Durée 2 heures

Tout document interdit

Montrer sans utiliser les propriétés de complétude et de consistance et le théorème de la déduction :

1. $(\neg Q \to P) \to Q \vdash P \to Q$
2. en déduire $(\neg Q \to P) \to Q \vdash \neg Q \to (P \to Q)$
3. $\neg Q \to (P \to Q) \vdash (\neg Q \to P) \to Q$
4. Montrer que l'ensemble $\{\neg P \to Q) \to Q, P, \neg Q\}$ est inconsistant.

Exercice 2. (1)

Déduire de l'exercice 1 que $(\neg Q \to P) \to Q \equiv \neg Q \to (P \to Q)$.

Exe

Montrer sans utiliser les propriétés de complétude et de consistance :

1. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
2. $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

Exercice 4. (1.5, 1.5)

Arezki demande à Ali et à Saïd de quelle couleur est la boule qu'il tient dans sa main.

Ali répond : « *si elle est noire ou si elle est blanche, alors elle est noire* ».

Saïd répond : « *si elle n'est pas noire, alors soit elle n'est pas blanche soit elle est noire* »

1. Montrer que Ali et Saïd disent la même chose.
2. Sachant que Ali et Saïd disent tous deux la vérité et qu'une boule est soit blanche soit noire mais pas les deux à la fois, de quelle couleur est la boule que tient Arezki dans sa main ?

Exercice 5. (3 , 2)

1. Vérifier la satisfiabilité des formules suivantes :

   $\alpha : \exists x\, P(x) \to P(y)$

   $\beta : P(x,y) \to P(f(x), f(y))$

2. On considère la formule $\alpha : P(x,y) \to \forall x Q(x,y)$ et le terme $t = f(y)$.

   2.1. Donner $\alpha_{[t/x]}$ et $\alpha_{[t/y]}$

   2.2. t est-il libre pour x *dans* α ?

   2.3. t est-il libre pour y *dans* α ?

N.B. remettre une seule double feuille est une int[illegible]aire au plus.

Corrigé TD 2

Log M

Exercice 1 :

1) $\boxed{(\neg Q) \to P) \to Q \vdash P \to Q \quad ?}$

1) $(\neg Q \to P) \to Q$ hyp 1
2) $\alpha_1 \to (P \to \alpha_1)$ A_1 → Axiome
3) $P \to \alpha_1$ mp(1,2)
4) $(P \to \alpha_1) \to ((P \to (\neg Q \to P)) \to (P \to Q))$ A_2
5) $P \to (\neg Q \to P)$ A_1
6) $(P \to (\neg Q \to P)) \to (P \to Q)$ mp(4,3)
7) $P \to Q$ mp(5,6)

ou bien : Méthode 2

1) $(\neg Q \to P) \to Q$ hyp 1
2) $P \to (\neg Q \to P)$ A_1
3) $P \to Q$ transitivité

2) $(\neg Q \to P) \to Q \vdash \neg Q \to (P \to Q)$?

1) $(\neg Q \to P) \to Q$ hyp 1
2) $P \to Q$ insertion de la deduction 1 : $(\neg Q \to P) \to Q \vdash P \to Q$
3) $(P \to Q) \to (\neg Q \to (P \to Q))$ A_1
4) $\neg Q \to (P \to Q)$ mp(2,3)

d'où : $(\neg Q \to P) \to Q \vdash \neg Q \to (P \to Q)$

3) $\neg Q \to (P \to Q) \vdash (\neg Q \to P) \to Q$?

1) $(\neg Q \to \neg Q) \to ((\neg Q \to Q) \to Q)$ A_3
2) $\neg Q \to \neg Q$ thm
3) $(\neg Q \to Q) \to Q$ mp(1,2)
4) $\alpha_3 \to ((\neg Q \to P) \to \alpha_3)$ A_1
5) $(\neg Q \to P) \to \alpha_3$ mp(3,4)
6) $((\neg Q \to P) \to \alpha_3) \to (((\neg Q \to P) \to (\neg Q \to Q)) \to ((\neg Q \to P) \to Q))$ A_2
7) $((\neg Q \to P) \to (\neg Q \to Q)) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$ mp(5,6)
8) $(\neg Q \to (P \to Q)) \to ((\neg Q \to P) \to (\neg Q \to Q))$ A_2
10) $(\neg Q \to P) \to (\neg Q \to Q)$ mp(8,9)
11) $(\neg Q \to P) \to Q$ mp(7,10)

d'où : $(\neg Q \to (P \to Q)) \vdash (\neg Q \to P) \to Q$

ou bien : Méthode 2

1) $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$ A
2) $\neg Q \to (P \to Q)$ hyp
3) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ thm
4) $\neg Q \to (\neg Q \to \neg P)$ trans (2,3)
5) $(\neg Q \to (\neg Q \to \neg P)) \to ((\neg Q \to \neg Q) \to (\neg Q \to \neg P))$
6) $(\neg Q \to \neg Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ mp(4,5)
7) $\neg Q \to \neg Q$ thm
8) $\neg Q \to \neg P$ mp(6,7)
9) $(\neg Q \to P) \to Q$ mp(1,8)

4) $\Gamma = \{(\neg P \to Q) \to Q, P, \neg Q\}$ inconsistant ?

