CONCOURS d'accès à l'ESI

Epreuve : Mathématiques-Statistiques-Logique Mathématique
Code : MATHS

Date : 24 juin 2014
Durée : 3 heures

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 3 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3,4,….)
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Les documents sont interdits.
- Les quatre parties du sujet doivent être rédigées sur des copies séparées.

PARTIE 1 : ALGEBRE (5 pts)

Exercice : (5 pts)
Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Calculer $(A - 4I_3).V$ où $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3).

2- Calculer la trace de A et le déterminant de A.

3- En déduire :

a/ Les valeurs propres de A.

b/ Que la matrice A est diagonalisable.

4- Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}.A.P.$$

5- Déterminer la matrice A^n où $n \in \mathbb{N}^*$

PARTIE 2 : ANALYSE (6 pts)

Exercice 1 : (3,75 pts)
On pose $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{-x^2-y^2}$.

1) Trouver les extréma libres de f sur $\mathbb{R}^2$.

2) Sachant que f admet une valeur maximale sur le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 3 trouver cette valeur.

Exercice 2 : (2,25 pts)

Calculer le rayon et le domaine de convergence ainsi que la somme de la série entière suivante: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) x^n$.

On rappelle que : $log\,(1-x) = -\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\ \forall x \in [-1,1[$.

PARTIE 3 : LOGIQUE MATHEMATIQUE (4 pts)

Exercice 1 : (2 pts)
Montrer que les deux phrases suivantes veulent dire la même chose :
Phrase 1. S'il fait beau, les routes sont bloquées et s'il ne fait pas beau les routes sont bloquées.
Phrase 2. Qu'il fasse beau ou pas, les routes sont bloquées.

Exercice 2 : (2 pts)
Déduire la négation de l'énoncé E1 à partir des énoncés E2 et E3 :
E1 : Les plus grands sont devant.
E2 : Si les plus grands sont devant, alors ils sont tous alignés.
E3 : Ils ne sont pas alignés.

PARTIE 4 : PROBABILITES ET STATISTIQUES (5 pts)

Exercice : (5 pts)

La durée de vie des individus d'une espèce d'insectes est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2.e^{-ax} & \text{pour} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}.$$

[Indications :

- Pour répondre aux questions (1) et (2), il est souhaitable d'utiliser la propriété suivante :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \text{et } a \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^{+\infty} x^n.e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

- Le 0.975 **-quantile de la loi normale centrée réduite est égal à** 1.96.**]**

- On donne : $\sqrt{3} = 1.732$.

1) Calculer λ en fonction de a.

2) Sachant que l'unité de temps est l'heure et que la durée de vie moyenne de ces insectes est $200h$,

a/ - calculer a,

b/ - déterminer la variance de X.

3) On détermine la durée de vie moyenne de 100 individus choisis au hasard et indépendamment les uns des autres.

Soit Y la variable aléatoire correspondante.

Déterminer t tel que $P(|Y - 200| > t) < 0.05$ en admettant que Y suit une loi normale.