Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Juin 2014**

2CPI

Concours 13/14
Partie Analyse

Exercice 1

Soit
$$f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-x^2-y^2}.$$

1. Trouver les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Sachant que f admet une valeur maximale sur le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 3 , trouver cette valeur.

Exercice 2

Calculer le rayon et le domaine de convergence ainsi que la somme de la série entière suivante:
$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) x^n$$

On rappelle que: $Log\,(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^{n-1} \quad \forall x \in [-1, 1[$

Corrigé

Exercice 1

$f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-x^2-y^2}.$

1. (a) Les points critiques de f :

Puisque $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ calculons alors les points critiques de f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - 2y^2\right). \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2ye^{-x^2-y^2}\left(2 - x^2 - 2y^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \text{ ou } 1-x^2-2y^2=0..\,(1) \\ y=0 \text{ ou } 2-x^2-2y^2=0...\,(2) \end{cases}$$

i. Si $x=0$, on remplace dans (2), on obtient $y=0$ ou $y=1$ ou $y=-1$.

ii. Si $1-x^2-2y^2=0...\,(3)$:
D'après (2): $y=0$ ou $2-x^2-2y^2=0$.
Si $y=0$, on remplace dans (3) on obtient: $1-x^2=0 \iff x=1$ ou $x=-1$
Si $.2-x^2-2y^2=0$, on résoud le système suivant:

$$\begin{cases} 1-x^2-2y^2=0 \\ \text{et} \\ 2-x^2-2y^2=0 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution donc les points critiques sont:

$$(0,0)\,,(0,1)\,,(0,-1)\,,(1,0)\,,(-1,0)\,.$$

(b) La nature des points:
f étant C^2 sur $\mathbb{R}^2$,utilisons alors la méthode du discriminant.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2e^{-x^2-y^2}\left(1-3x^2-2y^2-2x^2\left(1-x^2-2y^2\right)\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2e^{-x^2-y^2}\left(2-x^2-6y^2-2y^2\left(2-x^2-2y^2\right)\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4xye^{-x^2-y^2}\left(3-x^2-2y^2\right) \end{cases}$$

i. Nature du point M_1= $((0,0)\,,f(0,0))$:
$r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2,\;\; t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=4,\;\; s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0;$
donc $\Delta=rt-s^2=8>0$ et $r=2>0$ alors f admet au point M_1 un minimum local.

Remarque concernant le point M_1 :
Comme $f(0,0)=0$ et que $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-x^2-y^2}\geq 0=f(0,0)\;\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
alors f admet au point M_1 un minimum global.

ii. Nature du point $M_2 = ((0,1), f(0,1))$:
$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -2e^{-1},\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = -8e^{-1},\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 0;$
donc $\Delta = rt - s^2 = 16e^{-2} > 0$ et $r = -2e^{-1} < 0$ alors f admet au point M_2 un maximum local.

iii. Nature du point M_3= $((0,-1), f(0,-1))$:
Comme f est une fonction paire par rapport à y alors M_3 et M_2 sont de même nature.

iv. Nature du point M_4= $((1,0), f(1,0))$:
$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -4e^{-1},\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2e^{-1},\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 0;$
donc $\Delta = rt - s^2 = -8e^{-2} < 0$ alors f n'admet pas au point M_4 un extrémum.

v. Comme f est une fonction paire par rapport à x
alors M_4 et $M_5 = ((-1,0), f(-1,0))$ sont de même nature.

Conclusion:
f admet un minimum global au point M_1; et deux maximums locaux aux points M_2 et M_3.

2. Supposons que cette valeur maximale est atteinte en un point (a,b), comme (a,b) appartient au disque ouvert alors (a,b) est un point critique de f,
de plus f admet au point $((a,b), f(a,b))$ un max global donc local
alors $(a,b) \in \{(0,1), (0,-1)\}$ (les deux points appartiennent au disque ouvert).
et comme $f(0,1) = f(0,-1) = 2e^{-1}$ alors $f(a,b) = 2e^{-1}$,donc la valeur maximale de la fonction sur le disque ouvert est $2e^{-1}$.

Exercice 2

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) x^n.$

1. Calcul du rayon R de la série:
$a_n = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{+\infty}{\sim} 1 = b_n$, or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ a pour rayon 1 donc $R = 1$.

2. Calcul du domaine D de convergence de la série:

   Si $x = 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+1}{n+2}$ diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \neq 0$.

   Si $x = -1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+1}{n+2}(-1)^n$ diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2}(-1)^n$ n'existe pas, donc $D =]-1, 1[$.

3. Calcul de la somme de la série:

   Remarque:

   Pour calculer la somme d'une série entière dont le coefficient apparait sous forme de fraction rationnelle, il faut toujours effectuer une division euclidienne. Soit vous l'effectuez explicitement, soit vous procédez comme pour cet exemple.

   $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)x^n = \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)x^n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)x^n = x^n - \frac{x^n}{n+2}$;

   $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)x^n = \sum\limits_{n\geq 0} x^n - \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n+2}x^n \quad \forall x \in D$; car les deux séries ont un rayon de convergence égal à 1.

   (a) On a $\sum\limits_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1, 1[$.

   (b) On a

   $$\begin{aligned}
   \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+2}x^n &= \sum_{m\geq 2} \frac{1}{m}x^{m-2} && \text{(On a posé } m = n+2\text{)}\\
   &= \frac{1}{x^2}\sum_{m\geq 2}\frac{1}{m}x^m \\
   &= \frac{1}{x^2}\left[\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}x^m\right) - \frac{1}{1}x\right] && \forall x \in]-1,1[- \{0\}\\
   &= \frac{1}{x^2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+2}x^{n+2} && \forall x \in]-1,1[- \{0\}\\
   &= \frac{1}{x^2}\left[-\log(1-x) - x\right] && \forall x \in]-1,1[- \{0\}
   \end{aligned}$$

   .

   Conclusion:

   $S(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2}\left[x + \log(1-x)\right] \quad \forall x \in]-1, 1[- \{0\}$.

   $S(0) = \sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)0^n = \frac{1}{2}0^0 = \frac{1}{2}$.