ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

- ☑ Ορισμοί - Ιδιότητες - Υπόχωροι
- ☑ Γραμμική Εξάρτηση - Ανεξαρτησία
- ☑ Βάση - Διάσταση
- ☑ Γραμμικές Απεικονίσεις - Αλλαγή Βάσης
- ☑ Εσωτερικό Γινόμενο - Ορθογωνιότητα

Διανυσματικοί Χώροι

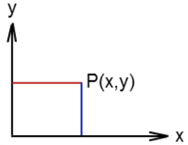
Ορισμός

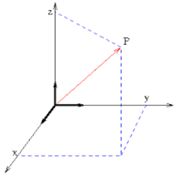
Καρτεσιανό γινόμενο (Cartesian product) δύο συνόλων V και W καλείται ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων των V και W, αντίστοιχα,

$$V \times W = \{(v, w); v \in V, w \in W\}.$$

Συμβολίζουμε,

$$V^n = \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n \ \text{φορές}} = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n); v_i \in V, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$





$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός

Διανυσματικός χώρος (vector space ή linear space) επί του $\mathbb{F}$ (ή $\mathbb{F}$-δ.χ.) καλείται ένα μη κενό σύνολο $V \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

1. **Πρόσθεση**

   $+ : V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$, με τις ακόλουθες ιδιότητες $\forall\, u, v, w \in V$:

   (α) $u + v = v + u$ (αντιμεταθετική)
   (β) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (προσεταιριστική)
   (γ) Υπάρχει *ουδέτερο στοιχείο* $\mathcal{O} \in V$ με $u + \mathcal{O} = u$
   (δ) Για κάθε $u \in V$ υπάρχει *αντίθετο στοιχείο* $-u \in V$ με $u + (-u) = \mathcal{O}$

2. **Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός**

   $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$, $(k, v) \mapsto k \cdot v$, με τις ακόλουθες ιδιότητες $\forall\, u, v \in V$, $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$:

   (α) $k_1(u + v) = k_1\, u + k_1\, v$ (επιμεριστική)
   (β) $(k_1 + k_2)\, u = k_1\, u + k_2\, u$ (επιμεριστική)
   (γ) $(k_1\, k_2)\, u = k_1\, (k_2\, u)$
   (δ) Υπάρχει *ουδέτερο στοιχείο* $1 \in \mathbb{F}$ με $1\, u = u$

Τα στοιχεία ενός δ.χ. V καλούνται **διανύσματα** (vectors).

Διάφορα γνωστά μας σύνολα αριθμών πληρούν τις παραπάνω ιδιότητες, π.χ. το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{R}$. Αλλά δεν είναι μόνο αυτά!

Διανυσματικοί Χώροι

Παρατηρήσεις

1. Ένας δ.χ. V δεν είναι απαραίτητο να έχει στοιχεία αριθμούς.
2. Οι πράξεις στους δ.χ. (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) δεν είναι απαραίτητα οι κλασσικές πράξεις των αριθμών. Εξαρτώνται κάθε φορά από τον δ.χ. V.

► Ο χώρος $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης πινάκων και του πολλαπλασιαμού αριθμού με πίνακα είναι $\mathbb{F}$-δ.χ.

Πράγματι, έστω οι πίνακες $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, και ο αντίστοιχος μηδενικός πίνακας $\mathcal{O} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε από τις ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $A + B = B + A$

(β) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(γ) $A + \mathcal{O} = A$

(δ) $A + (-A) = \mathcal{O}$ όπου $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ο αντίθετος του A

Επομένως επαληθεύονται οι ιδιότητες 1.(α)-1.(δ) του ορισμού του δ.χ. που αφορούν στην πρόσθεση.

Διανυσματικοί Χώροι

Επιπλέον, για οποιουσδήποτε πίνακες, $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και για οποιαδήποτε $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες από τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα:

(α) $k_1(A+B) = k_1\,A + k_1\,B$

(β) $(k_1+k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$

(γ) $(k_1\,k_2)\,A = k_1\,(k_2\,A)$

(δ) $1\,A = A$

Επομένως επαληθεύονται οι ιδιότητες 2.(α)-2.(δ) του ορισμού του δ.χ. που αφορούν στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Άρα ο χώρος $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης πινάκων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα είναι δ.χ. επί του $\mathbb{F}$. ■

Διανυσματικοί Χώροι

Ιδιότητες

Έστω V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. και $k \in \mathbb{F}$, $v \in V$. Τότε:

1. $k\,\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_V$
2. $0\,v = \mathcal{O}_V$
3. $(-k)\,v = k\,(-v) = -(k\,v)$
4. $k\,v = \mathcal{O}_V \Leftrightarrow k = 0$ ή $v = \mathcal{O}_V$

Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός

Διανυσματικός υπόχωρος (vector subspace) ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V καλείται κάθε μη κενό υποσύνολο $U \subseteq V$ που είναι και το ίδιο $\mathbb{F}$-δ.χ. ως προς τις πράξεις του V.

Πρόταση

Αν V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. και $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$, τότε το U είναι υπόχωρος του V αννa $\forall\, u, v \in U$, $\forall\, k, \ell \in \mathbb{F}$, ισχύει ότι:

$$k\,u + \ell\,v \in U. \tag{1}$$

Διανυσματικοί Χώροι

► Ο χώρος $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$, εφοδιασμένος με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, είναι $\mathbb{R}$-δ.χ. (προσπαθήστε να το αποδείξετε με χρήση του ορισμού). Θα ελέγξουμε αν τα σύνολα,

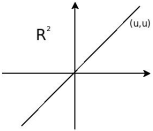
$$\text{(a)} \quad U_1 = \{(u, u);\ u \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{(b)} \quad U_2 = \{(1, u);\ u \in \mathbb{R}\},$$

είναι υπόχωροί του.

(α). Ας εξετάσουμε αν είναι υπόχωρος το σύνολο U_1. Θα χρησιμοποιήσουμε την Σχέση (1) του θεωρήματος. Έστω (u_1, u_1) και (u_2, u_2), δύο διανύσματα του U_1, με $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Έστω και $k, \ell \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$k\,(u_1, u_1) + \ell\,(u_2, u_2) = (k\,u_1, k\,u_1) + (\ell\,u_2, \ell\,u_2) = (k\,u_1 + \ell\,u_2, k\,u_1 + \ell\,u_2) = (v, v),$$

με $v = k\,u_1 + \ell\,u_2 \in \mathbb{R}$. Άρα $k\,(u_1, u_1) + \ell\,(u_2, u_2) \in U_1$ και συνεπώς το U_1 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Γεωμετρικά, ο υπόχωρος U_1 είναι η ευθεία που απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Διανυσματικοί Χώροι

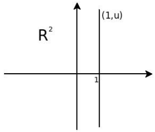
(β). Αντίστοιχα εξετάζουμε και το σύνολο U_2. Έστω $(1, u_1)$ και $(1, u_2)$, δύο διανύσματα του U_2, με $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Έστω και $k, \ell \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$k\,(1, u_1) + \ell\,(1, u_2) = (k, k\,u_1) + (\ell, \ell\,u_2) = (k+\ell, k\,u_1 + \ell\,u_2).$$

