Séries de fonctions

Exercice 0.1

Etudier la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes dont le terme général est :

(1) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$; $x \in \mathbb{R}$ (2) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$; $x \in [a,b]$; $a, b, \alpha > 0$

(3) $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx+n)}{1+nx+n}$; $x \in [0,1]$ (4) $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\sin(x+n)}{x+n}$; $x \in \mathbb{R}_+, n \geq 1$

Corrigé :

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$; $x \in \mathbb{R}$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$, alors $\sum f_n$ converge normalement donc uniformement sur $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$; $x \in [a,b]$; $a, b, \alpha > 0$
   Pour tout $x \in [a,b]$ on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{b}{a^2n^{\alpha+1}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ est une série de Riemann convergente si $\alpha > 0$, alors $\sum f_n$ converge normalement donc uniformement sur $[a,b]$ pour tout $\alpha > 0$.
3. $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx+n)}{1+nx+n}$; $x \in [0,1]$
   On pose $f_n(x) = v_n(x)w_n(x)$ tel que $v_n(x) = \dfrac{1}{1+nx+n}$ et $w_n(x) = \cos(nx+n)$. Vérifions les hypothèses du théorème d'Abel pour la convergence uniforme.

   (a) Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n(x) \geq 0$ et la suite $\big(v_n(x)\big)_n$ est décroissante. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n(x) = 0$, donc la suite de fonctions $(v_n(x))$ converge simplement vers 0.

   $|v_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc la suite de fonctions $(v_n(x))$ converge uniformement vers 0.

   (b) Pour $x \in [0,1]$: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x+1}{2} \leq 1$ et $\sin\dfrac{1}{2} \leq \sin(\dfrac{x+1}{2}) \leq \sin 1$ car la fonction sin est croissante sur $[0,1]$.

   Donc $\forall x \in [0,1]$ on a $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} w_k(x)\right| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k(x+1))\right| \leq \dfrac{1}{\sin(\frac{x+1}{2})} \leq \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{2})} = M$

   Alors la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformement convergente sur $[0,1]$.
4. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\sin(x+n)}{x+n}$; $x \in \mathbb{R}_+, n \geq 1$
   On pose $f_n(x) = v_n(x)w_n(x)$ tel que $v_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ et $w_n(x) = (-1)^n \sin(x+n)$. Vérifions les hypothèses du théorème d'Abel pour la convergence uniforme.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n(x) \geq 0$ et la suite $\big(v_n(x)\big)_n$ est décroissante. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n(x) = 0$, donc la suite de fonctions $(v_n(x))$ converge simplement vers 0.

   $|v_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc la suite de fonctions $(v_n(x))$ converge uniformement vers 0.

(b) Montrons qu'il existe $M > 0$ tel que $\Big|\sum_{k=1}^{n} w_k(x)\Big| \leq M$.

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{n} w_k(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(x+k)\Big| \\
&= \Big|\mathcal{I}m\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{i(x+k)}\Big)\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{i(x+k)}\Big| \\
&= |e^{ix}|\Big|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{ik}\Big| \\
&= \Big| -e^i \frac{1-(-e^i)^n}{1+e^i}\Big| \\
&\leq \frac{2}{|1+e^i|} = M.
\end{aligned}$$

On peut calculer M explicitement :$M = \dfrac{2}{|1+e^i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2+2\cos 1}} = \dfrac{1}{|\cos\frac{1}{2}|}$.

Exercice 0.2

Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x^2)$

1. *Montrer qu'elle converge simplement dans* $[-1,1]$.
2. *Trouver la somme* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x^2)$. *Y-a-t-il convergence uniforme dans* $[-1,1]$ *?*
3. *Montrer que la série est uniformement convergente dans* $[-1,0]$ *mais n'est pas normalement convergente.*
4. *Montrer que la série converge normalement dans* $[0,a]$ *avec* $0 < a < 1$.

Corrigé :

1. Convergence simple :

   - $x = \pm 1$, $f_n(x) = 0 \Longrightarrow \sum f_n$ converge.
   - $x \in]-1,1[$, $\sum f_n$ est une série géométrique de raison x, donc elle converge puisque $|x| < 1$.

