E.S.I. **2CP** **ALG3** **Examen final** 29 janvier 2024 Durée : 2H

L'usage du Mobile et de la Calculatrice est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (9 pt)

Soient m un nombre réel et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que le polynôme caractéristique $P_{A_m}(X)$ est égal à :

$$P_{A_m}(X) = (1-X)(2-X)(m-X).$$

2) Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f_m est-il diagonalisable?

On suppose pour la suite de l'exercice que $m = 2$.

3) En s'assurant que A_2 est diagonalisable et inversible, en déduire le calcul de A_2^n pour $n \geq 1$ et celui de A_2^{-1} la matrice inverse de A_2.

4) Calculer $(A_2 - I_3)(A_2 - 2I_3)$.

5) Montrer que la matrice A_2^n s'écrit sous la forme $A_2^n = aA_2 + bI_3$ où a et b sont des réels et $n \geq 2$ (il n'est pas demandé de calculer a et b).

Exercice 2 : (7 pt)

Soit le système (S) défini par :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & \alpha y & - & 4z & = & \beta \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & \gamma \end{array} \right., \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le théorème de Fontené-Rouché, étudier selon les paramètres réels α, β, γ la compatibilité du système (S) et résoudre quand c'est possible.

Exercice 3 : (4 pt)

Les matrices réelles données par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Bon courage.