E.S.I. 2CPI ALG3 Contrôle intermédiaire 20 novembre 2017 **Durée : 1h10**

N.B :

Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (6 pts)

Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1- Calculer le déterminant de la matrice A_α. **(1 pt)**

2- En déduire pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?. **(0,25 pt)**

3- On pose $\alpha = 2$ et considérons que la matrice A_2 est la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base canonique B.

i- Déterminer, sans calculer f, une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. **(0,5 pt + 0,5 pt)**

ii- Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$C = (v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (5, -1, -1), v_3 = (0, 1, 1)).$$

Vérifier en utilisant les déterminants que C est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.75 pt)**

iii- Soit P la matrice de passage de B vers C. Déterminer P puis calculer en utilisant les déterminants son inverse. **(0,5 pt + 1,5 pt)**

iv- En déduire la matrice de f relativement à la base C. **(1 pt)**

Exercice 2 : (4 pts)

Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\begin{cases} 3x & & + 2z & & = 0 \\ & 3y & + z & + 3t & = 0 \\ x & + y & + z & + t & = a \\ 2x & - y & + z & - t & = b \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

1- Déterminer le rang de (S) puis justifier pourquoi il n'est pas de Cramer. **(0,75 pt + 0,25 pt)**

2- Déterminer une matrice principale, les inconnues principales et les équations principales de (S). **(0,25 pt + 0,25 pt + 0,25 pt)**

3- Préciser les déterminants bordants du déterminant pricipal. **(0,5 pt)**

4- En déduire, en utilisant le théorème de Rouché-Fontené, une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que (S) soit compatible. **(0.75 pt)**

5- Résoudre (S) dans la cas où il est compatible. **(1 pt)**

Bon courage