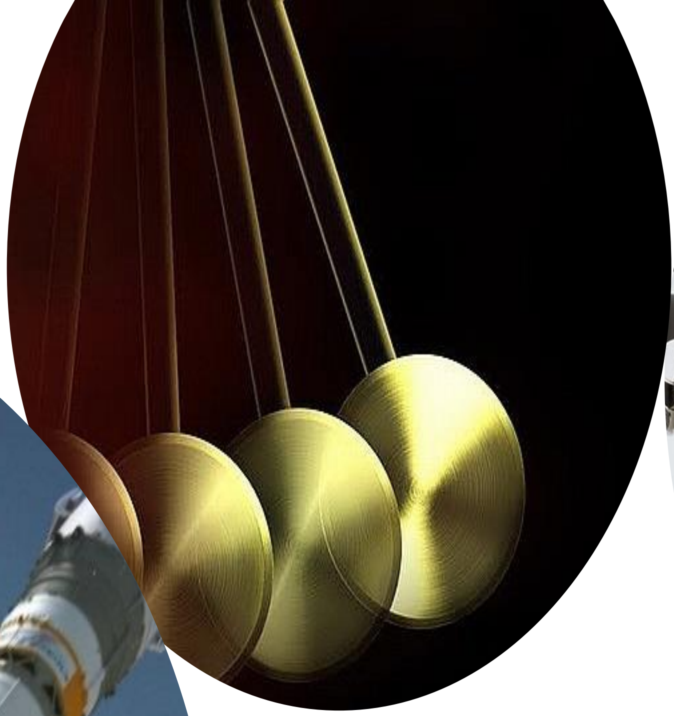


МЕХАНИКА

Лекция 6

Степени свободы твердого тела

Абсолютно твердое тело (ТТ) – неизменяемая система материальных точек, т.е. идеализированная система, при любых движениях которой расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.

Число независимых функций, которыми можно описать движение СМТ, называется *числом ее степеней свободы*.

N материальных точек $\rightarrow$ $3N$ степеней свободы

На $3N$ координат налагаются дополнительные условия – связи. Для однозначного определения положения всех МТ достаточно знать меньшее число координат f. Остальные $3N$-f координат вычисляются из уравнений связи.
Для этих целей могут быть использованы не только f обычных координат, но и f любых величин q_1, q_2, …, q_f , заданием которых положение МТ определяется однозначно. Такие величины называются *обобщенными координатами*.

Идеально твердое тело, если на его движение не наложены никакие ограничения, обладает <u>шестью</u> степенями свободы.

Кинематика твердого тела

При *поступательном движении* скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы. Любая прямая, проведенная между какими-либо точками тела, перемещается параллельно самой себе.
<u>Поступательно движущееся тело имеет 3 степени свободы.</u>

Плоским называется движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. <u>Число степеней свободы равно трем</u>.

Вращательное движение – движение, при котором две точки тела остаются все время неподвижным.
Прямая, проходящая через эти точки, называется *осью вращения*.
Все точки ТТ, лежащие на оси вращения, неподвижны. Другие точки ТТ движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.
Вращательное движение является плоским.

Движение твердого тела

В плоском движении положение ТТ полностью определяется положением отрезка прямой, жестко связанно с точками тела.

Перемещение этого отрезка можно разложить на:

а) поступательное движение, при которой прямая перемещается параллельно самой себе;

б) вращательное движение, при котором ТТ поворачивается на угол α.

Разложение перемещения на поступательное и вращательное неоднозначно, но угол поворота α при перемещении один и тот же.

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \left[\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}\right]$$

Изменяя поступательную скорость, мы одновременно изменяем положение оси вращения. Любая ось, перпендикулярная плоскости движения, является осью вращения.

Ось вращения, для которой поступательная скорость равна нулю, называется мгновенной осью вращения.

С течением времени положение оси вращения меняется относительно тела и системы координат.

Движение центра масс твердого тела

Центром масс (центром инерции) СМТ называется точка *C*, положение которой задается радиус-вектором $\mathbf{r}_c$:

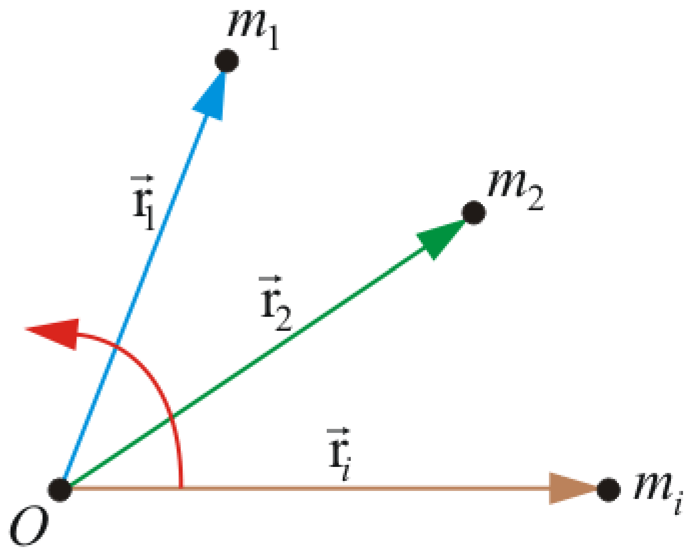
$$\vec{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{\sum m_i}$$

Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил:

$$m\vec{\mathbf{a}}_c = \sum \vec{\mathbf{F}}_{i\,внешн}$$

Динамика вращательного движения твердого тела относительно точки

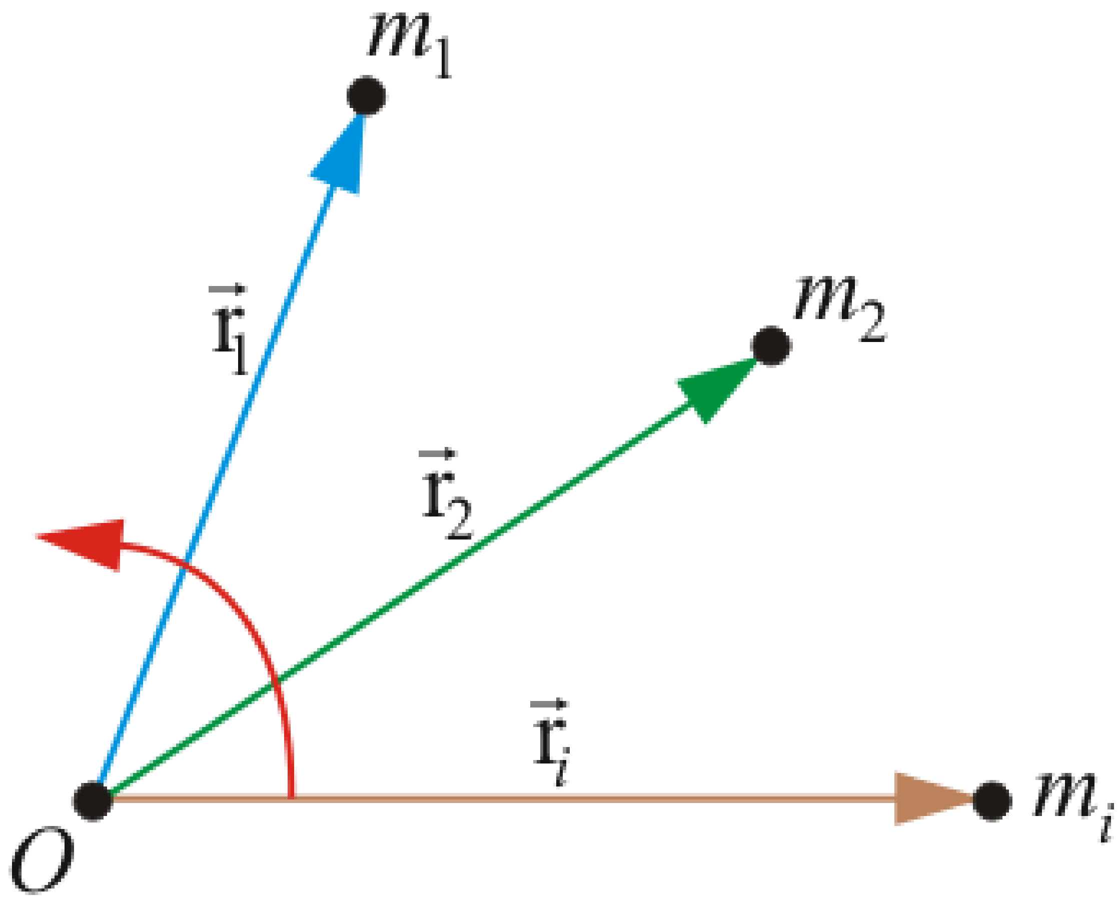
Рассмотрим твердое тело, как некую систему (рис.), состоящую из n точек (m_1 m_2 … m_n); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-ой точки, проведенный из точки O – центра неподвижной инерциальной системы отсчета.



Обозначим $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i-ю точку, $\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны k-ой точки на i-ю.