Όμως, το διάνυσμα που προέκυψε θα είναι στοιχείο του U_2 μόνο όταν ισχύει η σχέση:

$$k + \ell = 1,$$

και όχι για όλα τα $k, \ell \in \mathbb{R}$, όπως απαιτεί το θεώρημα. Άρα το σύνολο U_2 δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Γεωμετρικά, το U_2 είναι η ευθεία που απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Εναλλακτικά, θα μπορούσε κάποιος να φτάσει στο ίδιο συμπέρασμα αν παρατηρούσε ότι το σύνολο U_2 δεν περιέχει το ουδέτερο στοιχείο $(0, 0)$ (προσπαθήστε να το δείξετε μέσω του ορισμού). ■

Διανυσματικοί Χώροι

Πρόταση

Έστω U, W, υπόχωροι ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το σύνολο $U + W = \{u + w;\ u \in U, w \in W\}$ είναι υπόχωρος του V.
2. Το σύνολο $U \cap W = \{v;\ v \in U, v \in W\}$ είναι υπόχωρος του V.

Ορισμός

Έστω U, W, υπόχωροι ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V. Ο V καλείται **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων U, W, αν ισχύει ότι:

$$V = U + W, \qquad U \cap W = \{\mathcal{O}_V\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση ο υπόχωρος U καλείται **συμπλήρωμα** του W ως προς τον δ.χ. V και αντίστοιχα ο W είναι το συμπλήρωμα του U.

Προσοχή!

Η ένωση δύο υποχώρων δεν είναι πάντα υπόχωρος! Μπορείτε να σκεφτείτε ένα αντιπαράδειγμα?

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός

Γραμμικός συνδυασμός (linear combination) των διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V καλείται ένα στοιχείο $v \in V$ αν υπάρχουν συντελεστές $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε,

$$v = k_1\, v_1 + k_2\, v_2 + \cdots + k_n\, v_n .$$

Έστω τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$,

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1), (0,1), (1,0)\} .$$

Τότε το διάνυσμα $v = (3,4)$ μπορεί να γραφτεί ως,

$$v = 2\, v_1 + 2\, v_2 + v_3 = 2\,(1,1) + 2\,(0,1) + (1,0) = (3,4),$$

και άρα είναι γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2, v_3, με συντελεστές $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$.

Ο γραμμικός συνδυασμός δεν είναι απαραίτητα μοναδικός. Εναλλακτικά, το $v = (3,4)$ θα μπορούσε να γραφτεί και ως,

$$v = 5\, v_1 - v_2 - 2\, v_3 .$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός

Γραμμική θήκη (linear span ή linear hull) ενός υποσυνόλου διανυσμάτων $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, $K \neq \emptyset$, του $\mathbb{F}$-δ.χ. V, καλείται το σύνολο,

$$\mathrm{span}(K) = \{k_1\, v_1 + k_2\, v_2 + \cdots + k_n\, v_n\}\,,$$

όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του K.

Αν επιπλέον κάθε στοιχείο του V είναι και στοιχείο του $\mathrm{span}(K)$, τότε λέμε ότι το K **παράγει** τον V ή, εναλλακτικά, ότι αποτελεί **σύνολο γεννητόρων** του V.

Προσοχή!

Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό, η γραμμική θήκη είναι υπόχωρος του V.

Γραμμική Ανεξαρτησία

- Έστω το σύνολο,

$$K = \{\underbrace{(1,-1,-2)}_{v_1}, \underbrace{(5,-4,-10)}_{v_2}, \underbrace{(-3,1,0)}_{v_3}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, η κλειστή θήκη του K είναι το σύνολο,

$$\mathrm{span}(K) = \{k_1\, v_1 + k_2\, v_2 + k_3\, v_3;\ \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(k_1 + 5\,k_2 - 3\,k_3,\ -k_1 - 4\,k_2 + k_3,\ -2\,k_1 - 10\,k_2);\ \ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$$

Για να ελέγξουμε αν το διάνυσμα $v = (-4, 3, 14)$ ανήκει στο $\mathrm{span}(K)$, θα πρέπει να ελέγξουμε αν υπάρχουν κατάλληλα $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε το v να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων v_1, v_2, v_3, του K,

$$v = k_1\, v_1 + k_2\, v_2 + k_3\, v_3.$$

Δηλαδή, ισοδύναμα, θα πρέπει να βρούμε (αν υπάρχουν) κατάλληλα k_1, k_2, k_3 που να επαληθεύουν το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} k_1 & + & 5\,k_2 & - & 3\,k_3 & = & -4 \\ -k_1 & - & 4\,k_2 & + & k_3 & = & 3 \\ -2\,k_1 & - & 10\,k_2 & & & = & 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = 8 \\ k_2 = -3 \\ k_3 = -1 \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

- Έστω το σύνολο,

$$E = \{\underbrace{(1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{v_2}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Θα ελέγξουμε αν παράγει τον δ.χ. $\mathbb{R}^3$.

Για να παράγεται ο $\mathbb{R}^3$ από το E, θα πρέπει κάθε διάνυσμα $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v_1, v_2. Δηλαδή να υπάρχουν κατάλληλα $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε,

$$(x,y,z) = k_1\,(1,0,0) + k_2\,(0,1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Άρα το παραπάνω σύστημα έχει λύσεις μόνο όταν $z = 0$. Προφανώς τα (x,y,z) με $z \neq 0$ δεν μπορούν να δοθούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των v_1, v_2. Άρα το σύνολο E δεν παράγει τον δ.χ. $\mathbb{R}^3$. ■

Γραμμική Ανεξαρτησία

Πρόταση

Αν V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. και $K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$, $K \neq \emptyset$, τότε το σύνολο $\mathrm{span}(K)$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n$. Δηλαδή, για κάθε άλλο υπόχωρο W που περιέχει τα διανύσματα αυτά, ισχύει ότι,

$$\mathrm{span}(K) \subseteq W.$$

Ορισμός

Γραμμικώς ανεξάρτητα (linearly independent) καλούνται τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n$, ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V, αν ισχύει ότι:

$$k_1\, v_1 + k_2\, v_2 + \cdots k_n\, v_n = \mathcal{O}_n \;\Leftrightarrow\; k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0,$$

με $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{F}$. Σε αντίθετη περίπτωση, τα διανύσματα καλούνται **γραμμικώς εξαρτημένα**. Αντίστοιχα, το σύνολο $K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ καλείται γραμμικώς ανεξάρτητο ή εξαρτημένο αν τα $v_1, v_2, \dots, v_n$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή εξαρτημένα.

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ιδιότητες

1. Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή αν υπάρχει κάποιο v_i τέτοιο ώστε,

$$v_i = k_1\, v_1 + \cdots + k_{i-1}\, v_{i-1} + k_{i+1}\, v_{i+1} + \cdots + k_n\, v_n,$$

   με κατάλληλα k_j.

