2011/2012. CP2. ANA4

Examen final en ANA4. LE 12/06/2012

Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.

Exercice 1 (2,5 pts)

Soit $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t+itx}}{\sqrt{t}} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que F converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (6 pts)

Calculer:

1) $\int\limits_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sin t dt$.

2) $\mathcal{L}(f(t))$ où $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right)$.

Exercice 3 (11.5 pts)

On considère la fonction F définie par:

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx) dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $DF = \mathbb{R}$

2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; écrire $F'(x)$ sans la calculer.

3) Caculer $\dfrac{\delta}{\delta t}(e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx))$, et en déduire que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} (x\cos(tx) - t\sin(tx))\, dt = 0$.

4) Montrer que la fonction $x \hookrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} F(x)$ est constante.

Sachant que $(F(0))^2 = 2\pi$, déterminer la valeur de $F(x)$.

5) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

6) Résoudre l'équation de convolution suivante:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(u-t)dt = e^{-\frac{u^2}{2}}$; y étant une fonction dans $L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$.

Bon courage.

Un corrigé.

Exercice 1

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+itx}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} (\cos(tx) + i\sin(tx))\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1) considérons $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)\, dt$ si celles-ci convergent alors F converge.

On a $\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, or $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge :

★ Au $v(+\infty)$: $\int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$ converge (intégrale de référence).

★ Au $v(0^+)$: $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{e^{-t}}{t}$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge (intégrale de Riemann).

On en conclut que F converge sur $\mathbb{R}$, en fait on a montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$, par la convergence dominée.

2) De plus $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)$ et $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx)$ sont continues (produit, composées et rapport de fonctions continues) donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sin t dt$, il suffit de calculer $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ / $f(t) = t^2 e^{-t} \sin t$ puis prendre $s = 1$.

$$F(s) = (-1)^2 [\mathcal{L}(\sin t)]'' = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'' = \left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right)' = -2\left(\frac{(s^2+1)^2 - 4s^2(s^2+1)}{(s^2+1)^4}\right)$$

$$= -2\left(\frac{s^4 + 2s^2 + 1 - 4s^4 - 4s^2}{(s^2+1)^4}\right) = -2\left(\frac{-3s^4 - 2s^2 + 1}{(s^2+1)^4}\right),\ F(1) = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \sin t dt = F(1) = \frac{1}{2}$.

2) $\mathcal{L}(f(t))$ où $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$ utilisons la définition:

$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t dt$ qui converge (absolument) pour $s > 0$.

utilisons une premiére IPP: $\begin{array}{l} u = \sin t \to u' = \cos t \\ v' = e^{-st} \to v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array}$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \left(\underbrace{\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin t\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st} \cos t dt\right) = \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st} \cos t dt$$

utilisons une deuxiéme IPP: $\begin{array}{l} u=\cos t\rightarrow u'=-\sin t \\ v'=e^{-st}\rightarrow v=-\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\frac{1}{s}\left(\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cot t\right]_0^{\pi}-\frac{1}{s}\int\limits_0^{\pi}e^{-st}\sin tdt\right)=\frac{1}{s^2}\left(e^{-s\pi}+1-\mathcal{L}\left(f(t)\right)\right)$$

$$\left(s^2+1\right)\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\left(e^{-s\pi}+1\right)\ \text{ ie } \mathcal{L}\left(f(t)\right)=\frac{\left(e^{-s\pi}+1\right)}{s^2+1}\quad \forall s>0.$$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6\left(s-2\right)+8}{\left(s-2\right)^2+16}\right)=6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\left(s-2\right)}{\left(s-2\right)^2+16}\right)+$
$2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{\left(s-2\right)^2+16}\right)$
$=6e^{2t}\cos\left(4t\right)+2e^{2t}\sin\left(4t\right).$

Exercice 3

Posons $f(t,x)=e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(tx)$, $x\in\mathbb{R}$.
1) Montrer que $DF=\mathbb{R}$.
f étant paire selon la variable t alors $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t,x)dt$ converge ssi $\int\limits_{0}^{+\infty}f(t,x)dt$ converge.
On a $|f(t,x)|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, or $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge par la régle de l'ordre:
$\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}=0$ donc $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t,x)dt$ converge sur $\mathbb{R}$ et on a: $F(x)=2\int\limits_{0}^{+\infty}f(t,x)dt$.
2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; écrire $F'(x)$ sans la calculer.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=-te^{-\frac{t^2}{2}}\sin(tx)$.
a) f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.
b) convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$:
$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leq te^{-\frac{t^2}{2}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, or $\int\limits_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$ converge par la régle de l'ordre:
$\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}=0$ donc $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t,x)dt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
De a) et b) F est C^1 sur $\mathbb{R}$ de plus $F'(x)=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt=-2\int\limits_{0}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\sin(tx)dt$.
3) ★ Le cacule: $\frac{\delta}{\delta t}(e^{-\frac{t^2}{2}}\sin(tx))=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(x\cos\left(tx\right)-t\sin\left(tx\right)\right)$.
★ La déduction:
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\left(x\cos(tx)-t\sin(tx)\right)dt=\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\sin(tx)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\sin(tx)-$

$\lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx) = 0.$

4) Montrer que la fonction $x \hookrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} F(x)$ est constante.

