ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Решение планов основной задачи линейного программирования симплексным методом

2.1. Цель и задачи работы

Цель работы – Изучение метода последовательного улучшения плана (симплексного метода) и нахождение оптимального плана основной задачи линейного программирования Экспериментальная проверка (на основе вычислительного эксперимента) теоретических положений.

Задачи работы:

Построение основной задачи линейного программирования.

Нахождение первого опорного плана

Нахождение оптимального плана или установление неразрешимости задачи симплексным методом

2.2. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим опорный план основной задачи линейного программирования $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Этот план соответствует системе векторов, образующих базис m-мерного пространства. Каждый из векторов может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса $A_1, A_2, \ldots, A_m$

$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i$. Если векторы A_i – единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$.

Определение.

Величины $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i - c_j$ называются ***оценками*** опорного плана X

Условия оптимальности и разрешимости

Условие 1.

Если все оценки опорного плана X основной задачи линейного программирования на максимум неотрицательны, т.е., $\Delta_j \geq 0$ $(j=1,..,n)$, то план X – оптимален.

Условие 2.

Если $\exists$ k : $\Delta_k < 0$, $1 \leq k \leq n$ и $a_{ik} \leq 0$ $\forall i$, $i=1,...,m$, то целевая функция основной задачи линейного программирования не ограничена сверху на множестве планов.

Условие 3.

Если опорный план X основной задачи линейного программирования на максимум не вырожден и $\exists$ k,i : $\Delta_k \leq 0$, то $\exists X^*$: $F(X^*) > F(X)$, т.е. план X не оптимален.

Симплексная таблица.

i	*Базис*	$C_б$	B	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
				A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_n
1	A_1	c_1	b_1	1	0	…	0	$A_{1\ m+1}$	…	$A_{1\ n}$
2	A_2	c_2	b_2	0	1	…	0	$A_{2\ m+1}$	…	$A_{2\ n}$
.	.	.	.	.	.	…	.		…	
.	.	.	.	.	.	…	.		…	
.	.	.	.	.	.	…	.		…	
r	A_r	c_r	b_r	0	0	…	0	$A_{r\ m+1}$	…	$A_{r\ n}$
.	.	.	.	.	.	…	.		…	
.	.	.	.	.	.	…	.		…	
m	A_m	c_m	b_m	.	.	…	1	$A_{n\ m+1}$	…	$A_{n\ n}$
$m+1$			F	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_n

Алгоритм симплексного метода.

1. Нахождение начального опорного плана.
2. Составление симплексной таблицы.
3. Проверка опорного плана на оптимальность в соответствии с условием 1; если условие выполнено, то конец работы алгоритма.

4. Проверка задачи на разрешимость в соответствии с условием 2; если условие выполнено, то конец работы алгоритма.
5. Переход к новому опорному плану:

- Определение разрешающего столбца (столбца симплексной таблицы с максимальной по абсолютной величине отрицательной оценкой);
- Определение разрешающей строки (строки с минимальным из отношений компонент столбца В к положительным компонентам направляющего столбца);
- Переход к новому базису, заключающийся в выведении из прежнего базиса вектора, расположенного в разрешающей строке и введении вектора, расположенного в разрешающем столбце. При этом производится преобразование симплексной таблицы методом Жордана.

6. Переход к п.3.

2.3. Варианты заданий:

№ варианта	Целевая функция	Ограничения
1	$F=x_1-2x_2-$ $-\ 4x_3+x_4$ $\max$	$-x_1+2x_2+3x_3+10x_4\le 5$ $2x_1+4x_2+6x_3-11x_4=10$ $x_1+15x_2-13x_3-9x_4\ge -2$ $x_1, x_2, x_3, x_4\ge 0$
2	$F=-9x_1+14x_2+$ $+4x_3++13x_4$ $\min$	$-3x_1+7x_3+6x_4\le 8$ $2x_1-2x_2-5x_3+3x_4=5$ $-8x_1+6x_2-x_3+x_4\ge -2$ $x_1, x_2, x_4\ge 0$
3	$F=\ -10x_1-2x_3+$ $+12x_4$ $\max$	$2x_1+5x_2-x_3-x_4=11$ $-3x_1+2x_3-5x_4\le 7$ $-5x_2-4x_3+x_4=1$ $x_1, x_4\ge 0$

