

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

## Исследование области планов основной задачи линейного программирования

### 1.1. Цель и задачи работы.

Цель работы – освоение основных понятий линейного программирования. Изучение методов и построение алгоритмов исследования области планов основной задачи линейного программирования. Экспериментальная проверка (на основе вычислительного эксперимента) теоретических положений.

Задачи работы:

Построение основной задачи линейного программирования.

Определение базисных решений и вершин многогранника решений основной задачи линейного программирования.

Решение задачи линейного программирования путем полного перебора вершин многогранника.

### 1.2. Краткие теоретические сведения

Общая задача линейного программирования			
(1)	$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$	Целевая функция	
(2)	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,2,\dots,k)$	Ограничения типа неравенств	
(3)	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=k+1,..,m)$	Ограничения типа равенств	
(4)	$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,s)$	Условия неотрицательности переменных	

**Определение.** Вектор  $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , удовлетворяющий ограничениям задачи линейного программирования называется **планом** (или **допустимым решением**).

**Определение.** План  $X^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ , при котором целевая функция (1) достигает своего максимального (минимального) значения, называется **оптимальным планом**.

**Определение.** Задача линейного программирования называется **симметричной** (или **стандартной**), если она состоит в определении максимального значения целевой функции (1) при выполнении ограничений (2) и (4), где  $k=m$ ,  $s=m$ , т.е. при ограничениях типа неравенств и условии неотрицательности переменных.

**Определение.** Задача линейного программирования называется **основной**, если  $k=0$ ,  $s=m$ , т.е. при ограничениях типа равенств и условии неотрицательности переменных.

Основная задача линейного программирования			
	Формы записи		
	скаллярная	векторная	матричная
(5)	$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$	$F = CX \rightarrow \max(\min)$	$F = C^T X \rightarrow \max(\min)$
(6)	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ $(i=1, \dots, m)$	$\sum_{j=1}^n A_j x_j = B$ $(i=1, \dots, m)$	$AX = B$
(7)	$x_j \geq 0$ $(j=1, 2, \dots, n)$	$X \geq 0$	$X \geq 0$

### Утверждение 1.

Любая общая задача линейного программирования может быть преобразована в основную задачу линейного программирования.

**Определение.** Решение системы ограничений (6)  $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ , называется базисным решением основной задачи линейного программирования, если система векторов  $A_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), входящих в ограничения (6) с ненулевыми коэффициентами, линейно независима.

**Определение.** План  $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ , называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если система векторов  $A_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), входящих в ограничения (6) с положительными коэффициентами, линейно независима.

**Определение.** Базисное решение и опорный план называются *вырожденными*, если число их ненулевых компонент меньше размерности векторов  $A_j$ .

**Определение.** Точка  $X$  выпуклого множества  $\Omega$  называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \quad \text{где } \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$X_1, X_2 \in \Omega \quad X \neq X_1, \quad X \neq X_2$$

### Утверждение 2.

Точка  $X$  области решений является угловой тогда и только тогда, когда  $X$  - опорный план.

**Следствие.** Каждой вершине многогранника решений соответствует свой базис векторов и свой набор базисных (ненулевых) переменных. Переход от одной вершины к другой соответствует переходу от одного базиса к другому.

### Теорема (о достижимости оптимального значения целевой функции в вершине многогранника решений).

Целевая функция основной задачи линейного программирования достигает своего минимального (максимального значений) в некоторой вершине

многогранника решений. Если основная задача линейного программирования имеет несколько оптимальных планов, то их линейная комбинация - тоже оптимальный план.

**Следствие.** Оптимальный план (если он существует) может быть найден путем полного перебора вершин.

**Определение.** Область планов основной задачи линейного программирования называется **многогранником решений**, а ее угловые точки – **вершинами многогранника**.

