Durée 1h30

Tout document interdit

Exercice1 (3, 3, 2, 2)

Soit $\alpha : \rceil P(f(y)) \rightarrow \rceil \forall x\, P(x)$.

1. Montrer que α est valide ;
2. Montrer, sans utiliser la propriété de complétude que α est un théorème.
3. Trouver la formule sous forme normale prenexe logiquement équivalente à α. On désignera cette formule par α_p.
4. Montrer sans utiliser les résultats précédents et sans utiliser la propriété de complétude que α_p est un théorème.

Exercice 2 ((1, 1), (2, 2), 2, 2)

1. Montrer que $\vdash x=y \rightarrow (f(x) = f(y))$. En déduire que : $\vdash x=y \rightarrow (f^n(x) = f^n(y))$ $(n \geq 2)$
2. Montrer que la formule $\alpha : \forall x(x = y)$ n'est pas valide. Est-elle satisfiable ? si oui, en donner un modèle.
3. Montrer sans utiliser la propriété de complétude que la formule $\beta : \exists x\ (x = y)$ est un théorème.
4. Vérifier la consistance de l'ensemble $\Gamma : \{\forall x(x = y), P(x), \rceil P(y)\}$

N. B. Remettre, au plus, une seule double feuille et une seule intercalaire.