Logique Mathématique

Contrôle Final

Durée 2heures

Tout document interdit

Exercice 1 (2)

Montrer à l'aide de la résolution (en indiquant le MGU à chaque étape) que l'ensemble

$$S : \{\neg P(u,v) \vee \neg P(v,z) \vee R(w),\ P(f(u), y),\ \neg R(w)\}$$

est inconsistant.

Exercice 2 ((1,1,1) – 4)

Montrer que l'ensemble formé des énoncés E_1, E_2 et E_3 ci-dessous est inconsistant.

1. Il est faux que tous les problèmes ont des solutions.
2. Chaque problème a au moins deux solutions.
3. Certains problèmes ont la même solution.

Exercice 3 (2)

Le formule φ ci-dessous est-elle satisfiable, valide, non satisfiable ?

$$\varphi : \forall x(R(x) \wedge \neg R(g(x)) \wedge \neg R(h(x)))$$

Exercice 4 (2,2)

Soient α et β deux formules telles que :

$$\alpha : \forall x\exists y(P(x) \to P(y)) \qquad \beta : \exists y\forall x(P(x) \to P(y))$$

Questions :

Les propositions suivantes sont-elles valides ?

Q1. $\alpha \equiv \beta$

Q2. $\alpha_S \equiv \beta_S$

Exercice 5 (2,1)

Etant données α une formule du langage des prédicat et α_S l'une de ces formes de Skolem, la proposition suivante est-elle valide ?

P1. *Si* $(\neg\alpha)$ est satisfiable *alors* $\neg(\alpha_S)$ est satisfiable.

P2. Si $\neg(\alpha_S)$ est satisfiable *alors* $(\neg\alpha)$ est satisfiable.

Exercice 6 (2)

Montrer les étapes logiques qui justifient le passage de la clause C : $\forall x\forall y P(x,y)$ à la clause C_θ : $\forall u\forall y P(f(u,v),y)$ avec $\theta = \{ f(u,v)/x \}$.

N.B. Il ne vous sera remis qu'un seul cahier d'examen (sans intercalaire). Prenez en soin.

Correction

Exercice 1 (2)

Montrer à l'aide de la résolution (en indiquant le MGU à chaque étape) que l'ensemble

$$S : \{\neg P(u,v) \vee \neg P(v,z) \vee R(w),\ P(f(u), y),\ \neg R(w)\}$$

est inconsistant.

Solution

$C_0 : \neg P(u,v) \vee \neg P(v,z) \vee R(w)$

$C_1 : P(f(x), y)$

$C_2 : \neg R(w)$

$C_3 : \neg P(u,v) \vee \neg P(v,z)$ Res (C_0, C_2)

$C_4 : \neg P(f(x),y) \vee \neg P(y,z)$ $C_3[f(x)/u, y/v]$

$C_5 : \neg P(y,z)$ Res (C_1, C_4)

$C_6 : \neg P(s,t)$ $C_5[s/y, t/z]$

$C_7 : \neg P(f(x), y)$ $C_6[f(x)/s, y/t]$

$C_8 : \square$ Res (C_1, C_7)

Exercice 2. ((1,1,1) – 4),

Montrer que l'ensemble formé des énoncés E_1, E_2 et E_3 ci-dessous est inconsistant.

4. Il est faux que tous les problèmes ont des solutions.
5. Chaque problème a au moins deux solutions.
6. Certains problèmes ont la même solution.

