Partie 1 : Analyse

Exercice 1 : (04 pts)

On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & si \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1 Calculer la transformée de Fourier de f.

2 Donner l'expression de la transformée inverse.

3 En déduire la valeur des intégrales suivantes

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2-1}dx \; ; \qquad B = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{x^2-1}dx; \qquad C = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\sin^2(\pi x)}{(x^2-1)^2}dx.$$

Rappel : $\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$.

Exercice 2 : (04 pts)

On considère la série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right)$ définies par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$; $\quad x \in]1, +\infty[$

1. Montrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right)$ est simplement convergente dans $]1, +\infty[$
2. Montrer que la convergence est normale dans $[a, +\infty[$; $\forall a > 1$.
3. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$; $x \in [a, +\infty[$.
   Etudier la continuité et la dérivabilité de f dans $[a, +\infty[$

Partie 2 : Algèbre

Exercice (07 pts) Soit $s \in \mathbb{R}$ un paramètre, et soit f_s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par la matrice

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 2s-1 & 1-2s \\ -1 & s & 1 \\ -1 & 2s-1 & 2-s \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $det\,(A_s) = -s\left(s^2-1\right)$.
2. Calculer en fonction de $s \in \mathbb{R}$, le rang de f_s.
3. Posons $s = 0$. Montrer que l'endomorphisme f_0 est diagonalisable, et diagonaliser le en précisant les matrices de passage.

Partie 3 : Logique Mathématique

Exercice 1. (2.5 pts)
Formaliser en langage de calcul des prédicats les assertions suivantes :

1. Chaque malade autre que le malade Zéro a eté infecté par un autre malade.
2. Une personne morte ou guérie ne peut infecter ni être infectée par personne.
3. Certains malades sont guéris et certains sont morts.

Exercice 2. (2.5 pts)
Soit l'ensemble des clauses suivantes :

$$\Gamma = \{d + c + e, e + d + \bar{c} + a, e + d + \bar{c} + \bar{a}, \bar{d} + b + \bar{c}, \bar{d} + b + c, \bar{d} + \bar{b} + a, \bar{d} + \bar{b} + \bar{a}, \bar{e} + d\}$$

Vérifier la satisfaisabilité de l'ensemble Γ par résolution propositionnelle.