

Γραμμική Άλγεβρα - Σετ Ασκήσεων 2

Άσκηση 1

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_3 - x_1)$. Να βρεθούν:

- i Ο πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.
- ii Οι συνιστώσες του Tx , όπου $x = (1, -1, 2)$.

Άσκηση 2

Εστω $x, y \in \mathbb{R}^2$ με $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$.

- i Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle = 7x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2 .

- ii Να βρείτε τον πίνακα του εσωτερικού γινομένου, που ορίστηκε στο ερώτημα i.

Άσκηση 3

Εστω ο διανυσματικός χώρος \mathbb{C}^3 με το εσωτερικό γινόμενο που έχει πίνακα ως προς την κανονική βάση τον:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και την βάση του: $v = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, i), v_3 = (1 + i, 1/2, -i)\}$. Να κατασκευαστεί από την v μια ορθοκανονική βάση για τον \mathbb{C}^3 .

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Τι παρατηρείτε για τις ιδιοτιμές και τι σημαίνει;

Άσκηση 5

Να διαγωνοποιηθεί, αν είναι δυνατόν, ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$