2. Το κενό σύνολο $\emptyset$ θεωρείται πάντα γραμμικώς ανεξάρτητο.
3. Το μηδενικό διάνυσμα $\mathcal{O}_V$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένο.
4. Κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα μόνο του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
5. Αν το σύνολο K είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε και κάθε υπερσύνολο L με $K \subseteq L$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
6. Αν το σύνολο K είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε και κάθε υποσύνολο M με $M \subseteq K$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Γραμμική Ανεξαρτησία

- Να ελέγξετε ως προς την γραμμική εξάρτηση τα διανύσματα,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

του δ.χ. $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, τα A_1, A_2, A_3, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εφόσον για $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι,

$$k_1\,A_1 + k_2\,A_2 + k_3\,A_3 = \mathcal{O}_{2\times 2} \;\Leftrightarrow\; k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

Έχουμε:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} k_1 & + & 3\,k_2 & + & k_3 & = & 0 \\ 2\,k_1 & - & k_2 & - & 5\,k_3 & = & 0 \\ k_1 & + & 10\,k_2 & + & 8\,k_3 & = & 0 \\ k_1 & + & 2\,k_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Τώρα ελέγχουμε αν το σύστημα που προέκυψε έχει λύσεις. Πρόκειται για ομογενές σύστημα 4×3 και το επιλύουμε με χρήση επαυξημένου πίνακα:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 10 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{cc} (-2) & (-1) \\ & \\ & \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \div(-7) \\ \div 7 \\ \div(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ (-1) & (-3) \\ & \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ο πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και παρατηρούμε ότι,

$$\mathrm{rank}(A|b) = \mathrm{rank}(A) = 2 \neq 3 = n,$$

άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και όχι μόνο την τετριμμένη $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Συνεπώς τα A_1, A_2, A_3, είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ■

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός

1. **Χώρος γραμμών** ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ καλείται ο υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{F}^n$ που παράγεται από τις γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_m$, του A,

$$R(A) = \mathrm{span}(r_1, r_2, \ldots, r_m).$$

2. **Χώρος στηλών** ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ καλείται ο υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{F}^m$ που παράγεται από τις στήλες $c_1, c_2, \ldots, c_n$, του A,

$$C(A) = \mathrm{span}(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Προφανώς ισχύει ότι $R(A) = C\left(A^T\right)$.

Πρόταση

Έστω ο πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Τότε ισχύει ότι:

1. Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες έχουν ίδιους χώρους γραμμών.
2. Αν $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ η κλιμακωτή μορφή του A, τότε οι μη-μηδενικές γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{F}^n$.

Βάση - Διάσταση

Ορισμός

Βάση (base) ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V καλείται ένα υποσύνολό του $B \subseteq V$, αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το B παράγει τον V, δηλαδή $V = \mathrm{span}(B)$.
2. Το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Το σύνολο $B = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, οποιοδήποτε διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, γράφεται ως:

$$(x, y, z) = x\,(1,0,0) + y\,(0,1,0) + z\,(0,0,1) = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3,$$

άρα το B παράγει τον $\mathbb{R}^3$. Επιπλέον:

$$k_1\,e_1 + k_2\,e_2 + k_3\,e_3 = \mathcal{O} \iff (k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (0,0,0) \iff k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Άρα το B είναι και γραμμικώς ανεξάρτητο, συνεπώς είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Βάση - Διάσταση

Προτάσεις

1. Ένα πεπερασμένο σύνολο $B \subseteq V$ είναι βάση του $\mathbb{F}$-δ.χ. V αν<u>ν</u> κάθε $v \in V$ γράφεται ως <u>μοναδικός</u> γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του B. Οι συντελεστές αυτού του γραμμικού συνδυασμού καλούνται **συνιστώσες** του v ως προς την βάση B.
2. Αν $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του $\mathbb{F}$-δ.χ. V, τότε και κάθε άλλη βάση του V θα αποτελείται επίσης από n στοιχεία.

Ορισμός

Διάσταση (dimension) ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V καλείται το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του V και συμβολίζεται,

$$\dim_{\mathbb{F}} V \quad \text{ή} \quad \dim V.$$

Αν $V = \{\mathcal{O}_V\}$, τότε $\dim V = 0$.

Βάση - Διάσταση

- Να δειχθεί ότι το σύνολο,

$$E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4} \right\}$$

είναι βάση του δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$ και να δοθεί η διάστασή του.

Έστω το τυχαίο διάνυσμα (πίνακας),

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Τότε προφανώς ισχύει ότι,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x\, E_1 + y\, E_2 + z\, E_3 + w\, E_4.$$

Άρα το E παράγει τον $M_2(\mathbb{R})$.

Βάση - Διάσταση

Επιπλέον, το E είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι,

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 + k_4 E_4 = \mathcal{O}_2 \ \Leftrightarrow$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{array} \right.$$

Άρα, εκ του ορισμού, έπεται ότι το σύνολο E είναι και γραμμικώς ανεξάρτητο. Επομένως αποτελεί βάση του δ.χ. $M_2(\mathbb{R})$. Επιπλέον, αφού η βάση E αποτελείται από 4 στοιχεία, έχουμε ότι,

$$\dim\, M_2(\mathbb{R}) = 4. \quad \blacksquare$$

Προσπαθήστε να γενικεύσετε τα παραπάνω και να δείξετε ότι,

$$\dim\, M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \times n.$$

Βάση - Διάσταση

Μεθοδολογία ΕΥΡΕΣΗΣ ΒΑΣΗΣ

Για να βρούμε μια βάση του δ.χ. $\mathrm{span}(S)$ που παράγεται από ένα σύνολο $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ διανυσμάτων του $\mathbb{R}^m$, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ που περιέχει σε γραμμές τα διανύσματα του S, οπότε και $\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(A)$.
2. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον A ώστε να καταλήξουμε στην κλιμακωτή μορφή του, έστω B. Από γνωστή πρόταση, αφού οι πίνακες A και B είναι γραμμοϊσοδύναμοι, θα έχουν ίδιους χώρους γραμμών, δηλαδή
$$\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(A) = \mathrm{span}(B).$$
3. Οι μη-μηδενικές γραμμές του κλιμακωτού πίνακα B αποτελούν μια βάση του $\mathrm{span}(B)$, άρα και των $\mathrm{span}(A), \mathrm{span}(S)$. Επιπλέον,
$$\dim\, \mathrm{span}(S) = \dim\, \mathrm{span}(A) = \dim\, \mathrm{span}(B) = \mathrm{rank}(B).$$

Βάση - Διάσταση

- Έστω το σύνολο,

$$S = \{\underbrace{(1,2,4,-2)}_{v_1},\ \underbrace{(2,3,1,-9)}_{v_2},\ \underbrace{(3,4,-2,-16)}_{v_3}\}.$$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $\mathrm{span}(S)$.

