ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Решение задач дискретного линейного программирования методом Гомори

5.1. Цель и задачи работы.

Цель работы – изучение метода Гомори и построение алгоритмов решения целочисленных и частично целочисленных задач дискретного линейного программирования. Проверка теоретических положений при помощи численного эксперимента.

Задачи работы:

– Освоение основных понятий дискретного линейного программирования.

– Изучение и практическое освоения метода сечений Гомори.

5.2. Краткие теоретические сведения.

Утверждения Гомори

Утверждение 1.

Если $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ – оптимальный план ослабленной основной задачи линейного программирования, то дополнение к ограничениям (9) неравенств

$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$	**Сечение Гомори 1-го рода**

где a_{ij} , b_i – элементы последней симплексной таблицы

а) исключит X из области допустимых планов ослабленной задачи;

б) сохранит в области допустимых планов ослабленной задачи все целочисленные планы.

Утверждение 2.

Если $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m,},0,\ldots,0)$ – оптимальный план основной задачи линейного программирования, то дополнение к ограничениям этой задачи неравенств

$\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_j \geq \{b_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$	**Сечение Гомори 2-го рода**

где,

если x_j - не должно удовлетворять требованию целочисленности

$\gamma_{ij} = a_{ij}$	при $a_{ij} \geq 0$
$\gamma_{ij} = \{ b_i\} \| a_{ij} \| / (1- \{ b_i\})$	при $a_{ij} < 0$

если x_j - должно удовлетворять требованию целочисленности

$\gamma_{ij} = \{a_{ij}\}$	при $\{a_{ij}\} \geq \{b_i\}$
$\gamma_{ij} = \{ b_i\} (1 - \{a_{ij}\}) / (1- \{ b_i\})$	при $\{a_{ij}\} < \{b_i\}$

а) исключит X из области допустимых планов ослабленной задачи;

б) сохранит в области допустимых планов все планы, удовлетворяющие условию целочисленности.

Алгоритм нахождения оптимального плана основной целочисленной (частично целочисленной) задачи линейного программирования методом Гомори.

1. Нахождение симплексным методом оптимального плана или установление неразрешимости ослабленной (без условия целочисленности) задачи линейного программирования. Если задача неразрешима, то конец работы алгоритма с сообщением о неразрешимости целочисленной (частично целочисленной) задачи.
2. Проверка оптимального плана ослабленной задачи на удовлетворение условию целочисленности. Если условие выполнено, то данный план является оптимальным планом целочисленной (частично целочисленной) задачи, а, значит, прекращение работы алгоритма.
3. Составление дополнительного ограничения (сечения Гомори 1-го или 2-го рода) для переменной, которая в оптимальном плане имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане целочисленной (частично целочисленной) задачи должна быть целой.
4. Преобразование сечения Гомори из неравенства в равенство за счет введения дополнительной переменной.
5. Решение (установление неразрешимости) полученной новой ослабленной задачи двойственным симплексным методом. Если задача неразрешима, то конец работы алгоритма с сообщением о неразрешимости целочисленной (частично целочисленной) задачи, иначе – переход на п.2.

5.3. Варианты заданий.

№ варианта	Целевая функция	Ограничения
1	$F=x_1+x_2$ max	$x_1+2x_2\le 10{,}5$ $x_1-3x_2\ge 6{,}2$ $x_1, x_2\ge 0$ $\{x_1\},\{x_2\}=0$
2	$F=x_1-x_2$ max	$3x_1+2x_2\le 8{,}2$ $x_1+4x_2\le 10{,}5$ $x_1, x_2\ge 0$ $\{x_1\},\{x_2\}=0$
3	$F=x_1+2x_2$ max	$x_1\le 5{,}5$ $3x_1+2x_2\le 20{,}2$ $x_1, x_2\ge 0$ $\{x_1\},\{x_2\}=0$
4	$F=3x_1+4x_2$ (max)	$3x_1+2x_2\le 12{,}5$ $x_1+3x_2\le 6{,}5$ $x_1, x_2\ge 0,$ $\{x_1\},\{x_2\}=0$

5	$F=3x_1 - x_2$ (max)	$x_1 + 4x_2 \le 6{,}5$ $x_1 + 5x_2 \le 4{,}4$ $x_1 , x_2 \ge 0,$ $\{ x_1 \},\{ x_2 \}=0$
6	$F=2x_1 + x_2$ (min)	$3x_1 + 2x_2 \ge -2{,}5$ $x_1 + x_2 \ge 6{,}5$ $x_1 , x_2 \ge 0,$ $\{ x_1 \},\{ x_2 \}=0$
7	$F=x_1 – 3x_2$ (min)	$3x_1 + 2x_2 \ge -5{,}2$ $x_1 + 2x_2 \ge 1{,}8$ $x_1 , x_2 \ge 0,$ $\{ x_1 \},\{ x_2 \}=0$
8	$F=x_1 - x_4$ min	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 =5$ $x_2 + x_3 + x_4 - x_5=2$ $x_3 - x_4 + x_5 =1$ $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \ge 0$ $\{ x_1 \},\{ x_4 \}=0$
9	$F=2x_1 +3x_3 - x_4$	$x_1 + x_2 + x_3 =15$ $x_2 +2 x_3 =2$

	max	$x_3 - x_4 = 1$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $\{x_4\} = 0$
10	$F = -x_1 + 4x_2$ *min*	$x_1 + 7x_2 \geq 8$ $11x_2 - 4x_3 \leq 10$ $-7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\{x_1\} = 0$
11	$F = x_1 - 2x_3$ *max*	$2x_1 + x_2 \geq 5$ $x_2 - 3x_3 \leq 10$ $-3x_1 + x_2 + x_3 = 5$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
12	$F = x_1 + x_3$ *min*	$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$ $x_1 + x_2 \geq 2$ $x_2 - x_3 \leq 5$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\{x_2\}, \{x_3\} = 0$

14	$F=2x_1 + 5x_2$ (max)	$3x_1 + x_2 \leq 3{,}5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2{,}4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{ x_1 \},\{ x_2 \}=0$
15	$F=2x_1 + 5x_2$ (max)	$3x_1 + x_2 \leq 3{,}5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2{,}4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{ x_1 \},\{ x_2 \}=0$

5.4. Содержание отчета.

1. Описание метода сечений Гомори.
2. Текст программы.
3. Промежуточные результаты выполнения алгоритма
4. Таблица результатов.
5. Геометрическая интерпретация результатов.
6. Сравнение с решением, полученным при помощи таблиц EXCEL.

5.5. Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается основная идея метода Гомори?
2. В каких случаях применяется сечение Гомори 1-го рода, а в каких – 2-го рода?
3. Может ли быть решена целочисленная задача линейного программирования с использованием только сечений Гомори 1-го рода?
4. Как может повлиять погрешность вычислений на процесс нахождения оптимального плана целочисленной (частично целочисленной) задачи?
5. В каких случаях целочисленная (частично целочисленная задача) линейного программирования не имеет решения?