Séries de Fourier

Exercice 0.1

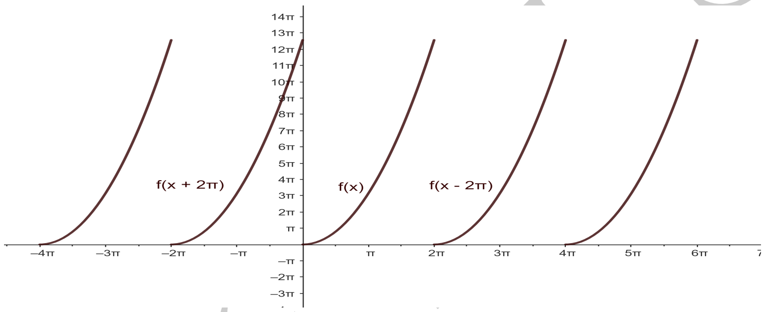
Soit la fonction $f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ 2π *périodique définie par* $f(x) = x^2$.

1. *Tracer le graphe de* f *sur au moins 2 périodes.*
2. *Montrer que* f *est développable en série de Fourier puis la développer.*
3. *Tracer le graphe de* $\mathcal{S}(f)$ *sur au moins 2 périodes.*
4. *Déterminer le plus grand domaine de convergence uniforme* $[a, b] \subset [0, 2\pi]$.
5. *En déduire les sommes :*

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}; \quad D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Corrigé :

1. Graphe de f :



2. Montrons que f est développable en série de Fourier : Vérifions les hypothèses du théorème de Dirichlet.
   - Les discontinuité de f sont de la forme $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 4\pi^2$$

   - f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x + 2\pi) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{(x + 2\pi)^2 - 4\pi^2}{x} = 4\pi$$

   f satisfait les conditions du théorème de Dirichlet, alors elle est développable en série de Fourier.

- Développement en série de Fourier :

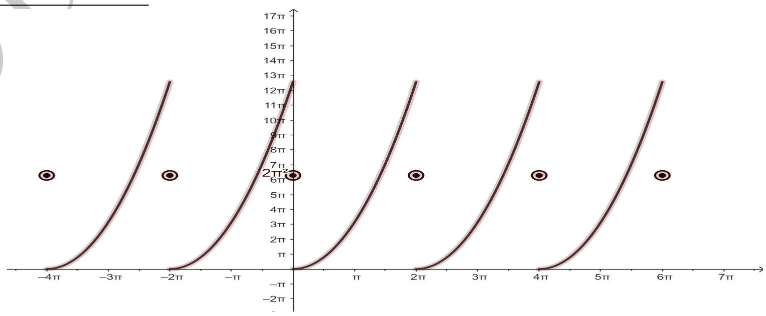
  $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \dfrac{1}{\pi} \Big[\dfrac{x^3}{3}\Big]_0^{2\pi} = \dfrac{8}{3}\pi^2.$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\Big]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\ dx\Big) \\
&= -\frac{2}{\pi n}\Big(\Big[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\ dx}_{=0}\Big) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(2\pi - 0) = \frac{4}{n^2}. \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-\frac{x^2\cos(nx)}{n}\Big]_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\ dx\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\Big(\underbrace{\Big[\frac{x\sin(nx)}{n}\Big]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\ dx\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{4\pi^2}{n} - \frac{2}{n^2}\underbrace{\Big[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_0^{2\pi}}_{=0}\Big) = -\frac{4\pi}{n}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(f)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) \\
&= \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{\cos(nx)}{n^2} - \pi\frac{\sin(nx)}{n}\Big) \\
&= \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in]0, 2\pi[\\ 2\pi^2 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou si } x = 2\pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. Graphe de la série de Fourier :



ex1-1.png

4. D'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$, $a > 0$.
5. Calcul de sommes :

- Pour Calculer A, on pose $x = 0$

$$
\mathcal{S}(f)(0) = 2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \Longrightarrow A = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.
$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Longrightarrow B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$
- Pour calculer C,on utilise l'égalité de Parseval.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\ dx$$

$$\frac{32}{9}\pi^4 + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + 16\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{32}{5}\pi^4 \Longrightarrow C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{4}\frac{\pi^4}{90} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \Longrightarrow B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