Βάζουμε τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, σε γραμμές σε ένα πίνακα A και τον φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -9 \\ 3 & 4 & -2 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-3) \\ \hookleftarrow & | \\ & \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -14 & -10 \end{pmatrix} (-1) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & -2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \ \ (\text{κλιμακωτή μορφή})$$

Σύμφωνα με την μεθοδολογία μας, το σύνολο των μη-μηδενικών γραμμών του B, δηλαδή το,

$$S_B = \{(1,2,4,-2),\ (0,1,7,5)\},$$

αποτελεί μια βάση του $\mathrm{span}(S)$ και επομένως,

$$\dim \mathrm{span}(S) = 2. \quad \blacksquare$$

Βάση - Διάσταση

Πρόταση

Έστω V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. με $\dim V = n$ και ένα υποσύνολο $K \subseteq V$, $K \neq \emptyset$, με πληθάριθμο $|K| = m$. Τότε:

(a) Αν $m > n$, το K είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(b) Αν $m < n$, το K δεν παράγει τον V.

Με απλά λόγια...

Η διάσταση ενός δ.χ. δίνει το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που μπορεί να περιέχει οποιοδήποτε υποσύνολο του δ.χ. και, ταυτόχρονα, δίνει το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων που απαιτούνται για να παράγεται ο χώρος.

Βάση - Διάσταση

Πρόταση

Έστω V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. με $\dim V = n$ και ένα υποσύνολο,

$$K = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subseteq V,$$

γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο (υποχρεωτικά $p \leqslant n$). Τότε υπάρχει βάση B του V που περιέχει το K.

Με απλά λόγια...

Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο ενός δ.χ. περιέχεται σε μια βάση του.

Βάση - Διάσταση

Πρόταση

Έστω V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. με $\dim V = n$. Τότε ένα υποσύνολο,

$$K = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V,$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο <u>ανν</u> παράγει τον V.

Με απλά λόγια...

Αν η διάσταση του δ.χ. είναι n, τότε κάθε υποσύνολο με n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα είναι και βάση του. Επίσης, και κάθε σύνολο με n στοιχεία που παράγει τον χώρο είναι και βάση του.

Βάση - Διάσταση

Πρόταση

Έστω V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. με $\dim V = n$ και U ένας υπόχωρος του V με $\dim U = m$. Τότε:

1. $\dim U \leqslant \dim V$
2. $U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$

Με απλά λόγια...

Η διάσταση ενός δ.χ. είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την διάσταση κάθε υπόχωρού του και η ισότητα ισχύει μόνο αν ο υπόχωρος ταυτίζεται με τον δ.χ.

Βάση - Διάσταση

Προτάσεις

1. Αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και $A = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)$ ο πίνακας που τα περιέχει σε στήλες, τότε τα διανύσματα αυτά είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$ <u>ανν</u> $\det A \neq 0$.
2. Έστω V ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και U, W, δύο υπόχωροί του. Τότε,

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Βάση - Διάσταση

- Έστω τα δυανύσματα του $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = (2, 0, 0), \qquad v_2 = (0, 0, -3).$$

Να βρεθούν διανύσματα $u, w \in \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε το u να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο με τα v_1, v_2, ενώ το w να είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Έστω,

$$u = (u_1, u_2, u_3), \qquad w = (w_1, w_2, w_3),$$

τα ζητούμενα διανύσματα. Τότε, για να είναι τα v_1, v_2, u, γραμμικώς ανεξάρτητα, θα πρέπει ισοδύναμα να ισχύει ότι $\det A \neq 0$, όπου A ο πίνακας που τα περιέχει σε στήλες. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & -3 & u_3 \end{pmatrix}$$

Επομένως,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & -3 & u_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ -3 & u_3 \end{vmatrix} = 6\, u_2$$

Βάση - Διάσταση

Άρα,

$$\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 6\,u_2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; u_2 \neq 0$$

Δηλαδή, οποιοδήποτε διάνυσμα $u = (u_1, u_2, u_3)$ με $u_2 \neq 0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο με τα v_1, v_2. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο είναι το διάνυσμα,

$$u = (0, 1, 0).$$

Αντίστοιχα, για να είναι γραμμικώς εξαρτημένο το $w = (w_1, w_2, w_3)$, αρκεί η αντίστοιχη ορίζουσα να είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή,

$$\det A = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 2 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & w_2 \\ 0 & -3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 6\,w_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; w_2 = 0$$

Δηλαδή, οποιοδήποτε διάνυσμα $w = (w_1, w_2, w_3)$ με $w_2 = 0$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο με τα v_1, v_2. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο είναι το διάνυσμα,

$$w = (1, 0, 1). \quad \blacksquare$$

Βάση - Διάσταση

► Έστω V ένας δ.χ. με $\dim V = 7$ και U_1, U_2, υπόχωροί του με $\dim U_1 = 3$, $\dim U_2 = 5$. Να προσδιοριστούν οι δυνατές τιμές του $\dim(U_1 \cap U_2)$.

Γνωρίζουμε από το θεώρημα ότι,

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 3 + 5 - \dim(U_1 \cap U_2) = 8 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι, αφού U_1, U_2, υπόχωροι του V, θα είναι και το $U_1 + U_2$ υπόχωρος του V (από παλαιότερο θεώρημα), άρα,

$$\dim(U_1 + U_2) \leqslant \dim V = 7.$$

Επίσης, τα σύνολα U_1, U_2, είναι υποσύνολα του $U_1 + U_2$, άρα,

$$\left.\begin{array}{l} \dim(U_1 + U_2) \geqslant \dim U_1 \\ \dim(U_1 + U_2) \geqslant \dim U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \dim(U_1 + U_2) \geqslant 3 \\ \dim(U_1 + U_2) \geqslant 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \geqslant 5.$$

Από όλα τα παραπάνω έχουμε:

$$5 \leqslant 8 - \dim(U_1 \cap U_2) \leqslant 7 \;\Leftrightarrow\; 3 \geqslant \dim(U_1 \cap U_2) \geqslant 1.$$

Άρα,

$$\dim(U_1 \cap U_2) = 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3. \quad \blacksquare$$

Βάση - Διάσταση

Συσχέτιση με τα Γραμμικά Συστήματα

Το $m \times n$ γραμμικό σύστημα,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

γράφεται και στην μορφ'η,

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{v_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{v_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{v_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}$$

Προφανώς, το σύστημα θα έχει λύση αννν το b γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_n$, δηλαδή ανν,

$$b \in \operatorname{span}(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}).$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός

Γραμμική Απεικόνιση ανάμεσα σε δύο $\mathbb{F}$-δ.χ. U και V, καλείται μια απεικόνιση,

$$f : U \to V,$$

αν $\forall\, u_1, u_2 \in U$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, ισχύει ότι,

1. $f\,(u_1 + u_2) = f\,(u_1) + f\,(u_2)$
2. $f\,(\lambda\, u_1) = \lambda\, f\,(u_1)$

ή ισοδύναμα,

$$f\,(\lambda\, u_1 + \mu\, u_2) = \lambda\, f\,(u_1) + \mu\, f\,(u_2)$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

- Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\,x$ είναι γραμμική, ενώ η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 2\,x + 1$ δεν είναι.

