Examen final en ANA4.
Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.
Rédiger les exercices 2 et 4 sur le cahier et les exercices 1 et 3 sur double feuille.

Exercice 1: 2 points

Calculer $\iiint\limits_{\Omega} z^{x^2+y^2}dxdydz$ avec $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2 \leq a^2;\ 0 \leq z \leq 1\right\}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2: 8 points

I- En utilisant la définition, étudier la nature et donner la valeur éventuelle pour les séries numériques suivantes: $\sum\limits_{n\geq 1} \alpha^{n-1} \sin(n\alpha)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \alpha^n \cos(n\alpha)$ où $\alpha \in]-1,1[$.

II- Dans toute la suite $x \in E,\ E =]-1,1[$.
Soit la fonction F donnée par $F(x) = \sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ où : $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$.
1) Montrer que F est bien définie dans E.
2) Montrer que F est de classe C^1 dans E.
3) Soit $G(x) = Arctg\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$, montrer que $G'(x) = \dfrac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1}$.
4) Calculler $F\,'(x)$ et en déduire que $F(x) = G(x)$.

Exercice 3: 5,5 points

Les questions sont indépendantes:
1) Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $r \in \mathbb{R}$. Supposons que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ est semi-convergente. Déterminer R.
2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n^\alpha a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
3) Calculer le rayon et la somme de la série entière: $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n x^{2n+1}$.

Exercice 4: 4,5 points

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par: $f(x) = \cos^2 x$ (elle est bien sûr $2\pi-$périodique).

1) Développer f en série de Fourier (on rappelle: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$).

2) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx$.

Un corrigé:

Exercice1: Utilisons les CS: $\varphi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$; $\begin{cases} \det j\varphi = r \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

Soit $\Omega\,'$le transformé de Ω par les CC.

$(x,y,z) \in \overset{0}{\Omega} \iff \begin{cases} x^2+y^2 < a^2 \\ 0 < z < 1 \end{cases} \overset{\text{CC}}{\iff} \begin{cases} r^2 < a^2 \\ 0 < z < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < r < a \\ 0 < z < 1 \end{cases} \forall\theta$

Donc: $\Omega\,' = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \;/\; 0 \le \theta \le 2\pi;\; 0 \le r \le a;\; 0 \le z \le 1\}$

$$I = \iiint_{\Omega} z^{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\int_0^{1} z^{r^2}\,dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{r}{r^2+1}\left[z^{r^2+1}\right]_0^1 drd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{a}\frac{2r}{r^2+1}drd\theta \text{ vs / pavé} \Longrightarrow I = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\left[\log\left(r^2+1\right)\right]_0^a\right) = \pi\log\left(a^2+1\right).$$

Exercice2:

I- Soient les sommes partielles: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}\sin(k\alpha)$ $(= 0$ si $\alpha = 0)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{k}\cos(k\alpha)$

★ $S_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1}e^{ik\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha e^{i\alpha} - \left(\alpha e^{i\alpha}\right)^n}{1-\alpha e^{i\alpha}}\right)$,

posons $z = \frac{\alpha e^{i\alpha} - \left(\alpha e^{i\alpha}\right)^n}{1-\alpha e^{i\alpha}} = \frac{\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha) - \alpha^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)}{1-\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$

$$z = \frac{\left[(\alpha\cos\alpha - \alpha^n\cos n\alpha) + i(\alpha\sin\alpha - \alpha^n\sin n\alpha)\right]\left[1-\alpha\cos\alpha + i\alpha\sin\alpha\right]}{(1-\alpha\cos\alpha - i\alpha\sin\alpha)(1-\alpha\cos\alpha + i\alpha\sin\alpha)}$$

$$z = \frac{\left[(\alpha\cos\alpha - \alpha^n\cos n\alpha)(1-\alpha\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha(\alpha\sin\alpha - \alpha^n\sin n\alpha)\right]}{(1-\alpha\cos\alpha)^2 + \alpha^2\sin^2\alpha}$$

$$+\,i\frac{(\alpha\sin\alpha - \alpha^n\sin n\alpha)(1-\alpha\cos\alpha) + \alpha\sin\alpha(\alpha\cos\alpha - \alpha^n\cos n\alpha)}{(1-\alpha\cos\alpha)^2 + \alpha^2\sin^2\alpha}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha\sin\alpha(1-\alpha\cos\alpha) + \alpha^2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\alpha\cos\alpha+\alpha^2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1-2\alpha\cos\alpha+\alpha^2}$

ie $\sum_{n\ge1} \alpha^{n-1}\sin(n\alpha) = \frac{\sin\alpha}{1-2\alpha\cos\alpha+\alpha^2}$.

