Durée 2heures
Tout document interdit

Exercice I (2, 1, 1, 2)

Soit L un langage du premier ordre comportant un seul symbole de constante (a) et un seul symbole de fonction monaire (f).

On considère Γ_1 :

- un ensemble de formules de L tel que : $\Gamma_1 = \{P(x), Q(y, f(a))\}$,
- et J une interprétation de domaine $D_J = \{1,2\}$ telle que :

$J(a)$	$J(f)(1)$	$J(f)(2)$
2	1	1

$J(P)(1)$	$J(P)(2)$	$J(Q)(1,1)$	$J(Q)(1,2)$	$J(Q)(2,1)$	$J(Q)(2,2)$
F	V	V	V	F	V

Questions

1. Définir l'ensemble T des termes de L.
2. J est-elle un modèle de Γ_1 ?
3. Γ est-il satisfait par l'interprétation J ?
4. Donner une interprétation I de domaine $D_I = \{1,2\}$ qui satisfait l'ensemble de formules $\Gamma_2 = \{\neg P(x), \neg Q(y, f(a))\}$.
5. Donner une interprétation I' de domaine $D_{I'} = \{1,2\}$ qui ne satisfait pas Γ_2. On s'inspirera des tableaux ci-dessus.

Exercice II (6)

Vérifier la consistance de chacun des ensembles suivants :

$\Gamma_1 = \{\forall x P(x), P(a) \to Q(x), \neg Q(x)\}$

$\Gamma_2 = \{\forall x P(x), P(a) \to Q(x), \neg Q(a)\}$

$\Gamma_3 = \{\forall y P(y), P(a) \to Q(x), \neg Q(y)\}$

$\Gamma_4 = \{\forall y P(y), P(f(a)) \to Q(a), \neg Q(f(a))\}$

Exercice II (2, 1, 3, 2)

Soient $\alpha : \forall x P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(x, y)$, et $\beta : \forall x \exists y P(x, y) \to \forall x P(x, f(x))$

1. Montrer que α est une formule valide.
2. Montrer que β n'est pas une formule valide.
3. Montrer sans utiliser les théorèmes de déduction et de complétude que α est un théorème.
4. Donner une forme prénexe de α.

NB : il sera tenu compte de la concision des réponses. Remettre au plus une double feuille et une intercalaire.

Logique Mathématique

Exercice 1

L langage de 1er ordre avec :
- Un seul symbole de constante a.
- Un seul " de fct unaire f.

$D_J = \{1, 2\}$, J une interprétation de domaine $D_J = \{1,2\}$.

$T_1 = \{P(x), Q(y, f(a))\}$.

$J(a) = 2$;

$v(x)$	$J(f)$	$J(P)$
1	1	F
2	1	V

$v(x)$	$v(y)$	$J(Q)$
1	1	V
1	2	V
2	1	V
2	2	F

1) L'ensemble des termes de L :
- a est un terme.
- tout symbole de variable est un terme.
- si t est un terme alors f(t) est un terme.
- Rien d'autre n'est un terme, s'il n'est obtenu en vertu des 3 règles précédentes.

2) J est un modèle de T_1 si et ssi J est un modèle de P(x) et J est un modèle de Q(y, f(a)).

i.e $J(P(x))_{v(x=d)} = V$ pour tout $d \in D_J$

et $J((Q(y, f(a)))_{v(y=d')} = V$ pour tout $d' \in D_J$.

or $J(P)(1) = F$ donc J non modèle de T_1.

3) T_1 est-il satisfait par J ?

T_1 est satisfait par J $\Leftrightarrow$ il existe une valuation v tq : $J \models (P(x))_v$ et $J \models Q(y,$

pour $v(x) = 2$ et $v(y) = 1$

on a : $J(P)(2) = V$ et $J((Q(y, f(a)))_{v(y=1)} =$

$= J(Q)(1, 1) = V$

4) $T_2 = \{\neg P(x), \neg Q(y, f(a))\}$.

J satisfait T_2 car : $J(\neg P(x))_{v(x=1)} = V$.

