輔仁大學管理學院微積分主題式教材

— 導數 Derivative

一. 主題介紹

本單元之主題為導數(Derivative)，而本教材將分為五個部分，分別為書面教材、shiny 應用介面、code 程式介紹、習題應用以及實際案例，shiny 應用介面將採用微分函數以及 mosaic 套件呈現方程式的結果，習題應用則是採用講義後的習題進行程式及圖表的展現，實際案例則是將特定議題作為內容，藉由 shiny 應用介面進行呈現。

二. 導數定義

導數的意義分為一般意義及幾何意義，以下針對這兩種定義作說明：

1、 一般意義：

假設有一函數 $y = f(x)$，且x以及對應之y皆屬於實數，而當x在x_0獲得增量Δx，同時相對應y獲得增量Δy，且若Δy與Δx之比在Δx趨近於 0 時存在，此時則稱此極限為$y = f(x)$在x_0之導數，記為$f'(x_0)$：

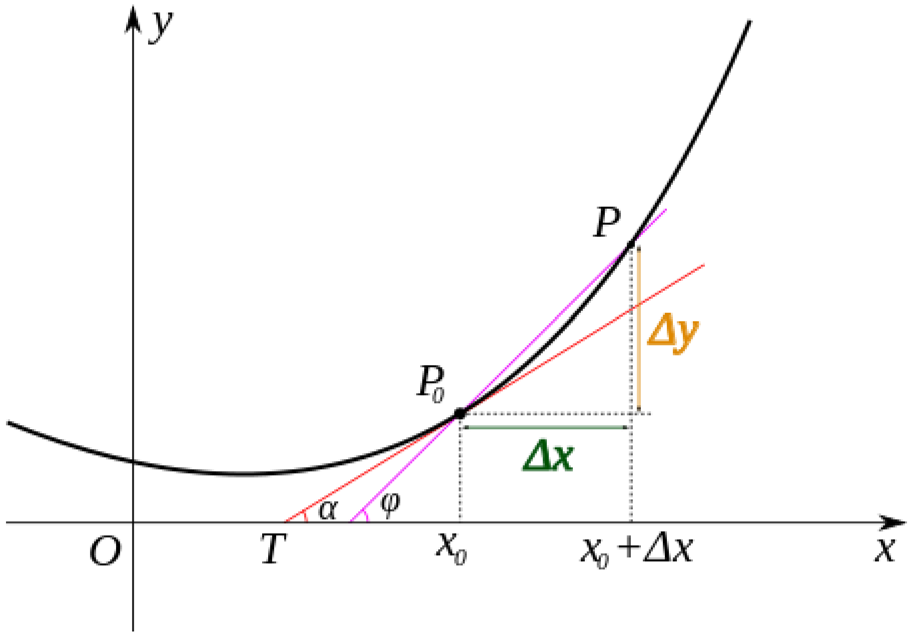
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

對於一般的函數來說也可定義為變數x趨近於x_0時，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的極限：

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2、 幾何意義：

當函數定義域以及取值皆在實數域中，導數可表示為函數曲線上的切線斜率。由下圖所示，設P_0為曲線上之一定點，P為曲線上之一動點。當P沿曲線趨近於P_0時，且割線PP_0的極限位置P_0T存在，則稱P_0T為曲線在P_0處的切線。



若以函數$y = f(x)$為例，則PP_0的斜率為：

$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

當P與P_0幾乎重疊之時，其兩點之割線將會成為切線，即P_0T存在時，$\Delta x \to 0$，$\varphi \to \alpha$，則P_0T的斜率$\tan\alpha$為：

