Durée 2heures

Tout document interdit

Exercice 1. (2, 2, 2)

Soit $f(x)$ une fonction primitive récursive croissante. (strictement)

1. Rappeler la définition d'une relation récursive, puis montrez que la relation $R_1(y) = \exists x\, (f(x) = y)$ est récursive.

2. Que pouvez-vous en déduire concernant l'ensemble $D' = \{ f(x) \mid x \in \mathrm{N}\}$. Justifiez.

3. Soit Δ un ensemble fini de fonctions primitives récursives tel que :

$$\Delta = \{f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_k(x)\} \text{ avec } k > 1$$

$f_1, \ldots, f_k$ sont croissantes.

On considère les ensembles suivants :

$$F_1 = \{ f_1(x) \mid x \in \mathrm{N}\}$$
$$F_2 = \{ f_2(x) \mid x \in \mathrm{N}\}$$
$$\ldots\ldots$$
$$F_k = \{ f_k(x) \mid x \in \mathrm{N}\}$$

et

$$F = F_1 \cap \ldots \cap F_k = \{y \mid \exists x\,(f_1(x) = y) \text{ et } \exists x\,(f_2(x) = y) \text{ et } \ldots\text{et } \exists x(f_2(x) = y)\}$$

Montrer que F est récursif.

Exercice 2 (2, 2)

On considère la formule α telle que $\alpha : \forall x\,(P(x) \wedge \neg P(f(x))$

1. Montrer que α n'est pas satisfiable.
2. Montrer sans utiliser la propriété de complétude que α est inconsistante.

Exercice 2 (2, (2,2,2,2))

1. Montrer sans utiliser les propriétés de complétude et de consistance que l'ensemble Γ ci-dessous est inconsistant :

$$\Gamma : \{(\alpha \rightarrow \forall x\,\beta),\ \forall x\,(\alpha \wedge \neg\beta)\}\ \textit{x n'apparaît pas libre dans } \alpha.$$

3. On considère la formule $\alpha : (\forall x\, S(x)) \vee \forall x\, P(x) \rightarrow \forall x\,(S(x) \vee P(x))$.

- **a.** Mettre sous forme normale prenexe α.
- **b.** Donner la forme de skölem de α.
- **c.** Donner une interprétation qui satisfait α.
- **d.** Donner une interprétation qui falsifie α.

N. B. Remettre une seule double feuille et une seule intercalaire au plus.

Corrigé Log M 2003 / 2004
(27/06/04)

Examen de Remplacement

Exercice 1 :

Voir corrigé EMD3

Exercice 2 :

$\alpha : \forall x \, (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$

1) Montrer que α est non satisfiable

Par l'absurde : Supposons que α soit satisfiable alors :

($\exists$) il existe une interp I de domaine D telle que : $I(\forall x(P(x) \wedge \neg P(f(x)))) = V$ (1)

(1) $\Leftrightarrow I(P(x) \wedge \neg P(f(x)))_{v(x=d)} = V$ pour tout $d \in D$

(1) $\Leftrightarrow I(P(x))_{v(x=d)} = V$ pour tout $d \in D$

et $I(\neg P(f(x)))_{v(x=d)} = V$ pour tout $d \in D$

$\Leftrightarrow I(P)(d) = V$ pour tout $d \in D$

et $I(\neg P)(I(f)(d)) = V$ pour tout $d \in D$

$\Leftrightarrow I(P)(d) = V$ pour tout $d \in D$ (2)

et $I(P)(I(f)(d)) = F$ pour tout $d \in D$ (3)

pour $d' \in D$ on a : $I(P)(d') = V$ d'après (2)

$I(P)(I(f)(d')) = F$ d'après (3)

P

Posons $I(f)(d') = d''$

d'après ① : $I(P)(d) = V$ pour tout $d \in D$

en particulier pour $d = I(f)(d') = d''$

on aura alors : $I(P)(d'') = V$ d'après ②

or $I(P)(d'') = F$ d'après ③

ce qui est absurde.

d'où α n'est pas satisfiable.

2) Sans la complétude montrer que α est inconsistante

i.e : trouvons γ tq : $\alpha \vdash \gamma$ et $\alpha \vdash \neg\gamma$.

$\alpha : \forall x (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$

Pour pouvoir utiliser les axiomes vues en théorie de la dém on est obligé d'exprimer α (en fct) avec les connecteurs $\neg$ et $\rightarrow$:

(α =) on a : $\alpha \equiv \forall x \neg (P(x) \rightarrow P(f(x)))$.

1) $\forall x \neg (P(x) \rightarrow P(f(x)))$ hyp.

2) $\forall x \neg (P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow \neg (P(x) \rightarrow P(f(x)))$ A_4

3) $\neg (P(x) \rightarrow P(f(x)))$ MP (1, 2)

4) $P(f(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(f(x)))$ A_1

5) $\neg (P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow \neg (P(f(x)))$ car $\alpha \rightarrow \beta$ $\vdash$ $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

6) $\neg P(f(x))$ MP (3, 5)

d'où

$\alpha \vdash \neg P(f(x))$

essayons de déduire $P(f(x))$ ou $P(x)$.

1) $(\neg P(x) \to \neg(P(x) \to P(f(x)))) \to ((\neg P(x) \to (P(x) \to P(f(x)))) \to P(x))$ A_3

2) $\forall x \neg(P(x) \to P(f(x)))$ hyp

3) $\forall x \neg(P(x) \to P(f(x))) \to \neg(P(x) \to P(f(x)))$ A_4

4) $\neg(P(x) \to P(f(x)))$ mp (2,3).

