Durée 2 heures

Tout document interdit

Partie I (6, 2, 3, 3)

1. Vérifier la consistance de l'ensemble de phrases suivant :

   {l'ami de mon ami est mon ami.
   Amokrane est mon ami.
   Amokrane est l'ami d'Arezki.
   Arezki n'est pas mon ami.}

2. Vérifier la validité de la proposition suivante ?

   $P(x) \to Q(x,y), P(x) \models Q(x,y) \Rightarrow P(x) \to Q(x,y), P(x) \models \forall x\, Q(x,y)$.

3. Les propositions suivantes sont-elles valides ?

   $P(x) \to Q(x), P(x) \models \exists y\, Q(y)$
   $P(x) \to Q(x), P(x) \models \exists y\, Q(f(y))$

4. Si oui, montrer les relations suivantes sans utiliser les propriétés de complétude et de consistance :

   $P(x) \to Q(x), P(x) \vdash \exists y\, Q(y)$
   $P(x) \to Q(x), P(x) \vdash \exists y\, Q(f(y))$

Partie II
(2, 2, 2)

1. Construire, à l'aide de Machines de Turing élémentaires (vues en cours), la machine de Turing T_P qui calcule la suite : $y + (y-1) + (y-2) + \ldots + 1 + 0 \quad (y \geq 0)$
2. Montrer que l'ensemble des diviseurs d'un nombre entier est récursif.
3. Montrer que la fonction qui renvoie le nombre de diviseurs d'un nombre est récursive.

N. B. Remettre, au plus, une seule double feuille et une seule intercalaire.

Corrigé log 77
Rattrapage 2001/2002.

Partie I

1) Traduction des phrase.

D = domaine des être humains.

$v(x)$ = Amokrane, $v(y)$ = Arezki, $I(\acute{a})$ = moi (cste :)

(ou bien, on aurait pu poser $I(z)$ = moi) ← non cste

IA : "... est l'ami de ..."

- L'ami de mon ami est mon ami :

  $\forall x \forall y \ (A(x,a) \land A(y,x) \longrightarrow A(y,a))$: α_1

- Amokrane est mon ami : $A(x,a)$.
- Amokrane est l'ami d'Arezki :

  comme l'amitié est une relation symétrique (par définition), cette phrase à le m̂ sens que Arezki est l'ami d'Amokrane :

  $A(y,x)$

- Arezki n'est pas mon ami : $\neg A(y,a)$.

montrons que :

$\Gamma = \{\forall x \forall y (A(x,a) \land A(y,x) \to A(y,a)), A(x,a), A(y,x), \neg A(y,a)\}$ est non satisfiable

Par l'absurde : supposons que Γ soit satis :

il existe alors une interp I de domaine D, $I(a)=c$

& il existe $v(x)=d$, $v(y)=d'$, tq :

$I(\alpha_1) = V = I(A(x,a))_v = I(A(y,x))_v = I(\neg A(y,a))_v$.

$I(A(x,a))_{v(x=d)} = V \iff I(A)(d,c) = V$

$I(A(y,x))_{v\binom{x=d}{y=d'}} = V \iff I(A)(d',d) = V$

$I(\alpha_1) = V \iff$ Pour tout $d_1, d_2 \in D$ on a :

si $I(A(x,a) \wedge A(y,x))_{v\binom{x=d_1}{y=d_2}} = V$ alors $I(A)(d_2,c) = V$ (*)

or pour $d_1 = d$ et $d_2 = d'$

on a : $I(A(x,a))_{v(x=d)} = I(A(y,x))_{v\binom{y=d'}{x=d}} = V$

donc $I(A(x,a) \wedge A(y,x))_{v\binom{x=d}{y=d'}} = V$ d'où $I(A)(d',c) = V$

d'après (*)

or $I(\neg A(y,a))_{v(y=d')} = F \iff I(A)(d',c) = F$

ce qui est absurde.

d'où Γ est non satis donc non consist

donc $\forall$ Pour tte interp I de domaine D

" " valuat v

$I(\alpha_1) = F$ ou $I(A(x,a))_v = F$ ou $I(A(y,x))_v = F$ ou $I(\neg A(y,a)$

donc en particulier pour l'interp choisie au début

1) d'où les 4 phrase ne peuvent pas être Vraie en m̂ temps.

non Valide.