★ $T_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k}e^{ik\alpha}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha e^{ix} - \left(\alpha e^{ix}\right)^n}{1-\alpha e^{ix}}\right) = \operatorname{Re} z$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \left(\frac{\alpha\cos\alpha(1-\alpha\cos\alpha) - \alpha^2\sin^2\alpha}{1-2\alpha\cos\alpha+\alpha^2}\right) = \frac{\alpha\cos\alpha - \alpha^2}{1-2\alpha\cos\alpha+\alpha^2}$

ie $\sum_{n\ge1} \alpha^{n}\cos(n\alpha) = \frac{\alpha\cos\alpha - \alpha^2}{1-2\alpha\cos\alpha+\alpha^2}$.

Remarque: on peut aussi travailler directement avec les s.n après avoir montrer leur convergence.

II- 1) On a que $|f_n(x)| \leq |x|^n$, $\forall x \in E$ et $\sum\limits_{n\geq 1} |x|^n$ converge car c'est une série géométrique $(0 \leq |x| < 1)$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge absolument sur E (critére de comparaison) donc F est bien définie.
2) Utilisons le théorème de conservation de la dérivabilité
$\hookrightarrow$ Toutes les f_n sont de classe C^1 car c'est le produit et la composée de fonctions C^1.
$\hookrightarrow$ Etude de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$, $f_n'(x) = x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx$
$|f_n'(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}$ $\forall x \in [-a,a] \subset E$ et $\sum\limits_{n\geq 1} a^{n-1}$ converge car c'est une série géométrique $(0 \leq a < 1)$
donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout $[-a,a] \subset E$, on en conclut que F est C^1 sur tout $[-a,a] \subset E$.
Conclusion: F est C^1 sur E.
3) $G'(x) = \left[Arctg\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)\right]' = \dfrac{(\sin x + x\cos x)(1-x\cos x) + (\cos x - x\sin x)(x\sin x)}{(1-x\cos x)^2} . \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right.}$

$G'(x) = \dfrac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2}$ ie $G'(x) = \dfrac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1}$.
4) On a $F\,'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} f_n'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \left(x^{n-1}\sin nx + x^n\cos nx\right)$, utilisons I)
ie $F(x) = \dfrac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1} = G'(x)$ donc $F(x) = G(x) + C$ (C =cte) or $F(0) = 0$
Conclusion: $F(x) = G(x) = Arctg\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

Exercice 3:

1) $\bigstar$ Comme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ converge alors la s.e $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument sur $]-r,r[$ d'après le 1er lemme d'Abel.
$\bigstar$ Et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ diverge absolument alors la s.e $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge sur $]-\infty,-r[\cup]r,+\infty[$ d'après le corollaire du 1er lemme d'Abel. Donc $R = |r|$.
2) Utilisons le théorème de Hadamard: Soient $\rho_1 = \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ et $\rho_2 = \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha |a_n|}$
Il suffit de montrer que $\rho_1 = \rho_2$, or on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^{\frac{\alpha}{n}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{\alpha \log n}{n}} = 1$
Donc $\rho_2 = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha . \limsup\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho_1$

3) *Le rayon*: Considérons la s.e $x.\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}ny^n$ puis on posera: $y=x^2$

Son rayon: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n+1}{n}=1=\rho\Longrightarrow R_y=\frac{1}{\rho}=1$

donc: $-1<y<1\Longleftrightarrow 0\leq x^2<1\Longleftrightarrow -1<x<1\Longleftrightarrow R=1$

Etude aux bornes: en ±1 : posons $u_n(x)=(-1)^{n-1}nx^{2n+1}$ et $\sum_{n\geq 1}u_n(\pm1)$ diverge car la CN n'est pas vérifiée.

Donc $D=]-1,1[$.

Calcul de la somme: $S(x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}nx^{2n+1}=x^3\sum_{n\geq 1}n\left(-x^2\right)^{n-1}$, pour cela calculons:

$T(y)=\sum_{n\geq 1}ny^{n-1}=\left(\sum_{n\geq 0}y^n\right)'=\left(\frac{1}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}$

Conclusion: $S(x)=\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$

Exercice4: Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par: $f(x)=\cos^2 x$ (elle est bien sûr $2\pi-$ périodique).

1) *Calcul de* $\mathcal{F}f$: f est continue donc intégrable sur $\mathbb{R}$, elle est paire donc il suffit de travailler sur $[0,\pi]$, sa $\mathcal{F}f$ existe et on a: $b_n=0\ \forall n\geq 1$ et $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x\cos nxdx\ \forall n\geq 0$

<u>$n=0$</u>: $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=1$

<u>$n\geq 1,\ n\neq 2$</u>: $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\cos nxdx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\cos nxdx=\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n+2)x+\cos(n-2)x)\,dx$

ie $a_n=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+2)x}{n+2}+\frac{\sin(n-2)x}{n-2}\right]_0^{\pi}=0$

<u>$n=2$</u>: $a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(2x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}$

Donc $\mathcal{F}f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

Appliquons le théorème de Dirichlet: f est continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$ donc on a :

$\mathcal{F}f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=f(x)=\cos^2 x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2) Utilisons l'égalité de Parseval: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\ 2}(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

ce qui donne $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi.$