Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (8, 4)

On se donne quatre formules α_1, α_2, α_3 et β telles que :

$\alpha_1 : \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(x,y))$

$\alpha_2 : \exists x \exists y \; P(x) \wedge Q(y)$

$\alpha_3 : \exists x \exists y \; \neg P(x) \vee \neg Q(y)$

$\beta : \exists x \exists y \; R(x,y)$

Question 1 (2, 2, 2, 2)

Donner :

1. un modèle de l'ensemble S : $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$
2. une interprétation qui falsifie S.
3. deux modèles de Herbrand de S. Ces modèles seront aussi petits que possible.
4. deux interprétations de Herbrand qui falsifient S

Question 2 (4)

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que : $S \vdash \beta$

Exercice 2 (2-4)

Question 1. Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

E_1 : Il y'a un x tel que : tous ceux qui sont plus grands que x sont grands et tous ceux qui sont plus petits que x sont petits.

E_2 : *Si* x est plus grand que y *alors* y est plus petit que x.

E_3 : Si x est grand alors il n'est pas petit.

E_4 : Il existe un x qui n'est pas plus grand que lui-même.

Question 2. Déduire E_4 à partir de E_1, E_2 et E_3. (Ne pas utiliser la propriété de complétude de la résolution).

Exercice 3 (2)

Trouver la plus générale instance commune aux expressions suivantes si elle existe :

$E_1 : Q(x, y)$ et $E_2 : Q(f(y), g(x))$

Correction

Exercice I

Question 1.

Un modèle de l'ensemble S :

P : pair Q : impair R : x est un multiple de y

D : {3,6}

Une interprétation qui falsifie S : (i-e qui falsifie au moins une formule de S)

P : pair Q : impair R : x est un multiple de y

D : {2,4,6}

Cette interprétation falsifie α_2.

Deux modèles de Herbrand de S :

→ Mettre sous forme de Skolem **(0.25 pt)**

→ Mettre sous forme clausale : **(0.25 pt)**

S' : {$\neg$P(x) $\vee$ $\neg$Q(y) $\vee$ R(x,y), P(a), Q(b), $\neg$P(c)$\vee$$\neg$Q(d)}

→ Deux modèles de Herbrand de S

- M_1 : { P(a), Q(b), $\neg$P(c) } **(0.75 pt)**
- M_2 : { P(a), Q(b), $\neg$P(d)} **(0.75 pt)**

→ Deux interprétations de Herbrand qui falsifient

- I_1 : {$\neg$P(a)} **(1 pt)**
- I_2 : {$\neg$Q(b)} **(1 pt)**

Question 2.

Montrer que S $\vdash$ β ssi S ∪ {$\neg$β} inconsistant ssi de l'ensemble de clauses issu de S ∪ {$\neg$β} on peut déduire la clause vide

C_1 : $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(x,y)$

C_2 : $P(a)$

C_3 : $Q(b)$

C_4 : $\neg P(c) \vee \neg Q(d)$

C_5 : $\neg R(u,v)$

C_6 : $\neg R(x,y)$

C_7 : $\neg P(x) \vee \neg Q(y)$ res (1,6)

C_8 : $\neg P(a) \vee \neg Q(y)$

C_9 : $\neg Q(y)$ res (2,8)

C_{10} : $\neg Q(b)$

C_{11} : $\square$ res (3,10)

Exercice 2 (2-4)

Question 1. 0,5 point par expression

E_1 : Il y'a un x tel que : tous ceux qui sont plus grands que x sont grands et tous ceux qui sont plus petits que x sont petits.

$$\beta_1 : \exists x \forall y \big((G(y,x) \rightarrow G(y)) \wedge (P(y,x) \rightarrow P(y)) \big)$$

E_2 : *Si* x est plus grand que y *alors* y est plus petit que x.

$$\beta_2 : \forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

E_3 : Si x est grand alors il n'est pas petit.

$$\beta_3 : \forall x (G(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Question 2. Déduire de E_1 et E_2 qu'il existe un x qui n'est pas plus grand que lui-même : γ : $\exists x \neg G(x,x)$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \vdash \gamma$ ssi $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \neg\gamma\}$ inconsistant ssi de l'ensemble S de clauses on peut déduire la clause vide.

Forme de Skolem : (0.5 pt)

$\forall y \big((G(y,a) \rightarrow G(y)) \wedge (P(y,a) \rightarrow P(y)) \big)$
$\forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow P(y,x))$
$\forall x (G(x) \rightarrow \neg P(x))$
$\forall x G(x,x)$

Ensemble de clauses : (0.5 pt)

S : $\{\neg G(y,a) \vee G(y),\ \neg P(y,a) \vee P(y),\ \neg G(x,y) \vee P(y,x), \neg G(x) \vee \neg P(x),\ G(x,x)\}$

On renomme les variables : (0.5 pt)

S' : $\{\neg G(y,a) \vee G(y),\ \neg P(z,a) \vee P(z),\ \neg G(u,v) \vee P(v,u), \neg G(w) \vee \neg P(w),\ G(x,x)\}$

Déduction de la clause vide : (2.5 pt)

$c_1 : \neg G(y,a) \vee G(y)$	
$c_2 : \neg P(z,a) \vee P(z)$	
$c_3 : \neg G(u,v) \vee P(v,u)$	
$c_4 : \neg G(w) \vee \neg P(w)$	
$c_5 : G(x,x)$	
$c_6 : \neg G(x,x) \vee P(x,x)$	$c_3[x/u,\ x/v]$
c_7 : $\mathbf{P(x,x)}$	res (5,6)
$c_9 : P(a,a)$	$c_7 : [a/x]$
$c_{10} : P(a)$	res (2,9)
$c_{11} : \neg G(a)$	res (4,10)
$c_{12} : \neg G(a,a)$	res (1,11)
$c_{13} : G(a,a)$	$c_5[a/x]$
$c_{14} : \square$	

Exercice 3 (2)

Trouver la plus générale instance commune aux expressions suivantes si elle existe :

$E_1 : Q(x, y)$ et $E_2 : Q(f(y), g(x))$

On renomme les variables **(1 pt)**

$E_1 : Q(u, v)$ et $E_2 : Q(f(y), g(x))$

$\theta_1 : \{ f(y)/u\}$

$E_{1\theta 1} : Q(f(y), v)$ et $E_2\theta_1 : Q(f(y), g(x))$

$\theta_2 : \{f(y)/u\} \circ \{\{g(x)/v\} = \{f(y)/u, g(x)/v\}$

$E_{1\theta 2} : Q(f(y), g(x))$ et $E_{2\theta 2} : Q(f(y), g(x))$

La plus générale instance commune aux 2 expressions est : $Q(f(y), g(x))$ **(1 pt)**