TD Transformée de Laplace

0.1 Rappel de cours

Définition 0.1.1.
*Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. On appelle **transformée de Laplace** de f la fonction F définie par*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

où $p = x + iy \in \mathbb{C}$. On écrira

$$F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$$

Remarques 0.1.1.

- *$\mathcal{L}$ signifiant transformée de Lplace de f.*
- *$F(p)$ est appelée image de f.*
- *f est l'originale de F.*
- *L'application qui associe à f son image est la transformation de Laplace. ($f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$)*
- *La transformée de Laplace n'existe que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge. Pour cela on impose à f les conditions suivantes :*

  (1) f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Les discontinuités de f si elles existent sont en nombre fini et sont de première espèce.

  (2) f est d'ordre exponentiel, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

  $$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

  Sous ces conditions la transformée de Laplace est définie pour tout p vérifiant $Re(p) > \alpha$

0.1.1 Propriétés

1. **Linéarité :** La transformée de Laplace est un opérateur linéaire. Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$. Alors

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g)$$

   où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. **Transformée de Laplace de l'homothétie ($f(at)$) :**
   Soit $h(t) = f(at)$, $a > 0$

$$\mathcal{L}(h)(p) = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt$$

   Par le changement de variable $at = x$, on aurra

$$\mathcal{L}(h)(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\big(\frac{p}{a}\big)$$

3. **Transformée de Laplace de la translation ($f(t-a)$) :**
   Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ tel que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Soit la fonction $g(t) = f(t-a)$, $(a > 0)$. Alors

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt$$

   Par le changement de variable $t - a = x$ on obtient

$$\mathcal{L}(g)(p) = e^{-pa}\mathcal{L}(f)(p)$$

4. **Transformée de Laplace de $e^{-at}f(t)$:** pour tout a on a

$$\mathcal{L}\big(e^{-at}f(t)\big)(p) = \mathcal{L}\big(f\big)(p+a)$$

5. **Transformée de Laplace de la dérivée :**

Théorème 0.1.1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$ existe. On suppose que f' est une fonction continue par morceaux et admet une transformée de Laplace, alors*

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

Ce résultat se généralise par récurrence pour les dérivées d'ordres supérieurs :

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

6. **Transformée de Laplace d'une primitive :**

Théorème 0.1.2. *Soit $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ une primitive de f qui s'annule en 0. Alors*

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}$$

7. **Transformée du produit de convolution :**

Théorème 0.1.3. *Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ respectivement et vérifiant $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$. Alors*

$$\mathcal{L}(f \star g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p)$$

où

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

0.1.2 Dérivée de la transformée de Laplace :

Théorème 0.1.4.
Soit $\mathcal{L}\big(f\big)(p) = F(p)$ la transformée de Laplace de f où f est une fonction continue par morceaux d'ordre exponentiel. Alors $F(p)$ est infiniment différentiable en tout p tel que $Re(p) > M$ et

$$\mathcal{L}\big(tf\big)(p) = -F'(p), \qquad \mathcal{L}\big(t^n f\big)(p) = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

0.1.3 Transformée inverse de Laplace

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de f, On applelle transformée inverse de Laplace ou originale de $F(p)$ la fonction $f(t)$ et on note

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(p)$$

Propriétés de la transformée inverse de Laplace

1. **Transformée inverse de Laplace d'une homothétie (originale de $F(ap)$) :**
On a $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F)(p)$

$$F(ap) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-apt}dt$$

On posons $at = x$, on obtient

$$F(ap) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\big(\frac{x}{a}\big)e^{-px}dx$$

D'où

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(ap) = \frac{1}{a}f\big(\frac{t}{a}\big)$$

2. **Transformée inverse de Laplace d'une translation (originale de $F(p-a)$) :**
   On a $F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ alors

$$\begin{aligned} F(p-a) &= \mathcal{L}(f)(p-a) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-a)t)}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big[f(t)e^{at}\big]e^{-pt}dt \\ &= \mathcal{L}(f(t)e^{at})(p) \end{aligned}$$

