Exercice 1 : (6 pt)
Soient α un paramètre réel et (S_α) le système linéaire défini par :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+\alpha z=3 \\ x+\alpha y+3z=2 \end{cases}$$

1- Pour quelle(s) valeur(s) de α le système (S_α) est de Cramer ? Dans ce cas, résoudre le système avec les formules de Cramer.

Solution : Soit $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$ la matrice du système (S_α). On a :

$$\det A_\alpha = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2-x_1 & x_3+x_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha+2 \\ 1 & \alpha-1 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha+2 \\ \alpha-1 & 4 \end{vmatrix} = (2-\alpha)(\alpha+3). \textbf{(1pt)}$$

D'où : le système (S_α) est de Cramer ssi $\det A_\alpha \neq 0$ ssi $(2-\alpha)(\alpha+3) \neq 0$ ssi $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{2,-3\}$. **(0.25pt)**
Dans ce cas, on a :

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{(2-\alpha)(\alpha+3)}, \frac{\Delta_y}{(2-\alpha)(\alpha+3)}, \frac{\Delta_z}{(2-\alpha)(\alpha+3)} \right),$$

avec :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & \alpha \\ 2 & \alpha & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha+3 \\ 2 & \alpha-2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \alpha+3 & 0 \\ 2 & 5 & \alpha-2 \end{vmatrix} = -(\alpha+3)(\alpha-2), \ \textbf{(0.5pt)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha+2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha+2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2-\alpha, \ \textbf{(0.5pt)}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 2-\alpha \end{vmatrix} = 2-\alpha, \ \textbf{(0.5pt)}$$

d'où la solution est

$$(x,y,z) = \left(1, \frac{1}{\alpha+3}, \frac{1}{\alpha+3}\right). \ \textbf{(0.25pt)}$$

2- Supposons que (S_α) n'est pas de Cramer. En utilisant le théorème de Rouché-Fontené, dire pour quelle(s) valeur(s) de α le système (S_α) est compatible. Résoudre le système dans ce cas.

Solution : Si (S_α) n'est pas de Cramer, alors $\alpha \in \{-3, 2\}$, dans ce cas $\mathrm{rg}(S_\alpha) < 3$. **(0.25pt)**

Soit la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ extraite de la matrice A en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. **(0.25pt)**

On a $\det R = 1 \neq 0$, on en déduit que $rgA_\alpha = 2$, on peut prendre :

la matrice R comme matrice principale, les inconnues x et y comme inconnues principales et les deux premières équations comme équations principales. Il y a un déterminanat bordant du déterminant principal :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha - 1 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = 2 - \alpha.$$

On en déduit que (S_{-3}) n'est pas compatible et (S_2) est compatible. **(1 pt)**

Pour $\alpha = 2$, on résout les équations principales :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y = 1 + z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$

d'où l'ensemble des solutions du système (S_2) est $\{(5z, 1 - 4z, z); z \in \mathbb{R}\}$. **(1,5 pt)**

Exercice 2 : (10 pt)

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Calculer $(A - 2I_3)(A - 7I_3)$.

Solution : On a :

$$(A - 2I_3)(A - 7I_3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -10 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \textbf{(0,5 pt)}$$

2- En déduire :

i/ que la matrice A est inversible puis déterminer la matrice A^{-1}.

Solution : Posons $T(X) = (X - 2)(X - 7) = X^2 - 9X + 14$, alors on a $T(A) = 0$, d'où :

$$T(A) = 0 \iff A^2 - 9A + 14I_3 = 0 \iff A\left(\frac{-1}{14}A + \frac{9}{14}I_3\right) = I_3, \textbf{(0.5 pt)}$$

on en déduit que :

$$A^{-1} = \frac{-1}{14}A + \frac{9}{14}I_3 = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{9}{14}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \textbf{(1 pt)}$$

ii/ la matrice A^n pour tout entier $n \geq 2$.

Solution : D'après le Théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$X^n = TQ + R, \quad \text{avec } \deg(R) \leq 1,$$

donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $X^n = TQ + (aX + b)$. Puisque $T(2) = T(7) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 2^n \\ 7a + b = 7^n \end{array} \right. &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 2^n \\ 5a = 7^n - 2^n \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{7}{5}2^n - \frac{2}{5}7^n \\ a = \frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n \end{array} \right. \qquad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

et puisque $T(A) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} A^n &= aA + bI_3 \\ &= \begin{pmatrix} 6a + b & 2a & -10a \\ 2a & 3a + b & -5a \\ 0 & 0 & 2a + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (7a + b) - a & 2a & -10a \\ 2a & (2a + b) + a & -5a \\ 0 & 0 & 2a + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7^n - \left(\frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n\right) & 2\left(\frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n\right) & -10\left(\frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n\right) \\ 2\left(\frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n\right) & 2^n + \left(\frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n\right) & -5\left(\frac{1}{5}7^n - \frac{1}{5}2^n\right) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}7^n + \frac{1}{5}2^n & \frac{2}{5}7^n - \frac{2}{5}2^n & 2^{n+1} - 2 \times 7^n \\ \frac{2}{5}7^n - \frac{2}{5}2^n & \frac{1}{5}7^n + \frac{4}{5}2^n & 2^n - 7^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

iii/ que le polynôme caractéristique de A est égal à : $P_A(X) = (2 - X)^2 (7 - X)$.

