2004/2005

Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (2, 3, 2) $\forall x \forall y$

On considère la clause C : C $\{P(x,a) \vee P(f(y),y)\}$.

1. Trouver un facteur universel commun à C. On désignera ce facteur par F.
2. Montrer que C est satisfiable si et seulement si F est satisfiable.
3. Trouver un ensemble S' de clauses tel que : S' $\cup$ {C} forme un ensemble inconsistant.

Exercice 2 (2, 2, 3)

S : $\{\neg P(x) \vee Q(y) \vee R(x, y),\ \neg P(x) \vee \neg Q(f(y)),\ P(f(x)) \vee R(x, y),\ \neg R(x, f(y))$

1. $\forall x \forall y$ Donnez un arbre sémantique clos $\forall x \forall y$ pour S. Indiquer clairement les clauses correspondant à chaque nœud d'échec et à chaque nœud d'inférence.
2. Montrer en utilisant le principe de la résolution que S est inconsistant.
3. Former à partir de S une formule α valide.

Exercice 4. (1, (1, 1, 1), 2)

3.1. Rappeler la définition d'une relation récursive.

3.2. Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations récursives à n arguments. Montrer que les relations suivantes sont aussi récursives :

- *non* $\mathcal{R}_1$,
- $\mathcal{R}_1$ *ou* $\mathcal{R}_2$,
- $\mathcal{R}_1$ *et* $\mathcal{R}_2$

