Logique Mathématique

Contrôle Final - Durée2h- Tout document interdit

Exercice 1 ((1-1), 2, 2)

Déduire des énoncés P_1 et P_2 ci-dessous, en utilisant la résolution, que Hamid n'est pas un ami d'Ali.
Puis en déduire en utilisant un arbre sémantique qu'il y'a des informaticiens qui ne sont pas honnêtes.
P_1 : Si Ali est honnête et si tous ses amis sont honnêtes alors tous les informaticiens sont honnêtes.
P_2 : Il est vrai qu'Ali est honnête et il est vrai que tous ses amis sont honnêtes mais Hamid qui est un informaticien n'est pas honnête.

Exercice 2 (1, 2, 2)

Nous utiliserons dans cet exercice le symbole de prédicat " = " pour traduire la relation *égalité*.
Ecrire dans le langage des prédicats du 1^{ier}ordre les axiomes a, b, et c suivants :

a. 0 n'est le successeur d'aucun entier.
b. Tout entier a un successeur unique.
c. Si 0 vérifielapropriété P et si, si tout entier*n* vérifie P alors son successeur vérifie également Palors tous les entiers vérifient la propriété P.

Exercice 3. (4)

Soient c_1 et c_2 deux clauses telles que :

$c_1 : P(f(x)) \vee Q(y)$ $\qquad$ $c_2 : \neg P(u) \vee \neg Q(g(v))$

Question. Donner si elles existent :

a . Une H-interprétation qui satisfait c_1 et c_2
b . Une H-interprétation qui falsifie c_1 et c_2
c . Une H-interprétation qui satisfait c_1 et qui ne satisfait pas c_2
d . Une H-interprétation qui satisfait c_2 et qui ne satisfait pas c_1

Exercice 4. ((1,1, 1), 2)

Soient C_1 et C_2 deux clauses telles que :

$C_1 : P(f(x)) \vee Q(y)$ $\qquad$ $C_2 : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$

Question1. Donner :

1. Deux clauses résolvantes de C_1 et C_2. Nous les désignerons par C_{R1} et c_{R2} respectivement.
2. Une instance de base de C_{R1} et une instance de base de C_{R2}.
3. Une instance de base de C_1 (C_{1B}) et une instance de base de C_2 (C_{2B}) telles que C_{R1B} soit une résolvante de C_{1B} et C_{2B}.

Question2.S'il existe une instance de base valide d'une clause *C*peut-on en déduire que *C* est également valide ?

N.B. ***Il ne vous sera remis qu'un seul cahier d'examen. Prenez en soin***

Exercice 1 ((1-1), 2, 2)
Déduire des énoncés P_1 et P_2 ci-dessous, en utilisant la résolution, que Hamid n'est pas un ami d'Ali.
Puis en déduire en utilisant un arbre sémantique qu'il y'a des informaticiens qui ne sont pas honnêtes.
P_1 : Si Ali est honnête et si tous ses amis sont honnêtes alors tous les informaticiens sont honnêtes.
P_2 : Il est vrai qu'Ali est honnête et il est vrai que tous ses amis sont honnêtes mais Hamid qui est un informaticien n'est pas honnête.

Corrigé :
Traduction en langage des prédicats
A(x,y) : x est ami de y
H(x) : x est honnête
I(x) : x est un informaticien

a :ali, h :hamid
β1 :$(H(a) \wedge \forall x(A(x,a) \rightarrow H(x))) \rightarrow \forall y(I(y) \rightarrow H(y))$
β2: $H(a) \wedge \forall x(A(x,a) \rightarrow H(x)) \wedge I(h) \wedge \neg H(h)$
β3: $\neg A(h,a)$
β4:$\exists x\ (I(x) \wedge \neg H(x))$

Forme prenexe de β_1:

$$\forall x(H(a) \wedge (A(x,a) \rightarrow H(x))) \rightarrow \forall y\ (I(y) \rightarrow H(y))$$

$$\beta_{1P}: \exists x \forall y\ (H(a) \wedge (A(x,a) \rightarrow H(x))) \rightarrow (I(y) \rightarrow H(y))$$

Forme de Skolem de β_1 :

$$\beta_{1S}: \forall y\ (H(a) \wedge (A(b,a) \rightarrow H(b))) \rightarrow (I(y) \rightarrow H(y))$$