Solution : Soit λ est une valeur propre de A et soit $V \neq 0$ un vecteur propre de A associé à λ, donc on a : $AV = \lambda V$, on en déduit que : $A^2V = A(AV) = A(\lambda V) = \lambda(AV) = \lambda^2 V$, d'où :

$$\begin{aligned}
T(A)=0 &\Longrightarrow A^2-9A+14I_3=0\\
&\Longrightarrow \left(A^2-9A+14I_3\right)V=0\\
&\Longrightarrow A^2V-9AV+14V=0\\
&\Longrightarrow \lambda^2V-9\lambda V+14V=0\\
&\Longrightarrow (\lambda^2-9\lambda+14)V=0\\
&\Longrightarrow \lambda^2-9\lambda+14=0 \qquad\qquad (\text{car } V\neq 0)\\
&\Longrightarrow (\lambda-2)(\lambda-7)=0\\
&\Longrightarrow \lambda\in\{2,7\}\ \ \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

Puisque la somme des valeurs propres de A est égale à $tr(A)=11$, le seul cas possible est $\text{Spec}(A)=\{2,7\}$ avec $m(2)=2$ et $m(7)=1$, d'où $P_A(X)=(2-X)^2(7-X)$. **(1 pt)**

3- Montrer que A est diagonalisable.

Soution : On a : A est diagonalisable ssi $\dim E_2+\dim E_7=3$ ssi $\dim E_2=2$. **(0,25 pt)**

Posons $g=f-2id_{\mathbb{R}^3}$, alors :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3)\end{array}\\
A-2I_3= & \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10\\ 2 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_1-2e_2) & g(5e_1+2e_3)\end{array}\\
\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{array}.\textbf{(0,5 pt)}$$

On en déduit que $E_2=\ker(f-2\text{id}_{\mathbb{R}^3})=\langle v_1=(1,-2,0),v_2=(5,0,2)\rangle$, donc $\dim E_2=2$ et A est diagonalisable.**(0,25 pt)**

4- Déterminer une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$.

Solution : Posons $h=f-7\text{id}_{\mathbb{R}^3}$, alors :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3)\end{array}\\
A-7I_3= & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -10\\ 2 & -4 & -5\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\\
 & \begin{array}{ccc} h(e_1) & h(2e_1+e_2) & h(e_3)\end{array}\\
\sim & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -10\\ 2 & 0 & -5\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}.
\end{array}$$

Puisque $\dim E_7 = 1$, alors $E_7 = \ker(f - 7\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle v_3 = (2,1,0)\rangle$. **(0,5 pt)**
On en déduit que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0,25 pt)} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0,25 pt)}$$

5- En déduire la matrice A^n pour tout entier $n \geq 2$.
Solution : On a :

$$D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}. \quad \textbf{(0,25 pt)}$$

On a :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - 2e_2 \\ v_2 = 5e_1 + 2e_3 \\ v_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_3 \\ e_2 = -\frac{2}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_3 \\ e_3 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_3 \end{cases},$$

on en déduit que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

et puisque

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} \quad \textbf{(0,25 pt)}$$

alors :

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}2^n + \frac{4}{5}7^n & \frac{2}{5}7^n - \frac{2}{5}2^n & 2 \times 2^n - 2 \times 7^n \\ \frac{2}{5}7^n - \frac{2}{5}2^n & \frac{4}{5}2^n + \frac{1}{5}7^n & 2^n - 7^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0,5 pt)} \end{aligned}$$

Exercice 3 : (4 pt)

Soit $n \geq 3$ et considérons une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.

1- Montrer que 0 est une valeur propre de A puis donner la dimension de l'espace propre E_0.

2- Déterminer la multiplicité de 0.

3- La matrice A est-elle diagonalisable?

Solution :

1- On sait que λ est une valeur propre de A ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$. Puisque par hypothèse $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3 \leq n$, alors 0 est une valeur propre de A et on a : $\dim(E_0) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 2$. **(0.5 pt) + (0.5 pt)**

2- On sait que : $\dim(E_0) \leq m(0) \leq n$, donc $n-2 \leq m(0) \leq n$, on en déduit que $P_A(X)$ est divisible par $(-X)^{n-2}$ et dans $\mathbb{C}[X]$ il s'écrit comme produit de facteurs de degrés 1, il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que : $P_A(X) = (-X)^{n-2}(\alpha - X)(\beta - X)$. La somme des valeurs propres est égale à $\alpha + \beta$ et aussi à $\mathrm{Tr}(A)$, donc $\alpha + \beta = 0$.

Si $\alpha = 0$, on aurait $P_A(X) = (-X)^n$ et par le Théorème de Cayley-Hamilton, on aurait $(-A)^n = (-1)A^n = 0$, i.e., $A^n = 0$, ce qui est imossible. Les valeurs propres de A sont donc 0 (de multiplicité $n-2$), α et $-\alpha$. **(2 pt)**

3- On a : $\dim E_0 + \dim E_\alpha + \dim E_{-\alpha} = (n-2) + 1 + 1 = n$, on en déduit que A est diagonalisable. **(1 pt)**