Controle intermédiaire
Durée 2H

Documents, Calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice1 6 points

Les questions sont indépendantes

1. Etudier la nature de $\sum_{n\geq 1}\left(nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Etudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.
3. Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^{2016}}{n!}$.

Exercice2 5,5 points

Soit la fonction $F(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ où $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^x}$ avec $x\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.
3. Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $]0,2]$.
4. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 3,5points

Les questions sont indépendantes:

1. Déterminer le rayon et la somme de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^n.$$
2. Déterminer le rayon de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}(chn)\,x^n.$$
On rappelle que $chn=\frac{e^n+e^{-n}}{2}$.

Corrigé du CI

Exercice 1

1. Etudier la nature de $\sum_{n\geq 1}\left(nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

   Posons
   $$u_n = nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}$$

   Utilisons les développements limités, on a:
   $$Log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
   donc
   $$nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   $$\cos\frac{1}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4!n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   d'où
   $$nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{7}{4!n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   par conséquent
   $$nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{7}{4!n^2}$$

   Comme $\frac{7}{4!n^2}\geq 0$ alors $\sum_{n\geq 1}U_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{7}{4!n^2}$ sont de même nature;
   or $\sum_{n\geq 1}\frac{7}{4!n^2}$ converge car c'est une série de Riemann $2>1$ donc $\sum_{n\geq 1}U_n$ converge.

2. Etudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.

   Posons
   $$v_n=\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$$

   On a
   $$v_n=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(a) La convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} v_n$:

$$|v_n| = \left|(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{n}$ diverge car série de Rieman $1 \leq 1$ donc $\sum_{n\geq 1} |v_n|$ diverge donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne converge pas absolument.

(b) La convergence de $\sum_{n\geq 1} v_n$:

Méthode 1:

$$\begin{aligned} v_n &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \underbrace{\pi\frac{(-1)^n}{n}}_{w_n} - \underbrace{\frac{\pi^3}{6}\frac{(-1)^n}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{t_n} \end{aligned}$$

i. $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge car c'est une série de Leibniz.

ii. $t_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi^3 (-1)^n}{6n^3} = k_n \Longrightarrow |t_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^3}{6n^3}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{\pi^3}{6n^3}$ converge car c'est une série de Riemann $2 > 1$.

donc $\sum_{n\geq 1} t_n$ converge absolument donc elle converge

donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge car c'est la somme de deux séries convergentes.

Conclusion $\sum_{n\geq 1} v_n$ est semie convergente.

Méthode 2: On montre que $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de Leibniz

$v_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$: $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$ $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \downarrow$ car composée d'une croissante et d'une décroissante.

$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$ donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de Leibniz donc elle est convergente.

3. Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n^{2016}}{n!}$:

Posons $b_n = \frac{n^{2016}}{n!}$, étudions la nature de lasérie $\sum_{n\geq 0} b_n$;

$b_n > 0$ appliquons la règle de D'alambert:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^{2016}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^{2016}} = \frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)^{2016}}{n^{2016}} = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2016}$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2016} = 0 < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} b_n \text{ converge}$$

$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0.$

Exercice 2 5,5points

Soit la fonction $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^x}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos(nx)}{n^x}$ converge si et ssi $x > 0$ c'est un exemple fondamental.

2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

   On a:
   $$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^x}$$

   $$\begin{array}{lrl} \text{Or } x \geq 2 & \Longrightarrow & -x \leq -2 \\ & \Longrightarrow & -xLogn \leq -2Logn \quad \text{car } Logn \geq 0 \\ & \Longrightarrow & e^{-x\log n} \leq e^{-2\log n} \quad \text{car } e^x \text{ est } \uparrow \\ & \Longrightarrow & \dfrac{1}{n^x} \leq \dfrac{1}{n^2} \\ & \Longrightarrow & |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2} \quad \forall x \in [2, +\infty[. \end{array}$$

   or $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge car série de Rieman $2 > 1$.

   donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

3. Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $]0, 2]$.

   Posons $]0, 2] =]0, \varepsilon] \cup [\varepsilon, 2]$ où $0 < \varepsilon < 2$

   (a) Etude de la cv uniforme sur $]0, \varepsilon]$:
   On remarque que: $\exists x_n = \dfrac{1}{n} \in]0, \varepsilon]$ à partir d'un certain rang, tel que $f_n(x_n) = f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{\cos(1)}{n^{\frac{1}{n}}}$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\cos(1)}{\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \cos(1)\, e^{-\frac{Log n}{n}} = \cos(1) \neq 0 \Longrightarrow (f_n(x))_n$$

ne converge pas uniformément sur $]0, \varepsilon] \Longrightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $]0, \varepsilon] \Longrightarrow \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $]0, 2]$

(b) Etude de la cv uniforme sur $[\varepsilon, 2]$:
Appliquons Abel1 uniforme:

i. $\dfrac{1}{n^x}$ est décroissante

ii. $\dfrac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x \log n} \leq e^{-\log n} = \dfrac{1}{n^\varepsilon}$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n^\varepsilon} = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{n^x} \underset{\text{sur } [\varepsilon, 2]}{\overset{\text{uniformément}}{\longrightarrow}} 0.$

iii. $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^x} \right| \leq \dfrac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}$

$$\begin{aligned}
2 \geq x \geq \varepsilon \quad & \Longrightarrow \quad 1 \geq \frac{x}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} \\
& \Longrightarrow \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
& \Longrightarrow \quad \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
& \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}
\end{aligned}$$

car $\dfrac{x}{2} \in \left[\dfrac{\varepsilon}{2}, 1\right] \subset \Big[0,$
et sur cet intervalle $\sin u$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k^x} \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \longleftarrow \text{indép de } x$$

Conclusion: $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 2]$.

4. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) $\forall n$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[2, +\infty[$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$
et $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 2]$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$.

Conclusion F est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$ donc F est continue sur $\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} [\varepsilon, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3 3,5points

Les questions sont indépendantes:

1. Déterminer le rayon et la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} nx^n.$$

On pose $a_n = (-1)^{n+1} n$

(a) Le rayon de convergence de la série:
$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1 \Longrightarrow R = 1.$

(b) Le domaine de convergence D de la série:
Si $x = 1$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n$ diverge grossièrement.
Si $x = -1$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n (-1)^n = -\sum_{n\geq 0} n$ qui diverge grossièrement.
donc $D =]-1, 1[$.

(c) Calcul de la somme: Pour $x \in]-1, 1[$
$S(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} nx^n = -\sum_{n\geq 0} (-x)^n n$
Posons $y = -x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n\geq 0} ny^n = \begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} ny^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} ny^n = y\sum_{n=1}^{+\infty} ny^{n-1} \\ &= y\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y^n\right)' \quad \forall y \in]-1, 1[\\ &= y\left(\frac{1}{1-y}\right)' \quad \forall y \in]-1, 1[\\ &= \frac{y}{(y-1)^2}.\forall y \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

donc $S(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.\forall x \in]-1, 1[$.

2. Déterminer le rayon de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} (chn)\, x^n.$$

On rappelle que $chn = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$.
$chn = \frac{e^n + e^{-n}}{2} = e^n\left(\frac{1 + e^{-2n}}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} e^n \cdot \frac{1}{2} = b_n$
On a $\lim_{n\longrightarrow +\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \left|\frac{e^{n+1}}{e^n}\right| = e \Longrightarrow R = \frac{1}{e}.$