Exercice : Pour $b \in \mathbb{R}$, Soient :

$$A_b = \begin{pmatrix} 1+b^2 & b & 0 \\ b & 1+b^2 & b \\ 0 & b & 1+b^2 \end{pmatrix}, \quad B_b = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1/ Montrer que A_b est diagonalisable $\forall b \in \mathbb{R}$.

2/ Diagonaliser A_1

3/ Ecrire $(A_1 | B_1)$ sous forme echelonnée réduite et déduire une solution du système $A_1 X = B_1$.

Corrigé de l'exercice :

1/ $$Det(A_b - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1+b^2-\lambda & b & 0 \\ b & 1+b^2-\lambda & b \\ 0 & b & 1+b^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det(A_b - \lambda I) &= (1+b^2-\lambda)\left[(1+b^2-\lambda)^2 - b^2\right] - b\left[b(1+b^2-\lambda) - 0\right] \\ &= (1+b^2-\lambda)\left[(1+b^2-\lambda)^2 - 2b^2\right] \\ &= (1+b^2-\lambda)\left[1+b^2-\lambda-\sqrt{2}\,b\right]\left[1+b^2-\lambda+\sqrt{2}\,b\right] \end{aligned}$$

$$P_{A_b}(\lambda) = (1+b^2-\lambda)(1+b^2-\sqrt{2}\,b-\lambda)(1+b^2+\sqrt{2}\,b-\lambda)$$

on voit que si $b=0$, $P_{A_b}(\lambda) = (1-\lambda)^3$

et A_0 est déjà diagonale

et si $b \neq 0$, $P_{A_b}(\lambda)$ admet 3 racines simples donc 3 valeurs propres simples distinctes pour A_b et par suite A_b est diagonalisable

2/ Diagonalisation de A_1 :

on a les valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2+\sqrt{2}$

$E_{\lambda_1} = \ker(A_1 - 2I)$

$(A_1 - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{(1,0,-1)\}$ soit $v_1 = (1,0,-1)$

$E_{\lambda_2} = \ker(A_2 - (2-\sqrt{2})I)$

$(A_2 - (2-\sqrt{2})I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ z = x \end{cases}$

$E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{(1, -\sqrt{2}, 1)\}$ soit $v_2 = (1, -\sqrt{2}, 1)$

$E_{\lambda_3} = \ker(A_1 - (2+\sqrt{2})I)$

$(A_1 - (2+\sqrt{2})I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{2}z \end{cases}$

$E_{\lambda_3} = \text{Vect}\{(1, \sqrt{2}, 1)\}$ soit $v_3 = (1, \sqrt{2}, 1)$

Donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ avec $D = P^{-1}A_1P$

et $\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $$(A_1|B_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3} L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3} L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1/3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} & 1/3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{3}{4} L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$(S) : A_1 X = B_1 \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Aprés échelonnement

$$(S) \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1/2 \\ z = 1/4 \end{cases}$$