

## **ТЕМА III. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

### **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6.**

**Тема: Сведение транспортных задач с дополнительными  
ограничениями к закрытым моделям. Построение опорных  
планов транспортной задачи**

#### **6.1. Цель и задачи работы.**

**Цель работы** – изучение математических постановок и методов исследования транспортных задач линейного программирования. Проверка теоретических положений при помощи численного эксперимента.

**Задачи работы:**

- Освоение основных понятий теории транспортных задач линейного программирования.
- Изучение и практическое освоения методов сведения транспортных задач к закрытым моделям.
- Изучение и практическое освоения методов построения опорных планов закрытых транспортных задач.

#### **6.2. Краткие теоретические сведения.**

Пример содержательной постановки транспортной задачи.

Традиционная содержательная постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из  $m$  пунктов отправления (от  $m$  поставщиков)  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  в  $n$  пунктов

назначения ( $n$  потребителям)  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ . При этом в качестве критерия оптимальности взята минимальная общая стоимость перевозок всего груза.

Введем обозначения:

$c_{ij}$  – тариф перевозки единицы груза из пункта отправления  $A_i$  в пункт назначения  $B_j$  ( $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ );

$a_i$  – запас груза в пункте отправления  $A_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ );

$b_j$  – потребность в грузе в пункте назначения  $B_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ );

$x_{ij}$  – количество единиц груза, перевозимого из пункта отправления  $A_i$  в пункт назначения  $B_j$  ( $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ ).

### Математическая постановка транспортной задачи.

В рамках принятых обозначений математической моделью данной содержательной постановки задачи будет математическая задача определения минимального значения целевой функции  $F$  (общих затрат на перевозку груза)

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\dots,m)$$

(суммарное количество груза, вывезенного во все пункты назначения из пункта отправления  $A_i$ , равно  $a_i$  – запасу груза в этом пункте),

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

(суммарное количество груза, ввезенного из всех пунктов отправления в пункт назначения  $B_j$ , равно  $b_j$  – потребности в грузе в этом пункте),

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n).$$

(обратные перевозки от потребителей к поставщикам запрещены).

**Определение 6.1.** Рассмотренная математическая задача называется *транспортной задачей* линейного программирования.

Обычно данные транспортной задачи записывают в виде таблицы планирования:

| Пункты<br>отправ<br>л. | Пункты назначения    |                      |     |                      |     |                      | Запас<br>ы |
|------------------------|----------------------|----------------------|-----|----------------------|-----|----------------------|------------|
|                        | $B_1$                | $B_2$                | ... | $B_j$                | ... | $B_n$                |            |
| $A_1$                  | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | $c_{12}$<br>$x_{12}$ | ... | $c_{1j}$<br>$x_{1j}$ | ... | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$      |
| $A_2$                  | $c_{21}$<br>$x_{21}$ | $c_{22}$<br>$x_{22}$ | ... | $c_{2j}$<br>$x_{2j}$ | ... | $c_{2n}$<br>$x_{2n}$ | $a_2$      |
| ...                    | ...                  | ...                  | ... | ...                  | ... | ...                  | ...        |
| $A_i$                  | $c_{i1}$<br>$x_{i1}$ | $c_{i2}$<br>$x_{i2}$ | ... | $c_{ij}$<br>$x_{ij}$ | ... | $c_{in}$<br>$x_{in}$ | $a_i$      |
| ...                    | ...                  | ...                  | ... | ...                  | ... | ...                  | ...        |
| $A_m$                  | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $c_{m2}$<br>$x_{m2}$ | ... | $c_{mj}$<br>$x_{mj}$ | ... | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$      |
| Потреб<br>-<br>ности   | $b_1$                | $b_2$                | ... | $b_j$                | ... | $b_n$                |            |

**Определение 6.2.** Всякое решение системы ограничений транспортной задачи  $X=(x_{ij})$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,n$ ), удовлетворяющее условию неотрицательности переменных, называется планом транспортной задачи линейного программирования (планом перевозок).

**Определение 6.3.** Всякое базисное решение системы ограничений транспортной задачи  $X=(x_{ij})$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,n$ ), удовлетворяющее условию неотрицательности переменных, называется опорным планом транспортной задачи линейного программирования.

**Определение 6.4.** План  $X^*=(x_{ij}^*)$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,n$ ), при котором целевая функция  $F$  достигает своего минимального значения, называется оптимальным планом транспортной задачи.

