ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Тема: Решение основной задачи линейного программирования двойственным симплексным методом.

3.1. Цель работы и задачи работы.

Цель работы - разработка и программная реализация алгоритма нахождения оптимального плана основной задачи линейного программирования на основе обобщенного двойственного симплексного метода. Экспериментальная проверка (на основе вычислительного эксперимента) теоретических положений.

Задачи работы:

- Ознакомление с понятием двойственности в задачах линейного программирования.
- Изучение двойственного симплексного метода решения основной задачи линейного программирования.

3.2. Краткие теоретические сведения

Двойственные задачи линейного программирования	
Задача I	**Задача II**
$F=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max$	$F^*=\sum\limits_{j=1}^{n} b_i y_i \rightarrow min$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=1,2,\ldots,k)$	$\sum\limits_{j=1}^{n} y_i a_{ij} \ge c_j \quad (j=1,2,\ldots,s)$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j = b_i \quad (i= k+1,..., m)$	$\sum_{j=1}^{n} y_i \, a_{ij} = c_j \quad (j=s+1, \ldots, n)$
$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2, \ldots, s)$	$y_i \geq 0 \qquad (i=1,2, \ldots, k)$

Определение 3.1. Задача линейного программирования II называется ***двойственной*** по отношению к задаче линейного программирования I (***исходной***).

Свойства двойственных задач.

Утверждение 3.1.

Задача III, двойственная по отношению к задаче II, совпадает с задачей I, т.е. нет смысла в определении, какая из двух задач является исходной, какая – двойственной. Можно говорить о паре двойственных задач.

Утверждение 3.2.

Если $\boldsymbol{X}$ – план задачи I., а $\boldsymbol{Y}$ – план задачи II, то $\boldsymbol{F(X) \leq F^*(Y)}$**.**

Утверждение 3.3.

Если задача I (задача II) не имеет решения в силу неограниченности сверху (снизу) целевой функции, то задача II (задача I) не имеет решения в силу отсутствия планов.

Утверждение 3.4.

Если $\boldsymbol{X^*}$ – оптимальный план задачи I, а $\boldsymbol{Y^*}$ – оптимальный план задачи II, то $\boldsymbol{F(X^*) = F^*(Y^*)}$**.**

Определение 3.2. Базисное решение основной задачи линейного программирования на максимум ***X*** называется ***псевдопланом***, если $\Delta_j \geq 0$, т.е. все оценки неотрицательны.

Условия оптимальности и разрешимости.

Условие 3.1.

Если все компоненты псевдоплана $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ неотрицательны, т.е. $x_j \geq 0$, $(j=1,..,n)$, то ***X*** – оптимальный план.

Условие 3.2.

Если $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ – псевдоплан основной задачи линейного программирования и если $\exists\ k : x_k < 0,\ 1 \leq k \leq n$ и $a_{ik} \geq 0\ \forall i,\ i=1,\ldots,m$, то основная задача линейного программирования не имеет решений в силу отсутствия планов.

Условие 3.3.

Если $\boldsymbol{X=(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)}$ – псевдоплан основной задачи линейного программирования и если $\exists\ k, i\ (1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq m)$: $x_k < 0,\ (1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq m)$ $a_{ik} \leq 0\ \forall i,\ i=1,\ldots,m$, то можно перейти к другому псевдоплану, при котором значение целевой функции не увеличится.

Алгоритм двойственного симплексного метода.

1. Нахождение начального псевдоплана.
2. Составление симплексной таблицы.
3. Проверка псевдоплана на оптимальность в соответствии с условием 1; если условие выполнено, то конец работы алгоритма.
4. Проверка задачи на разрешимость в соответствии с условием 4; если условие выполнено, то конец работы алгоритма.

5. Переход к новому псевдоплану:

- Определение разрешающей строки (строки симплексной таблицы с минимальным значением компоненты столбца B);
- Определение разрешающего столбца (столбца симплексной таблицы с наименьшим по абсолютной величине отношением оценок к соответствующим отрицательным компонентам разрешающей строки);
- Переход к новому базису, заключающийся в выведении из прежнего базиса вектора, расположенного в разрешающей строке, и введении вектора, расположенного в разрешающем столбце. При этом производится преобразование симплексной таблицы методом Жордана.