5) $\neg(P(x) \to P(f(x))) \to (\neg P(x) \to \neg(P(x) \to P(f(x))))$ A_1

6) $\neg P(x) \to \neg(P(x) \to P(f(x)))$ mp (4,5).

7) $(\neg P(x) \to (P(x) \to P(f(x)))) \to P(x)$

8) $\neg P(x) \to (P(x) \to P(f(x)))$ thm (*)

9) $P(x)$ mp (7,8)

10) $\forall x P(x)$ R$_G$ (9) car x n'apparait pas libre ds l'hyp.

11) $\forall x P(x) \to P(f(x))$ A_4 car $f(x)$ est libre pour x ds $P(x)$

12) $P(f(x))$ mp (10,11)

d'où :

$\alpha \vdash P(f(x))$ donc α est inconsistant.

dém de * :

$\Gamma = \{\neg P(x), P(x)\}$ est un ensb incon

car $\Gamma \vdash \neg P(x)$ et $\Gamma \vdash P(x)$

d'où $\quad \Gamma \vdash P(f(x))$

i.e $\quad \neg P(x), P(x) \vdash P(f(x))$

$\Rightarrow \vdash \neg P(x) \to (P(x) \to P(f(x)))$

Exercice 3

1) $\Gamma = \{\alpha \to \forall x \beta, \ \forall x (\alpha \wedge \neg \beta)\}$

$\forall x (\alpha \wedge \neg \beta) \equiv \forall x \neg (\alpha \to \beta)$

montrons q: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ et $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)$

1) $\alpha \to \forall x \beta$ hyp 1

2) $\forall x \beta \to \beta$ $\quad A_4$

3) $\alpha \to (\forall x \beta \to \beta)$ (cor : $\gamma \vdash \alpha \to \gamma$)

4) $(\alpha \to (\forall x \beta \to \beta)) \to ((\alpha \to \forall x \beta) \to (\alpha \to \beta))$ A_2

5) $(\alpha \to \forall x \beta) \to (\alpha \to \beta)$ $\quad$ mp (3, 4)

6) $\alpha \to \beta$ $\quad$ mp (1, 5)

7) $\forall x \neg (\alpha \to \beta)$ hyp 2

8) $\forall x \neg (\alpha \to \beta) \to \neg (\alpha \to \beta)$ $\quad A_4$

9) $\neg (\alpha \to \beta)$ $\quad$ mp (7, 8)

d'où : $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ et $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \beta)$

donc Γ est inconsistant.

2) $\alpha : ((\forall x S(x)) \vee (\forall x P(x))) \to \forall x (S(x) \vee P(x))$

a) $\alpha \equiv ((\forall x S(x)) \vee (\forall y P(y))) \to \forall z (S(z) \vee P(z))$

$$\equiv \underbrace{\exists x \exists y \forall z ((S(x) \vee P(y)) \to (S(z) \vee P(z)))}_{\text{Forme Prenexe de } \alpha}$$

b) α_S : $\forall z\ ((S(a) \vee P(b)) \rightarrow (S(z) \vee P(z)))$

c) α est satis si et ssi α_S est satis

$D = \mathbb{N}$, IS : " ... est positif ou nul "
IP : " ... est pair "

on a $(*)$ $I(S(x))_{v(x=n)} = V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où $I(\forall x S(x)) = V$ donc $I(\forall x S(x)$

donc $I(\forall x S(x) \vee \forall x P(x)) = V$

de m̂ : $I(S(x) \vee P(x))_{v(x=n)} = V$ car $(*)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où $I(\forall x (S(x) \vee P(x))) = V$ donc $I(\alpha) = V$.

d) donner I tq $I(\alpha)_v = F$ pour tout v.

pas d'interpretation qui falsifie α

car α est un thm.

Exercice 1

1) $f(x)$: fct croiss primitive récursive

Car $\chi_{R_1}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } R_1(y) \text{ est } V \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists x \text{ tq } y = f(x) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

on a : $f(0) \geq 0$

$f(1) > f(0) \geq 0$ car f est strict $\uparrow$

2) $\Rightarrow f(1) > 0 \Rightarrow f(1) \geq 1$

on a : $f(2) > f(1) \geq 1 \Rightarrow f(2) > 1 \Rightarrow f(2) \geq 2$

de m̂ on démontre que $f(n) \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists x$ tq $y = f(x) \Leftrightarrow \exists x$ tq $x \leq f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \leq y$ tq $f(x) = y$.

$\Leftrightarrow \exists x \in \{0, \dots, y\}$ tq $y = f(x)$

$\Leftrightarrow y = f(0)$ ou $y = f(1)$ ou ... ou $y = f(y)$

$\Leftrightarrow \ = \prod_{k=0}^{n} |y - f(k)|$

$\Leftrightarrow \ Sg\left(\prod_{k=0}^{n} |y - f(k)|\right) = 0$

d'où :

$$Car_{R_1}(y) = Sg\left(\prod_{k=0}^{n} |y - f(k)|\right)$$ PR car composée de f PR.

ou bien $\exists x \in \mathbb{N}$ tq : $y = f(x) \Leftrightarrow$

2) $D = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$

$$Car_D(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in D \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists x \in \mathbb{N} \text{ tq } y = f(x) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$= Car_{R_1}(y)$ or Car_{R_1} est Récursive

d'où Car_D est R donc D est un ensble R.

3) $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k$

d'après la question précédente, les ensbls $F_1, \dots, F_k$ sont récursifs (tous) d'où $F_1 \cap \dots \cap F_k$ est récursif car l'intersection d'ensbls récursifs est récursive.