Запишем основное уравнение динамики для точки:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\vec{\mathrm{F}}_{ik}+\vec{\mathrm{F}}_i.$$



Умножим обе части векторно на $\vec{\mathrm{r}}_i$

$$\vec{\mathrm{r}}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \sum_k \vec{\mathrm{F}}_{ik}\right] + \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_i\right].$$

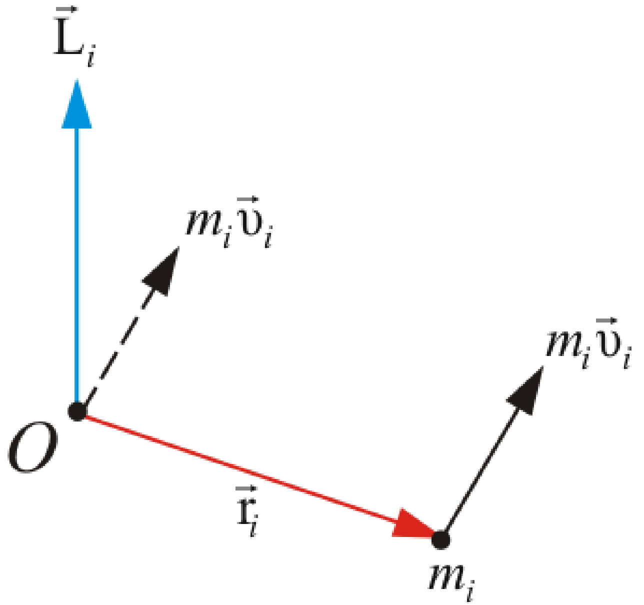
Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathrm{r}}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i\right] = \sum_k \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_{ik}\right] + \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_i\right].$$

Векторное произведение $\vec{r}_i$ точки на её импульс называется **моментом импульса** $\vec{L}_i$ *этой точки относительно точки О*.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i].$$

Эти три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика»:

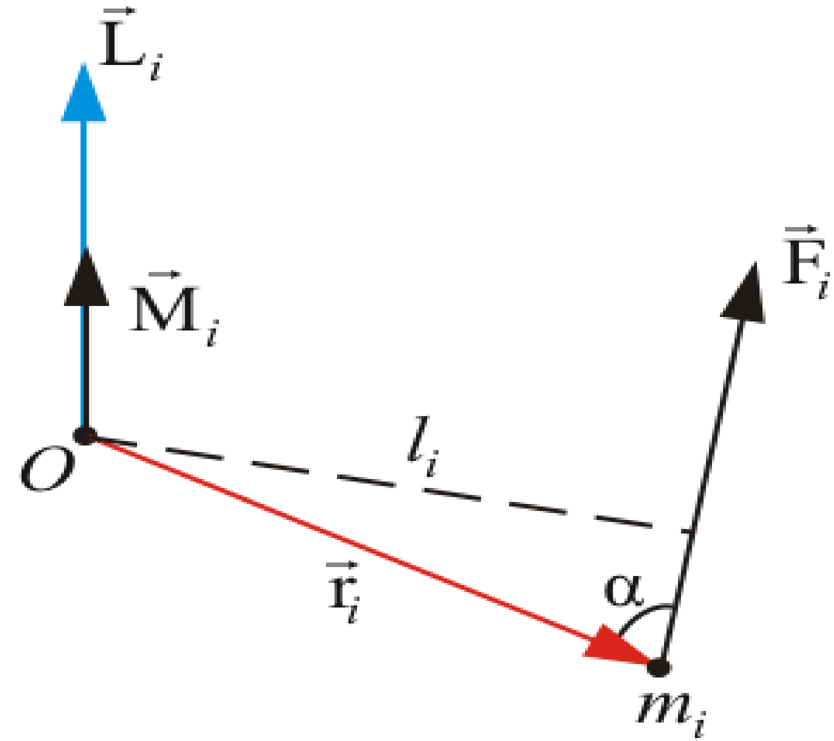


Векторное произведение $\vec{r}_i$ проведенного в точку приложения сил, на эту силу называется ***моментом силы*** $\vec{M}_i$:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i],$$

Обозначим l_i – плечо силы F_i, . Т.к.

$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$$



то:

$$\left|\vec{M}_i\right| = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i,$$

С учетом новых обозначений:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{M}}_{ik} + \vec{\mathrm{M}}_i$$

Запишем систему *n* уравнений для всех точек системы и сложим, левые и правые части уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{M}}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{M}}_i.$$

Так как $\vec{\mathrm{F}}_{ik} = -\vec{\mathrm{F}}_{ki}$ то $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{M}}_{ik} = 0.$

Здесь сумма производных равна производной суммы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

где $\vec{L}$ – ***момент импульса системы***,

$\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил относительно точки *О*.

Окончательно получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки.

