Documents interdits (la table des TL est au verso)

Exercice1 :(6 points)

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2 + x} dt$, où $f(t,x) = \frac{\log t}{t^2 + x}$.

1) Etudier la convergence simple de F dans $\mathbb{R}_+^*$.
2) Etudier la continuité de F sur $[A, +\infty[$ $A > 0$, puis conclure.
3) Etudier la dérivabilité de F dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice2 :(5,5 points)

Calculer:

1) $\mathcal{L}\left((t+2)\,e^t + e^{-t}\cos(2t)\right)$.

2) $\int\limits_0^{+\infty} te^{-3t} \sin t dt$.

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3x+16}{x^2 - x - 6} + \frac{1}{x\,(x^2+4)}\right)$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)$

Exercice3 :(5,5 points)

Pour $\alpha > 0$, on pose $f(t) = e^{-\alpha|t|}$.

1) Calculer $\mathcal{F}f$

2) A l'aide de la formule d'inversion de Fourier, calculer la valeur de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2 + \alpha^2} dx$.

3) Trouver b et c tels que: $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{b}{(x^2+1)} + \frac{c}{(x^2+4)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation différentielle $-y" + y = e^{-2|t|}$ où y est une fonction telle que:

$*y,\ y',\ y" \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et y continue sur $\mathbb{R}$.

et $*\,y$ est dérivable à droite et à gauche de tout point de $\mathbb{R}$.

Rappel: L'opérateur $\mathcal{F}$ est linéaire et $\mathcal{F}g'(x) = ix\mathcal{F}g(x)$ pour $g,\ g' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice4 :(3 points)

I- Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, justifier vos réponses.

Pour toute partie non vide D de $\mathbb{R}^2$; on a

a) Si $A \notin D$ alors A est un point extérieur à D.
b) Si A est un point intérieur à D alors A est un point d'accumulation de D.
c) Si $A \in fr(D)$ alors A est un point d'accumulation de D.

II- On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|$ définie par : $\|(x,y)\| = \max(|x|, |x-y|)$.

Représenter graphiquement la boule ouverte $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

Un corrigé:

Exercice1 :

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2 + x} dt$, où $f(t, x) = \frac{\log t}{t^2 + x}$.

1) La convergence simple de F dans $\mathbb{R}_+^*$., $f \in R_{loc}]0, +\infty[$.

* Au $v(+\infty)$: $f(t, x) \sim \frac{\log t}{t^2} \geq 0$ or $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^2} dt$ converge (IB) donc $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ converge

* Au $v(0^+)$: $f(t, x) \sim \frac{\log t}{x} \geq 0$ or $\int\limits_0^1 \frac{\log t}{x} dt$ converge (IB) donc $\int\limits_0^1 f(t)dt$ converge

On en conclut que $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge pour tout $x > 0$.

2) La continuité de F sur $[A, +\infty[$ $A > 0$; on applique le théorème de conservation de la continuité:

$\rightsquigarrow$ f est continue par morceaux selon t sur $]0, +\infty[$ car rapport ...

$\rightsquigarrow$ f est continue selon x sur $]0, +\infty[$ car rapport ...

$\rightsquigarrow$ $|f(t, x)| = \frac{|\log t|}{t^2 + x} \leq \frac{|\log t|}{t^2 + A} = g(t),\ \forall x \in [A + \infty[\subset]0, +\infty[$.

Or $\int\limits_0^1 \frac{|\log t|}{t^2 + A} dt$ et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\log t|}{t^2 + A} dt$ convergent (IB), voir question1

Donc F est continue sur tout $[A, +\infty[$ $A > 0$, alors elle est continue sur $]0, +\infty[$.

3) La dérivabilité de F dans $\mathbb{R}_+^*$. $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{-\log t}{(t^2 + x)^2}$; on applique le théorème de conservation de la dérivabilité:

$\rightsquigarrow$ f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues par morceaux selon t car rapport ...

$\rightsquigarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue selon x car rapport ...

$\rightsquigarrow$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| = \frac{|\log t|}{(t^2 + x)^2} \leq \frac{|\log t|}{(t^2 + A)^2} = h(t),\ \forall x \in [A + \infty[\subset]0, +\infty[$.

Or $\int\limits_0^{+\infty} h(t)\, dt$ converge (équivalence et IB)

Donc F est de classe C^1 sur tout $[A, +\infty[,\ A > 0$, donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice2:

1)

$$\mathcal{L}\left((t+2)\, e^t + e^{-t}\cos(2t)\right) = \mathcal{L}\left(te^t\right) + 2\mathcal{L}\left(e^t\right) + \mathcal{L}\left(e^{-t}\cos(2t)\right)$$
$$= -\left[\mathcal{L}\left(e^t\right)\right]' + 2.\left(\frac{1}{x-1}\right) + \mathcal{L}\left(\cos(2t)\right)(x+1),\ x > 1$$
$$= -\left(\frac{1}{x-1}\right)' + 2.\left(\frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{x+1}{(x+1)^2 + 4}\right),\ x > 1$$
$$= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + 4},\ x > 1$$

2) $\int\limits_0^{+\infty} te^{-3t}\sin t dt = \mathcal{L}\left(t\sin(t)\right)(3) = -\left[\mathcal{L}\left(\sin(t)\right)\right]'(3) = -\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' /_{x=3} =$
$\frac{3}{50}$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3x+16}{x^2-x-6}+\frac{1}{x\left(x^2+4\right)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3x+16}{x^2-x-6}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x\left(x^2+4\right)}\right)$

★ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3x+16}{x^2-x-6}\right)$: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$, on applique Heauviside:
$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3x+16}{x^2-x-6}\right) = -2e^{-2t}+5e^{3t}$.

★ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x\left(x^2+4\right)}\right) = \int\limits_0^t \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(x^2+4\right)}\right)(u)\, du = \int\limits_0^t \frac{1}{2}\sin(2u)\, du = \frac{1}{4}\left(1-\cos(2t)\right).$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'\right) = \frac{1}{2}t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}t\sin t.$

Exercice3:

1) ★ $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, en effet f est continue paire sur $\mathbb{R}$ (mais $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$),
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}dt = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge au $v(+\infty)$ (réf).

★ $\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)\, dt = 2\int\limits_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t}dt$ mais on peut ne pas utiliser la parité de f pour éviter 2IPP).

$\rightsquigarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-ixt}f(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ixt}e^{-\alpha t}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(ix+\alpha)t}dt = \frac{-1}{(ix+\alpha)}\left[e^{-ixt}e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty} =$
$\frac{1}{(ix+\alpha)}$

$\rightsquigarrow \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ixt}e^{\alpha t}dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-(ix-\alpha)t}dt = \frac{-1}{(ix-\alpha)}\left[e^{-ixt}e^{\alpha t}\right]_{-\infty}^{0} =$
$\frac{1}{(\alpha-ix)}$

Donc $\mathcal{F}f(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ixt}f(t)\, dt + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t)\, dt = \frac{1}{(ix+\alpha)} + \frac{1}{(\alpha-ix)} =$
$\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Appliquons la FIF sur $\mathbb{R}^*$ à f :
Puisque ★ f est continue et dérivable en tout $x \in \mathbb{R}^*$.
de plus ★ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}(\mathcal{F}f)(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}.\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}\right)dx$ converge (car elle conv.

abs. $\left|e^{iax}.\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}\right)\right| \leq \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}$ puis IR)

alors $f(a) = e^{-\alpha|a|} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}.\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}dx \overset{paire}{=} \dfrac{2\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\cos(xa)}{\alpha^2+x^2}dx$, on obtient alors:

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|x|}\ \forall x\in\mathbb{R}^*$. Pour $x=0$: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{+\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}dx}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\left[arctg\frac{x}{\alpha}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$

On en conclut :

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|x|}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

3) $\dfrac{1}{(1+x^2)(4+x^2)} = \dfrac{bx^2+4b+cx^2+c}{(1+x^2)(1+4x^2)}$.On identifie:$\begin{cases} b+c=0 \\ 4b+c=1 \end{cases}$

on trouve $b=\dfrac{1}{3},\ c=-\dfrac{1}{3}$.

4) Résourde $-y''+y=e^{-2|t|}$, appliquons la TF aux deux membres:

on rappelle que l'opérateur $\mathcal{F}$ est linéaire et que $(\mathcal{F}f')(x) = ix(\mathcal{F}f)(x)$,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\quad -\mathcal{F}(y'')+\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}\left(e^{-2|t|}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad -ix(\mathcal{F}y')(x)+\mathcal{F}(y)(x) = \mathcal{F}\left(e^{-2|t|}\right)(x)\\
&\Leftrightarrow\quad x^2(\mathcal{F}y)(x)+\mathcal{F}(y)(x) = \mathcal{F}\left(e^{-2|t|}\right)(x)\\
&\Leftrightarrow\quad (\mathcal{F}y)(x) = \frac{1}{1+x^2}\mathcal{F}\left(e^{-2|t|}\right)(x) = \frac{1}{1+x^2}.\frac{4}{4+x^2}\\
&\Leftrightarrow\quad (\mathcal{F}y)(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{4+x^2}\right)
\end{aligned}$$

Appliquons le TIF, les cdts sont réunies: $y(a) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{4}{3}\left(\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\cos(ax)\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{4+x^2}\right)dx\right)$

or $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|x|} \Longrightarrow y(x) = \frac{2}{3}\left(e^{-|x|}-\frac{1}{2}e^{-2|x|}\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Exercice4:

I- 1) Fausse, exp: $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2<1\right\},\ A=(0,1)$. 2) Vraie, voir déf.

3) Fausse, exp: $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2<1\right\}\cup\{(2,1)\},\ A=(2,1)$.

II- $B((0,0),1) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ \|(x,y)\|<1\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ \max(|x|,|x-y|)<1\right\}$ on la traite comme la norme uniforme: $B((0,0),1) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ |x|<1 \text{ et } |x-y|<1\right\}$