Πράγματι, έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$f(\lambda\,x + \mu\,y) = 2\,(\lambda\,x + \mu\,y) = (2\,\lambda\,x) + (2\,\mu\,y) = \lambda\,(2\,x) + \mu\,(2\,y) = \lambda\,f(x) + \mu\,f(y).$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, η f είναι γραμμική.

Αντιθέτως, για την g έχουμε,

$$g(\lambda\,x + \mu\,y) = 2\,(\lambda\,x + \mu\,y) + 1 = \lambda\,(2\,x) + \mu\,(2\,y) + 1,$$

ενώ,

$$\lambda\,g(x) + \mu\,g(y) = \lambda\,(2\,x + 1) + \mu\,(2\,y + 1) = \lambda\,(2\,x) + \mu\,(2\,y) + (\lambda + \mu).$$

Προφανώς οι παραπάνω σχέσεις δεν ταυτίζονται για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, άρα,

$$g(\lambda\,x + \mu\,y) \neq \lambda\,g(x) + \mu\,g(y),$$

και συνεπώς η g δεν είναι γραμμική. ■

Γραμμικές Απεικονίσεις

- Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z) = (2\,x + 3\,y, x + 4\,y - z)$, είναι γραμμική.

Πράγματι,

$$f\left(\lambda\left(x_1, y_1, z_1\right) + \mu\left(x_2, y_2, z_2\right)\right) = f\left(\underbrace{\lambda\,x_1 + \mu\,x_2}_{x}, \underbrace{\lambda\,y_1 + \mu\,y_2}_{y}, \underbrace{\lambda\,z_1 + \mu\,z_2}_{z}\right) =$$

$$= \Big(2\,\left(\lambda\,x_1 + \mu\,x_2\right) + 3\,\left(\lambda\,y_1 + \mu\,y_2\right),\ \left(\lambda\,x_1 + \mu\,x_2\right) + 4\,\left(\lambda\,y_1 + \mu\,y_2\right) - \left(\lambda\,z_1 + \mu\,z_2\right)\Big) =$$

$$= \left(2\,\lambda\,x_1 + 2\,\mu\,x_2 + 3\,\lambda\,y_1 + 3\,\mu\,y_2, \lambda\,x_1 + 4\,\lambda\,y_1 - \lambda\,z_1 + \mu\,x_2 + 4\,\mu\,y_2 - \mu\,z_2\right)$$

Αντίστοιχα,

$$\lambda\,f\left(x_1, y_1, z_1\right) + \mu\,f\left(x_2, y_2, z_2\right) = \lambda\,\left(2\,x_1 + 3\,y_1, x_1 + 4\,y_1 - z_1\right) + \mu\,\left(2\,x_2 + 3\,y_2, x_2 + 4\,y_2 - z_2\right) =$$

$$= \left(2\,\lambda\,x_1 + 2\,\mu\,x_2 + 3\,\lambda\,y_1 + 3\,\mu\,y_2, \lambda\,x_1 + 4\,\lambda\,y_1 - \lambda\,z_1 + \mu\,x_2 + 4\,\mu\,y_2 - \mu\,z_2\right)$$

Προφανώς οι δύο σχέσεις ταυτίζονται, άρα η απεικόνιση είναι γραμμική. ■

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός

Πυρήνας (kernel) μιας γραμμικής απεικόνισης $f : U \to V$, ονομάζεται το σύνολο,

$$\ker f = \{u \in U;\ f(u) = \mathcal{O}_V\},$$

δηλαδή είναι το σύνολο των στοιχείων του U που απεικονίζονται μέσω της f στο ουδέτερο στοιχείο του V.

Ορισμός

Εικόνα (image) μιας γραμμικής απεικόνισης $f : U \to V$, ονομάζεται το σύνολο,

$$\mathrm{Im}\, f = \{v \in V;\ f(u) = v,\ \text{για κάποιο } u \in U\},$$

δηλαδή είναι το σύνολο των εικόνων των στοιχείων του U.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός

Ταυτοτική καλείται η γραμμική απεικόνιση $1_V : V \to V$, με $f(v) = v$ για κάθε $v \in V$.

Πρόταση

Ο πυρήνας $\ker f$ και η εικόνα $\mathrm{Im}\, f$ μιας γραμμικής απεικόνισης $f : U \to V$, είναι υπόχωροι των συνόλων U και V, αντίστοιχα.

Έστω $u, v \in \ker f$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Τότε,

$$f(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\, f(u) + \mu\, f(v) = \lambda\, \mathcal{O}_V + \mu\, \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_V,$$

και επομένως $\lambda\, u + \mu\, v \in \ker f$. Οπότε, από γνωστό θεώρημα, έπεται ότι το $\ker f$ είναι υπόχωρος.

Προσπαθήστε να αποδείξετε το αντίστοιχο και για την εικόνα $\mathrm{Im}\, f$.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμοί

Έστω μια απεικόνιση $f : U \to V$.

1. Η f καλείται **επί** αν $\mathrm{Im}\, f = V$.
2. Η f καλείται **ένα προς ένα** (συμβολίζεται 1-1) αν $\forall\, v \in \mathrm{Im}\, f$, $\exists!\, u \in U$, με $f(u) = v$ ή, ισοδύναμα, αν

$$f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2, \ \forall\, u_1, u_2 \in U,$$

   δηλαδή όταν κάθε στοιχείο του V αποτελεί εικόνα ενός και μόνο στοιχείου του U.

3. Αν η f είναι γραμμική απεικόνιση και επί, τότε καλείται **επιμορφισμός**.
4. Αν η f είναι γραμμική απεικόνιση και 1-1, τότε καλείται **μονομορφισμός**.
5. Αν η f είναι γραμμική απεικόνιση, επί και 1-1, τότε καλείται **ισομορφισμός**. Σε αυτή την περίπτωση, οι δ.χ. U και V καλούνται ισόμορφοι και συμβολίζουμε $U \cong V$.

Γραμμικές Απεικονίσεις

▶ Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$, είναι γραμμική και να βρεθεί ο πυρήνας της. Στην συνέχεια να ελεγχθεί αν η f είναι ισομορφισμός.

Εργαστείτε με τον γνωστό τρόπο με χρήση του ορισμού, για να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.