### **Алгоритм нахождения базисных решений методом Жордана**

1. Формирование множества индексов, соответствующих базисным переменным.
2. Формирование множества индексов, соответствующих свободным строкам.
3. Обработка столбца с индексом на множестве с преобразованием всей матрицы. Если обработка прошла успешно и разрешающий элемент выбран в  $i$ -ой свободной строке, то переход на п.4, иначе переход на п.5.
4. Вычеркивание индекса  $i$  из множества  $I$  и индекса  $j$  из множества  $J$ .
5. Проверка наличия элементов в множестве  $I$ . Если множество не пусто то, переход на п.3, иначе, если до этого обработка всех столбцов происходила успешно, то окончание работы алгоритма и формирование решения из столбца правых частей, иначе обработка столбца правых частей.
6. Если обработка столбца правых частей прошла успешно, то выдача сообщения «решений нет», иначе выдача сообщения «решений бесконечно много».
7. Окончание алгоритма.

### **Примечание.**

Алгоритм обработки столбцов заключается в последовательной проверке элементов столбца, имеющих индексы, входящие в множество  $J$ . Если имеется

хотя бы один ненулевой элемент, то производится Жордановский переход, где данный элемент полагается разрешающим. При этом обработка считается успешной.

### 1.3. Содержание работы

1. Построение основной задачи линейного программирования
2. Получение всех базисных решений методом Жордана.
3. Получение всех опорных планов.
4. Нахождение оптимального плана.
5. Графическая интерпретация полученного решения

### 1.4. Варианты заданий:

№ варианта	Целевая функция	Ограничения
1	$F=2x_1+3x_2$ <i>max</i>	$-x_1 + 2x_2 \leq 6$ $9x_1 + 4x_2 \leq 56$ $x_2 \geq 0$
2	$F=-x_1+5x_2$ <i>max</i>	$-x_1 + x_2 \leq 2$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1 \geq 0$
3	$F=2x_1$ <i>max</i>	$-x_1 + 2x_2 \leq 4$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$
4	$F=-5x_1+x_2$ <i>max</i>	$x_1 + 2x_2 \geq -1$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1 \geq 0$
5	$F=-3x_2$ <i>min</i>	$x_1 - x_2 \geq 3$ $x_1 + x_2 = 4$ $x_2 \geq 0$
6	$F=12x_1-x_2$ <i>max</i>	$-x_1 + 2x_2 \leq 4$ $3x_1 + 8x_2 = 24$ $x_1, x_2 \geq 0$

7	$F = -x_1 + x_2$ <i>min</i>	$x_1 - 2x_2 = 3$ $x_1 + x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$
8	$F = x_1 + 8x_2$ <i>min</i>	$x_1 + 2x_2 \geq -1$ $5x_1 + 2x_2 \leq 10$ $x_1 \geq 0$
9	$F = -x_1 + 3x_2$ <i>max</i>	$x_1 + 2x_2 \leq 6$ $3x_1 + 5x_2 \geq 4$ $x_1 - x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
10	$F = 2x_1 + 3x_2$ <i>max</i>	$2x_1 - x_2 = 6$ $x_1 - 2x_2 = 3$ $3x_1 + 5x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
11	$F = 5x_1 - 3x_2$ <i>min</i>	$6x_1 + 7x_2 \leq 42$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 = 4$ $x_2 \geq 0$
12	$F = x_1 + 3x_2$ <i>max</i>	$-x_1 + 2x_2 \leq 4$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1 \geq 0$

#### 1.4. Содержание отчета.

1. Преобразование общей задачи линейного программирования в основную задачу линейного программирования.
2. Описание метода Жордана и алгоритма.
3. Текст программы.
4. Результаты тестирования программы.
5. Таблицы результатов.

### **1.5. Контрольные вопросы**

1. Сколько ненулевых компонент имеет невырожденный опорный план?
2. Сколько вершин может иметь многогранник решений основной задачи линейного программирования?
3. Может ли опорный план не быть базисным решением?
4. Может ли оптимальный план не быть опорным планом?
5. В каких случаях задача линейного программирования не имеет решения?