$P(x)$: x est un problème
$S(x,y)$: x est une solution au problème y
$E(x,y)$: x est égal à y

$\beta_1 : \neg\big(\forall x\big(P(x) \rightarrow \exists y S(y,x)\big)\big)$ 1 point

$\beta_2 : \forall x\big(P(x) \rightarrow \exists y \exists z\big(S(y,x) \wedge S(z,x) \wedge \neg E(y,z)\big)\big)$ 1 point

$\beta_3 : \exists x\big(P(x) \wedge \exists y\big(P(y) \wedge \neg E(x,y) \wedge \exists z(S(z,x) \wedge S(z,y))\big)\big)$ 1 point

Forme prenexe **(0.5 ou 0)**

$\beta_{1P} : \exists x \forall y(P(x) \wedge \neg S(y,x))$

$\beta_{2P} : \forall x \exists y \exists z\big(P(x) \rightarrow \big(S(y,x) \wedge S(z,x) \wedge \neg E(y,z)\big)\big)$

$\beta_{3P} : \exists x \exists y \exists z(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \wedge S(z,x) \wedge S(z,y))$

Forme de Skolem **(0.5 ou 0)**

$\beta_{1P} : \forall y(P(d) \wedge \neg S(y,d))$

$\beta_{2P} : \forall x(P(x) \rightarrow S(f(x),x) \wedge S(g(x),x) \wedge \neg E(f(x), g(x)))$

$\beta_{3P} : P(a) \wedge P(b) \wedge \neg E(a,b) \wedge S(c,a) \wedge S(c,b))$

Forme Clausale 1 point

S : $\{P(d), \neg S(y,d), \neg P(x) \vee S(f(x),x), \neg P(x) \vee S(g(x),x), \neg P(x) \vee \neg E(f(x), g(x)), P(a), P(b), \neg E(a,b), S(c,a), S(c,b)\}$

Résolution (après avoir renommé les variables) 2 points

$C_0 : P(d)$
$C_1 : \neg S(y,d)$
$C_3 : \neg P(v) \vee S(f(v),v)$
$C_4 : \neg P(w) \vee S(g(w),w))$
$C_5 : \neg P(u) \vee \neg E(f(u), g(u))$
$C_6 : P(a)$
$C_7 : P(b)$
$C_8 : \neg E(a,b)$
$C_9 : S(c,a)$
$C_{10} : S(c,b)$ }
$C_{11} : \neg P(d) \vee S(f(d),d)$ C3[d/v]
$C_{12} : S(f(d),d))$ Res(C0, C11]
$C_{13} : \neg S(f(d),d))$ C1[$f(d)/y$]
$C_{14} : \square$ Res(C12, C13]

$S \vdash \square \Rightarrow$ S inconsistant $\Rightarrow \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ inconsistant $\Rightarrow \{E_1, E_2, E_3\}$ inconsistant.

Exercice 3 (2)

Le formule φ ci-dessous est-elle satisfiable, valide, non satisfiable ?

$$\varphi : \forall x(R(x) \wedge \neg R(g(x)) \wedge \neg R(h(x)))$$

Réponse

φ est non satisfiable.

Démonstration :

Supposons que φ est satisfiable. Il existe alors une interprétation I telle que I |= β

I |= $\forall x(R(x) \wedge \neg R(g(x)) \wedge \neg R(h(x)))$ ssi I |= $(R(x) \wedge \neg R(g(x)) \wedge \neg R(h(x)))_{v(x=d)}$ pour tout $d \in D$

I(R)(d) et nonI(R)(I(g)(d))) pour tout $d \in D$

Pour $d = d_0$

I(R)(d_0) et nonI(P)(I(g)(d_0))) et nonI(P)(I(h)(d_0)))

Pour $d = d_1$

I(R)(d_1) et nonI(R)(I(g)(d_1))) et nonI(P)(I(h)(d_1)))

……

I(R)(d_i) et nonI(R)(I(g)(d_i))) et nonI(P)(I(h)(d_i)))

Je pose I(g)(d_i) = d_i' et I(h)(d_i) = d_i''

I(R)(d_i) et **nonI(R)(d_i')** et nonI(R)(d_i'')

…..

I(R)(d'_i) et nonI(R)(I(f)(d'_i)) et nonI(P)(I(h)(d'_i)))

………..

Contradiction. On ne peut, à la fois, avoir nonI(R)(d_i') et I(R)(d_i').

