L'usage du Mobile et de la Calculatrice est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (9 pt)

Soient m un nombre réel et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que le polynôme caractéristique $P_{A_m}(X)$ est égal à :

$$P_{A_m}(X) = (1-X)(2-X)(m-X).$$

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
P_{A_m}(X) &= \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1+C_2 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \end{array} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= (1-X) \begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(2-X)(m-X). \ \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

2) Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f_m est-il diagonalisable?

Solution :

1er cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

On a $\mathrm{Spec}(A_m) = \{1, 2, m\}$. La matrice A_m est d'ordre 3 et admet trois valeurs propres simples, donc elle est diagonalisable. **(0.25 pt)**

2ème cas : $m = 1$

On a $\mathrm{Spec}(A_1) = \{1, 2\}$ avec $m(1) = 2$ e $m(2) = 1$, donc :

$$A_1 \text{ diagonalisable ssi } \dim E_1 + \dim E_2 = 3 \text{ ssi } \dim E_1 = 2 \text{ ssi } \mathrm{rg}\,(A_1 - I_3) = 1$$

et

$$A_1 - I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_3 & v_2 & v_1 + v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient que $\mathrm{rg}(A_1 - I_3) = 2 \neq 1$, donc A_1 n'est pas diagonalisable. **(0.5 pt)**

3ème cas : $m = 2$.

On a $\mathrm{Spec}(A_2) = \{1, 2\}$ avec $m(1) = 1$ et $m(2) = 2$, donc :

$$A_2 \text{ diagonalisable ssi } \dim E_1 + \dim E_2 = 3 \text{ ssi } \dim E_2 = 2.$$

On a $E_2 = \ker\left(f_2 - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$. Posons $g = f_2 - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, alors :

$$A_2 - 2I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_1 + e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

d'où $E_2 = \langle u_1 = (0, 1, 0)\,, u_2 = (1, 0, 1) \rangle$ et $\dim E_2 = 2$, donc A_2 est diagonalisable. **(0.5 pt)**

Conclusion : A_m est diagonalisable ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On suppose pour la suite de l'exercice que $m = 2$.

3) En s'assurant que A_2 est diagonalisable et inversible, en déduire le calcul de A_2^n pour $n \geq 1$ et celui de A_2^{-1} la matrice inverse de A_2.

Solution : D'après les questions précédentes A_2 est diagonalisable et $\det A_2 = 1 \times 2 \times 2 = 4 \neq 0$, donc A_2 est inversible. **(0.25 pt + 0.25 pt)**

Calcul de E_1 :

On a $E_1 = \ker\left(f_2 - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$. Posons $h = f_2 - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, alors :

$$A_2 - I_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h(e_3) & h(e_2) & h(e_1 + e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

d'où $E_1 = \langle u_3 = (1,1,0) \rangle$. **(0.5 pt)**
Nous avons déjà calculé : $E_2 = \langle u_1 = (0,1,0), u_2 = (1,0,1) \rangle$ **(0.5 pt)**
Soient les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \textbf{ (0.25 pt + 0.25 pt)}$$

Ces matrices vérifient la formule : $D = P^{-1} A_2 P$. **(0.25 pt)**

<u>**Calcul de P^{-1}**</u> :
Soit le système :

$$\begin{cases} u_1 = e_2 \\ u_2 = e_1 + e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = -u_1 + u_3 \\ e_2 = u_1 \\ e_3 = u_1 + u_2 - u_3 \end{cases}$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \textbf{ (1 pt)}$$

<u>**Calcul de A_2^n**</u> :
On a :

$$D = P^{-1} A_2 P \iff A_2 = P D P^{-1} \Longrightarrow A_2^n = P D^n P^{-1}, \quad \textbf{(0,25 pt)}$$

avec

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\begin{aligned} A_2^n = P D^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \textbf{ (1 pt)} \end{aligned}$$

<u>**Calcul de A_2^{-1}**</u> :
On a :

$$D = P^{-1} A_2 P \iff A_2 = P D P^{-1} \iff A_2^{-1} = \left(P D P^{-1}\right)^{-1} \iff A_2^{-1} = P D^{-1} P^{-1},$$

avec

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$A_2^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

4) Calculer $(A_2 - I_3)(A_2 - 2I_3)$.

On a :

$$(A_2 - I_3)(A_2 - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \ \textbf{(0.25 pt)}$$

5) Montrer que la matrice A_2^n s'écrit sous la forme $A_2^n = aA_2 + bI_3$ où a et b sont des réels et $n \geq 2$ (il n'est pas demandé de calculer a et b).

Solution :
D'après la question (4), on a $P(A_2) = 0$ avec $P(X) = (X-1)(X-2)$. La division euclidienne de X^n par $P(X)$ donne :

$$X^n = P(X)Q(X) + R(X), \text{ avec } Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \deg R \leq 1,$$

donc :

$$X^n = P(X)Q(X) + (aX + b), \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

D'où :

$$A_2^n = aA_2 + bI_3. \ \textbf{(1 pt)}$$

Exercice 2 : (7 pt)
Soit le système (S) défini par :

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ 2x + \alpha y - 4z = \beta \\ x + y - z = 1 \\ -x + y - z = \gamma \end{cases}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le théorème de Fontené-Rouché, étudier selon les paramètres réels α, β, γ la compatibilité du système (S) et résoudre quand c'est possible.

