INI.2006/2007 Math2. 2I

Durée: 2h

EMD2 Mars 2007.

DOCUMENTS INTERDITS.

Exercice 1: (6,5 points: 1,5+ 3+ 2)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ y \leq x^2 - 2x + 2,\ y \geq -x\}$.

1) Donner une représentation graphique de D.

2) Intervertir l'ordre d'intégration dans le calcul de $\iint_D f(x,y)dxdy$ (où f est une fonction intégrable sur D).

3) Calculer $\iint_D xdxdy$.

Exercice 2:(6,5 points: 1,5+ 2+ 1,5+ 1,5)

Soit le domaine Ω limité par les surfaces d'équations:

$$x^2 + y^2 = 1;\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,;\ z = 3 - (x^2 + y^2)$$

1) Représenter graphiquement le domaine Ω.

2) Soient $I = \iiint_\Omega [(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)]dxdydz$ et $J = \iiint_\Omega \left[(x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 \right] dxdydz$.

a) Calculer I.

b) Déduire la valeur de J.

3) Soit le domaine $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \Omega / 0 \leq z \leq 1\}$, donner la méthode de calcul de $\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz$ où f est une fonction intégrable sur Ω, en utilisant:

a) Le théoréme2 de Fubini.

ou bien

b) Les coordonnées sphériques.

Attention: Pour la question 3): choisir a) ou b).

Exercice 3:(7 points: 3+ 4)

1) Etudier la nature de l'intégrale suivante selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx.$$

2) Donner la nature (convergence absolue, semi-convergence) de l'intégrale suivante:

$$\int_e^{+\infty} \log\left(1 + \frac{\sin x}{x \log x}\right) dx.$$

Bon courage!

Corrigé Math2

EMD2. 2006/2007.

Exercice 1

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq: } x^2+y^2-2y \leq 0 \ , \ y \leq x^2-2x+2, \ y \geq -x \}$$

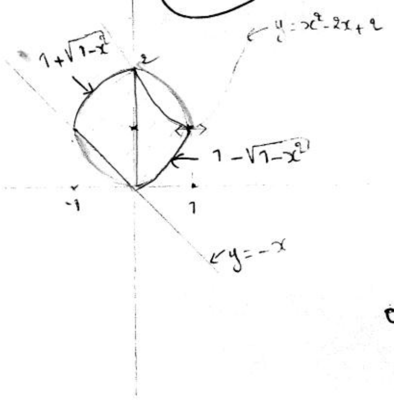
1) $x^2+y^2-2y \leq 0 \iff (y-1)^2 + x^2 \leq 1 \iff (x,y) \in D((0,1),1)$

$g(x) = x^2-2x+2$

$g'(x) = 2x-2.$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$			0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1,25



2) $(x,y) \in D$

$\iff$

$-1 \leq x \leq 1$ 0,25

0,5 $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ 0,5

où $\varphi_1(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ -x & \text{si } x \in [-1,0] \end{cases}$

et $\varphi_2(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1,0] \\ x^2-2x+2 & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$

0,25 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2-2x+2} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$

Interversion:

$(x,y) \in D \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 & \text{0,25} \\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \end{cases}$

$\psi_1(y) = \begin{cases} -y \ \text{(0,25)} & y \in [0,1] \\ -\sqrt{-y^2+2y} \ \text{(0,25)} & y \in [1,2] \end{cases}$ et $\psi_2(y) = \begin{cases} +\sqrt{-y^2+2y} \ \text{(0,25)} & y \in [0,1] \\ ? & y \in [1,2] \end{cases}$

Résolvons l'équation : $y = x^2 - 2x + 2$ $(*)$
$= (x-1)^2 + 1$

$(*) \iff$

$(x-1)^2 = y-1 \iff |x-1| = \sqrt{y-1}$

or $x \leq 1$ (geomet) $(*) \iff 1-x = \sqrt{y-1}$
$\iff x = 1 - \sqrt{y-1}$. 0,50

d'où $\psi_2(y) = \begin{cases} \sqrt{-y^2+2y} & \text{si } y \in [0,1] \\ 1-\sqrt{y-1} & \text{si } y \in [1,2] \end{cases}$ 0,75

donc 0,25 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{\sqrt{-y^2+2y}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{-y^2+2y}}^{1-\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx \right) dy$ 0,5 0,25 0,5 0,25