3.3. En déduire que si f est récursive, alors $x \geq \acute{y} \rightarrow f(x) \geq f(y)$ est récursive.

N. B. Remettre, au plus, une seule double feuille et une seule intercalaire.

Bon courage

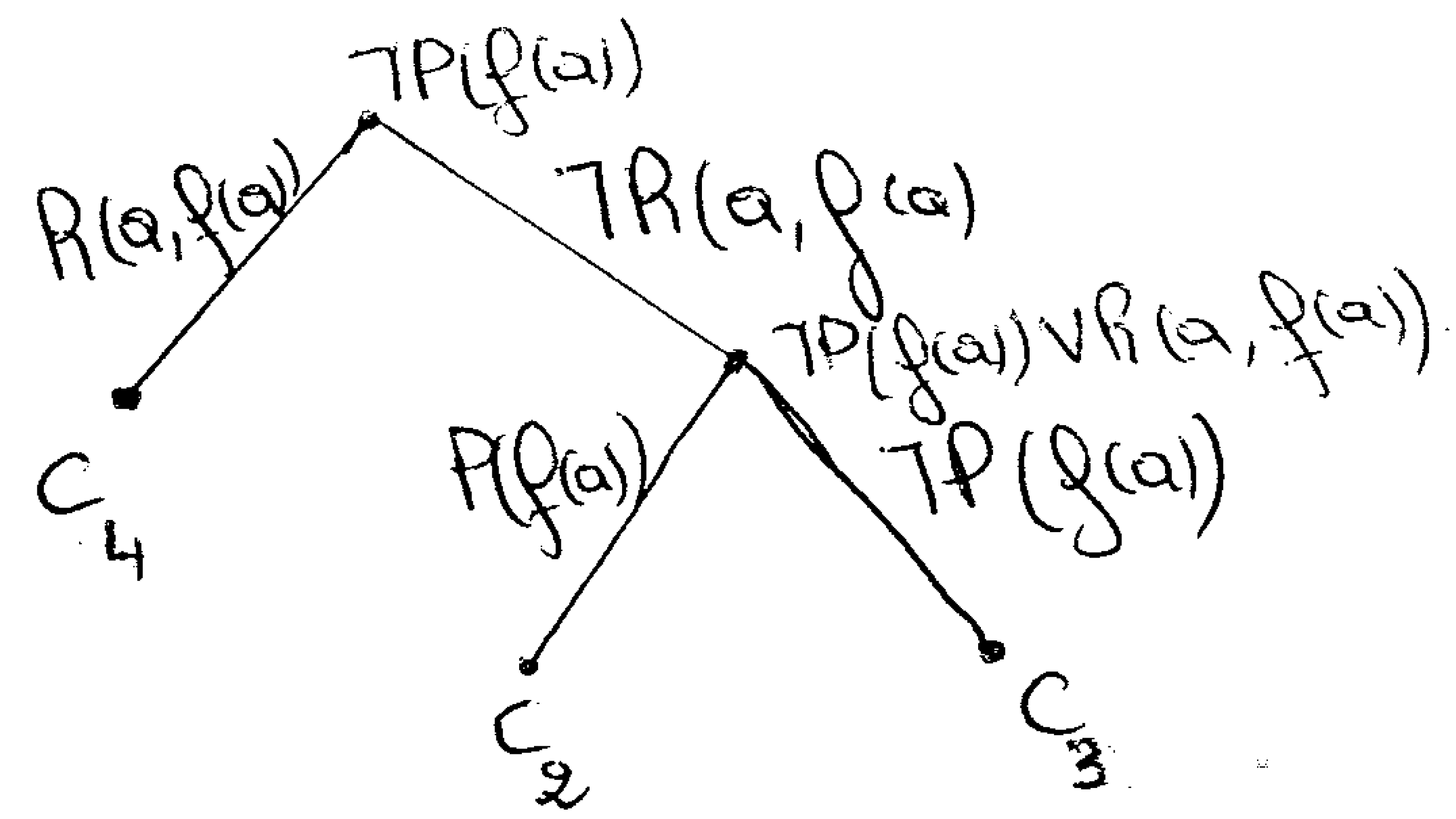
Corrigé log 11

Examen de Remplacement

Exercice 2 :

$$S = \{ \overbrace{\forall x \forall y\, (\neg P(x) \vee Q(y) \vee R(x,y))}^{\alpha_1},\ \overbrace{\forall x \forall y (\neg P(x) \vee \neg P(f(y)))}^{\alpha_2},$$
$$\underbrace{\forall x \forall y\, (P(f(x)) \vee R(x,y))}_{\alpha_3},\ \underbrace{\forall x \forall y\, (\neg R(x, f(y)))}_{\alpha_4} \}$$

1/ Arbre sémantique Clos pour S :



- L'arbre sémantique étant clos l'ensemble S est inconsistant.

2/ Le Principe de la résolution

1) $\neg P(x) \vee Q(y) \vee R(x,y)$
2) $\neg P(x) \vee \neg P(f(y))$
3) $P(f(z)) \vee R(z, w)$
4) $\neg R(u, f(v))$
5) $P(f(u))$ Rés (3,4) après unification $U = \{u|z, f(v)|w\}$
6) $R(u, w)$ Res (3,5) après unification $U = \{u|z\}$
7) $\square$ Rés (4,6) après unificat $U = \{f(v)|w\}$

3) S étant inconsistant alors :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \neg\alpha_4 \iff \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \models \neg\alpha_4$$
$$\iff \models (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \rightarrow \neg\alpha_4$$

on pose α : $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \rightarrow \neg\alpha_4$

Exercice 4

4.1) $R(x_1, \dots, x_n)$ est récursive $\iff Car_R(x_1, \dots, x_n)$ est R

$x_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

4.2) • $Car_{\text{non } R_1}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\text{non } R_1)(x_1, \dots, x_n) \text{ est V} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } R_1(x_1, \dots, x_n) \text{ est F} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } Car_{R_1}(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= Sg\left(\left|Car_{R_1}(x_1, \dots, x_n) - 1\right|\right)$$

$$= \overline{Sg}\left(Car_{R_1}(x_1, \dots, x_n)\right)$$

P.R R donc non R_1 est R

• $Car_{R_1 \text{ ou } R_2}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } (R_1(x_1, \dots, x_n) \text{ ou } R_2(x_1, \dots, x_n)) \text{ est} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } R_1(x_1, \dots, x_n) \text{ est V ou } R_2(x_1, \dots, x_n) \text{ est V} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } Car_{R_1}(x_1,\dots,x_n)=0 \text{ ou } Car_{R_2}(x_1,\dots,x_n)=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= Car_{R_1}(x_1,\dots,x_n) \times Car_{R_2}(x_1,\dots,x_n)$$

$$= *\,(Car_{R_1}, Car_{R_2})\,(x_1,\dots,x_n)$$

R d'où $Car_{R_1 \text{ ou } R_2}$ est R.