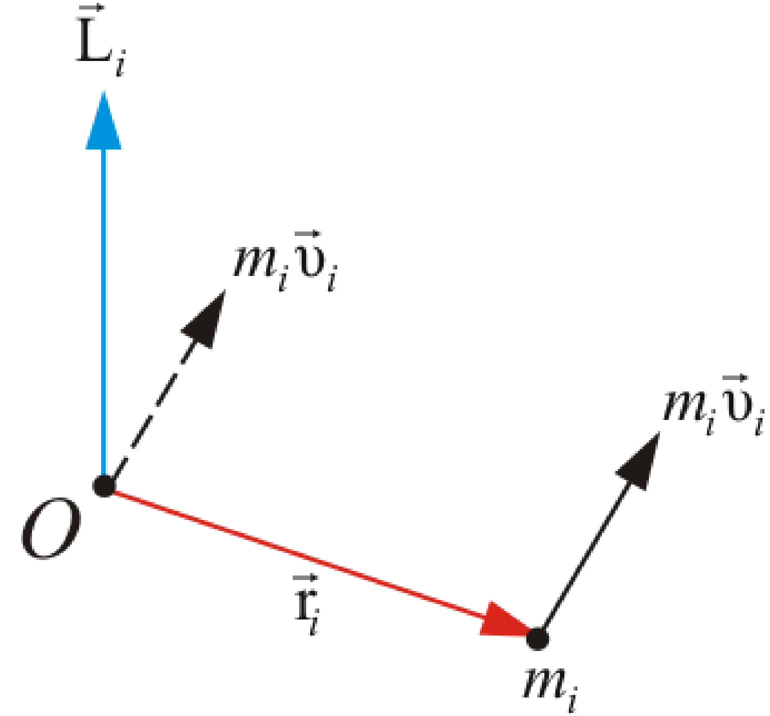
Момент импульса системы $\vec{L}$ является основной динамической характеристикой вращающегося тела.

Основное уравнение динамики поступательного движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i].$$

Или $$\vec{\mathbf{L}} = [\vec{\mathbf{r}} \times \vec{p}].$$



$$\vec{\mathbf{L}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = [\vec{\mathbf{r}} \times \vec{p}].$$

Здесь **L** – трехмерный момент импульса относительно центра вращения *O*.

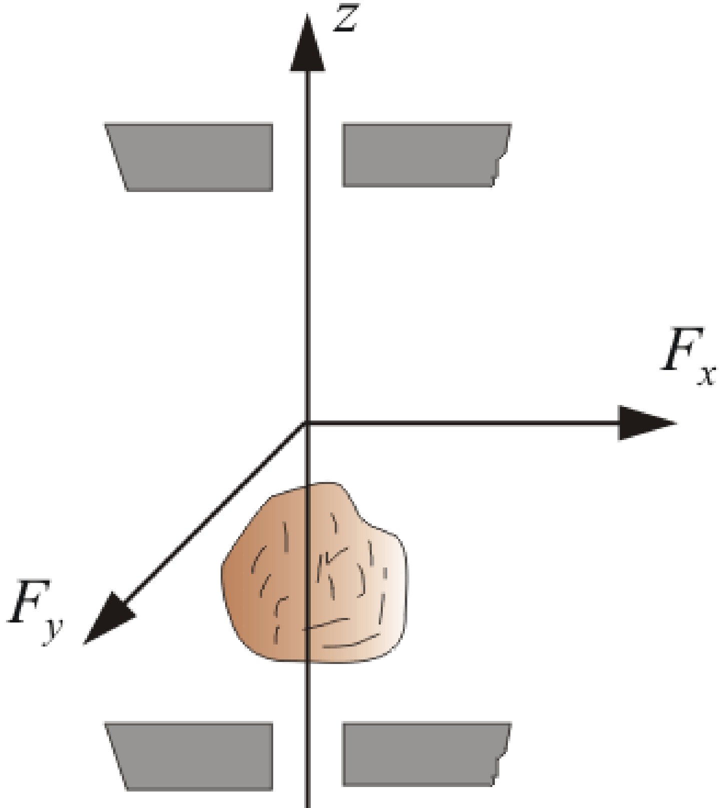
Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

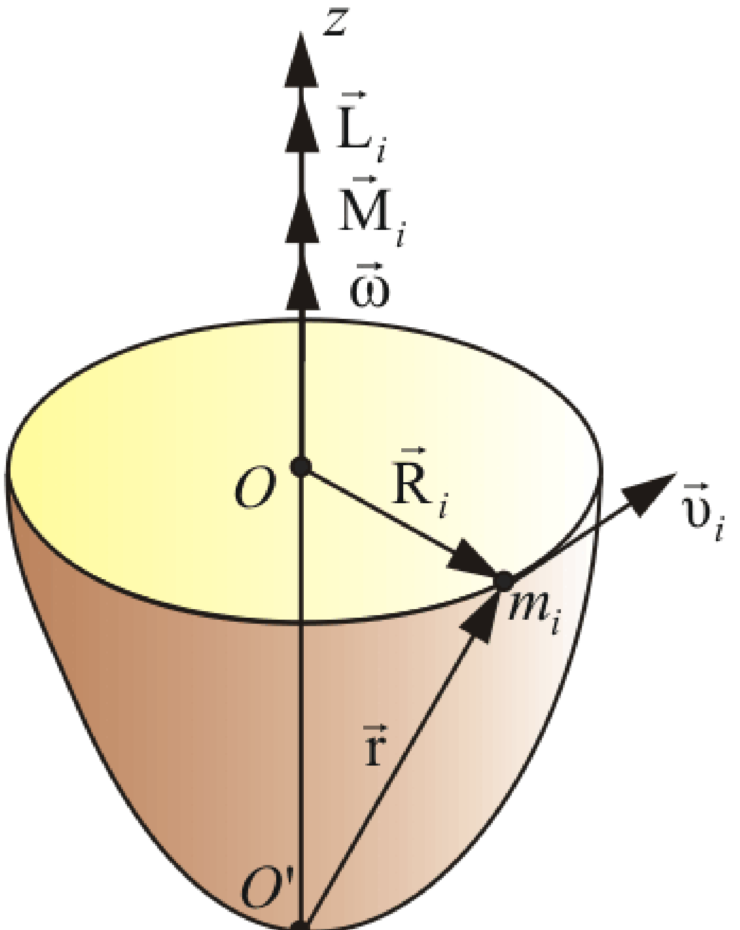
Вычислить вектор $\vec{L}$ – момент импульса системы относительно произвольной точки не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (z)

