Ecole Supérieure d'Informatique
Cycle Préparatoire 2
2010/2011

ANA 4
Examen Final

Exercice1 2 points

Calculer l'intégrale triple $\iiint_P \sin(x+y+z)dxdydz$;

où $P = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Exercice2 8 points

Soit $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$, où: $f(t,x) = \dfrac{e^{-tx^2}\sqrt{t}}{1+t^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge sur $\mathbb{R}$.

Posons $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
4) Pour tout $x \neq 0$, transformer $F(x) - F(0)$ au moyen du changement de variable $v = tx^2$.
5) Montrer que la fonction $G(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{(e^{-v}-1)\sqrt{v}}{x^4+v^2}dv$ est continue sur $\mathbb{R}$.
6) Etudier la dérivabilité de F en 0.

Exercice 3 5 points

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Résoudre l'équation différentielle suivante dans $C^2(\mathbb{R}) \cap \Omega$:

$$ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0\ ;$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Exercice 4 5 points

Soit la fonction impaire f telle que:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } 0 \prec t \prec 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \succ 1 \end{cases}$$

1) Représenter f, puis caculer $\mathcal{F}f$.
2) Utilisez la formule d'inversion de Fourier pour déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\sin(xt)dt,\quad x \in \mathbb{R} - \{0,1,-1\}.$$

Une formule pouvant être utile: $\sin a.\cos b = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.

$$\cos a.\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}.$$