2014/2015. CP2. ANA3.

Examen final en ANA3.
Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.

Exercice 1:(0,5+ 2+ 2)

Soit $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{1+xt}.\exp\left(-t^2\right) dt.$

1) Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2: (3+ 2+ 2+ 0,5)

Soit la fonction vectorielle $f = (f_1, f_2)$ où:

$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^3 y}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^4-y^2\right)^2}{x^6} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2) Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f_1.

3) Etudier la différentiabilité de f_1 en $(0,0)$.

4) f est elle différentiable en $(0,0)$? Justifier.

Exercice 3: (0,5+ 2+ 1)

Soit $f(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [-1,1] \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

1) Représenter le graphe de f.

2) Calculer $\mathcal{F}f$.

3) Utiliser le TIF sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ puis donner la valeur de $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin(xt)\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) dx.$

Exercice 4: (4,75+ 0,25+ 0,5)

On pose $f(x,y) = \left(x^2+2y^2\right) e^{-x^2-y^2}$.

1) Trouver les extrémums de f sur $\mathbb{R}^2$.

2) Choisir l'un des points critiques et lui faire une deuxième méthode pour le test.

3) Sachant que f admet une valeur maximale sur le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 3 trouver cette valeur.

Bon courage.

Un corrigé.

Exercice 1:

1) La fonction $f(t,x)=\sqrt{1+xt}.\exp\left(-t^2\right)\geq 0$ est définie continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

1) on utilise la régle de l'ordre :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t,x)=\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{t}+x}\exp\left(-t^2\right)=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{t}+x}e^{\frac{3}{2}\log t-t^2}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{t}+x}e^{-t^2\left(\frac{-3\log t}{2t^2}+1\right)}=0$$

On en conclue que F est bien définie sur $[0,+\infty[$

2) **La continuité:** Pour $x\in[0,a]\subset[0,+\infty[$ on a $\sqrt{1+xt}\leq\sqrt{1+at}$ d'où $f(t,x)\leq\sqrt{1+at}e^{-t^2}=\varphi(t)$ $\forall t\in[0,+\infty[$, $\forall x\in[0,a]$.

Or l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty}\sqrt{1+at}e^{-t^2}dt$ converge car $a\in\mathbb{R}^+$ (déja fait).

On a donc la convergence dominée de l'intégrale sur tout $[0,a]\subset[0,+\infty[$, de plus:

f est continue par morceaux selon t sur $[0,+\infty[$ car composée et produit de fcts continues.

f est continue selon x sur tout $[0,a]\subset[0,+\infty[$ car composée de fcts continues.

On a donc d'après le théoréme de conservation de la continuité que F est continue sur tout $[0,a]\subset[0,+\infty[$. Donc elle est continue sur $[0,+\infty[$

La dérivabilité: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{t}{2\sqrt{1+xt}}\exp\left(-t^2\right)$

On a $1+xt\geq 1\Rightarrow\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\dfrac{t}{2}\exp\left(-t^2\right)=\psi(t)$ $\forall t\in[0,+\infty[$, $\forall x\in[0,+\infty[$

et $\int\limits_0^{+\infty}\psi(t)dt$ converge par la RO, on a donc la CD de $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ sur $[0,+\infty[$, de plus:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par morceaux selon t sur $[0,+\infty[$ car composée et produit et rapport de fcts continues.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue selon x sur $[0,+\infty[$ car composée et rapport de fcts continues.

On a donc d'après le théoréme de conservation de la dérivabilité que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F'(x)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{t}{\sqrt{1+xt}}\exp\left(-t^2\right)dt$.

Exercice 2:

Soit $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^3y}{x^2+y^4} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

posons $\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x=0\right\}=\{(0,b)\ /\ b\in\mathbb{R}\}$

1) Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

★ Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$: f est continue car f_1 l'est puisqu'elle est la composée, produit et rapport de fonctions continues et et f_2 l'est aussi car c'est un rapport de polynomes.

★ Sur Δ : Soit $(0,b)$ $b\in\mathbb{R}$. Voyons d'abord la continuité de f_2.

$\rightsquigarrow$ A t on que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,b)} f_2(x,y)=f_2(0,b)=0$?

