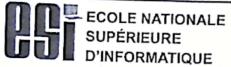
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية العليا للإعلام الآلي المدرسة الوطنية العليا المتعادة المتعادة المتعادة كالمتعادة École nationale Supérieure d'Informatique

Concours national d'accès au second cycle de L'Ecole nationale Supérieure d'Informatique (ESI-Alger)

Année universitaire 2023/2024

SUJET

Domaine : MI Durée : 02h00

Matière: Mathématiques

Coefficient: 1

Calculatrice Autorisée : NON

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 03 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation.
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Le candidat qui pense avoir décelé une erreur dans l'énoncé se doit de continuer à composer. Il est invité à signaler l'erreur sur sa copie et à expliquer les initiatives qu'il pourrait avoir prises.
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3, 4, ...).
- Les documents sont interdits, sauf indication contraire sur le sujet.
- Aucun échange n'est autorisé entre les candidats.
- <u>Les parties</u> (Analyse, Algèbre et Logique mathématique) <u>doivent être rédigées sur des copies</u> <u>séparées</u>.
- Les parties (Analyse, Algèbre et Logique mathématique) sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.

Partie I : Analyse

Exercice (8 points) : Soient les fonctions f et φ suivantes :

$$\frac{3y}{f(x,y)} = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 4), \ \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 9.$$

On définit l'ensemble A par :

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, \varphi(x,y) = 0 \right\}.$$

1.1 a- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et déduire que $A \subset D_f$. b- Représenter D_f et A dans le même graphe.

2. Sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, montrer que la fonction f admet un minimum global et un maximum global.

3. Montrer qu'il y a exactement 4 points critiques (à déterminer) issus de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On les notera M_i où $1 \le i \le 4$.

4. Préciser les points pour lesquels les extrema globaux de la fonction f, sous la contrainte $\varphi(x,y)=0$, sont atteints.

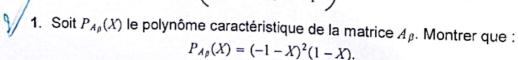


5 Etudier la nature des autres points.

Partie II : Algèbre

Exercice (7 points): Soit la matrice $A_{\beta} \in M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_{\beta} = \left(\begin{array}{ccc} 1-\beta & \beta & 0 \\ 2-\beta & \beta-1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$



 \int 2. En déduire que la matrice A_{β} est inversible pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de β la matrice A_{β} est-elle diagonalisable?

4. Déterminer, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, l'inverse de la matrice A_{β} , pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Partie III. Logique mathématique

Exercice 1(2 points)

Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

Il y'a au moins un qui est plus grand que un autre au moins mais aucun n'est plus grand que deux autres.

Exercice 2 (3 points)

Vérifier la validité de la proposition suivante à l'aide d'un arbre sémantique. $\forall x \forall y (\neg P(x, f(y)) \lor \neg P(f(x), y)), \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \lor P(y, z)) \models \exists x \forall y P(x, y)$

CX