Examen 1 Logique (Corrigé)

Exercice 01

1) c'est faux. **01 pt**

contre-exemple :

$\Gamma = \{a\}$, $\Delta = \{b\}$, $C = (a \wedge b)$

on a : $\{a, b\} \models (a \wedge b)$ mais ni $\{a\} \models (a \wedge b)$

ni $\{b\} \models (a \wedge b)$.

2) Soit v un modèle de $\Gamma \cup \Delta$.

Donc v est modèle de Γ

et v est modèle de Δ.

Comme on a $\begin{cases} \Gamma \models A \\ \text{et} \\ \Delta \models B \end{cases}$ alors v est modèle de A et de B.

Donc v est modèle de $A \wedge B$.

et Comme on a aussi $A \wedge B \models C$

Donc v est modèle de C.

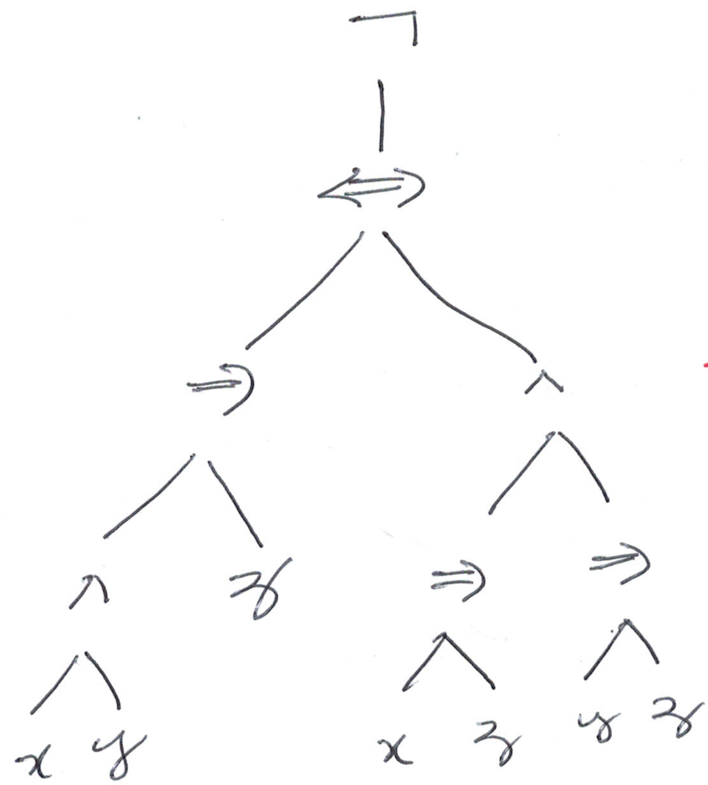
Conclusion tout modèle de $\Gamma \cup \Delta$ est aussi modèle de C

Donc $\Gamma \cup \Delta \models C$. **2 pt**

Exercice 02

1) $F = \neg\left(\left((x \wedge y) \Rightarrow z\right) \Leftrightarrow \left((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)\right)\right)$

0,25



0,75

2) $F \equiv \overline{(xy \Rightarrow z) \Leftrightarrow \left((x \Rightarrow z)(y \Rightarrow z)\right)}$

$\equiv (xy \Rightarrow z)\overline{(x \Rightarrow z)(y \Rightarrow z)} + \overline{(xy \Rightarrow z)}(x \Rightarrow z)(y \Rightarrow z)$

$\equiv (\bar{x} + \bar{y} + z)(x\bar{z} + y\bar{z}) + (xy\bar{z})(\bar{x} + z)(\bar{y} + z)$

$\equiv \bar{x}y\bar{z} + \bar{y}x\bar{z}$

1

3) oui F est satisfaisable elle a deux modèles

x	y	z
0	1	0

et

x	y	z
1	0	0

0,5

F n'est pas valide, elle a un contre modèle

x	y	z
1	1	1

0,5

Exercice 03

$$F = \big((s \wedge q) \Rightarrow r\big) \wedge \big(s \wedge p \Rightarrow q\big) \Rightarrow (q \Rightarrow t) \Rightarrow (p \Rightarrow s) \Rightarrow p \Rightarrow t \wedge p$$

1) En utilisant l'équivalence $\overline{(A \Rightarrow B)} \equiv A\bar{B}$

on a : $\neg F \equiv (sq \Rightarrow r)(sp \Rightarrow q)(q \Rightarrow t)(p \Rightarrow s)\, p\, \overline{(tp)}$

