**N.B.**
**1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.**
**2- Les réponses doivent être justifiées.**
**3- Le barème est approximatif.**
**Solution de l'exercice 1 : (4 pts)**

Soit la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

**1-** Calculer le polynôme caractéristique de $A$.

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 1 \\ 0 & -3 & -X \end{vmatrix}$$

On remplace la 1ère colonne par la somme de la colonne1 et la colonne3, on obtient :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ -X & -3 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 1 & -3 & -X \end{vmatrix}$$

On remplace la ligne3 par ligne 3 - ligne1, on obtient :

$$P_A(X) = -X \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & -4 & -X \end{vmatrix} = -X \left(X^2+4\right). \quad \textbf{(0,5pt)}$$

**2-** Dire pourquoi $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
$A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $A$ n'admet pas 3 valeurs propres sur $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**
**3-** Dire pourquoi $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
$A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car $A$ admet 3 valeurs propres simples, il s'agit de $0, 2i$ et $-2i$. **(0,5pt)**
**4-** On note les valeurs propres de $A$ sur $\mathbb{C}$ par : $\alpha, \beta$ et $c$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de partie imaginaire positive.
On pose : $\alpha = 0$, $\beta = 2i$ et $\delta = -2i$.

**a-** Déterminer un vecteur propre non nul $v$ de $A$ associé à la valeur propre $\beta$.

Pour déterminer un vecteur propre non nul $v$ de $A$ associé à la valeur propre $\beta$, on échelonne la matrice $A - 2iI_3$ :

$$A - 2iI_3 = \begin{vmatrix} -2i & 1 & 0 \\ -1 & -2i & 1 \\ 0 & -3 & -2i \end{vmatrix}$$, on remarque que : colonne1 $+ 2i$colonne2 $-$ 3colonne3 $= 0$,

d'où, avec les notations usuelles du cours, l'espace propore $E_{2i} = \langle v = (1, 2i, -3) \rangle$. **(1pt)**

**b-** En déduire un vecteur propre non nul $w$ de $A$ associé à la valeur propre $\delta$.**(Indication:** on admettra que Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et que $v = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de $A$ de vecteur propre associé $\overline{v} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{C}^3$).

On a : $w = (1, -2i, -3)$ **(0,5pt).**

**c-** Déterminer une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $A'$ telles que : $A' = P^{-1}.A.P$.

On a de ce qui précède :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2i & -2i & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0,5pt)} + \textbf{(0,5pt).}$$

**Solution de l'exercice 2 : (5 pts)**

Soit $(S)$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax - y + z = \beta \\ 2x + y - z = -\lambda \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

**1-** Calculer le déterminant de la matrice du système $(S)$ (on note la matrice du système par $A$).

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

on remplace la colonne3 par la somme de la colonne3 et la colonne2, on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(\alpha + 2), \qquad \textbf{(0,5pt).}$$

**2-** Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta$ et $\lambda$ le système $(S)$ est-il de Cramer ? Dans ce cas Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

Le système $(S)$ est de Cramer si et seulement si $\det A \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq -2$ ( $\beta$ et $\lambda$ sont quelconques) **(0,25pt).**

Dans ce cas, en utilisant les formules de Cramer, on obtient :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \beta & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{3(\beta - \lambda)}{3(\alpha + 2)} = \frac{\beta - \lambda}{\alpha + 2}, \qquad \textbf{(0,5pt),}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\alpha - 3\beta + \lambda - \alpha\lambda + 2}{3(\alpha + 2)}, \qquad \textbf{(0,5pt),}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -1 & \beta \\ 2 & 1 & -\lambda \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\alpha + 3\beta + \lambda + 2\alpha\lambda + 2}{3(\alpha + 2)}, \qquad \textbf{(0,5pt).}$$

Enfin la solution est : $\left(x=\dfrac{\beta-\lambda}{\alpha+2}, y=\dfrac{\alpha-3\beta+\lambda-\alpha\lambda+2}{3(\alpha+2)}, z=\dfrac{\alpha+3\beta+\lambda+2\alpha\lambda+2}{3(\alpha+2)}\right)$ **(0,25pt).**

**3-** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(S)$, suivant les valeurs de $\alpha, \beta$ et $\lambda$ dans le cas où $(S)$ n'est pas de Cramer.

Dans ce cas $\alpha=-2$ et le système à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} -2x - y + z = \beta \\ 2x + y - z = -\lambda \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{où } \beta \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

**1er cas** : Si $\beta \neq \lambda$, le système est incompatible, les deux premières équations du système sont contradictoires. **(0,5pt)**

**2ème cas** : Si $\beta = \lambda$, le système à étudier est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} -2x - y + z = \beta \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{où } \beta \in \mathbb{R},$$

Ce dernier système est un système de Cramer, d'inconnues principales $x$ et $y$, qu'on peut écrire :

$$\begin{cases} -2x - y = \beta - z \\ x + 2y = 1 - z \end{cases} \qquad \text{où } \beta \in \mathbb{R},$$

car le déterminant de ce système est égal à $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ **(0,25pt)**

Après utilisation des formules de Cramer, on obtient :

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} \beta - z & -1 \\ 1-z & 2 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{2\beta-3z+1}{3}, \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & \beta - z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{3} = -\frac{3z-\beta-2}{3}, \qquad \textbf{(0,5pt),}$$

Enfin l'ensemble des solutions est : $\left\{\left(x=-\dfrac{2\beta-3z+1}{3}, y=-\dfrac{3z-\beta-2}{3}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$ **(0,25pt)**

**Solution de l'exercice 3 : (8 pts)**

Soit la matrice : $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = M_B(f)$ où $B$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1-** Vérifier que $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de $A$, on obtient :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)^2(1-X) \qquad \textbf{(0,5pt).}$$

La matrice $A$ est diagonalisable ssi le rang de la matrice $A-2I$ est égal à 1**.** On a :

$$rg\,(A-2I)=rg\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=2,$$

d'où la matrice $A$ n'est pas diagonalosable. **(0,5pt)**

**2-** Soit $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les deux valeurs propres réelles distinctes de $A$ telles que $\lambda_1<\lambda_2$.

