ESI **Novembre 2023**

2CPI **Contrôle intermédiaire en ANA3** **Durée : 2 heures**

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Le sujet comporte 2 pages.
Vous devez répondre à chaque exercice séparément.

Formules :

- $\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$
- $\forall x \in [-1,1[, \quad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}.$
- $\forall x \in]-1,1], \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}.$
- $\forall x \in [-1,1], \quad \text{Arctgx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Exercice 1 (6 points): Veuillez répondre sur la double feuille.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right) - 1$.

1) Etudier la convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}$.
2) Pour $a > 0$, étudier la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[-a, a]$.

On pose $F(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4) Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (3 points): Veuillez répondre sur des intercalaires.

Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} n(n+1)x^n$.

1) Calculer son rayon.
2) Déterminer son domaine de convergence.
3) Calculer sa somme S dans son domaine de convergence.

Exercice 3 (6,5 points): Veuillez répondre sur des intercalaires.
Les questions sont indépendantes.

1) Soit $\alpha > 0$, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \alpha^{\log n}$.

2) Etudier la nature de la série numérique de terme général $u_n = \log\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

3) Étudier dans $\mathbb{R}_+$, la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ donnée par: $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$.

4) Calculer le rayon R de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

ESI. 2022/2023. CI- ANA3.

Veuillez répondre au questionnaire sur le sujet.

Nom:
Prénom:
Groupe:

Questionnaire (4,5 points): Pour chaque affirmation répondre (sans justifier) par $\boxed{\text{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\text{F}}$ sinon.

____ **A1 :** Si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum |u_n|$.

____ **A2 :** La somme de deux séries numériques divergentes à termes positifs est divergente.

____ **A3 :** Si (u_n) est une suite positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

____ **A4 :** Si la série $\sum u_n$ converge il en est de même de la série $\sum u_{2n}$.

____ **A5 :** Si la suite (u_n) est à valeurs positives et si la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n^2$.

____ **A6 :** Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur I.

____ **A7 :** Si la suite des fonctions dérivées $(f\,'_n)_n$ converge uniformément sur I,
alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur I.

____ **A8 :** Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement,
alors la série $\sum |f_n|$ converge uniformément.

____ **A9 :** S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n = 0$,
alors $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

____ **A10 :** Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$,
alors la convergence de cette dernière est normale sur $]-R, R[$.

____ **A11 :** Si la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n 2^n$ converge, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 2.

____ **A12 :** Les séries entières $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Un corrigé.

Exercice 1 : (1,5+1,25+0,75+2,5)

1) Etude de la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Pour $x \in \mathbb{R}^*$: On a

$$u_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{n^2}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^2} \boxed{0{,}5} \geq 0 \boxed{0{,}25}.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann $\boxed{0{,}25}$ convergente ($\alpha = 2$), donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente par le critère d'équivalence.

$\rightsquigarrow$ Pour $x = 0$: c'est la série nulle donc convergente $\boxed{0{,}25}$.

Conclusion: La série converge sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.

2) Etude de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ sur $[-a, a],\ a > 0$.

On a $x \in [-a, a] \iff |x| \leq a \boxed{0{,}25} \Longrightarrow x^2 \leq a^2 \Longrightarrow \exp\left(\frac{x^2}{n^2}\right) \leq \exp\left(\frac{a^2}{n^2}\right)$.

Il vient:

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [-a, a],\quad u_n(x) \leq \exp\left(\frac{a^2}{n^2}\right) - 1 \boxed{0{,}5} = u_n(a),$$

et $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(a)$ converge d'après la première question $\boxed{0{,}25}$.

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur tout $[-a, a]$ $\boxed{0{,}25}$, donc uniformément sur tout $[-a, a]$.

3) Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$. Utilisons le théorème de conservation de la continuité pour les séries de fonctions.

- Toutes les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée et la somme de fonctions continues $\boxed{0{,}25}$.

- $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout $[-a, a]$.