$J(\neg Q(y, f(a)))_{v(y=2)} = J(\neg Q(2, J(f)(J(a)))$

$= J(\neg Q(2, 1)) = V$

5) Donner I' de domaine $D_{I'} = \{1, 2\}$ qui ne satisfait pas T_2.

I' ne satisfait pas T_2 $\Leftrightarrow$ pour toute valuation v
$(J \not\models (P(x))_v$ ou $J \not\models (Q(y, f(a)))_v)$

il suffit de choisir l'interprétation suivante :

$I'(a) = 2$

et

$v(x)$	$v(y)$	$I'(P(x))$	$I'(Q(y, x))$	$I'(f)(x)$
1	1	V	V	1
1	2	V	F	1
2	1	V	V	2
2	2	V	F	2

on a : $I'(P(x))_{v(x=d)} = F$ pour tout $d \in D_I$.

donc aucune valuation v ne satisfait P

d'où aucune valuation v ne satisfait P(x) et Q(y, f(a)).

... naturel.

$I'(Q')$: ... est le triple de ...

$I'a = 1$, $I(f)(d) = 2$ pour tout $d \in D$.

Exercice 2 :

1) $\Gamma_1 = \{\forall x P(x), P(a) \to Q(x), \neg Q(x)\}$ inconsistant

1) $\forall x P(x)$ hyp 1
2) $\forall x P(x) \to P(a)$ A_4
3) $P(a)$ MP (1,2)
4) $P(a) \to Q(x)$ hyp 2
5) $Q(x)$ MP (3,4)
6) $\neg Q(x)$ hyp 3

d'où $\Gamma_1 \vdash Q(x)$ et $\Gamma_1 \vdash \neg Q(x)$ d'où l'inconsistance de Γ_1.

2) $\Gamma_2 = \{\forall x P(x), P(a) \to Q(x), \neg Q(a)\}$

Γ_2 est consistant $\Leftrightarrow$ Γ_2 est satisfiable

$\Leftrightarrow$ il y a une interprétation I et une valeur de x : $v(x)=d$ tq :

$I(\forall x P(x)) = I(P(a) \to Q(x))_{v(x=d)} = I(\neg Q(a)) = V$

il suffit de choisir une interp I et une valuat v tq : $I(\forall x P(x)) = V = I(P(a) \to Q(x))_{v(x=d)} = I(\neg Q(a))$

avec $d = v(x) \neq I(a)$

Par exple : $D = \{1,2\}$, $I a = 2$, $v(x) = 1$

et $v(x)$	$I(P(x))$	$I(Q(x))$
1	V	V
2	V	F

on aura : $I(\forall x P(x)) = V$

$I(P(a) \to Q(x))_{v(x=1)} = V$

$v(x=1)$

ou bien choisir : $D = \{1,2\}$; $I(P)$: ... est entier Naturel

$I(Q)$: ... est impair ; $I(a) = 2$.

$v(x) = 1$ ou 2.

3) $\Gamma_3 = \{\forall y P(y), P(a) \to Q(x), \neg Q(y)\}$ consistant.

Γ_3 est consistant : il suffit de choisir I et v tq : $v(x) \neq v(y)$.

Γ_3 est satisfiable $\Leftrightarrow$ il y a une valeur $v(x)=d$ et v tq : $I(\forall y P(y)) = I(P(a) \to Q(x))_{v(x}$ $= I(\neg Q(y))_{v(y=}$

Exple :

$D = \{1,2\}$, $v(x) = 1$, $v(y) = 2$, $I(a) = 2$.

et $v(x)$	$I(P(x))$	$I(Q(x))$
1	V	V
2	V	F

on a : $I(\forall x P(x)) = V$

$I(P(a) \to Q(x))_{v(x=}$

$I(\neg Q(y))_{v(y=2)} =$

4) $\Gamma_4 = \{\forall y P(y), P(f(a)) \to Q(a), \neg Q(f(a))\}$ consistant

il suffit de choisir I et v tq : $I(f(a)) \neq I(a)$.

Exple : $D = \{1,2\}$; $I(f(a)) = 2$, $I(a) = 1$.

