Ecole nationale Supérieure d'Informatique

Mai 2017

2CPI **Corrigé Contrôle final** **Durée : 2 heures**

Analyse mathématique 4

Exercice 1 : (3 points): Soit $f(x,y) = -(x-1)^2 - (x-e^y)^2$.

1. Déterminer les points critiques.
2. f admet elle des extrémums locaux de f? Si oui lesquels sont globaux?

Corrigé :
$f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ car c'est la somme et la composée de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25}$.

1. Trouvons les points critiques de f :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-1) - 2(x-e^y) = 0 \longleftarrow \boxed{0{,}25} \\ 2e^y(x-e^y) = 0 \longleftarrow \boxed{0{,}25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 - e^y = 0 & (1) \\ x = e^y & (2) \end{cases}$$
(2) dans (1) : $x = 1$ donc $y = 0$.
le seul point critique de f est $(1,0)$, $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25}$

2. Nature du point
$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2e^y$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^y(x - e^y) + 2e^y(-e^y)$. $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25\times 3}$

Point	r	t	s	$rt - s^2$	Conclusion
$(1,0)$	$-4 < 0$	-4	2	12	f admet en ce point un maximum local.$\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$

3. On a $f(1,0) = 0 \longleftarrow \boxed{0{,}25}$ donc $f(x,y) - f(1,0) = f(x,y) \leq 0 \;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
donc $(1,0)$ donne un max global pour f. $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$

Exercice 2: (3 points): Calculer le volume de Ω.où

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\; z \geq 0\right\}.$$

Corrigé :

Utilisant les CC: $\varphi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\det J\varphi = r \longleftarrow \boxed{0{,}5}$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

déterminons le transformé Ω' de Ω par les CC; utilisons la méthode algébrique:

$$(x,y,z) \in \overset{o}{\Omega} \iff \begin{cases} x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2+z^2<2 \\ z>0 \end{cases} \overset{CC}{\iff} \begin{cases} r^2<1 \\ r^2+z^2<2 \\ z>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0<r<1 \\ 0<z<\sqrt{2-r^2} \end{cases}$$

Donc $\Omega' = \left\{(r,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} \ / \ 0<\theta<2\pi,\ 0<r<1,\ 0<z<\sqrt{2-r^2}\right\} \longleftarrow$ $\boxed{0{,}25\times 3}$.

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r \int_0^{\sqrt{2-r^2}} dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}drd\theta \longleftarrow \boxed{0{,}75}$$

On intègre une fonction à variables séparables sur un pavé$\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{2-r^2}dr = 2\pi\left[\frac{-1}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3}\right) \longleftarrow \boxed{0{,}5}$$

Exercice 3 (5 points) : On pose $f(t,x) = e^{-t^2}\cos(xt)$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $F'(x) = -\frac{1}{2}xF(x)$.
4. En déduire l'expression de F sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé

1. $\boxed{1{,}25}$

   f étant continue sur $\mathbb{R}^+$ alors $f \in R_{Loc}(\mathbb{R}^+)$, seul problème à $+\infty$.

   On a $\left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2} \quad \forall t,x \longleftarrow$

   Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente alors $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ converge

   par conséquent $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ converge $\forall x$.

   Autre méthode: $\boxed{1{,}25}$

   $\left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq e^{-t^2} \quad \forall t,x$

   On a $\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2e^{-t^2} = 0$ et comme $2>1$ alors d'après la règle de l'ordre $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ converge $\forall x$.

2. $\boxed{1{,}75}$

Les hypothèses du théorème:

- f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -te^{-t^2}\sin(xt)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
- $\int\limits_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$ converge $\forall x$.
- Etudions la convergence uniforme de $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ sur $\mathbb{R}$.

  On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \left|-te^{-t^2}\sin(xt)\right| \leq te^{-t^2}\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

  Et comme $\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \lim\limits_{y \longrightarrow +\infty}\left(\int\limits_0^{y} te^{-t^2}dt\right) = \lim\limits_{y \longrightarrow +\infty} \left.\dfrac{-1}{2}e^{-t^2}\right]_0^y = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$

  alors $\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$ converge.

  par conséquent $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ vérifie le critère de la convergence dominée sur $\mathbb{R}$ donc $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$ cv unif sur $\mathbb{R}$.