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

由上述公式可知，導數的幾何定義公式與一般定義公式完全相同，即

$$f'(x_0) = \tan\alpha$$

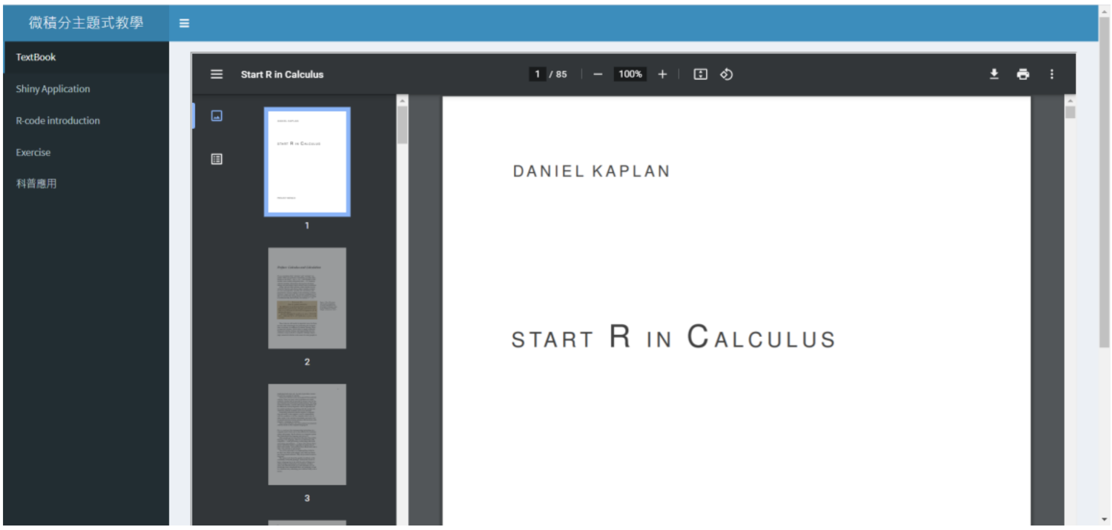
因此，導數的幾何意義即曲線$y = f(x)$在點$P_0(x_0, f(x_0))$處切線之斜率。

三. Shiny 應用介面

Shiny 應用介面主要分為五個部分，分別是書面教材、shiny 導數應用、R 程式語言教材、講義習題以及科普應用。

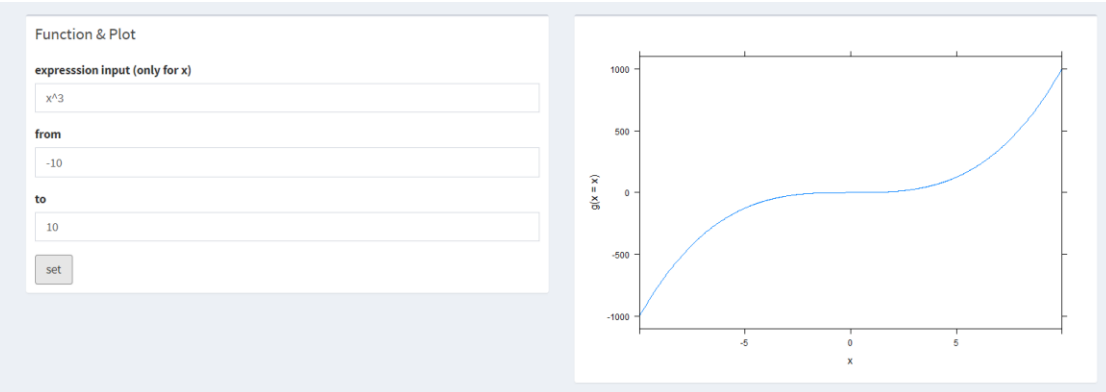
1、 書面教材

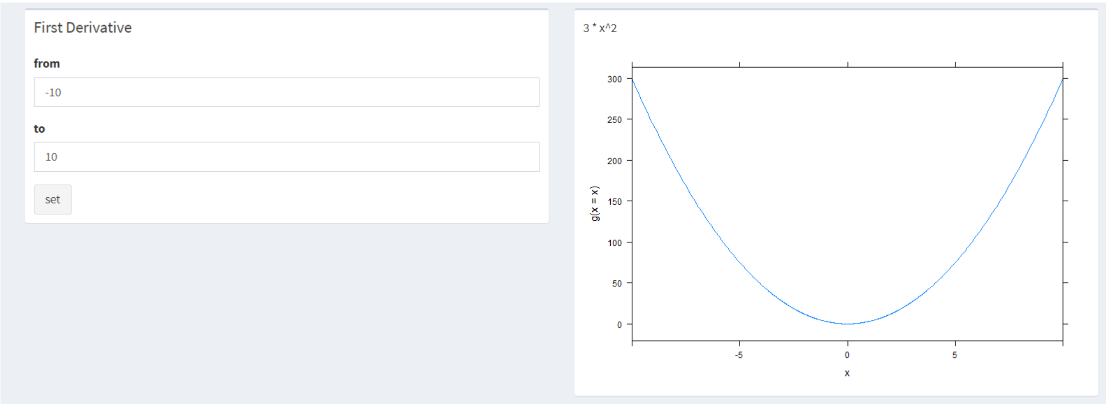
書面教材採用的是 Start R in Calculus by Daniel T. Kaplan (January 1, 2013)，本書內容主要在講解如何應用 mosaic 套件中的函數進行計算的處理，例如 ：微分和積分的運算，方程式圖形繪製等等。