$v(x)$	$I(P(x))$	$I(Q(x))$
1	V	V
2	V	F

on a :

$I(\forall x P(x)) = V$

$I(P(f(a)) \to Q(a)) = V$ et $I(\neg Q(f(a))) = \text{non}(I(Q(I(f(a)))$ $= V$.

ou bien : $I(a) = 1$, $I(f)(d) = 2$ $\forall d \in D$

$D = \mathbb{N}$, $I(P)$: ... est entier naturel.

$I(Q)$: ... est impair.

$\forall x\, P(x, f(x)) \longrightarrow \forall x \exists y\, P(x,y)$ Valide.

Soit un domaine D et une interprétation I.

Montrons que : si $I(\forall x\, P(x,f(x))) = V$

alors $I(\forall x \exists y\, P(x,y)) = V$.

Supposons que : $I(\forall x\, P(x,f(x))) = V$ et

$I(\forall x \exists y\, P(x,y)) = F$.

donc ① $I(P(x,f(x)))_{v(x=d)} = V$ pour tout $d \in D$.

et ② $I(\exists y\, P(x,y))_{v(x=d_0)} = F$ pour un certain $d_0 \in D$.

① et ② $\Longrightarrow \begin{cases} I(P(x,f(x)))_{v(x=d)} = V, \text{ pour tout } d \in D \\ \text{et} \\ I(P(x,y))_{v(x=d_0,\, y=d')} = F, \text{ pour tout } d' \in D \end{cases}$

Comme pour tout $d \in D$

$I(P(x,f(x)))_{v(x=d)} = V = I(P)(d, I(f)(d))$.

alors en particulier pour $d = d_0$:

$I(P(d_0, I(f)(d_0))) = V$.

et comme pour tout $d' \in D$: $I(P(x,y))_{v(x=d_0,\, y=d')} = F$

alors en particulier pour $d' = I(f)(d_0)$

donc $I(P)(d_0, d') = V$ d'après ①

et $I(P)(d_0, d') = F$ d'après ② } absurde

d'où $I(\forall x \exists y\, P(x,y)) = V$.

contre exple : $D = \{1, 2\}$.

$v(x)$	$v(y)$	$I(P(x,y))$	$I(f)$
1	1	V	2
1	2	F	1
2	1	V	1
2	2	F	1

on a : $I(\forall x \exists y\, P(x,y)) = V$ (car $I(P)(1,1) = V$ et $I(P)(2,1) = V$) et $I(\forall x\, P(x, f(x))) = $ (car $I(P)(1, I(f)(1)) = I(P)(1,2) = $

3) $\forall x\, P(x,f(x)) \longrightarrow \forall x \exists y\, P(x,y)$ Théorème :

1) $\forall x\, P(x,f(x))$ hyp 1.

2) $(\neg\neg \forall y \neg P(x,y) \to \neg P(x,f(x))) \to ((\neg\neg \forall y \neg P(x,y) \to P(x,f(x))) \to \neg \forall y \neg$ (A_3)

3) $\neg\neg \forall y \neg P(x,y) \to \forall y \neg P(x,y)$ (c.d.d.I : $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

4) $\forall y \neg P(x,y) \to \neg P(x, f(x))$ A_4.

5) $\neg\neg \forall y \neg P(x,y) \to \neg P(x, f(x))$ (c.d.d : $\alpha\to\beta, \beta\to\gamma$; $\alpha\to\gamma$

6) $(\neg\neg \forall y \neg P(x,y) \to P(x,f(x))) \to \neg \forall y \neg P(x,y)$; Πp (

7) $\forall x\, P(x, f(x)) \to P(x, f(x))$ A_4.

8) $P(x, f(x))$ $\Pi p(1, 7)$.

9) $P(x, f(x)) \to (\neg\neg \forall y \neg P(x,y) \to P(x, f(x)))$ A_1

10) $\neg\neg(\forall y \neg P(x,y)) \to P(x, f(x))$ $\Pi p(8, 9)$

11) $\neg(\forall y \neg P(x,y))$ $\Pi p(10, 6)$.

d'où : $\forall x\, P(x, f(x)) \vdash \forall x \exists y\, P(x,y)$

d'après le thm de déduction :

$\vdash \forall x\, P(x, f(x)) \to \forall x \exists y\, P(x,y)$. C