Exercice 1 : (11 pt) Soient $m \in \mathbb{R}$ et f_m une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice associée relativement aux bases canoniques, respectives $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $C = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$, est donnée par :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 2 & 2 & m+1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}.$$

(Dans tout l'exercice, il n'est pas demandé de déterminer f_m)

1/ Calculer suivant les valeurs du paramètre m, $\ker(f_m)$, $\operatorname{Im}(f_m)$ et $rg(f_m)$.

Solution : On échelonne la matrice A_m.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_m(e_1) & f_m(e_2) & f_m(e_3) \end{array} \\ A_m = & \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 2 & 2 & m+1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_m(e_1) & f_m(e_2 - me_1) & f_m(e_3 - me_1) \end{array} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-2m & -m+1 \\ m & 1-m^2 & m-m^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_m(e_1) & f_m(e_2 - me_1) & f_m(2e_3 - e_2 - me_1) \end{array} \\ \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-2m & 0 \\ m & 1-m^2 & -(m-1)^2 \end{pmatrix} \end{array}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

On en déduit les deux cas suivants :

1er cas : $m = 1$

$\ker f_1 = \langle (-1, 1, 0), (-1, -1, 2) \rangle$, $\operatorname{Im} f_1 = \langle (1, 2, 1) \rangle$ et $\operatorname{rg}(f_1) = \dim \operatorname{Im} f_1 = 1$. **(0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt)**

2ème cas : $m \neq 1$

$\ker f_m = \{0\}$, $\operatorname{Im} f_m = \langle (1, 2, m), (0, 2-2m, 1-m^2), (-m^2+2m-1) \rangle = \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rg}(f_m) = 3$. **(0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt)**

2/ Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A_m est inversible.

Solution : On a les équivalences suivantes :

$$A_m \text{ est inversible } \iff rg(A_m) = 3 \iff m \neq 1 \iff m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

(Dans toute la suite de l'exercice, on pose $A = A_{-1}$ et $f = f_{-1}$)

3/ En déduire que A est inverible puis calculer son inverse (sans utiliser les déterminants).

Solution : On a $-1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, d'après la question précédente A est inversible **(0,25 pt)**

et on a :

$$\left\{\begin{array}{c} f(e_1)=1+2X-X^2 \\ f(e_2)=-1+2X+X^2 \\ f(e_3)=-1-X^2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(e_1)+f(e_2)=4X \\ f(e_1)+f(e_3)=2X-2X^2 \\ f(e_3)=-1-X^2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} X=\frac{1}{4}f(e_1)+\frac{1}{4}f(e_2) \\ 2X^2=2X-f(e_1)-f(e_3) \\ 1=-f(e_3)-X^2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} X=\frac{1}{4}f(e_1)+\frac{1}{4}f(e_2) \\ X^2=-\frac{1}{4}f(e_1)+\frac{1}{4}f(e_2)-\frac{1}{2}f(e_3) \\ 1=\frac{1}{4}f(e_1)-\frac{1}{4}f(e_2)-\frac{1}{2}f(e_3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f^{-1}(X)=\frac{1}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2 \\ f^{-1}(X^2)=-\frac{1}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2-\frac{1}{2}e_3 \\ f^{-1}(1)=\frac{1}{4}e_1-\frac{1}{4}e_2-\frac{1}{2}e_3 \end{array}\right.$$

d'où :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1,25 pt)}$$

4/ Soit $C'=\left(P_1=1, P_2=X-1, P_3=(X-1)^2\right)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et soient $v=(1,-1,1)$ et $Q=1+X+X^2$.
En utilisant la représentation matricielle :

a/ Calculer $f(v)$.

Solution : On a :

$$f(v)=a+bX+cX^2 \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

d'où : $f(v)=1-3X^2$. **(0,75 pt)**

b/ Déterminer la matrice de passage P de C vers C'.

Solution : on a :

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

c/ Calculer les coordonnées du vecteur Q dans la base C'.

Solution : La matrice de l'application Id: $\mathbb{R}_2[X]_{(C)} \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]_{(C')}$ est la matrice de passage de C' à C qui est P^{-1}.

Calcul de P^{-1} **:** On a :

$$\left\{\begin{array}{c} P_1=1 \\ P_2=-1+X \\ P_3=1-2X+X^2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1=P_1 \\ X=P_1+P_2 \\ X^2=P_1+2P_2+P_3 \end{array}\right.$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

et

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où : $Q = 1 + X + X^2 = 3P_1 + 3P_2 + P_3$. **(0,5 pt)**

d/ Déterminer la matrice $A' = M_{B,C'}(f)$.

Solution : Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{(B)} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_2[X]_{(C)} \\ & \searrow_{f} & \downarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & & \mathbb{R}_2[X]_{(C')} \end{array}$$

On en déduit que :

$$A' = M_{B,C'}(f) = M_{B,C'}(Id_{\mathbb{R}_2[X]} \circ f) = M_{C,C'}(Id_{\mathbb{R}_2[X]}) \times M_{B,C}(f) = P^{-1}A, \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

d'où :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0,75 pt)}$$

e/ Dire pourquoi A' est inversible puis calculer son inverse.