3) $I = \iint_D x\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2-2x+2} x\,dy \right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^0 \left(\int_{-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx}_{I_2}$ 1 1

$I_1 = \int_0^1 x \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2-2x+2} 1\,dy \right) dx = \int_0^1 x \left[x^2 - 2x + 2 - 1 + \sqrt{1-x^2} \right] dx$

$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1 \times (-1/2)}{\frac{1}{2}+1}}_{=-1/3}(1-x^2)^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$I_2 = \int_{-1}^0 x \times (1 + \sqrt{1-x^2} + x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1(-1/2)}{\frac{1}{2}+1}(1-x^2)^{3/2} \Big]_{-1}^0$

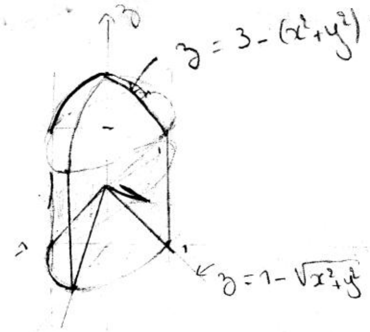
$= \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{3} = -\frac{1}{2}$

d'où $\iint_D x\,dx\,dy = \frac{5}{12} - \frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \boxed{\frac{-1}{12} = I}$

$\frac{-1}{2} + \frac{1}{3}$

Exercice 2 :

1)



l'intersection du cylindre et du cône : $x^2+y^2=1$, $z=0$

l'intersection de la paraboloïde et du cylindre ;

$$\begin{cases} z = 3-(x^2+y^2) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2= \end{cases}$$

2) $$I = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)+(x^4+y^4)\,dx\,dy\,dz.$$

Calcul de I :

$$(x,y,z)\in\Omega \iff \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 3-(x^2+y^2) \\ (x,y)\in D(0_{\mathbb{R}^2},1) \end{cases}$$

utilisons les c. cylindriques :

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $\theta\in[0,2\pi[$.

$$(x,y,z)\in\mathring{\Omega} \iff \begin{cases} 1-r < z < 3-r^2 \\ r^2 < 1 \\ \theta\in[0,2\pi[\end{cases} \iff \begin{cases} 1-r<z<3-r^2 \\ 0<r<1 \\ \theta\in[0,2\pi[\end{cases}$$

0,75

$$I = \int_0^{2\pi}\Big(\underbrace{\int_0^1\Big(\int_{1-r}^{3-r^2} r(r^2+r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta))\,dz\Big)\,dr}_{I_1}\Big)\,d\theta.$$

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta.\sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2\theta)^2$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta.$$

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta.$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_{1-r}^{3-r^2} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} r(r^2 + r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta))\, d\theta}_{I_1} \right) dz \right) dr$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (r^3 + r^5(\cos^4\theta + \sin^4\theta))\, d\theta = r^3 \times 2\pi + r^5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta\right) d$$
$$= 2\pi r^3 + \frac{r^5}{4}\left[3 \times 2\pi + \left[\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi}\right].$$
$$= 2\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^5 + \frac{1}{16} r^5 [0]$$

1,25

$$I_1 = 2\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^5$$

$$I_2 = \int_{1-r}^{3-r^2} I_1(r)\, dz = \left(2\pi r^3 + \frac{3}{2}\pi r^5\right)(3 - r^2 - 1 + r)$$
$$I_2 = 2\pi\left(r^3 + \frac{3}{4} r^5\right)(2 + r - r^2)$$

$$I = 2\pi \left[\int_0^1 (2r^3 + r^4 + \frac{1}{2} r^5 + \frac{3}{4} r^6 - \frac{3}{4} r^7)\, dr \right.$$
$$I = 2\pi \left[\frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2.6} + \frac{3}{4\times7} - \frac{3}{4\times8} \right]$$
$$= \frac{2\pi}{3360} - \frac{\pi}{1680}$$

b) $$J = \iiint_\Omega (\underbrace{(x^2+y)^2 + (x+y^2)^2}_{g(x,y)})\, dx\, dy\, dz$$

$$g(x,y) = x^4 + y^2 + 2x^2y + x^2 + y^4 + 2xy^2 = \overbrace{x^4 + y^4 + x^2 + y^2}^{f(x,y)} + \overbrace{2x^2y + 2xy^2}^{h(x,y)}$$
$$J = I + 2\iiint_\Omega (\underbrace{x^2y + xy^2}_{h(x,y)})\, dx\, dy.$$

$(x,y,z)\in\Omega \iff (-x,-y,z)\in\Omega$

et $h(-x,-y,z) = -h(x,y,z)$

d'où $\displaystyle\iiint_\Omega h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$

ccl : $J = I$.

