ESI, 2CPI **Corrigé du CI Intermédiaire** **Septembre 2020**
Analyse mathématique 4 **Durée : 1h15**

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
- Le sujet contient deux parties indépendantes. Répondre sur le sujet

Partie I (4 points) : Les questions sont indépendantes.

1) $\boxed{\text{1,25 pt}}$ Soit la fonction $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}}$; $x > 0$.

a) Etudier la dérivabilité de F .

Réponse : Posons $f(t,x) = \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}}$ On a

- f et $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sont continues sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$,
- les bornes variables $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$. sont C^1 sur $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$,

donc, d'après le théorème de conservation de la dérivabilité pour les intégrales paramétrées propres avec bornes variables, on déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer F'.

Réponse : $\forall x > 0$,

$$F'(x) = \int_x^{x^2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)}_{=0} dt + v'(x) f(v(x),x) - u'(x) f(u(x),x) = 2x\frac{e^{-x^2}}{|x|} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = 2e^{-x^2} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

2) $\boxed{\text{1,25 pt}}$ Soit la fonction $F(x) = \int_1^{+\infty} f(t,x)dt$; $x \in \mathbb{R}$ où $f(t,x) = \frac{(\sin x + \sin t)}{1+x^2+t^2}$.

a) Compléter : $|f(t,x)| \leq g(t)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge, où

Réponse : $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$

b) Etudier la continuité de F .

Réponse : On a

- f est continues sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ (car c'est la composée de fonctions continues),
- F vérifie la condition de la convergence dominée $\mathbb{R}$,

Utilisons le théorème de conservation de la continuité sous $\int$ pour le cas intégrale impropre paramétrée, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\boxed{1{,}5 \text{ pt}}$ Soit la fonction $F(x) = \int\limits_{1}^{+\infty} f(t,x)dt;\ \ x \in]0,+\infty[$ où $f(t,x) = \dfrac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}$.

a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$.**Réponse :** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{1+t}$ pour tout $(t,x) \in [1,+\infty[\times]0,+\infty[$.

b) Compléter : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(t)$

Réponse : $\forall x \in [\alpha,\beta]$_(avec $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$) ou bien $[\alpha,+\infty[$ou bien $]\alpha,+\infty[,\ \alpha > 0$.

et $\int\limits_{1}^{+\infty} g(t)dt$ converge, où **Réponse :** $g(t) = e^{-\alpha t}$

c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$:

Réponse : On a

- $\exists x_0 = 1$ tel que $F(x_0) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$ converge (la rèle de l'ordre).
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\sqrt{t}e^{-xt}}{1+t},\ \forall\ (t,x) \in [1,+\infty[\times]0,+\infty[$
- f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[1,+\infty[\times[\alpha,\beta]$ (car c'est la composée de fonctions continues),
- $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie la condition de la convergence dominée sur tout $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$,

Utilisons le théorème de conservation de la dérivabilité sous $\int$ pour le cas intégrale impropre paramétrée, on en déduit que F est dérivable sur tout $[\alpha,\beta] \subset]0,+\infty[$, on en déduit par recrouvrement la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{\text{Partie II (6 points) :}}$ Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy + 1$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{1{,}25 \text{ pt}}$ Calculer les dérivées partielles premières de f, puis déterminer les points critiques de f suivant les valeurs de a.

Réponse : On a

$\rightarrow D_f = \mathbb{R}^2$ qui est un ouvert,

$\rightarrow f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3ay, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3ax, \end{cases}$$

$\rightarrow$ Recherche des points critiques : On

$$(p = (x,y) \text{ est un point critique de } f) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - ay = 0, \\ y^2 - ax = 0. \end{cases} ..(S)$$

Donc,

- si $a=0$, (S) $\Rightarrow (x,y)=(0,0)$,
- si $a\neq 0$, (S) $\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{a}, \\ \dfrac{x^4}{a^2}=ax \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{a}, \\ x(x^3-a^3)=0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0)\vee$

$(x,y)=(a,a)$.

Conclusion : Si $a\in\mathbb{R}^*$, f admet $(0,0)$ et (a,a) comme points critiques, et si $a=0$ alors f admet $(0,0)$ comme seul point critique

2) $\boxed{\text{3,25 pt}}$ Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis déterminer la nature de chacun des points critiques de f.

Réponse : Ona

$\rightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-3a. \end{cases}$$

$\rightarrow$ Nature des points critiques :

Méthode 1:

$r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x,\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-3a,\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y$

- Cas $a\neq 0$

Point	si	r	t	s	$rt-s^2$	Conclusion
(a,a)	$a<0$	$6a<0$	$6a$	$-3a$	$27a^2>0$	f admet en ce point un maximum local
	$a>0$	$6a>0$	$6a$	$-3a$	$27a^2>0$	f admet en ce point un minumum local
$(0,0)$		0	0	0	$-9a^2<0$	f n'a pas d'extremum local en ce point

- Cas $a=0$. Le seul point critique est $(0,0)$ et $rt-s^2=0$, donc on peut pas conclure. Utilisons alors la définition. On a $f(x,y)-f(0,0)=x^3+y^3$ qui ne garde pas un signe constant, pour le constater il sufit de prendre le chemin $(x,0)$, qui donne $f(x,0)-f(0,0)=x^3$. On en déduit que f n'admet pas d'extremum dans le cas $a=0$.

Méthode 2 : On a

$$Hess_f(a,a)=\begin{pmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{pmatrix}$$

Donc, $\begin{cases} \det\Delta_2=27a^2, \\ \det\Delta_1=6a. \end{cases}$

- Cas $a\neq 0$ et le point critique (a,a)

. si $a < 0$, $Hess_f(a,a)$ est définie négative, ce qui implique que f présente un maximum local en (a,a).

. si $a > 0$, $Hess_f(a,a)$ est définie positive, ce qui implique que f présente un minimum local en (a,a).
• Cas $a \neq 0$ et le point critique $(0,0)$. On a $\det\left(Hess_f(0,0)\right) = -9a^2 < 0$, donc f n'a pas d'extremum local en ce point
• Le cas $a = 0$, Le seul point critique est $(0,0)$. On peut pas conclure car $\det\left(Hess_f(0,0)\right) = 0$. Il se traite en utilisant la définition de la même manière que précédement (fin de la méthode 1).

3) $\boxed{\text{1,5 pt}}$ En prenant dans la suite $a = -1$, on s'intéresse à étudier les extrema éventuels de f sous la contrainte $g(x) = 0$ avec g est définie par $g(x,y) = x+y-2$.

a) Vérifier que la contrainte définit explicitement y en fonction de x (c'est à dire $y = h(x)$ et h est à déterminer).

Réponse : On a $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x+y-2 = 0 \uparrow y = 2-x$. On prend alors $h(x) = 2-x$.

b) Étudier les variations de la fonction F définie par $F(x) = f(x,h(x))$.

Réponse : On a

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x,h(x)) = f(x,2-x) = x^3 + (2-x)^3 + 3x\,(2-x) + 1 \\ &= 3x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

On a
→ $D_F = \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,
→ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$, donc F est $\searrow$ sur $]-\infty, 1]$ et F est $\nearrow$ sur $[1, +\infty[$
→ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$
donc, F admet un minimum en $x = 1$.

c) Que peu t-on déduire à propos des extrema de f sous la contrainte $g(x) = 0$.

Réponse : On en déduit que f admet un extremum (c'est en fait un minimum) en $(1,1)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.