ESI
2013/2014

2CPI

Examen d'ANA3.
Durée. 2H.
DOCUMENTS ET CALCULATRICE INTERDITS.

Exercice1: (**7,5 points**)

On pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$, où $f(t,x) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que le domaine de définition de F est égal à $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose : $g(t) = e^{-|t|}$. et on rappelle que $(\mathcal{F}g)(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

3) En utilisant la formule d'inversion de Fourier, déterminer la valeur de $A(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$.

4) Déduire de 3) la valeur de $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.

5) Déduire de 2), 3) et 4) la valeur de $C(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.

Exercice2: (**6 points**)
Soit l'application numérique réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f_a(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - x\cos y + ay^2 \sin x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad ; \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3) Pour quelles valeurs de a, f_a est elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice3: (**2 points**)
En utilisant le changement de variable suivant: $u = x^2 - y^2 \quad (x > 0)$ et $v = y$; résoudre dans $C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ l'équation différentielle partielle: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice4: (**4,5 points**)
Déterminer les extréma libres de la fonction: $f(x,y) = x^4 + y^4 - \dfrac{1}{4}(x-y)^2$.

On rappelle que: $\sin(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Bon courage.