Ecole Supérieure d'Informatique
Sidi Bel Abbes

ANALYSE 3
TD : INTEGRALES PARAMETREES

A) RAPPELS (INTEGRALES IMPROPRES)

Exercice 1
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I(\alpha,\beta)=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha\ln^\beta(t)}\qquad J(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}\qquad K(\alpha)=\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$$
$$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt\qquad L=\int_0^1\ln(t)dt\qquad M=\int_0^\pi\ln(\sin t)dt$$

Exercice 2
Etudier la convergence simple et uniforme des intégrales suivantes :

$$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dt;\qquad G(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2x}dt$$

Exercice 3
Soit l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2}dt.$

1. *Expliquer, sans la calculer, pourquoi* I *existe.*
2. *Soit* $f(t,x)=\dfrac{1}{x^2+t^2}$, $(t,x)\in[0,1]\times[a,+\infty[$, $a>0$.
3. *Montrer que* $F(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{x^2+t^2}dt$ *est continue et dérivable.*
4. *Montrer que* $F(x)=\dfrac{1}{x}\arctan(\dfrac{1}{x})$ *puis en déduire* F'
5. *Trouver* I

Exercice 4
Etudier suivant les valeurs de x, $\in\mathbb{R}$, *la convergence de l'intégrale*

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^x+t^{2-x}}{t^3+\sqrt{t}}dt$$

Exercice 5
Soit la fonction $F:]1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par* $F(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t}{\sqrt{t^3-1}}dt$

1. *Etudier la continuité et la dérivabilité de* F
2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$. *(Ind : Remarquer que* $\sqrt{t^3-1}\le t^{\frac{3}{2}}$*)*

Exercice 6
Soit la fonction $F(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln(t)}{t^2+x^2}dt$ *pour* $x>0$.

1. *Montrer que* F *est convergente dans* $]0,+\infty[$

2. *Soit* $0 < \varepsilon < \alpha$ *et soit* $I(\varepsilon,\alpha) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{\ln(t)}{t^2+x^2}dt$. *A l'aide du changement de variables* $t = \dfrac{x^2}{y}$, $a > 0$ *; montrer que*

$$I(\varepsilon,\alpha) = -\frac{2\ln(x)}{x}\arctan(\frac{x}{\alpha}) + \frac{2\ln(x)}{x}\arctan(\frac{x}{\varepsilon}) + \int_{x^2/\varepsilon}^{x^2/\alpha} \frac{\ln t}{t^2+x^2}dt$$

3. *Déduire la valeur de* $F(x)$

Exercice 7

Soit l'application $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$, *(*$A, B$ *2 sous-ensembles de* $\mathbb{R}$*), définie par*

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-tx}\sin t}{t} & si \quad t \neq 0 \\ 1 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

I) On suppose que $A = [0,1]$ *et* $B = \mathbb{R}$. *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}\sin t}{t}dt$

1. *Montrer que* F *est continue, dérivable. Calculer* F'
2. *Monter que* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* $\mathbb{R}$.

II) On suppose que $A = [0,+\infty[$ *et* $B =]0,+\infty[$.

1. *Montrer que* F *est continue dans* $[a,+\infty[, \quad \forall a > 0$
2. *Montrer que* F *est dérivable*
3. *Calculer* $F'(x)$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. *Déduire l'expression de* $F(x)$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_* \longrightarrow]0,+\infty[$ *la fonction définie par* $f(t,x) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t}$.

1. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ *est convergente dans* $]0,+\infty[$. *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$.
2. *Etudier la continuité et la dérivabilité de* F
3. *Montrer que* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* $]0,+\infty[$
4. *En calculant* $F(x) - F'(x)$, *montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$ *et que* F *est solution de l'EDO :* $x(y' - y) = -1$ *qui vérifie* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$

Exercice 9

1) Montrer que la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2x}}{t^2}dt$ *est continue et dérivable.*

2) Calculer F' *puis en déduire* F.

Exercice 10

On considère la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+itx)}dt$, $(i \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R})$.

1. *Montrer que* F *est normalement convergente.*
2. *Etudier la continuité et la dérivabilité de* F. F *est-elle de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *?*
3. *Montrer que* $2F'(x) + xF(x) = 0$

4. *Expliciter* F

Exercice 11
Considérons la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-tx^2}\sin x\ dt$.
Comparer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty} xe^{-tx^2}\sin x\ dt$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\lim_{x\to 0}(xe^{-tx^2}\sin x)\ dt$

Exercice 12
On considère la fonction $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^x}dt$

1. *Discuter suivant les valeurs de* x *la convergence de* F
2. *Montrer que la fonction* $f_x : [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par* $f_x(t) = \dfrac{1}{1+t^x}$ *est décroissante* $\forall x > 0$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Exercice 13
Etudier la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

$$a)\ I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt;\ b)\ K = \int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$$

Exercice 14
Etudier la convergence des suites suivantes :

$$a)\quad u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{t^2+nt}dt \quad b)\quad v_n = \int_0^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^{n+1}}dt$$

Exercice 15
Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ *définies par* $f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+n(1-t)}$, $t\in[0,1[$.

1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite dans* $[0,1[$.
2. *Etudier la convergence uniforme dans* $[0,a]; 0 < a < 1$
3. *L'égalité* $\displaystyle\int_0^1\lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$ *est-elle vraie ?*

Exercice 16 (La fonction Gamma d'Euler)
Soit $a > 0$.

1. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge normalement dans* $[a,+\infty[$.
2. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge normalement dans* $]0,a]$
   En déduire que la fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé borné* $[a,b]\subset]0,+\infty[$ *et que la fonction* Γ *est continue dans* $]0,+\infty[$.
3. *Calculer* $\Gamma(1)$ *puis démontrer que* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *pour tout* $x > 0$
4. *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x) = 0$ *et que* $\Gamma(n+1) = n!$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$

Exercice 17
Pour $x > 0$, *on définit l'application* $F(x) = \displaystyle\int_0^1\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-tx}dt$

1. *Montrer que F est continue dans* $[0,+\infty[$
2. *Montrer que F' et F'' existent*
3. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ *puis en déduire* $F(x)$

Exercice 18

1) Montrer que $\ln\left(\dfrac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{t-\cos x}dt$

2) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx$

Exercice 19

A) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)dt = \frac{1}{1+x^2}$.

B) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}\Big(1-\cos(tx)\Big)}{t^2} & si \quad t \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & si \quad t = 0 \end{cases}$

Montrer que f es continue.

C) Soit la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) *Montrer que f est continue*
(b) *Montrer que $F(x)$ est convergente dans* $\mathbb{R}$.
(c) *Montrer que F est continue*
(d) *Montrer est dérivable dans $\mathbb{R}$. Exprimer F'.*
(e) *Montrer $F''(x)$ existe puis en déduire $F''(x)$.*
(f) *Calculer $F(x)$.*

[1]

1. On donne : $|1-\cos u| \leq \frac{u^2}{2}$