$D = \mathbb{N}$, $I(P)$: "... est pair", $I(Q)$: "... est le double de..."

$v(x) = 2$, $v(y) = 1$

on a : $I(P(x) \rightarrow Q(x,y))_{v\binom{x=2}{y=1}} = V$, $I(P)(2) = V$ et $I(Q(x,y))_{v(?}$

mais $I(\forall x\, Q(x,y))_{v(y=1)} = F$ car $I(Q(x,y))_{v(x=5)} = F$

3)- 1) Valide

Soit une interp I de domaine D, $v(x)=d$, $v(y)=d'$

rq : (*) $I(P(x) \to Q(x))_{v(x=d)} = V$ et $I(P)(d)=V$.

$I(P(x) \to Q(x))_{v(x=d)} = V \overset{def}{\iff}$ si $I(P)(d)=V$ alors $I(Q)(d)=V$.

or $I(P)(d)=V$ d'où $I(Q)(d)=V$.

donc $I(\exists y\, Q(y))=V$.

2) non Valide :

il existe une interp I de domaine D = êtres humains

$I(P)$: "... est une mère"

$I(Q)$: "... est une femme"

$I(f)(d)$ = le père de d.

$v(x)$ = Madame Rachedi

$I(P(x))_{v(x=M^{me}R)} = V$ et $I(Q)_{v(x=M^{me}R)} = V$ donc

$I(P(x) \to Q(x))_{v(x=M^{me}R)} = V$. et $I(P)(M^{me}R)=V$.

mais $I(Q(f(y)))_{v(y=d)} = F$ pour tout $d \in D$.

donc $I(\exists y\, Q(f(y))) = F$.

<u>Partie II</u>

2) soit $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{D}_n = \{m \in \mathbb{N}$ tq m divise $n\}$

$$Car_{\mathcal{D}_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{D}_n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

le reste de la division de n par x.

or $x \in \mathcal{D}_n \iff x$ divise $n \iff R(x,n) = 0$

avec $Car_{\mathcal{D}_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(x,n)=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$= Sg(R(x,n)) = Sg(R(x, \overbrace{S(S(\dots S(0)))}^{n \text{ fois}}))$

$= Sg(R(x, \underbrace{S(S(\dots S(Z(x))))}_{n \text{ fois}}))$

$\left.\begin{array}{l} S \circ S \dots \circ S \text{ est P.R} \\ Z \text{ est P.R} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{S \circ S \dots \circ S}_{n \text{ fois}} \circ Z \text{ est P.R.}$

$R(x, S \circ S \dots \circ S \circ Z(x))$ est alors P.R car R est P.R

Sg est P.R.

d'où : $Car_{\mathcal{D}_n}$ est P.R donc Récursive.

3) $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$

$f(x) =$ nbre de diviseurs de x

$d | x \Leftrightarrow R(d,x) = 0 \Leftrightarrow \overline{Sg}(R(d,x)) = 1$

$d | x \Rightarrow d \neq 0$ et $d \leq x$

$d \nmid x \Leftrightarrow R(d,x) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{Sg}(R(d,x)) = 0$

<u>d'où</u> : $f(x) = \overbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}^{\text{nbre de diviseurs de } x}$

$= \overline{Sg}(R(1,x)) + \overline{Sg}(R(2,x)) + \dots + \overline{Sg}(R(x,x))$

$= \sum_{d=1}^{x} \overline{Sg}(R(d,x)) = \sum_{d=1}^{x} \overline{Sg}(R(S(S(\dots S(Z(x)))),x))$