Forme clausale de β_{1s} :

$$\forall y(H(a) \wedge (\neg A(b,a) \vee H(b))) \rightarrow (\neg I(y) \vee H(y))$$

$$\forall y(\neg H(a) \vee (A(b,a) \wedge \neg H(b))) \vee (\neg I(y) \vee H(y))$$

$$\forall y((\neg H(a) \vee A(b,a)) \wedge (\neg H(a) \vee \neg H(b))) \vee (\neg I(y) \vee H(y))$$

$$\forall y((\neg H(a) \vee A(b,a) \vee \neg I(y)\ \vee H(y)) \wedge (\neg H(a) \vee \neg H(b) \vee \neg I(y) \vee H(y)))$$

Forme prenexe de β_2:

$$\forall x(H(a) \wedge\ (A(x,a) \rightarrow H(x)) \wedge I(h) \wedge\ \neg H(h))$$

Forme de Skolem de β_2 :

$$\forall x(H(a) \wedge\ (A(x,a) \rightarrow H(x)) \wedge I(h) \wedge\ \neg H(h))$$

Forme clausale de β_2 :

$$\forall x(H(a) \wedge\ (\neg A(x,a) \vee H(x)) \wedge I(h) \wedge\ \neg H(h))$$

Déduire, en utilisant la résolution, que Hamid n'est pas un ami d'Ali.
On démontre que S={β_1,β_2, $\neg\beta_3$} est inconsistant

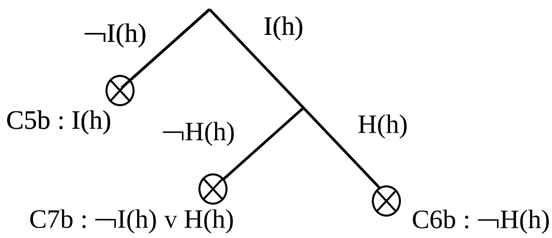
$\neg\beta_3$: $A(h,a)$
Sc={ ¬H(a) v A(b,a) v¬I(y) v H(y) , ¬H(a) v¬H(b) v¬I(y') v H(y') , H(a), ¬A(x,a) v H(x), I(h), ¬H(h) , A(h,a)}

C1: $\neg$H(a) v A(b,a) v$\neg$I(y) v H(y)
C2:$\neg$H(a) v$\neg$H(b) v$\neg$I(y') v H(y')
C3: H(a)
C4: $\neg$A(x,a) v H(x)
C5: I(h)
C6: $\neg$H(h)
C7: A(h,a)
C8: $\neg$A(h,a) v H(h) C4[h/x]
C9: $\neg$A(h,a) res(C8,C7)
C10: □ res (C9,C7)

Sc |- □ =>Sc est inconsitant => S est inconsitant => $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2}$ |- $\boldsymbol{\beta_3}$

Déduire en utilisant un arbre sémantique qu'il existe des informaticiens qui ne sont pas honnêtes.

β_1, β_2 |= $\beta_4$ssi {β_1, β_2} ∪{ $\neg\beta_4$} non satisfiable
$\neg\beta_4$: $\forall x\ (\neg I(x) \vee H(x))$
Sc={ $\neg$H(a) v A(b,a) v$\neg$I(y) v H(y) , $\neg$H(a) v$\neg$H(b) v$\neg$I(y') v H(y') , H(a), $\neg$A(x,a) v H(x), I(h), $\neg$H(h) , $\neg$I(z) vH(z) }



Arbre Sémantique clos => {C5b, C7b} est non satisfiable => il exsite un sous ensemble d'instance de base de Sc non satisfiable =>Sc est non satisfiable => S est non satisfiable => $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2}$ |= $\boldsymbol{\beta_3}$

<u>Exercice 2</u> (1, 2, 2)

Nous utiliserons dans cet exercice le symbole de prédicat " = " pour traduire la relation *égalité*.
Ecrire dans le langage des prédicats du 1ier ordre les axiomes a, b, et c suivants :

a. 0 n'est le successeur d'aucun entier.
b. Tout entier a un successeur unique.
c. Si 0 vérifiela propriété P et si, si tout entier*n* vérifie P alors son successeur vérifie également Palors tous les entiers vérifient la propriété P.

