Contrôle intermédiaire. Janvier 2011.
Durée 2H.
DOCUMENTS ET CALCULATRICE INTERDITS.

Exercice 1: (1+1,5+4)
Les questions sont indépendantes:
I- Compléter:
Soient E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ et (a, b) un point d'accumulation de E et F.

$$\textbf{Si} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in E}} f(x,y) = l \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in F}} f(x,y) = l \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l.$$

II- Soit f une fonction qui admet en un point (a, b) un extréma libre.
Peut on dire que (a, b) est un point critique de f ? Justifier votre réponse.

III- Calculer les limites suivantes si elles existent:
1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$. 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2}$. 3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{y}$.

Exercice 2: (5,5 points)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que la réstriction de f sur les droites $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) est continue en $(0, 0)$.
3) Calculer la limite en $(0, 0)$ de f restreinte à la parabole $y = x^2$.
4) f est elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 3: (4 points)
Soit g la fonction définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,.\sqrt{x^2+y^2}.\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Etudier la différentiabilité de g sur son domaine de définition.

Exercice 4: (4 points)
Déterminer les extéma libres de la fonction h définie par :

$$h(x,y) = x\left((\log x)^2 + y^2\right), \quad x > 0.$$

Bon courage.

Un corrigé du contrôle intermédiaire. Janvier 2011.

Exercice 1:

I-

$$\textbf{Si}\ \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in E}} f(x,y)=l \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in F}} f(x,y)=l \\ \exists r>0\ /\ B\left((a,b),r\right)\subseteq E\cup F \end{array}\right. \quad \textbf{alors} \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l.$$

Les réponses $E\cup F=v(a,b)$ ou D_f ou $\mathbb{R}^2$ sont également accéptées.

II- Soit f une fonction qui admet en un point (a,b) un extréma libre.
On ne peut pas dire que (a,b) est forcémént un point critique de f , il faudrait d'abord que f soit de classe C^1 sur un ouvert contenant (a,b).

III- Calculer les limites suivantes si elles existent:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0}{8}=0.$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\left(x.\frac{x^2}{x^2+(y+1)^2}+(y+1)\,.\frac{(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2}\right).$

Or $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)}x=\lim_{(x,y)\to(0,-1)}(y+1)=0$ et $\displaystyle\frac{x^2}{x^2+(y+1)^2};\frac{(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2}$ sont bornées.

Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2}=0.$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x}{y}$. Utilisons la méthode des chemins:

$\rightsquigarrow\ y=x:\ \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=l_1.$

$\rightsquigarrow\ x=0:\ \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 0}{y}=0=l_2.$

Comme $l_1\neq l_2$ alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x}{y}$ n'$\nexists$.

Exercice 2: Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si }\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si }\ (x,y)=(0,0)\end{array}\right.$$

1) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ /\ x^4-2x^2y+3y^2\neq0\right\}\cup\{(0,0)\}.$

Cherchons les solutions de $x^4-2x^2y+3y^2=0\iff\left(x^2-y\right)^2+2y^2=0\iff$
$\left\{\begin{array}{l}x^2-y=0\\ y=0\end{array}\right.$

Seul le point $(0,0)$ est solution donc $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^4 - 2x^2y + 3y^2 \neq 0$.

<u>Conclusion:</u> $D_f = \mathbb{R}^2$.

2) La réstriction de f sur les droites $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) est donnée par :

$$f(x,kx) = \begin{cases} \dfrac{kx^3}{x^4 - 2kx^3 + 3k^2x^2} & \text{si } (x,kx) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,kx) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4 - 2kx^3 + 3k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{3k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{3k^2}.$$

1er cas : $k \neq 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3k} = 0 = f(0,0)$.

2ème cas : $k = 0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0)$.

<u>Conclusion:</u> La réstriction de f sur les droites $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) est continue en $(0,0)$.

3) La réstriction de f sur la parabole $y = x^2$ est donnée par

$$f(x,x^2) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{2x^4} & \text{si } (x,x^2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,x^2) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

4) f n'est pas continue en $(0,0)$ car il existe un chemin $y = x^2$ qui donne $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.

Exercice 3: Soit g la fonction définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,.\sqrt{x^2+y^2}.\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a $D_g = \mathbb{R}^2$ et g est symétrique.

1) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: g est le produit, composée et rapport de fonctions de classe C^1, elle est donc de classe C^1 et par conséquent différentiable.

2) En $(0,0)$:
$\rightsquigarrow$ Calcule des dérivées partielles premières:

★ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) : \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$
Or $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ et $\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ est bornée ie $\lim\limits_{x\to 0}|x|\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right) = 0$. Donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$ $\exists$.
★ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$ car g est symétrique.
$\rightsquigarrow$ Utilisons la définition de la différentiabilité:

$$\begin{aligned} g(h_1,h_2)-g(0,0) \quad &= \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)h_2 + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2). \\ &\iff \quad \varepsilon(h_1,h_2) = \frac{g(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+{h_2}^2}} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2) = \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}(h_1+h_2)\,.\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{h_1^2+{h_2}^2}}\right).$

Or $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}(h_1+h_2) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{h_1^2+{h_2}^2}}\right)$ est bornée ie $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2) = 0$.
Donc par "unicité" on obtient que g est différentiable en $(0,0)$.

<u>Conclusion:</u> g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4: Soit h la fonction définie par : $h(x,y) = x\left((\log x)^2 + y^2\right)$, $x > 0$.

1) Recherche des points critiques: résolvons le système (S) :

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\log x)^2 + y^2 + 2\log x = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \overset{x>0}{\iff} \begin{cases} (\log x)^2 + 2\log x = 0 \ldots (1) \\ y = 0 \end{cases}$$

$(1) \iff \log x\,(\log x + 2) = 0 \iff \left(x = 1 \wedge x = e^{-2}\right).$

Les points critiques sont donc :$M_1 = (1,0)$ et $M_2 = (e^{-2},0)$.

2) Test: Calculons les dérivées partielles secondes:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x}\log x + \frac{2}{x};\ \ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y;\ \ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 2x$$

<u>Pour M_1</u>: $r_1 = 2;\ s_1 = 0;\ t_1 = 2 \implies \Delta_1 = 4 > 0$ et $r_1 > 0 \implies (M_1, f(M_1))$ est un minimum pour f.

<u>Pour M_2</u>: $r_2 = -4e^2;\ s_2 = 0;\ t_2 = 2e^{-2} \implies \Delta_2 = -4 < 0 \implies (M_2, f(M_2))$ n'est pas un extrémum pour f.