Durée 1heure30

Tout document interdit

Exercice 1 (2, 2, 2)

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

1. Tout diviseur d'un nombre est inférieur ou égal à ce nombre.
2. Si un nombre est égal à sa racine carrée, ce nombre est égal à 1.
3. Celui qui a la meilleure note est le seul accepté.

Exercice 2 (9)

Vérifier, à l'aide d'un arbre sémantique, la validité de la proposition suivante :

$(\forall y Q(y) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge R(x)),\ \forall x\ \exists y(P(x) \rightarrow P(y)), \forall y(\exists x \neg P(x) \rightarrow Q(y)) \models (\forall x \forall y\ (P(x) \vee \neg R(y)) \wedge \exists z P(z))$

Exercice 3 (3, 2)

Soient l'ensemble de clauses S tel que :

S : $\{P(a) \vee \neg Q(x),\ \neg P(x) \vee \neg Q(y),\ \neg P(x) \vee Q(b)\}$

et J une interprétation des clauses de S définie comme suit :

D_J : {@, \$}, $J(a)$ = @, $J(b)$ = \$ et :

d	*J(P)(d)*	*J(Q)(d)*
@	F	F
\$	F	F

1. Donner une interprétation de Herbrand (J_h) correspondant à J.
2. Vérifier que J_h satisfait S .

SECTION A

Exercice 1 (2, 2, 2)

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

4. Tout diviseur d'un nombre est inférieur ou égal à ce nombre.
5. Si un nombre est égal à sa racine carrée, ce nombre est égal à 1.
6. Celui qui a la meilleure note est le seul accepté.

Exercice 2 (6.5, 1.5)

1. Donner l'ensemble S des clauses issu de l'ensemble ci-dessous :

Γ : $\{(\forall y Q(y) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge R(x)),\ \forall x\ \exists y(P(x) \rightarrow P(y)), \forall y(\exists x \neg P(x) \rightarrow Q(y)),\ \forall x \forall y(P(x) \vee \neg R(y)) \rightarrow \forall z \neg P(z)\}$

2. Donner un ensemble B contenant une instance de base de chacune des clauses de S.

Exercice 2 (3, 3)

1. Vérifier la validité de la formule β_1 ci-dessous :
$\beta_1 : \forall x\ (S(x) \wedge P(x)) \rightarrow (\forall x\ S(x)) \wedge \forall x\ P(x)$

2. Vérifier, en utilisant la forme de Skolem, la validité de la formule β_2 ci-dessous :
$\beta_2 : \forall x\ (S(x) \vee P(x)) \rightarrow (\forall x\ S(x)) \vee \forall x\ P(x)$

CORRECTION

Exercice 1 (2, 3)

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

1. Tout diviseur d'un nombre est inférieur ou égal à ce nombre.

$\forall x \forall y(\mathrm{D}(x, y) \to \mathrm{I}(x, y) \vee \mathrm{E}(x, y))$

2. Si un nombre est égal à sa racine carrée, ce nombre est égal à 1.

$\forall x(\mathrm{E}(x, r(x)) \to \mathrm{E}(x, a))$

3. Seul le meilleur est accepté.

$\forall x \forall y(\mathrm{D}(x,y) \wedge \mathrm{M}(x,y) \to \mathrm{A}(x))$

Exercice 2

Vérifier, à l'aide d'un arbre sémantique, la validité de la proposition suivante :

$(\forall x \mathrm{Q}(x) \to \forall x(\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{R}(x)),\ \forall x\ \exists y(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{P}(y)), \forall y(\exists x \neg \mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(y)) \models (\forall x \forall y\ (\mathrm{P}(x) \vee \neg \mathrm{R}(y)) \wedge \exists z \mathrm{P}(z))$

SSI

$\{(\forall y \mathrm{Q}(y) \to \forall x(\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{R}(x)),\ \forall x\ \exists y(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{P}(y)), \forall y(\exists x \neg \mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(y)),\ \exists x \exists y(\neg \mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{R}(y)) \vee \forall z \neg \mathrm{P}(z))\}$

non satisfiable

1 . Renommer les variables : (0.5)

$\{\forall y(\forall x \mathrm{Q}(x) \to (\mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{R}(y)),\ \forall u\ \exists v(\mathrm{P}(u) \to \mathrm{P}(v)), \forall z(\exists w \neg \mathrm{P}(w) \to \mathrm{Q}(z)), \exists s \exists t(\neg \mathrm{P}(s) \wedge \mathrm{R}(t)) \vee \forall p \neg \mathrm{P}(p))\}$

2. Forme prenexe des formules de l'ensemble : (2pts)

$\{\forall y \exists x(\mathrm{Q}(x) \to (\mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{R}(y)),\ \forall u\ \exists v(\mathrm{P}(u) \to \mathrm{P}(v)),\ \forall z \forall w(\neg \mathrm{P}(w) \to \mathrm{Q}(z)), \exists s \exists t \forall p((\neg \mathrm{P}(s) \wedge \mathrm{R}(t)) \vee \neg \mathrm{P}(p))\}$

3. Forme de Skolem (2pts)

$\{\forall y(\mathrm{Q}(f(y)) \to (\mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{R}(y)),\ \forall u(\mathrm{P}(u) \to \mathrm{P}(g(u))),\ \forall z \forall w(\neg \mathrm{P}(w) \to \mathrm{Q}(z)), \forall p((\neg \mathrm{P}(a) \wedge \mathrm{R}(b)) \vee \neg \mathrm{P}(p))\}$

4. Forme clausale (2pts)

$\mathrm{Q}(f(y)) \to (\mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{R}(y) \equiv (\neg \mathrm{Q}(f(y)) \vee \mathrm{P}(y)) \wedge (\neg \mathrm{Q}(f(y)) \vee \mathrm{R}(y))$

$\mathrm{P}(u) \to \mathrm{P}(g(u)) \equiv \neg \mathrm{P}(u) \vee \mathrm{P}(g(u))$

$\neg \mathrm{P}(w) \to \mathrm{Q}(z) \equiv \mathrm{P}(w) \vee \mathrm{Q}(z)$

$(\neg \mathrm{P}(a) \wedge \mathrm{R}(b)) \vee \neg \mathrm{P}(p)) \equiv (\neg \mathrm{P}(a) \vee \neg \mathrm{P}(p)) \wedge (\mathrm{R}(b) \vee \neg \mathrm{P}(p))$

S : $\{ \neg \mathrm{Q}(g(y)) \vee \mathrm{P}(y),\ \neg \mathrm{Q}(g(y)) \vee \mathrm{R}(y),\ \neg \mathrm{P}(u) \vee \mathrm{P}(f(u)),\ \mathrm{P}(w) \vee \mathrm{Q}(z),\ \neg \mathrm{P}(a) \vee \neg \mathrm{P}(p),\ \mathrm{R}(b) \vee \neg \mathrm{P}(p) \}$

5. Arbre sémantique (2.5pts)