E.S.I. 2CP ALG3 Examen final 10 février 2020 Durée : 2H

L'usage du Mobile et de la Calculatrice est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Problème : (15 pt = 1+0,75+1,25+0,5+2,5+2,5+3+0,5+1+2)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- Montrer que la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_a. En déduire une valeur propre de A_a.

2- Calculer la trace et le déterminant de A_a.

3- En déduire les deux autres valeurs propres de A_a.

4- En déduire que : $P_{A_a}(X) = -X^3 + aX^2 + X - a$.

5- Montrer que la matrice A_a est diagonalisable quel que soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Supposons pour toute la suite que : $a \in R^* \setminus \{-1, 1\}$.

6- Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D_a telles que :

$$D_a = P^{-1} \cdot A_a \cdot P.$$

7- Calculer A_a^n pour tout entier $n \geq 1$.

8- Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est-elle inversible ?

9- Appliquer le théorème de Caylcy-Hamilton à la matrice A_a, puis en déduire l'écritu[illegible] de A_a^{-1} comme expression polynômiale de A_a (il n'est pas demandé de calculer A_a^{-1}).

10- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que calculer la matrice A_a^n revient à résoudre un système de Cramer de trois équations à trois inconnues (il **n'est pas demandé de résoudre le système**).

Exercice : (1pt pour chaque question)

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1- Montrer que : 0 est une valeur propre de A ssi A n'est pas inversible.

2- Supposons que A est une une matrice inversible. Montrer que :

Si λ est une valeur propre de A associée à un vecteur propre non nul X alors λ^{-1} est une

3- Montrer que les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.

4- Montrer que si le système $A \cdot X = 0$, où X désigne la matrice colonne inconnue à n lignes, admet une solution non nulle alors $\det A = 0$.

5- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la matrice $N = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Les deux questions suivantes sont facultatives (1,5 pt +1 pt) :

On suppose : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

6- Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Montrer que :
Si $P(A) = 0$ alors les valeurs propres de A sont racines de $P(X)$.

7- Soient, dans $M_4(\mathbb{C})$, les matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les matrices M_1 et M_2 sont semblables.

Bon courage