В этом случае составляющие $\vec{M}$ – момента внешних сил, направленные вдоль *x* и *y*, *компенсируются моментами сил реакции закрепления*.

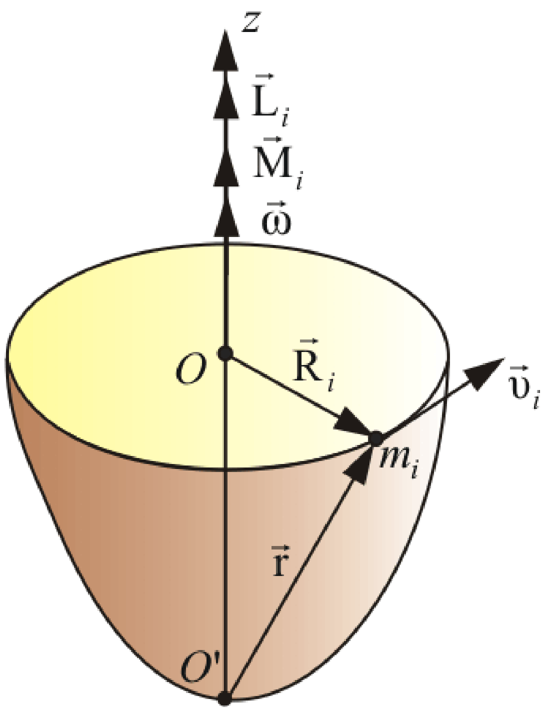
Вращение вокруг оси *z* происходит только под действием $\vec{M}_z$





Пусть некоторое тело вращается вокруг оси *z* Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела находящегося на расстоянии R_i от оси вращения.

При этом помним, что $\vec{L}_z$ и $\vec{M}_z$ направлены всегда вдоль оси вращения *z*, поэтому в дальнейшем опустим значок *z*.



$$\boxed{\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\vec{R}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i] = \vec{M}_i}$$

Так как $\vec{\upsilon}_i$ у всех точек разная, введем, вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, причем

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}.$$

Тогда

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{\mathrm{M}}_i}$$

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда:

$$\boxed{m_i R_i^2 \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}}_i .}$$

Обозначим ***I_i – момент инерции*** *точки* находящейся на расстоянии *R* от оси вращения:

$$\boxed{I_i = m_i R_i^2.}$$

Так как тело состоит из огромного количества точек и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения, то ***момент инерции тела равен:***

$$\boxed{I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m,}$$

где *R* – расстояние от оси *z* до d*m.*

Как видно, момент инерции *I* – величина скалярная.

Просуммировав по всем *i*-ым точкам, получим

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M} \qquad \boxed{I\vec{\varepsilon}=\vec{M}}$$

Это **основное уравнение динамики тела вращающегося вокруг неподвижной оси**.

Основное уравнение динамики поступательного движения тела.

$$m\vec{a}=\vec{F}$$

$$I d\vec{\omega}=\vec{M}dt; \qquad I d\vec{\omega}=d\vec{L}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

где $\vec{L}$ – ***момент импульса*** тела вращающегося вокруг оси *z*

(для поступательного движения $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$).

При этом помним, что $\vec{L}$ и $\vec{M}$ динамические характеристики вращательного движения направленные всегда вдоль оси вращения..

