Corrigé du CF Analyse mathématique 3
12 février 2024

Exercice 1 : Les questions sont indépendantes :

1) Calculer le rayon et la somme de la série entière : $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n$.

2) Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$. Developper f en série entière au $V(0)$. En déduire le développement en série entière au $V(0)$ de la fonction $g(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, on rappelle que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Corrigé : (3,5+2,5)

1) Soit $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 2} a_n x^n,\ u_n(x) = a_n x^n,\ a_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

(a) *Calcul de* R : $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ (rapport de polynômes), d'après le théorème d'Hadamard :

$$R = \frac{1}{1} = 1. \quad \boxed{0{,}25}$$

(b) *Domaine de convergence* D : $\boxed{0{,}5}$.
On a $|u_n(\pm 1)| = \frac{1}{n^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge .
Alors, $\sum_{n\geq 1} u_n(\pm 1)$ convergent absolument donc convergent.
Conclusion : $D = [-1,1]$ $\boxed{0{,}25}$ est le domaine de convergence de la s.e donnée.

(c) *Calculons sa somme* S : On a pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)} + \frac{-1}{(n+1)}\right). \quad \boxed{0{,}25}$$

Soit $x \in [-1,1]$. Posons $S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{(-1)^n}{(n-1)}x^n - \frac{(-1)^n}{(n+1)}x^n\right)$.

- Soit : $S_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(n-1)}x^n$, posons $k = n-1$:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}x^{k+1}}{k} = \frac{x}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \frac{x\log(1+x)}{2}, \quad \forall x \in]-1,1]. \quad \boxed{0{,}5}$$

- Soit : $S_2(x) = \frac{-1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)}$,
  Si $x \neq 0$,

$$S_2(x) = -\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}, \quad \text{posons } k = n+1,$$

$$S_2(x) = -\frac{1}{2x}\sum_{k\geq 3}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = -\frac{1}{2x}\left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right), \quad \forall x \in]-1,1] \setminus \{0\}. \boxed{0{,}75}$$

  Si $x = 0$, $S_2(0) = 0$. $\boxed{0{,}25}$

On en conclut

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \begin{cases} \frac{x\log(1+x)}{2} - \frac{1}{2x}\left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \in]-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

Le calcul de $S(-1)$ peut se fait par le résultat d'Abel comme suit $\boxed{0{,}75}$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} S(x) &= \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left[\frac{x\log(1+x)}{2} - \frac{1}{2x}\left(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)\right] \\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left[\frac{x^2\log(1+x) - \log(1+x)}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right] \\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left[\frac{\left(x^2-1\right)\log(1+x)}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right] \\
&= \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left[\frac{(x-1)(x+1)\log(1+x)}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right] = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

2) Utilisons la série géométrique, sachant que $\forall y \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-y} = \sum\limits_{n\geq 0} y^n$, donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = x.\frac{1}{1+x^4} = x\sum_{n\geq 0}\left(-x^4\right)^n = x\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{4n} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{4n+1}.\ \boxed{0{,}5}$$

On a $g'(x) = \dfrac{\dfrac{-2x\left(1+x^2\right) - 2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \dfrac{-4x}{2+2x^4} = \dfrac{-2x}{1+x^4} = -2f(x).\ \boxed{0{,}5}.$

Donc d'après ce qui est fait précédemment, on a $\forall x \in]-1,1[,\ g'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} 2(-1)^{n+1} x^{4n+1} \longleftarrow \boxed{0{,}25}.$

Par intégration terme à terme, on obtient $\int\limits_0^x g'(t)\,dt = \sum\limits_{n\geq 0} 2(-1)^{n+1} \int\limits_0^x t^{4n+1}dt,\quad \forall x \in]-1,1[.$

Ce qui donne : $g(x) - g(0) = \sum\limits_{n\geq 0} 2(-1)^{n+1}\dfrac{x^{4n+2}}{4n+2}, \longleftarrow \boxed{0{,}5}$ et $g(0) = \dfrac{\pi}{4}. \longleftarrow \boxed{0{,}25}$

Conclusion : $\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \dfrac{\pi}{4} + \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{4n+2}}{2n+1} \quad \longleftarrow \boxed{0{,}5}.$

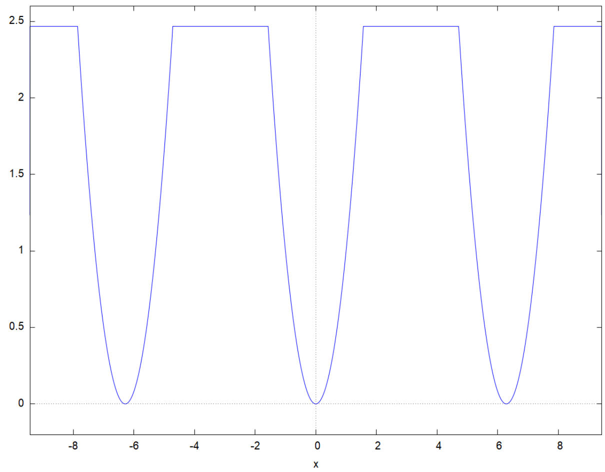
Exercice 2 : Soit la fonction $2\pi-$périodique donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi^2}{4} & \text{si } -\pi \leq x < -\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2) Déterminer la série de Fourier de f.
3) Développer f en série de Fourier.
4) Déduire les sommes de $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{p^2}$ et $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Corrigé : (0,5+3+1,5+2)

