ESI, 2CPI — **Corrigé du CF** — **Mars 2021**

Analyse mathématique 3 — **Durée : 2h**

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

EXERCICE 1 (2 points) : $\boxed{\textbf{0,25 pt} \text{ pour chaque bonne réponse}}$

D est un	Borné **Non**	Ouvert **Oui**	Fermé **Non**	Voisinage de X_0 **Non**
X_0 est un point	intérieur **Non**	extérieur **Non**	frontière **Oui**	d'accumulation **Oui**

EXERCICE 2 (6 points) :

1) $\boxed{2{,}5 \text{ pt}}$

Détermination du domaine de convergence D :

Trouvons le rayon de convergence R de la série, posons $a_n = \dfrac{1}{2^n(2n)!} > 0$.

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(2n)!}{2^{n+1}(2(n+1))!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Ainsi, $R = +\infty$, donc le domaine de convergence de cette série est $D = \mathbb{R}$.

Calcul de la somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n(2n)!} x^n$:

On a

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Donc, en utilisant le formulaire des DSE, il vient

$\rightsquigarrow$ 1er cas $x \geq 0$:

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^{2n} = ch\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right),$$

$\rightsquigarrow$ 2ème cas $x \leq 0$:

$$S(x) == \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{-\frac{x}{2}}\right)^{2n} = \cos\left(\sqrt{-\frac{x}{2}}\right).$$

On obtient ainsi

$$S(x) = \begin{cases} ch\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \text{ si } x \in \mathbb{R}_+, \\ \cos\left(\sqrt{-\frac{x}{2}}\right) \text{ si } x \in \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

2) $\boxed{\text{3,5 pt}}$

a) Posons $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, comme $y(0) = 1$ alors $a_0 = 1$

On a

$$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Remplaçons dans l'EDO donnée

$$8x \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4 \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} 8n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} 4n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} 8n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 2} 4n a_n x^{n-1} + 4a_1 - \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 2} ((8n(n-1) + 4n) a_n - a_{n-1}) x^{n-1} + 4a_1 - a_0 = 0$$

Par identification:

$$a_1 = \frac{a_0}{4} = \frac{1}{4} \quad et \quad (8n(n-1) + 4n) a_n - a_{n-1} = 0 \ \ \forall n \geq 0.$$

En résumé, on obtient

$$a_0 = 1, \ \ a_n = \frac{a_{n-1}}{2(2n)(2n-1)} \ \ \forall n \geq 1.$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \ \ a_n &= \frac{a_{n-1}}{2(2n)(2n-1)} \\
&= \frac{1}{2(2n)(2n-1)} \left(\frac{a_{n-2}}{2(2(n-1))(2n-3)} \right) \\
&= \frac{1}{2^2(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)} a_{n-2} \\
&= \frac{1}{2^2(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \left(\frac{a_{n-3}}{2(2n-4)(2n-5)} \right) \\
&= \frac{1}{2^3(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)} a_{n-3} \\
&= \cdots \overset{par\ réccurence}{=} \frac{1}{2^n(2n)!} a_0 = \frac{1}{2^n(2n)!}.
\end{aligned}$$

Remarque : Il est accepté l'obtention de ce résultat en calculant quelques termes pour voir le comportement de la suite $(a_n)_n$.

La solution est donc la somme de la série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n(2n)!} x^n$ ainsi, d'après la première question, on déduit

$$y(x) = \begin{cases} ch\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \text{ si } x \in \mathbb{R}_+, \\ \cos\left(\sqrt{-\frac{x}{2}}\right) \text{ si } x \in \mathbb{R}_-. \end{cases}.$$

EXERCICE 3 (6 points) :

1) Faire le graphe $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$.

2) $\boxed{1{,}75 \text{ pt}}$

Calcul de $\int_0^\pi e^{x+1} \cos nx dx$ pour $n \geq 1$:

• Faisons une 1ére IPP:

$$\begin{cases} u = e^{x+1} \rightarrow u' = e^{x+1}, \\ v' = \cos nx \rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx, \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{x+1} \cos nx \, dx &= \frac{1}{n}[e^{x+1} \sin nx]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{x+1} \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{x+1}(-\sin nx) dx. \end{aligned}$$

• Faisons une 2ème IPP:

$$\begin{cases} u = e^{x+1} \rightarrow u' = e^{x+1}, \\ v' = -\sin nx \rightarrow v = \frac{1}{n} \cos nx \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{x+1} \cos nx \, dx &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}[e^{x+1} \cos nx]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi e^{x+1} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{n^2}((-1)^n e^{\pi+1} - e) - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi e^{x+1} \cos nx \, dx \end{aligned}$$

On tire pour tout entier $n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \int_0^\pi e^{x+1} \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2}((-1)^n e^{\pi+1} - e),$$

donc

$$\int_0^\pi e^{x+1} \cos nx \, dx = e \frac{((-1)^n e^\pi - 1)}{n^2 + 1}.$$

3) $\boxed{1{,}5 \text{ pt}}$

On remarque que la fonction est continue donc $\mathcal{F}(f)$ existe (on peut aussi dire qu'elle est localement intégrable).

