2012/2013 **Corrigé de l'examen final en ANA3**

Exercice 1 (6.5pts)

$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$, où $f(t,x) = \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$, $x \geq 0$.

1) Montrer que $D_F = \mathbb{R}^+$: on a $f \in R_{Loc}(\mathbb{R}^+_*)$.

√ $\forall x \geq 0$ Faux pb en 0^+ ← $\boxed{(0.5)}$

√ à $+\infty$: $0 \leq f(t,x) \leq \frac{1}{t^2}$ $\forall x \geq 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge ← $\boxed{(0.5)}$

2) a) Montrer que $1 + u - e^u \leq 0$ $\forall u \in \mathbb{R}$: on fait une étude de fonction ← $\boxed{(0.5)}$

b) √ **Continuité de** F_1 : ♦ f est ct sur $]0,1] \times \mathbb{R}^+$ ← $\boxed{0.25}$

♦ f vérifie l'HD sur $]0,1] \times [0,A]$ avec $A \succ 0$:

D'après a) : $0 \leq \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \leq \frac{xt^2}{t^2} = x \leq A$, $\forall (t,x) \in]0,1] \times [0,A]$ ← $\boxed{0.5}$ et comme $\int_0^1 Adt$ converge ← $\boxed{0.25}$ alors F_1 est continue sur $[0,A]$ $\forall A \succ 0$ ← $\boxed{0.25}$ et donc $F_1 = \int_0^1 f(t,x)dt$ est ct sur $\bigcup_{A \succ 0} [0,A] = \mathbb{R}^+$ ← $\boxed{0.25}$

√ **Continuité de** F_2 : ♦ f est ct sur $[1,+\infty[\times \mathbb{R}^+$ ← $\boxed{0.25}$

♦ f vérifie l'HD sur $[1,+\infty[\times \mathbb{R}^+$:

$0 \leq \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ $\forall (t,x) \in [1,+\infty[\times \mathbb{R}^+$ ← $\boxed{0.5}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge ← $\boxed{0.25}$ .d'ou la continuité de $F_2 = \int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ sur $\mathbb{R}^+$.

3) Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^+_*$: $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{-xt^2}$

♦ les hypothèses ← $\boxed{0.25}$

♦ $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'HD sur $]0,+\infty[\times [A,+\infty[$, avec $A \succ 0$:

$\left|e^{-xt^2}\right| = e^{-xt^2} \leq e^{-At^2}$ ← $\boxed{0.25}$ or $\int_0^{+\infty} e^{-At^2}dt$ converge ← $\boxed{0.25}$

donc F est dérivable sur $[A,+\infty[$, $\forall A \succ 0$ ← $\boxed{0.25}$ d'ou F est dérivable sur $\bigcup_{A \succ 0} [A,+\infty[= \mathbb{R}^+_*$ ← $\boxed{0.25}$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{\pi}$ ← $\boxed{0.25}$ ⇒ $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $F(x) = \sqrt{\pi}\sqrt{x} + c$, $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$. ← $\boxed{0.25}$

d'une part $\lim_{x \to 0^>} F(x) = \lim_{x \to 0^>} (\sqrt{\pi}\sqrt{x} + c) = c$. ← $\boxed{0.25}$

d'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} F(x) = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-0t^2}}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} 0dt = 0$ car F est continue en 0.. $\leftarrow \boxed{0.5}$

d'ou $F(x) = \sqrt{\pi}\,\sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 2 (5pts)

1) Calculer la TF de $e^{-|t|}$: ♦ $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\leftarrow \boxed{0.25}$

$$\blacklozenge\ \mathcal{F}(f) = 2\int_0^{+\infty} \cos(st)e^{-t}dt = 2\mathcal{L}(\cos(st))(1) = \frac{2}{1+s^2} \leftarrow \boxed{1}$$

Formule d'inversion de Fourier sur $\mathbb{R}^*$: $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$ $\leftarrow \boxed{0.5}$

et comme f est ct en 0 de plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{-t}-1}{t} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{t}-1}{t} = 1 \leftarrow \boxed{0.5}$

alors la Formule d'inversion de Fourier est applicable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}2\int_0^{+\infty} \cos(st)\frac{2}{1+s^2}ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(st)}{1+s^2}ds.\ \forall t \in \mathbb{R} \leftarrow \boxed{0.5}$$

2) Trouver une solution dans $L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$: $y(t) + 3\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-|u|}du = e^{-|t|}\ldots(1)$

$(1) \Leftrightarrow y(t) + 3(y(u) * e^{-|u|})(t) = e^{-|t|}.$ $\leftarrow \boxed{0.5}$

Appliquons la TF à l'équation (1): $\mathcal{F}y(s) + 3\mathcal{F}y(s).\mathcal{F}e^{-|u|}(s) = \mathcal{F}e^{-|t|}(s)$. $\leftarrow \boxed{0.5}$ donc