   Alors $\forall x \in [-1,1]$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.
2. On a

$$S(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = 1\,; \\ \dfrac{1-x^2}{1-x} = 1+x & si \;\; x \in [-1,1[. \end{cases}$$

   Les fonctions f_n sont continues sur $[-1,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais la somme $S(x)$ n'est pas continue en $x = 1$, donc la suite de fonction $\sum f_n$ ne converge pas uniformement sur $[-1,1]$.
3. Convergence uniforme dans [-1,0] :
   Soit $(S_n(x))_n$ la suite des sommes partielles de la série de fonction $\sum f_n$ telle que

$$S_n = (1-x^2)\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = (1+x)(1-x^{n+1})$$

Calculons $\sup_{x\in[-1,0]} \big|S_n(x) - S(x)\big|$.

$$\big|S_n(x) - S(x)\big| = \big|(1+x)(1-x^{n+1}) - (1+x)\big| = (1+x)|x|^{n+1}$$

On pose

$$\varphi_n(x) = (1+x)|x|^{n+1} = (-1)^{n+1}(1+x)x^{n+1} \quad (\text{car } |x| = -x)$$

le calcul de la dérivée de φ_n donne

$$\varphi_n'(x) = (-1)^{n+1}x^n\big((n+1) + (n+2)x\big)$$

$$\varphi_n'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{n+1}{n+2}$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{n+1}x^n \leq 0$

x	-1		$-\frac{n+1}{n+2}$		0
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$	0
φ_n	0	$\nearrow$	$\varphi_n\big(-\frac{n+1}{n+2}\big)$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in[-1,0]} \big|S_n(x) - S(x)\big| = \varphi_n\Big(-\frac{n+1}{n+2}\Big) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Alors la suite des sommes partielles $\big(S_n(x)\big)_n$ converge uniformément vers $S(x)$ dans $[-1,0]$, d'où la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ dans $[-1,0]$.

- <u>Convergence normale dans $[-1,0]$:</u>
  Calculons $\sup_{x\in[-1,0]} \big|f_n(x)\big| = \sup_{x\in[-1,0]} \big|x^n(1-x^2)\big| = \sup_{x\in[-1,0]} \big[(1-x^2)|x|^n\big]$.
  On pose

$$\psi_n(x) = (1-x^2)|x|^n = (-1)^n(1-x^2)x^n$$

le calcul de la dérivée de ψ_n donne

$$\psi_n'(x) = (-1)^n x^{n-1}\big(n - (n+2)x^2\big)$$

$$\psi_n'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{n}{n+2}}$$

x	-1		$-\sqrt{\frac{n}{n+2}}$		0
$\psi_n'(x)$		$+$	0	$-$	0
ψ_n	0	$\nearrow$	$\psi_n\big(-\sqrt{\frac{n}{n+2}}\big)$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in[-1,0]}|f_n(x)| = \psi\Big(-\sqrt{\frac{n}{n+2}}\Big) = \frac{2}{n+2}\Big(\frac{n}{n+2}\Big)^{\frac{n}{2}} \sim_\infty \frac{2}{en}$$

La série $\sum \dfrac{2}{en}$ diverge alors la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement dans $[-1,0]$.

4. Convergence normale dans $[0,a]$ avec $0<a<1$:
ψ_n est croissante sur $[0,a]$ alors $\sup\limits_{x\in[0,a]}|f_n(x)| = \psi_n(a) = (1-a^2)a^n = u_n$.
La série numérique $\sum u_n$ est une série géométrique convergente, alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement dans $[0,a]$.