Solution de l'exercice 3 à l'aide d'un AS

L'ensemble des clauses que l'on peut avoir à partir de φ est le suivant :

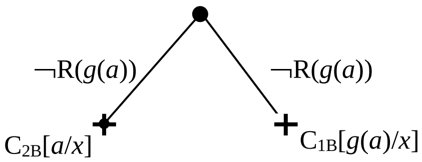
$$\forall x(R(x) \wedge \neg R(g(x)) \wedge \neg R(h(x))) \equiv (\forall x R(x)) \wedge (\forall x\, \neg R(g(x))) \wedge (\forall x\, \neg R(h(x)))$$

Une fois renommés les variables nous obtenons :

$$\mathbf{S : \{}\ R(u), \neg R(g(v)), \neg R(h(w))\ \}$$

Domaine de Herbrand de S :
$H_S = \{a, g(a), h(a), \ldots, g^i(a), \ldots, h^i(a), \ldots, g(h(a)), \ldots..\}$

Arbre sémantique



Il existe un sous-ensemble non satisfiable d'instances de base S_B : { R(g(a)),¬R(g(a)) }. S est par conséquent non satisfiable. Il va donc de même de l'ensemble { E_1, E_2, E_3}.

Exercice 4 (2,2)

Soient α et β deux formules telles que :

$$\alpha : \forall x \exists y(P(x) \rightarrow P(y)) \qquad \beta : \exists y \forall x(P(x) \rightarrow P(y))$$

Questions :
Les propositions suivantes sont-elles valides ?
Q3. $\alpha \equiv \beta$
Q4. $\alpha_S \equiv \beta_S$

Réponse à Q1.
α et β sont les deux formes prénexe d'une même formule valide : $\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$. Elles sont donc logiquement équivalentes.

Réponse à Q2.

$$\alpha_S : \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \qquad \beta_S : \forall x(P(x) \rightarrow P(a))$$

α_S et β_S ne sont pas logiquement équivalentes. L'interprétation I de domaine N telle que :
{ I(P) : pair, I(f) : identité, I(a) : 1 } satisfait α_S et falsifie β_S

Exercice 5 (2,1)

Etant données α une formule du langage des prédicat et α_S l'une de ces formes de Skolem, les propositions suivantes sont-elle valides ?
P1. *Si* (¬α) est satisfiable *alors* ¬(α_S) est satisfiable.
P2. Si ¬(α_S) est satisfiable *alors* (¬α) est satisfiable.

Réponse Q1.
La proposition 1 est valide.
Démonstration.
Supposons que (¬α) soit satisfiable **(1)** que ¬(α_S) soit non satisfiable **(2).**
(2) ⇒ |= (α_S)

De la proposition $\models \alpha_S \rightarrow \alpha$, nous déduisons que : $\models \alpha$ donc $\neg\alpha$ non satisfiable (contradiction avec (1))

Réponse Q2.
La proposition n'est pas valide. Contre-exemple :
$\alpha : \exists x \exists y(P(x) \vee \neg P(y))$ $\alpha_S : P(a) \vee \neg P(b)$ $\neg(\alpha_S) : \neg P(a) \wedge P(b)$ (satisfiable)
$\neg\alpha : \forall x \forall y(\neg P(x) \wedge P(y))$ (non satisfiable)

Exercice 6 (2)

Montrer les étapes logiques qui justifient le passage de la clause C : $\forall x \forall y P(x,y)$ à la clause C_θ : $\forall u \forall y P(f(u,v),y)$ avec $\theta = \{ f(u,v)/x \}$.

$\models \forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y P(f(u,v),y)$

$\models \boldsymbol{\forall u}(\forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y P(f(u,v),y))$

$\models \forall u(\forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y P(f(u,v),y)) \rightarrow (\forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall u \forall y P(f(u,v),y)))$ **vue en cours**

$\models \forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall u \forall y P(f(u,v),y))$