1er cas: $b \neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,b)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{\left(x^4-y^2\right)^2}{x^6} = \dfrac{b^4}{0} = \infty \neq f(0,b). \text{ On peut arréter là.} \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x=0}} 0 = 0 = f(0,b). \text{ (En plus).} \end{cases}$$

2ème cas: $b = 0$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{\left(x^4-y^2\right)^2}{x^6} /_{\text{Le chemin: } x=y} := \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\left(x^4-x^2\right)^2}{x^6} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^4}{x^6} = +\infty \neq f(0,b) \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x=0}} 0 = 0 = f(0,b). \text{ (En plus)} \end{cases}$$

Donc f_2 est discontinue sur Δ, donc inutile d'étudier la continuité de f_1

Conclusion: f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ et discontinue sur Δ.

2) Etudions l'existence des dérivées partielles premières de f:

★ Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$: f_1 admet des dérivées partielles selon x et y car elle est la composée, produit et rapport de fonctions qui en admettent.

★ Sur Δ : Soit $(0,b)$ $b \in \mathbb{R}$.

1er cas: $b \neq 0$.

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,b) : \lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\neq 0}} \dfrac{f_1(x,b)-f_1(0,b)}{x-0} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{|x|^3\, b}{(x^2+b^4)\, x}$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{|x|^3\, b}{(x^2+b^4)\, x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x^3 b}{(x^2+b^4)\, x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^3 b}{x b^4} = 0$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{|x|^3\, b}{(x^2+b^4)\, x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{-x^3 b}{(x^2+b^4)\, x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{-x^3 b}{x b^4} = 0$

Donc $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,b) = 0\ \exists$.

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,b) : \lim\limits_{y\longrightarrow b} \dfrac{f_1(0,y)-f_1(0,b)}{y-b} = \lim\limits_{y\longrightarrow b} \dfrac{0}{y-b} = 0$ Donc $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,b) = 0\ \exists$.

2ème cas: $b = 0$.

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) : \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f_1(x,0)-f_1(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{0}{x} = 0\ \exists$.

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) : \lim\limits_{y\longrightarrow b} \dfrac{f_1(0,y)-f_1(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\longrightarrow b} \dfrac{0}{y} = 0\ \exists$.

3) Etudier la différentiabilité de f_1 en $(0,0)$: utilisons la définition.

$f_1(h,k) - f_1(0,0) = h.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) + k.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) + \|(h,k)\|.\varepsilon(h,k) = \sqrt{h^2+k^2}.\varepsilon(h,k)$

$$\Longrightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \Longrightarrow \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h,k) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(h,k)\longrightarrow(0,0)\\ h\neq 0}} \dfrac{|h|^3\, k}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}\ (\bigstar) \\ \lim\limits_{\substack{(h,k)\longrightarrow(0,0)\\ h=0}} 0 \end{cases}$$

$(\bigstar) : \lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{h^2}{(h^2+k^4)} \dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} k = 0$. Donc $\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$.

Conclusion: f_1 est différentiable en $(0,0)$.
4) f n'est pas différentielle en $(0,0)$ car elle n'est pas continue en ce point (voir question 1))

Exercice 3:

1) Le graphe, on remarque que f est impaire.
2) a) ★ $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, en effet f est impaire continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (ses seuls points de discontinuité sont -1 et 1, elle y est continue à droite et à gauche),
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \overset{|f| \text{ paire}}{=} 2\int\limits_{0}^{+\infty} |f(t)|\, dt = 2\int\limits_{0}^{1} t dt = 1$.

$$\bigstar\ \mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt \overset{f \text{ impaire}}{=} -2i\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(xt)\, f(t)\, dt = -2i\int\limits_{0}^{1} t\sin(xt)\, dt.$$

<u>1er cas:</u> Si $x \neq 0$: Utilisons une IPP: $\begin{cases} u = t \to u' = 1 \\ v' = \sin(xt) \to v = \dfrac{-1}{x}\cos(xt) \end{cases}$

Donc $\mathcal{F}f(x) = -2i\left(\dfrac{-t}{x}\left[\cos(xt)\right]_0^1 + \dfrac{1}{x}\int\limits_0^1 \cos(xt)\, dt\right) = \dfrac{2i}{x}\left(\cos x - \dfrac{1}{x}\left[\sin(xt)\right]_0^1\right) =$
$\dfrac{2i}{x^2}(x\cos x - \sin x)$

<u>2ème cas:</u> Si $x = 0$: $\mathcal{F}f(0) = 0$

On en déduit: $\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} \dfrac{2i}{x^2}(x\cos x - \sin x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

b) ★ Appliquons le TIF sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ à f :
Puisque f est continue par morceaux et admet une dérivée à droite et à gauche de tout point et elle est impaire.
Alors $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ias}.\mathcal{F}f(x)\, dx \overset{impaire}{=} \dfrac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(xa)\,\mathcal{F}f(x)\, dx$, on obtient alors:

$$f(a) = 2i\int\limits_0^{+\infty} \sin(xa)\,\frac{(x\cos x - \sin x)}{x^2} dx \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Donc l'intégrale demandée est égale à : $\dfrac{f(a)}{2i}$.