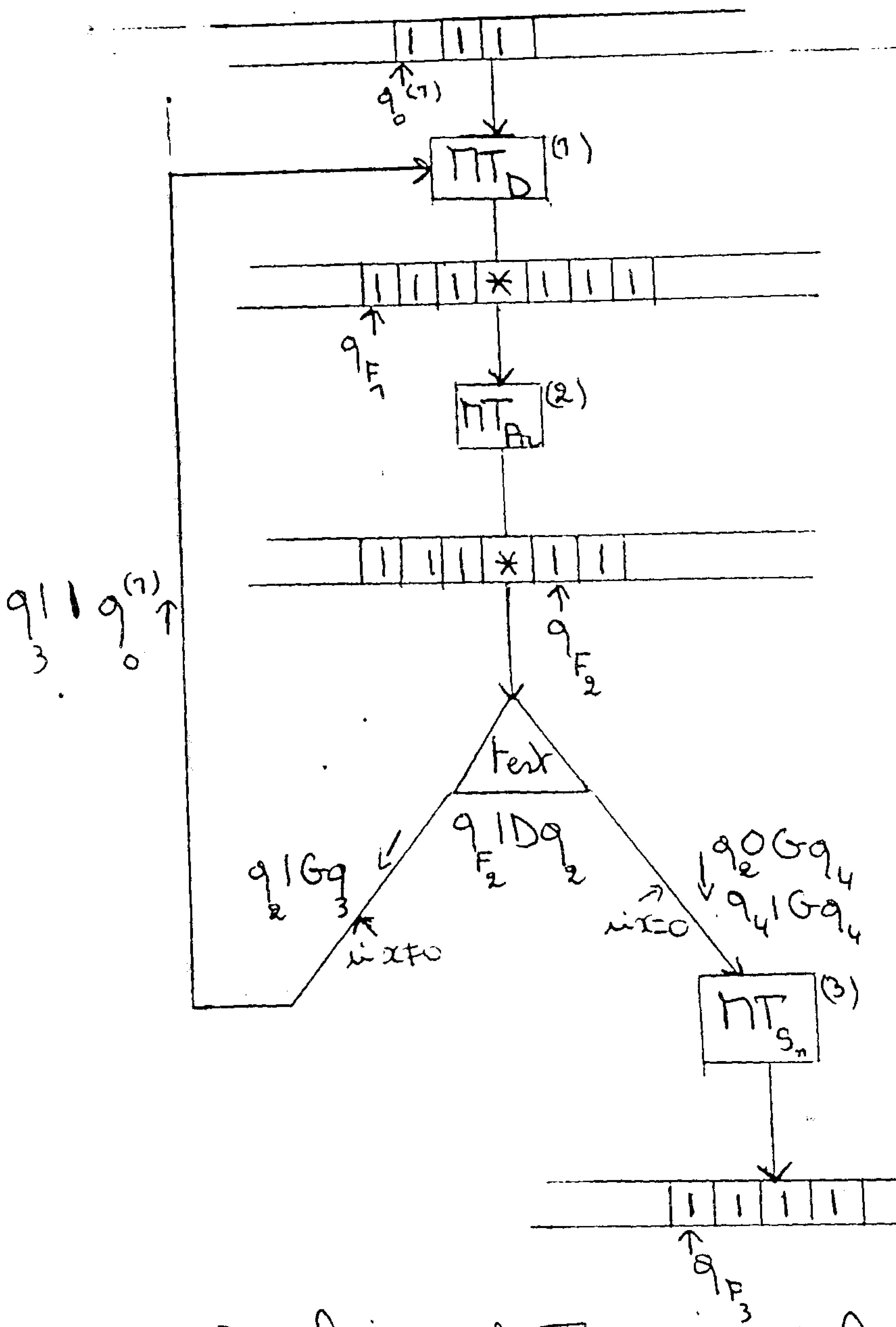
$(R(S(S \dots S(Z(x)))$ est P.R car composée de fct P.R

et $\overline{Sg}(R(S(S \dots S(Z(x)))), P_1^1(x))$ est P.R car composée de fct P.R

or $\sum^{x}$ est aussi P.R d'où f est P.R

1) T_p = Machine de Turing qui calcule :

$$y + (y-1) + (y-2) + \cdots + 1 + 0$$



$q_{F_1} 1 D q_1$
$q_1 1 D q_1$
$q_1 * D q_0^{(2)}$
instructions qui ramènent la tête de lect écrit à la 1e barre du 2e argument, pour pouvoir appliquer MT_{Pr}

et $q_4 * G q_4$
instruction qui ramènent la tête à la 1ère barre du tout 1er argument

$q_4 0 D q_0^{(3)}$ ← instruction de passage à MT_{S_n}.