6. Переход к п.3.

Алгоритм обобщенного двойственного симплексного метода.

1. Нахождение начального базисного решения.
2. Проверка, является ли базисное решение опорным планом. Если является, то дальнейшее решение ищется симплексным методом.
3. Проверка, является ли базисное решение псевдопланом. Если является, то дальнейшее решение ищется двойственным симплексным методом.
4. Жордановский переход от прежнего базисного решения к новому базисному решению. Переход к п.2.

3.3. Варианты заданий

№ варианта	Целевая функция	Ограничения
1	$F=2x_1+3x_2$ min	$-x_1 + 2x_2 \geq 6$ $3x_1 + 4x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$

2	$F = -x_1 - 5x_2$ max	$-x_1 + x_2 \geq 2$ $5x_1 + 2x_2 \leq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$
3	$F = -2x_1 - x_2$ max	$x_1 + 3x_2 \geq 4$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$
4	$F = -5x_1 - x_2$ max	$4x_1 + x_2 \geq 1$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$
5	$F = 3x_1 + 2x_2$ min	$5x_1 - x_2 \geq 3$ $x_1 + x_2 \geq 4$ $5x_1 - 2x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
6	$F = -12x_1 - x_2$ max	$--x_1 + 2x_2 \leq -4$ $3x_1 + 8x_2 \geq 24$ $x_1, x_2 \geq 0$
7	$F = x_1 + x_2$ min	$x_1 - 2x_2 = 3$ $x_1 + x_2 \leq 8$ $3x_1 + 5x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
8	$F = x_1 + 8x_2$ min	$x_1 + 2x_2 \geq -1$ $5x_1 + 2x_2 \leq 10$ $3x_1 - 2x_2 \leq 6$ $x_1, x_2 \geq 0$
9	$F = -2x_1 - 3x_2$ max	$x_1 + 2x_2 \leq 6$ $3x_1 + 5x_2 \geq 4$ $x_1 - x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$

10	$F = -2x_1 - 3x_2$ max	$2x_1 - x_2 \geq 6$ $3x_1 + 5x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$
11	$F = 5x_1 + 3x_2$ min	$6x_1 + 7x_2 \leq -42$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6$ $x_1 + 5x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
12	$F = -x_1 - 3x_2$ max	$-x_1 + 2x_2 \leq -4$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1, x_2 \geq 0$
13	$F = 3x_1 - 4x_2$ max	$3x_1 + 2x_2 \leq 7$ $x_1 + 2x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
14	$F = 4x_1 - 3x_2$ min	$-x_1 + 4x_2 \leq 14$ $5x_1 + 10x_2 \geq 9$ $x_1, x_2 \geq 0$
15	$F = -x_1 - 3x_2$ max	$7x_1 + 2x_2 = 9$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $2x_1 + 3x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$

3.4. Содержание отчета.

1. Описание двойственного симплексного метода и алгоритма его программной реализации.
2. Текст программы.
3. Таблицы результатов, включая промежуточные симплексные таблицы.
5. Графическая интерпретация результатов
6. Сравнение с решением, полученным при помощи таблиц EXCEL.

3.5. Вопросы для самопроверки.

1. Какая задача является двойственной по отношению к основной задаче линейного программирования?
2. Как определить, какая из двух задач является исходной, а какая – двойственной?
3. Чем отличается псевдоплан основной задачи линейного программирования от опорного плана?
4. Может ли псевдоплан не быть базисным решением?
5. Может ли оптимальный план не быть псевдопланом?
6. Является ли алгоритм решения основной задачи линейного программирования двойственным симплексным методом алгоритмом симплексного метода, примененным к решению двойственной задачи?
7. Как влияет погрешность вычислений на решение задачи линейного программирования двойственным симплексным методом