1) Le graphe $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$;



2) *Calcul des coefficients de Fourier de f :*

— f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

— f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le graphe), elle est donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$,

alors $\mathscr{F}f$ existe $\boxed{0{,}25}$. Comme f est paire alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$ $\boxed{0{,}25}$et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3}\ \boxed{0{,}5}.$$

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1,\ \ a_n\boxed{1{,}0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi^2}{4}\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(nx)dx - \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Utilisons une première IPP, on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u' = \cos(nx) \\ v = x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{1}{n}\sin(nx) \\ v' = 2x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1,\ \ a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx - \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

On intégre une deuxième fois par parties en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} u' = \sin(nx) \\ v = x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -\dfrac{1}{n}\cos(nx) \\ v' = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1,\ \ a_n &= -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^3\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

On en obtient :

$$\mathscr{F}f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^3\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos(nx)\ \boxed{0{,}25}.$$

3) *Développement de f en série de Fourier* : f étant paire et 2π-périodique, appliquons le corollaire de Dirichlet $\boxed{\text{1pt}}$ sur $[0,\pi]$. On a f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,\pi]$, en effet, f est de classe C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \pi \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = 0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to \pi^-} f'(x) = 0 \in \mathbb{R}.$$

Alors $\mathscr{F}f(x)$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ \mathscr{F}f(x) = f(x)\ \boxed{0{,}25}.$$

En particulier, on a

$$\forall x\in[0,\tfrac{\pi}{2}],\ \ \mathscr{F}f(x) = x^2,$$

et

$$\forall x\in]\tfrac{\pi}{2},\pi],\ \ \mathscr{F}f(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

4) *Calculons S_1 et S_2* : pour $x=0$ $\boxed{0{,}25}$, on a

$$\mathscr{F}f(0) = f(0) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{n^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^3\pi}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 0,$$

Les séries $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}$ étant convergentes, on a

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2\sum_{n\geq 1}\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = -\frac{\pi^2}{6}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{p^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = -\frac{\pi^2}{6}\boxed{0{,}5}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_1 - \frac{4}{\pi}S_2 = -\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Pour $x=\pi$ $\boxed{0{,}25}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}f(\pi) = f(\pi) &\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{n^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^3\pi}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{4}\\
&\Leftrightarrow 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n.\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n.\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3} = \frac{\pi^2}{12}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{p^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}\boxed{0{,}5} = \frac{\pi^2}{12}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_1 + \frac{4}{\pi}S_2 = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

On obtient ce systéme d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}S_1 - \frac{4}{\pi}S_2 = -\frac{\pi^2}{6}\\
\frac{1}{2}S_1 + \frac{4}{\pi}S_2 = \frac{\pi^2}{12}
\end{array}\right.$$

La solution du systéme est donc :

$$\boxed{0{,}5}\qquad S_1 = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad S_2 = \frac{\pi^3}{32}.$$

Exercice 3 : Soit

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|\,y^7}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Corrigé : (2+2,5)

1) Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
   - Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: f est continue car c'est le produit et le rapport de fonctions continues $\boxed{0{,}5}$.
   - En $(0,0)$: A-t-on $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$?

     On a $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{|x|\,y^7}{x^2+y^6}=\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{y^6}{x^2+y^6}\,|x|\,y.$

     D'une part $y^6\leq x^2+y^6$ donc $\dfrac{y^6}{x^2+y^6}$ est bornée $\boxed{0{,}5}$,

     et d'autre part $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}|x|\,y=0$ $\boxed{0{,}5}$.

     Donc $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0$ ie f est continue en $(0,0)$ $\boxed{0{,}5}$.

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculons les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

$$\begin{cases}\rightsquigarrow \boxed{0{,}25}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) : \lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{0-0}{x}=0 \text{ donc } \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\ \exists.\\ \rightsquigarrow \boxed{0{,}25}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) : \lim\limits_{y\longrightarrow0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\longrightarrow0}\dfrac{0}{y}=0 \text{ donc } \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\ \exists.\end{cases}$$

Pour étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$, utilisons la définition.

$$f\left((0,0)+(h_1,h_2)\right)-f\left(0,0\right)=\left[h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]+\left\|(h_1,h_2)\right\|.\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\ \boxed{0{,}5}$$

ce qui donne

$$f\left(h_1,h_2\right)=\sqrt{h_1^2+h_2^2}.\varepsilon(h_1,h_2)$$

ie $\lim\limits_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\varepsilon\left(h_1,h_2\right)=\lim\limits_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{|h_1|\,h_2^7}{\left(h_1^4+h_2^6\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim\limits_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{h_2^6}{\left(h_1^4+h_2^6\right)}.\dfrac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.h_2.$

