Exercice 1 (6,25 points) : Posons, $f(t,x) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}e^{-2xt}$, $f \in R_{loc}(]0,+\infty[)$ selon t.

1) $\boxed{1 \textbf{ pt}}$ **La continuité sur** $[0,+\infty[$: F est une fonction donnée par une intégrale paramètrée impropre qui pose deux problèmes en 0 et au $v(+\infty)$. On a :

a) F est continue sur $\Delta =]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car c'est une composée, produit et rapport de fonctions continues.

b) Etudions la convergence dominée de $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$. Pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ on a

$$|f(t,x)| \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} = g(t),$$

avec g est continue sur $]0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge car :

- $\int_0^1 g(t)dt$ converge car au $v(0)$, $g(t) \sim 1$
- $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge car $|g(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ converge

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ vérifie la condition de la convergence dominée sur $[0,+\infty[$.

Conclusion : De (a) et (b), on déduit, grâce au théorème de conservation de la continuité, que F est continue sur $[0,+\infty[$.

2) $\boxed{1{,}75 \textbf{ pt}}$ F **est dérivable sur** $]0,+\infty[$:

a) La dérivée partielle de f par rapport à "x" existe et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -2\frac{\sin^2(t)}{t}e^{-2xt},$$

donc $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue sur Δ (composée, produit et rapport de fonctions continues), on peut aussi utiliser que f est C^1.

b) Comme F est continue sur $[0,+\infty[$, donc $\exists x_0 \in]0,+\infty[$ tel que $\int_0^{+\infty} f(t,x_0)dt$ bien définie.

c) Etudions la convergence dominée de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$. Pour tout $(t,x) \in [A,+\infty[\times]0,+\infty[$ (avec $A > 0$), ona (puisque $|\sin(t)| \leq t$)

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = 2\frac{\sin^2(t)}{t}e^{-2xt} \leq 2te^{-2At} \doteq h(t)$$

et $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge, c'est une intégrale de reférence (ou d'après la régle de l'ordre vu que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(te^{-2At}) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^3e^{-2At} = 0$).

Conclusion : De (a), (b) et (c), on déduit, grâce au théorème de conservation de la dérivabilité, que F est dérivable sur tout $[A,+\infty[\subset]0,+\infty[$. On en déduit ainsi, que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

3) $\boxed{1 \text{ pt}}$ F **est deux fois dérivable sur** $]0,+\infty[$:

a) La deuxième dérivée partielle de f par rapport à "x" existe et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 4\sin^2(t)e^{-2xt},$$

donc $x \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ est continue sur Δ (composée et produit de fonctions continues).

b) On a $F'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

c) Etudions la convergence dominée de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt$.

Pour tout $(t,x) \in [A,+\infty[\times]0,+\infty[$ (avec $A > 0$), on a (puisque $|\sin(t)| \leq 1$)

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| = 4\sin^2(t)e^{-2xt} \leq 4e^{-2At} \doteq k(t),$$

et $\int_0^{+\infty} k(t)dt$ converge (intégrale impropre de référence)

Conclusion : De (a), (b) et (c), on déduit, grâce au théorème de conservation de la dérivabilité, que F' est dérivable sur tout $[A,+\infty[\subset]0,+\infty[$. On en déduit ainsi, que F' est dérivable sur $]0,+\infty[$, ce qui implique que F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$

4) $\boxed{0,75 \text{ pt}}$ **Calcul de** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x)$: On a pour $x > 0$

a) puisque $0\leq\sin^2(t) \leq t^2$

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}e^{-2xt}\right|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2xt}dt = \left[\frac{-e^{-2xt}}{2x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{2x} \overset{qd\ x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0.$

b) puisque $0\leq\sin^2(t) \leq t^2$

$$|F'(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|2\frac{\sin^2(t)}{t}e^{-2xt}\right|dt \leq 2\int_0^{+\infty} te^{-2xt}dt$$

$$\overset{IPP}{=} 2\left[\frac{-te^{-2xt}}{2x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-2xt}dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-2xt}dt = \frac{1}{2x^2} \overset{qd\ x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0.$$