Основные характеристики вращательного движения

формулы для **одной точки**
вращающегося твердого тела

$$\vec{L}_i\Big|_{z} = J_{iz}\omega$$ **Момент импульса**

$$\vec{M}_i\Big|_{z} = J_{iz}\varepsilon$$ **Момент силы**

$$J_{iz} = m_i r_i^2$$ **Момент инерции**

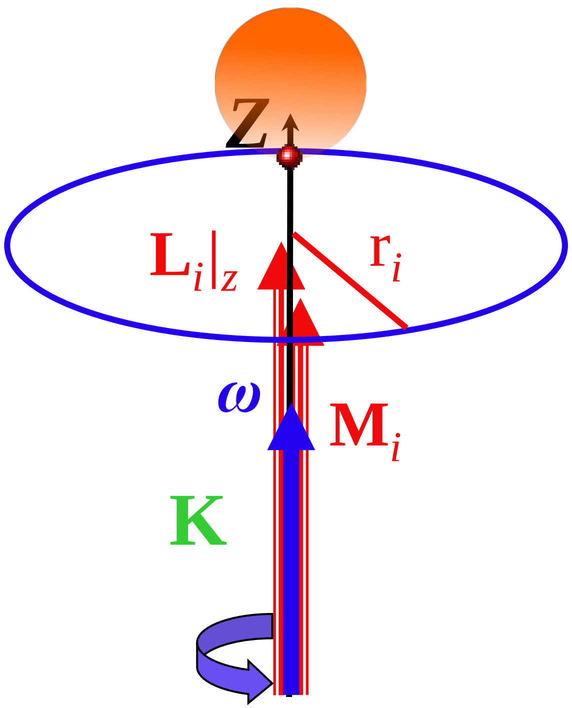
Суммируя по* всему телу, *получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\Big|_{z} = J_z\omega$$ **Момент импульса твердого тела**

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i\Big|_{z} = J_z\varepsilon$$ **Момент силы твердого тела**

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} J_{iz}$$ **Момент инерции твердого тела**

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела



Расчет моментов инерции некоторых простых тел.

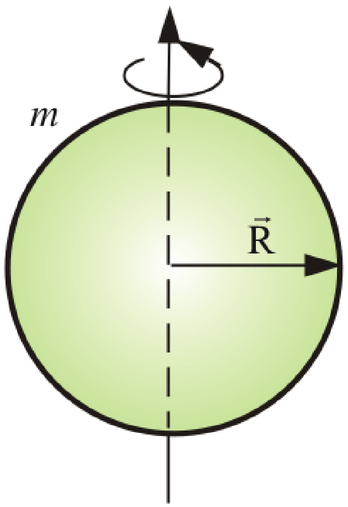
По формуле $I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m$ не всегда просто удается рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

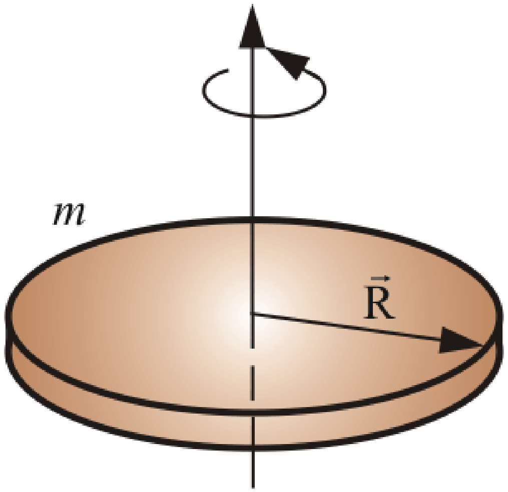
$$\boxed{I_c = kmR^2}$$

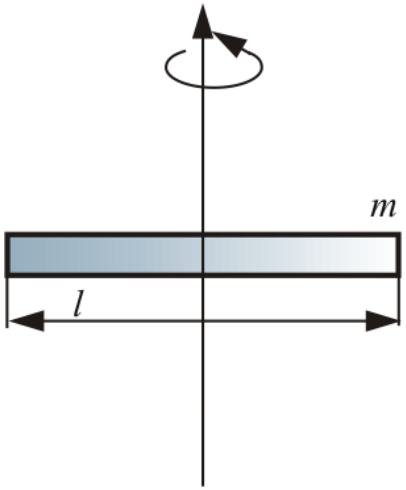
Наиболее легко эта задача решается **для тел простых форм**, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции тела $\boldsymbol{I_c}$.

В этом случае $\boldsymbol{I_c}$ вычисляется по формуле:

Моменты инерции **шара, сферы, диска, обруча и стержня** приведены







Шар

$$k = 2/5;$$

$$I_c = 2/5 \cdot m \cdot R^2;$$

Диск

$$k = 1/2;$$

$$I_c = 1/2 \cdot m \cdot R^2;$$

Стержень

$$k = \frac{1}{12}$$

Сфера

$$I_c = 2/3 \cdot m \cdot R^2;$$

Обруч

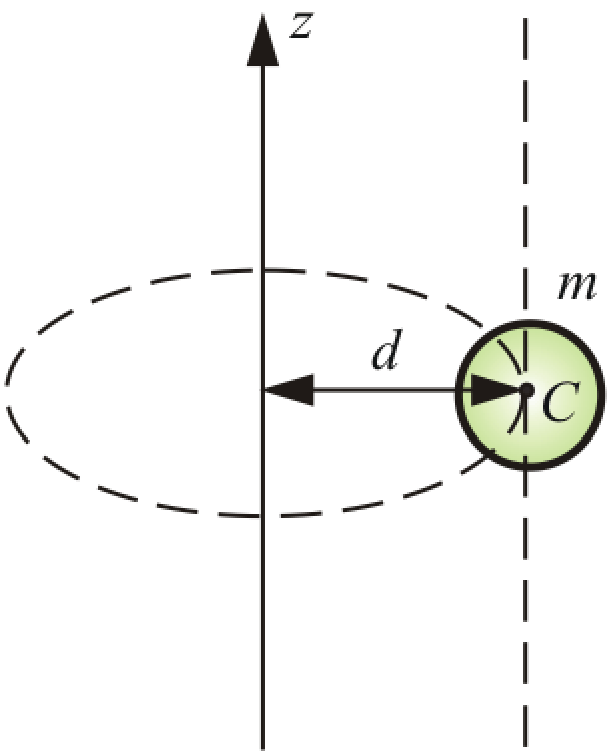
$$I_c = m \cdot R^2$$

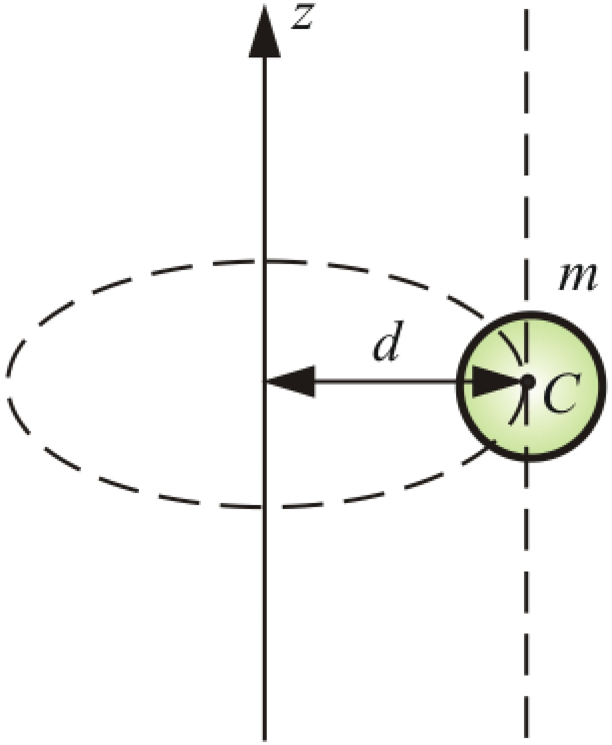
$$I_c = \frac{1}{12} m l^2$$

Теорема Штейнера

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции, следует пользоваться ***теоремой о параллельном переносе осей или теоремой Штейнера*** (*Якоб Штейнер, швейцарский геометр* 1796 – 1863 гг.).

$$I = I_c + md^2$$

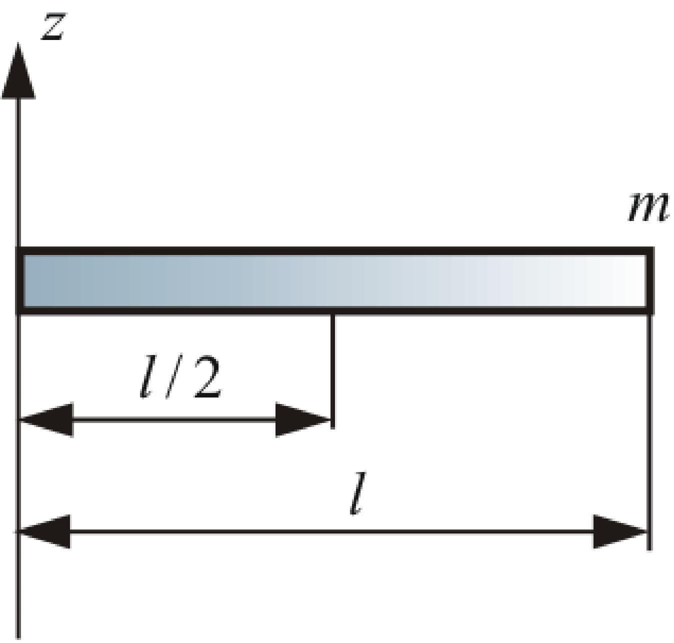




Теорема Штейнера

$$\boxed{I = I_c + md^2}$$

Момент инерции тела относительно любой оси вращения равен моменту его инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



Пример: стержень массой *m*, длиной *l*, вращается вокруг оси, проходящей через конец стержня.

$$I_c = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех *n* материальных точек, на которое это тело можно мысленно разбить:

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_{\mathrm{i}}^2}{2}.}$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси *z* с угловой скоростью $\vec{\omega}$ то линейная скорость *i*-й точки $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} R_i$

Следовательно, $$K_{\text{вращ.}} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

$$\boxed{K_{\text{вращ.}} = \frac{I\omega^2}{2}.}$$

Момент инерции тела I – является мерой инертности при вращательном движении. Так же как масса *m* – мера инерции ***при поступательном движении***.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде ***суммы двух движений – поступательного со скоростью*** υ_c ***и вращательного с угловой скоростью*** ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. ***Полная кинетическая энергия этого тела:***

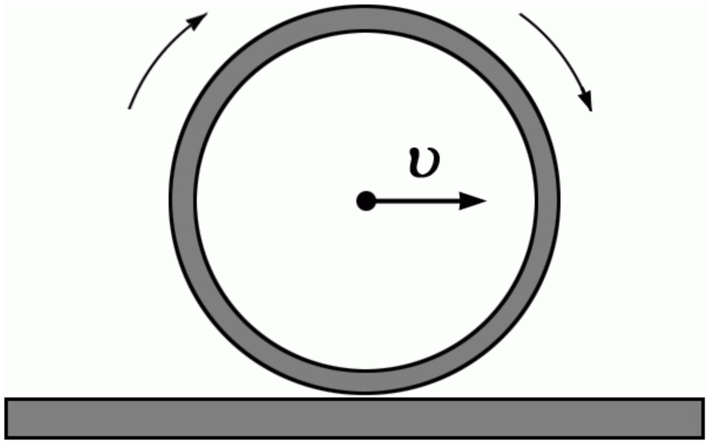
$$\boxed{K_{\text{полн.}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}}$$

Здесь I_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

Пример: Скорость центра масс обруча равна *v*, масса обруча *m*. Определим его кинетическую энергию при движении по горизонтальной поверхности.

Имеем

$$K_{\text{полн}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv'^2_{\text{обод}},$$



$v'_{\text{обод}}$ – линейная скорость обода.

Для наблюдателя, движущегося вместе с центром обруча, скорость точки соприкосновения обруча с плоскостью равна *v*. Поэтому $v'_{\text{обод}} = v$.

Таким образом, $K_{\text{полн}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$.

Закон сохранения момента импульса

Для **замкнутой** системы тел момент внешних сил ***всегда равен нулю***, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}} \equiv 0$$

$$\vec{\mathrm{L}} = \mathrm{const}, \qquad I\vec{\omega} = \mathrm{const}$$

Закон сохранения момента импульса

Закон сохранения момента импульса *– момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки* ***не изменяется*** *с течением времени.*

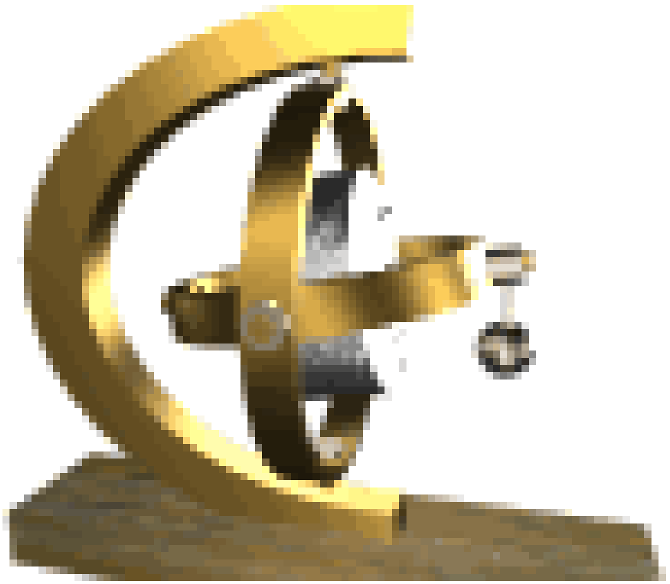
Это один из фундаментальных законов природы.

Аналогично для замкнутой системы вращающихся вокруг оси *z*:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}}_z \equiv 0,$$ отсюда $$\vec{\mathrm{L}}_z = \mathrm{const}$$ или

$$I_z\vec{\omega} = \mathrm{const}$$

Уравновешенный гироскоп – быстро вращающееся тело, имеющее три степени свободы



Используется гироскоп в различных навигационных устройствах кораблей, самолетов, ракет (гирокомпас, гирогоризонт).

Поступательное движение | **Вращательное движение**

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega \mathrm{d}t$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$m\vec{\upsilon} = \mathrm{const} \qquad I\vec{\omega} = \mathrm{const}$$

$$A = FS \qquad A = M\varphi$$

$$N = F\upsilon \qquad N = M\omega$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + mgh = \mathrm{const} \qquad \frac{I\omega^2}{2} + mgh = \mathrm{const}$$