Exercice : (10 pts)

1- Soit la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \beta & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \beta \\ -1 & \beta & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer det A_β.

2- Soit $\Phi_\beta \in End(\mathbb{R}^3)$ tel que $A_\beta = M_C(\Phi_\beta)$ où C désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a/ Déduire de la question précédente les valeurs de β pour lesquelles Φ_β est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b/ Dans le cas où Φ_β est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$, déterminer en utilisant les déterminants, la matrice associée à Φ_β^{-1} relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c/ Dans le cas où Φ_β n'est pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$, déterminer en utilisant les déterminants, et suivant les valeurs de β, $rg(\Phi_\beta)$.

Exercice : (5 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$ et soit le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 2 & . & . & . & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & & & & & \\ & & & & & & & . \\ . & . & . & & & & & 0 \\ . & . & . & & & & & -1 \\ 0 & 0 & . & & . & . & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1- Trouver une relation de récurrence entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}, pour tout $n \geq 4$.

2- En déduire Δ_n en fonction de n.