- $$Car_{R_1 \text{ et } R_2}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } R_1(x_1,\dots,x_n) \text{ est V et } R_2(x_1,\dots,x_n) \text{ est V} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= Sg\left(Car_{R_1}(x_1,\dots,x_n) + Car_{R_2}(x_1,\dots,x_n)\right)$$

$$= Sg\left(+\left(Car_{R_1}, Car_{R_2}\right)\right)(x_1,\dots,x_n)$$

R d'où R_1 et R_2 est R.

4.4/ si f est R alors $x \geq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ est R

posons : $R_1(x,y) : x \geq y$ est R.

$R\ x\ y : f(x) \geq f(y)$

$(x \geq y \text{ alors } f(x) \geq f(y)) \iff (\text{non} R_1(x,y)) \vee (R(f(x), f(y)))$

$\iff ((\text{non} R_1)(x,y)) \vee (R(f(P_1^2), f(P_2^2))(x,y))$

est R.

Exercice 1 :

on considère la fle : $\overbrace{\forall x \forall y\,(P(x,a) \vee P(f(y),y))}^{C}$.

1)- Un facteur commun à C :

On substitue $f(y)$ à x : $P(f(y),a) \vee P(f(y),y)$.

On substitue "a" à y : $P(f(a),a) \vee P(f(a),a)$.

Le facteur commun F est : $P(f(a),a) \vee P(f(a),a)$.

2) Montrons que : C est satis si et ssi F satis.

=>) Supposons C satisfiable :

il existe une interprétation I de domaine D_I telle que $I(C) = V$

on a : $\models (\forall x \forall y\,(P(x,a) \vee P(f(y),y))) \rightarrow \underbrace{(P(f(a),a) \vee P(f(a),a))}_{F}$

donc : $I(F) = V$

d'où F est satisfiable.

<=) Supposons F satisfiable et montrons que C est satisfiable.

F étant satis : il existe une interprétation I de Dom D_I tq : $I(F) = V$.

cette interprétation I interprète : P, f, et a.

On cherche à montrer que C est satisfiable i.e : On cherche une interprétation J de domaine D_J telle $J(C) = V$. Construisons J comme suit :

- $D_J = \{Ia\} \subset D_I$ par conséquent :

* $Ja = Ia$
* $Jf : \{Ia\} \longrightarrow \{Ia\}$ fct identitée.

• $J(P(x,y))_{v\binom{x=d}{y=d'}} \stackrel{\Delta}{=} I(P)(I(f)(d), d')$

pour tout $d, d' \in \{Ia\}$.

on a alors :

$$J(\quad P(x,a))_{v(x=Ia)} \overset{\text{par définition}}{=} I(P)(I(f)(Ia), Ia) \underset{\text{par hypot}}{=} V$$

d'où :

$J(\forall x\, P(x,a)) = V$ car le seul elt de D_J est Ia.

donc

$$J(\underbrace{\forall x \forall y\, (P(x,a) \vee P(f(y),y)}) = V$$

(car $C \equiv (\forall x\, P(x,a)) \vee (\forall y\, P(f(y),y))$).

d'où C est satisfiabl.

<u>méthode 2</u> : on aurait pu vérifier que C est satis et que F est satisfiable.

donc C est satis $\Leftrightarrow$ F est satis

$\quad$ vérifiée $\quad$ vérifiée.

3/ il suffit de choisir $S' = \{\overbrace{\neg P(f(a),a)}^{K}\}$

Vérifions que : $S' \cup \{C\} = \{\forall x \forall y\, (P(x,a) \vee P(f(y),y)),$
$\neg P(f(a),a)\}$ est incon

supposons que : $S' \cup \{C\}$ soit consistant ; il existe alors une I de domaine D_I tq. $I(C) = I(K) = V \Rightarrow I(\neg K) = I($ impossible $= V$