3) $\Omega_1 = \{(x,y,z)\in\Omega \mid 0\leq z\leq 1\}$.

b) C. Sphériq : $x = r\cos\theta\cdot\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\cdot\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$

$\varphi\in[0,2\pi[$, $\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, r

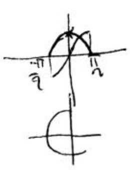
$$(x,y,z)\in\mathring{\Omega}_1 \iff \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2}<z<1 \\ x^2+y^2\leq 1\end{cases} \quad (**)$$

$$(**) \iff \begin{cases} 1-\sqrt{r^2\cos^2\theta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} < r\sin\theta < 1 \\ (r^2\cos^2\theta)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) < 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} 1 - r\,|\overset{\cos\theta}{\overset{\shortparallel}{\cos\theta}}| < r\sin\theta < 1 \\ r^2\cos^2\theta < 1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - r\cos\theta < r\sin\theta \\ r\sin\theta < 1 \\ r^2\cos^2\theta < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < r\,\overbrace{(\cos\theta+\sin\theta)}^{>0} \\ r < \dfrac{1}{\sin\theta} \\ r^2 < \dfrac{1}{\cos^2\theta} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}^{>0} < r < \dfrac{1}{\sin\theta}^{>0} \\ r < \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}], \ \varphi\in[0,2\pi[\end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta} < r < \min\left(\dfrac{1}{\sin\theta},\dfrac{1}{\cos\theta}\right) \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ \varphi\in[0,2\pi[\end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta} < r < \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{4}[, \ \varphi\in[0,2\pi[\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta} < r < \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}], \ \varphi\in[0,2\pi[\end{cases}$$

Fubini 2 :

$$(x,y,z) \in \Omega' \iff \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } z \geq 1-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\iff 0 \leq z \leq 1 \quad \text{et} \quad (1-z)^2 \leq x^2+y^2 \leq 1$$

$$z \geq 1-\sqrt{x^2+y^2} \iff \sqrt{x^2+y^2} \geq 1-z.$$

$$\iff x^2+y^2 \geq (1-z)^2$$

Exercice 3 :

1) $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\, dx$ pb en 0 et en 1

en 1 : $f_1(x) \underset{1}{\sim} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \frac{e^{\alpha \log x} - 1}{x-1} \underset{1}{\sim} \frac{\alpha \log x}{x-1} \underset{1}{\sim} \frac{\alpha(x-1)}{x-1} = \alpha$

ccl : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f_1(x) = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ F. pb en 1

en 0^+ : $f_1(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{-1}{\log x}$ si $\alpha > 0 \Rightarrow \int_0^{1/2} f_1(x)\, dx$ cv . IB $\alpha = 0 < 1$

$\underset{0^+}{\sim} 0$ si $\alpha = 0 \Rightarrow \int_0^{1/2} f_1(x)\, dx$ cv car F. pb

$\sim$? si $\alpha < 0$

si $\alpha < 0$: $f_1(x) = \frac{x^\alpha - 1}{\log x} = \frac{x^\alpha (1 - 1/x^{+\alpha})}{\log x}$

$\underset{0^+}{\sim} \frac{x^\alpha}{\log x} = \frac{1}{x^{-\alpha} \log x}$ cv car I.B $-\alpha$

si $\int_0^{1/2} f_1(x)\, dx$ cv si et ssi $-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$

$\Leftrightarrow -1 < \alpha < 0$

2) $\int_e^{+\infty} \log\left(1 + \frac{\sin x}{x \log x}\right) dx$

• $|f_2(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|\sin x|}{x \log x} > \frac{\sin^2 x}{x \log x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x \log x} = \overbrace{\frac{1}{2x \log x}}^{DV} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{2x \log x}}_{\substack{CV \\ Abel}}$

$\Rightarrow \int_e^{+\infty} f_2(x)\, dx$ ne cv pas absolument

• $\log(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + o(z^2)$

$= \frac{\sin x}{x \log x} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x^2 \log^2 x} + \frac{\sin^2 x}{x^2 \log^2 x} \varepsilon\left(\frac{\sin x}{x \log x}\right)$