  Autre méthode pour étudier la convergence de $\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$:on peut appliquer la règle de l'ordre.

Conclusion 1 *$F \in C^1(\mathbb{R})$ de plus $F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$.*

3. $\boxed{\text{1point}}$

On a $F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt = -\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\,dt$

Faisons une intégration par parties:

On pose: $\begin{cases} u = \sin(xt) \Longrightarrow u' = x\cos(xt) \\ v' = te^{-t^2} \Longrightarrow v = \dfrac{-1}{2}e^{-t^2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\,dt &= \left.\frac{-1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t^2}x\cos(xt)\,dt \\ &= 0 + \frac{1}{2}x\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt \\ &= \frac{1}{2}xF(x) \quad \text{d'où} \quad F'(x) = -\frac{1}{2}xF(x)\,\forall x. \end{aligned}$$

4. Résolvons l'équation différentielle: $F'(x) = \dfrac{1}{2}xF(x)\ \forall x$.

$$
\begin{aligned}
F'(x) = -\frac{1}{2}xF(x)\ \forall x \iff & \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{1}{2}x & \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & \quad Log\,|F(x)| = -\frac{1}{4}x^2 + C & \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & \quad |F(x)| = e^c e^{-\frac{1}{4}x^2} & \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff & \quad F(x) = \lambda e^{-\frac{1}{4}x^2} & \forall x \in \mathbb{R} \longleftarrow \boxed{0{,}5}
\end{aligned}
$$

Calcul de la constante λ :

D'une part $F(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(0.t)\, dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$;

d'autre part $F(0) = \lambda e^{-\frac{1}{4}0^2} = \lambda$ donc $\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\longleftarrow \boxed{0{,}5}$

d'où $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (4 points): Résoudre l'équation différentielles suivante en utilisant la transformée de Laplace

$$
\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(2t) \quad \text{pour} \quad t > 0, \\ y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0. \end{cases}
$$

Corrigé :

On pose $Y(x) = \mathcal{L}(y(t))(x)$. alors, l'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle donne pour tout $x > 0$

$$
\mathcal{L}(y''(t) + y(t))(x) = \mathcal{L}(\sin(2t))(x),
$$

Donc,

$$
\mathcal{L}(y''(t))(x) + \mathcal{L}(y(t))(x) = \mathcal{L}(\sin(2t))(x), \longleftarrow \boxed{0{,}5}
$$

Or (en tenant compte des conditions intiales et de la table des TL)

$$
\begin{cases} \mathcal{L}(y''(t))(x) = x^2Y(x) - xy(0) - y'(0) = x^2Y(x) - 2x, \longleftarrow \boxed{0{,}5} \\ \mathcal{L}(\sin(2t))(x) = \dfrac{2}{x^2+4}, \longleftarrow \boxed{0{,}25} \end{cases}
$$

il vient

$$
x^2Y(x) - 2x + Y(x) = \frac{2}{x^2+4},
$$

c'est à dire

$$
\left(x^2+1\right) Y(x) = \frac{2}{x^2+4} + 2x, \longleftarrow \boxed{0{,}25}
$$

Ainsi,

$$
Y(x) = \frac{2}{(x^2+1)(x^2+4)} + \frac{2x}{(x^2+1)}, \longleftarrow \boxed{0{,}25}
$$

Mais, en décomposant la première fraction du deuxième membre de cette égalité, on obtient

$$\frac{2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\frac{2}{3}\left(\left(x^2+4\right)-\left(x^2+1\right)\right)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{2}{3(x^2+1)} - \frac{2}{3(x^2+4)} \longleftarrow \boxed{1}$$

Ainsi,

$$Y(x) = \frac{2}{3(x^2+1)} - \frac{2}{3(x^2+4)} + \frac{2x}{(x^2+1)}, \longleftarrow \boxed{0{,}25}$$