**Замечание.** Иногда в математической постановке транспортной задачи первое ограничение имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i=1,2,\dots,m),$$

что в содержательном плане соответствует случаю, когда допускается возможность неполного вывоза груза из пунктов отправления. Нетрудно видеть, что такая постановка задачи может быть сведена к рассмотренной выше постановке путем введения дополнительного фиктивного пункта назначения  $B_{n+1}$ , который характеризуется потребностью в грузе

$$b_{m+1} = \left( \sum_{i=1}^m a_i \right) - \left( \sum_{j=1}^n b_j \right) \text{ и тарифами перевозок } c_{in+1} = 0 \quad (i=1,2,\dots,m).$$

**Определение 6.5.** Если общая потребность в грузе в пунктах отправления равна суммарному запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\left( \sum_{i=1}^m a_i \right) = \left( \sum_{j=1}^n b_j \right)$$

то модель транспортной задачи называется закрытой. В случае если данное соотношение не выполняется, то модель называется открытой.

### **Теорема 6.1. (О существовании решения транспортной задачи)**

Для разрешимости транспортной задачи линейного программирования необходимо и достаточно чтобы ее модель была закрытой.

**Замечание.** Доказательство необходимости данного условия проводится от противного. При доказательстве достаточности этого условия сначала строится один из планов, чтобы показать, что множество планов закрытой модели транспортной задачи не пусто. Затем показывается ограниченность целевой функции транспортной задачи, что дает возможность использования

классической теоремы о достижении непрерывной ограниченной функции на замкнутом множестве своего минимального и максимального значения.

Теорема 6.1. однозначно дает критерий существования решения транспортной задачи, ограничивая класс задач, подлежащих дальнейшему рассмотрению, закрытыми моделями. Если же содержательная постановка задачи приводит к построению открытой модели транспортной задачи, то она может быть формально сведена к закрытой модели следующим образом:

Если  $(\sum_{i=1}^m a_i) > \sum_{j=1}^n b_j$ , то вводится фиктивный  $(n+1)$ -й пункт назначения  $B_{n+1}$

с потребностью  $b_{n+1} = (\sum_{i=1}^m a_i) - (\sum_{j=1}^n b_j)$  и тарифами перевозок  $c_{i n+1} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), т.к. фактически перевозок производиться не будет.

Если  $(\sum_{i=1}^m a_i) < \sum_{j=1}^n b_j$ , то вводится фиктивный  $(m+1)$ -й пункт отправления

$A_{m+1}$  с запасом  $a_{m+1} = (\sum_{j=1}^n b_j) - (\sum_{i=1}^m a_i)$  и с тарифами  $c_{m+1 j} = 0$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ).

Необходимо иметь в виду, что в этом случае в исходной содержательной постановке задачи не должно быть требования о безусловном полном вывозе запасов из всех пунктов отправления (полном удовлетворении потребностей всех пунктов назначения). Если в рамках открытой модели транспортной задачи имеется дополнительное требование о приоритетном пункте отправления  $A_k$  (пункте назначения  $B_k$ ), запасы которого должны быть полностью вывезены (потребность в грузе полностью удовлетворена), то вводится запрет на перевозку груза от приоритетного пункта отправления к фиктивному пункту назначения (от фиктивного пункта отправления к приоритетному пункту назначения). Для запрещения перевозки соответствующий тариф полагается равным большой величине  $c_{k n+1} = M$  ( $c_{m+1 k} = M$ )  $M \gg 1$ .

Дополнительное ограничение вида  $x_{kl} \geq \alpha$  может быть учтено переходом к новой транспортной задаче, в которой единственным отличием от исходной задачи является корректировка значений запаса  $a_k$  и потребности  $b_l$  ( $a_k' = a_k - \alpha$ ,  $b_l' = b_l - \alpha$ ).

Дополнительное ограничение вида  $x_{kl} \leq \beta$  может быть учтено переходом к новой транспортной задаче, в которой пункт отправления условно разбит на два пункта:  $A_k'$  с запасом  $\beta$  и  $A_k''$  с запасом  $a_k - \beta$ . При этом перевозка из  $A_k''$  в пункт назначения  $B_l$  должна быть запрещена.

### **Определение опорных планов транспортной задачи.**

Транспортная задача является частным случаем основной задачи линейного программирования, следовательно, минимальное значение целевой функции достигается в вершине многогранника решений (опорном плане).

