Neuron Dynamics

Yasser Mounir, Simone Rossetto

May 2025

Contents

1 Passive Membrane model

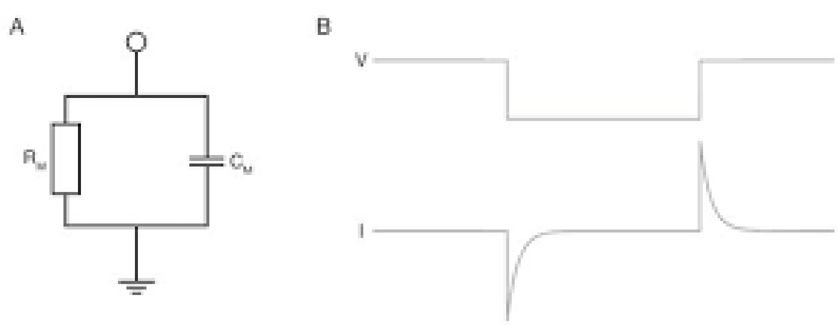

Figure 1: Passive membrane using a RC circuit

Sia $I(t)$ l'impulso che arriva al Soma del neurone, tale impulso genererà come risposta una variazione di tensione (nel caso dei neuroni è un potenziale d'azione).
Ora si vuole descrivere questa variazione di tensione per ogni istante di tempo arbitratrio.
Tale funzione infatti può essere descritta attraverso una equazione differenziale lineare. La corrente totale nel circuito può essere descritta come, quella che

passa attraverso il condensatore sommata a quella che passa attraverso la resistenza:

$$I(t) = I_r(t) + I_c(t)$$

$I_r(t)$:

$$V_r = R \cdot I_r$$

Tuttavia, la tensione del circuito è:

$$V = V_{rest} + V_r$$

V_r perciò si può riscrivere come:

$$V - V_{rest} = R \cdot I_r$$

Isolando I_r:

$$I_r = \frac{V - V_{rest}}{R}$$

$I_c(t)$:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q = C \cdot V$$

Per definizione di corrente: $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

Quindi la corrente totale del circuito $I(t)$, può essere scritta sotto forma di equazione differenziale:

$$I(t) = \frac{V - V_{rest}}{R} + C \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot I(t) - (V - V_{rest})$$

$(V - V_{rest})$ può essere semplicemente riassunta usando solo V, in quantoV_{rest} è una costante, infatti derivando:

$$\frac{d}{dt}(V - V_{rest}) = \frac{dV}{dt} - \frac{dV_{rest}}{dt} = \frac{dV}{dt} + 0$$

In generale l'equazione differenziale che descrivere come varia la tensione del circuito in funzione della corrente può essere scritto con la seguenze equazione differenziale:

$$\tau \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot I(t) - V \tag{1}$$

dove τ è la costante del circuito $R \cdot C$

1.1 Case: no current in the circuit

In questo caso si ipotizza di essere gia a un potenziale d'azione $V_0 > V_{rest}$ e quindi $\frac{dV}{dt} \neq 0$, inoltre si considera anche che non ci sia piu un impulso proveniente dall'esterno e quindi $I(t) = 0$ L'equazione differenziale diventa:

$$\tau \cdot \frac{dV}{dt} = -V$$

$$\frac{1}{V} \cdot dV = -\frac{1}{\tau} \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{V} \cdot dV = \int -\frac{1}{\tau} \cdot dt$$

la soluzione è:

$$\ln(V) = -\frac{t}{\tau} + c$$

ottendendo infine $V(t)$:

$$V(t) = e^c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

nel nostro caso con anche il voltaggio del neurone in queite si puo scrivere come:

$$V(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{rest} \tag{2}$$

1.2 Case: step current input

In questo caso si considera anche la presenza di $I(t)$, in particolare si parte con un potenziale V_{rest} e quindi $I(t) = 0$ e dopo un certo intervallo di tempo, la corrente in input del circuito passa da 0 a un valore costante k

