Boundedness and Stability

第八次　**SDEM 5.6**

杨徵羽

2022 年 12 月 21 日

全章结构

稳定性种类	节	定义	V 函数判别法	系数判别法	例子
p 阶矩渐近有界	5.2	1	2	3	4,5
p 阶矩指数稳定	5.3	7	8	10,12,16	25,26,27
p 阶矩渐近稳定	5.4	28	29,30,31		32,33
a.s. 指数稳定	5.3	7	9	10,12,13,14,16	
a.s. 渐近稳定	5.4	28	29		
依概率稳定	5.5	34	35		
依概率渐近稳定	5.5	34	36		38
依概率渐近大范围稳定	5.5	34	37		
依分布渐近稳定	5.6	40	43	44	45,46

5.6 Asymptotic Stability in Distribution

These convergence concepts have the following relationship:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{convergence in } L^p \\
 & & \Downarrow \\
\text{a.s. convergence} & \Rightarrow & \text{convergence in probability} \\
 & & \Downarrow \\
 & & \text{convergence in distribution}
\end{array}
$$

随机变量序列依分布收敛

$$(\Omega, \mathscr{F}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, PX^{-1})$$

随机变量序列依分布收敛的等价定义/条件

- （重要）分布函数（具体空间的概率测度）弱收敛 $P_n X_n^{-1} \xrightarrow{w} PX^{-1}$
  其中，概率测度 m_n 弱收敛：$\forall$ 连续有界 f，
  $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \, \mathrm{d}m_n = \int_\Omega f \, \mathrm{d}m$
  注：分布函数在其他地方常写作 f_X 或 μ_X，而在本节直接记作 p
- （重要）期望形式：$\forall$ 连续有界 f，$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(X)$
- 特征函数 $\varphi(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$ 点态收敛
- 随机变量作为对偶空间的元素弱 * 收敛[1]

---

[1] BOBROWSKI A. Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes: An Introduction[M/OL]. Cambridge University Press, 2005 [2022-12-19]. https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511614583/type/book. DOI: 10.1017/CBO9780511614583.

随机过程依分布渐近稳定

连续情形，由于是渐近稳定性，直接将离散的 n 换成连续的 t 即可
由于解有马尔可夫性，分布正好可以由转移概率核表示

解的马尔可夫性（《SDE》2.8）

- 随机微分方程的解是马尔可夫过程（转移概率核 $p(s, x, t, A)$）
- 若系数满足 Lipschitz 条件和线性增长条件，则解是强马尔可夫过程（时间可改为停时）
- 若方程不显含时间 t，则解是齐次马尔可夫过程（$p(t, x, A)$）

其中由于有 Markovian switching，故状态加一个 i，于是对任意的 t, x, i，分布函数（具体空间的概率测度）的最终形式为 $p(t, (x, i), (\cdot, \cdot))$

Weak convergence is a metric concept

书上定义的度量（可能叫 Wasserstein 度量？）

$$d_{\mathbb{L}}(p_1, p_2) = \sup_{f \in \mathbb{L}} \left| \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,i) p_1(\mathrm{d}x, i) - \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,i) p_2(\mathrm{d}x, i) \right|$$

$$\mathbb{L} = \{ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S} \to \mathbb{R} \mid |f(x,i) - f(y,j)| \le |x-y| + |i-j|, |f(x,i)| \le 1 \}$$

之所以是 sup 而不是 inf，是因为本来就是用 inf 定义的，然后使用对偶原理能转化为 sup[2]
实际上，弱收敛可转化成的度量五花八门，各种讲概率的书（如著名的[3]）都会涉及一两个，专著[4]非常全面地研究了各种度量

[2]Wasserstein GAN and the Kantorovich-Rubinstein Duality[EB/OL]. 2017 [2022-12-06]. https://vincentherrmann.github.io/blog/wasserstein/.

[3]DURRETT R. Probability: theory and examples[M]. Fifth edition. Cambridge ; New York, NY: Cambridge University Press, 2019.

[4]RACHEV S T, et al. The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics[M/OL]. New York, NY: Springer New York, 2013 [2022-12-19]. http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-4869-3. DOI: 10.1007/978-1-4614-4869-3.

期望形式

$$
\begin{aligned}
& d_{\mathbb{L}}(p(t,(x,i),(\cdot,\cdot)), p(t,(y,j),(\cdot,\cdot))) \\
= & \sup_{f\in\mathbb{L}} \left| \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} f(z,l) p_1(t,(x,i),(\mathrm{d}z,l)) - \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} f(z,l) p_2(t,(y,j),(\mathrm{d}z,l)) \right| \\
= & \sup_{f\in\mathbb{L}} \left| \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}} f(z,l) \mathrm{d}p_1(t,(x,i),(z,l)) - \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} f(z,l) \mathrm{d}p_2(t,(y,j),(z,l)) \right| \\
= & \sup_{f\in\mathbb{L}} \left| \mathbb{E} f(X^{x,i}(t), r(t)) - f(X^{y,j}(t), r(t)) \right|
\end{aligned}
$$

概率测度族的“紧性”

由于定义了度量，此处概率测度处于一个度量空间中，概率测度族 $\{P_t | t \in \Gamma\}$ 即为其中一个子集，于是可以对其作出拓扑上的要求

“紧性”

胎紧 (tight)：$\forall \epsilon$，$\exists$ 紧集 K，$\forall t \in \Gamma$，$P_t(K) \geq 1 - \epsilon$
相对紧 (relatively compact)：闭包为紧/对集合中的任意序列，都存在子列收敛于整个空间中某点

Prohorov 定理[5]：完备可分度量空间 (Polish 空间) 中，胎紧 $\leftrightarrow$ 相对紧；可分度量空间中，胎紧 $\rightarrow$ 相对紧
本节出现的概率测度族胎紧性可由 Chebyshev 不等式保证，但更一般的情形下需要仔细证明[6]

[5] KARATZAS I, SHREVE S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus: vol. 113 [M/OL]. New York, NY: Springer New York, 1998 [2022-12-17]. http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0949-2. DOI: 10.1007/978-1-4612-0949-2.

[6] DU N H, DANG N H, DIEU N T. On stability in distribution of stochastic differential delay equations with Markovian switching[J]. Systems & Control Letters, 2014, 65: 43-49 [2022-12-05]. DOI: 10.1016/j.sysconle.2013.12.006.

本节结构