x = x_1$ и $x = x_2$,

При x_2, $U = \max$ – состояние неустойчивого равновесия.

При x_1, $U = \min$ – система находится в устойчивом равновесии.



Следовательно, ***достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения U*** (это справедливо не только для механической системы, но, например и для атома).

Применение законов сохранения
Абсолютно упругий центральный удар

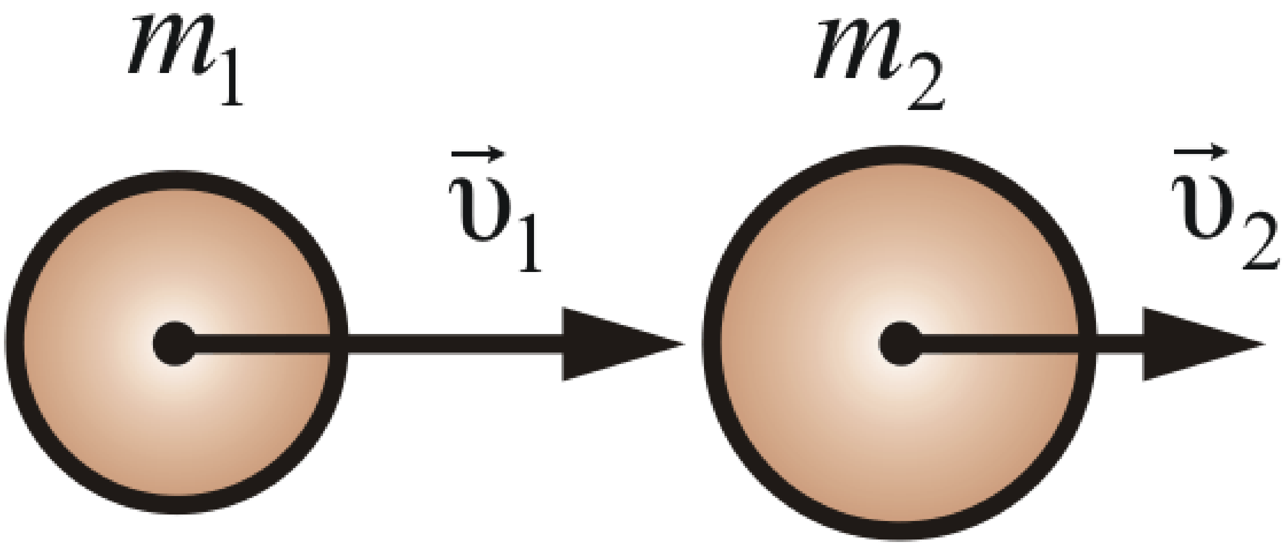
При абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при ***абсолютно упругом ударе*** – *это такой удар, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии*.

Удар частиц

Ударом точечных частиц называется такое механическое взаимодействие при **непосредственном контакте и за бесконечно малое время** при котором частицы обмениваются **энергией и импульсом** при условии, что система частиц остается замкнутой

Различают два вида ударов **абсолютно неупругий удар**
такой удар, при котором после удара частицы движутся как единое целое и **абсолютно упругий удар** удар, при котором после удара частицы движутся с различными скоростями и в течении удара выполняются законы сохранения (энергии и импульса)
Абсолютно упругий удар бывает двух типов
- нецентральный удар
- центральный удар



На рисунке изображены два шара m_1 и m_2. Скорости шаров $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$ (поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону все равно будет удар).

Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

Обозначим $\vec{\upsilon}'_1$ и $\vec{\upsilon}'_2$ – скорости шаров после их столкновения.

В данном случае можно воспользоваться ***законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса*** (в проекциях на ось *x*):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon'^2_1}{2} + \dfrac{m_2\upsilon'^2_2}{2} & \text{По ЗСЭ} \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon_2'. & \text{По ЗСИ} \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно υ'_1 и υ'_2 получим

$$\upsilon'_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2};$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Таким образом, скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми по величине и по направлению.

Рассмотрим теперь *абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку*.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с $\upsilon_2 = 0$ массой $m_2 \to \infty$

Разделим числитель и знаменатель на $\boldsymbol{m}_2$ и пренебрежем m_1 / m_2 тогда

$$\upsilon'_1 = \frac{2\upsilon_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\upsilon_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{2\upsilon_2 - \upsilon_1}{1},$$ т.е.

Т.к. $\upsilon_2 = 0$, то получим

$$\upsilon'_1 = -\upsilon_1$$

Таким образом, шар m_1 изменит скорость на *противоположную*.

.2. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар *– это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше, как единое целое.*

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости **до удара** υ_1 и υ_2 то используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость движения шаров **после удара**. Тогда:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы и скорости шаров равны, то

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} = 0$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе.

Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (***диссипация энергии***). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta K = \left(\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2}$$

Отсюда, получаем

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left(\upsilon_1 - \upsilon_2 \right)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно $\upsilon_2 = 0$ то

$$\upsilon = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $\upsilon << \upsilon_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.

Когда $m_2 \approx m_1$, тогда $\upsilon \approx \upsilon_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием ***диссипативных сил***.