Solution de l'exercice 1 : (5pts)

1- La forme matricielle de (S) est : $A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$ **(0.5 pt).**

Le détermminant de la sous-matrice de A_α obtenue en supprimant la 3ère ligne et la 3ème colonne est non nul, donc $rgA_\alpha \geq 2$ et comme $\det A_\alpha = 3(\alpha - 1)$ donc on obtient les cas suivants :

1er cas : $\alpha = 1$ alors $rgA_1 = rg(S_1) = 2$.

2ème cas : $\alpha \neq 1$ alors $rgA_\alpha = rg(S_\alpha) = 3$. **(1.5 pts)**

2- Comme le système (S_α) admet toujours une solution (solution triviale) pour tout α réel, donc (S_α) est compatible pout tout α réel. De plus, le système (S_α) admet une solution unique si et seulement si $\det A_\alpha \neq 0$, ce qui veud dire $\alpha \neq 1$. **(1.5 pts)**

3- Pour $\alpha = 1$, la résolution du système (S_1) donne l'ensemble des solutions :

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = z \text{ et } y = 0\right\} = \langle (1, 0, 1) \rangle . \qquad \textbf{(1.5 pts)}$$

Solution de l'exercice 2 : (7pts)

Solution de la partie I : Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}[X]$, on considère le polynôme $P(X) = 2X^8 - 3X^5 + X^4 + X^2$.

En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, Calculer $P(A)$ pour : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, on commence par calculer le polynôme caractéristique de A, qu'on trouve égal à :

$$P_A(X) = -X^3 + 2X - 1 = -(X - 1)\left(X + X^2 - 1\right) \quad \textbf{(1 pt)}$$

La division euclidienne de P par $P_A(X)$ donne le couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$P(X) = P_A(X).Q + R$, où $Q = -2X^5 - 4X^3 + 5X^2 - 9X + 14$ et $R = 24X^2 - 37X + 14$.**(1 pt)**

Si on remplace la matrice A dans l'égalité ci-dessus et on utilise le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient :

$$P(A) = 24A^2 - 37A + 14I_3. = \begin{pmatrix} 1 & 48 & -26 \\ 0 & 99 & -61 \\ 0 & -61 & 38 \end{pmatrix} \textbf{(1 pt)}$$

Solution de la partie II :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice unité d'ordre 3.

Solution :

1- Le calcul du polynôme caractéristique de A donne :

$$P_A(X) = -\left(X^3 - 4X^2 + 5X - 2\right) = -(X-2)(X-1)^2 .\textbf{(1.5 pts)}$$

2- a/ D'après la question précédente, $\det A = 2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible. **(1 pt)**

b/ En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on trouve :

$$-A^3 + 4A^2 - 5A + 2I_3 = 0 \Leftrightarrow A\left(\frac{A^2 - 4A + 5I_3}{2}\right) = I_3.$$

Ce qui signifie que l'inverse de A est : $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$. **(1 pt)**

Après calcul, on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} .\textbf{(0.5 pt)}$$

Solution de l'exercice 3 : (8pts)

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n où $n \in \mathbb{N}^*$et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de A s'il vérifie $P(A) = 0$.

1- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A et soit λ une valeur propre de A, montrons que est un zéro de P.

On pose : $P = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + ... + a_0$ où $m \in \mathbb{N}$ et soit v un vecteur propre non nul de A associé à λ. On a alors la relation : $A.v = \lambda.v$.

Comme $P(A) = 0$ donc $a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_0 I_n = 0$, d'où

$$\left(a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_0 I_n\right).v = 0,$$

ainsi :

$$a_m A^m.v + a_{m-1}A^{m-1}.v + ... + a_0 I_n.v = 0.$$

Mais $A.v = \lambda.v$ entraine la relation $A^k.v = \lambda^k.v$ pour tout entier naturel non nul k. Ainsi on obtient :

$$a_m\lambda^m.v + a_{m-1}\lambda^{m-1}.v + ... + a_0.v = 0 \Leftrightarrow \left(a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_0\right).v = 0,$$

Comme $v \neq 0$ donc $a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_0 = 0$ ce signifie que λ est un zéro de P.**(1.5 pts)**

2- On note par $P_{\min,A}$ le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de plus petit degré strictement positif, unitaire, annulateur de A.

Montrons que $P_{\min,A}$ divise tout polynôme annulateur de A.

Soit S un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de A, la division euclidienne de S par $P_{\min,A}$ donne :

$$S = Q.P_{\min,A} + R \text{ où } Q, R \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg R < \deg P_{\min,A},$$

Si on remplace par A,on obtient :

$$S(A) = Q(A).P_{\min,A}(A) + R(A),$$

et comme $S(A) = P_{\min,A}(A) = 0$, alors $R(A) = 0$ ce qui veut dire que R est polynôme annulateur de A, mais $\deg R < \deg P_{\min,A}$ et $P_{\min,A}$ est par définition le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de plus petit degré strictement positif, unitaire, annulateur de A donc nécessairement $R = 0$ et par conséquent $P_{\min,A}$ divise S.**(1.5 pts)**

3- On considère le $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}^4$, et soit $a, b, c, a^{'}, b^{'}, c^{'}$ des élements de $\mathbb{C}$ liés par la relation:

$$1 + bcb^{'}c^{'} + cac^{'}a^{'} + aba^{'}b^{'} = 0.$$

et soit la matrice $B \in M_4(\mathbb{C})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & ba^{'} & -ca^{'} & bc \\ -ab^{'} & 0 & cb^{'} & ca \\ ac^{'} & -c^{'}b & 0 & ab \\ -b^{'}c^{'} & -c^{'}a^{'} & -a^{'}b^{'} & 0 \end{pmatrix}.$$

a/ Après calsul, on trouve $B^2 = I_4$.**(0.5 pt)**

b/ On a $L(B) = B^2 - I_4 = 0$, d'après la question précédente.**(0.5 pt)**

c/ Comme $L = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B, donc la question 2/ $P_{\min,B}$ divise L. Comme les diviseurs (non constants) unitaires de L, sont $X - 1, X + 1$ et L donc le seule possibilité c'est que $P_{\min,B} = L$ sinon B serait égal à I_4 ou $-I_4$ ce qui est absurde.

En utilisant la question 1/, on obtient que toute valeur propre de B est un zéro de L, ce qui veut dire que $Spec(B) \subset \{-1, 1\}$.

En utilisant le fait que $Tr(B) = 0$ et le fait que la matrice B est d'ordre 4, on déduit que les valeurs propres de B sont 1 et -1 chacune de miltiplicité 2. (**2 pts)**

d/ D'après la question c/, le polynôme caractéristique $P_B(X)$ de la matrice B est :

$$P_B(X) = (X-1)^2(X+1)^2.\textbf{(1.5 pts)}$$

e/ Comme $P_{\min,A}$ est scindé puisque il se décompose :$P_{\min,A} = (X-1)(X+1)$ et n'a que des zéros simples, alors B est diagonalisable.**(0.5 pt)**