$\mathcal{F}y(s) = \frac{2}{7+s^2}$. $\leftarrow \boxed{0.25}$

Appliquons la formule d'inversion de Fourier:

♦ l'hypothèse $\leftarrow \boxed{0.5}$ donc $y(t) = \frac{2}{\sqrt{7}\pi}e^{-\sqrt{7}|t|}$. $\leftarrow \boxed{0.5}$

Exercice 3 (4.5pts)

I- 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^4} = 0 \leftarrow \boxed{1}$

2)

$$\frac{xe^x - ye^y}{x-y} = e^y\frac{xe^{x-y}-y}{x-y} = e^y\frac{x(1+x-y+(x-y)\varepsilon(x-y))-y}{x-y} = e^y\frac{x-y+x(x-y)+x(x-y)\varepsilon(x-y)}{x-y}$$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xe^x-ye^y}{x-y} = 2e.$ $\leftarrow \boxed{1.5}$

II- la différentiabilité de f en $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 0\ldots \leftarrow \boxed{0.5} \ldots \frac{\partial f}{\partial y}(t,x) = 0. \leftarrow \boxed{0.25}$; $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-h.0-k.0}{\sqrt{h^2+k^2}} \leftarrow \boxed{0.25}$

le calcul de la limite $\leftarrow \boxed{1}$

Exercice 4 (5pts)

Trouver les extrémums de $f(x,y) = (x-y)^2(1-x^2-y^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Calcul des points critiques de f:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y)[1-2x^2-y^2+xy]\ldots(1) \leftarrow \boxed{0.25}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y-x)[1-2y^2-x^2+xy]\ldots(2) \leftarrow \boxed{0.25}$

De (1) : ★ Si $y = x$, (2) est vérifiée donc $M_a = (a,a) \leftarrow \boxed{0.5}$ est un point critique $\forall a \in \mathbb{R}$

★ Si $y \neq x$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} [1-2x^2-y^2+xy] = 0 & (1)' \\ [1-x^2-2y^2+xy] = 0 & (2)' \end{cases}$.

$(1)'-(2)' : -x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 0.$

♦ Si $y = x$ dans $(1)'$: $1-2x^2 = 0$ donc : $M = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont des pts critiques.

♦ Si $y = -x$ dans $(1)'$: $1-4x^2 = 0$ donc : $M_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $M_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sont des pts critiques. $\leftarrow 2 * \boxed{(0.25)}$

Conclusion l'ensemble des points critiques est : $S = \{M_1, M_2, M_a, a \in \mathbb{R}\}$

<u>**La nature des points**</u>:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2[1-2x^2-y^2+xy+(x-y)(-4x+y)] = 2[1-6x^2-2y^2+6xy]. \leftarrow \boxed{0.25}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2[-1+3x^2+3y^2-4xy]. \leftarrow \boxed{0.25}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2[-1+2x^2+6y^2-6xy]. \leftarrow \boxed{0.25}$

<u>**Le point M_1**</u>: $r_1 = -5 = t_1$ et $s_1 = 3$ donc $\Delta = r_1 t_1 - s_1^2 = 25-9 > 0$ et comme $r_1 < 0$ alors $(M_1, f(M_1))$ est un maximum pour f. $\leftarrow \boxed{0.5}$

<u>*Le point M_2*</u>: même travail, $(M_2, f(M_2))$ est un maximum pour f. $\leftarrow \boxed{0.25}$

<u>*Le point M_a*</u>: on a $\Delta = rt - s^2 = 0$ d'où RAD ,utilisons la définition:

$f(a+h,a+k) - f(a,a) = (h-k)^2\left(1-(a+h)^2-(a+k)^2\right) \leftarrow \boxed{0.25}$

$f(a+h,a+k) - f(a,a)$ est de même le signe que $g(h,k) = 1-(a+h)^2-(a+k)^2$.
or $\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k) = 1-2a^2 \leftarrow \boxed{0.25}$ donc si $1-2a^2 \neq 0$ alors $g(h,k) \underset{(0,0)}{\sim} 1-2a^2$:
Si $1-2a^2 \succ 0$ alors $g(h,k) \succ 0$ au vois de $(0,0)$ alors f admet en M_a un min local. $\leftarrow \boxed{0.25}$
Si $1-2a^2 \prec 0$ alors $g(h,k) \prec 0$ au vois de $(0,0)$ alors f admet en M_a un max local. $\leftarrow \boxed{0.25}$
Si $1-2a^2 = 0$ ie $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $g(h,k) = -2ah-2ak-h^2-k^2$.
Posons $k = 0$: $g(h,0) = -2ah - -h^2 \underset{0}{\sim} -2ah \leftarrow \boxed{0.5}$ car $a \neq 0$ donc $g(h,0)$ change de signe, donc f n'admet pas en ces deux points un extrémum $\leftarrow \boxed{0.5}$