ESI **Janvier 2023**

2CPI **Un corrigé du contrôle final en ANA3** **Durée : 2 heures**

Exercice 1:

En fait on a $f(x) = \dfrac{2}{-(x-1)(x+2)}$, faisons la décomposition en éléments simples, on trouve :

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x}\right) \boxed{0{,}5},$$

Sachant que : $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, $\forall x \in]-1,1[\boxed{0{,}25}$,

et $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\dfrac{-x}{2}\right)^n$, $\forall x \in]-2,2[\boxed{0{,}25}$.

Finalement

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n \boxed{0{,}5},\ \forall x \in]-1,1[\boxed{0{,}5}.$$

Exercice 2:

Posons $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, comme $y(0) = 1$ alors $a_0 = 1 \boxed{0{,}5}$,

On a

$$y\,'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \boxed{0{,}25},\ y\,''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} \boxed{0{,}25};$$

remplaçons dans l'edo donnée:

$$\begin{aligned}
x\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 0 \\
\underbrace{\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1}}_{N=n-1} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}}_{N=n-1} + \underbrace{\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}}_{N=n+1} &= 0 \boxed{0{,}25} \\
\sum_{N\geq 1} (N+1)N a_{N+1} x^N + \sum_{n\geq 0} (N+1) a_{N+1} x^N + \sum_{n\geq 1} a_{N-1} x^N &= 0 \boxed{0{,}25} \\
\sum_{N\geq 1} \left[N(N+1)a_{N+1} + (N+1)a_{N+1} + a_{N-1}\right] x^N + a_1 &= 0 \\
\sum_{n\geq 1} \left[n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right] x^n + a_1 &= 0 \boxed{0{,}5}
\end{aligned}$$

Par identification:

$$a_1 = 0;\ n(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \ \ \forall n \geq 1,$$

il vient

$$\begin{cases} a_1 = 0 \ \boxed{0{,}25}, \\ a_{n+1}\left(n(n+1) + (n+1)\right) = -a_{n-1} \ \ \forall n \geq 1 \ \boxed{0{,}25}. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1} \ \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_{n+1} = \dfrac{-a_{n-1}}{(n+1)^2} \ \ \forall n \geq 1. \end{cases} \quad \boxed{0{,}5}$$

Calculons quelques termes pour voir le comportement de la suite $(a_n)_n$ $\boxed{0{,}5}$:

$$\begin{array}{ll}
a_0 = 1 & a_1 = 0 \\
a_2 = \dfrac{-1}{2^2} & a_3 = 0 \\
a_4 = \dfrac{-\left(\dfrac{-1}{2^2}\right).}{4^2} = \dfrac{1}{2^2.4^2} & \vdots \\
a_6 = \dfrac{-\left(\dfrac{1}{2^2.4^2}\right)}{6^2} = \dfrac{-1}{2^2.4^2.6^2} = \dfrac{-1}{2^2.3^2.4^3} & \vdots \\
a_8 = \dfrac{1}{2^2.3^2.4^3.8^2} = \dfrac{1}{2^2.3^2.4^2.4^4}. & \vdots
\end{array}$$

On obtient alors $a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^p}{(p!)^2 .4^p} & \text{si } n = 2p,\ p \geq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ $\boxed{0{,}5}$

Autre méthode: Reprenons le système

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)^2} a_{n-1} \ \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

On peut aisément vérifier par récurrence que: $\forall n \geq 0 : a_{2n+1} = 0$. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{-1}{(2n)^2} a_{2n-2} = \frac{-1}{2^2 n^2} a_{2(n-1)}, \\
a_{2(n-1)} &= \frac{-1}{2^2 (n-1)^2} a_{2(n-2)}, \\
a_{2(n-2)} &= \frac{-1}{2^2 (n-2)^2} a_{2(n-3)}, \\
& \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_2 &= a_{2(n-(n-1))} = \frac{-1}{2^2 (1)^2} a_{2(n-n)} = \frac{-1}{2^2} a_0 = \frac{-1}{2^2}.
\end{aligned}$$

On peut déduire que

$$\forall n \geq 1,\ a_{2n} = \left(\frac{-1}{2^2 n^2}\right)\left(\frac{-1}{2^2 (n-1)^2}\right)\left(\frac{-1}{2^2 (n-2)^2}\right)\cdots\left(\frac{-1}{2^2}\right) = \frac{(-1)^n}{4^n . (n!)^2}$$

Finalement, la solution de l'équation différentielle (E) est

$$y(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_{2n} x^{2n} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4^n . (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n . (n!)^2} x^{2n} \boxed{0{,}5}$$

qui a pour rayon $R = +\infty$ $\boxed{0{,}5}$.

Exercice 3:

1) Le graphe $\boxed{0{,}5}$.

2) On remarque que la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (donc intégrable sur tout fermé borné de $\mathbb{R}$, elle est localement intégrable) alors $\mathcal{F}(f)$ existe $\boxed{0{,}25}$.

Calcul des coefficients, comme f est paire, $\forall n \geq 1 : b_n = 0$ $\boxed{0{,}25}$.

