الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CONCOURS D'ACCES AUX ECOLES SUPERIEURES EN INFORMATIQUE

Epreuve : Mathématiques
Durée : 2h30
Coefficient : 4

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 3 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation.
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies.
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3,4,...).
- Les documents sont interdits.
- L'emploi d'une calculatrice ou d'un téléphone portable est interdit.
- Aucun échange n'est autorisé entre les candidats.
- Les parties I, II et III sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.
- Les parties I, II et III doivent être rédigées sur des copies séparées.

Barème de notation :
-Partie I : 09 points.
-Partie II : 07 points.
-Partie III : 04 points.

Partie I

Exercice 1. *(4,5 points).*

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose :

$$f(x,y) = x^3y^2(6 - x - y).$$

Trouver les extremums locaux de f.

Exercice 2. *(4,5 points).*

Soit la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), x \in [-\pi, \pi]$.

1. *Calculer les cœfficients de Fourier de f puis écrire la série de Fourier de f.*
2. *Appliquer le théorème de Dirichlet en $x = \pi$.*
3. *Déduire la valeur de la série numérique : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1-4n^2}$.*

Indication : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

Partie II

Exercice (7 points).

Soit m un nombre réel. On considère la matrice suivante dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathrm{A}_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m+2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. Pour quelles valeurs du réel m, A_m est diagonalisable ?
3. Pour $m = -2$ et $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{-2}$, trouver une matrice P inversible telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie III

Exercice (4 points).

Soient α, β et γ trois formules telles que :

α : $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x) \wedge R(y))$

β : $\forall x R(x) \rightarrow \exists x \neg Q(x)$

γ : $\exists x \exists y \neg P(x,y)$

1. Montrer en utilisant la méthode de résolution que $\alpha, \beta \models \gamma$.
2. Retrouver le résultat à l'aide d'un arbre sémantique.

NB. Vous pouvez utiliser indifféremment les symboles $\Rightarrow$ et $\rightarrow$ pour désigner l'implication.