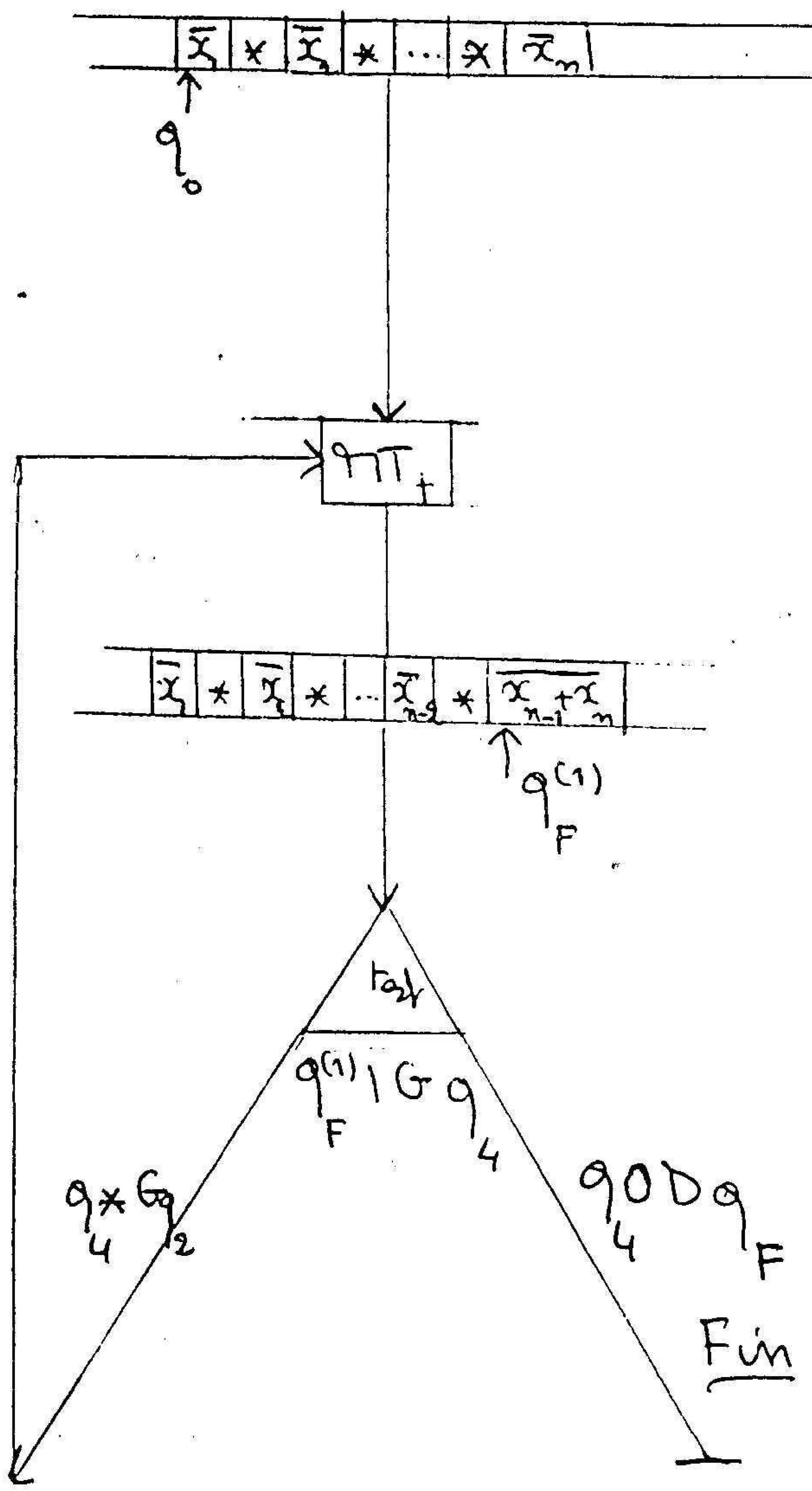
MT_D = Machine de Turing de la duplication
$q_0^{(1)}$ est son état initial, q_{F_1} est son état final

MT_{Pr} = Machine de Turing de la prédécesseur.
$q_0^{(2)}$ " " " et q_{F_2} " " "

MT_{S_n} = Machine de Turique de l'addition à n arguments
$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$q_0^{(3)}$ est son état initial et q_{F_3} est son état final

$S_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

MT_{S_n} :



$q_0 1 D q_0$ $\quad q_1 1 G q_1$ $\quad q_2 * D q_3$

$q_0 * D q_0$ $\quad q_1 * G q_2$ $\quad q_3 1 1 q_0^{(1)}$

$q_0 0 G q_1$ $\quad q_2 1 G q_2$