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 \\ k & \text{se } t \geq t_0 \end{cases}$$

Il caso di $I(t)$ dove $t < t_0$, è quello piu semplice perche oltre al fatto che $I(t) = 0$, si ha che il potenziale d'azione del neurone è costante ne consegue che $\frac{dV}{dt} = 0$, e in conclusione l'unica soluzione all' equazione differenziale 1 è:

$$V(t) = V_{rest}$$

Nel caso invece di $I(t) = k$, l'equazione differenziale diventa:

$$\tau \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot K - V + V_{rest}$$

portando V da una parte e τ dall'altra:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot V = \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau} \tag{3}$$

adesso lasciamndo stare l'equazione differenziale e si fa un breve ripasso sulla derivata del prodotto:

$$\frac{d}{dt} \cdot [f(t) \cdot g(h(t))] = f'(t) \cdot g(h(t)) + f(t) \cdot g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

tornando all'equazione differnziale: si noti che il primo membro si puo scrivere come un differenziale di un prodotto, o almeno in parte, perche manca una funzione moltiplicata per $\frac{dV}{dt}$, tale funzione che chiameremo $\phi(t)$, deve avere derivata: un certa funzione moltiplicata per $\frac{1}{\tau}$ (ovvero la funzione che moltiplica V). $\phi(t)$ quindi deve avere una derivata tale che sia la funzione stessa moltiplicata per $\frac{1}{\tau}$, in pratica deve soddisfare questa equazione:

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$\int \frac{1}{\phi} \cdot d\phi = \int \frac{1}{\tau} \cdot dt$$

una delle soluzion è:

$$\phi(t) = e^{\frac{t}{\tau}}$$

Moltiplichhiamo entrambi i membri della 3 per $\phi(t)$:

$$e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \left(\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot V \right) = e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau}$$

scrivendo il primo membro come derivata di prodotto:

$$\frac{d}{dt} \cdot (V \cdot e^{\frac{t}{\tau}}) = e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau}$$

adesso integrando da entrambe le parte rispetto a t otteniamo:

$$\int \frac{d}{dt} \cdot (V \cdot e^{\frac{t}{\tau}}) \cdot dt = \int e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau} \cdot dt$$

$$V \cdot e^{\frac{t}{\tau}} = (R \cdot K + V_{rest}) \cdot \int \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{\tau} \cdot dt$$

$$V \cdot e^{\frac{t}{\tau}} = (R \cdot K + V_{rest}) \cdot e^{\frac{t}{\tau}} + C$$

Per assegnare il valore a C, si impone la condizione iniziale, ovvero che a $t = 0$ il neurone sia a riposo e quindi: $V(0) = V_{rest}$ in conclusione $V(t)$ è:

$$V(t) = V_{rest} + R \cdot I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \tag{4}$$

1.3 Case: impulse current

Riprendendo il risultato precedente della step currente, si considera il potenziale calcolato in un intervallo di tempo (si considera sempre la $I(t)$ costante):

$$V(t) = V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}\right)$$

$$V(t) = V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right) \tag{5}$$

Si puo definire impulso come il limtie di $V(t)$ per $\Delta \to 0$:

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)\right] \tag{6}$$

Usando l'espansione di Taylor e^x puo essere scritto come:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Nel nostro caso per risolvere il limite ci basta la successione fino a $n = 1$:

$$e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 1 - \frac{\Delta t}{\tau}$$

il limite diventa:

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - (1 - \frac{\Delta t}{\tau})\right)\right] \tag{7}$$

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot I \cdot \frac{\Delta t}{\tau}\right] \tag{8}$$

ricordanto che $\tau = R \cdot C$ e $I = \frac{q}{\Delta t}$:

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot \frac{q}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right] = V_{rest} + \frac{q}{C} \tag{9}$$

$$V(t) = V_{rest} + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{C} \cdot I(t')dt' \tag{10}$$

dove t' è il tempo in cui parte l'impulso