INI. Math2. 2I.

EMD 1. Janvier 2002

Exercice 1: (7 points)

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{si} \quad x^2 + y^2 < 1. \\ 0 & \text{si} \quad x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité f de sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles et donner leurs expressions.
3) Etudier la différentiabilité de f et donner l'expression de la différentielle aux points où elle existe.

Exercice 2: (4 points)

Etudier les extémas libres de la fonction :
$f(x,y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$.

Exercice 3: (4 points)

Etudier les extémas de la fonction :
$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, sous la contrainte : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
1 + 4 + 4 9

Exercice 4: (5 points)

Soit dans $\mathbb{R}^2$ le domaine D limité par les courbes d'équations:

$$y = \cos x + 1; \; y = \sin x; \; x = -\frac{\pi}{2}; \; x = \frac{\pi}{2}.$$

1) Représenter géométriquement le domaine D.
2) Intervertir les signes intégrals dans $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ où f est une fonction quelconque intégrable sur D.
3) Calculer $\iint_D dxdy$.

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$.

1) **Continuité:**

Dans $\mathbb{R}^2 - S$, f est est plynomiale (nulle ou égale à $1 - x^2 - y^2$) elle est donc de classe C^∞.

• Sur S : Soit $M = (a,b)$ un point de S, $f(M) = 0$, a-t-on $\lim\limits_{(x,y)\to M} f(x,y) = f(M) = 0$?

Pour $(x,y) \neq M$, on a $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{si } x^2 + y^2 < 1. \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$

-1er cas: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to M \\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to M} 1 - x^2 - y^2 = 1 - a^2 - b^2 = 0$ car $a^2 + b^2 = 1$.

-2er cas: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to M \\ x^2+y^2\geq 1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to M} 0 = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to M} f(x,y) = 0 = f(M)$.

Conclusion: f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.

2) **Dérivées partielles:**

On remarque que f est symetrique et donc là où les dérivées partielles existent on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

- Dans $\mathbb{R}^2 - S$, les deux dérivées existent et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -2x \text{ si } x^2 + y^2 < 1. \\ 0 \text{ si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -2y \text{ si } x^2 + y^2 < 1. \\ 0 \text{ si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

- Sur S : Soit $M = (a,b) \in S$, ie $a^2 + b^2 = 1$. On a :

$$\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2 - b^2}{x - a} & \text{si } x^2 + b^2 < 1. \\ 0 & \text{si } x^2 + b^2 \geq 1. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{a^2 - x^2}{a - x} & \text{si } x^2 + b^2 < 1. \\ 0 & \text{si } x^2 + b^2 \geq 1. \end{cases}$$

(car $1 - b^2 = a^2$).

Or en conclut que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$ existe ssi $-2a = 0$; i.e. sur le cercle S $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe seulement aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$ et elle y est nulle.

Conclusion: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -2x & \text{si } x^2 + y^2 < 1. \\ 0 \text{ si } x^2 + y^2 > 1 \text{ et aux points } (0,1) \text{ et } (0,-1). \end{cases}$

et par symetrie $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -2y & \text{si } x^2 + y^2 < 1. \\ 0 \text{ si } x^2 + y^2 > 1 \text{ et aux points } (1,0) \text{ et } (-1,0) \end{cases}$

3) **Différentiabilité:**

• Sur $\mathbb{R}^2 - S$, f est différentiable et on a

$$df_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \begin{cases} -2xdx - 2ydy \text{ si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 \quad \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

• Sur S : f ne peut y être différentiable puisque les dérivées partielles n'existent pas simultanément en tout point.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + \frac{1}{2}(x - y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - \frac{1}{2}(y - x)$ (f est symetriqu

Résolvons le système:(S) : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - \frac{1}{2}(x - y) = 0 \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x - y) = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -4x^3 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(-4x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}, \text{ ou } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il y a donc 3 points critiques. $A = (0,0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C = -B$.

•Nature de ces points:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - \frac{1}{2}$.

Au point B :

$r = \frac{5}{2}$, $s = \frac{1}{2}$, $5 = \frac{5}{2}$ ie $rt - s^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} > 0$,

et comme $r > 0 \Rightarrow (B, f(B))$ est un minimum.

Au point C:

$r = \frac{5}{2}$, $s = \frac{1}{2}$, $5 = \frac{5}{2}$ ie $rt - s^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} > 0$,

et comme $r > 0 \Rightarrow (C, f(C))$ est un minimum.

Au point A:

$r = -\frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{2}$ ie $rt - s^2 = 0$, rien à dire.

$d^2 f_A(h_1, h_2) = -\frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 - \frac{1}{2}h_2^2 = -\frac{1}{2}(h_1 - h_2)^2$

$d^2 f_A(h_1, h_2)$ s'annulle une infinité de fois (sur tous les points de la forme (h_1, h_1)), on ne peut donc pas conclure, revenons à la définition :

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = h_1^4 + h_2^4 - \frac{1}{4}(h_1 - h_2)^2$$

On a d'une part : $f(h_1, h_1) - f(0,0) = 2h_1^4 > 0$

et d'autre part : $f(h_1, -h_1) - f(0,0) = 2h_1^4 - h_1^2 = h_1^2(2h_1^2 - 1) < 0$ pour $h_1 \in \mathcal{V}(0)$.