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$, donc

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-x)\, dx + \frac{2}{\pi} \int_1^\pi 0 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \boxed{0{,}5}$$

$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-x) \cos(nx)\, dx$$

en effectuant une IPP : $\begin{array}{l} \cdot\ u = 1 - x \longrightarrow u' = -1 \\ \cdot\ v' = \cos(nx) \longrightarrow v = \dfrac{\sin(nx)}{n} \end{array}$, il vient

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[(1-x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(nx)dx = \frac{2\,(1-\cos(n))}{\pi n^2}\ \boxed{0{,}75 \text{ pt}}.$$

La série de Fourier associée à f est : Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)\ \boxed{0{,}25},$$

ie:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos(n)}{n^2}\cos(nx).$$

3) Calcul des sommes des séries.

La fonction f est égale à sa série de fourier sur $\mathbb{R}$. Puisque f est $2\pi-$périodique et paire, pour justifier l'égalité, il suffit d'appliquer le corollaire de Dirichlet sur $[0,\pi]$ $\boxed{0{,}25}$.

f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,\pi]$, en effet ($\boxed{1 \text{ pt}}$ pour les conditions):

$\rightsquigarrow$ $f_{/]0,1[}(x) = 1 - x$ est de classe C^1; $f'_{/]0,1[}(x) = -1$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'_{/]0,1[}(x) = -1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'_{/]0,1[}(x) = -1 \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $f_{/]1,\pi[}(x) = 0$ est de classe C^1; $f'_{/]1,\pi[}(x) = 0$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f'_{/]1,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to \pi^-} f'_{/]1,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le graphe) . La série de Fourier $\mathcal{F}(f)$ associée à f est égale à f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos(n)}{n^2}\cos(nx) = f(x).\ \boxed{0{,}25}.$$

Déduction de la somme des séries numériques S_1 et S_1.

Calcul de la somme de S_1 : On a ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(0) &= f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1-\cos(n)}{n^2} = 1 \\ &\Longrightarrow S_1 = \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)\frac{\pi}{2}\ \boxed{0{,}25}, \\ S_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Calcul de la somme de S_2 : Utilisons l'égalité de Parseval pour la fonction f

(qui est $2\pi-$périodique paire), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\,2}(x)dx \ \boxed{0{,}25} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-\cos(n)}{n^2}\right)^2=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{2}{3\pi} \\
&\Rightarrow S_2=\left(\frac{2}{3\pi}-\frac{1}{2\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{4}\ \boxed{0{,}5}, \\
S_2 &= \frac{\pi}{6}-\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

<u>Exercice 4</u>:

I- Utilisons les chemins:

$\rightsquigarrow$ $y=-x \ (x>0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{-2x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{-2x^3}{\left(\sqrt{2}\right)^3|x|^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{-2x^3}{\left(\sqrt{2}\right)^3x^3}=\frac{-2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=l_1\ \boxed{0{,}5},$$

$\rightsquigarrow$ $y=-x \ (x<0)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{-2x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{-2x^3}{\left(\sqrt{2}\right)^3|x|^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{2x^3}{\left(\sqrt{2}\right)^3x^3}=\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=l_2\ \boxed{0{,}5},$$

$l_1\neq l_2$ donc la limite n'existe pas.

II- $\rightsquigarrow$ Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: f est le rapport de polynômes, elle est donc C^1 donc différentiable $\boxed{0{,}5}$.

$\rightsquigarrow$ En $(0,0)$:

Tout d'abord calculons les dérivées partielles premières en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0):\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^2}-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1\ \exists\ \boxed{0{,}5}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0):\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y^3}{y^2}-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^3}{y^3}=-1$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1\ \exists\ \boxed{0{,}5}.$$

A présent utilisons la définition, ie:

$$f\left((0,0)+(h_1,h_2)\right)-f\left(0,0\right)-\left[h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]=\|(h_1,h_2)\|\,.\varepsilon\left(h_1,h_2\right),$$

ie $f(h_1,h_2)-(h_1-h_2)=\|(h_1,h_2)\|.\varepsilon(h_1,h_2)$, choisissons la norme euclidienne.

Voyons si $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)=0$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)\\
=\quad&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\boxed{0{,}5}\\
=\quad&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^3-h_2^3-h_1\left(h_1^2+h_2^2\right)+h_2\left(h_1^2+h_2^2\right)}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
=\quad&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{-h_1h_2^2+h_2h_1^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\boxed{0{,}5}.
\end{aligned}$$

Cette limite n'existe pas $\boxed{0{,}25}$ d'après **I-** donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)$ ne peut etre égale à 0.

On en conclut que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ $\boxed{0{,}25}$.

Questionnaire:

I- Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x < 2,\ x^2 < y < 2x\right\},\ X_0 = (0,0)\,.$

1) Le graphe de D $\boxed{0{,}75}$.

2) $\boxed{0{,}25}$ par bonne réponse.

• D est un ouvert $\boxed{\text{V}}$, un férmé $\boxed{\text{F}}$.

• X_0 est un point extérieur $\boxed{\text{F}}$, frontière $\boxed{\text{V}}$, d'accumulation $\boxed{\text{V}}$.

II- $\boxed{2 \text{ pts}}$

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$d(x,y) = 0 \iff \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y\ . \boxed{0{,}25}$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y,x). \boxed{0{,}25}$$

3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|(x-z)+(z-y)|}{1+|x-y|}.$$

or

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| \ \boxed{0{,}25},$$

c'est l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, en utilisant l'indication il vient:

$$f\left(|x-y|\right) \leq f\left(|x-z|+|z-y|\right) \ \boxed{0{,}25},$$

ce qui donnera $\boxed{1\text{pt}}$:

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} &\leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} = \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \\ &\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|} = d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$