L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (9 pts)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in End(E)$. Soit B une base de E et $A = M_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1- Supposons que $\lambda = 0$ est une valeur propre de f. Est ce que f est un automorphisme?

2- Supposons que $P_f(X) = (\alpha - X)^n$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et que f est diagonalisable. Déterminer f (**Ind :** on peut utiliser la matrice A).

3- Supposons que : $A = (a_{ij})$ tel que $a_{ij} = 1$ pour tout $(i, j) \in [[1, n]] \times [[1, n]]$.

a/- Déterminer les valeurs propres de A.

b/- En déduire le déterminant de A.

c/- Montrer que A est diagonalisable.

4- On dit que f est trigonalisable s'il existe une base C de E telle que la matrice associée à f relativement à la base C soit triangulaire supérieure.

Montrer que si f est trigonalisable alors $P_f(X)$ se décompose dans $\mathbb{K}[X]$ en produit de polynômes de degrés 1.

5- Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $P_f(X) = 1 - X^n$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donner une matrice diagonale associée.

Qu'en est-il dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 2 : (6 pts)

Soit $f \in End(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice associée à la base canonique B de $\mathbb{R}^4$ est donnée par:

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1- Soit le polynôme $T(X) \in \mathbb{R}[X]$ défini par : $T(X) = X^2 - 3X + 2$. Calculer $T(A)$.

2- En déduire que toute valeur propre de A est une racine de T.

3- Utiliser la trace de A pour déterminer le spectre de A.

4- Montrer que A est diagonalisable.

5- Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale A' telles que : $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 3 : (5 pts)

Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \alpha x & + & \beta y & +2z & = 1 \\ \alpha x & + & (2\beta - 1)\, y & +3z & = 1 \\ \alpha x & + & \beta y & +(\beta + 3)\, z & = 1 \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont dans } \mathbb{R}.$$

1- Calculer le déterminant de la matrice du système (S) (on note la matrice du système par A).

2- Pour quelles valeurs de α et β le système (S) est-il de Cramer ? Dans ce cas Résoudre (S) dans $\mathbb{R}^3$.

3- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S), suivant les valeurs de α et β dans le cas où (S) n'est pas de Cramer.

Bon courage