Exercice : pour $b \in \mathbb{R}$, Soient :

$$A_b = \begin{pmatrix} 1+b^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b^2 \end{pmatrix}, \quad B_b = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1/ Montrer que A_b est diagonalisable $\forall\, b \in \mathbb{R}$.

2/ Diagonaliser A_0

3/ Ecrire $(A_1 \mid B_1)$ sous-forme échelonnée réduite et déduire une solution du système $A_1 X = B_1$

Corrigé de l'exercice :

$$P_{A_b}(\lambda) = \operatorname{Det}(A_b - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 1+b^2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+b^2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+b^2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1+b^2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & b^2-\lambda & -b^2+\lambda \\ 1 & 1 & 1+b^2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1+b^2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-b^2 \\ 1 & 2+b^2-\lambda & 1+b^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-\lambda)\left[(1+b^2-\lambda)(2+b^2-\lambda) - 2\right]$$

$$= (b^2-\lambda)\left[\lambda^2 - (3+2b^2)\lambda + b^4 + 3b^2\right] \quad \Big/ \quad \Delta = 9, \quad \alpha_1 = b^2, \quad \alpha_2 = b^2+3$$

$$= (b^2-\lambda)(\lambda - b^2)(\lambda - b^2 - 3)$$

$$= -(\lambda - b^2)^2(\lambda - b^2 - 3)$$

Donc A_b possède 2 valeurs propres :

$\lambda_1 = b^2$ v.p double.

$\lambda_2 = b^2+3$ v.p simple.

Calculons $\dim E_{\lambda_1}$.

$E_{\lambda_1} = \ker(A_b - \lambda_1 I)$

$(A_b - \lambda_1 I)X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \{ x+y+z=0$

$E_{\lambda_1} = \{(-y-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$

$\dim E_{\lambda_1} = 2$

On trouve $\dim E_{\lambda_1} = m(\lambda_1) = 2$. Donc A_b est diagonalisable $\forall b \in \mathbb{R}$.

2/ Diagonalisation de A_0 : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$

$E_{\lambda_2} = \ker(A_0 - 3I)$

$(A_0 - 3I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ y=z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$

$E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$

Donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $D = P^{-1} A_0 P$

et $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $(A_1|B_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow -L_3$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} L_3 \leftarrow -\frac{1}{4} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4} L_3 \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$(S) : A_1 X = B_1 \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

aprés échelonnement

$(S) \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$