L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.

Exercice : (7 pts)
Soit la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Déterminer suivant le paramètre m le rang de la matrice A_m.
2- Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle inversible ?
3- Soit $g \in End\left(\mathbb{R}^3\right)$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A_m = M_B\left(g\right)$.
a- Déterminer l'endomorphisme g.
b- Soit

$$C = \left(v_1 = (2,0,1)\,, \quad v_2 = (0,-1,1) \quad , v_3 = (1,1,0)\right) \text{ une base de } \mathbb{R}^3.$$

Déterminer la matrice P de passage de B vers C.
c- Déterminer P^{-1}.
d- En déduire $A'_m = M_C\left(g\right)$.

Problème : (13 pts)
On considère dans $M_2\left(\mathbb{R}\right)$ les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I- Soit $A \in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $A \neq I_2$ et $A \neq N$.
1/- Soit l'application f définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f : M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) = (A \times M) - (M \times A) \end{array}$$

Montrer que f est un endomorphisme d'espaces vectoriels.
2/ Déterminer $\ker f$.
3/ Montrer que $(\ker f, +, \times)$ est un anneau unitaire ($+$ et $\times$ désignent, respectivement, la somme et le produit des matrices).

II- Pour toute la suite, on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1/- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a/ Déterminer c et d en fonction de a et b pour que $f\,(M) = 0$.
b/ En déduire une base de $\ker f$ ainsi que le rang de f.
c/ Montrer que tout élément K de $\ker f$, on a :

$$K^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}.$$

d/ Déterminer, par récurrence, K^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2/- On munit $M_2(\mathbb{R})$ de la base :

$$B_C = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a/ Déterminer la matrice $L = M_{B_C}\,(f)$.
b/ En échelonnant la matrice L, déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
c/ Compléter la base de $\ker f$ en une base de $M_2(\mathbb{R})$.