ESI. 2018/2019. CP2. Note: $\frac{}{8}$

Un corrigé type de l'intérrogation n°1 d'ANA3. Sujet 1 .

Questions (3.5 points): : $\boxed{0{,}5}$ **pour chaque bonne réponse.**

Pour chaque affirmation répondre par $\boxed{\mathrm{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\mathrm{F}}$ sinon.

A] Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques réelles avec $v_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$,

1) Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum n^2 u_n$ converge. $\boxed{\mathrm{F}}$

2) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$, alors $\sum u_n$ converge. $\boxed{\mathrm{V}}$

3) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum \frac{u_n}{v_n}$ converge. $\boxed{\mathrm{F}}$

4) Si $(u_n)_n$ est monotone et $\lim\limits_{n \Rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors $\sum (-1)^n u_n$ converge. $\boxed{\mathrm{V}}$

5) Si $|r| \leq 1$, alors $\sum r^n \cos n$ converge. $\boxed{\mathrm{F}}$

B] Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1) La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I. $\boxed{\mathrm{V}}$

2) Si $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I, alors $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ uniformément sur I. $\boxed{\mathrm{V}}$

Exercice1 (1,5 points):

Etudier la nature de la série numérique: $\sum \frac{2^n}{e^n - 1}$.

Solution :

Soit $u_n = \frac{2^n}{e^n - 1} > 0\ \forall n \geq 0$. $\boxed{0{,}5}$

On a $u_n = \frac{2^n}{e^n - 1} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{e^n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{e}\right)^n$. $\boxed{0{,}5}$

Or $\sum \left(\frac{2}{e}\right)^n$ est une série géométrique convergente. $\boxed{0{,}25}$

Donc, $\sum u_n$ est convergente par le critère d'équivalence. $\boxed{0{,}25}$

Exercice2 (3 points):

Etudier la convergence absolue et la semi convergence de $\sum \log\left(1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$

Solution :

Soit $u_n = \log\left(1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}_{v_n} \underbrace{- \frac{\cos^2 n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{w_n}$. $\boxed{0{,}5}$

1) La convergence:

$\rightsquigarrow \sum v_n$ est convergence (ref). $\boxed{0{,}25}$

$\rightsquigarrow w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos^2 n}{2n}$ $\boxed{0{,}25}$ et $\frac{\cos^2 n}{2n} \geq 0$ donc $w_n \geq 0$ pour $n >>$. $\boxed{0{,}25}$

$\frac{\cos^2 n}{2n} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1+\cos 2n}{2}\right) = \frac{1}{4n} + \frac{\cos 2n}{4n}$ $\boxed{0{,}25}$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann) $\boxed{0{,}25}$ et $\sum \frac{\cos 2n}{n}$ est convergence (ref). $\boxed{0{,}25}$

donc $\sum w_n$ diverge par le critère d'equivalence et par linéarité. $\boxed{0{,}25}$

On en conclut par la technique du DL que $\sum u_n$ diverge. $\boxed{0{,}25}$

2) La convergence absolue:

Comme $\sum u_n$ diverge alors elle n'est pas absolument convergente. $\boxed{0{,}25}$

3) La semi convergence:

$\sum u_n$ n'est pas semi convergente. $\boxed{0{,}25}$