الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ESTIN École Supérieure en Sciences et Technologies de l'Informatique et du Numérique

Concours national d'accès au second cycle de l'école ESTIN

Année universitaire : 2023

Épreuve de Mathématiques

Domaine : MI **Durée : 2 heures** **Coefficient : 1**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Instructions générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 3 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation.
- **Les candidats doivent rendre leurs copies même vierges.**
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies.
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées.
- Les documents sont interdis, sauf indication contraire sur le sujet.
- Aucun échange n'est autorisé entre les candidats.
- **Les parties *Analyse*, *Algèbre* et *Logique mathématique* doivent être rédigées sur des copies séparées.**

Barème de notation.

Partie I (*Analyse*) : 8 points.

Partie II (*Algèbre*) : 7 points.

Partie III (*Logique mathématique*) : 5 points.

Partie I : *Analyse*

Exercice 1 (4 points). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = x(1 + x + y - y^2)$.

1. La fonction f admet-elle des extrema globaux dans $\mathbb{R}^2$? (justifier votre réponse !)
2. Déterminer les points critiques de f puis donner leur nature.

Exercice 2 (4 points). Considérons la série entière suivante :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}.$$

$\underline{R = 1}$

1. Calculer le rayon de convergence ϱ de cette série entière.
2. Déterminer le domaine de convergence de cette série entière.
3. Calculer la somme $S(x)$ pour tout $x \in]-\varrho, \varrho[$.

Partie II : *Algèbre*

Exercice (7 points). Soit $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & m^2 & 2m^2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $P_{A_m}(\lambda) = -(1 + \lambda)(2 - m - \lambda)(2 + m - \lambda)$.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est diagonalisable ?
3. On pose $m = -1$ et on note par A la matrice A_{-1}.

P

P^{-1}

   (a) Diagonaliser la matrice A en une matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ (en ordonnant les valeurs propres par ordre croissant). P

   (b) Calculer A^{-1} en utilisant le Théorème de Cayley-Hamilton. ?

   (c) Déduire l'ensemble des solutions du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = x(t) + 2y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

Partie III : *Logique mathématique*

Exercice (5 points).

1. Définir le concept de l'interprétation dans le langage des prédicats.
2. Traduire en logique du 1^er^ ordre les propositions suivantes :
   (a) Bien que personne ne fasse de bruit, Emily n'arrive pas à se concentrer.
   (b) Si personne ne fait de bruit, Emily répondra au moins à une question.
   (c) On ne peut être assis à côté de soi-même.
3. Soit la formule suivante :

$$\beta \equiv \forall x \exists y \ P(x, h(y)) \Longrightarrow \forall z (Q(x, a) \Longrightarrow R(z)).$$

   Déterminer la forme standard de Skolem de β : β_{sko}.

BON TRAVAIL

Date : **Samedi, 24 Juin 2023.**