Solution : La matrice A du système (S) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \overbrace{v_2 + v_1}^{v_2'} & \overbrace{v_1 - v_3}^{v_3'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha + 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & \overbrace{\frac{1}{2} v_3'}^{v"_3} & v_2' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & \alpha + 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v"_3 & 3v_2' - (\alpha + 2)\, v"_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 - \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

on en déduit que :

$$\mathrm{rg}\,(S) = \mathrm{rg} A = \begin{cases} 3, & \text{si } \alpha \neq 4 \\ 2, & \text{si } \alpha = 4 \end{cases} \quad \text{....}\textbf{(1 pt)}$$

<u>1er cas</u> : $\alpha = 4$

Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice extraite de A en supprimant la dernière colonne et les deux dernières lignes. On a $\det R = 6 \neq 0$, donc :

- R est la matrice principale du système (S).
- Les deux premières équations sont les équations principales du système (S).
- Les inconnues principales sont x et y.

Il y a deux déterminants bordants du déterminant principal et sont donnés par :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,(\beta + 4) \qquad \text{et} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & \beta \\ -1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 6\,(\gamma + 7)\,. \ \textbf{(0.75 pt + 0.75 pt)}$$

Le système (S) est compatible ssi $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$ ssi $\beta = -4$ et $\gamma = -7$. **(0,25 pt)**

Dans ce cas on résout le système :

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ 2x + 4y - 4z = -4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 - z \\ 2x + 4y = -4 + 4z \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7-z & -1 \\ -4+4z & 4 \end{vmatrix}}{6}=4 \quad \text{et} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7-z \\ 2 & -4+4z \end{vmatrix}}{6}=z-3, \ \textbf{(0.5 pt + 0.5 pt)}$$

d'où l'ensemble des solutions du système (S) est : $\{(4,z-3,z)\,,z\in\mathbb{R}\}$. **(0.25 pt)**

2ème cas : $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$

Soit $R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice extraite de A en supprimant la dernière ligne. On a $\det R=2\,(4-\alpha)\neq 0$, donc :

- R est la matrice principale du système (S).
- Les trois premières équations sont les équations principales du système (S).
- Les inconnues principales sont x,y et z.

Il y a un déterminant bordant du déterminant principal donné par :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & \alpha & -4 & \beta \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & \alpha & -4 & \beta \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma+7 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3+L_1 \\ L_4+L_1 \end{matrix} \\
&= (\gamma+7)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \alpha & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2\,(\gamma+7)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -4 \end{vmatrix} \\
&= 2\,(\gamma+7)\,(4-\alpha)\,.\textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

Le système (S) est compatible ssi $\Delta=0$ ssi $2\,(\gamma+7)\,(4-\alpha)=0$ ssi $\gamma=-7$ et $\beta\in\mathbb{R}$.**(0.25 pt)**

Dans ce cas on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 7 \\ 2x & + & \alpha y & - & 4z & = & \beta \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Les formules de Cramer donnent :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ \beta & \alpha & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2\,(4-\alpha)}=4,\ \ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & \beta & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2\,(4-\alpha)}=\frac{\beta+4}{\alpha-4}\ \ \text{et}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2\,(4-\alpha)}=\frac{\beta+3\alpha-8}{\alpha-4}\ \ \textbf{(0.5 pt + 0.5 pt+0.5 pt)}$$

d'où l'unique solution du système (S) est : $\left(4,\frac{\beta+4}{\alpha-4},\frac{\beta+3\alpha-8}{\alpha-4}\right)$.**(0.25 pt)**

Exercice 3 : (4 pt)

Les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Solution : Le calcul des polynômes caractéristiques de A et de B donne :

$$P_A(X)=P_B(X)=-(X-1)(X-2)^2. \quad \textbf{(0.5 pt + 0.5 pt)}$$

Etudions la diagonalisation de chacune des deux matrices. On a :

$$A \text{ diagonalisable ssi } rg\,(A-2I)=1 \text{ et } B \text{ diagonalisable ssi } rg\,(B-2I)=1.$$

On a :

$$A-2I=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2 } \textbf{(0.5 pt)}$$

donc A n'est pas diagonalisable. **(0.25 pt)**

$$B-2I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim \text{ est de rang 1 } \textbf{(0.5 pt)}$$

donc B est pas diagonalisable. **(0.25 pt)**

Il existe donc une matrice inversible P est une matrice diagonale D telles que: $B=P^{-1}\cdot D\cdot P$, c'est à dire que B est semblable à D. **(0.5 pt)**

Ceci entraîne que A et B ne sont pas semblables, car Si c'était le cas, alors la relation être semblable étant transitive, A serait semblable à D (une matrice diagonale), donc A serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. **(1 pt)**