Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Novembre 2017**

Corrigé du **Contrôle intermédiaire** **Analyse mathématique 3**

Exercice 1 **(2+1,5+1,5)**

1. $\sum_{n\geq 1} U_n$ telle que $U_n = \sin\left(\frac{a}{n}\right) - \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \quad a \in \mathbb{R}$.

   Appliquons les DL:

$$
\begin{aligned}
\text{On a } \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \log(n+2) - \log(n+1) \\
&= \log\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) - \log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \log n + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) - \log(n) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \log\left(1+\frac{2}{n}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n} - \frac{1}{2}\frac{4}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
\sin\left(\frac{a}{n}\right) &= \frac{a}{n} + \circ\left(\frac{a^2}{n^2}\right). \\
\text{donc} \qquad U_n &= \frac{a-1}{n} - \frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \longleftrightarrow \boxed{\text{1point}}
\end{aligned}
$$

   - $\boxed{\text{0,5 point}}\longleftrightarrow$ Si $a \neq 1$ $\quad U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a-1}{n}$ et $\frac{a-1}{n}$ est de signe constant donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{a-1}{n}$ sont de meme nature

     Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{a-1}{n}$ diverge car $a \neq 1$ alors la série $\sum_{n\geq 1} U_n$ est divergente.

   - $\boxed{\text{0,5 point}}\longleftrightarrow$ Si $a = 1$: $U_n = -\frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n^2} < 0$ donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{2n^2}$ sont de meme nature

   Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{2n^2}$ est convergente alors $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge aussi.

2. $\sum_{n\geq 1} U_n$ telle que $U_n = \dfrac{2^n n!}{n^n} > 0 \hookleftarrow \boxed{\text{0,5 point}}$; On applique la règle de D'alembert:

On a $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \hookleftarrow \boxed{\text{0,25point}} = 2e^{nLog\frac{n}{n+1}}$

$$nLog\frac{n}{n+1} = -nLog\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\frac{Log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{Log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 2e^{-1} < 1 \hookleftarrow \boxed{\text{0,5 point}}$

donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ converge $\hookleftarrow \boxed{\text{0,25 point}}$

3. $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$; Appliquons la règle de l'ordre:

$n^\alpha \dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}} = e^{\alpha Logn}.e^{-\sqrt{n}Log2} = e^{\alpha Logn - \sqrt{n}Log2}$

$\alpha Logn - \sqrt{n}Log2 = \sqrt{n}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}Logn - Log2\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}Logn - Log2\right) = -Log2$

donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}Logn - Log2\right) = -\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right) = 0$ $\hookleftarrow \boxed{\text{1 point}}$ $\forall\alpha$

en particulier pour $\alpha = 2 > 1 \hookleftarrow \boxed{\text{0,5 point}}$ donc la série est convergente.

Exercice 2 **(2+2+1,5+0,5)**

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$ où $f_n(x) = \log\left(1+\dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   $f_n(x) \geq 0$ donc la série est alternée, vérifions alors si elle est de Leibniz $\hookleftarrow \boxed{\text{0,5point}}$:

   - $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\log\left(1+\dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right) = 0 \hookleftarrow \boxed{\text{0,5point}}$
   - Monotonie de f_n (relativement à n): $\hookleftarrow \boxed{\text{1point}}$
     $\dfrac{1}{n}$ est décroissante donc $\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)\dfrac{1}{n}$ est décroissante car $\dfrac{x^2}{1+x^2} \geq 0$

$Log\,(z)$ étant une fonction croissante alors $\log\left(1+\dfrac{x^2}{n\,(1+x^2)}\right)$ est décroissante car c'est la composée d'une fonction croissante avec une suite décroissante.
donc $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\, f_n$ est une série convergente.

2. La CV unif de la série sur $\mathbb{R}$:
La série étant de Leibniz pour qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$
il suffit que la suite de fonction $(f_n(x))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0 $\boxed{\text{0,5point}}$:
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

$$(f_n(x))_n \ \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \text{ vers } 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}\,|f_n(x)|\right) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists v_n \text{ telle que } \ |f_n(x)| \leq v_n\ \forall x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

Calculons $\underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}\,|f_n(x)|$:

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \log\left(1+\frac{x^2}{n\,(1+x^2)}\right) = \log\left(1+\frac{x^2+1-1}{n\,(1+x^2)}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n\,(1+x^2)}\right)$$

$\boxed{\text{0,5point}} \hookrightarrow f_n'(x) = \dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{n\,(1+x^2)}}.\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{n\,(1+x^2)^2 + x^2\,(1+x^2)}$