Ainsi, F est continue sur tout $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.

Conclusion : Par recouvrement F est continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.

4) Etude de la dérivabilité de F. Commençons par l'étude de la convergence uniforme de $\sum u'_n$.

$u'_n(x) = \dfrac{2x}{n^2} \exp\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ $\boxed{0{,}25}$, on a

$$|u'_n(x)| = \frac{2|x|}{n^2} \exp\left(\frac{x^2}{n^2}\right) \leq \frac{2a}{n^2} \exp\left(\frac{a^2}{n^2}\right) \boxed{0{,}5} = c_n, \ \forall x \in [-a, a], \ a > 0.$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ converge, en effet $c_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2a}{n^2}$ $\boxed{0{,}5}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$), donc on conclut la convergence par le critère d'équivalence. Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[-a, a]$ $\boxed{0{,}25}$.

A présent on peut appliquer le théorème de conservation de la dérivabilité pour les séries de fonctions.

- Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée et la somme de fonctions C^1 $\boxed{0{,}25}$.
- $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge sur tout $\mathbb{R}$ donc en au moins un point x_0 de $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.
- $\sum\limits_{n\geq 1} u'_n$ converge uniformément sur tout $[-a, a]$.

On en déduit que F est dérivable sur tout $[-a, a]$ $\boxed{0{,}25}$ avec $a > 0$.

Donc par recouvrement F est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$ et $F'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2x}{n^2} \exp\left(\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

<u>Exercice 2 :</u> (1+1+1)

1) Calcul du rayon de convergence.

Posons $a_n = n(n+1) \geq 0$ et $u_n(x) = a_n x^n$.

$\rho = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ $\boxed{0{,}25}$ car a_n est un rapport de polynômes $\boxed{0{,}25}$, donc d'après le théorème de Hadamard $\boxed{0{,}25}$ $R = \dfrac{1}{\rho} = 1$ $\boxed{0{,}25}$.

2) Domaine de convergence D. Pour cela faisons l'étude aux bornes:

<u>En</u> $x = 1 : u_n(1) = n(n+1)$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n(1) = +\infty \neq 0$

$\Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n(1)$ diverge car la condition nécessaire n'est pas vérifiée $\boxed{0{,}5}$.

<u>En</u> $x = -1 : u_n(-1) = n(n+1)(-1)^n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |u_n(-1)| = +\infty \neq 0$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(-1) \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n(-1) \text{ diverge car la condition nécessaire}$$

n'est pas vérifiée $\boxed{0{,}25}$.

On en conclut que $D =]-1,1[$ $\boxed{0{,}25}$.

3) Calculons sa somme S, $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} n(n+1)x^n$.

Dans $S_1(x)$ posons $N = n+1$:

$$S(x) = \sum_{N\geqslant 2} (N-1) N x^{N-1} = x\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2} \boxed{0{,}25}.$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} x^n &= \frac{1}{1-x},\ \forall x \in]-1,1[.\\
\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-2x+x^2)},\ \forall x \in]-1,1[\boxed{0{,}25}.\\
\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2-2x}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3},\ \forall x \in]-1,1[\boxed{0{,}25}.
\end{aligned}$$

Donc $S(x) = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$, $\forall x \in]-1,1[$ $\boxed{0{,}25}$.

<u>**Exercice 3 :**</u> (1+2,5+1,75+1,25)

1) $u_n = \alpha^{\log n} = e^{\log n.\log\alpha} \boxed{0{,}5} = \left(e^{\log n}\right)^{\log\alpha} = n^{\log\alpha} = \dfrac{1}{n^{-\log\alpha}} \boxed{0{,}25}$,

donc $\sum u_n$ est une série de Riemann, elle sera convergente ssi

$$-\log\alpha > 1 \boxed{0{,}25} \Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha} > e \Longleftrightarrow \alpha < \frac{1}{e}.$$

Conclusion : $\sum u_n$ converge si $\alpha \in]0, \frac{1}{e}[$ et diverge si $\alpha \in [\frac{1}{e}, +\infty[$.