Calcul des coefficients . Puisque f est paire il vient: $b_n = 0 \ \forall n \geq 1$, et les a_n sont donnés comme suit

- $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{x+1} dx = \frac{2}{\pi}(e^{\pi+1} - e).$

• $\forall n \geq 1$,
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \text{ ie } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x+1}\cos nx\,dx = \frac{2e}{\pi}.\frac{((-1)^n e^\pi - 1)}{n^2+1}.$$

La série de Fourier de f. Elle est donnée par :
$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx = \frac{e^{\pi+1}-e}{\pi} + \frac{2e}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}.\cos nx.$$

4) $\boxed{1{,}5 \text{ pt}}$

Vérifions les hypothèses du corrollaire de Dirichlet sur $[0,\pi]$ car f est 2π-périodique et paire:

$\rightsquigarrow$ $f_{/]0,\pi[}(x) = e^{x+1}$ $f_{/]0,\pi[}$ est de classe C^1; $f'_{/]0,\pi[}(x) = e^{x+1}$,
$$\lim_{x\to 0^+} f'_{/]0,\pi[}(x) = e \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to\pi^-} f'_{/]0,\pi[}(x) = e^{\pi+1} \in \mathbb{R},$$

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le graphe ou bien car elle est continue sur $]0,\pi[$ et $f(-\pi) = f(\pi)$.).

f est donc égale à sa série de Fourier $\mathcal{F}(f)$ sur $\mathbb{R}$. C'est à dire
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{e^{\pi+1}-e}{\pi} + \frac{2e}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}.\cos nx = f(x). \tag{2}$$

f est donc developpable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

5) $\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$ Remplaçons dans l'égalité (2), x par 0 puis par π, on obtient alors le système suivant:
$$\begin{cases} e = \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi} + \dfrac{2e}{\pi}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^\pi}{n^2+1} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}\right) \\ e^{\pi+1} = \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi} + \dfrac{2e}{\pi}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^\pi}{n^2+1} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right) \end{cases}$$

Donc, S_1 et S_2 vérifient :
$$\begin{cases} e^\pi S_1 - S_2 = \underbrace{\dfrac{\pi}{2e}\left(e - \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi}\right)}_{c_1} \\ -S_1 + e^\pi S_2 = \underbrace{\dfrac{\pi}{2e}\left(e^{\pi+1} - \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi}\right)}_{c_2}. \end{cases}$$

On résout le dérnier système et on trouve:
$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{e^\pi c_1 + c_2}{e^\pi - 1}, \\ S_2 = \dfrac{(e^{2\pi} - e^\pi + 1)c_1 + e^\pi c_2}{e^\pi - 1}. \end{cases}$$

EXERCICE 4 (6 points) :

Partie 1 :

1) $\boxed{\text{1,5 pt}}$

Dérivée partielles par rapport x en $(0,0)$

$$\forall x \neq 0, \quad \left| \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{x^3}{x|x|} \right| \leq |x| \to 0 \ \ qd \ \ x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ,0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Dérivée partielles par rapport y en $(0,0)$

$$\forall y \neq 0, \quad \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{0}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

2) $\boxed{\text{1,5 pt}}$

La différentiabilité de f en $(0,0)$: On peut répondre de deux façons (équivalentes)

Méthode 1 : Si f est différentiable en $(0,0)$, on aura

$$d_{(0,0)}f = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0.$$

Montrons alors que c'est vrai par définition. On a

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (d_{(0,0)}f)(x,y)}{\|(x,y)\|_2}$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0}{\|(x,y)\|_2} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 + xy^3}{x^2 + y^2}$$

$$= \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\text{borné}} \underbrace{x}_{\text{tend vers 0}} + \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\text{borné}} \underbrace{xy}_{\text{tend vers 0}}$$

$$= 0.$$

On en déduit que f est différentiabilité f en $(0,0)$ et $d_{(0,0)}f = 0$.

Méthode 2 : Utilisons alors la définition, ie :

$$f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-\left[h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = \|(h_1,h_2)\|.\varepsilon(h_1,h_2)$$

ie $f(h_1,h_2) = \|(h_1,h_2)\|.\varepsilon(h_1,h_2)$, choisissons la norme euclidienne :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^3+h_1h_2^3}{h_1^2+h_2^2}.$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0;0)} \left(\underbrace{\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}}_{\text{borné}} \underbrace{h_1}_{\text{tend vers 0}} + \underbrace{\frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}_{\text{borné}} \underbrace{h_1h_2}_{\text{tend vers 0}} \right) = 0.$$

On en conclut que f est différentiable en $(0,0)$.

3) $\boxed{\text{0,5 pt}}$

Puisque f est différentiable en $(0,0)$, alors elle est continue en $(0,0)$. Ce qui implique que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Partie 2 :

1) $\boxed{\text{2 pt}}$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: f est continue car c'est le rapport et la composée de deux fonctions continues.

$\rightsquigarrow$ En $(0,0)$: A t on $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = (0,0) = 0$?

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{\sin(x^2).\cos y}{x^2+y^2}.$$

Utilisons les chemins

$\rightsquigarrow$ $y=0$: $\lim_{x\to0} g(x,0) = \lim_{x\to0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 = l_1$.

$\rightsquigarrow$ $x=0$: $\lim_{y\to0} g(0,y) = \lim_{x\to0} \frac{0}{y^2} = \lim_{x\to0} 0 = 0 = l_2$

$l_1 \neq l_2$ alors $\lim_{(x,y)\to(0;0)} g(x,y)$ n'existe pas (premier chemin car $l_1 \neq 0$).

g n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) $\boxed{\text{0,5 pt}}$

g n'est pas différentiable en $(0,0)$ car g n'est donc pas continue en $(0,0)$.