PARTIE : ALGEBRE

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \text{ tel que } \beta \neq 0.$$

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ tel que sa matrice associée relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est égale à A.

On note par B la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1- Calculer les valeurs propres de f.

Le calcul du polynôme caractéristique de A donne :

$$P_A(X) = -(X - (\alpha + 2\beta))(X - (\alpha - \beta))^2$$

Donc les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = \alpha + 2\beta$ de multiplicité 1 et $\lambda_1 = \alpha - \beta$ de multiplicité 2.

2- Montrer que $\ker(f - (\alpha + 2\beta) Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 1. En donner une base.

On échelonne la matrice $A - (\alpha + 2\beta) I_3$, on aura :

$$A - (\alpha + 2\beta) I_3 = \begin{pmatrix} -2\beta & \beta & \beta \\ \beta & -2\beta & \beta \\ \beta & \beta & -2\beta \end{pmatrix} \text{ qui est de rang } 2, \text{ puisque } \beta \neq 0.$$

Ce qui veut dire que $\dim\ker(f - (\alpha + 2\beta) Id_{\mathbb{C}^3}) = 1$.

A partir de l'échelonnement on déduit : $\ker(f - (\alpha + 2\beta) Id_{\mathbb{C}^3}) = \langle v_1 = (1,1,1) \rangle$.

3- Montrer que $\ker(f - (\alpha - \beta) Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 2. En donner une base.

On échelonne la matrice $A - (\alpha - 2\beta) I_3$, on aura :

$$A - (\alpha - \beta) I_3 = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix} \text{ qui est de rang } 1, \text{ puisque } \beta \neq 0.$$

Ce qui veut dire que $\dim\ker(f - (\alpha - \beta) Id_{\mathbb{C}^3}) = 2$.

A partir de l'échelonnement on déduit : $\ker(f - (\alpha - \beta) Id_{\mathbb{C}^3}) = \langle v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1) \rangle$.

4- Montrer que f est diagonalisable et donner une base C des valeurs propres de f.

Les deux sous-espaces vectoriels $\ker(f - (\alpha + 2\beta) Id_{\mathbb{C}^3})$ et $\ker(f - (\alpha - \beta) Id_{\mathbb{C}^3})$ représentent les sous espaces propores de f associés aux valeurs propres de f dont la somme des dimensions est égale à 2, donc f est diagonalisable.

De plus la famille de vecteurs $C = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1))$ représente une base des vecteurs propres de f.

5- En déduire une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}.A.P$ soit diagonale. Ecrire D.

Les matrices P et D sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}.$$