ALGEBRE 2014 :

1- $(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(A - 4I_3) \cdot v = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2+2 \\ 0+1-1 \\ 0+3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2- La trace de A = la somme des éléments de la diag : $0+3+1 = 4$

$$\det(A) = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16$$

3a) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2+2 \\ 0-3-1 \\ 0+3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4v$

$\Rightarrow$ v vecteur propre et 4 valeur propre

• ~~Supposons a, b des valeurs propres~~ alors : $a + b + 4 = 4$ la trace

et le determinant $\neq 0 \Rightarrow a \times b \neq 0$ $\Rightarrow \boxed{a = -b}$ ... α

et $a \times b \times 4 = -16 \Rightarrow a \times b = -4$ ... β

de α et β : $a = 2$ et $b = -2$.

Les valeurs propres de A sont : $2, -2$ et 4

b- La matrice A est diagonalisable (trois valeurs propres simples).

4- cherchons les sous espaces vectoriels :

$E_2 = \ker(A - 2I_3)$: $\begin{cases} -2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$

$$E_2 = \{ x\overbrace{(1,1,0)}^{u} \,/\, x \in \mathbb{R} \}$$

$E_{-2} = \ker(A + 2I_3)$: $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$

$$E_{-2} = \{ x\overbrace{(1,0,-1)}^{w} \,/\, x \in \mathbb{R} \}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5- $$A^n = P D^n P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$