

ТЕМА II. ДИСКРЕТНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Решение задач дискретного линейного программирования методом ветвей и границ.

4.1. Цель и задачи работы.

Цель работы – ознакомление с основными понятиями дискретного линейного программирования. Построение оптимального плана задачи дискретного линейного программирования методом ветвей и границ. Проверка теоретических положений при помощи численного эксперимента.

Задачи работы:

- Освоение основных понятий дискретного линейного программирования.
- Изучение и практическое освоение метода ветвей и границ.

4.2. Краткие теоретические сведения.

Определение 4.1. Задача линейного программирования называется **целочисленной**, если все компоненты ее планов могут принимать только целочисленные значения, и **частично целочисленной**, если условие целочисленности относится только к части компонент

Основная частично целочисленная задача линейного программирования	
$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$	Целевая функция
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,2,\dots,k)$	Ограничения типа неравенств
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=k+1,..,m)$	Ограничения типа равенств

$x_j \geq 0$	$(j=1,2,\dots,s)$	Условия неотрицательности переменных
$\{x_j\} = 0$	$(j=1,2,\dots,s)$	Условия целочисленности

Замечание. В соответствии с определением основная частично целочисленная задача линейного программирования становится целочисленной при $s=n$.

Рассмотрим задачу целочисленного (частично целочисленного) линейного программирования. Пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_m^*, 0, \dots, 0)$ – оптимальный план ослабленной задачи, т.е. оптимальный план задачи линейного программирования, без требования целочисленности. Выберем компоненту, x_k^* , такую, что по условию целочисленности она должна быть целой, но не удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим ограничения:

$x_k \geq [x_k^*] + 1$	$x_k \leq [x_k^*]$
------------------------	--------------------

Построенный ранее вектор X^* не удовлетворяет ни одному из этих ограничений, но они не исключают ни одного допустимого решения задачи. Таким образом, получены две новые задачи: ослабленная задача, дополненная первым из ограничений, и ослабленная задача, дополненная вторым из ограничений. Получив оптимальные планы новых ослабленных задач, можно продолжить данную процедуру, что приводит к возникновению бинарного графа, вершины которого соответствуют ослабленным задачам.

Условия прекращения роста ветвей

1. Полученная ослабленная задача неразрешима.
2. Оптимальный план полученной ослабленной задачи удовлетворяет условию целочисленности.
3. Значение целевой функции на оптимальном плане полученной ослабленной задачи хуже, чем соответствующее значение на удовлетворяющем условию целочисленности оптимальном плане ослабленной задачи, полученной ранее по другой ветви.

Алгоритм нахождения оптимального плана основной целочисленной (частично целочисленной) задачи линейного программирования методом ветвей и границ

1. Построение первой ослабленной задачи и ее решение (установление неразрешимости) симплексным (обобщенным двойственным) методом.
2. Проверка (на основе полученного решения) ослабленной задачи на удовлетворение условиям прекращения роста ветвей. Если условие выполнено, то переход к другой ослабленной задаче (вершине бинарного графа) в соответствии со способом обхода графа. Если прекращен рост всех ветвей, то конец работы алгоритма.
3. Составление дополнительных ограничений (для переменной, которая в оптимальном плане имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане целочисленной (частично целочисленной) задачи должна быть целой).
4. Решение (установление неразрешимости) одной из полученных (в соответствии со способом обхода графа) двойственным симплексным методом. Переход к п.2.

4.3. Варианты заданий

№ варианта	Целевая функция	Ограничения
1	$F=3x_1 + 4x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + 2x_2 \leq 12,5$ $x_1 + 3x_2 \leq 6,5$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
2	$F=3x_1 - x_2 \text{ (max)}$	$x_1 + 4x_2 \leq 6,5$ $x_1 + 5x_2 \leq 4,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
3	$F=2x_1 + x_2 \text{ (min)}$	$3x_1 + 2x_2 \geq -2,5$ $x_1 + x_2 \geq 6,5$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
4	$F=x_1 - 3x_2 \text{ (min)}$	$3x_1 + 2x_2 \geq -5,2$ $x_1 + 2x_2 \geq 1,8$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$

5	$F=x_1 + x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + 2x_2 \leq 2,5$ $x_1 + 2x_2 \leq 3,7$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
6	$F=x_1 - 2x_2 \text{ (max)}$	$x_1 + 2x_2 \leq 3,3$ $x_1 + x_2 \leq 7,2$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
7	$F=x_1 - 3x_2 \text{ (min)}$	$3x_1 + 2x_2 \geq -5,7$ $x_1 + 2x_2 \geq 1,2$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
8	$F=2x_1 - 3x_2 \text{ (min)}$	$3x_1 + 2x_2 \geq -1,5$ $x_1 + 2x_2 \geq 5,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
9	$F=2x_1 + x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + 2x_2 \leq 1,5$ $x_1 + 2x_2 \leq 3,25$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$

10	$F=2x_1 + 5x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + x_2 \leq 3,5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
11	$F=2x_1 + 5x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + x_2 \leq 3,5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
12	$F=2x_1 + 5x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + x_2 \leq 3,5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
13	$F=2x_1 + 5x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + x_2 \leq 3,5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
14	$F=2x_1 + 5x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + x_2 \leq 3,5$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,4$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{x_1\}, \{x_2\} = 0$
15	$F=3x_1 + 4x_2 \text{ (max)}$	$3x_1 + 2x_2 \leq 12,5$

		$x_1 + 3x_2 \leq 6,5$ $x_1, x_2 \geq 0,$ $\{ x_1 \}, \{ x_2 \} = 0$
--	--	---

4.4. Содержание отчета

1. Описание метода ветвей и границ.
2. Текст программы.
3. Промежуточные результаты выполнения алгоритма.
4. Таблица результатов.
5. Геометрическая интерпретация результатов.
6. Сравнение с решением, полученным при помощи таблиц EXCEL.

4.5. Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная идея метода ветвей и границ?
2. Как влияет выбор способа обхода бинарного графа на процесс решения задачи методом ветвей и границ?
3. Почему в рамках метода ветвей и границ удобно использовать двойственный симплексный метод?
4. Как может повлиять погрешность вычислений на процесс нахождения оптимального плана методом ветвей и границ?
5. В каких случаях целочисленная (частично целочисленная задача) линейного программирования не имеет решения и как это определяется в рамках метода ветвей и границ?