Exercice : (5 pt)

1/ Soit la permutation σ de S_{10} définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

a/ Décomposer σ en un produit de transpositions.

Solution : La décomposition de σ en produit de transpositions est donnée par :

$$\sigma = \tau_{1,3}\tau_{3,4}\tau_{2,5}\tau_{5,7}\tau_{6,10}\tau_{10,8} = (1,3)(3,4)(2,5)(5,7)(6,10)(10,8). \qquad \textbf{(1.5 pt)}$$

b/ Déduire la signature de σ.

Solution : Il y a six transpositions dans la décomposition de σ, on en déduit que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$. **(0.5 pt)**

c/ Déterminer σ^{-1}.

Solution : La permutation σ^{-1} est donnée par (en utilisant la définition de σ) :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1 pt)}$$

On peut aussi utiliser la décomposition de σ en produit de transpostions (on rappelle que l'inverse d'une transposition est elle même) :

$$\sigma^{-1} = (\tau_{1,3}\tau_{3,4}\tau_{2,5}\tau_{5,7}\tau_{6,10}\tau_{10,8})^{-1} = \tau_{10,8}\tau_{6,10}\tau_{5,7}\tau_{2,5}\tau_{3,4}\tau_{1,3}.$$

2/ Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 10} \in M_{10}(\mathbb{R})$.

a/ Donner la formule explicite donnant $\det A$ (i.e. : définition du déterminant).

Solution : La formule est donnée par :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}a_{5\sigma(5)}a_{6\sigma(6)}a_{7\sigma(7)}a_{7\sigma(7)}a_{8\sigma(8)}a_{9\sigma(9)}a_{10\sigma(10)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{10} a_{i\sigma(i)}. \qquad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

b/ En déduire le signe correspondant au terme $a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,7}a_{6,10}a_{7,2}a_{8,6}a_{9,9}a_{10,8}$.

Solution : On remarque en utilisant la permutation σ donnée dans la question **1/** que :

$$a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,7}a_{6,10}a_{7,2}a_{8,6}a_{9,9}a_{10,8} = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}a_{5\sigma(5)}a_{6\sigma(6)}a_{7\sigma(7)}a_{7\sigma(7)}a_{8\sigma(8)}a_{9\sigma(9)}a_{10\sigma(10)},$$

donc le signe correspondant au terme $a_{1,3}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,7}a_{6,10}a_{7,2}a_{8,6}a_{9,9}a_{10,8}$ est la signature de σ qui est positif d'après la question **1/b**. **(1 pt)**