Число компонент  $x_{ij}$  в плане транспортной задачи с  $m$  пунктами отправления и  $n$  пунктами назначения равно  $mn$ , а число уравнений в системе ограничений равно  $m+n$ . Ограничившись рассмотрением только закрытых моделей, мы предполагаем выполнение дополнительного условия, что уменьшает ранг системы ограничений транспортной задачи на единицу. Таким образом, опорный план транспортной задачи может иметь не более  $n+m-1$  отличных от нуля переменных.

**Определение 6.6.** Если опорный план имеет  $n+m-1$  отличных от нуля переменных, то он называется *невыврожденным*, а если меньше — то *вырожденным*.

Построение опорных планов транспортной задачи, как и в более общем случае основной задачи линейного программирования, является проблемой, заслуживающей большого внимания. Учет структуры ограничений транспортной задачи позволил разработать специальные методы построения

опорных планов более эффективные, чем универсальные методы, используемые в общей теории линейного программирования. Рассмотрим четыре наиболее часто применяемых на практике метода: метод северо-западного угла, метод минимального элемента, метод двойного предпочтения и метод Фогеля.

Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за  $m+n-1$  шагов, на каждом из которых в таблице планирования заполняют одну клетку, которую называют занятой. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе пункта назначения (того, в столбце которого находится заполняемая клетка), либо полный вывоз груза из пункта отправления (того, в столбце которого находится заполняемая клетка), либо то и другое вместе.

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном этапе клетку, и рассматривают задачу, таблица планирования которой содержит на один столбец меньше, чем перед этим шагом, но то же количество строк и соответственно измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запаса которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге).

Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную на данном этапе клетку, и рассматривают задачу, таблица планирования которой содержит на одну строку меньше, чем перед этим шагом, при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполняемая клетка.

Третий случай соответствует построению вырожденного опорного плана. При этом, вообще говоря, следовало бы исключить из матрицы планирования и строку, и столбец, соответствующие этой клетке. Однако поскольку на практике важным является получение  $m+n-1$  (пусть даже часть из них будут нулевыми) базисных компонент опорного плана, обычно поступают

следующим образом: из матрицы планирования исключается только соответствующая строка; хотя оставшийся запас пункта отправления, соответствующего рассматриваемому столбцу, равен нулю, далее проводится формальная процедура построения базисных компонент опорного плана транспортной задачи.

После того как проделаны  $m+n-2$  описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают  $(m+n-1)$ -й шаг и получают искомый опорный план.

**Метод северо-западного угла.** При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы планирования начинается с левой верхней клетки для переменной  $x_{ij}$  ("северо-западный угол") и заканчивается клеткой для переменной  $x_{ij}$ .

**Метод минимального элемента.** Сущность метода минимального элемента состоит в последовательном заполнении клеток с минимальными в рассматриваемой части таблицы планирования тарифами. Этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при опорном плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла.

**Метод двойного предпочтения.** В рамках этого метода сначала находится множество клеток с тарифами, минимальными в своих строках, а затем множество клеток с тарифами, минимальными в своих столбцах. Затем производится последовательное в порядке возрастания тарифов заполнение клеток из пересечения этих множеств. Если при этом не удастся построить все



$m+n-1$  компонент опорного плана, то производится последовательное в порядке возрастания тарифов заполнение клеток из первого, а затем второго множества вплоть до нахождения опорного плана. Метод двойного предпочтения использует больше информации об исходных данных рассматриваемой транспортной задачи и, как правило, более эффективен с точки зрения величины значения целевой функции на построенном опорном плане, чем метод минимального элемента.

**Метод аппроксимации Фогеля.** При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и всем строкам находят разность между двумя наименьшими тарифами клеток из этих строк и столбцов. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце таблицы планирования. Среди указанных разностей выбирают максимальную и в этой строке (столбце) заполняют клетку с минимальным в строке (столбце) тарифом. Метод аппроксимации Фогеля, хотя и сравнительно сложен, является наиболее эффективным из рассмотренных методов построения опорных планов транспортной задачи. Как правило, его применение позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план.

### **Проблема выбора**

Проблема выбора (задача о назначениях) является дискретным аналогом транспортной задач линейного программирования. В рамках проблемы выбора (задачи о назначениях) роль пунктов отправления играют группы работников (количество работников в группе соответствует запасу), а роль пунктов назначения – работы (требуемое количество работников соответствует потребности пункта назначения). Сведение к закрытой модели транспортной задачи производится введением фиктивных групп работников (работ) с использованием метода штрафа для учета дополнительных ограничений.