Για να βρούμε τον πυρήνα της f, πρέπει να βρούμε τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $f(x, y) = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$. Έχουμε:

$$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - 3y, x + 4y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 0 \\ x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right.$$

Το σύστημα είναι ομογενές 2×2, με ορίζουσα,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0.$$

Άρα έχει μοναδική λύση και αυτή, κατά τα γνωστά για τα ομογενή συστήματα, είναι η τετριμμένη, $(x, y) = (0, 0)$. Δηλαδή,

$$\ker f = \{(0,0)\}.$$

Για να είναι η f ισομορφισμός πρέπει να είναι επί και 1-1.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Για να είναι επί θα πρέπει $\operatorname{Im} f \equiv \mathbb{R}^2$, δηλαδή για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, θα πρέπει να υπάρχει $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, με

$$f(x, y) = (2\,x - 3\,y, x + 4\,y) = (a, b).$$

Ισοδύναμα, θα πρέπει να έχει λύσεις το ακόλουθο σύστημα,

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & - & 3\,y & = & a \\ x & + & 4\,y & = & b \end{array}\right.$$

Επιλύουμε με χρήση επαυξημένου πίνακα:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 2 & -3 & a \\ 1 & 4 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 4 & b \\ 2 & -3 & a \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 4 & b \\ 0 & -11 & a - 2b \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \div(-11) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & b \\ 0 & 1 & \frac{2b-a}{11} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4a-3b}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2b-a}{11} \end{array}\right)$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση. Δηλαδή, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, υπάρχει και μάλιστα μοναδικό,

$$(x, y) = \left(\frac{4a - 3b}{11}, \frac{2b - a}{11}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

με $f(x, y) = (a, b)$. Άρα η f είναι επί, αφού υπάρχει (x, y), και επιπλέον είναι 1-1, αφού αυτό είναι μοναδικό. Άρα η f είναι ισομορφισμός. ■

Γραμμικές Απεικονίσεις

Προτάσεις

Έστω $f : U \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\dim U = m$, $\dim V = n$.

1. Αν $U = \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_m)$, τότε,
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}\Big(f(u_1), \ldots, f(u_m)\Big).$$
2. Για την διάσταση του U ισχύει ότι:
$$\dim U = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f.$$
3. Οι δ.χ. U και V είναι ισόμορφοι <u>ανν</u> $\dim U = \dim V$.
4. Αν η f είναι ισομορφισμός και $B_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ μια βάση του U, το σύνολο των εικόνων των διανυσμάτων της B_U, $B_V = \{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$, είναι βάση του V.

Γραμμικές Απεικονίσεις

- Να βρεθεί το $\dim \mathrm{Im}\, f$ της γραμμικής απεικόνισης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (2\,x + 8\,y, x + 4\,y)$.

Αξιοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε:

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker f = 2 - \dim \ker f.$$

Άρα αρκεί να βρούμε το $\dim \ker f$. Έχουμε:

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2\,x + 8\,y, x + 4\,y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 8\,y & = & 0 \\ x & + & 4\,y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -4\,y.$$

Δηλαδή,

$$\ker f = \{(-4\,y, y),\ y \in \mathbb{R}\} = \{y\,(-4, 1),\ y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Προφανώς, μια βάση του $\ker f$ είναι το σύνολο $B = \{(-4, 1)\}$ και άρα, $\dim \ker f = 1$. Συνεπώς,

$$\dim \mathrm{Im}\, f = 1. \quad \blacksquare$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω $f : U \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και $S_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $S_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, βάσεις των U, V, αντίστοιχα. Έστω ότι οι εικόνες $f(u_i) \in V$, $i = 1, 2, \ldots, n$, δίνονται ως προς την βάση S_V ως εξής:

$$\begin{cases} f(u_1) & = & a_{11}\, v_1 & + & \cdots & + & a_{m1}\, v_m \\ f(u_2) & = & a_{12}\, v_1 & + & \cdots & + & a_{m2}\, v_m \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ f(u_n) & = & a_{1n}\, v_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\, v_m \end{cases}$$

Πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f **ως προς τις βάσεις** S_U, S_V, καλείται ο $m \times n$ πίνακας,

$$(f)_{S_U,S_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \text{συντελεστές του } v_1 \\ \leftarrow \quad \text{συντελεστές του } v_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \leftarrow \quad \text{συντελεστές του } v_m \end{array}$$

που περιέχει σε γραμμές τους συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού καθενός διανύσματος $f(u_i)$. Ο πίνακας αυτός είναι **μοναδικός**.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Μεθοδολογία

Έστω $f : U \to V$ μια γραμμική απεικόνιση ανάμεσα στους χώρους U και V με $\dim U = n$, $\dim V = m$. Αν $(f)_{S_U,S_V}$ ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις S_U και S_V, τότε η εικόνα ενός διανύσματος $x \in U$, με συνιστώσες $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ ως προς την βάση S_U, δίνεται κατευθείαν εκφρασμένη ως προς την βάση S_V ως εξής:

$$f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = (f)_{S_U,S_V} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

- Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + y),$$

και οι βάσεις,

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}, \qquad S_{\mathbb{R}^2} = \{\underbrace{(1,0)}_{d_1}, \underbrace{(0,1)}_{d_2}\}.$$

Οι εικόνες των διανυσμάτων της $S_{\mathbb{R}^3}$ είναι οι εξής:

$$\begin{array}{lclclcl} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (1,1) & = & 1\,d_1 + 1\,d_2 \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (1,1) & = & 1\,d_1 + 1\,d_2 \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (2,0) & = & 2\,d_1 + 0\,d_2 \end{array}$$

Γραμμικές Απεικονίσεις

Άρα ο πίνακας της f ως προς τις δύο βάσεις είναι,

$$(f)_{S_{\mathbb{R}^3}, S_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

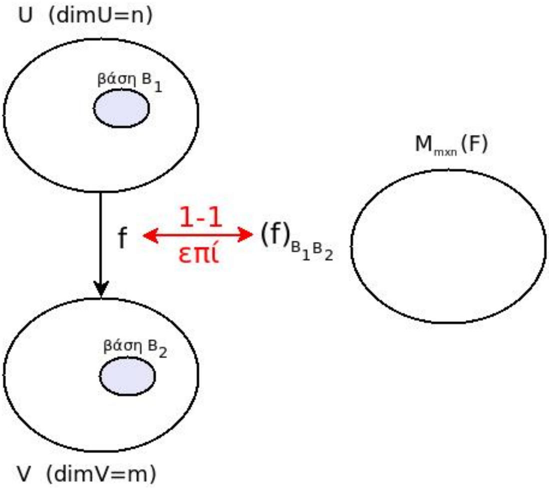
Έστω το διάνυσμα,

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Η εικόνα του x μέσω της f στον δ.χ. $\mathbb{R}^2$ δίνεται ως εξής,

$$f(x) = (f)_{S_{\mathbb{R}^3}, S_{\mathbb{R}^2}} \, x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Γραμμικές Απεικονίσεις



Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στις γραμμικές απεικονίσεις και στους πίνακες!

