Exercice 1 : (3.5 pt)

Soit la matrice suivante : $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- $\det A_\alpha = 3\alpha - 12 = 3(\alpha - 4)$. **(0.75 pt)**

2- A_α est inversible si et seulement si $\alpha \neq 4$. **(0.25 pt)**

3- Soit (S) le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x_1 & + & x_2 & +2x_3 & = \beta \\ -2x_1 & + & 2x_2 & +\alpha x_3 & = 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases} \qquad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

a- Le système (S) est de Cramer si et seulement si $\alpha \neq 4$ et $\beta \in \mathbb{R}$. **(0.25 pt)**

b- Les formules de Cramer qui permettent de calculer les inconnues x_1, x_2 et x_3 sont :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3(\alpha-4)}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \beta & 2 \\ -2 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3(\alpha-4)}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & \beta \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3(\alpha-4)} \qquad \textbf{(0.25 pt*3)}$$

et la solution du système est :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta + 2}{3(\alpha-4)}, \frac{\alpha + 2\beta + \alpha\beta - 10}{3(\alpha-4)}, \frac{-2(\beta-1)}{(\alpha-4)} \right) \qquad \textbf{(0.5 pt*3)}$$

Exercice 2 : (1 pt= (0.25 pt*4))

Soit, dans $\mathbb{R}$, un système linéaire (S) de 4 équations à 3 inconnues de rang 3.

i- L'ordre d'une matrice principale de (S) est : 3.

ii- Le nombre de déterminants bordants du déterminant principal est égal à : 1.

iii- Le système (S) est compatible ssi le seul déterminant bordant du déterminant principal est nul.

Dans ce cas, il y a : trois (3) inconnues principales qui s'expriment en fonction de zéro (0) inconnue non-principale.

Exercice 3 : (0.5 pt)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Est ce que le vecteur $(1, 1)$ est un vecteur propre de A ? Justifier.

Solution : Oui, car : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.