Exercice 0.2

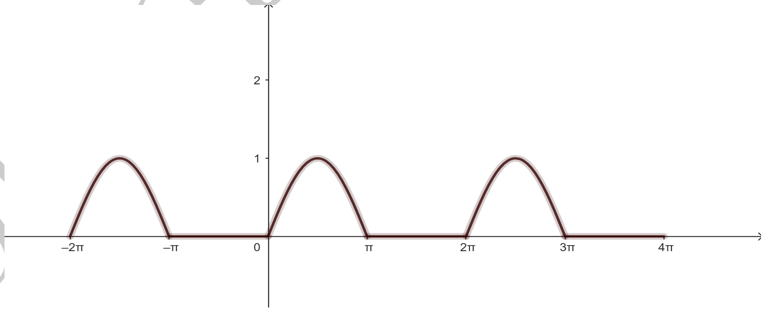
Soit f une fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & si \quad 0 \leqslant x < \pi \\ 0 & si \quad \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.*
2. *Développer f en série de Fourier.*
3. *Cette série converge-t-elle uniformement sur $[0, 2\pi]$.*
4. *En déduire les sommes des séries suivantes :*
   $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$

Corrigé :

1. Graphe de f :



ex3.png

2. Développement de f en série de Fourier :
   $a_0 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin\left((1+n)x\right) + \sin\left((1-n)x\right)\right]\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{\cos\left((1+n)x\right)}{1+n} - \frac{\cos\left((1-n)x\right)}{1-n}\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{(-1)^{n+1}}{1+n} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\Big], \quad n \neq 1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{2(-1)^n + 2}{1-n^2}\Big] \\
&= \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1-n^2)} \Longrightarrow \begin{cases} a_{2n} = \dfrac{2}{\pi(1-4n^2)} & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{2n+1} = 0 & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos x\ dx = 0.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\sin(nx)\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\cos\left((n-1)x\right) - \cos\left((n+1)x\right)\right]\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\sin\left((n-1)x\right)}{n-1} - \frac{\sin\left((n+1)x\right)}{n+1}\Big]_0^{\pi} \quad n \neq 1 \\
&= 0. \\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left[1 - \cos(2x)\right]\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

f est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$ et elle est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ sauf aux points $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en ces points elle admet une dérivée à droite et une dérivé à gauche, en effet

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sin x - 0}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(x+2\pi) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - 0} = \lim_{x\longrightarrow \pi^+} \frac{0 - 0}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\longrightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - 0} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x - \sin \pi}{x} = 1$$

Alors la série de Fourier associée à f converge et on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(f)(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \\
&= \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. f est continue sur $[0, 2\pi]$, alors la série de Fourier converge uniforment vers f sur $[0, 2\pi]$ d'après le théorème de Dirichlet.
4. Calcul de sommes :

   - Pour trouver A, on pose $x = 0$

$$\mathcal{S}(f)(0) = 0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \Longrightarrow A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

   - Pour trouver B, on pose $x = \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{S}(f)(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \Longrightarrow B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 0.3

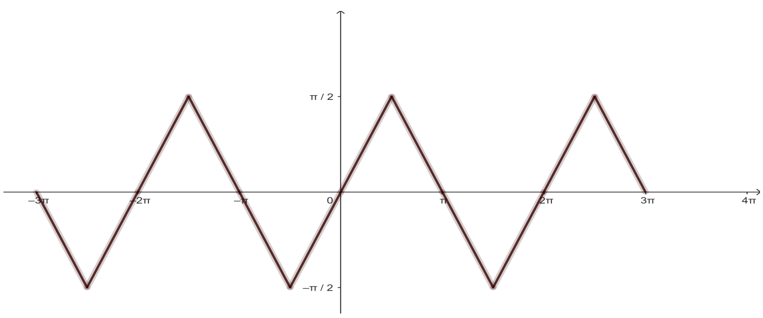
Soit f une fonction impaire et 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & si \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. (Utiliser 2 couleurs)*
2. *Développer f en série de Fourier. Y at-il convergence uniforme dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$?*
3. *En déduire les sommes :*
   $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$