## Содержательная постановка проблемы выбора

Для выполнения работ  $B_1, B_2, B_3, B_4$  требуется соответственно  $b_1, b_2, b_3, b_4$  работников. Имеющиеся работники по своей квалификации могут быть разбиты на группы  $A_1, A_2, A_3$ , причем количество работников каждой из квалификаций составляет соответственно  $a_1, a_2, a_3$  чел. Необходимо составить распределение работ между работниками с учетом возможных дополнительных условий:

- несовпадение количества имеющихся и количества требуемых работников и при этом требование непременно выполнения определенных работ (приоритетные работы) или полной загрузки работников некоторой квалификации (приоритетные работники);
- запрет на выполнение некоторых работ работниками определенных квалификаций;
- ограничения по количеству (не больше или не меньше) на число работников с данной квалификацией, привлекаемых для выполнения некоторых работ.

Эффективность выполнения работником каждой из работ зависит от уровня его квалификации. Экспертами составлена таблица, в которой величина  $c_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,n$ ), представляет собой выраженная в баллах эффективность выполнения работником, имеющим квалификацию  $A_i$ , работы типа  $B_j$ . Критерием качества распределения работ является выраженная в баллах суммарная эффективность выполнения работ всеми работниками в соответствии с данным распределением.

### 6.3. Варианты заданий:

#### Вариант 1.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 2,5   | 3     | 5     | 5     |
| $A_2$ | 1     | 2     | 1     | 1     | 5     |
| $A_3$ | 1,5   | 1     | 3     | 2     | 5     |
| $b_j$ | 3     | 5     | 5     | 2     |       |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_3$  должно быть направлено не более 3 работников квалификации  $A_1$ ;
- б) для выполнения работы  $B_1$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_3$

#### Вариант 2.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 3     | 1,5   | 3     | 4     | 5     |
| $A_2$ | 1     | 1,5   | 3     | 1     | 4     |
| $A_3$ | 1     | 1     | 3     | 2     | 3     |
| $b_j$ | 2     | 7     | 2     | 2     |       |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не менее 4 работников квалификации  $A_1$ ;
- б) работа  $B_1$  должна быть полностью обеспечена работниками.

#### Вариант 3.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 2,5   | 3     | 5     | 4     |
| $A_2$ | 1     | 2     | 1     | 1     | 4     |

|       |     |   |   |   |   |
|-------|-----|---|---|---|---|
| $A_3$ | 1,5 | 1 | 3 | 2 | 6 |
| $b_j$ | 3   | 5 | 5 | 2 |   |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_3$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_3$ ;
- б) работа  $B_1$  должна быть полностью обеспечена работниками.

Вариант 4.

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
| $A_1$ | 2     | 3     | 5     | 1     | 5     |
| $A_2$ | 4     | 2     | 2     | 1     | 4     |
| $A_3$ | 1,5   | 1,5   | 3     | 2     | 10    |
| $b_j$ | 2     | 8     | 3     | 1     |       |

Дополнительные условия:

- а) все работники квалификации  $A_3$  должны быть привлечены к работе;
- б) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не менее 3 работников квалификации  $A_3$ .

Вариант 5.

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
| $A_1$ | 2     | 2,5   | 3     | 5     | 3     |
| $A_2$ | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     |
| $A_3$ | 5     | 1     | 3     | 2     | 4     |
| $b_j$ | 3     | 2     | 4     | 2     |       |

Дополнительные условия:

- а) работы  $B_1$  и  $B_4$  должны быть полностью обеспечены работниками;
- б) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не более 1 работника квалификации  $A_1$

Вариант 6.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 4     | 5     | 1     | 2     | 7     |
| $A_2$ | 2,5   | 1     | 2     | 2     | 5     |
| $A_3$ | 3,5   | 3     | 2     | 4     | 14    |
| $b_j$ | 8     | 6     | 3     | 4     |       |

Дополнительные условия:

- а) все работники квалификации  $A_2$  и  $A_3$  должны быть привлечены к работе;
- б) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не менее 3 работников квалификации  $A_2$ .

Вариант 7.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 1     | 1,5   | 3,5   | 2     | 10    |
| $A_2$ | 2     | 2     | 4     | 4     | 12    |
| $A_3$ | 3     | 4     | 5     | 2     | 3     |
| $b_j$ | 6     | 9     | 6     | 5     |       |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_4$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_3$ ;
- б) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не менее 8 работников квалификации  $A_1$ .