Αλλαγή Βάσης

Ορισμός

'Εστω $1_U : U \to U$ η ταυτοτική απεικόνιση,

$$1_U(u) = u, \quad \forall\, u \in U.$$

και $\dim U = n$. 'Εστω και $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, δύο βάσεις του δ.χ. U. Προφανώς, οι εικόνες $f(u_i)$, δίνονται ως προς την βάση B_2 ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 1_U(u_1) & = & u_1 & = & a_{11}\, v_1 & + & \cdots & + & a_{n1}\, v_n \\ 1_U(u_2) & = & u_2 & = & a_{12}\, v_1 & + & \cdots & + & a_{n2}\, v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1_U(u_n) & = & u_n & = & a_{1n}\, v_1 & + & \cdots & + & a_{nn}\, v_n \end{array} \right.$$

Πίνακας αλλαγής βάσης από την B_1 στην B_2, καλείται ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας,

$$P_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Αλλαγή Βάσης

Μεθοδολογία ΕΥΡΕΣΗΣ ΠΙΝΑΚΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ

Για να υπολογίσουμε τους πίνακες αλλαγής βάσης P_{B_1,B_2} και P_{B_2,B_1}, ως προς δύο βάσεις, $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ και $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, ενός δ.χ. U, δουλεύουμε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε τους πίνακες,

$$K = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix},$$

   που περιέχουν σε στήλες τα διανύσματα των B_1 και B_2. Σύμφωνα με τους ορισμούς, θα ισχύει ότι,

$$K = L\, P_{B_1,B_2}.$$

2. Αφού οι πίνακες K, L, περιέχουν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα-στήλες, θα αντιστρέφονται. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τους πίνακες αλλαγής βάσης,

$$P_{B_1,B_2} = L^{-1} K, \qquad P_{B_2,B_1} = K^{-1} L.$$

Αλλαγή Βάσης

Μεθοδολογία ΕΥΡΕΣΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΝΕΑ ΒΑΣΗ

Έστω $1_U : U \to U$ η ταυτοτική απεικόνιση, $1_U(u) = u$, $\forall\, u \in U$, με $\dim U = n$. Έστω και B_1, B_2, δύο βάσεις του δ.χ. U και P_{B_1,B_2} ο πίνακας αλλαγής βάσης από την B_1 στην B_2. Αν $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in U$ ένα διάνυσμα δοσμένο ως προς την B_1, τότε η εικόνα του ως προς την B_2 θα έχει συντεταγμένες,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P_{B_1,B_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Αλλαγή Βάσης

- Έστω η γραμμική απεικόνιση $1_U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, και οι βάσεις,

$$B_1 = \{(2,1),(1,1)\}, \qquad B_2 = \{(1,1),(1,-1)\}.$$

Για να βρούμε τους πίνακες αλλαγής βάσης από την B_1 στην B_2 και αντίστροφα, σχηματίζουμε αρχικά τους πίνακες,

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε τους αντίστροφούς τους, οι οποίοι στην περίπτωσή μας είναι,

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

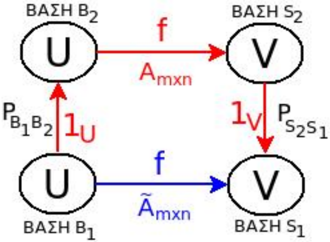
Οπότε οι πίνακες αλλαγής βάσης είναι οι ακόλουθοι,

$$P_{B_1,B_2} = L^{-1}K = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{B_2,B_1} = K^{-1}L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Αλλαγή Βάσης

Έστω $\dim U = n$, $\dim V = m$, το σχήμα μετάβασης είναι:



$$\boxed{\tilde{A} = P_{S_2 S_1} \; A \; P_{B_1 B_2}}$$

Αν $U = V$ και $S_1 = B_1$, $S_2 = B_2$, τότε:

$$\boxed{\tilde{A} = P_{B_1 B_2}^{-1} \; A \; P_{B_1 B_2}}$$

Αλλαγή Βάσης

Ορισμός

'Ομοιοι (similar) καλούνται δύο πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$, τέτοιος ώστε,

$$B = P^{-1}\; A\; P.$$

Ο πίνακας P καλείται τότε **πίνακας ομοιότητας** (similarity matrix).

Ιδιότητες

Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ δύο όμοιοι πίνακες, τότε:

1. $\det A = \det B$
2. $\mathrm{trace}\, A = \mathrm{trace}\, B$
3. $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$

Αλλαγή Βάσης

- Να ελεγχθεί αν είναι όμοιοι οι πίνακες,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Για να είναι όμοιοι θα πρέπει να υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε,

$$B = P^{-1}\, A\, P \Leftrightarrow P\, B = A\, P.$$

Έστω ότι υπάρχει τέτοιος πίνακας, $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Έχουμε:

$$P\, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$A\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αλλαγή Βάσης

Οι δύο πίνακες συμφωνούν όταν $x = 0$, $x = y$, $0 = 0$, $z = 0$, δηλαδή,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

Όμως, αυτός ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος διότι,

$$\det P = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{vmatrix} = 0$$

Άρα δεν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας και συνεπώς οι πίνακες A και B δεν είναι όμοιοι. $\blacksquare$

Εσωτερικό Γινόμενο

Ορισμός

Εσωτερικό Γινόμενο (inner product) καλείται μια απεικόνιση,

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot,\cdot\rangle : & V \times V & \to & \mathbb{F} \\ & (u,v) & \mapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

για την οποία, $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{F}$,

1. $\langle a\, u + b\, v, w\rangle = a\,\langle u, w\rangle + b\,\langle v, w\rangle$ (γραμμική απεικόνιση)
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
3. $\langle u, u\rangle \geqslant 0$
4. $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathcal{O}_V$

Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ο δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο καλείται **Ευκλείδιος** ή **ορθομοναδιαίος** δ.χ.

Εσωτερικό Γινόμενο

- Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως,

$$\langle x, y \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n,$$

με $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, ως προς την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$,

$$B = \{\underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, \ldots, 0)}_{e_2}, \ldots, \underbrace{(0, 0, \ldots, 1)}_{e_n}\},$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

Πράγματι, μπορούμε να επαληθεύσουμε τις ιδιότητες της απεικόνισης από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου:

(1) Έστω $z = (z_1, \ldots, z_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\langle a\, x + b\, y, z \rangle &= \langle (a\, x_1 + b\, y_1, \ldots, a\, x_n + b\, y_n), (z_1, \ldots, z_n) \rangle \\
&= (a\, x_1 + b\, y_1)\, z_1 + \cdots + (a\, x_n + b\, y_n)\, z_n \\
&= (a\, x_1\, z_1 + \cdots + a\, x_n\, z_n) + (b\, y_1\, z_1 + \cdots + b\, y_n\, z_n) \\
&= a\, \langle x, z \rangle + b\, \langle y, z \rangle
\end{aligned}$$

Εσωτερικό Γινόμενο

(2) Γνωρίζουμε ότι στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $x = \overline{x}$. 'Ετσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \\ &= y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n \\ &= \langle y, x \rangle \\ &= \overline{\langle y, x \rangle} \end{aligned}$$

(3) Για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(4) Για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι:

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}_V$$

'Αρα επιβεβαιώνονται όλες οι ιδιότητες του ορισμού και, συνεπώς, η δοθείσα απεικόνιση είναι εσωτερικό γινόμενο, το οποίο θα αποκαλούμε **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** του $\mathbb{R}^n$. ■

Εσωτερικό Γινόμενο

Ορισμοί

Έστω ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο.