Corrigé :

1. Graphe de f :



ex4.png

2. Développement en série de Fourier
   f est impaire alors $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)\ dx\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\Big[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\ dx + \Big[-\frac{(\pi-x)\cos(nx)}{n}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&\quad -\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\ dx\Big) \\
&= -\frac{\pi}{2n}\cos\big(n\frac{\pi}{2}\big) + \frac{1}{n}\Big[\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2n}\cos\big(n\frac{\pi}{2}\big) - \frac{1}{n}\Big[\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\sin\big(n\frac{\pi}{2}\big) \Longrightarrow \begin{cases} b_{2n} = 0 & \forall n\in\mathbb{N} \\ b_{2n+1} = \dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{S}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\big((2n+1)x\big) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

Puisque f est continue sur $[-\pi,\pi]$, alors d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier associée à f converge uniformement.

3. **Calcul des sommes**

   (a) Pour calculer A, on prend $x=\frac{\pi}{2}$ qui vérifie $\mathcal{S}(f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. On obtient alors
   $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \Longrightarrow A = \frac{\pi^2}{8}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \Longrightarrow B = \frac{\pi^2}{6}$.

   (c) On utilise l'égalité de Parseval pour calculer B

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\ dx.$$

   On aura alors

   $$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^2\Big) = \frac{\pi^2}{6} \Longrightarrow C = \frac{\pi^4}{96}$$

Exercice 0.4

Soit f une fonction paire et 2π-périodique définie par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \quad x\in]0,\pi]$$

1. *Tracer le graphe de f sur au moins deux périodes.*
2. *Développer f en série de Fourier. La série converge-t-elle vers f ?*
3. *Trouver la fonction g où g est la somme de la série de Fourier $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$.*

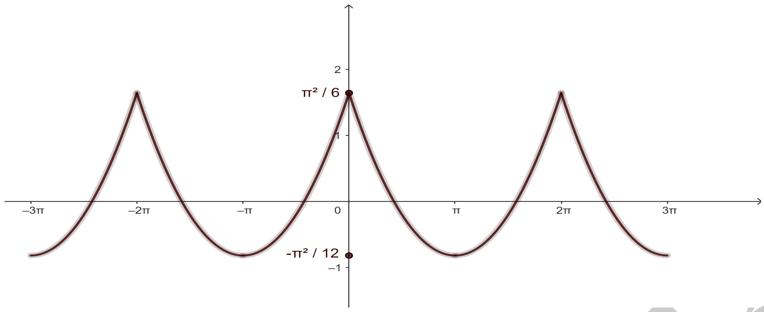
Corrigé :

1. Graphe de f :

   On a $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$ donc $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule au point $x=\pi$

alors f est décroissante dans l'intervalle $]0, \pi]$.
f est une fonction paire alors elle est symétrique par rapport à l'axe des oordonnées et

$$\forall x \in [-\pi, 0[: \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$$



ex5.png

2. Développement en série de Fourier :

f est paire donc $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}\Big)\ dx = \Big[\frac{1}{12}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x\Big]_0^{\pi} = 0$$

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$. Intégrons par partie. On pose

$$u(x) = f(x) \Longrightarrow u'(x) = f'(x)$$

$$v'(x) = \cos(nx) \Longrightarrow v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[\frac{1}{n}f(x)\sin(nx)\Big]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f'(x)\sin(nx)\ dx\Big).$$

On fait une deuxième intégration par partie. On pose

$$u(x) = f'(x) \Longrightarrow u'(x) = f''(x) = \frac{1}{2}$$

$$v'(x) = \sin(nx) \Longrightarrow v(x) = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{2}{\pi n}\Big(\Big[-\frac{1}{n}f'(x)\cos(nx)\Big]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\ dx}_{=0}\Big) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\Big(\underbrace{f'(\pi)\cos(n\pi)}_{=0} - \underbrace{f'(0)}_{=-\frac{\pi}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et partout dérivable sauf aux point $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
En ces point f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, en effet

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6}}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(-x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6}}{x} = \frac{\pi}{2}$$

f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet alors la série de Fourier associée à f converge et on a

$$\mathcal{S}(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

3. Trouvons la fonction g telle que $\mathcal{S}(\})(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$:

   On remarque que si on dérive $\mathcal{S}(f)(x)$ terme à terme on obtient $-S(g)(x)$ donc on va démontrer qu'on peut dériver la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ terme à terme.