Вариант 8.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 2     | 5     | 3     | 13    |
| $A_2$ | 1     | 2,5   | 1,5   | 4,5   | 11    |
| $A_3$ | 2,5   | 1,5   | 5     | 4     | 14    |
| $b_j$ | 10    | 8     | 11    | 12    |       |

Дополнительные условия:

- а) работы  $B_1$  и  $B_4$  должны быть полностью обеспечены работниками;  
 б) для выполнения работы  $B_1$  и  $B_3$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_3$ .

Вариант 9.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 4     | 5     | 3,5   | 2,5   | 30    |
| $A_2$ | 1,5   | 2     | 1     | 5     | 15    |
| $A_3$ | 5     | 1,5   | 3,5   | 5     | 40    |
| $b_j$ | 13    | 22    | 14    | 12    |       |

Дополнительные условия:

- а) все работники квалификации  $A_1$  и  $A_2$  должны быть привлечены к работе;  
 б) для выполнения работы  $B_1$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_2$ ;

Вариант 10.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 5     | 3     | 3     | 12    |
| $A_2$ | 1,5   | 2     | 5     | 5     | 10    |
| $A_3$ | 2     | 4     | 3,5   | 2,5   | 14    |
| $b_j$ | 10    | 8     | 14    | 8     |       |

Дополнительные условия:

- а) работа  $B_1$  должна быть полностью обеспечена работниками; б) для выполнения работы  $B_3$  должно быть направлено не более 10 работников квалификации  $A_1$ .

Вариант 11.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 4     | 5     | 1     | 1     | 6     |
| $A_2$ | 1     | 2     | 1     | 1     | 4     |

|       |     |   |   |   |   |
|-------|-----|---|---|---|---|
| $A_3$ | 2,5 | 1 | 3 | 3 | 5 |
| $b_j$ | 4   | 5 | 5 | 2 |   |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_1$  должно быть направлено не более 3 работников квалификации  $A_3$ ;
- б) для выполнения работы  $B_2$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_2$

Вариант 12.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 7     | 2,5   | 3     | 4     | 3     |
| $A_2$ | 1     | 5     | 3     | 1,5   | 4     |
| $A_3$ | 1     | 1     | 3     | 1     | 5     |
| $b_j$ | 3     | 6     | 3     | 2     |       |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не менее 3 работников квалификации  $A_3$ ;
- б) работа  $B_4$  должна быть полностью обеспечена работниками.

Вариант 13.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 5     | 2,5   | 8     | 5     | 3     |
| $A_2$ | 1     | 2     | 1     | 1     | 4     |
| $A_3$ | 7,5   | 1     | 3     | 9     | 7     |
| $b_j$ | 3     | 5     | 5     | 2     |       |

Дополнительные условия:

- а) для выполнения работы  $B_1$  не могут быть привлечены работники квалификации  $A_1$ ;

б) работа  $B_1$  должна быть полностью обеспечена работниками.

Вариант 14.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 3     | 5     | 1     | 15    |
| $A_2$ | 4     | 2     | 2     | 1     | 4     |
| $A_3$ | 1,5   | 1,5   | 3     | 2     | 2     |
| $b_j$ | 2     | 8     | 3     | 1     |       |

Дополнительные условия:

- а) все работники квалификации  $A_3$  должны быть привлечены к работе;
- б) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не менее 3 работников квалификации  $A_1$ .

Вариант 15.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 1,5   | 2,5   | 3     | 5     | 3     |
| $A_2$ | 1     | 2     | 9     | 1     | 1     |
| $A_3$ | 5     | 7     | 3     | 2     | 4     |
| $b_j$ | 3     | 2     | 4     | 2     |       |

Дополнительные условия:

- а) работы  $B_1$  и  $B_2$  должны быть полностью обеспечены работниками;
- б) для выполнения работы  $B_2$  должно быть направлено не более 1 работника квалификации  $A_1$

## 6.4. Содержание отчета

1. Построение математической модели распределения работ между работниками формирование критерия качества распределения работ.



2. Составление закрытой модели транспортной задачи
3. Построение первого опорного плана транспортной задачи:
  - а) методом северо-западного угла;
  - б) методом минимального элемента;
  - в) методом двойного предпочтения;
  - г) методом Фогеля;
4. Построение схем назначений, соответствующих полученным опорным планам.

#### **6.5. Контрольные вопросы**

1. Как формулируется математическая постановка транспортной задачи?
2. В чем заключается основная теорема теории транспортных задач?
3. Каким образом открытая транспортная задача сводится к закрытой модели?
4. Сколько базисных компонент содержит невырожденный опорный план транспортной задачи?