D'une part $\boxed{0{,}5}\rightarrow\begin{cases}\text{on a } h_2^6\leq h_1^2+h_2^6 \text{ donc } \dfrac{h_2^6}{\left(h_1^4+h_2^6\right)} \text{ est bornée,}\\ \text{et } |h_1|\leq\sqrt{h_1^2+h_2^2} \text{ donc } \dfrac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \text{est bornée.}\end{cases}$

D'autre part $\lim\limits_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} h_2=0$ $\boxed{0{,}5}$.

Donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\varepsilon\left(h_1,h_2\right)=0.$

Conclusion : f est différentiable en $(0,0)$ $\longleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$.

Questionnaire : 1) **Donner** un exemple de série entière de rayon de convergence 5.

....

2) **Est ce que** la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ est la série de Fourier d'une fonction localement intégrable et $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$? Justifier.

....

3) **Compléter :** Soient E un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

- $\text{ext}(E) =$ ....
- X_0 est un point intérieur de E si et seulement si ....

4) **Calculer** les limites suivantes

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\left(x^2-y\right)\left(y^2-x\right)}{x+y} \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(2,-2,0)} \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}.$$

Corrigé : (0,75+0,75+1,25+0,75)

1) La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{5^n} \longleftarrow \boxed{0{,}75}$.

2) La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction localement intégrable et $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ car sinon $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ serait convergente par le théorème de Parseval ce qui est contradictoire$\longleftarrow \boxed{0{,}75}$.

3)
- $\text{ext}(E) = \text{int}(E^c) \longleftarrow \boxed{0{,}5}$.
- X_0 est un point intérieur de E si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(X_0, r) \subseteq E \longleftarrow \boxed{0{,}75}$.

4) Calcul des limites

(a) $\boxed{0{,}75\text{pt}}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(x^2-y\right)\left(y^2-x\right)}{x+y}$, on pose $f_1(x,y) = \dfrac{\left(x^2-y\right)\left(y^2-x\right)}{x+y}$.

Utilisons le chemin $y = -x + x^3$ (il est suffisant) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f_1(x, -x+x^3) &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty = l_1, \\
\lim_{x\to 0^-} f_1(x, -x+x^3) &= \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty = l_2,
\end{aligned}$$

comme $l_1 \neq l_2$ alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(x^2-y\right)\left(y^2-x\right)}{x+y}$ n'existe pas.

(b) **Question bonus sur $\boxed{\mathbf{1pt}}$:**

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,-2,0)} \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$, on pose $f_2(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$.

On a $f_2(x,y,z) = f_2(2+h, -2+k, l) = \dfrac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$.

Utilisons les chemins pour g :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} g(h,0,0) &= \frac{1}{4} = l_1. \\
\lim_{l\to 0} g(0,0,l) &= 0 = l_2.
\end{aligned}$$

Et on a $l_1 \neq l_2$, donc $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,-2,0)} \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ n'existe pas.

Quelques solutions alternatives de l'exercice1

Dans la partie 1., on peut évaluer la série $\sum\limits_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$ (en $x=-1$) sans utiliser le théorème radial d'Abel en se basant sur le résultat suivant

$$\forall p\in\mathbb{N}^\star,\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}=\frac{1}{p\,p!},$$

qu'on peut le démontrer par la technique téléscopique (voir Série d'exercice N. 1). *Méthode 1 :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&\overset{m=n-1}{=} \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{1!}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1} &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n-1)(n+1)}\\
&\overset{m=n-1}{=} \sum_{m\geq 1}\frac{m+1}{m(m+1)(m+2)}\\
&= \sum_{m\geq 1}\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}\\
&= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}+\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m(m+1)(m+2)}\\
&= \frac{1}{1!}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,2!}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Dans la partie 2., on peut trouver le développement en série entière (DSE) de $g(x)=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$ sans utiliser celui de $f(x)=\frac{x}{1+x^4}$. Il s'agit de trouver tout à bord une expréssion simple de $g(x)$ puis déduire son DSE au voisinage de zéro. En effet, comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par $g'(x)=-\frac{2x}{1+x^4}$, alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=-\int\frac{2x}{1+x^4}dx\overset{y=x^2}{=}-\int\frac{dy}{1+y^2}=-\arctan x^2+C.$$

Mais $g(0)=\frac{\pi}{4}=C$. Donc,

$$\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\frac{\pi}{4}-\arctan x^2.$$

Comme

$$\forall x\in[-1,1],\quad \arctan(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

on en déduit que

$$\forall x\in[-1,1],\quad g(x)=\frac{\pi}{4}-\arctan x^2=\frac{\pi}{4}-\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$