

Durée 2 heures
Tout document interdit

Exercice 1 (8, 4)

On se donne quatre formules α_1 , α_2 , α_3 et β telles que :

$$\alpha_1 : \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y) \rightarrow R(x, y))$$

$$\alpha_2 : \exists x \exists y P(x) \wedge Q(y)$$

$$\alpha_3 : \exists x \exists y \neg P(x) \vee \neg Q(y)$$

$$\beta : \exists x \exists y R(x, y)$$

Question 1 (2, 2, 2, 2)

Donner :

1. un modèle de l'ensemble $S : \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$
2. une interprétation qui falsifie S .
3. deux modèles de Herbrand de S . Ces modèles seront aussi petits que possible.
4. deux interprétations de Herbrand qui falsifient S

Question 2 (4)

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que : $S \vdash \beta$

Exercice 2 (2-4)

Question 1. Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

E₁ : Il y'a un x tel que : tous ceux qui sont plus grands que x sont grands et tous ceux qui sont plus petits que x sont petits.

E₂ : Si x est plus grand que y alors y est plus petit que x .

E₃ : Si x est grand alors il n'est pas petit.

E₄ : Il existe un x qui n'est pas plus grand que lui-même.

Question 2. Dédurre E_4 à partir de E_1 , E_2 et E_3 . (Ne pas utiliser la propriété de complétude de la résolution).

Exercice 3 (2)

Trouver la plus générale instance commune aux expressions suivantes si elle existe :

$$E_1 : Q(x, y) \text{ et } E_2 : Q(f(y), g(x))$$

Correction

Exercice I

Question 1.

Un modèle de l'ensemble S :

P : pair Q : impair R : x est un multiple de y
D : {3,6}

Une interprétation qui falsifie S : (i-e qui falsifie au moins une formule de S)

P : pair Q : impair R : x est un multiple de y
D : {2,4,6}

Cette interprétation falsifie α_2 .

Deux modèles de Herbrand de S :

→ Mettre sous forme de Skolem (0.25 pt)

→ Mettre sous forme clausale : (0.25 pt)

$S' : \{ \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(x,y), P(a), Q(b), \neg P(c) \vee \neg Q(d) \}$

→ Deux modèles de Herbrand de S

- $M_1 : \{ P(a), Q(b), \neg P(c) \}$ (0.75 pt)
- $M_2 : \{ P(a), Q(b), \neg P(d) \}$ (0.75 pt)

→ Deux interprétations de Herbrand qui falsifient

- $I_1 : \{ \neg P(a) \}$ (1 pt)
- $I_2 : \{ \neg Q(b) \}$ (1 pt)

Question 2.

Montrer que $S \models \beta$ ssi $S \cup \{ \neg \beta \}$ inconsistant ssi de l'ensemble de clauses issu de $S \cup \{ \neg \beta \}$ on peut déduire la clause vide

$C_1 : \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(x,y)$

$C_2 : P(a)$

$C_3 : Q(b)$

$C_4 : \neg P(c) \vee \neg Q(d)$

$C_5 : \neg R(u,v)$

$C_6 : \neg R(x,y)$

$C_7 : \neg P(x) \vee \neg Q(y)$ res (1,6)

$C_8 : \neg P(a) \vee \neg Q(y)$

$C_9 : \neg Q(y)$ res (2,8)

$C_{10} : \neg Q(b)$

$C_{11} : \square$ res (3,10)

Exercice 2 (2-4)**Question 1. 0,5 point par expression**

E_1 : Il y'a un x tel que : tous ceux qui sont plus grands que x sont grands et tous ceux qui sont plus petits que x sont petits.

$$\beta_1 : \exists x \forall y ((G(y,x) \rightarrow G(y)) \wedge (P(y,x) \rightarrow P(y)))$$

E_2 : Si x est plus grand que y alors y est plus petit que x .

$$\beta_2 : \forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

E_3 : Si x est grand alors il n'est pas petit.

$$\beta_3 : \forall x (G(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Question 2. Dédurre de E_1 et E_2 qu'il existe un x qui n'est pas plus grand que lui-même : $\gamma : \exists x \neg G(x,x)$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \vdash \gamma$ ssi $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \neg \gamma\}$ inconsistant ssi de l'ensemble S de clauses on peut déduire la clause vide.

Forme de Skolem : (0.5 pt)

$$\forall y ((G(y,a) \rightarrow G(y)) \wedge (P(y,a) \rightarrow P(y)))$$

$$\forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

$$\forall x (G(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x G(x,x)$$

Ensemble de clauses : (0.5 pt)

$$S : \{ \neg G(y,a) \vee G(y), \neg P(y,a) \vee P(y), \neg G(x,y) \vee P(y,x), \neg G(x) \vee \neg P(x), G(x,x) \}$$

On renomme les variables : (0.5 pt)

$$S' : \{ \neg G(y,a) \vee G(y), \neg P(z,a) \vee P(z), \neg G(u,v) \vee P(v,u), \neg G(w) \vee \neg P(w), G(x,x) \}$$

Dédution de la clause vide : (2.5 pt)

$$c_1 : \neg G(y,a) \vee G(y)$$

$$c_2 : \neg P(z,a) \vee P(z)$$

$$c_3 : \neg G(u,v) \vee P(v,u)$$

$$c_4 : \neg G(w) \vee \neg P(w)$$

$$c_5 : G(x,x)$$

$$c_6 : \neg G(x,x) \vee P(x,x)$$

$$c_3[x/u, x/v]$$

$$c_7 : P(x,x)$$

$$\text{res}(5,6)$$

$$c_9 : P(a,a)$$

$$c_7 : [a/x]$$

$$c_{10} : P(a)$$

$$\text{res}(2,9)$$

$$c_{11} : \neg G(a)$$

$$\text{res}(4,10)$$

$$c_{12} : \neg G(a,a)$$

$$\text{res}(1,11)$$

$$c_{13} : G(a,a)$$

$$c_5[a/x]$$

$$c_{14} : \square$$

Exercice 3 (2)

Trouver la plus générale instance commune aux expressions suivantes si elle existe :

$$E_1 : Q(x, y) \text{ et } E_2 : Q(f(y), g(x))$$

On renomme les variables **(1 pt)**

$$E_1 : Q(u, v) \text{ et } E_2 : Q(f(y), g(x))$$

$$\theta_1 : \{ f(y)/u \}$$

$$E_{1\theta_1} : Q(f(y), v) \text{ et } E_{2\theta_1} : Q(f(y), g(x))$$

$$\theta_2 : \{ f(y)/u \} \circ \{ \{ g(x)/v \} = \{ f(y)/u, g(x)/v \} \}$$

$$E_{1\theta_2} : Q(f(y), g(x)) \text{ et } E_{2\theta_2} : Q(f(y), g(x))$$

La plus générale instance commune aux 2 expressions est : $Q(f(y), g(x))$ **(1 pt)**