Solution : A' est inversible car c'est la matrice d'une application bijective **(0,25 pt)** et on a :

$$(A')^{-1} = \left(P^{-1}A\right)^{-1} = A^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

f/ Les matrices A et A' sont-elles équivalentes ? Justifier.

Solution 1 : Oui, les matrices A et A' sont équivalentes car $A = M_{B,C}(f)$ et $A' = M_{B,C'}(f)$, i.e. A et A' sont les matrices de la même application linéaire f relativement à des bases différentes. **(0,75 pt)**

Solution 2 : Oui, les matrices A et A' sont équivalentes car on a :

$$A' = P^{-1}AI_3.$$

Exercice 2 : (02+02 pt) Les parties **(I)** et **(II)** sont indépendantes.

I/ Soit $\sigma \in S_8$ définie par : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

1/ Décomposer σ en produit de transpositions.

Solution : On a : $\sigma = \tau_{1,5}\tau_{2,7}\tau_{7,8}\tau_{8,3} = (1\ \ 5)\,(2\ \ 7)\,(7\ \ 8)\,(8\ \ 3)$. **(1 pt)**

2/ Déduire :

a/ La signature de σ. **(0,25 pt)**

Solution : On a : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

b/ La décomposition de σ^{-1} en produit de transpositions, puis la signature de σ^{-1}.

Solution : On a :

$$\sigma^{-1} = (\tau_{1,5}\tau_{2,7}\tau_{7,8}\tau_{8,3})^{-1} = \tau_{8,3}^{-1}\tau_{7,8}^{-1}\tau_{2,7}^{-1}\tau_{1,5}^{-1} = \tau_{8,3}\tau_{7,8}\tau_{2,7}\tau_{1,5}. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

On en déduit que : $\varepsilon(\sigma^{-1}) = (-1)^4 = 1$. **(0,25 pt)**

II/ Soit φ la forme trilinéaire alternée définie de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(e_1, e_2, e_3) = -2$, (e_1, e_2, e_3) étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (-1, 1, 1)$.
1/ Calculer $\varphi(v_1, v_2, v_3)$.
Solution : On a d'après le cours que :

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi(e_1, e_2, e_3). \det_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1, v_2, v_3)$$

On sait par définition que :

$$\det_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1, v_2, v_3) = \sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}$$

où :$S_3 = \{Id_X, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, p_{123}, p_{132}\}$ et $X = \{1, 2, 3\}$.
Posons

$v_1 = (1, 1, 1) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), v_2 = (1, -1, 1) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ et $v_3 = (-1, 1, 1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$.

Donc :

$$\begin{aligned}\det_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1, v_2, v_3) &= \varepsilon(Id_X)\, a_{Id_X(1)1}a_{Id_X(2)2}a_{Id_X(3)3} + \varepsilon(\tau_{12})\, a_{\tau_{12}(1)1}a_{\tau_{12}(2)2}a_{\tau_{12}(3)3}\\ &+ \varepsilon(\tau_{13})\, a_{\tau_{13}(1)1}a_{\tau_{13}(2)2}a_{\tau_{13}(3)3} + \varepsilon(\tau_{23})\, a_{\tau_{23}(1)1}a_{\tau_{23}(2)2}a_{\tau_{23}(3)3}\\ &+ \varepsilon(p_{123})\, a_{p_{123}(1)1}a_{p_{123}(2)2}a_{p_{123}(3)3} + \varepsilon(p_{132})\, a_{p_{132}(1)1}a_{p_{132}(2)2}a_{p_{132}(3)3}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\det_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1, v_2, v_3) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}\\ &= (-1 - 1 + 1) - (1 + 1 + 1) = -4.\end{aligned}$$

Par suite

$$\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi(e_1, e_2, e_3). \det_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1, v_2, v_3) = (-2)(-4) = 8. \ \textbf{(1 pt)}$$

On peut aussi précéder comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, v_2, v_3) &= \varphi(e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3)\\ &= \varphi(e_1, -e_2, e_3) + \varphi(e_1, e_3, e_2) + \varphi(e_2, e_1, e_3) + \varphi(e_2, e_3, -e_1) + \varphi(e_3, e_1, e_2)\\ &+ \varphi(e_3, -e_2, -e_1)\\ &= -\varphi(e_1, e_2, e_3) - \varphi(e_1, e_2, e_3) - \varphi(e_1, e_2, e_3) - \varphi(e_1, e_2, e_3) + \varphi(e_1, e_2, e_3)\\ &- \varphi(e_1, e_2, e_3)\\ &= -4\varphi(e_1, e_2, e_3)\\ &= 8.\end{aligned}$$

2/ Calculer $\varphi(2v_3, v_1 - v_2, v_1 - v_3)$.
Solution : On a :

$$\begin{aligned}\varphi(2v_3, v_1 - v_2, v_1 - v_3) &= 2\varphi(v_3, -v_2, v_1)\\ &= -2\varphi(v_3, v_2, v_1)\\ &= 2\varphi(v_1, v_2, v_3)\\ &= 16. \ \textbf{(1 pt)}\end{aligned}$$