ESI, 2CPI | **Corrigé de l'intérrogation** | **Février 2021**
Analyse mathématique 3 | **Durée : 1h**

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
- Répondre sur le sujet

Exercice 1 (4 points) : Les questions sont indépendantes.

1) Etudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{n^{2021}}{n!}$.

$\boxed{\textbf{1 pt}}$ $\rightsquigarrow$ **Réponse** : On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^{2021}}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^{2021}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{2021} . \frac{1}{(n+1)} \right) = 0 < 1.$$

Puisuqe, $u_n \geq 0,$ d'après la régle de D'Alembert la série est donc convergente.

---

2) Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right).$$

$\boxed{\textbf{3 pt}}$ $\rightsquigarrow$ **Réponse** :

a) La convergence absolue : On a

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann), alors la série ne converge pas absolument (critère d'équivalence).

b) La convergence simple : On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{4n^2}\right).$$

$\rightsquigarrow$ *Méthode 1 :* On a

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n}$ converge (par la règle de Leibnitz).
- $\sum \dfrac{1}{4n^2}$ converge car $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
- $\sum o\left(\dfrac{1}{4n^2}\right)$ converge car $\sum \dfrac{1}{4n^2}$ converge absolument.

On en déduit aisni, par linéairité, que $\sum u_n$ converge.

$\rightsquigarrow$ *Méthode 2 :* On pose

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ et } t_n = \frac{1}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

- D'une part $\sum v_n$ converge (série de Leibnitz).
- D'autre part $t_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2} \geq 0$,

  or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), alors, la série $\sum t_n$ converge (critère d'équivalence).

On obtient la convergence de $\sum u_n$ par linéarité.

$\rightsquigarrow$ *Méthode 3 :* On pose

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2n}, \ t_n = \frac{1}{4n^2} \text{ et } s_n = o\left(\frac{1}{4n^2}\right).$$

- $\sum v_n$ converge (série de Leibnitz).
- $\sum t_n$ converge car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann).
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2|s_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left|o\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2}|o(1)| = 0$, la série $\sum s_n$ converge absolument (Régle de l'ordre) donc converge.

On obtient la convergence de $\sum u_n$ par linéarité.

c) On en déduit de a) et b) que la série est semi convergente.

Exercice 2 (6 points) : Soit $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ où

$$f_n(x) = e^{-n^3x} \text{ pour } x > 0.$$

1) Montrer que F est bien définie pour tout $\forall x > 0$.

0,75 pt $\rightsquigarrow$ **Réponse** : Soit $x > 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n(x))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^2x} = 0 < 1.$$

Conclusion: Donc, d'après la régle de Cauchy, la série converge (on peut aussi utiliser la régle de l'ordre etc...), donc F est bien définie $\forall x > 0$.

---

2) Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$.

2,25 pt $\rightsquigarrow$ **Réponse** : Pour montrer la continuité de F, utilisons le théorème de conservation de la continuité pour les séries de fonctions.

- Toutes les f_n sont continues sur $]0,+\infty[$ car c'est la composée de fonctions continues.

- Etude de la convergence uniforme de $\sum f_n$. On a pour $a > 0$

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ |f_n(x)| = e^{-n^3 x} \leq e^{-n^3 a}.$$

  Puique $\sum e^{-n^3 a}$ converge, car $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-n^3 a} = F(a)$ et $a > 0.$

  D'où $\sum f_n$ converge normalement sur tout $[a,+\infty[$, donc uniformément sur tout $[a,+\infty[$.

  Ainsi, F est continue sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$.

Conclusion : Par recouvrement F est continue sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

3 pt $\rightsquigarrow$ **Réponse** :Pour montrer la dérivabilité de F utilisons le théorème de conservation de la dérivabilité pour les séries de fonctions.

- Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car c'est la composée de fonctions C^1.

- $\exists x_0 \in]0,+\infty[$ tq $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge, puisque la série de fonctions converge

sur $]0,+\infty[$.
- Etude de la convergence uniforme de $\sum f_n'$: On a

$$f_n'(x) = -n^3 e^{-n^3 x}.$$

Et pour $a > 0$, on a

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ \ |f_n'(x)| = n^3 e^{-n^3 x} \leq n^3 e^{-n^3 a}.$$

Mais, $\sum n^3 e^{-n^3 a}$ converge et ceci par la régle de l'ordre, en effet:
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(n^3 e^{-n^3 a}\right) = 0$

(on peut aussi utiliser la régle de Cauchy etc...).
D'où $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, ainsi, uniformément sur $[a,+\infty[$.
On en déduit que F est dérivable sur tout $[a,+\infty[$ avec $0 < a$.

Conclusion : Par recouvrement F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F'(x) = \sum_{n\geq 1} -2n^3 x e^{-n^3 x}$..