2011 Analyse :

Exercice 1 :

1- a- si $x \geq 0$ :

$$|U_n(x)| = \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n^3}+1} \leq \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n^3}}$$

$$\leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ st convergente Riemann $3/2 > 1$

donc $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge normalement

donc uniformement sur $\mathbb{R}^+$ et donc simplement si $x \geq 0$.

b- si $x < 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}\,x}}{\sqrt{n^3}+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}\,|x|}}{\sqrt{n^3}} = \infty$$

alors $\sum U_n(x)$ st divergente si $x < 0$.

2-a- Continuité de $S$ sur $\mathbb{R}^+$ :

i) D'après la question 1 :

$\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ C. Uniformement sur $\mathbb{R}^+$

ii) $\forall n$ $U_n$ st continue sur $\mathbb{R}^+$

Conclusion : $S$ st continue sur $\mathbb{R}^+$

b- derivabilité de $S$ sur $\mathbb{R}^+$ :

$$U'_n(x) = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}+1}\, e^{-\sqrt{n}\,x}$$

i. $\forall n$ $U_n$ et $U'_n$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$

ii. $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge sur $\mathbb{R}^+$

iii) $\lim_{n\to+\infty} \cancel{\ldots} \sup |U'_n(x) - 0|$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}+1} \right| = 0$$

alors $U'_n(x)$ C.U vers $f(x) = 0$.

D'après i) ii) iii) :

$S(x)$ st derivable sur $\mathbb{R}^+$,

et $F'(x) = \sum_{n\geq 0} U'_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

## Exercice 02 :

i) f continue sur $\mathbb{R}^2$ : $\left(\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \left( \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \right)\right)$

si $(x,y) \neq (0,0)$ : $f(x,y)$ st continue car f st un produit de deux fonction continue.

si $(x,y) = (0,0)$ : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^n(\cos\theta + \sin\theta)^n \sin\left(\frac{1}{r}\right)$

$= 0$ ssi $n > 0$

alors pour f continue $\Leftrightarrow$ ~~...~~ $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) f différentiable sur $\mathbb{R}^2$ : ~~pour~~ $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

( f possède des fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et elles sont continue en $(x_0,y_0)$ )

f st symétrique alors il suffit d'étudier l'existence et la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ : $(u.v)' = u'.v + v'u$

$(x,y) \neq (0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = n(x+y)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(x+y)^n$

$= (x+y)^{n-1}\left(n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$

$(x,y) = (0,0)$ $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(x^{n-1} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$

$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ existe $\Rightarrow n > 1 \Rightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$

La différentiabilité : $(n=0 \vee n=1) \Rightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ n'existe pas $\Rightarrow$ f n'st pas diff

I

~~Ex 2~~ :

$n \geq 2$ : si $(x,y) \neq (0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et continues (*)

si $(x,y) = (0,0)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue en $(x_0, y_0)$ ... ($\beta$)

de ($\alpha$) et ($\beta$) $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et continue sur $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f est differentiable si $n \geq 2$. (II)

de (I) et (II) f est diff ssi $n \geq 2$.

iii) pour les dérivées partielle premières continues en $(0,0)$

$n \geq 2$.

Exercice 03 : 1) $\Psi(D) = \mathbb{R}^3$ (Not sure).

2) $M_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}$

$$M_\Psi = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi & -r\cos\varphi \sin\theta & -r\cos\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi & -r\sin\varphi \sin\theta & r\cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M_\Psi = r^2 \cos(\theta)$.