Un corrigé:

Partie1: (1,5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application.

$\boxed{\text{F}}$ 1. Si $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application.

$\boxed{\text{V}}$ 2. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{F}}$ 3. Si les dérivées partielles premières de f existent sur $\mathbb{R}^n$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{F}}$ 4. Si les dérivées partielles premières de f existent sur $\mathbb{R}^n$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{V}}$ 5. Si f est discontinue en $A \in \mathbb{R}^n$ alors f n'est pas différentiable en A.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application.

$\boxed{\text{F}}$ 6. Si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ alors la matrice Jacobienne de f est une matrice réelle $n \times m$.

Partie2: (3,5 points)

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^5}{x^2+y^4} =, \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^4} x^2y = 0$ car $\dfrac{y^4}{x^2+y^4}$ est bornée et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y = 0$.

2) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{xy}{y-x^2}$. Posons $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-x^2}$;

Utilisons les chemins: $y = 0$ et $y = x^2 + x^m$ (m un entier ≥ 3 à choisir ultérieurement).

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} 0 = 0 = l_1$ (on peut aussi la trouver par une double limite).

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x, x^2+x^m) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\left(x^2+x^m\right)}{x^m} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^3}{x^m} = 1 = l_2$ (pour $m = 3$).

$l_1 \neq l_2$ alors la limite n'existe pas.

Exercice 1: (4,5 points)

Soit $y(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière de rayon R solution de l'équation différentielle :

$y"(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ ie $a_0 = 1$ et $y'(0) = 0$ ie $a_1 = 0$.

On remplace: $\underbrace{\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{N=n-2} - 2\sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^n - 2\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = 0 \ \forall x \in]-R, R[$.

Donc $\sum_{N\geq 0}(N+2)(N+1)a_{N+2}x^N-2\sum_{n\geq 0}na_nx^n-2\sum_{n\geq 0}a_nx^n=0\ \forall x\in]-R,R[$.

On obtient :$\sum_{n\geq 0}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n]x^n=0\ \forall x\in]-R,R[$.

Par identification: $(n+2)(n+1)a_{n+2}=2(n+1)a_n \Longleftrightarrow a_{n+2}=\frac{2}{n+2}a_n\ \forall n\in\mathbb{N}$.

$n=0: a_2=a_0=1$; $n=1: a_3=\frac{2}{3}a_1=0$

$n=2: a_4=\frac{2}{4}a_2=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2}$; $n=3: a_5=\frac{2}{5}a_1=0$

$n=4: a_6=\frac{2}{6}a_4=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{3.2}$ .....

On en déduit : $a_{2k+1}=0\ \forall k\in\mathbb{N}$ et $a_{2k}=\frac{1}{k!}\ \forall k\in\mathbb{N}$.

La solution est donc: $y(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}x^{2k}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(x^2\right)^k=e^{x^2}$.

Exercice 2: (5 points)

1) Faire le graphe.

2) f est localement intgrable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{F}f$ existe et elle est impaire donc $a_n=0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Calculons b_n , $n\geq 1$ par une double IPP:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}\right)\sin(nx)\,dx$$

1ère IPP: $\begin{cases} u=x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4} \\ v'=\sin(nx)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'=2x-\pi \\ v=\frac{-1}{n}\cos(nx)\end{cases}$ donc:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{-1}{n}\cos(nx)\right)\right]_0^\pi-\left(\frac{-1}{n}\right)\int_0^\pi(2x-\pi)\cos(nx)\,dx\right)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{-1}{n}\cos(n\pi)\right)-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{-1}{n}\right)-\left(\frac{-1}{n}\right)\int_0^\pi(2x-\pi)\cos(nx)\,dx\right)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\left(-(-1)^n+1\right)\pi^2}{4n}+\frac{1}{n}\int_0^\pi(2x-\pi)\cos(nx)\,dx\right)$$