1. **Μέτρο** (norm) ενός διανύσματος $u \in V$ καλείται ο μη-αρνητικός αριθμός,
$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$
2. **Απόσταση** (distance) μεταξύ δύο διανυσμάτων $u, v \in V$ καλείται η ποσότητα,
$$d(u, v) = \|u - v\|.$$
3. **Μοναδιαίο** (unitary) καλείται ένα διάνυσμα $u \in V$ αν,
$$\|u\| = 1.$$

Προτάσεις

Έστω ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, $\forall\, u, v \in V$ και $a \in \mathbb{F}$ ισχύει ότι:

1. $\|a\, u\| = |a|\, \|u\|$
2. $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\, \|v\|$ (ανισότητα Cauchy-Schwarz)
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Εσωτερικό Γινόμενο

- Έστω τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, ως προς την ορθοκανονική βάση,

$$u = (2, -1, 3)^\top, \qquad v = (1, -1, -2)^\top.$$

Τότε τα μέτρα τους είναι,

$$\|u\| = \sqrt{u^\top u} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$\|v\| = \sqrt{v^\top v} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Προφανώς κανένα από τα δύο δεν είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Η απόστασή τους είναι,

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(2, -1, 3)^\top - (1, -1, -2)^\top\| = \|(1, 0, 5)^\top\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

$$|\langle u, v\rangle| = |2 + 1 - 6| = 3 < \sqrt{14}\sqrt{6} \simeq 9.1652 = \|u\|\,\|v\|,$$

$$\|u + v\| = \|(3, -2, 1)\| = \sqrt{14} < \sqrt{14} + \sqrt{6} = \|u\| + \|v\|. \quad \blacksquare$$

Ορθογωνιότητα

Ορισμοί

Έστω ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο.

1. Μεταξύ δύο διανυσμάτων $u, v \in V$ υπάρχει μοναδική **γωνία** $\vartheta \in [0, \pi]$ με,

$$\cos\vartheta = \begin{cases} \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}, & \text{αν } \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}, \\ \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}, & \text{αν } \langle u, v\rangle \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

2. Ένα διάνυσμα $u \in V$ καλείται **ορθογώνιο** προς ένα διάνυσμα $v \in V$ ανν,

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

   Επειδή και $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} = 0$, Τα δύο διανύσματα καλούνται **ορθογώνια** μεταξύ τους.

Προτάσεις

Έστω ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο και $u, v \in V$.

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, ανν $\langle u, v\rangle = 0$ (Πυθαγόρειο θεώρημα).
2. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2$ (Κανόνας του παραλληλογράμμου).

Ορθογωνιότητα

Ορισμός

Ορθοκανονικό (orthonormal) καλείται ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ενός $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο, αν ισχύει ότι:

1. $\|v_i\| = 1$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.
2. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $\forall\, i \neq j$.

Προτάσεις

Έστω ένας $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο.

1. Αν $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του V, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
   (α) Το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
   (β) Για κάθε $v \in V$, το διάνυσμα,
   $$u = v - \langle v, v_1 \rangle\, v_1 - \langle v, v_2 \rangle\, v_2 - \cdots - \langle v, v_n \rangle\, v_n,$$
   είναι ορθογώνιο προς όλα τα διανύσματα του S.
2. Αν ο δ.χ. V έχει πεπερασμένη διάσταση τότε έχει ορθοκανονική βάση.

Ορθογωνιότητα

Μέθοδος Gram-Schmidt

Έστω $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του $\mathbb{F}$-δ.χ. V με εσωτερικό γινόμενο. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια *ορθοκανονική βάση* του V ως εξής:

1. Κατασκευάζουμε τα διανύσματα:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1 \quad \dashrightarrow \text{προβολή του } u_2 \text{ επάνω στο } u_1 \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\, u_2 \\
\vdots &\qquad \vdots \\
u_n &= v_n - \frac{\langle v_n, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1 - \cdots - \frac{\langle v_n, u_{n-1}\rangle}{\|u_{n-1}\|^2}\, u_{n-1}
\end{aligned}
$$

2. Παίρνουμε τα διανύσματα:

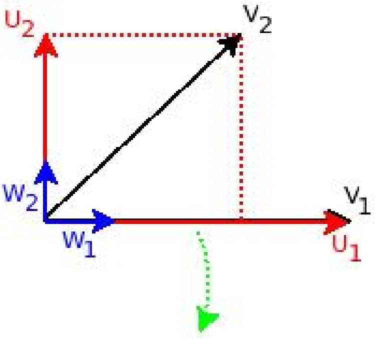
$$
w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}\, u_1, \quad \dots \quad , w_n = \frac{1}{\|u_n\|}\, u_n.
$$

Το σύνολο $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του V.

Ορθογωνιότητα

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Έστω $\dim V = 2$ και $B = \{v_1, v_2\}$ η βάση.



$$\frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\, u_1$$

Ορθογωνιότητα

- Έστω η βάση
$$B = \{\underbrace{(1,0,1)^\top}_{v_1}, \underbrace{(1,0,-1)^\top}_{v_2}, \underbrace{(0,3,4)^\top}_{v_3}\}$$

του $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο (επιβεβαιώστε ότι είναι βάση). Θα κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση από την B.

Ακολουθούμε την διαδικασία Gram-Schmidt. Αρχικά υπολογίζουμε τα διανύσματα,

$$u_1 = v_1, \qquad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1, \qquad u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2.$$

Έχουμε:

$$\|u_1\| = \|v_1\| = \sqrt{v_1^\top v_1} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$
$$\langle v_2, u_1\rangle = (1,0,-1)(1,0,1)^\top = 0,$$

επομένως,

$$u_2 = v_2 = (1,0,-1)^\top, \qquad \|u_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Παρατηρήστε ότι τα δύο πρώτα διανύσματα u_1, u_2, ταυτίζονται με τα v_1, v_2, καθώς αυτά είναι ήδη κάθετα μεταξύ τους.

Ορθογωνιότητα

Επιπλέον έχουμε,

$$\langle v_3, u_1 \rangle = (0,3,4)\,(1,0,1)^\top = 4,$$
$$\langle v_3, u_2 \rangle = (0,3,4)\,(1,0,-1)^\top = -4,$$

οπότε και,

$$u_3 = (0,3,4)^\top - \frac{4}{2}(1,0,1)^\top + \frac{4}{2}(1,0,-1)^\top = (0,3,0)^\top,$$

$$\|u_3\| = \sqrt{0^2+3^2+0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Έτσι, σχηματίζεται η ορθοκανονική βάση $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$, όπου,

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{\|u_1\|}\,u_1 &&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^\top, \\ w_2 &= \tfrac{1}{\|u_2\|}\,u_2 &&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^\top, \\ w_3 &= \tfrac{1}{\|u_3\|}\,u_3 &&= \tfrac{1}{3}(0,3,0) = (0,1,0)^\top. \quad \blacksquare \end{aligned}$$