Exercice 4

1) On a que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ car produit et composée de fonctions C^∞ (expo et polynomes),
CN. Calcul des points critiques:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x\left(x^2+2y^2\right)e^{-x^2-y^2} + 2xe^{-x^2-y^2} = 2xe^{-x^2-y^2}\left(-x^2-2y^2+1\right)$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\left(x^2+2y^2\right)e^{-x^2-y^2} + 4ye^{-x^2-y^2} = 2ye^{-x^2-y^2}\left(-x^2-2y^2+2\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\left(-x^2-2y^2+1\right)=0\ldots(1) \\ y\left(-x^2-2y^2+2\right)=0\ldots(2) \end{cases}$$

$(1) \Longleftrightarrow x=0$ ou $-x^2-2y^2+1=0$
★ Si $x=0$,
$(2) \Longleftrightarrow y\left(-2y^2+2\right)=0 \Longleftrightarrow y=0$ ou $y=1$ ou $y=-1$
donc $M_1=(0,0)$, $M_2=(0,1)$ et $M_3=(0,-1)$ sont des points critiques de f.
★ Si $-x^2-2y^2+1=0\ldots(1')$
$(2) \Longleftrightarrow y\left(-x^2-2y^2+2\right)=0$
⧫ Si $y=0$ dans $(1)'$: $1-x^2=0$ donc : $M_4=(1,0)$, $M_5=(-1,0)$ sont des points critiques.
⧫ Si $-x^2-2y^2+2=0$ on obtient le système suivant:
$\begin{cases} -x^2-2y^2+1=0\ldots(1) \\ -x^2-2y^2+2=0\ldots(2) \end{cases}$ qui n'admet pas de solutions.
Conclusion: Les points critiques de f sont $(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$.
Comme la fonction f est paire par rapport à x alors $(M_2, f(M_2))$ et $(M_3, f(M_3))$ sont de même nature.
Comme la fonction f est paire par rapport à y alors $(M_4, f(M_4))$ et $(M_5, f(M_5))$ sont de même nature.

CS. La nature des points:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2e^{-x^2-y^2}\left[-2x\left(-x^3-2xy^2+x\right)-3x^2-2y^2+1\right]$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=-4y\left[-x^3-2xy^2+3x\right]e^{-x^2-y^2}$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2e^{-x^2-y^2}\left[-2y^2\left(-x^2-2y^2+2\right)-x^2-6y^2+2\right]$
Le point M_1: $r_1=2; t_1=4$ et $s_1=0$ donc $\Delta=r_1t_1-s_1^2=8>0$
et comme $r_1>0$ alors f admet en $(M_1, f(M_1))$ est un minimum local.

Le point M_2: $r_2=-2e^{-1}; t_2=-8e^{-1}$ et $s_2=0$ donc $\Delta=16e^{-2}>0$
et comme $r_2<0$ alors f admet en $(M_2, f(M_2))$ est un maximum local.

Le point M_4: $r_4=-4e^{-1}; t_4=2e^{-1}$ et $s_2=0$ donc $\Delta=-8e^{-2}>0$
et comme $\Delta<0$ alors f n'admet pas en $(M_4, f(M_4))$ un extrémum.

2) Au point $(0,0)$ par exemple, on peut utiliser la définition et voir le signe de: $f(x,y)-f(0,0)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-x^2-y^2}\geq 0$ donc le point donne un minimum pour f.
3) La valeur maximale de f sur le disque ouvert est $f(M_2)=f(0,1)=2e^{-1}$.

En plus: la continuité de f_1 :
$\rightsquigarrow$ A t on que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,b)} f_1(x,y) = f_1(0,b) = 0?$

<u>1er cas:</u> $b \neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,b)} f_1(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{|x|^3\, y}{x^2+y^4} = 0 = f(0,b) \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x=0}} 0 = 0 = f(0,b) \end{cases}$$

<u>2ème cas:</u> $b = 0$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f_1(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{|x|^3\, y}{x^2+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^4}}_{\text{bornée}} \underbrace{|x|\, y}_{\text{tend vers 0}} = 0 = f(0,b) \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,b)\\ x=0}} 0 = 0 = f(0,b) \end{cases}$$

Donc f_1 est continue sur Δ.