Ecole Supérieure en Informatique
Sidi Bel Abbes

EXAMEN 1 D'ANALYSE 4
DUREE 2H

Exercice 1 (8 pts)

A) On considère la fonction $h(x,y) = (x^2+y^2)^{xy}\,;\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(A1) Déterminer le domaine de définition D_h de h

(A2) Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ la ligne de niveau $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ h(x,y) = 1\}$.

(B) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} h(x,y) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(B1) Etudier la continuité de f au point $(0,0)$.

(B2) f est-elle différentiable au point $(0,0)$?

(B3) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

(B4) Etudier la continuité de ces dérivées partielles au point $(0,0)$.

(B5) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 (9 pts)

Soit la fonction $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3cxy\,;\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(A') Cas $c \neq 0$

(A'1) Calculer $\nabla(f)(x,y)$ et $Hess(f)(x,y)$; le gradient et la matrice hessienne de f.

(A'2) Trouver les points critiques de f et donner leur nature.

(B') Cas $c = 0$

On considère la fonction : $g\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(u,v) = (e^{u+v}\ ,\ e^{u-v})$ et on pose $H = f \circ g$

(a) Quelle est la nature des points critiques de f ?

(b) Donner le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de $(0,0)$ de la fonction H

(c) En déduire les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de H au point $(0,0)$ sans calculer les dérivées partielles de H.

(d) Le point $(0,0)$ est-il un point critique de H. Si oui, donner sa nature.

Exercice 3 (3 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $F(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$.

Calculer $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction de g et de ses dérivées.

<u>Durant l'examen, sont interdits :</u>

1) **Les téléphones portables, les calculatrices, et tous types de documents** .

2) **Les prêts de stylos, de crayons, d'effaceurs etc ......**

Corrigé de l'exo 1 :

(A) On a $h(x,y) = (x^2+y^2)^{xy} = e^{xy\ln(x^2+y^2)}$. De là, on déduit :

(A1) Domaine de définition :

$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ .... **(1)**

(A2) Courbe de niveau Γ :

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ e^{xy\ln(x^2+y^2)} = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ xy\ln(x^2+y^2) = 0\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ .... **(2)**

(B) $f(x,y) = \begin{cases} h(x,y) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

B1) Continuité de f au point $a = (0,0)$:

On utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$. On obtient alors :

$f(x,y) = e^{r^2\cos\theta.\sin\theta\ln(r^2)} = e^{2r^2\ln r\cos\theta.\sin\theta}$.

Donc $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow a} f(x,y) = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} e^{2r^2\ln r\cos\theta.\sin\theta} = e^0 = 1 = f(0,0)$. f est donc continue .... **(1)**

(B2) Différentiabilité de f au point a. On utilise aussi les coordonnées polaires pour le calcul des limites.

On cherche les dérivées partielles premières au point a :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-1}{x} = 0.$

Par symétrie :

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim\limits_{y\longrightarrow 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\longrightarrow 0} \dfrac{1-1}{y} = 0.$

Les dérivées partielles existent au point a.

$\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow a} \dfrac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim\limits_{(h,k)\longrightarrow a} \dfrac{e^{hk\ln(h^2+k^2)}-1}{\|(h,k)\|} = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} \dfrac{e^{2r^2\ln r.\cos\theta.\sin\theta}-1}{r} =$

$= \lim\limits_{r\longrightarrow 0} \dfrac{1+r^2\ln r.\cos\theta.\sin\theta - 1}{r} = 0.$ par utilisation d'un développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de la fonction exponentielle. Donc f est différentiable au point a............ **(1)**

(B3) Calcul des dérivées partielles :

$$\begin{cases} \bullet \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = y\left[\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right] f(x,y) \\ \bullet \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\left[\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right] f(x,y) \end{cases}$$ .... **(0.5+0.5)**

(B4) Continuité des dérivées partielles au point a :

On utilise les coordonnées polaires pour le calcul de la limite :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{r\longrightarrow 0}\left[2r.\ln r.\sin\theta + \frac{2r^3\cos^2\theta.\sin\theta}{r^2}\right] f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow a} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{r\longrightarrow 0}\left[2r.\ln r.\cos\theta + \frac{2r^3\cos\theta.\sin^2\theta}{r^2}\right] f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

Donc les dérivées partielles de f sont continues au point a. .... **(1)**

(B5) Classe de différentiabilité de f dans $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On vient de voir que les dérivées partielles premières de f sont continues. Ce veut dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ .... **(1)**

Corrigé de l'exo 2 :

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3cxy$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(A') $c \neq 0$.