On pose : $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=2$.

**a-** Déterminer $v_1$ et $v_2$ les vecteurs propres respectifs de $\lambda_1$ et $\lambda_2$.

Après calcul des vecteurs propres respectifs de $\lambda_1$ et $\lambda_2$, on trouve : $v_1=(0,-1,1)$ et $v_2=(0,1,0)$ **(0,5pt)** $+$ **(0,5pt)**

**b-** Déterminer un vecteur $v_3=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant : $A.{}^tv_3={}^tv_2+2.{}^tv_3$.

Il s'agit de chercher un vecteur $v_3=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant : $A.{}^tv_3-2.{}^tv_3.={}^tv_2$, ce qui veut dire $(A-2I)\,.{}^tv_3={}^tv_2$, ainsi :

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

On trouve : $v_3=(1,y,1)$, avec $y$ quelconque dans $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**

**c-** Vérifier que la famille de vecteurs $C=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On prend $v_3=(1,0,1)$, puis on vérifie que la famille $C=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-1\neq0,\qquad \textbf{(0,5pt)}$$

**d-** On désigne par $P$ la matrice de passage de $B$ vers $C$. Déterminer la matrice $A^{'}=P^{-1}.A.P$

On a :

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad \textbf{(0,25pt)}$$

Le calcul de l'inverse de $P$, par exemple en exprimant les vecteurs de la base canonique dans la base $C$, donne :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad \textbf{(0,75pt)}$$

D'où :

$$A^{'}=P^{-1}.A.P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad \textbf{(0,5pt)}$$

**e-** Montrer que $A^{'}$ s'écrit comme somme de deux matrices dont l'une est diagonale que l'on note par $D$ et l'autre est nilpotente que l'on note par $N$.

(On rappelle qu'une matrice $N$ carrée est dite nilpotente s'il existe un entier naturel non nul $k$ tel que $N^k = 0$).

On peut écrire :

$$A^{'} = D + N, \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On vérifie que $N^2 = 0$, ce qui veut dire que la matrice $N$ est nilpotente. **(0,25pt pour $D$)** et **(0,75pt pour $N$)**

**f-** Utiliser le binôme de Newton pour déterminer $\left(A^{'}\right)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (vérifier d'abord que l'on peut utiliser le binôme de Newton).*

On commence par vérifier que les deux matrices $D$ et $N$ commutent, en effet :

$$\begin{aligned} D.N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\ N.D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0,5pt)} \end{aligned}$$

Puis on utilise le binôme de Newton :

$$\left(A^{'}\right)^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k N^k D^{n-k} = C_n^0 N^0 D^n + C_n^1 N^1 D^{n-1} + \sum_{k=2}^{k=n} C_n^k N^k D^{n-k}, \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Le terme $\sum_{k=2}^{k=n} C_n^k N^k D^{n-k} = 0$ puisque $N^k = 0$ pour tout entier naturel $k \geq 2$, ainsi :

$$\left(A^{'}\right)^n = D^n + nD^{n-1}.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

**g-** En déduire $A^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On a, d'après la question d/, $A^{'} = P^{-1}.A.P$, donc :

$$\begin{aligned} A^n &= P\left(A^{'}\right)^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^{n-1}n - 2^n + 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

**h-** Soient les suites récurrentes réelles $(u_n)$ $(w_n)$ et $(z_n)$ définies par $u_0 = 1$, $w_0 = 1$, $z_0 = -1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n \\ w_{n+1} = 2w_n + z_n \\ z_{n+1} = u_n + z_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déduire de ce qui précède les termes généraux de $(u_n)$, $(w_n)$ et $(z_n)$.

On remarque d'abord l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ w_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

puis on montre par récurrence que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ w \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1pt)}$$

En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ w \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^{n-1}n - 2^n + 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n-1}n - 2^n + 2 \\ 2^n - 2 \end{pmatrix} \textbf{(0,5pt)}$$

Enfin, on a : $u_n = 2^n$, $w_n = 2^{n-1}n - 2^n + 2$ et $z_n = 2^n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **(0,5pt)**

**Solution de l'exercice 4 : (3 pts)** Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que son polynôme caractéristique est égal à : $P_A(X) = (1 - X)(\alpha - X)(\beta - X)$ où $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

**1-** Donner une condition suffisante sur $\alpha$ et $\beta$ pour que $A$ soit diagonalisable.

Si $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ et $\alpha \neq \beta$ alors la matrice $A$ est diagonalisable. **(0,5pt)**

**2-** Soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = M_B(f)$ où $B$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que : $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ et que les sous-espaces propres de $f$, respectivement de $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ sont : $E_1 = \langle v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1) \rangle$ et $E_{-1} = \langle v_3 = (0,0,1) \rangle$.

Déterminer la matrice $A$.

D'après les hypothèses, la matrice $A$ est diagonalisable et elle est semblable à la matrice diagonale : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **(0,5pt)**

La matrice inversible $P$ vérifiant : $A' = P^{-1}.A.P$ est la matrice de passage de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres $(v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1))$ de $A$, ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Ainsi : $A = P.A'P^{-1}$, avec :

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0,75pt)}$$

et $A = P.A'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **(0,75pt)**