   D'où

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p-a)) = f(t)e^{at}$$

3. **Transformée inverse de Laplace d'une dérivée :**
   Soit $f(x)$ l'originale de $F(p)$ et $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \big[-tf(t)\big]e^{-pt}dt$$

   d'où

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(p)) = -tf(t)$$

   et par récurrence on aura

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(p)) = (-1)^n t^n f(t)$$

4. **Transformée inverse de Laplace d'une primitive :**

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} F(u)du &= \int_p^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-ut}dtdu \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\big[\frac{e^{-ut}}{-t}\big]_p^{+\infty}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-up} \end{aligned}$$

   d'où

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\int_p^{+\infty} F(u)du\Big] = \frac{f(t)}{t}$$

5. **Originale de $F(p)\times G(p)$:**
   L'originale du produit de deux fonctions est le produit de convolution des originaux.
   Si $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[F(p)\Big]$ et $g(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[G(p)\Big]$ alors

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[F(p)\times G(p)\Big] = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

0.1.4 Table de transformées de Laplace usuelles

N°	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)=F(p)$	N°	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)=F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	4	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	6	$e^{kt}\sin(at)$	$\frac{a}{(p-k)^2+a^2}$
7	$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	8	$e^{kt}\cos(at)$	$\frac{p-k}{(p-k)^2+a^2}$
9	$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	10	$e^{kt}\sin(at)$	$\frac{a}{(p-k)^2-a^2}$
11	$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	12	$e^{kt}\cos(at)$	$\frac{p-k}{(p-k)^2-a^2}$
13	$t\sin(at)$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	14	$t\cos(at)$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
15	$af(t)+bg(t)$	$aF(p)+bG(p)$	16	$f(at), a>0$	$\frac{1}{a}f(\frac{p}{a})$
17	$tf(t)$	$-F'(p)$	18	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
19	$f'(t)$	p F(p)- f(0)	20	$tf'(t)$	$-F(p)-pF'(p)$
21	$f''(p)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$	22	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-k-1}f^{(k)}(0)$
23	$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	24	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
25	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$	26	$\int_0^x f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
27	$(f\star g)(t)$	$F(p)G(p)$	28	$f:T-$périodique	$\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-tp}f(t)dt$

0.2 Corrigés d'exercices

Exercice 1. *Trouver la transformée de Laplace des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x)=(3e^x-x)^2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_1)(p) &= \mathcal{L}\big(9e^{2x}-6xe^x+x^2\big)\\ &= 9\mathcal{L}(e^{2x})(p)-6\mathcal{L}(xe^x)(p)+\mathcal{L}(x^2)(p)\\ &= \frac{9}{p-2}-\frac{6}{(p-1)^2}+\frac{2}{p^3}\end{aligned}$$

2. $f_2(x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_2)(p) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin x)(p)-\frac{1}{2}\mathcal{L}(x\cos x)(p)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{2}\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}\\ &= \frac{1}{(p^2+1)^2}\end{aligned}$$

3. $f_3(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f_3)(p) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(1)(p)-\frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2x))(p)\\ &= \frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p^2+4)}\end{aligned}$$

4. $f_4(x)=\cos(x+1)=\cos x\cos 1-\sin x\sin 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_4)(p) &= \cos 1\mathcal{L}(\cos x)(p) - \sin 1\mathcal{L}(\sin x)(p) \\
&= \cos 1 \frac{p}{p^2+1} - \sin 1 \frac{1}{p^2+1} \\
&= \frac{p\cos 1 - \sin 1}{p^2+1}
\end{aligned}$$

5. $f_5(x) = \int_0^x t\sinh(3t)dt$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_5)(p) &= \frac{\mathcal{L}\big(t\sinh(3t)\big)(p)}{p} \\
&= \frac{1}{p}\frac{6p}{(p^2-9)^2} \\
&= \frac{6}{(p^2-9)^2}
\end{aligned}$$

6. $f_6(x) = \sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\Big[\sin\Big((a+b)x\Big) + \sin\Big((a-b)x\Big)\Big]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_6)(p) &= \frac{1}{2}\Big[\mathcal{L}\Big(\sin\big((a+b)x\big)\Big)(p) + \mathcal{L}\Big(\sin\big((a-b)x\big)\Big)(p)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{a+b}{p^2+(a+b)^2} + \frac{a-b}{p^2+(a-b)^2}\Big]
\end{aligned}$$

7. $f_7(x) = \sin(ax)\sinh(bx) = \sin(ax)\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_7)(p) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\Big(e^{bx}\sin(ax)\Big)(p) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\Big(e^{-bx}\sin(ax)\Big)(p) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{(p-b)^2+a^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{(p+b)^2+a^2}\Big)
\end{aligned}$$

