ESI. 2018/2019. CP2.

Note: $\dfrac{\quad}{7}$

Interro n°2 en ANA3. Sujet 1.
Durée 1h.

Soit la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-|x|}{2}, & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0, & \text{si } x \in [-\pi, -2] \cup [2, \pi] \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f puis donner sa série de Fourier.

3) En déduire la somme des séries numériques suivantes:

$$S_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(2n)}{n^2};\ S_2 = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2;\ S_3 = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^4$$

Un corrigé:

1) Le graphe $\boxed{\text{0,5 point}}$

2) On remarque que la fonction est continue donc $\mathfrak{F}(f)$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ existe (on peut aussi dire qu'elle est localement intégrable).

2.1) Calcul des coefficients, comme f est paire $b_n = 0\ \forall n \geq 1$ $\boxed{\text{0.25 point}}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2} \frac{2-x}{2}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2} (2-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{\pi}.$$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2} (2-x)\cos(nx)\,dx \ \boxed{\text{0.25 point}}$$

On intègre par parties: $u = 2-x;\ du = -dx$ et $dv = \cos(nx)dx;\ v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

$\boxed{\text{0.5 point}}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(2-x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^2 + \frac{1}{n}\int_0^{2} \sin(nx)dx = \frac{1-\cos(2n)}{\pi n^2} \ \boxed{\text{0.5 point}}$$

2.2) La série de Fourier associée à f est :

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(2n)}{n^2}\cos(nx) \boxed{\text{0.25 point}}$$

3) Calcul des sommes des séries.

Appliquons le corrollaire de Dirichlet $\boxed{\text{0.25 point}}$ sur $[0, \pi]$, car elle est $2\pi-$périodique et paire (le point 0 suffit pour trouver S_1)

$\rightsquigarrow$ $f_{/]0,2[}(x) = \dfrac{2-x}{2}$ est de classe C^1; $\lim\limits_{x\to 0^+} f'_{/]0,2[}(x) = \dfrac{-1}{2} \in \mathbb{R}$

et $\lim\limits_{x\to 2^-} f'_{/]0,2[}(x) = \dfrac{-1}{2} \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{0.75 point}}$

$\rightsquigarrow$ $f_{/]2,\pi[}(x) = 0$ est de classe C^1; $\lim\limits_{x\to 2^+} f'_{/]2,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$

et $\lim\limits_{x\to \pi^-} f'_{/]2,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ et donc sur $[0,\pi]$ (et donc en 0).La série de Fourier $\mathfrak{F}(f)$ associée à f est égale à f sur $\mathbb{R}$ en particulier $\mathfrak{F}(f)(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1-\cos(2n)}{n^2}\cos(nx) = f(x);\ \forall x \in [0,\pi]$

<u>S_1</u>: On a $\mathfrak{F}(f)(0) = f(0) = 1$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ ie

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(2n)}{n^2} = 1 \Longrightarrow S_1 = \pi - 1 \boxed{\text{0.25 point}}$$

<u>S_2</u>: Sachant que $1-\cos(2n) = 2\sin^2(n)$. $\boxed{\text{0.25 point}}$

$S_1 = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1-\cos(2n)}{n^2} = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2\sin^2(n)}{n^2} = 2S_2 \Longrightarrow S_2 = \dfrac{S_1}{2} = \dfrac{\pi-1}{2}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

<u>S_3</u>: On utilise l'égalité de Parseval: $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

On remplace sachant que $b_n = 0$ et on obtient:

$\dfrac{2}{\pi^2} + \dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{1-\cos(2n)}{n^2}\right)^2 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^2 (2-x)^2 dx = \dfrac{8}{3\pi}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

Comme $1-\cos(2n) = 2\sin^2(n)$, on aboutit:

$\dfrac{2}{\pi^2} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^4 = \dfrac{8}{3\pi} \Longrightarrow S_3 = \dfrac{\pi^2}{4}\left(\dfrac{8}{3\pi} - \dfrac{2}{\pi^2}\right) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$