Exercice 0.3

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2).$$

1. *Déterminer le domaine de convergence uniforme de la série $\sum f_n$.*
2. *On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)$.*

Corrigé :

1. Etudions la convergence uniforme :
   - Si $|x|<a$ avec $0<a<3$ on a $|f_n(x)| \leq (\frac{a}{3})^n = u_n$. $\sum u_n$ est une série géométrique convergente, alors la série $\sum f_n$ converge normalemnet donc uniformement sur $[-a,a]$ avec $0<a<3$.
   - Si $|x|\geq 3$, le terme général $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, alors la série $\sum f_n$ est divergente.
2. Pour tout $x\in[-a,a]$ avec $0<a<3$ et $n\in\mathbb{N}$, les fonction f_n sont continues et la série $\sum f_n$ converge uniformement donc sa somme est une fonction continue sur $[-a,a]$ avec $0<a<3$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{3^n}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 0.4

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2},\quad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}^*,$$

1. *Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformement sur $\mathbb{R}$.*
2. *On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

3. *Etudier la convergence normale de la série dérivée* $\sum f_n'$ *sur* $\mathbb{R}$ *puis sur* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.
4. *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *mais pas en* 0.

Corrigé :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{\pi}{2n^2} = u_n,$$
or $\sum u_n$ est une série de Riemann convergente, alors la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, par conséquent elle converge uniformement sur $\mathbb{R}$.
2. On a
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ est uniformement convergente sur $\mathbb{R}$.

   Alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f_n'(x) = \frac{1}{n(1 + n^2x^2)}.$$
On remarque que f_n' est paire sur $\mathbb{R}$, **étudions donc la convergence normale sur** $\mathbb{R}_+$.
On a $f_n'(0) = \dfrac{1}{n}$ et $\sum f_n'(0)$ diverge.
$f_n''(x) = \dfrac{-2nx}{(1 + n^2x^2)^2} < 0$ donc f_n' est décroissante sur $]0, +\infty[$, par conséquent
$$\sup_{x \in]0,+\infty[} \left|f_n'(x)\right| = f_n'(0) = \frac{1}{n}.$$
$\sum \dfrac{1}{n}$ diverge alors la série $\sum f_n'$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$ et par parité sur $\mathbb{R}$.

   ◦ <u>Convergence normale sur $[a, +\infty[$, $a > 0$:</u>
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq a$, on a
$$\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1}{n(1 + n^2a^2)} \sim \frac{1}{a^2n^3} = v_n.$$
   $\sum v_n$ est une série de Riemann convergente alors la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. <u>Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:</u>
On remarque que chaque fonction f_n est impaire alors f est aussi une fonction impaire. On a
   - $\sum f_n$ converge uniformement sur $\mathbb{R}$ donc simplement sur $\mathbb{R}$ et par suite sur $[a, +\infty[$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable avec $f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1 + n^2x^2)}$.
   - La série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformement sur $[a, +\infty[$

Par suite la fonction f est dérivable sur $[a, +\infty[$, où $a \geq 0$. Puisque a est arbitraire on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par imparité, elle l'est sur $\mathbb{R}^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$
Comme les fonctions f_n' sont positives et continue en 0, alors
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \longrightarrow 0^+} f_n'(x) = +\infty.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$, La fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 0.5

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définie par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

1. *Etudier la convergence simple de la série en précisant le domaine de convergence Δ.*
2. *La convergence est-elle uniforme dans Δ ?*
3. *Montrer que la série est uniformement convergente dans $[a, +\infty[$, $a > 0$.*
4. *Posons $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$. Calculer $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ avec $a < \alpha < \beta$.*

Corrigé :

1. Convergence simple :
   La série de fonctions $\sum f_n$ est une série à termes positifs. Appliquons le critère de D'Alembert
   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+1}{n} e^{-x} = e^{-x}$$
   - Si $x > 0$, la série $\sum f_n$ converge simplement.
   - Si $x < 0$, la série $\sum f_n$ diverge.
   - Si $x = 0$, Le thèorème de D'Alembert ne permet pas de conclure. Dans ce cas
   $$f_n(x) = n \nrightarrow 0 \;\text{ quand }\; n \longrightarrow +\infty.$$
   Alors $\sum f_n$ diverge. On conclut que $\sum f_n$ converge simplement dans $\Delta = \mathbb{R}_+^*$
2. Convergence uniforme dans Δ :
   On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$ alors $f_n \xrightarrow{CS} 0$.
   On pose $x_n = \dfrac{1}{n}$, alors
   $$f_n(x_n) = ne^{-1} \nrightarrow 0 \;\text{ quand }\; n \longrightarrow +\infty,$$
   par conséquent la suite de fonction $(f_n(x))$ ne converge pas uniformement vers 0 dans Δ. Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformement dans Δ.
3. Convergence uniforme dans $[a, +\infty[$:
   Etudions la convergence normale de $\sum f_n$ dans $[a, +\infty[$, en calculant $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} (f_n(x))$.
   On a $f_n'(x) = -n^2e^{-nx}$. La dérivée est négative, alors f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ et
   $$\sup_{x\in[a,+\infty[} (f_n(x)) = f_n(a) = ne^{-na}.$$

