2CPI	**Contrôle Intermédiaire** **Analyse mathématique 4**	**Avril 2024** **Durée : 2 heures**

- **Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.**
- **Le sujet comporte 4 exercices et 1 questionnaire.**
- **Traiter les exercices 1, 2, 3 et 4 chacun sur une double feuille séparée.**
- **Toute copie (double feuille, intercalaire ou questionnaire) sans nom ne sera pas corrigée.**

Exercice1 (3.5 points) . Soit la fonction f donnée par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + 1.$$

Déterminer les extrémums locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice2 (5,5 points) . Soient les fonctions f et φ suivantes :

$$f(x,y) = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 7),\ \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 8.$$

On définit l'ensemble A par: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \varphi(x,y) = 0\right\}$.

1) Donner D_f ainsi que sa représentation graphique, puis montrer que $A \subset D_f$.
2) Sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, f admet-elle un minimum global et un maximum global? Justifier.
3) Montrer qu'il y a 4 points critiques seulement (à déterminer) issus de la méthode des opérateurs de Lagrange, on les notera $M_i(x_i,y_i)$ où $1 \leq i \leq 4$.
4) Préciser les points pour lesquels ces extrema globaux sous contrainte sont atteints.

Exercice 3 (4,5 points) . Soient la fonction $\varphi(u,v) = (3u + v, u + 2v)$ et le parallélogramme D de sommets $(0,0)$; $(1,2)$; $(3,1)$; $(4,3)$.

1) Montrer que $(x,y) = \varphi(u,v)$ représente un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$.
2) Détreminer Δ le transformé de D par le changement de variables donné par φ.
3) Représenter graphiquement D et Δ.
4) Calculer l'aire de D.
5) Calculer la masse d'une plaque mince occupant le domaine D dont la masse surfacique est $f(x,y) = (2x - y)^2 e^{-x+3y}$.

Indication : $Masse = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

Exercice 4 (3,5 points) : Soit $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\right\}$.

I- Question bonus: Représenter Ω.

II- Soit

$$I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dxdydz.$$

1) Calculer I.
2) Compléter $I = \int_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}\left(\int_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}\left(\int_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dz\right)dy\right)dx$ et donner le nom de la méthode utilisée.

Nom :	**Prénom** :	**Groupe** :

Répondre sur le sujet

Questionnaire (3 points) . I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1) Soit f une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}^n$. Completer :
a) On dit que f est coercive sur une partie non bornée $E \subset D_f$ de $\mathbb{R}^n$ ssi

____

b) Si f est une fonction convexe sur un convexe E. Alors,
$\big((a,f(a))$ est un minimum local de f sur $E\big) \Leftrightarrow$

____

2) Soit $F : x \to F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt$ où u et v sont des fonctions de I vers $[a,b]$ et f une fonction numérique réelle sur $[a,b] \times I$, on supposera f intégrable sur $[a,b]$ selon la variable t pour tout $x \in I$.
Citer le théorème afin d'obtenir la dérivabilité de F.

____

____

____

____

____

____

____

3) Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies $\boxed{\text{V}}$, lesquelles sont fausses $\boxed{\text{F}}$, sans justifier.

☐ **A1** : Si f est continue sur $[a,b] \times [0,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(t,x) \right) dt$.

☐ **A2** : Soit la fonction F donnée par : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ où f une fonction numérique réelle sur $[0,+\infty[\times I$, on supposera $f \in R_{loc}[0,+\infty[$ selon la variable t.
Si $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ est convergente sur tout $[\alpha,\beta] \subseteq I$ alors F est bien définie sur I.