8. $f_8(x) = \int_0^x (x-t)\cosh t dt = x\int_0^x \cosh t dt - \int_0^x t\cosh t dt$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_8)(p) &= \mathcal{L}\Big(x\int_0^x \cosh t dt\Big)(p) - \mathcal{L}\Big(\int_0^x t\cosh t dt\Big) \\
&= -\Bigg(\mathcal{L}\Big(\int_0^x \cosh t dt\Big)(p)\Bigg)' - \frac{\mathcal{L}\big(t\cosh t\big)(p)}{p} \\
&= -\Bigg(\frac{\mathcal{L}\Big(\cosh t dt\Big)(p)}{p}\Bigg)' - \frac{1}{p}\Bigg(-\mathcal{L}\big(\cosh t\big)(p)\Bigg)' \\
&= -\Bigg(\frac{1}{p}\frac{p}{p^2-1}\Bigg)' + \frac{1}{p}\Bigg(\frac{p}{p^2-1}\Bigg)' \\
&= \frac{2p}{(p^2-1)^2} - \frac{p^2+1}{p(p^2-1)^2} \\
&= \frac{p^2-1}{p(p^2-1)^2} \\
&= \frac{1}{p(p^2-1)}
\end{aligned}$$

9. $f_9(x) = \begin{cases} \cos x, & si\ x \geq 1\ ; \\ 0, & sinon. \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_9)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \\
&= \int_0^1 0dt + \int_1^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt \\
&= \Big[e^{-pt}\sin t\Big]_1^{+\infty} + p\int_1^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt \\
&= -e^{-p}\sin 1 + p\Big[\Big[-e^{-pt}\cos t\Big]_1^{+\infty} - p\int_1^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt\Big] \\
&= -e^{-p}\sin 1 + pe^{-p}\cos 1 - p^2\mathcal{L}(f_9)(p)
\end{aligned}
$$

ce qui implique que $\mathcal{L}(f_9)(p) = \dfrac{(p\cos 1 - \sin 1)e^{-p}}{p^2+1}$

Exercice 2. *Trouver la transformée de Laplace des fonctions suivantes :*

1. $f_1(t) = t^n e^{at}$

   On pose $g(t) = e^{at}$ *alors* $\mathcal{L}(g)(p) = G(p) = \dfrac{1}{p-a}$

   $\mathcal{L}(f_1)(p) = \mathcal{L}(t^n g)(p) = (-1)^n G^{(n)}(p)$

   On calcul les dérievées succesives de G :

   $G'(p) = -\dfrac{1}{(p-a)^2}$, $G''(p) = \dfrac{2}{(p-a)^3}$, $G^{(3)}(p) = -\dfrac{2\times 3}{(p-a)^4}, \dots$

   on peut montrer par récurence que $G^{(n)}(p) = (-1)^n \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ *donc*

   $$F_1(p) = \mathcal{L}(f_1)(p) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$$

2. $f_2(t) = t^n \sin(bt)$

   On pose $g(t) = \sin(bt)$ *alors* $\mathcal{L}(g)(p) = G(p) = \dfrac{b}{p^2+b^2}$

   $F_2(p) = \mathcal{L}(f_2)(p) = \mathcal{L}(t^n g)(p) = (-1)^n G^{(n)}(p)$

3. $f_3(t) = e^{at}\sin(bt)$, *on pose* $g(t) = \sin(bt)$

   $$
   \begin{aligned}
   F_3(p) = \mathcal{L}(f_3)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{at}\sin(bt)e^{-pt} \\
   &= \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\sin(bt) \\
   &= \mathcal{L}(g)(p-a)
   \end{aligned}
   $$

   et $\mathcal{L}(g)(p) = \dfrac{b}{p^2+b^2}$, *alors* $\mathcal{L}(f_3)(p) = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$

4. $f_4(t) = e^{at}\cos(bt)$, *on pose* $g(t) = \cos(bt)$

   De même que l'exemple précédent on aura $\mathcal{L}(f_1)(p) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$.

