L'usage du Mobile et de la Calculatrice est interdit.

N.B.

1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

2- Les réponses doivent être justifiées.

3- Le barème est approximatif.

Problème: 
$$(15 \text{ pt} = 1+0.75+1.25+0.5+2.5+2.5+3+0.5+1)(2)$$

Problème : (15 pt = 1+0,75+1,25+0,5+2,5+2,5+3+0,5+1+2)  
Soit 
$$a \in \mathbb{R}^*$$
 et soit la matrice  $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$ 

1- Montrer que la matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A_a$ . En déduire

une valeur propre de  $A_a$ .

 $\bigvee$  2- Calculer la trace et le déterminant de  $A_a$ .

 $\square$ - En déduire les deux autres valeurs propres de  $A_a$ .

**14-** En déduire que :  $P_{A_a}(X) = -X^3 + aX^2 + X - a$ .

5- Montrer que la matrice  $A_a$  est diagonalisable quel que soit  $a \in \mathbb{R}^*$ .

Supposons pour toute la suite que :  $a \in R^* \setminus \{-1, 1\}$ .

6-Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale  $D_a$  telles que :

$$D_a = P^{-1} \cdot A_a \cdot P.$$

**√7-** Calculer  $A_a^n$  pour tout entier  $n \ge 1$ .

 $\sqrt{8}$ - Pour quelles valeurs de a la matrice  $A_a$  est-elle inversible?

 $\mathfrak{P}$  Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton à la matrice  $A_a$ , puis en déduire l'écritu. de  $A_a^{-1}$  comme expression polynômiale de  $A_a$  (il n'est pas demandé de calculer  $A_a^{-1}$ ).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que calculer la matrice  $A_a^n$  revient à résoudre un système de Cramer de trois équations à trois inconnues (il n'est pas demandé de résoudre le système).

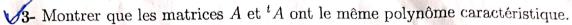
Exercice: (1pt pour chaque question)

Soient  $\mathbb{K}$  un corps commutatif,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

 $\bigvee$  1- Montrer que : 0 est une valeur propre de A ssi A n'est pas inversible.

(2-) Supposons que A est une une matrice inversible. Montrer que :

Si  $\lambda$  est une valeur propre de A associée à un vecteur propre non nul Y glore  $1^{-1}$  act une Scanné avec CamScanner



<sup>4-</sup> Montrer que si le système  $A \cdot X = 0$ , où X désigne la matrice colonne inconnue à n lignes, admet une solution non nulle alors  $\det A = 0$ .

5- Soit 
$$\alpha \in \mathbb{K}$$
. Montrer que la matrice  $N = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable

sur K.

Les deux questions suivantes sont facultatives (1,5 pt +1 pt):

On suppose :  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**6-** Soit  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non nul. Montrer que :

Si P(A) = 0 alors les valeurs propres de A sont racines de P(X).

7- Soient, dans  $M_4(\mathbb{C})$ , les matrices suivantes :

$$M_1 = \left( egin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} 
ight) \quad {
m et} \quad M_2 = \left( egin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 3 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight).$$

Montrer que les matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont semblables.

Bon courage