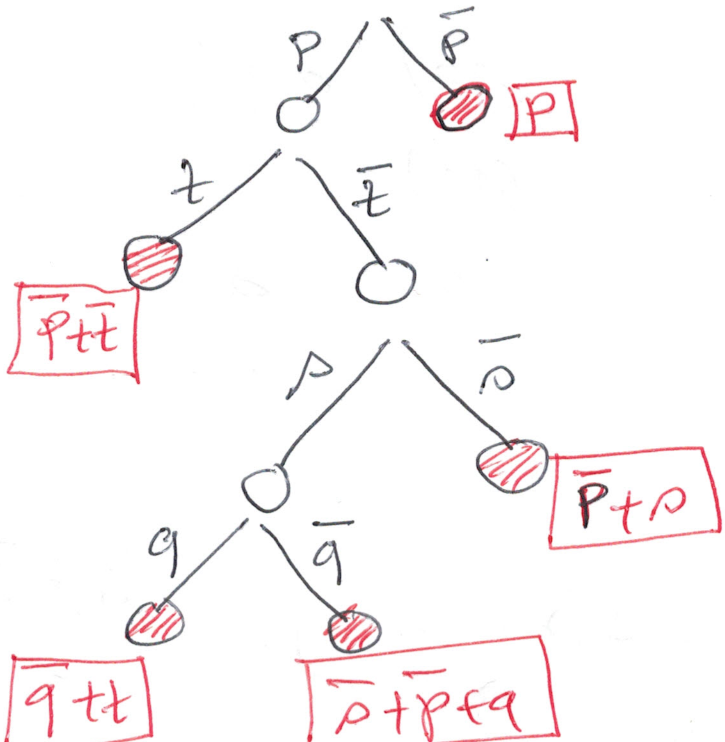
$$\equiv (\bar{s}+\bar{q}+r)(\bar{s}+\bar{p}+q)(\bar{q}+t)(\bar{p}+s)\,p\,(\bar{t}+\bar{p})$$

$\boxed{1,5\ pt}$

2) Soit Γ l'ensemble des clauses de F.

on a : $\Gamma = \{\bar{s}+\bar{q}+r,\ \bar{s}+\bar{p}+q,\ \bar{q}+t,\ \bar{p}+s,\ p,\ \bar{t}+\bar{p}\}$

arbre sémantique selon $\{p, t, s, q\}$



L'arbre est fermé, Γ est contradictoire.

Donc F est valide.

$\boxed{1,5\ pt}$

Exercice 04

On a :

$$\{a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ f \vee \neg c\} \models ((a \vee b \vee c) \Rightarrow (d \vee e \vee f))$$

si et seulement si

$$\{a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ f \vee \neg c,\ \neg((a \vee b \vee c) \Rightarrow (d \vee e \vee f))\} \models \perp$$

si et seulement si

$$\{\bar{a}+d,\ \bar{b}+e,\ f+\bar{c},\ a+b+c,\ \bar{d},\ \bar{e},\ \bar{f}\} \models \perp$$

1 pt

Résolution positive

(1) $\bar{a}+d$	(8)	$a+c+e$	Res(2,4)
(2) $\bar{b}+e$	(9)	$a+c$	Res(8,6)
(3) $f+\bar{c}$	(10)	$a+f$	Res(9,3)
(4) $a+b+c$	(11)	a	Res(10,7)
(5) $\bar{d}$	(12)	d	Res(11,1)
(6) $\bar{e}$	(13)	$\perp$	Res(12,5)
(7) $\bar{f}$			

1,5 pt

Donc $\{\bar{a}+d,\ \bar{b}+e,\ f+\bar{c},\ a+b+c,\ \bar{d},\ \bar{e},\ \bar{f}\} \vdash_{Res} \perp$

Donc $\{\bar{a}+d,\ \bar{b}+e,\ f+\bar{c},\ a+b+c,\ \bar{d},\ \bar{e},\ \bar{f}\} \models \perp$

0,5 pt

Exercice 05

Reponse 1

$(p \Rightarrow \neg r)$ 0,5 pt

$(b \Rightarrow s)$ 0,5 pt

$(h \Leftrightarrow (b \vee r))$ 0,5 pt

$((h \wedge p) \Rightarrow s)$ 0,5 pt

Réponse 2 :

on a $\{p \Rightarrow \neg r, b \Rightarrow s, h \Leftrightarrow b \vee r\} \models (h \wedge p \Rightarrow s)$

si et seulement si

$\{\bar{p}+\bar{r}, \bar{b}+s, \bar{h}+b+r, h+\bar{b}, h+\bar{r}, \cancel{b+s}, h, p, \bar{s}\} \models \bot$ 1 pt

En utilisant DP on a :

$$\{\bar{p}+\bar{r}, \bar{b}+s, \bar{h}+b+r, h+\bar{b}, h+\bar{r}, \cancel{b+s}, h, p, \bar{s}\}$$

$$\Big| \text{ RU } (h, p, \bar{s})$$

$$\{\bar{r}, b+r, \bar{b}\}$$

$$\Big| \text{ RU } \{\bar{b}, \bar{r}\}$$

$$\{\bot\}$$ 1 pt

Donc l'ensemble est contradictoire

le dernier énoncé est conséquence des 03 premiers.