D'après le tableau de variation de la fonction le sup est atteint aux infinis, la fonction étant paire alors on calcule juste une seule limite:
or $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{n\,(1+x^2)} = \dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1}{n}$

donc $\underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}\,|f_n(x)| = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \hookleftarrow \boxed{\text{0,5point}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ $\hookleftarrow \boxed{\text{0,5point}}$

conclusion: $(f_n(x))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0

<u>Méthode 2</u>:

$|f_n(x)| = f_n(x) = \log\left(1+\dfrac{x^2}{n\,(1+x^2)}\right) \overset{\boxed{0{,}5}}{\leq} \dfrac{x^2}{n\,(1+x^2)} = \dfrac{1}{n}.\dfrac{x^2}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{n}$

$\hookleftarrow \boxed{0{,}5}$ car $\log(1+z) \leq z\ \forall z$ et $\dfrac{x^2}{1+x^2} \leq 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ donc $(f_n(x))_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0. $\hookleftarrow \boxed{0{,}5}$

3. La convergence de cette série est elle normale sur $\mathbb{R}$?

$\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et ssi $\sum_{n\geq 1} \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup} |(-1)^n f_n(x)|$ est convergente

or $|(-1)^n f_n(x)| = f_n(x)$ donc $\sum_{n\geq 1} \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup} |(-1)^n f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge car $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} > 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge $\longleftrightarrow \boxed{\text{1point}}$;

Par coséquent $\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ $\longleftrightarrow \boxed{\text{0,5 point}}$

<u>Méthode 2</u> pour la non convergence normale:

Si $\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors elle converge absolument sur $\mathbb{R}$

ie:$\sum_{n\geq 1} |(-1)^n f_n| = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$ est convergente alors qu'il est facile de vérifier que cette dernière série est divergente pour $x \neq 0$.

4. $\boxed{\text{0,5point}}$ On pose $F(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n(x)$, Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

   - $\forall n$ $(-1)^n f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

     donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> (6 points)

1. Calculer son rayon et son domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{(2n)!} + n5^n\right) x^n$.

   On pose $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ et $b_n = n5^n$ et R_1 le rayon de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et R_2 le rayon de la série $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

- Calcul de R_1 : $R_1 = +\infty \hookleftarrow \boxed{0{,}5\text{point}}$
- Calcul de R_2 : $R_2 = \dfrac{1}{5} \hookleftarrow \boxed{0{,}5\text{point}}$

  R_1 étant différent de R_2 $\hookleftarrow \boxed{0{,}25\text{point}}$ alors $R = Min\,(R_1, R_2) = \dfrac{1}{5}$ $\hookleftarrow \boxed{0{,}25\text{point}}$.
- Calcul du domaine:
  - $\boxed{0{,}5\text{point}} \hookrightarrow$Si $x = \dfrac{1}{5}$: $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \left(\dfrac{1}{5^n}\right)$ converge car le rayon de cette série est égal à $+\infty$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \sum\limits_{n\geq 0} n$ diverge grossièrement;

    donc $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ diverge.
  - $\boxed{0{,}5\text{point}} \hookrightarrow$ Si $x = \dfrac{-1}{5}$: $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \left(\dfrac{-1}{5^n}\right)$ converge car le rayon de cette série est égal à $+\infty$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n \left(\dfrac{-1}{5}\right)^n = \sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n\, n$ diverge grossièrement.

    Conclusion: $D = \left]\dfrac{-1}{5}, \dfrac{1}{5}\right[$.

2. Calculer sa somme.

   $\sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, x^n = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n + \sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n \quad \forall x \in D$

   car les deux séries convergent sur ce domaine $\hookleftarrow \boxed{0{,}5\text{point}}$

   Posons: $S_1(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \quad x \in D$

   $S_2(x) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n \quad x \in D$

   - Calcul de S_1 :

     $S_1(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n)!} x^n$

     (a) $\boxed{0{,}75\text{point}} \hookrightarrow$ Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{5}\right[$, posons $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$, remplaçons dans la série:

     $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n)!} x^n = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n)!} y^{2n} = chy = ch\sqrt{x}.$

     (b) $\boxed{0{,}75\text{point}} \hookrightarrow$ Si $x \in \left]-\dfrac{1}{5}, 0\right]$, posons $y = \sqrt{-x} \Leftrightarrow -x = y^2$, remplaçons dans la série:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}\left(-y^2\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} = \cos y = \cos\sqrt{-x}.$$

