École supérieure en Informatique 08 Mai 1945. Sidi Bel Abbès.

Examen 2 de Logique. Le 05/06/2022. Durée 2H.

Exercice 1 (01 pts) Soit la formule à priorité

$$F = \forall x\big(\exists y P(x,y) \wedge \forall x \neg Q(x,y) \Longrightarrow \exists x P(x, f(x)) \vee Q(f(x), a)\big)$$

Donner l'arbre de structure de F.

Exercice 2 (02 pts) Soient les formules:

A : $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
B : $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
C : $\forall x\big(x \geq 1 \Longrightarrow x^2 \geq 1\big)$
D : $\big(x \geq 1 \Longrightarrow \forall x(x^2 \geq 1)\big)$
Montrer par des contre-modèles que les raisonnements suivants:

$$A \models B \qquad \text{et} \qquad C \equiv D$$

ne sont pas corrects

Exercice 3 (04 pts)

Soient les symboles de prédicat: $\mathbf{A}(ami)$, $\mathbf{E}(ennemi)$.
1) Ecrire dans le langage des prédicts les énoncés suivants:
- **a** : On ne peut pas être ami et ennemi.
- **b** : Les ennemis des amis d'une personne sont des ennemis de cette personne.
- **c** : Il y a une personne qui est amie de tout le monde et il y a une personne qui est ennemie de tout le monde.
- **d** : La relation $\mathbf{A}(ami)$ est symetrique.

2) Montrer par résolution que l'ensembel $\Gamma = \big\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}\big\}$ n'est pas satisfaisable.

Exercice 4 (05 pts) Soient les formules

A : $\forall x \forall y\big(P(x,y) \Longrightarrow Q(x) \wedge R(y)\big)$.
B : $\forall x R(x) \Longrightarrow \exists x \neg Q(x)$
C : $\exists x \exists y \neg P(x,y)$

(1) Transformer les formules $\{A, B, \neg C\}$ sous forme clausale.
(2) Donner l'univers de Herbrand, la base de Herbrand et les instances de base de l'ensemble S des clauses de $\{A, B, \neg C\}$.
(3) Montrer à l'aide d'un arbre sématique que $\big\{A, B\big\} \models C$..

(Tourner la page svp)

Exercice 5 (05 pts) Soit l'ensemble des clauses

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})),\ \ \neg\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}),\ \ \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \vee \neg\mathbf{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{a})),\ \ \neg\mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \right\}$$

1) Donner l'univers de Herbrand de l'ensemble de clauses S.
2) Donner l'ensemble des instances de base déployé sur H_1 (ie $H_1(S)$).
3) Etudier la satisfabilité de l'ensemble $H_1(S)$ par l'algorithme de Davis et Putnam.
Que peut-on en déduire sur l'ensemble S (Justifier votre réponse).
4) Retrouver le résultat en utilisant un arbre sémantique.

Exercice 6 (03 pts)

On se situe dans le langage des matrices carrées d'ordre n. **I** désigne la matrice identité, et **A** désigne une matrice fixée.
On définit les symboles de fonctions et prédicats suivants:

Inv(x) : **x** est inversible , $\mathbf{x} * \mathbf{y}$: produit des matrices **x** et **y**.
T(x) : transposée de **x** , $\mathbf{x} = \mathbf{y}$: relation d'égalité.

1) Donner la signature de ce langage.

2) Formaliser les phrases suivantes dans le langage des prédicats.
F_1 : La matrice **A** est symétrique et non inversible.
F_2 : Une matrice est inversible si et seulement s'il existe une matrice telle que leur produit est égal à la matrice identité.
F_3 : La transposée d'une matrice inversible est inversible.

NB: ***Les exercices 4 et 5 seront comptabilisés dans la note de TD.***

Bonne chance.