5. $f_5(t) = \max\{0, a-t\}, a > 0$

   $F_5(p) = \mathcal{L}(f_5)(p) = \int_0^{+\infty} f_5(t)e^{-pt}dt = \int_0^a (a-t)e^{-pt}dt$

   On aurra après une intégration par partie

   $F_5(p) = -\Big[\dfrac{(a-t)e^{-pt}}{p}\Big]_0^a - \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^a e^{-pt}dt = \dfrac{a}{p} + \dfrac{e^{-ap}-1}{p^2}$

6. $f_6(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \le t \le 1\,; \\ 0 & si\ t > 1. \end{cases}$

   $F_6(p) = \mathcal{L}(f_6)(p) = \int_0^{+\infty} f_6(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 e^{-pt}dt = \Big[-\dfrac{e^{-pt}}{p}\Big]_0^1 = \dfrac{1-e^{-p}}{p}$

Exercice 3. *On pose $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$, Connaissant F et F', trouver la transformée de Laplace des fonctions suivantes :*

1. $g(t) = \sin(\omega t) f(t)$. *On a* $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ *alors*
   $g(t) = \dfrac{1}{2i}\Big[e^{i\omega t} f(t) - e^{-i\omega t} f(t)\Big]$, *sa transformée de Laplace est donnée par*
$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(p) &= \frac{1}{2i}\Big[\mathcal{L}\big(e^{i\omega t} f(t)\big)(p) - \mathcal{L}\big(e^{-i\omega t} f(t)\big)(p)\Big]\\ &= \frac{1}{2i}\Big[\mathcal{L}\big(f\big)(p - i\omega) - \mathcal{L}\big(f\big)(p + i\omega)\Big]\end{aligned}$$
2. $h(t) = t f'(t)$
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(h\big)(p) &= \int_0^{+\infty} t f'(t) e^{-pt} dt\\ &= -\int_0^{+\infty} f'(t) \big(e^{-pt}\big)'_p dt\\ &= -\Big(\mathcal{L}\big(f'\big)(p)\Big)'\\ &= -\Big(pF(p) - f(0)\Big)'\\ &= -\Big(pF(p)\Big)'\\ &= -F(p) - pF'(p)\end{aligned}$$
3. $k(x) = \int_0^t f(t)\cos(x - t) dt$
   On pose $g(x) = \cos x$ *alors* $k(x) = \big(f \star g\big)(x)$ *donc*
$$\mathcal{L}\big(k\big)(p) = F(p) \times G(p)$$
   où $G(p) = \mathcal{L}\big(g\big)(p) = \dfrac{p}{p^2 + 1}$
4. $l(t) = e^{\omega t} f(at)$; $a > 0$
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(l\big)(p) &= \int_0^{+\infty} l(t) e^{-pt} dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{\omega t} f(at) e^{-pt} dt\\ &= \int_0^{+\infty} f(at) e^{(\omega - p)t} dt\\ &= \mathcal{L}\big(f(at)\big)(\omega - p)\end{aligned}$$
   et $\mathcal{L}\big(f(at)\big)(p) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}\big(f\big)(\dfrac{p}{a}) = \dfrac{1}{a}F(\dfrac{p}{a})$, *alors*
$$\mathcal{L}\big(l\big)(p) = \frac{1}{a}F(\frac{\omega - p}{a})$$

Exercice 4. *Soit la fonction* $f(t) = t\sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

1. *Montrons que* $f''(t) = 2\omega\cos(\omega t) - \omega^2 f(t)$
   relation vérifiée par une double dérivation de f.
2. *En déduire la transformée de Laplace de f :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(p) &= 2\omega\mathcal{L}\Big(\cos(\omega t)\Big) - \omega^2\mathcal{L}\big(f\big)(p)\\ &= \frac{2\omega p}{p^2+\omega^2} - \omega^2\mathcal{L}\big(f\big)(p)\end{aligned} \tag{1}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(p) &= p^2\mathcal{L}\big(f\big)(p) - pf(0) - f'(0)\\ &= p^2\mathcal{L}\big(f\big)(p)\end{aligned} \tag{2}$$

de l'equation (1)=(2) on obtient

$$\mathcal{L}\big(f\big)(p) = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$$

Exercice 5. *Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace $F(p)$. On suppose que $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty}\frac{f(t)}{t}$ existe.*