- $\boxed{\text{1point}} \hookrightarrow$ Calcul de S_2 :
  $S_2(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} n5^n x^n = \sum_{n\geq 0} n(5x)^n$
  Posons: $y = 5x$ et remplaçons dans la série:
  $$\sum_{n\geq 0} n(5x)^n = \sum_{n\geq 0} ny^n = \sum_{n\geq 1} ny^n = y\sum_{n\geq 1} ny^{n-1} = y\left(\sum_{n\geq 0} y^n\right)' = y\left(\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{y}{(1-y)^2}$$
  $$S_2(x) = \frac{5x}{(1-5x)^2}$$
- $\boxed{\text{0,5point}} \hookrightarrow$ Calcul de S :
  $$S(x) = \begin{cases} ch\sqrt{x} + \dfrac{5x}{(1-5x)^2} & \text{si} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{5}\right[\\ \cos\sqrt{-x} + \dfrac{5x}{(1-5x)^2} & \text{si} \quad x \in \left]-\dfrac{1}{5}, 0\right] \end{cases}$$

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction 2π périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}.$$

1. Tracer la courbe de f. $\boxed{\text{0,25point}}$
2. Déterminer la série de Fourier de f.
   (a) Calcul des coéfficients de Fourier:
   D'après la courbe représentative de f , f est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi] \hookleftarrow \boxed{\text{0,5point}}$;
   f étant impaire alors $a_n = 0 \ \ \forall n \hookleftarrow \boxed{\text{0,25point}}$
   et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \left(\dfrac{-1}{\pi}\right)\dfrac{1}{n}\cos(nt)\Big]_0^\pi = \dfrac{-1}{\pi}.\dfrac{\cos(n\pi)-1}{n} = \dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} \quad \forall n \geq 1 \hookleftarrow \boxed{\text{0,5point}}$
   $$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 2n' \\ \dfrac{2}{(2n'+1)\pi} & \text{si} \quad n = 2n'+1 \end{cases}$$

(b) La série de fourier associée à f :

$$\mathcal{F}f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx) \overset{0{,}5\underline{\text{point}}}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(nx) \overset{0{,}25\underline{\text{point}}}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{n'\geq 0} \frac{\sin((2n'+1)x)}{2n'+1}$$

3. Déduire la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

$S(x) = \frac{\pi}{2} \mathcal{F}f(x)$

Calculons la valeur de $\mathcal{F}f(x)$; pour cela appliquons Dirichlet:

Montrons que f est C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$: $\boxed{\text{1point}}$

- Sur $]-\pi, 0[$: $f(x) = -\frac{1}{2}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\pi, 0[$.
- Sur $]0, \pi[$: $f(x) = \frac{1}{2}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, \pi[$.
- en -π : $\lim_{\substack{x \to -\pi \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to -\pi \\ >}} 0 = 0 \in \mathbb{R}$.
- en 0 : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 0 = 0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} 0 = 0 \in \mathbb{R}$
- en π : $\lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} 0 = 0 \in \mathbb{R}$.

  Conclusion: f est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$ et donc d'après le corollaire de Dirichlet:

  $\mathcal{F}f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  en particulier $\mathcal{F}f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \forall x \in [-\pi, \pi[$ puisque f est 2π périodique.

  $$\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\quad \text{car } f \text{ est continue sur }]-\pi, 0[\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\quad \text{car } f \text{ est continue sur }]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{car } \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\pi \quad \text{car } \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} \end{cases}$$

  $\hookrightarrow \boxed{\text{0,5+0,25point}}$

  donc $S(x) = \frac{\pi}{2} \mathcal{F}f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi}{4} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ \frac{\pi}{4} & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = -\pi \end{cases}$

Méthode 2 pour le Calcul de $\mathcal{F}f$:

- Sur $]-\pi,0[$: $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ est dérivable sur sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\pi,0[$.

  donc $\mathcal{F}f(x) = -\dfrac{1}{2}$ $\forall x \in]-\pi,0[$.

- Sur $]0,\pi[$: $f(x) = \dfrac{1}{2}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,\pi[$,

  donc $\mathcal{F}f(x) = \dfrac{1}{2}$ $\forall x \in]0,\pi[$

- en 0 : $f(0^+) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0^-) = \dfrac{-1}{2}$

  et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0^+)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(0^-)}{x - 0} =$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\frac{-1}{2} - \frac{-1}{2}}{2} = 0 \in \mathbb{R}$

  donc $\mathcal{F}f(0) = \dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 0$

- en π : $f(\pi^+) = f\left((-\pi)^+\right) = \dfrac{-1}{2}$ et $f(\pi^-) = \dfrac{1}{2}$

  $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} \dfrac{f(x) - f(\pi^+)}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} \dfrac{f(x) - f\left((-\pi)^+\right)}{x + \pi} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\frac{-1}{2} - \frac{-1}{2}}{x} =$
  $0 \in \mathbb{R}$

  et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \dfrac{f(x) - f(\pi^-)}{x - \pi} = \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 00 \in \mathbb{R}$

  donc d'après le théorème de Dirichlet:

  $\mathcal{F}f(\pi) = \dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 0$