5) $\boxed{1,75 \text{ pt}}$ **Détermination de $F'(x)$ pour $x > 0$:** Puisque $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, on a

$$F''(x) = 4\int_0^{+\infty} \sin^2(t)e^{-2xt}dt = 2\int_0^{+\infty}(1-\cos(2t))e^{-2xt}dt$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-2xt}dt - 2\int_0^{+\infty}\cos(2t)e^{-2xt}dt$$

Mais,

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2xt}dt = \frac{1}{2x}$,
- $\displaystyle\cos(2t)e^{-2xt}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(t))(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

ainsi,

$$F''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Donc,

$$F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c^{te} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + c^{te}$$

En utilisant le fait $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$, le passage à la limite quand x vers $+\infty$ dans l'expression de F', donne $c^{te} = 0$. Donc,

$$F'(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right).$$

Exercice 2 (2,75 points): On pose $Y(x) = \mathcal{L}(y)(x)$ sachant que $\mathcal{L}(y')(x) = xY - 1$, $\boxed{0,25 \text{ pt}}$ donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'+y)(x) &= \mathcal{L}(e^t)(x)\\ &\Leftrightarrow xY - 1 + Y = \frac{1}{x-1},\ \forall x > 1,\\ &\Leftrightarrow (x+1)Y = 1 + \frac{1}{x-1}\\ &\Leftrightarrow Y = \frac{x}{(x-1)(x+1)} \quad \boxed{1 \text{ pt}}\end{aligned}$$

$\boxed{0,75 \text{ pt}}$ Utilisons le théorème de Heaviside (ou bien la décomposition), posons $P(x) = x$ et $Q(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$, $Q'(x) = 2x$

on a bien $d°P < d°Q$ de plus Q admet deux racines réelles distinctes ,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right] = \frac{P(1)}{Q'(1)}e^t + \frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \quad \boxed{0,75 \text{ pt}},$$

Exercice 3 (**5 points**) :

1) $\boxed{1,5\ \textbf{pt}}$ On a $f_\beta(t) = e^{-\beta|t|}$, donc $f_\beta \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, en effet,

$\rightsquigarrow$ f_β est continue sur $\mathbb{R}$ (car composée de fonctions continues).

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\beta(t)|dt \overset{|f|\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}dt$ qui est convergente (intégrale expo, ref).

Donc $\mathcal{F}(f_\beta)$ existe.
De plus,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_\beta)(x) &\doteq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f_\beta(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.e^{-\beta|t|}dt \overset{f\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} \cos(xt).e^{-\beta t}dt \\ &= 2.\mathcal{L}(\cos(xt))(\beta) = \frac{2\beta}{x^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

2) **a-** $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$ Le problème devient

$$\begin{cases}\text{Trouver } y \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ y = f_1 + \alpha y * f_1.\end{cases}$$

b- $\boxed{1,75\ \textbf{pt}}$ Si y est solution de (1), alors $y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Puisque par hypothèse et $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (question 1) alors l'application de la TF à notre équation, donne grâce aux propriétés de la TF et du produit de convolution

$$\mathcal{F}(y)(x) = \mathcal{F}(f_1)(x) + \alpha\mathcal{F}(y)(x).\mathcal{F}(f_1)(x),$$

on tire

$$(\mathcal{F}(y)(x))[1-\alpha\mathcal{F}(f_1)(x)] = \mathcal{F}(f_1)(x) \Leftrightarrow \mathcal{F}(y)(x)\left[1-\alpha\frac{2}{1+x^2}\right] = \frac{2}{1+x^2},,$$

enfin

$$\mathcal{F}(y)(x) = \frac{2}{x^2-2\alpha+1},$$

<u>Cas 1 :</u> Pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x^2-2\alpha+1}$ n'est pas continue (elle n'est pas définie en $\pm\sqrt{2\alpha-1}$), ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

<u>Cas 2 :</u>Pour $\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$, $\mathcal{F}(y)(x) = \dfrac{2}{x^2+(\sqrt{1-2\alpha})^2}$.