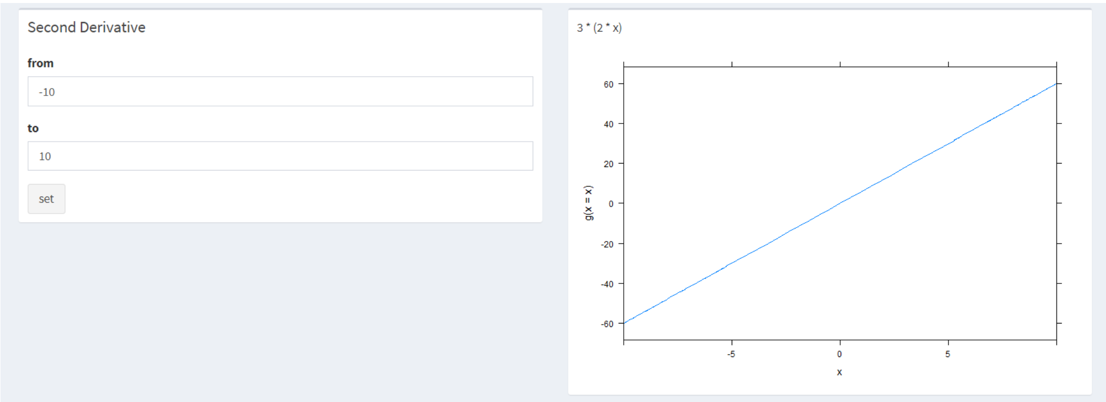


2、 Shiny 導數應用

此部分則是運用 mosaic 套件中的微分函數以及繪圖函數，將使用者輸入的數學式繪製成圖形，並且同時算出一階導數、二階導數以及繪製各別方程式的圖形。





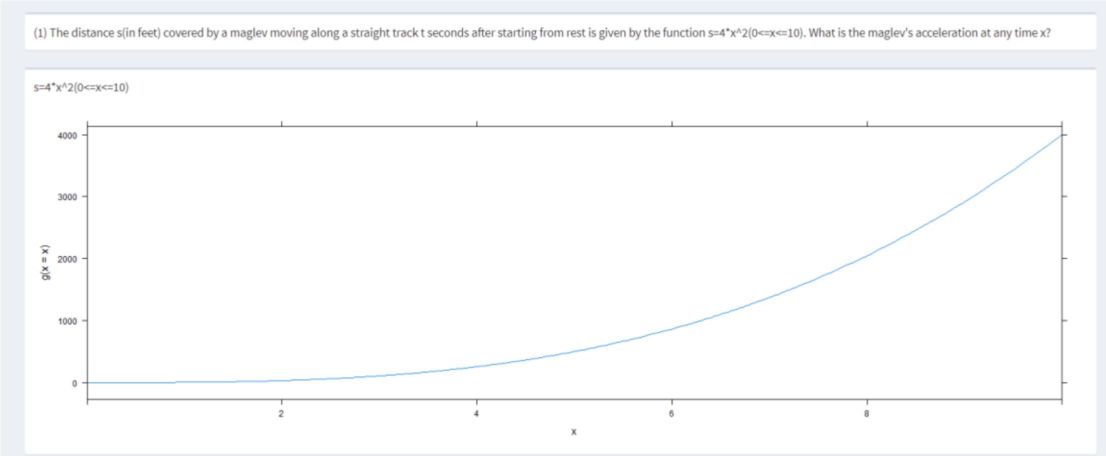


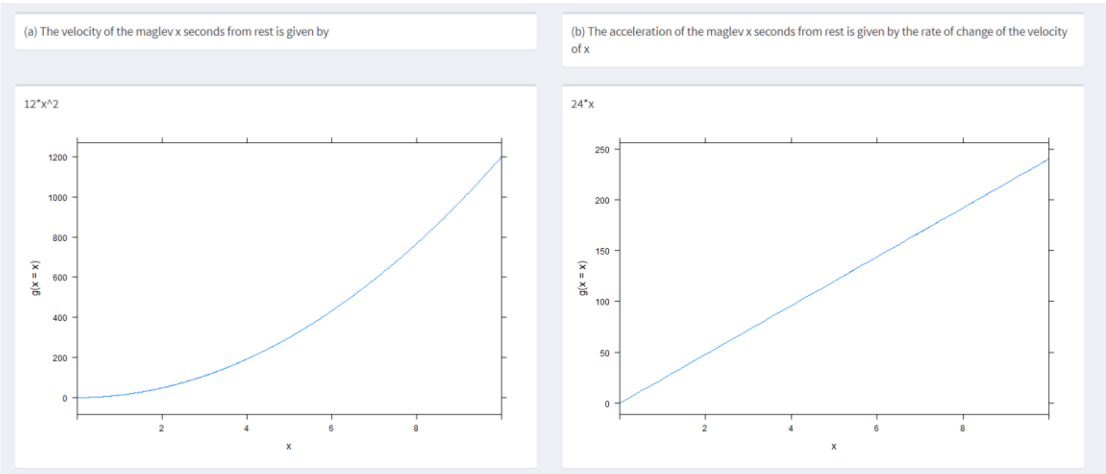
3、 R 程式語言教材

R 程式語言教材是講解第二部分中所運用到的函數，其中包含了 D 微分函數和 makeFun 繪圖函數，以及這兩個函數所需的參數型態該如何進行轉換。

4、 講義習題

講義習題則是採用 applied calculus for the managerial life and social sciences by Soo T. Tan(2017)中計算位置函數、速度函數以及加速度函數的習題。

