ESI, 2CPI	Contrôle final Analyse mathématique 3	Mars 2021 Durée : 2h

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

EXERCICE 1 (2 points) :

Soit $D = D_f / f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2}}$, $X_0 = \left(0, \sqrt{2}\right)$, recopier le tableau suivant et répondre par **oui** ou **non** :

D est un	Borné ☐	Ouvert ☐	Fermé ☐	Voisinage de X_0 ☐
X_0 est un point	intérieur ☐	extérieur ☐	frontière ☐	d'accumulation ☐

EXERCICE 2 (6 points) :

1) Déterminer le domaine de convergence et calculer la somme S de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n(2n)!} x^n.$$

2) Soit une solution de la forme $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de l'équation différentielle suivante :

$$8xy''(x) + 4y'(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1. \tag{1}$$

a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = \dfrac{1}{2(2n)(2n-1)} a_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

b) Déduire une solution de l'EDO (1) développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (à identifier).

EXERCICE 3 (6 points) :

Soit la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, 2π –périodique paire définie par : $f(x) = e^{x+1}$ si $x \in [0, \pi]$.

1) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \int_0^\pi e^{x+1} \cos(nx)dx = \frac{e((-1)^n e^\pi - 1)}{n^2+1}.$$

3) Calculer les coefficients de Fourier de f puis donner sa série de Fourier.

4) Développer f en série de Fourier. Jusitifier votre réponse.

5) En prenant respectivement $x = 0$ et $x = \pi$ dans le développement trouvé dans la question 4) déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$S_1 \doteq \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{et} \quad S_2 \doteq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}.$$

EXERCICE 4 (6 points) : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (si elles existent).

2) En utilisant la définition, étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

3) Déduire $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Partie 2 : Soit la fonction g définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)\ \cos y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de g sur son domaine de définition.

2) g est elle différentiable en $(0,0)$? Justifiez votre réponse.

Quelques DSE :

f	D_f	DSE	R	D
e^x	$\mathbb{R}$	$\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
chx	$\mathbb{R}$	$\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
shx	$\mathbb{R}$	$\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$

Bon courage