Neuron Dynamics

Yasser Mounir, Simone Rossetto, Tommaso Saccon

May 2025

Contents

1 Modello Leaky Integrate-and-Fire

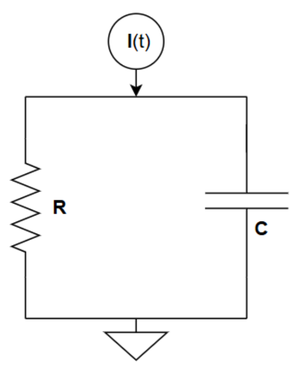

Figure 1: Membrana passiva come circuito RC

Sia $I(t)$ l'impulso che giunge al Soma neuronale, tale impulso genererà in risposta una variazione di potenziale d'azione ΔV.

Si intende descrivere la suddetta variazione di potenziale per ogni istante di tempo arbitrario, attraverso una funzione. Tale funzione può essere ricavata a partire da un equazione differenziale lineare. La corrente totale nel circuito RC in figura è uguale alla somma della I passante attraverso il condensatore e quella passante attraverso la resistenza; In altri termini:

$$I(t) = I_r(t) + I_c(t)$$

Analizziamo $I_r(t)$:

$$V_r = R \cdot I_r$$

Tuttavia, la tensione totale del circuito è:

$$V = V_{rest} + V_r$$

V_r perciò si può scrivere come:

$$V - V_{rest} = R \cdot I_r$$

Isolando I_r:

$$I_r = \frac{V - V_{rest}}{R}$$

Analizziamo $I_c(t)$:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q = C \cdot V$$

Per definizione di corrente: $I = \frac{dQ}{dt}$

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

Dunque la corrente totale del circuito $I(t)$, può essere descritta sotto forma di equazione differenziale:

$$I(t) = \frac{V - V_{rest}}{R} + C \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot I(t) - (V - V_{rest})$$

$(V - V_{rest})$ può essere semplicemente riassunta in funzione di V, in quantoV_{rest} è una costante, infatti derivando:

$$\frac{d}{dt}(V - V_{rest}) = \frac{dV}{dt} - \frac{dV_{rest}}{dt} = \frac{dV}{dt} + 0$$

In generale l'equazione differenziale che descrive la variazione della tensione nel circuito in funzione della corrente, può essere scritta come segue:

$$\tau \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot I(t) - V \tag{1}$$

dove τ è la costante del circuito $R \cdot C$

1.1 Caso: Corrente assente nel circuito

Si ipotizzi di avere già un potenziale d'azione $V_0 > V_{rest}$ e dunque $\frac{dV}{dt} \neq 0$, inoltre si consideri anche che non ci sia alcun impulso proveniente dall'esterno e quindi $I(t) = 0$ L'equazione differenziale diviene:

$$\tau \cdot \frac{dV}{dt} = -V$$

$$\frac{1}{V} \cdot dV = -\frac{1}{\tau} \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{V} \cdot dV = \int -\frac{1}{\tau} \cdot dt$$

La cui soluzione è:

$$\ln(V) = -\frac{t}{\tau} + c$$

Si ottiene infine $V(t)$:

$$V(t) = e^c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Nel caso considerato, dato il voltaggio del neurone in quiete, si puo scrivere come:

$$V(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{rest} \tag{2}$$

1.2 Caso: Step Current in input

Si consideri la presenza di $I(t)$, in particolare tale che a partire da un potenziale V_{rest} e quindi $I(t) = 0$, dopo un certo intervallo di tempo la corrente in input nel circuito passi da 0 ad un valore costante k

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 \\ k & \text{se } t \geq t_0 \end{cases}$$

Il caso di $I(t)$ dove $t < t_0$, è il piu semplice in quanto oltre al fatto che $I(t) = 0$, il potenziale d'azione del neurone è costante; ne consegue che $\frac{dV}{dt} = 0$, e l'unica soluzione all' equazione differenziale 1 è:

$$V(t) = V_{rest}$$

Nel caso invece di $I(t) = k$, l'equazione differenziale diventa:

$$\tau \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot K - V + V_{rest}$$

Sommando i membri per V e dividendoli per τ:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot V = \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau} \tag{3}$$

Prima di procedere è utile ricordare che la derivata di un prodotto tra 2 funzioni è sviluppata come segue:

$$\frac{d}{dt} \cdot [f(t) \cdot g(h(t))] = f'(t) \cdot g(h(t)) + f(t) \cdot g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

Tornando all'equazione differenziale: si noti che il primo membro può essere scritto come il differenziale di un prodotto, o almeno in parte, in quanto mancherebbe una funzione moltiplicata per $\frac{dV}{dt}$, che chiameremo $\phi(t)$. La sua derivata deve essere la funzione stessa moltiplicata per $\frac{1}{\tau}$, ovvero, deve soddisfare questa equazione:

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$\int \frac{1}{\phi} \cdot d\phi = \int \frac{1}{\tau} \cdot dt$$

Una delle cui soluzioni è:

$$\phi(t) = e^{\frac{t}{\tau}}$$

Moltiplicando entrambi i membri di (3) per $\phi(t)$:

$$e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \left(\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot V \right) = e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau}$$

Scrivendo il primo membro come derivata di prodotto:

$$\frac{d}{dt} \cdot (V \cdot e^{\frac{t}{\tau}}) = e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau}$$

Integrando entrambi i membri rispetto a t:

$$\int \frac{d}{dt} \cdot (V \cdot e^{\frac{t}{\tau}}) \cdot dt = \int e^{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{R \cdot K + V_{rest}}{\tau} \cdot dt$$

$$V \cdot e^{\frac{t}{\tau}} = (R \cdot K + V_{rest}) \cdot \int \frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{\tau} \cdot dt$$

$$V \cdot e^{\frac{t}{\tau}} = (R \cdot K + V_{rest}) \cdot e^{\frac{t}{\tau}} + C$$

Per assegnare il valore a C, si impone la condizione iniziale, ovvero che a $t = 0$ il neurone sia a riposo e quindi: $V(0) = V_{rest}$ in conclusione $V(t)$ è:

$$V(t) = V_{rest} + R \cdot I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \tag{4}$$

1.3 Caso: Corrente ad Impulso

Riprendendo il risultato della sezione precedente, si consideri il potenziale calcolato in un intervallo di tempo (considerando sempre la $I(t)$ costante):

$$V(t) = V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}\right)$$

$$V(t) = V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right) \tag{5}$$

Si puo definire l'impulso come il limite di $V(t)$ per $\Delta \to 0$:

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right)\right] \tag{6}$$

Usando l'espansione di Taylor e^x ciò puo essere scritto come:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Nel caso considerato, per risolvere il limite è sufficiente la successione fino a $n = 1$:

$$e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 1 - \frac{\Delta t}{\tau}$$

Il limite diventa:

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot I \cdot \left(1 - (1 - \frac{\Delta t}{\tau})\right)\right] \tag{7}$$

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot I \cdot \frac{\Delta t}{\tau}\right] \tag{8}$$

Ricordando che $\tau = R \cdot C$ e $I = \frac{q}{\Delta t}$:

$$\lim_{\Delta \longrightarrow 0} \left[V_{rest} + R \cdot \frac{q}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{R \cdot C}\right] = V_{rest} + \frac{q}{C} \tag{9}$$

$$V(t) = V_{rest} + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{C} \cdot I(t')dt' \tag{10}$$

Dove t' è il tempo in corrispondenza del quale parte l'impulso