2ème IPP: $\begin{cases} u=2x-\pi \\ v'=\cos(nx)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'=2 \\ v=\frac{1}{n}\sin(nx)\end{cases}$ donc:

$$\int_0^\pi(2x-\pi)\cos(nx)\,dx=\left[\frac{(2x-\pi)}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi-\frac{2}{n}\int_0^\pi\sin(nx)\,dx=-\frac{2}{n}\left[\frac{-1}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi,$$

on obtient:$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\left(1-(-1)^n\right)\pi^2}{4n}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3}\right)$

$$b_n = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n}-\frac{2}{n^3}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4\left(2k+1\right)}-\frac{2}{\left(2k+1\right)^3}\right) \text{ si } n=2k+1,\ k\geq 0 \\ 0 \text{ si } n=2k \end{cases}$$

Donc $\left(\mathcal{F}f\right)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\pi^2}{4\left(2k+1\right)}-\frac{2}{\left(2k+1\right)^3}\right)\sin\left(2k+1\right)x$.

3) Pour déduire la relation demandée, il suffit d'appliquer le théorème de Dirichlet en $\frac{\pi}{2}$ seulement :

1. f est continue en $\frac{\pi}{2}$ d'après le graphe.
2. f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ car c'est un polynôme.

Donc $\left(\mathcal{F}f\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ce qui donne $\frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\pi^2}{4\left(2k+1\right)}-\frac{2}{\left(2k+1\right)^3}\right)(-1)^k = 0$

On a la relation $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\left(2n+1\right)^3} = \frac{\pi^2}{8}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ (les 2 séries numériques sont convergentes d'après Leibnitz).

Exercice 3: (5,5 points)

Pour $\alpha\in\mathbb{R}_+$, on définit la fonction f par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\left(|x|+|y|\right)^\alpha} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1) Sous quelles conditions a t on $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{\left(|x|+|y|\right)^\alpha} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+o(xy)}{\left(|x|+|y|\right)^\alpha} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\left(|x|+|y|\right)^\alpha}\left(1+o(1)\right)$$

1er cas: $2-\alpha>0$ ie $\alpha<2$: Comme $|x|\leq|x|+|y|$ et $|y|\leq|x|+|y|$ alors $|f(x,y)|\leq\frac{|xy|}{\left(|x|+|y|\right)^\alpha}\leq\left(|x|+|y|\right)^{2-\alpha}$; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(|x|+|y|\right)^{2-\alpha}=0$.

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Donc f est continue en $(0,0)$.

2ème cas: $2-\alpha\leq 0$ ie $\alpha\geq 2$, utilisons les chemins:

$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x\longrightarrow 0} 0 = 0 = l_1$ (on peut aussi la trouver par une double limite).

$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2}{\left(2|x|\right)^\alpha} = 2^{-\alpha}\lim_{x\longrightarrow 0}|x|^{2-\alpha} = 2^{-\alpha}\lim_{x\longrightarrow 0} e^{(2-\alpha)\log|x|} = +\infty = l_2$ (on aurait pu faire ce chemin seulement); $l_1\neq l_2$ alors la limite n'existe pas..Donc f est discontinue en $(0,0)$.

2) a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{0}{x} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ $\exists$

f étant symétrique alors $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

2) b) Utilisons la définition:
Preuve par unicité de l'application différentielle:
$f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0).h_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0).h_2\right)=\|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2)$
ie : $f(h_1,h_2)=(|h_1|+|h_2|)\,\varepsilon(h_1,h_2)$, on a choisit la norme 1.
$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)=\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\dfrac{f(h_1,h_2)}{|h_1|+|h_2|}=\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{(|x|+|y|)^{\frac{3}{2}}}$
$|\varepsilon(h_1,h_2)|\leq\dfrac{|\sin(h_1h_2)|}{(|h_1|+|h_2|)^{\frac{3}{2}}}=0$ (cas particulier de la limite étudiée en 1) pour $\alpha=\dfrac{3}{2}<2$.
Donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)=0$.
Conclusion: f est différentiable en $(0,0)$.