Institut National d'Informatique
2I

Samedi 03 Juin 2000

Logique mathématique
$3^{ième}$ EMD
Durée 2 heures
Documents interdits

## Exercice 1 (2, 2, 2)

On désigne par **I** l'ensemble des nombres impairs et par **S** l'ensemble des nombres qui ne sont pas des carrés.

**1.1.** Montrer que $E_1 = I \cup S$ est récursivement énumérable.

**1.2.** Montrer que $E_2 = I \cap S$ est récursivement énumérable.

**1.3.** Montrer que $I \cap S \subseteq I$.

## Exercice 2 (2)

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions primitives récursives.

Montrer que l'ensemble $E_n = \{f_n(f_{n-1}(\ldots(f_1(x))\ldots)) \mid x \in N\}$ est récursivement énumérable.

## Exercice 3 (3, 3, 3)

**3.1.** Montrer que $q'(x,y)$ ($x/y$ est primitive récursive).

**3.2.** Montrer que la fonction $n(x)$ qui renvoie le nombre de diviseurs de $x$ est primitive récursive.

**3.3.** En déduire que l'ensemble des nombres premiers est récursif.

*Indications :*

- On s'abstiendra d'utiliser les fonctions $r(x,y)$ et $q(x,y)$ vues en cours.
- Nous conviendrons que :

$$q'(x, 0) = x$$

- 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

## Exercice 4 (3)

Montrer que la fonction $q(x) = x/2$ est Turing-calculable.

**N.B :** la MT ne doit pas dépasser 15 instructions.

**NB :** ne remettre qu'une double feuille sans intercalaire.

21