Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Novembre 2018**

2CPI **Contrôle intermédiaire** **Durée : 2 heures**

Analyse mathématique 3

---

* Les documents et les téléphones portables sont interdits.
* Formules :

• $\forall x \in \mathbb{R},\quad sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, • $\forall x \in \mathbb{R},\quad ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$,

• $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, • $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Exercice 1 (3 points) : Etudier la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!},\qquad \sum_{n\geq 0} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 2 (5.5 points) : **Les parties A et B sont indépendantes.**

Partie A : Soit la suite de fonctions suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3}.$$

1) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction à déterminer.
2) Montrer que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
3) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $[0,1]$.

Partie B : Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ où $f_n(x) = \frac{ne^x}{n+x}$.

Exercice 3 (6.5 points) :

1) Soient α, β deux réels tels que $\beta \neq 0$.
Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} n^\alpha e^{\beta n}$ converge ssi $\beta < 0$.

2) On pose

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{nx}\sin(n)}{e^{2nx}+1} \quad avec\ x > 0.$$

a) Etudier la convergence de cette série de fonctions sur $]0,+\infty[$.
b) Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$.
c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 (5 points) : Considérons la fonction F suivante :

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

1- Montrer que $D_F = \mathbb{R}$ (on peut utiliser par exemple le fait que $n! \overset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$).

2- Quelle est la classe de dérivation de F?

3- Ecrire F sous forme d'une fonction usuelle en calculant la somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$.

4- Déduitre une écriture sous forme d'une série numérique alternée de l'intégrale.

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

5- Notons $(S_n)_{\in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série numérique altérnée trouvée dans la question (4). En utilisant le résultat de Leibniz sur le reste des séries altérnées, trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|I - S_n| \leq 10^{-3}, \quad \forall n \geq N.$$

6- Donner une valeur approchée de I telle que l'erreur d'approximation ne dépasse pas 10^{-3}.

* **La question (6) est une question bonus.**