1. *Démontrons que $\big(\mathcal{L}\big)^{-1}\left(\int_p^{+\infty}F(u)du\right) = \frac{f(t)}{t}$*

$$\begin{aligned}\int_p^{+\infty}F(u)du &= \int_p^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(t)e^{-ut}dt\right)du\\ &= \int_0^{+\infty}f(t)\left(\int_p^{+\infty}e^{-ut}du\right)dt\\ &= \int_0^{+\infty}f(t)\Big[\frac{e^{-ut}}{-t}\Big]_p^{+\infty}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt\\ &= \mathcal{L}\Big(\frac{f(t)}{t}\Big)(p)\end{aligned}$$

donc

$$\big(\mathcal{L}\big)^{-1}\left(\int_p^{+\infty}F(u)du\right) = \frac{f(t)}{t}$$

2. *Appliquons le resultat précédent pour calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :*

2.1 $f(x) = \dfrac{1-\cosh x}{x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(p) &= \mathcal{L}(\frac{1}{x})(p) - \mathcal{L}(\frac{\cosh x}{x})(p) \\
&= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(1)(u)du - \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(\cosh x)(u)du \\
&= \int_p^{+\infty} \frac{1}{u}du - \int_p^{+\infty} \frac{u}{u^2-1}du \\
&= \int_p^{+\infty} \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\int_p^{+\infty} \Big(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\Big) \\
&= \Big[\ln u - \frac{1}{2}\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u+1)\Big]_p^{+\infty} \\
&= \Big[\ln u - \ln(\sqrt{u-1}) - \ln(\sqrt{u+1})\Big]_p^{+\infty} \\
&= \Big[\ln\big(\frac{u}{\sqrt{u-1}}\big) - \ln(\sqrt{u+1})\Big]_p^{+\infty} \\
&= \Big[\ln\big(\frac{u}{\sqrt{u-1}\sqrt{u+1}}\big)\Big]_p^{+\infty} \\
&= -\ln\big(\frac{p}{\sqrt{p-1}\sqrt{p+1}}\big) \\
&= -\ln\big(\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\big)
\end{aligned}$$

2.2 $g(x) = \dfrac{\sinh x}{x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\Big(\sinh x\Big)(u)du \\
&= \int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int_p^{+\infty} \Big(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\Big)du \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln(u-1) - \ln(u+1)\Big]_p^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{p+1}{p-1}\Big)
\end{aligned}$$

2.3 $h(x) = \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(p) &= \int_p^{+\infty} \mathcal{L}\Big(e^{-ax} - e^{-bx}\Big)(u)du \\
&= \int_p^{+\infty} \Big(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\Big) \\
&= \Big[\ln(u+a) - \ln(u+b)\Big]_p^{+\infty} \\
&= \ln\Big(\frac{p+b}{p+a}\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 6. *Trouver l'originale de Laplace des fonctions suivantes :*

1. $F_1(p) = \dfrac{1}{p^2-4}$

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{(p-2)(p+1)} \\ &= \frac{1}{4(p-2)} - \frac{1}{4(p+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F_1(p)\big) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p-2}\Big) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+2}\Big) \\ &= \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \\ &= \frac{1}{2}\sinh(2t) \end{aligned}$$

2. $F_2(p) = \dfrac{2p-1}{p(p^2+3)} = \dfrac{-1}{3p} + \dfrac{p}{3(p^2+3)} + \dfrac{2}{p^2+3}$

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F_2(p)\big) &= \frac{-1}{3}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p}\Big) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{p}{p^2+3}\Big) + 2\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p^2+3}\Big) \\ &= \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}\cos\big(\sqrt{3}t\big) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\big(\sqrt{3}t\big) \end{aligned}$$

3. $F_3(p) = \dfrac{1}{(p+a)^2}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F_3(p)\big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(p-(-a))^2}\Big) = te^{-at}$$

4. $F_4(p) = \dfrac{1}{(p^2+a^2)^2} = \dfrac{1}{p^2+a^2}\dfrac{1}{p^2+a^2} = H(p)\times H(p)$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\big(F_4(p)\big) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\Big(H(p)\times H(p)\Big) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\Big(\mathcal{L}(h*h)(p)\Big) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\Big(\mathcal{L}\big(\int_0^t h(t-x)h(x)dx\big)(p)\Big) \\ &= \int_0^t h(t-x)h(x)dx \end{aligned}$$

et on a $h(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{p^2+a^2}\Big) = \dfrac{1}{a}\sin(ax)$

alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \sin\big(a(t-x)\big)\sin(ax)dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}\Big(\cos(at) - \cos(at-2ax)\Big)dx \\ &= \frac{-1}{2a^2}\int_0^{+\infty}\cos(at)dx + \frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}\cos(at-2ax)dx \\ &= \frac{-1}{2a^2}\cos(at)\Big[x\Big]_0^t + \frac{1}{2a^2}\Big[\frac{\sin(at-2ax)}{-2a}\Big]_0^t \\ &= \frac{-t\cos(at)}{2a^2} + \frac{1}{2a^3}\sin at \end{aligned}$$

5. $F_5(p) = \dfrac{p}{p^2+p+1}$

$$\begin{aligned} F_5(p) &= \frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F_5(p)\big) &= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

6. $F_6(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1} = e^{-2p}\mathcal{L}\Big(e^x\Big)$

On pose $f(t) = e^t$, $\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p-1}$ *alors*

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F_6(p)\big) = f(t-2) = e^{t-2}$$

7. $F_7(p) = \ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right) = \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) = \mathcal{L}(f)(p)$

$F_7'(p) = \dfrac{-1}{p(p+1)} = -\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1}$

On a

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(F_7'(p)\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(-\frac{1}{p}\Big) + \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\Big) = -1+e^{-t}$$

et

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\big(\mathcal{L}(f)(p)\big)'\Big) = -tf(t)$$

alors

$$-tf(t) = -1+e^{-t} \Longrightarrow f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

8. $F_5(p) = \arctan\left(\dfrac{1}{p}\right)$

On a $F_8'(p) = -\dfrac{1}{p^2+1}$, *alors*

$\mathcal{L}^{-1}\Big(F_8'(p)\Big) = \sin(-t) = tf(t) \Longrightarrow f(t) = \dfrac{\sin(-t)}{t}$

Exercice 7. *A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y''+y' = 0$, *avec* $y(0) = y'(0) = 2$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}(y)(p)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y''+y)(p) = \mathcal{L}(2e^t)(p) &\iff \mathcal{L}(y'')(p)+\mathcal{L}(y)(p) = 2\mathcal{L}(e^t)(p) \\ &\iff p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+pY(p)-y(0) = \frac{2}{p-1} \\ &\iff (p^2+p)Y(p)-2p-4 = \frac{2}{p-1} \\ &\iff Y(p) = \frac{2(p^2+2p-1)}{p(p+1)(p-1)} \end{aligned}$$

On décomposons l'expression de $Y(p)$ *en éléments simples on obtient*

$$Y(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}$$

Par suite

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}\Big) = 2 - e^{-t} + e^{t}$$

2. $y' - 2\displaystyle\int_0^t \sin(t-x)y(x)dx = \cos t + \sin t$, *avec* $y(0) = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(y' - 2\int_0^t \sin(t-x)y(x)dx\Big)(p) &= \mathcal{L}\big(\cos t + \sin t\big)(p) \\
&\iff \\
\mathcal{L}\Big(y'\Big)(p) - 2\mathcal{L}\Big(\int_0^t \sin(t-x)y(x)dx\Big) &= \mathcal{L}\big(\cos t\big)(p) + \mathcal{L}\big(\sin t\big)(p)
\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{L}\big(y\big)(p) = Y(p)$, $z(t) = \sin t$, *et* $\mathcal{L}\big(z\big)(p) = Z(p)$

On a $\displaystyle\int_0^t \sin(t-x)y(x)dx = (y \star z)(t)$ *(produit de convolution). Alors*

$$\begin{aligned}
pY(p) - y(0) - 2Y(p)Z(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} &\iff \Big(p - \frac{2}{p^2+1}\Big)Y(p) = \frac{p+1}{p^2+1} + 1 \\
&\iff \frac{p^3+p-2}{p^2+1}Y(p) = \frac{p^2+p+2}{p^2+1} \\
&\iff Y(p) = \frac{p^2+p+2}{p^3+p-2} \\
&\iff Y(p) = \frac{p^2+p+2}{(p-1)(p2+p+2)} \\
&\iff Y(p) = \frac{1}{p-1}
\end{aligned}$$

Par suite

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p-1}\Big) = e^{t}$$