   (1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est dérivable sur $[0, \pi]$.

   (2) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge simplement dans $[0, \pi]$.

   (3) La série dériveé $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformement sur $[a, \pi]$ d'après le théorème d'Abel, en effet
   - La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est décroissante vers 0.
   - $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{a}{2})|}$, $\forall x \in [a, \pi]$.

   Alors $\forall x \in [a, \pi]$

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\sin(nx)}{n}$$

   Puisque f est paire donc f' est impaire et puisque a est arbitraire on déduit que pour tout $x \in [-\pi, 0[\cup]0, \pi]$

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

   Il en résulte que

$$g(x) = -f'(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}) & \text{si} \quad x \in]0, \pi] \\ \\ -(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}) & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Exercice 0.5

Soit $\alpha \in]0, \pi[$, on considère la fonction f, $2\pi-$périodique, définie par

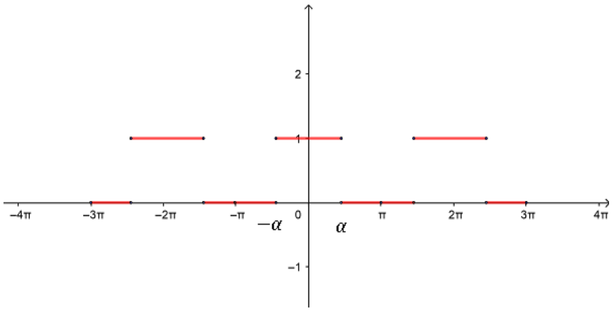
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < \alpha \\ 0 & si \quad \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de f sur au moins deux périodes.*
2. *Montrer que f est développable en série de Fourier puis la développer.*
3. *En déduire les sommes des séries suivantes :*

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha}$$

Corrigé :

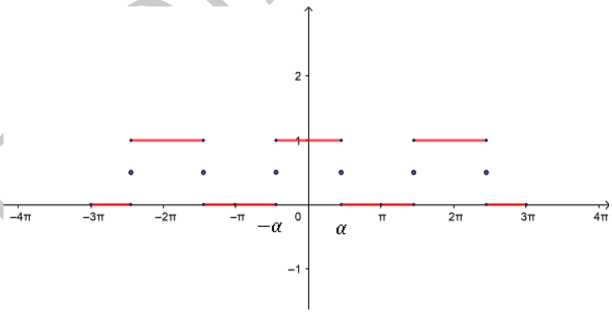
1. Le graphe de f :



2. f est développable en série de Fourier car elle satisfait les conditions du théorème de Jordan, en effet
(i) $\forall x \in]-\pi, \pi[: |f(x)| \leq 1$.
(ii) $\forall x \in]-\pi, -\alpha[\cup]-\alpha, \alpha[\cup]\alpha, \pi[$: f est strictement monotone.
• f est paire $\Longrightarrow b_n = 0$.
$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} dx = \dfrac{2\alpha}{\pi}$
$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos(nx)dx = \dfrac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}$
Donc

$$\begin{aligned} S_F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}\cos(nx) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < \alpha \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < |x| \leq \pi \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = \pm\alpha \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Le graphe de S_F :



3. Calcul des sommes
• Pour calculer S_1 on pose $x = 0$ dans 1

$$1 = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n} = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

• Pour calculer S_2 on utilise l'égalité de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx$$

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi} \Longrightarrow \frac{4\alpha}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \Big(\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2}\Big)$$

donc on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \frac{\pi-\alpha}{2}$.