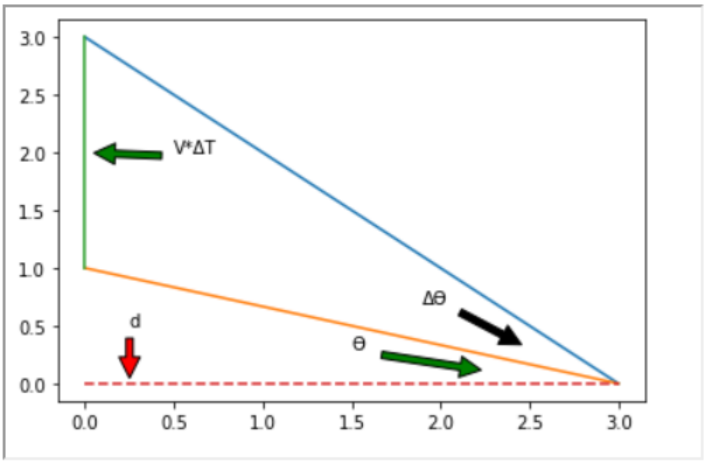




5、 科普應用

科普應用則是將日常生活中遇到的問題利用數學的方法來作解說，此部分舉例為探討為何平常看到月亮的位置總是不變，利用三角函數以及微分來求得角速度，並得知因為月亮和地球距離過遠的關係，造成角速度幾乎為 0，因此才造成月亮的位置一動也不動。

為什麼月亮的位置總是不動呢?
每到中秋節時，總能看見一顆大大的月亮掛在天空上，但奇怪的是，無論我走到哪裡，月亮總是在同樣的位置一動也不動，到底是為什麼呢?



V*delta t 為月亮移動的距離，d為我和月亮的距離，theta為我的視野中月亮的角度

$$V\Delta t = d\tan\left(\theta+\Delta\theta\right) - d\tan\theta$$

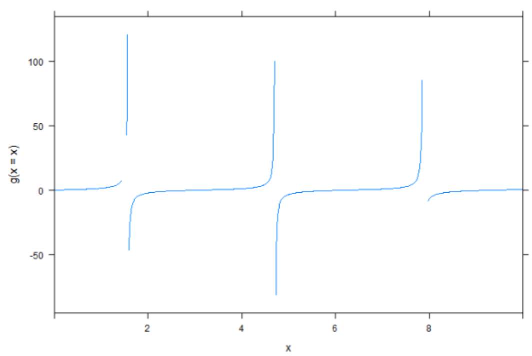
$$\frac{V}{d}\Delta t = \tan\left(\theta+\Delta\theta\right) - \tan\theta$$

$$\frac{V}{d}\frac{\Delta t}{\Delta\theta} = \frac{\tan\left(\theta+\Delta\theta\right) - \tan\theta}{\Delta\theta}$$

Function Input

tan(x)

1/cos(x)^2



由此可知tan(theata)的一階導數為1/cos(x)^2，經由整理後可得以下式子:

$$\frac{V}{d}\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{cos^2\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{V}{d}cos^2\theta$$

當觀察者和月亮的距離越遠，在觀察者的視野中月亮的角速度就會越來越小，而月亮和地球的距離足夠大到讓叫速度趨近於0，及無論觀察者走到哪，月亮好像都在同一個位置移動也不動

四. 參考資料

參考書目 ：

Applied Calculus For The Managerial Life And Social Sciences by Soo T. Tan(2017)

Start R in Calculus by Daniel T. Kaplan (January 1, 2013)

參考網址 ：

mosaic package – Rdocumentation :
https://www.rdocumentation.org/packages/mosaic/versions/1.8.3

Pyplot tutorial — Matplotlib 3.4.3 documentation :
https://matplotlib.org/stable/tutorials/introductory/pyplot.html

parse, deparse & expression Functions in R (5 Example Codes) :
https://statisticsglobe.com/parse-deparse-expression-r-function

function - How to turn a simple text expression into a mathematical expression in R - Stack Overflow :
https://stackoverflow.com/questions/30186638/how-to-turn-a-simple-text-expression-into-a-mathematical-expression-in-r