Conclusion: $(A, f(A))$ n'est pas un extremum local.

Exo3 :

•Procédons par la métode des multiplicateurs de Lagrange.

Soit la fonction auxiliaire $h_\lambda(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 - 9$

$\frac{\partial h_\lambda}{\partial x}(x,y,z) = 2\lambda x + 1$, $\frac{\partial h_\lambda}{\partial y}(x,y,z) = 2\lambda y - 2$, $\frac{\partial h_\lambda}{\partial x}(x,y,z) = 2\lambda z + 2$.

On sait que si f présente un extremum lié en un point alors il existe λ tel que H_λ y présente un point critique.

-Résolvons le système:

$$(S)\begin{cases}\frac{\partial h_\lambda}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial h_\lambda}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial h_\lambda}{\partial x}(x,y,z)=0\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda x+1=0\\ 2\lambda y-2=0\\ 2\lambda z+2=0\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ x^2+y^2+z^2=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ \frac{9}{4\lambda^2}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2\lambda}\\ y=\frac{1}{\lambda}\\ z=-\frac{1}{\lambda}\\ 4\lambda^2=1\end{cases}.$$

Pour $\lambda=\frac{-1}{2}$, on trouve le point $A=(1,-2,2)$ et pour $\lambda=\frac{1}{2}$, on trouve le point $B=(-1,2,-2)$.

•Nature de ces points: Posons $H=(h_1,h_2,h_3)$

$f(A+H)-f(A)=f(1+h_1,-2+h_2,2+h_3)-f(1,-2,2)=h_1-2h_2+2h_3$

$A+H\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2=9\}\Leftrightarrow(1+h_1)^2+(-2+h_2)^2+(2+h_3)^2=9$

Ce qui donne : $-2(h_1-2h_2+2h_3)=(h_1^2+h_2^2+h_3^2)$

Donc $f(A+H)-f(A)=\frac{-1}{2}(h_1^2+h_2^2+h_3^2)<0$ pour tout $H\in\mathbb{R}^3-\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

De manière analogue, on trouve :

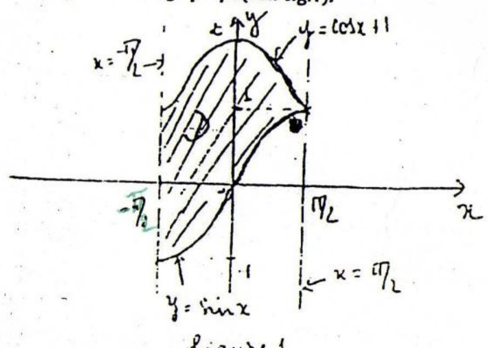
$f(B+H)-f(B)=h_1-2h_2+2h_3=\frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2+h_3^2)>0$

pour tout $H\in\mathbb{R}^3-\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Conclusion: f admet en A un maximum lié et en B un minimum lié.

Exo4 :

1) Représentation graphique(voir fig.1):



-figure 1-

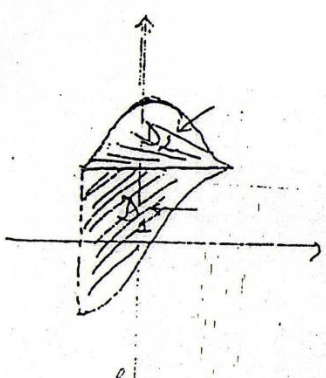


figure 2

2) On a la régularité par rapport à x : $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ \sin x\leq y\leq\cos x+1\right\}$

On a donc $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\sin x}^{\cos x+1}dy\right)dx$

Quand à la régularité par rapport à y il serait plus simple de considérer deux cas (selon la fig.2):

1er cas:

$-1\leq y\leq1$: dans ce cas $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leq y\leq1,-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\arcsin y\right\}$, car la fonction sin est bijective de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$.

2ème cas:

$1\leq y\leq2$: On a $y=\cos x+1\Longleftrightarrow x=\psi(y)$, déterminons ψ.

•Pour $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

on aura $\psi(y)=\arccos(y-1)$, car la fonction cos est bijective de $[0,\pi]\to[-1,1]$

•Pour $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq0$ on a :

$-x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et on a $\cos(-x)=\cos x\Rightarrow\cos(-x)=y-1\Rightarrow-x=\arccos(y-1)$,donc $x=-\text{ar}$

ie:$1\leq y\leq2$ et $-\arccos(y-1)\leq x\leq\arccos(y-1)$.

Donc $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/1\leq y\leq2,-\arccos(y-1)\leq x\leq\arccos(y-1)\}$

Finalement $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}f(x,y)dx\right)dy+\int_{1}^{2}\left(\int_{-\arccos(y-1)}^{\arccos(y-1)}f(x,y)dx\right)dy.$

3) Calculons $\iint_D dxdy$ en utilisant la régularité par rapport à x :

$\iint_D dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\sin x}^{\cos x+1}dy\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+1-\sin x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+1)\,dx$

$=2\,[\sin x+x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2+\pi.$

Donc $\iint_D dxdy=2+\pi$