E.S.I. 2CP ALG3 Contrôle intermédiaire 25 novembre 2019 Durée : **1h30**

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :

Le barême est approximatif.

Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (Questions de cours) (3,5 pts)

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et n, m, p des entiers naturels non nuls.

1- Soient les matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$: $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq p}}$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq m}}$.

i/ Définir le produit $A \cdot B$.

ii/ Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

2- Le produit de deux matrices symétriques est-il une matrice symétrique ? Justifier.

3- L'anneau $M_n(\mathbb{K})$ est-il intègre ? Justifier.

4- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et B, C deux bases de E. La matrice de passage de B vers C est-elle inversible ? Justifier.

Exercice 2 : (6,5 pts)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ_a un endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & a+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Déterminer suivant le paramètre a, sans rechercher l'expression de φ_a, une base de $\ker \varphi_a$ et le rang de φ_a.

2- Pour quelles valeur de a la matrice M_a est-elle inversible ?

3- Soit $C = (P_1 = 1 + X^2, P_2 = X + X^2, P_3 = 1 + X)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$.

i/- Verifier que C est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

ii/- Déterminer la matrice de passage P de B vers C.

iii/ Calculer P^{-1}.

4- Utiliser les résultats de la question 3 pour :

i/ Déterminer les coordonnées du vecteur $A = 2 + 3X - 4X^2$ dans la base C.

ii/ On pose $M'_a = M_C(\varphi_a)$. Exprimer M'_a en fonction des matrices M_a et P. Justifier.

Bon courage.