N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (5 pt) On considère le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ et $C = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $C_1 = (w_1 = (1,1,-1), w_2 = (1,-1,1), w_3 = (-1,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

1- Déterminer la matrice P de passage de C vers C_1.

Solution: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(0.5 pt)**

2- Déterminer P^{-1}.

Solution: On a:

$$\begin{cases} w_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ w_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ w_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} w_1 + w_2 = 2e_1 \\ w_2 + w_3 = 2e_3 \\ w_1 + w_3 = 2e_2 \end{cases}$$

On en déduit que: $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 pt)**

3- Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement aux bases canoniques respectives B et C de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i/- Déterminer en échelennant la matrice A une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.

Solution: Les colonnes de la matrice A sont données par $f(1), f(X), f(X^2)$ et $f(X^3)$ respectivement. On a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons par C_i les colonnes de cette dernière matrice. On a alors:

$$C_1 = f(1), C_2 = f(X^2 - 1), C_3 = f(X - 1) \text{ et } C_4 = f(X^3 + X^2 + X - 2).$$

On en déduit que $(X^3 + X^2 + X - 2)$ est une base de $\ker f$ et $((1,1,1), (0,-1,0), (0,0,-1))$ est une base de $\mathrm{Im} f$. **(0.5 pt + 0.5 pt)**

ii/- Déterminer l'expression de f.

Solution:
Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \lambda X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Au vecteur P on associe la matrice colonne

$$M_P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

On a alors:

$$AM_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta+\lambda \\ \alpha+\gamma+\lambda \end{pmatrix}.$$

On en déduit que:

$$f(\alpha + \beta X + \gamma X^2 + \lambda X^3) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+\lambda, \alpha+\gamma+\lambda). \quad \textbf{(1 pt)}$$

4- Soit $B_1 = (P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X + X^2, P_4 = 1 + X + X^2 + X^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de passage Q de B vers B_1.

Solution: On a:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

5- En déduire la matrice : $A' = M_{B_1,C_1}(f)$.

Solution: On a:

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AQ. & \textbf{(0.5 pt)} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}. & \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

Exercice 2 : (2,5 pt)
Soit la permutation $\sigma \in S_8$ définie comme suit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 5 & 8 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1- Décomposer la permutation σ en produit de transpositions.

Solution: On a: $\sigma = \tau_{2,7} \cdot \tau_{7,4} \cdot \tau_{4,8} \cdot \tau_{3,5} \cdot \tau_{5,6}$. **(1 pt)**
2- En déduire la signature de la permutation σ.

Solution: On a: $\epsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$. **(0.5 pt)**

3- Donner σ^{-1} l'inverse de la permutation σ.

Solution: En utilisant la première expression de σ, on obtient:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \\ 1 & 8 & 6 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Une autre méthode : En utilisant la décomposition de σ en produit de transpositions et en utilisant le fait que chaque transposition est inverse d'elle même, on obtient:

$$\sigma^{-1} = (\tau_{2,7} \cdot \tau_{7,4} \cdot \tau_{4,8} \cdot \tau_{3,5} \cdot \tau_{5,6})^{-1},$$

i.e.,

$$\sigma^{-1} = \tau_{5,6} \cdot \tau_{3,5} \cdot \tau_{4,8} \cdot \tau_{7,4} \cdot \tau_{2,7}.$$

Exercice 3 : (2,5 pt pts) (Les deux questions suivantes sont indépendantes)

1- On considère le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit (v_1, v_2, v_3) une famille de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Exprimer, en justifiant, les déterminants ci-dessous en fonction de $\det_B(v_1, v_2, v_3)$:

$$\det_B(v_3, v_1, v_2) \text{ et } \det_B(v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, v_3) \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i \in [[1, 3]]\,.$$

Solution:

• Puisque $\det_B$ est antisymétrique, on a:

$$\det_B(v_3, v_1, v_2) = -\det_B(v_1, v_3, v_2) = \det_B(v_1, v_2, v_3). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Une autre méthode :

$$\det_B(v_3, v_1, v_2) = \det_B(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \epsilon(\sigma)\det_B(v_1, v_2, v_3) = \det_B(v_1, v_2, v_3),$$

avec $\sigma = \tau_{1,3} \cdot \tau_{3,2} \in S_3$, donc $\epsilon(\sigma) = 1$.

• Puisque $\det_B$ est linéaire par rapport à la deuxième variable, on a:

$$\det_B(v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, v_3) = \alpha_1 \det_B(v_1, v_1, v_3) + \alpha_2 \det_B(v_1, v_2, v_3) + \alpha_3 \det_B(v_1, v_3, v_3).$$

De plus, $\det_B$ est alternée, on en déduit que:

$$\det_B(v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, v_3) = \alpha_2 \det_B(v_1, v_2, v_3). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

2- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit : $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}^3$ relativement à sa base canonique. Donner, en utilisant le calcul de déterminant, une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre α pour que f_α soit bijective.

Solution: On a: f_α bijective $\iff$ M_α inversible $\iff$ $\det M_\alpha \neq 0$.
Puisque $\det M_\alpha = \alpha - 4$. **(1 pt)**,
on en déduit que f_α est bijective si et seulement si $\alpha \neq 4$. **(0.5 pt)**