x	a	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	
f_n	$f_n(a)$ $\searrow$	0

   $\sum f_n(a)$ est une série numérique convergente (critère de D'Alembert), alors $\sum f_n$ converge normalement donc uniformement dans $[a, +\infty[$.

4. Puisque $\sum f_n$ converge uniformément dans $[a,+\infty[$ alors on a

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\alpha^\beta ne^{-nx}\,dx\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\big[-e^{-nx}\big]_\alpha^\beta\\
&= \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n\alpha}\Big)-\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n\beta}\Big)\\
&= \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{\alpha}}-\frac{e^{-\beta}}{1-e^{\beta}}.
\end{aligned}$$

Exercice 0.6

Soit la série de fonctions de terme général

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{1+nx},\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad n\in\mathbb{N}.$$

1. *Etudier la convergence simple et préciser le domaine de convergence Δ.*
2. *La convergence est-elle uniforme dans Δ.*
3. *Etudier la convergence uniforme dans $[a,+\infty[$, $a>0$.*
4. *On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$.*
   a. *Justifier que f est continue sur $]0,+\infty[$.*
   b. *Calculer $\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)$.*
   c. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $]0,+\infty[$.*

Corrigé :

1. Convergence simple :

– Si $x=0$: $f_n(0)=(-1)^n$. La série $\sum f_n$ diverge.
– Si $x>0$: $\sum f_n$ est une série alternée convergente.

On conclut que $\sum f_n$ converge simplement pour tout $x\in\Delta=]0,+\infty[$.

1. Convergence uniforme dans Δ :

On a $\lim_{n\longrightarrow+\infty}f_n(x)=0$, donc $f_n(x)\xrightarrow{CS}0$.

On pose $x_n=\frac{1}{n}$, on a alors

$$f_n(x_n)=\frac{(-1)^n}{2}\nrightarrow 0\ \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

D'où $\sum f_n$ ne converge pas uniformément dans Δ.

3. Convergence uniforme dans $[a,+\infty[$:

La série $\sum f_n$ converge uniformément dans $[a,+\infty[$ car la suite des restes $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_n(x)$ converge uniformément vers 0 dans $[a,+\infty[$, en effet

$$|R_n|\le|f_{n+1}(x)|=\frac{1}{1+nx}\le\frac{1}{na}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}0$$

(On peut appliquer le théorème d'Abel pour montrer la convergence uniforme dans $[a,+\infty[$).

4. $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a. La série $\sum f_n$ converge uniformement dans $[a,+\infty[$. Comme les fonctions f_n sont continues sur $[a,+\infty[$, il en est de même pour f. Puisque a est arbitraire, f est continue dans $]0,+\infty[$.

b. Puisque la convergence est uniforme dans $[a,+\infty[$, on peut permuter les limites.

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\longrightarrow+\infty} f_n(x)\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} f_0(x)+\lim_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x)+\ldots+\lim_{x\longrightarrow+\infty} f_n(x)+\ldots\\ &= 1\end{aligned}$$

c. La série $\sum f_n$ converge simplement dans $]0,+\infty[$, chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ dans ce même intervalle, avec

$$f_n'(x)=(-1)^{n+1}\frac{n}{(1+nx)^2}.$$

La série $\sum f_n'$ converge uniformement dans $[a,+\infty[$ car la suite des restes $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformement vers 0 dans $[a,+\infty[$. On conclut donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $[a,+\infty[$. Comme a est arbitraire, f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $]0,+\infty[$.