Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2019-2020
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen

Exercice 1. [[5 pts]]

Soit $nv[F]$ le nombre de variables propositionnelles distinctes dans F. Soit $h[F]$ la hauteur de F

1. *Rappeler la définition par induction de la hauteur d'une formule.*
2. *Montrer par induction (récurrence) que pour toute formule F on a : $nv[F] \leq 2^{h[F]}$*
3. *Retrouver le résultat par un raisonement direct.*

Exercice 2. [[5 pts]]

Soit la formule à priorité

$$F = y \wedge z \Leftrightarrow (\neg x \vee z \Rightarrow \neg y) \vee x.$$

1. *Donner la forme completement parenthésée de F.*
2. *Donner l'arbre de structure de F.*
3. *Transformer F en somme de mônomes.*
4. *F est-elle satisfaisable ? est-elle valide ? Justifier*

Exercice 3. [[5 pts]]

1. *Montrer par résolution propositionnelle que l'ensemble suivant de clauses est contradictoire:*

$$\{\underline{a+b}\ ,\ \underline{\bar{a}+\bar{b}}\ ,\ \underline{c+\bar{b}+a}\ ,\ \underline{\bar{c}+\bar{b}}\ ,\ \underline{c+b+\bar{a}}\ ,\ \underline{\bar{d}+b}\ ,\ \underline{d+\bar{c}}\ \}$$

2. *Utiliser la méthode de résolution (stratégie positive) pour prouver ou infirmer l'affirmation suivante.*

$$\{a \Rightarrow b; c \Leftrightarrow a \wedge b\} \models \neg a \vee c$$

Exercice 4. [[5 pts]]

1. *Soit*

$$F = a \wedge (d \Rightarrow c) \Rightarrow (b \Rightarrow a) \Rightarrow (c \wedge b \wedge a)$$

Transformer $\neg F$ en forme normale conjonctive FNC (produit de somme)

2. *Etudier la validité de F par arbre sémantique*
3. *Montrer par un arbre sémantique que cet ensemble de clauses est insatisfaisable*

$$\{\underline{\bar{d}}\ ,\ \underline{\bar{b}+d}\ ,\ \underline{c+d}\ ,\ \underline{a+b+d}\ ,\ \underline{c+b+\bar{a}}\ ,\ \underline{\bar{a}+\bar{c}+b}\}$$

1

Exercice 5. [[5 pts]]

4

Soent les formules A, B, C où

$$A = \exists x \forall y (P(x) \Rightarrow \exists y R(y, f(x)))$$
$$B = \forall y \exists x (R(x, y) \Rightarrow P(a))$$
$$C = \exists x \forall y \forall z (\neg R(x, y) \wedge Q(z, y) \vee P(z))$$

1. *Donner L'arbre de structure syntaxique de la formule A en précisant ses variables libres.*
2. *Donner la signature associée à la formule $F = A \wedge B \wedge C$.*
3. *Donner la forme clausale de l'ensemble $\{A, B, C\}$.*

Exercice 6. [[5 pts]] *Soit l'ensemble des clauses suivant :*

$$S = \{\neg P(b, f(y)) \ , \ P(z, f(a)) \vee R(z) \ , \ \neg Q(a, g(x)) \vee \neg R(x) \ , \ Q(x, z)\}$$

1. *Donner H_0 et H_1.*
2. *Donner cinq éléments de la base de Herbrand. Donner deux instances de base de la première clause.*
3. *Vérifier avec un arbre sémantique que S est insatisfaisable.*

Exercice 7. [[5 pts]]

Montrer, en utilisant la résolution, (factorisation+Résolution+Renommage+Unification) que l'ensemble des clauses ci-dessous est inconsistant.

$$S = \{P(x) \vee \neg Q(g(x)) \ , \ \neg P(b) \vee R(g(y)) \ , \ \neg R(y) \vee \neg R(g(x)) \ , \ Q(z)\}$$

PS. Donner deux solutions une avec une stratégie positive et une autre avec une stratégie négative.

Exercice 8. [[5 pts]] *On se situe dans le domaine des matrices. On définit les prédicats et fonctions suivantes:*

- $I(x)$: *x est inversible.* • $f(x, y)$: *la matrice produit des deux matrice.*
- $g(x)$: *la transposée de la matrice x.* • $O(x)$: *x est orthogonale.*
- d: *La matrice identité.* • $=$: *L'égalité.* • $C(x)$: *La matrice x est carrée.*
- $S(x, y)$: *La matrice x est semblable à la matrice y.*

Formalisez ses phrases dans le langage de la logique des prédicats.

1. *Toutes les matrices orthogonales sont inversibles mais pas toute matrice inversible est orthogonale*
2. *La matrice identité est l'élémet neutre pour le produit.*
3. *Une matrice ne peut être non carré et inversible.*
4. *Aucune matrice n'est semblable avec toutes les matrices.*
5. *Deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.*

Bon courage — **Le barème est donné à titre indicatif**

Vous choisissez au maximum 5 exercices. Seront comptabilisées les 4 meilleures notes.