

Concours National d'accès au second cycle des écoles supérieures
Année universitaire 2018/2019

SUJET

Domaine : MI
Durée : 2h

Matière : Mathématiques
Coefficient : 1

Calculatrice Autorisée : NON

Partie 1 : Analyse

Exercice 1 (3,5 points)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction $f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 4axy$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Donner la nature de ces points critiques.

Exercice 2 (3,5 points)

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x(1+t^2))}{(1+t^2)} dt, \quad x > 0.$$

Partie 2 : Algèbre

Exercice (7 points)

Soit a un paramètre réel et soit f_a l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné dans la base canonique B de \mathbb{R}^3 par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 2a \\ -a & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice M_a .
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, la matrice M_a est diagonalisable.
3. Supposons que $a \neq 0$:
 - i) Trouver une matrice inversible P indépendante du paramètre a et une matrice diagonale D_a telles que $D_a = P^{-1} M_a P$.
 - ii) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(M_a)^{2n+1} = a^{2n+1} M_1$.

Partie 3 : Logique mathématique

Exercice 1 (2 points)

Formalisez dans le langage du calcul des prédicats les énoncés suivants :

1. Un réseau est non sécurisé ssi il contient un sous-réseau non sécurisé.
2. Deux réseaux sont connectés ssi tous leurs sous-réseaux sont connectés.

Utiliser seulement les symboles de prédicats suivants:

$S(x)$: x est un réseau sécurisé.

$C(x,y)$: x est un sous-réseau du réseau y .

$T(x,y)$: x et y sont connectés.

Exercice 2 (4 points)

Utiliser la résolution pour prouver que l'ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ est contradictoire.

$$\alpha = \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$$

$$\beta = \forall x(R(x) \Rightarrow ((\forall y Q(x,y)) \vee \exists z Q(x,z)))$$

$$\gamma = \neg \exists x \forall y \exists z (P(y) \Rightarrow Q(z,x))$$

NB. Vous pouvez utiliser indifféremment les symboles \Rightarrow et \rightarrow pour désigner l'implication.