2) On a:

$$u_n = \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \log\left(\frac{n^2+n-1+2}{n^2+n-1}\right) = \log\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right) \boxed{0{,}5},$$

ce qui donne

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1} \boxed{0{,}5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} \boxed{0{,}5} > 0 \boxed{0{,}5}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\boxed{0{,}25}$(série de Riemann, $\alpha = 2$) donc $\sum u_n$ converge par le crière d'équivalence $\boxed{0{,}25}$.

Autre méthode:

$$\begin{aligned}
u_n &= \log\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \log\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \boxed{0{,}5}\\
&= \left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&= \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\right) - \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \boxed{0{,}5}\\
&= \frac{1}{2n^2}+\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \boxed{0{,}25}
\end{aligned}$$

On obtient: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} \boxed{0{,}25} > 0 \boxed{0{,}5}$,

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\boxed{0{,}25}$(série de Riemann, $\alpha = 2$) donc $\sum u_n$ converge par le crière d'équivalence $\boxed{0{,}25}$.

3) a) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x),\ \forall x \in E = [0,+\infty[$.

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{-nx}\sin(2nx) = 0 \boxed{0{,}5}$.

Donc $f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} 0$ sur E.

b) Convergence uniforme: A t'on $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n\| = 0$?

Posons $g_n(x) = |f_n(x))| = e^{-nx}|\sin(2nx)|$.

Il suffit de remarquer que pour $x_n = \frac{1}{n} \boxed{0{,}5}$, on a

$$\sup_{x\in E} g_n(x) \geq m_n = |f_n(x_n)| = \frac{\sin 2}{e} \boxed{0{,}25} > 0,$$

et bien sûr $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} m_n \neq 0$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n\| \neq 0 \boxed{0{,}25}$.

On en conclut $f_n \overset{\text{uniforme}}{\nrightarrow} \mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}_+ \boxed{0{,}25}$.

4) Utilisons le théorème de Hadamard $\boxed{0{,}25}$:

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} n^{\frac{1}{n}} & \text{si} \quad \text{est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a d'une part

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = 1 \boxed{0{,}5},$$

d'autre part

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 0^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} 0 = 0 \boxed{0{,}25},$$

ce qui donnera

$$\rho = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right) = 1.$$

Finalement $R = \dfrac{1}{\rho} = 1 \boxed{0{,}25}$.

ESI. 2022/2023. CI- ANA3.

Veuillez répondre au questionnaire sur le sujet.

Nom:
Prénom:
Groupe:
Questionnaire : Les 6 premières sur (0,5), les autres sur (0,25).

$\boxed{\text{V}}$ **A1 :** Si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum |u_n|$.

$\boxed{\text{V}}$ **A2 :** La somme de deux séries numériques divergentes à termes positifs est divergente.

$\boxed{\text{F}}$ **A3 :** Si (u_n) est une suite positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

$\boxed{\text{F}}$ **A4 :** Si la série $\sum u_n$ converge il en est de même de la série $\sum u_{2n}$.

$\boxed{\text{V}}$ **A5 :** Si la suite (u_n) est à valeurs positives et si la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n^2$.

$\boxed{\text{F}}$ **A6 :** Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur I.

$\boxed{\text{F}}$ **A7 :** Si la suite des fonctions dérivées $(f\ '_n)_n$ converge uniformément sur I,
alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur I.

$\boxed{\text{V}}$ **A8 :** Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement,
alors la série $\sum |f_n|$ converge uniformément.

$\boxed{\text{V}}$ **A9 :** S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$, alors $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{F}}$ **A10 :** Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, alors la convergence de cette dernière est normale sur $]-R, R[$.

$\boxed{\text{V}}$ **A11 :** Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n 2^n$ converge, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 2.

$\boxed{\text{V}}$ **A12 :** Les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence.