Ecole nationale Supérieure d'Informatique

Avril 2018

2CPI **Contrôle intermédiaire** **Durée : 1h30**

Analyse mathématique 4

• Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (5 points) : On aimerait trouver un champ rectangulaire d'aire maximale délimité par une clôture de longueur l donnée. Soient x et y les longueurs des côtés du champ rectangulaire.

1- Donner la longueur de la clôture et l'aire du champ en fonction de x et y.

2- S'agit-il d'un problème d'extrema liés? Si oui donner la fonction à optimiser et la contrainte.

3- Trouver, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, l'aire maximale du champ rectangulaire délimité par une clôture de longueur 16 (faire le test).

Exercice 2 (7 points) :

Soient

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1,\ x+y \geq 0\right\}; \\ \Omega &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2 \leq 1,\ \ x^2+y^2 \leq z \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\ \right\} \end{aligned}$$

1- Calculer $\iint\limits_D x^2 y dxdy$ par le théoréme de Fubini (faire une repésentation graphique de D).

2- Calculer le volume de Ω.

Exercice 3 (3 points) : Etudier la continuité sur $[0, +\infty[$ de la focntion F donnée par:

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)} dt.$$

Bon courage.

Un corrigé:

Exercice 1 (5 points) :

$\boxed{0,5 \text{ pts}--}$ **1-** La longueur de la clôture $L = 2(x+y)$, l'aire du champ $A = xy$.

$\boxed{0,5 \text{ pt}}$ $--$**2-** Oui, $f(x,y) = xy$ et $\varphi(x,y) = 2(x+y) - l$.

3- Prenons $l = 16$.On a $f,\ \varphi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\right)$ car ce sont des polynômes...$\boxed{0,5 \text{ pt}}$,

a) Trouvons les points douteux (s'il y 'en a):

$\nabla\varphi(x,y) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,;\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right) = (2,2) \neq (0,0)$ donc il n y a pas de points douteux...$\boxed{0,5 \text{ pt}}$,

$\boxed{1,25 \text{ pts}}$ **b)** Recherche des points critiques.:Considérons le lagrangien :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) \doteq f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = xy + \lambda\,(2x + 2y - 16)\,.$$

Si f admet un extrema lié en $p = (x,y)$ sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ Résolvons ainsi, le système:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda = 0 ...\,(1) \\ x + 2\lambda = 0 ...\,(2) \\ x + y = 8 .....\,(3) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ donne: $y - x = 0 \Leftrightarrow y = x$.
Dans (3) $2x = 8$ ce qui donne $x = 4 = y$.
On remplace dans (1) : $\lambda = \dfrac{-4}{2} = -2$.
On en déduit que le seul point où f peut admetre un extrema lié sous le contrainte $\varphi(x,y) = 0$ est $p = (4,4)$.

$\boxed{1,75 \text{ pts}}$ **c)** Le test: Soit $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(4+h_1, 4+h_2) = 0$. Voyons le signe de $f(4+h_1, 4+h_2) - f(4,4) = (4+h_1)(4+h_2) - 16 = 16 + h_1h_2 + 4h_1 + 4h_2 - 16$.
Or $\varphi(4+h_1, 4+h_2) = 0 \Leftrightarrow (4+h_1) + (4+h_2) = 8. \Leftrightarrow h_1 + h_2 = 0 \Leftrightarrow h_2 = -h_1$ donc :
$f(4+h_1, 4+h_2) - f(4,4) = -h_1^2 \leq 0$ .... $\forall\,(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(4+h_1, 4+h_2) = 0$.
Donc, $((4,4), f(4,4))$ est un maximum lié pour f sous le contrainte $\varphi(x,y) = 0$.
Donc l'aire maximale demandé est $f(4,4) = 16$.

Exercice 2 (3 points) :

1- $\rightarrow$ Faire le graphe de D ...$\boxed{0,5 \text{ pt}}$

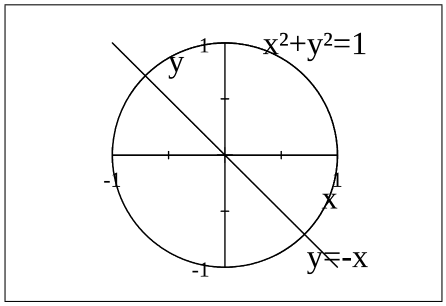


Figure représentative de D

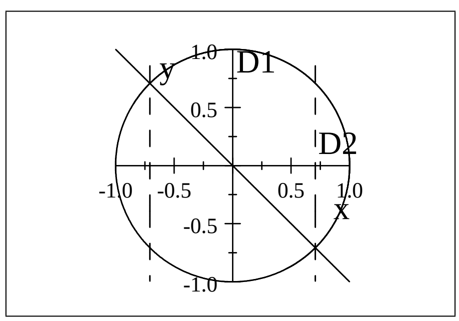
$\rightarrow$ $\boxed{2,5\ pts}$ Calcul de $\iint\limits_D x^2ydxdy$ par le théoréme de Fubini:

Cherchons les points d'intersection $M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$et $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ entre le cercle d'equation $x^2+y^2=1$ et la droite d'equation $y=-x$:

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-x \end{cases}$ on trouve $x_1=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ et $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (donc $M_1\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $M_2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, les placer sur le graphe)

On peut écrire: $D=D_1\cup D_2\ /\ \overset{0}{D_1}\cap\overset{0}{D_2}=\varnothing$ avec

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}; -x\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 1; -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}. \end{aligned}$$



Décomposition de D

On applique la propriété: $\iint\limits_D x^2ydxdy = \underbrace{\iint\limits_{D_1} x^2ydxdy}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_{D_2} x^2ydxdy}_{I_2}$ les deux domaines étant réguliers selon x on peut leur appliquer le théorème de Fubini:

$$I_1=\int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\left[y^2\right]_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\left(1-2x^2\right) dx=\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\left(1-2x^2\right) dx.$$

$I_1=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{10\sqrt{2}}=\frac{1}{15\sqrt{2}}$, de même on calcule I_2 :

$I_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x^2 \underbrace{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy}_{=0} dx=0$ (on peut aussi utiliser la symétrie de D_2)

On obtient : $I=\frac{1}{15\sqrt{2}}$.

2- Calcul du volume de Ω $\boxed{4 \text{ pts}}$

On peut écrire Ω sous la forme : $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ (x,y)\in D, \quad x^2+y^2\leq z\leq 1\right\}$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\right\}$, on applique alors le théorème de Fubini:

Volume de $\Omega=V=\iiint_{\Omega} dxdydz=\iint_{D}\int_{x^2+y^2}^{1} dzdxdy=\iint_{D}\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy,$

à présent utilisons les coordonnées polaires (CP) $\varphi\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{c}\det J\varphi=r, \\ r=\sqrt{x^2+y^2}\end{array}\right.$

Déterminons le transformé D' de D par les CP: utilisons la méthode algébrique (on peut aussi le trouver d'après son graphe);

Soit $(x,y)\in \overset{0}{D} \iff \left\{\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ x^2+y^2<1\end{array}\right. \overset{\text{CP}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} r\cos\theta>0 \\ r\sin\theta>0 \\ r^2<1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \\ 0<r<1,\end{array}\right.$

$D'=]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[$, on obtient alors:

$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\left(1-r^2\right)drd\theta$, à variables séparées (vs) sur un pavé,; donc:

$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r\left(1-r^2\right)dr=\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]=\frac{\pi}{8}.$

Exercice 3 (3 points) : Utilisons le théorème de conservation de la continuité pour les iintégrales paramérées impropres (sur $[0,+\infty[$) $\boxed{0,25 \text{ pt}}$

Posons, $f(t,x)=\frac{1}{(x^2+t^2)}$ et $\Delta=[1,+\infty[\times[0,+\infty[$.

La contuinuité de F est continue sur $[0,+\infty[$...... $\boxed{2,25 \text{ pts}}$

Méthode 1:

1) f est continue sur Δ car c'est le rapport de fonctions continues (polynômes).

2) Etudions la convergence uniforme (par la convergence dominée) de la fonction F sur $[0,+\infty[$:

On a $|f(t,x)| \leq \frac{1}{t^2} = g(t)$, $\forall t \in [1,+\infty[, \quad \forall x \in [0,+\infty[$., et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann), on obtient alors $\int\limits_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ car elle vérifie la convergence dominée. Conclusion: F est continue sur $[0,+\infty[$.

OU

Méthode 2:

1) f est continue sur Δ car c'est le rapport de fonctions continues (polynômes)

2) La condtion de domination sur f :

On a

- $|f(t,x)| \leq \frac{1}{t^2} = g(t); \ \forall t \in [1,+\infty[, \quad \forall x \in [0,+\infty[$.
- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann).

On obtient d'aprés le théorème de la conservation de la continuité sous le signe $\int$, la continuité de F sur $[0,+\infty[$.