$\boxed{1,5\ \textbf{pt}}$Mais, d'après la question 1,

$$\mathcal{F}(f_\beta)(x) = \frac{2\beta}{x^2+\beta^2} \Leftrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{\beta}f_\beta\right)(x) = \frac{2}{x^2+\beta^2},$$

en prenant $\beta = \sqrt{1-2\alpha}$,il vient

$$\mathcal{F}(y)(x) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1-2\alpha}f_\beta\right)(x)$$

Puisque $y \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f_\beta, \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ admettant une dérivée à droite et à gauche en chaque $t \in \mathbb{R}$, le théorème d'inversion de Fourier implique

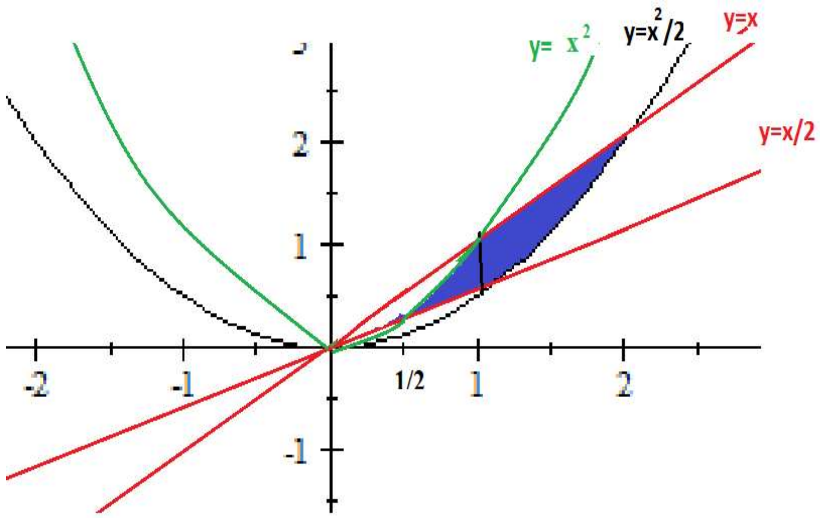
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}e^{-\sqrt{1-2\alpha}\,|t|}$$

Exercice 4 (**6 points**) :

1) $\boxed{0,75\ \textbf{pt}}$ (Détails :0,25 pour les paraboles, 0,25 pour les droites et 0,25 pour le domaine bien délimité

Représentation graphique du domaine D : On a :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{1}{2}x < y < x \ \text{ et } \ \frac{x^2}{2} < y < x^2\right\}.$$



2) **a**- $\boxed{0,75\ \textbf{pt}}$ Détermination de Δ : On a

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x}, \\ v = \frac{x^2}{y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ux, \\ v = \frac{x}{u}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = uv, \\ y = u^2v, \end{cases}$$

Donc,

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} y < x < 2y, \\ y < x^2 < 2y, \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} u < 1 < 2u, \\ 1 < v < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < u < 1, \\ 1 < v < 2, \end{cases}$$

Donc, $\Delta =]\frac{1}{2}, 1[\times]1,2[$.

b- $\boxed{1,75\ \textbf{pt}}$ Calcul de $Air(D)$ par le changement de variables : Posons

$$f(x,y) = 1 \quad \text{et} \quad \phi(u,v) = (uv, u^2v)$$

Alors, ϕ est un $\mathcal{C}^1$ –difféomorphisme entre Δ et D avec

$$J_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique que $\det J_\phi(u,v) = -u^2v$, ainsi il vient

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_\Delta f(\phi(u,v))|\det J_\phi(u,v)|dudv \\ &= \iint_{[\frac{1}{2},1]\times[1,2]} u^2v\ dudv = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^2\ du\right)\left(\int_1^2 v\ dv\right) \\ &= \left[\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

2) $\boxed{2,75 \text{ **pt**}}$ Recalcul de $Air(D)$ par Fubini : On a $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$\begin{cases} D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{2} < x < 1 \text{ et } \frac{x}{2} < y < x^2\right\}, \\ D_2 = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 < x < 2 \text{ et } \frac{x^2}{2} < y < x. \end{cases}$$

Donc (puisque $Air(D_1 \cup D_2) = 0$),

$$Air(D) = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy$$

Mais en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} dxdy &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x^2} dy\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{48}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dxdy &= \int_{1}^{2}\left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} dy\right)dx = \int_{1}^{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{1}^{2} = \left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\iint_D x\, dxdy = \frac{5}{48} + \frac{1}{3} = \frac{7}{16}.$$