Correction Contrôle Final

Exercice 1 (10 points)

1. Rappelez la définition d'une interprétation pour un ensemble de formules $\Gamma : \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ **0.5 pt**
   Voir cours
2. Rappelez la définition d'un modèle pour un ensemble de formules $\Gamma : \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ **0.5 pt**

   Voir cours
3. Rappelez la définition d'une interprétation de Herbrand. **0.5 pt**

   Voir cours
4. Rappelez la définition d'un modèle de Herbrand. **0.5 pt**

   Voir cours
5. Donner le domaine de Herbrand de l'ensemble S de clauses obtenu à partir de l'ensemble Γ tel que : **0.5 pt**

   $\Gamma : \{\forall x \forall y((P(x,y) \vee Q(y)) \wedge (P(x,y) \vee R(y)) \wedge (P(x,y) \vee \neg Q(x))), \exists x \exists y \neg P(x,y) \wedge \neg R(y)\}$

   $H : \{a, b\}$
6. Enumérer tous les atomes de base de S. **1 pt**

   $B : \{P(a,a), P(a,b), P(b,a), P(b,b), Q(a), Q(b), R(a), R(b)\}$
7. Enumérer toutes les instances de base de $C_1 : P(x,y) \vee Q(y)$ (la $1^{ière}$ clause de S). **1.5 pt**

   $\{P(a,a) \vee Q(a), P(a,b) \vee Q(b), P(b,a) \vee Q(a), P(b,b) \vee Q(b)\}$
8. Donner, s'ils existent, deux modèles de Herbrand de C_1. **1 pt**

   $M_1 : \{P(a,a), P(a,b), P(b,a), P(b,b)\}$ **0.5 pt**

   $M_2 : \{Q(a), Q(b)\}$ **0.5pt**
9. Donner, si elles existent, deux interprétations de Herbrand qui falsifie C_1. **1 pt**

   $I_1 : \{\neg P(a,a), \neg Q(a)\}$ **0.5 pt**

   $I_2 : \{\neg P(a,b), \neg Q(b)\}$ **0.5 pt**

10. Dessiner s'il existe un arbre sémantique clos pour S. **1 pt**

    $S : \{P(x,y) \vee Q(y), P(u,v) \vee R(v), P(w,s) \vee \neg Q(w), \neg P(a,b), \neg R(b)\}$

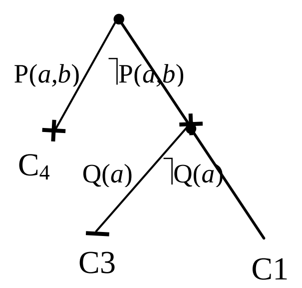

Figure 2.5.3. Arbre sémantique clos de S_2

11. Donner s'ils existent deux sous-ensembles non satisfiables d'instances de base de S.

$S_1 = \{P(a,b) \vee Q(a), P(a,b) \vee \neg Q(a), \neg P(a,b)\}$ **0.5 pt**

$S_2 = \{P(a,b) \vee R(b), \neg P(a,b), \neg R(b)\}$ **0.5 pt**

12. Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que S est inconsistant. **1 pt**

$C_1 : P(x,y) \vee Q(y)$
$C_2 : P(u,v) \vee R(v)$
$C_3 : P(w,s) \vee \neg Q(w)$
$C_4 : \neg P(a,b)$
$C_5 : \neg R(b)$
$C_6 : P(a,b) \vee R(b)$ $\quad C_{2[a/u,\, b/v]}$
$C_7 : R(b)$ $\quad Res(C_4, C_6)$
$C_7 : \square$ $\quad Res(C_5, C_7)$

<u>Exercice 2</u> (2 points : 0.5 x 4)

Indiquer clairement laquelle ou lesquelles des clauses suivantes sont des instances de la clause $P(x,y) \vee Q(f(y))$ et celles qui ne le sont pas ?

$I_1. P(a,y) \vee Q(f(a))$ **Non**

$I_2. P(x,b) \vee Q(f(g(b)))$ **Non**

$I_3. P(x, g(u)) \vee Q(f(g(u)))$ **Oui**

$I_4. P(x,y) \vee Q(u)$ **Non**

<u>Exercice 3</u> (1 – 1)

1. Donner une instance γ_1 de la formule valide telle que :

$\gamma : (P(y) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(y) \rightarrow Q(x))$ **(1 point)**

2. Montrer en utilisant la résolution que cette instance est valide. **(1 point)**

$\models \gamma$ ssi $\neg\gamma$ est non satisfiable.

$\neg\gamma : \mathbf{(}P(y) \rightarrow \exists x Q(x)) \wedge \forall x (P(y) \wedge \neg Q(x))\mathbf{)}$

On renomme les variables liées :

$\neg\gamma : \mathbf{(}P(y) \rightarrow \exists u Q(u)) \wedge \forall x (P(y) \wedge \neg Q(x))\mathbf{)}$

$(\neg\gamma)_p : \exists u \forall x ((P(y) \rightarrow Q(u)) \wedge (P(y) \wedge \neg Q(x)))$

On remarquera que y est libre dans γ. Par conséquent :

$\neg\gamma$ est non satisfiable ssi $\exists y \neg\gamma$ ssi $\exists y (\neg\gamma)_p$ est non satisfiable ssi la forme de Skolem de $\exists y (\neg\gamma)_p$ est non satisfiable.

$\exists y (\neg\gamma)_p : \exists y \exists u \forall x ((P(y) \rightarrow Q(u)) \wedge (P(y) \wedge \neg Q(x)))$

Forme de Skolem de $\exists y (\neg\gamma)_p$: $\forall u ((P(b) \rightarrow Q(a)) \wedge (P(b) \wedge \neg Q(u)))$

Mise sous forme clausale et déduction de la clause vide :

$C_1 : \neg P(b) \vee Q(a)$
$C_2 : P(b)$
$C_3 : \neg Q(u)$
$C_4 : Q(a)$
$C_5 : \neg Q(a) C_{3[a/u]}$
$C_6 : \square$ $\quad Res(C_4, C_5)$

<u>Exercice 5</u> (1-0.5-1.5 - 2)

- La racine n'est le fils d'aucun autre nœud. **1 point**
  $\forall x\ (R(x)\rightarrow\forall y\neg F(x,y))=\forall x\forall y(R(x)\rightarrow\neg F(x,y))$
- Un nœud n'est pas le fils de lui-même. **0.5**
  $\forall x\neg F(x,x)$
- A l'exception de la racine, tout autre nœud est le fils d'un seul autre nœud exactement.
  $\forall x(\neg R(x)\rightarrow\exists y(F(x,y)\wedge\forall z(F(x,z)\rightarrow E(y,z))))$ **1 Point**
- Un nœud a exactement 0 fils ou exactement 2 fils. **1.5 point**
  $\forall x(_1\forall y\neg F(y,x)\vee\exists u\exists v(_2D(u,v)\wedge F(u,x)\wedge F(v,x)\wedge\forall w(_3F(w,x)\rightarrow E(w,u)\vee E(w,v))_3)_2)_1$

Afin d'alléger l'écriture des formules, la propriété N(x) n'est pas représentée ici.