1) $(\neg P \to Q) \to Q$ hyp
2) $P \to (\neg Q \to P)$ A_1
3) P hyp
4) $\neg Q \to P$ mp(2,3)
5) $\neg P \to \neg\neg Q$ (insertion de : $\neg Q \to P \vdash \neg P \to \neg\neg Q$
6) $\neg\neg Q \to Q$ thm
7) $\neg P \to Q$ transitivité entre 5 et 6
8) Q mp(1,7)

d'où $\Gamma \vdash Q$ or $\Gamma \vdash \neg Q$ d'où Γ inconsist

Exercice 2 :

de 2) $(\neg Q \to P) \to Q \vdash \neg Q \to (P \to Q)$

donc $(\neg Q \to P) \to Q \vDash \neg Q \to (P \to Q)$ thm de consistance

de 3) $\neg Q \to (P \to Q) \vdash (\neg Q \to P) \to Q$

donc $\neg Q \to (P \to Q) \vDash (\neg Q \to P) \to Q$

$(\ldots) \to \ldots \equiv \neg Q \to (P \to Q)$

EMD ...

Exercice 3

utilisons la déduction

1) mont q $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$

1) $(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$ A_3
2) $\neg\beta \to (\neg\neg\alpha \to \neg\beta)$ A_1
3) $\neg\beta$ hyp
4) $\neg\neg\alpha \to \neg\beta$ $\Pi P(2,3)$
5) $(\neg\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$ $\Pi P(1,4)$
6) $\neg\neg\alpha \to \alpha$ thm
7) $\alpha \to \beta$ hyp
8) $\neg\neg\alpha \to \beta$ trans $(6,7)$
9) $\neg\alpha$ $\Pi P(5,8)$

d'où $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha \xRightarrow[\text{déduction}]{\text{thm de}} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta \vdash \neg\alpha$.

1) $(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha))$ A_3
2) $\neg\neg\alpha \to \alpha$ thm
3) $\alpha \to \neg\beta$ hyp
4) $\neg\neg\alpha \to \neg\beta$ transi $(2,3)$
5) $(\neg\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$ $\Pi P(1,4)$
6) $\alpha \to \beta$ hyp
7) $\neg\neg\alpha \to \beta$ transi $(2,6)$
8) $\neg\alpha$ $\Pi P(5,7)$

d'où $\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta \vdash \neg\alpha \Rightarrow \vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

Exercice 4

B : la boule est blanche
N : la boule est Noire

la réponse d'Ali correspond à : $N \vee B \to N$

" " de Saïd " à : $\neg N \to \neg B \vee N$

Ali et Saïd disent la même chose si et ssi :

$N \vee B \to N \equiv \neg N \to \neg B \vee N$

N	B	$N \vee B$	$N \vee B \to N$	$\neg B \vee N$	$\neg N \to \neg B \vee N$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V

d'après la table de vérité $N \vee B \to N \equiv \neg N \to \neg B \vee N$.

2) Ali et Saïd disent la vérité (et il disent la m̂ chose)

donc $N \vee B \to N$ est à V

or $N \vee B \to N$ est à V $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} N \text{ à V et B à V} & (1) \\ N \text{ à V et B à F} & (2) \\ N \text{ à F et B à F} & (3) \end{cases}$

(1) est impossible car la boule n'est pas blanche et Noire c'est une cdt imposée

(3) est impossible car la boule est soit blanche soit Noire

d'où le seul cas qui reste est (2) i.e la boule est Noire

Exercice 4 :

1). α : $\exists x P(x) \to P(y)$

soient $D = \mathbb{N}$, IP : "... est pair", $v(y) = 4$

on a : $\left.\begin{array}{l} I(P)(2) = V \Rightarrow I(\exists x P(x)) = V \\ I(P)_{v(y=4)} = I(P)(4) = V \end{array}\right\} \Rightarrow I(\alpha)_{v(y=4)} = V$

d'où α est satis

β : $P(x,y) \to P(f(x), f(y))$.

$D = \mathbb{N}^*$; $I(P)$: "... est un diviseur de ..." ; $I(f)(n) = 2n$.

$v(x) = 3$ et $v(y) = 6$

$I(P(x,y))_{v(x=3, y=6)} = V$ car 3 est 1 div de 6

$I(P(f(x), f(y)))_{v(x=3, y=6)} = I(P)(I(f)(3), I(f)(6)) = I(P)(6, 12) = V$

d'où $I(\beta)_{v(x=3, y=6)} = V$.

2) $\alpha_{t/x}$: $P(f(y), y) \to \forall x\, Q(x,y)$; t est libre pour x