Comme F est dérivable, alors $e^{\frac{x^2}{2}} F(x)$ est dérivable (comme produit, composée de fonctions dérivables):

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} F(x)\right)' = xe^{\frac{x^2}{2}} F(x) + e^{\frac{x^2}{2}} F'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)dt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx)dt \right)$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left(x \cos(tx) - t \sin(tx)\right) dt = 0 \ \forall x \in \mathbb{R},$$

par conséquent $\exists c \in \mathbb{R}$ telle que $e^{\frac{x^2}{2}} F(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Calcule de la constante: pour $x = 0$ $e^{\frac{0^2}{2}} F(0) = c \iff c = F(0)$.

or $(F(0))^2 = 2\pi \iff |F(0)| = \sqrt{2\pi}$ et comme $F(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq 0$ donc $F(0) = \sqrt{2\pi}$

On en conclut $F(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)dt.$

5) Calcule de la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

a) g est continue sur $\mathbb{R}$ de plus $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ donc elle est convergente d'où $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

b) Calcule de $\mathcal{F}(g(t))(s) = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)dt = F(s) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{s^2}{2}} \ \forall s \in \mathbb{R}$.

6) Résolution de l'équation de convolution:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(u-t)dt = e^{-\frac{u^2}{2}} \iff y * y = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

y étant une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$ appliquons la transformée de Fourier à l'équation:

$\mathcal{F}(y * y)(s) = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)(s) \iff [\mathcal{F}(y)(s)]^2 = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{s^2}{2}} \iff |\mathcal{F}(y)(s)| = \sqrt[4]{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}$.

On trouve donc:

$\rightsquigarrow$ Si $\mathcal{F}(y)(s) \geq 0$ alors $\mathcal{F}(y)(s) = \sqrt[4]{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}$.

$\rightsquigarrow$ Si $\mathcal{F}(y)(s) \leq 0$ alors $\mathcal{F}(y)(s) = -\sqrt[4]{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}$.

on remarque que $\mathcal{F}(y)(s)$ ne peut pas changer de signe car dans ce cas $\mathcal{F}(y)$ s'annulerai (par continuité) ce qui est impossible.

1er cas:$\mathcal{F}(y_1)(s) = \sqrt[4]{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}$.

Appliquons le théorème d'inversion de Fourier:

a) $y_1 \in C^1(\mathbb{R})$ alors y est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.

b) Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ias} \mathcal{F}(y_1)(s)\, ds$:

On a $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ias}\mathcal{F}(y_1)(s)\,ds = \sqrt[4]{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ias}e^{-\frac{s^2}{4}}ds = 2\sqrt[4]{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}}\cos(as)\,ds$

comme $\left|e^{-\frac{s^2}{4}}\cos(as)\right| \leq e^{-\frac{s^2}{4}}$ et $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}}ds$ converge par la régle de l'ordre,alors $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ias}\mathcal{F}(y_1)(s)\,ds$ est convergente, on obtient alors:

$y_1(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ias}\mathcal{F}(y_1)(s)\,ds = \frac{\sqrt[4]{2\pi}}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}}\cos(as)\,ds$, faisons le changement: $s' = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ie $s = \sqrt{2}s'$ et $ds = \sqrt{2}ds'$.

$y_1(a) = \frac{\sqrt[4]{2\pi}.\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(s')^2}{2}}\cos\left(\sqrt{2}as'\right)ds' = \frac{\sqrt[4]{2\pi}.\sqrt{2}}{2\pi}F(\sqrt{2}a) = \frac{\sqrt[4]{2\pi}.\sqrt{2}}{2\pi}.\sqrt{2\pi}e^{-\frac{2a^2}{2}}$

On rappelle que : $2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(tx)dt = F(s) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{s^2}{2}}\ \forall s \in \mathbb{R}$, on a donc:

$y_1(a) = (2\pi)^{\frac{3}{4}-1}.\sqrt{2}e^{-a^2} = \frac{\sqrt{2}e^{-a^2}}{\sqrt[4]{2\pi}}\ \forall a \in \mathbb{R}$

De même: $y_2(a) = -\frac{\sqrt{2}e^{-a^2}}{\sqrt[4]{2\pi}}\ \forall a \in \mathbb{R}$