a. 0 n'est le successeur d'aucun entier.

$$\forall\ x \neg(s(x) = a)$$

b. Tout entier a un successeur unique.

$$\forall x\ (\exists y\ ((s(x) = y)\ \ \wedge\ \forall z((s(x) = z)\ \rightarrow y = z))$$

c. Si 0 vérifie la propriété P et si, si tout entier n vérifie P alors son successeur vérifie également P alors tous les entiers vérifient la propriété P.

$$\left(P(0) \wedge \forall x \left(E(x) \wedge P(x) \rightarrow P\big(s(x)\big)\right)\right) \rightarrow \big(\forall x \left(E(x) \rightarrow P(x)\right)\big)$$

Exercice 3. (4)

Soient c_1 et c_2 deux clauses telles que :

c_1 : P(f(x)) $\vee$ Q(y) c_2 : $\neg$P(u) $\vee\neg$Q(g(v))

Question. Donner si elles existent :

a . Une H-interprétation qui satisfait c_1 et c_2

I_{h1}= { Q(a), Q(g(a)), …, Q(g^i(a)), ¬P(a), ¬P(g(a)), …, ¬P(g^i(a)), … }

b . Une H-interprétation qui falsifie c_1 et c_2

I_{h2} = { ¬Q(a), ¬P(f(a)), P(a), Q(g(a)), …}

Il suffit de falsifier une instance de base de C1 et une instance de base de C2

c . Une H-interprétation qui satisfait c_1 et qui ne satisfait pas c_2

I_{h3} = { Q(a), Q(g(a)), …, Q(g^i(a)), P(a), … }

d . Une H-interprétation qui satisfait c_2 et qui ne satisfait pas c_1

I_{h4} = { ¬Q(a), ¬P(f(a)), ¬Q(g(a)), …, ¬Q(g^i(a)), , … }

Exercice 4. ((1,1, 1), 2)

Soient C_1 et C_2 deux clauses telles que :

C_1 : P(f(x)) $\vee$ Q(y) C_2 : $\neg$P(x) $\vee\neg$Q(x)

Question1. Donner :

1. Deux clauses résolvantes de C_1 et C_2. Nous les désignerons par C_{R1} et c_{R2} respectivement.
2. Une instance de base de C_{R1} et une instance de base de C_{R2}.
3. Une instance de base de C_1 (C_{1B}) et une instance de base de C_2 (C_{2B}) telles que C_{R1B} soit une résolvante de C_{1B} et C_{2B}.

Question2.S'il existe une instance de base valide d'une clause Cpeut-on en déduire que C est également valide ?

Réponse Question1.

1. Deux clauses résolvantes de C_1 et C_2

On renomme les variables (0.5)

C_1 : P(f(x)) $\vee$ Q(y) C_2 : $\neg$P(u) $\vee\neg$Q(u)

C_1 : P(f(x)) $\vee$ Q(y)

C_2 : ¬P(u) $\vee$¬Q(u)

C3 : P(f(x)) $\vee$ Q(u) C1[u/y]

C4 : P(f(x)) $\vee$¬P(u) res (C2,C3) (C_{R1})

C5 : ¬P(f(x)) $\vee$¬Q(f(x)) C2[f(x)/u]

C6 : Q(y) $\vee$¬Q(f(x)) res(C5,C1) (C_{R2})

2. Une instance de base de C_{R1} et une instance de base de C_{R2}.

C_{R1B} :P(f(a)) $\vee$¬P(a)

C_{R2B} :Q(a) $\vee$¬Q(f(a))

3. Une instance de base de C_1 (C_{1B}) et une instance de base de C_2 (C_{2B}) telles que C_{R1B} soit une résolvante de C_{1B} et C_{2B}.

C_{1B} :$P(f(a)) \lor Q(a)$
C_{2B} :$\neg P(a) \lor \neg Q(a)$
C_{R1B} :$P(f(a)) \lor \neg P(a)$ res(C_{1B},C_{2B})

Réponse Question2. S'il existe une instance de base valide d'une clause *C* peut-on en déduire que *C* est également valide ?

Non, nous ne pouvons pas déduire que C est valide. A titre d'exemple, la clause C_B : $P(a) \lor \neg P(a)$ est valide alors que la clause C : $P(x) \lor \neg P(y)$ ne l'est pas.