4	$F=11x_1 - 4x_2 -$ $- 8x_3 - x_4$ *min*	$3x_1+8x_2+11x_3+7x_4 \geq 15$ $-5x_1 - 15x_2 - 9x_4 = 1$ $4x_1+13x_2+3x_3=11$ $x_2, x_4 \geq 0$
5	$F=15x_1 - 4x_2 +$ $+7x_3+5x_4$ *max*	$8x_1 - 3x_2 - 6x_3+7x_4 \geq -1$ $-13x_1+3x_2 - 2x_3 - 15x_4 \leq 3$ $5x_1+x_2-6x_3+11x_4=12$ $x_2+x_3 \geq 4$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
6	$F=15x_1+7x_2 -$ $- 2x_3$ *min*	$-5x_1+5x_2+8x_3 - 2x_4=10$ $11x_1 - 12x_2+3x_3+x_4 \leq 5$ $-4x_1+x_2-2x_3-7x_4 \geq -2$ $x_4, x_5 \geq 0$
7	$F=10x_1+8x_2+$ $+ 7x_3 - 11x_4$ *max*	$5x_1+7x_2+8x_4+4x_5 \leq 0$ $x_1+6x_2 \geq -3$ $-8x_1+14x_2+5x_3=3$ $x_2+x_3 \geq 4$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
8	$F=5x_1 - 5x_2 +$ $+ 4x_3$ *min*	$x_1 - 6x_3+x_4=7$ $x_2+x_3=2$ $-2x_1 - 4x_2+5x_3+3x_4 \leq 5$ $x_2 - 2x_3 \geq -1$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
9	$F=2x_1+x_2+$ $+ 5x_3 - 3x_4$ *max*	$2x_1+7x_2+5x_3-7x_4 \geq -8$ $-2x_2-4x_3+9x_4 \leq 10$ $-6_1+2x_2+3x_3-9x_4=8$ $x_2+x_3 \geq 4$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
10	$F=6x_1 - 7x_2 +$ $+ x_3 - x_4$	$3x_1-7x_2+6x_3+9x_4=5$ $6x_2+9x_3 \geq -1$

	min	$-5x_1 + 12x_2 - 7x_3 \le 6$ $x_2 + 2x_3 \ge 9$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$
11	$F = 9x_1 + 14x_2 +$ $+ 4x_3 + +13x_4$ *max*	$3x_1 + 7x_3 + 6x_4 \le 8$ $12x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + = 7$ $-8x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \ge -2$ $x_1, x_3, x_4 \ge 0$
12	$F = -10x_1 - 2x_3 +$ $+ 12x_4$ *min*	$-12x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - = 11$ $13x_1 + 12x_3 - 5x_4 \le 7$ $15x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$ $x_1, x_2, x_4 \ge 0$

2.4. Содержание отчета.

1. Описание симплексного метода и алгоритма его программной реализации.
2. Текст программы.
3. Результаты тестирования программы.
4. Таблицы результатов.

2.5. Контрольные вопросы

1. Чем отличаются условия оптимальности для основных задач линейного программирования на максимум и на минимум?
2. Как может быть сформулировано условие неограниченности целевой функции снизу?
3. Каким образом в рамках симплексного метода устанавливается неразрешимость задачи в силу отсутствия планов (противоречивости ограничений задачи линейного программирования)?
4. Что является признаком неединственности оптимального плана?
5. Как влияет погрешность вычислений на решение основной задачи линейного программирования симплексным методом?