(A'1) • $\nabla(f)(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(3x^2 - 3cy\ ,\ 3y^2 - 3cx\right)$ .... **(1)**

• $Hess(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3c \\ -3c & 6y \end{pmatrix}$ .... **(1)**

(A'2) Les points critiques de f :

Les points critiques de f sont les solutions de l'équation $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$.

$\nabla(f)(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 3x^2 - 3cy = 0 \\ 3y^2 - 3cx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = cy \\ y^2 = cx \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & \dfrac{x^2}{c} \\ 3x(x^3 - c^3) & = & 0 \end{cases}$ Or

$x^3 - c^3 = (x-c)(x^2 + cx + c^2) = 0 \iff x = c$.

De là, les points critiques sont : $a_1 = (0,0)$ et $a_2 = (c,c)$. .... **(1+1)**

• Nature des points critiques :

$\star$ **Pour le point** $a_1 = (0,0)$:

$s^2 - rt = 9c^2 > 0$. Donc a_1 est un col (pas un extremum) .... **(0.5)**

$\star$ **Pour le point** $a_2 = (c,c)$:

$s^2 - rt = (-3c)^2 - (6c)(6c) = -27c^2 < 0$. Donc a_2 est un extremum.

$r = 6c$: $\begin{cases} c > 0 \implies r > 0 \implies f \text{ admet un minimum au point } a_1 \\ c < 0 \implies r < 0 \implies f \text{ admet un maximum au point } a_1 \end{cases}$ .... **(0.5+0.5)**

(B') Cas $c = 0$. Cela implique que $f(x,y) = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.

(a) Nature des point critiques de f :

Il y a un seul point critique a_1.

$s = r = t = 0$ ce qui donne $s^2 - rt = 0$ et on ne peut pas conclure.

$x^2 - xy - y^2 \geqslant 0$ car le déterminant $\Delta = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leqslant 0$. Le signe de f est celui de $x+y$ et $(x+y)$ change de signe dans tout voisinage de $(0,0)$. Donc on a un point col. .... **(0.5)**

(b) Développement limité à l'ordre 2 de $H(x,y) = f(g(x,y)) = e^{3x+3y} + e^{3x-3y}$

$H(x,y) = e^{3x+3y} + e^{3x-3y} = 1 + (3x+3y) + \dfrac{(3x+3y)^2}{2} + 1 + (3x-3y) + \dfrac{(3x-3y)^2}{2} =$

$= 2 + 6x + \dfrac{1}{2}[18x^2 + 18y^2] + o(\|(x,y)\|^2)$ .... **(1)**

(c) Les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de H. En comparant avec la formule de Taylor, on obtient :

$\begin{cases} H(0,0) = 2 \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}(0,0) = 6 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x} = 18 \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 18 \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$ .... **(1.5)**

(d) $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,0) = 6 \neq 0 \implies (0,0)$ n'est pas un point crique donc pas un extremum .... **(0.5)**

Corrigé de l'exo3 :

$F(x,y) = g(f(x,y)) = g(\sqrt{x^2+y^2}) = g(u)$ où $u = \sqrt{x^2+y^2}$ pour alléger les calculs. Alors :

$$\begin{cases} \bullet \quad \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} g'(u) \\ \bullet \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} g'(u) \end{cases}$$ .... **(0.5+0.5)**

$$\begin{cases} \bullet \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} g'(u) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 g''(u) = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} g'(u) + \dfrac{x^2}{x^2+y^2} g''(u) \\ \bullet \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} g'(u) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 g''(u) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} g'(u) + \dfrac{y^2}{x^2+y^2} g''(u) \end{cases}$$ **(0.5+0.5)**

Finalement :

$$\Delta F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} g'(\sqrt{x^2+y^2}) + g''(\sqrt{x^2+y^2})$$ .... **(1)**