2014/2015. CP2. ANA3

CI en ANA3.
Durée 2H

DOCUMENTS, TELEPHONE ET CALCULATRICE INTERDITS.

Exercice1:(4 points)
Les questions sont indépendantes:

1) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t . \log t}{\sqrt{t^3+1}} dt$

2) Soit $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, calculer $\mathcal{L}(f(t))$.
3) Etant donné $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $r > 0$
Pour X et Y dans la boule $B(a,r)$. Montrer que:
$\forall \lambda \in [0,1] \ : \ \lambda X + (1-\lambda) Y \in B(a,r)$.

Exercice 2:(5 points)
Pour $0 < x < 1$ on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t} dt$.
1) Montrer que F est bien définie sur $]0,1[$.
2) Etudier la continuité de F sur $]0,1[$.
3) Calculer explicitement $F(x)$.

Exercice 3: (4 points)
1) Décomposer en éléments simples: $\frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}$
2) En utilisant les TL, résoudre l'équation differentielle:
$y"(t) - \frac{5}{2} y'(t) + y(t) = -\frac{5}{2} \sin t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 4: (7points)
1) Donner -sans calculer- la TF de $f \ / \ f(t) = e^{-kt^2} \ (k > 0)$.
Montrer que sa TF vérifie l'équation différentielle: $y' + \frac{x}{2k} y = 0$, (on admettra que sa solution est $y = Ce^{-\frac{x^2}{4k}}$ / C une constante réelle).
2) Montrer que $C \geq 0$ puis en utilisant le TIF, trouver C.
(on rappelle l'intégrale de Gauss: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).
3) Résoudre l'équation intégrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(u) . e^{-k(t-u)^2} du = e^{-t^2}, \ k > 1, \text{ où } y \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$