On en déduit ainsi (vu la linéairité de la TL inverse) et en supposant que y est continue,

$$y = \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(x^2+1)}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(x^2+4)}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{(x^2+1)}\right), \longleftarrow \boxed{0{,}5}$$

D'aprés la table des TL, on obtient

$$y(t) = \frac{2}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t) + 2\cos(t). \longleftarrow \boxed{0{,}5}$$

Exercice 5 (5 points):

1. Calculer $\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|t|}\right)$ pour $\alpha > 0$.

2. En déduire $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{\alpha^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|t|}$

3. On pose $g_\alpha(t) = \frac{1}{t^2+\alpha^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

   En appliquant la transformée de Fourier, trouver une fonction $y \in L^1(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R}^*)$ solution de

   $$y * g_\alpha = g_\beta \text{ avec } \beta > \alpha > 0.$$

Corrigé

1. Posons $f(t) = e^{-\alpha|t|}$

   (a) $\boxed{0{,}5}$

   Vérifions que $f \in L^1(\mathbb{R})$:

   i. f est continue sur $\mathbb{R}$.

ii. $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-\alpha|t|}\right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}dt$ converge si et ssi $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}dt$ converge car f est paire.
or $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge car $\int_{1}^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge exemple fondamental $-\alpha < 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}dt$ converge

Conclusion 2 $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) $\boxed{0{,}5}$

$$\boxed{\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|t|}\right) = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-\alpha t}dt = 2\mathcal{L}(\cos(xt))(\alpha) = \frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2} \ \forall x.}$$

2. Appliquons la formule de réciprocité de Fourier:

(a) Les hypothèses de la formule:

i. $f(t) = e^{-\alpha|t|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\boxed{0{,}25}$

ii. En 0 : $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} f'(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} -\alpha e^{-\alpha t} = -\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ <}} f'(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ <}} \alpha e^{\alpha t} = \alpha \in \mathbb{R}$.. $\boxed{0{,}5}$

(b) La conclusion :
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$. $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25}$ alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos(xt)\,\mathcal{F}f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\cos(xt)\,dx = \frac{2\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+\alpha^2}dx.$ $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$

donc $\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|t|}}$

3. $y * g_\alpha = g_\beta$ avec $\beta > \alpha > 0$.
Appliquons la TF à l'équation: Comme $y, g_\alpha, g_\beta \in L^1(\mathbb{R})$ $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$ alors
$\mathcal{F}(y * g_\alpha)(x) = \mathcal{F}g_\beta(x) \Longleftrightarrow \mathcal{F}g_\alpha \cdot \mathcal{F}y = \mathcal{F}g_\beta.$ $(\bigstar)$. $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25}$
or $\mathcal{F}g_\alpha(x) = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+\alpha^2}dt = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha|x|}$.. $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$
et $\mathcal{F}g_\beta(x) = \frac{\pi}{\beta}e^{-\beta|x|}$.
$(\bigstar) \Leftrightarrow \mathcal{F}y = \frac{\mathcal{F}g_\beta}{\mathcal{F}g_\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}e^{-(\beta-\alpha)|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.. $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25}$
Appliquons la **FRF**: Comme $\mathcal{F}y$ est paire et que $y \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^*)$ $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}25}$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \mathcal{F}y(x).\cos(tx).dx. \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha}{\beta} e^{-(\beta-\alpha)|x|}\cos(tx).dx. \\
&= \frac{\alpha}{2\beta\pi}\mathcal{F}(e^{-(\beta-\alpha)|x|})\,(t) \ \ \text{car } \boxed{0{,}25} \rightarrow \beta > \alpha > 0 \\
&= \frac{\alpha}{\beta\pi}\frac{(\beta-\alpha)}{t^2+(\beta-\alpha)^2}. \\
&= \frac{\alpha\,(\beta-\alpha)}{\beta\pi}\frac{1}{\left(t^2+(\beta-\alpha)^2\right)} \longleftarrow \boxed{0{,}25} \quad \forall t\in\mathbb{R}^* \longleftarrow \boxed{0{,}25}
\end{aligned}
$$