Exercice 1. *Montrer que les deux phrases suivantes veulent dire la même chose:*
Phrase 1. *S'il fait beau, les routes sont bloquées et s'il ne fait pas beau les routes sont bloquées.*
Phrase 2. *Qu'il fasse beau ou pas, les routes sont bloquées.*

Réponse.

Formalisation en calcul propositionnel:
B: *il fait beau.*
R: *Les routes sont bloquées.*

La première phrase :

$$P_1 \equiv (B \Rightarrow R) \wedge (\neg B \Rightarrow R).$$

La deuxième phrase :

$$P_2 \equiv (B \vee \neg B) \Rightarrow R.$$

Pour montrer l'équivalence on a le choix entre plusieurs méthodes.
On peut le faire par des équivalences remarquables.
On a $P_2 \equiv (B + \bar{B}) \Rightarrow R \equiv 1 \Rightarrow R \equiv R$.
D'autre part

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv (B \Rightarrow R) \cdot (\neg B \Rightarrow R) \\ &\equiv (\bar{B} + R)(B + R) \\ &\equiv B\bar{B} + R \quad \textit{distribution de} + \textit{ sur } * \\ &\equiv 0 + R \\ &\equiv R \end{aligned}$$

Exercice 2. *Déduire la négation de l'énoncé $E1$ à partir des énoncés $E2$ et $E3$:*

E1 : *Les plus grands sont devant.*

E2 : *Si les plus grands sont devant, alors ils sont tous alignés.*

E3 : *Ils ne sont pas alignés.*

Il y a une petite hésitation par rapport au troisième énoncé. Si on le comprend comme la négation de "ils sont tous alignés" on aura pas besoin de modéliser le problème en calcul des prédicats.

La deuxième lecture, est que l'énoncé 3 annonce que tous ne sont pas alignés. Ce qui est plus plausible pour l'exercice.

Solution

Formalisation

E1 : $\forall x (G(x) \Rightarrow D(x))$.

E2 : $(\forall x (G(x) \Rightarrow D(x))) \Rightarrow \forall x L(x)$.

E3 : $\forall x \neg L(x)$.

On veut montrer que $\{E_2, E_3 \vDash \neg E_1\}$. *Il revient à montrer que* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *est contradictoire.*
On va le faire par arbre sémantique et par résolution.
Les deux nécessitent transformation en formes clausales.

Formes prénexes

$\forall x(G(x) \Rightarrow D(x))$.

$\exists x \forall y((G(x) \Rightarrow D(x)) \Rightarrow L(y))$.

$\forall x \neg L(x)$.

Formes de Skolem

$\forall x(G(x) \Rightarrow D(x))$.

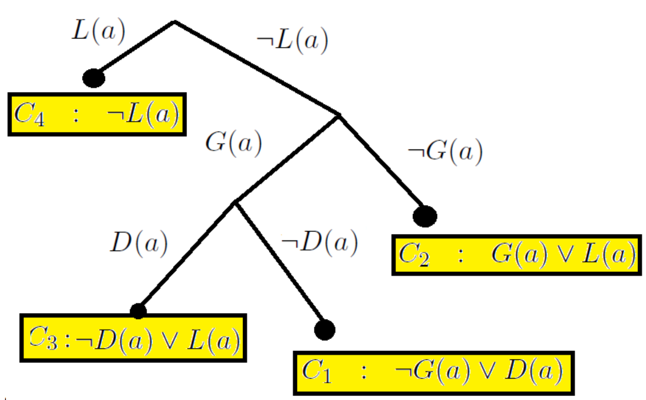
$\forall y((G(a) \Rightarrow D(a)) \Rightarrow L(y))$.

$\forall x \neg L(x)$.

Formes clausales

$$\begin{array}{lcl} C_1 & : & \neg G(x) \vee D(x) \\ C_2 & : & G(a) \vee L(y) \\ C_3 & : & \neg D(a) \vee L(y) \\ C_4 & : & \neg L(x) \end{array}$$

Première méthode Arbre sémantique



Deuxième méthode **Résolution: instances de base**

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \neg G(x) \vee D(x) \\
C_2 &: G(a) \vee L(y) \\
C_3 &: \neg D(a) \vee L(y) \\
C_4 &: \neg L(x) \\
C_1' &: \neg G(a) \vee D(a) \qquad C_1[a/x] \\
C_2' &: G(a) \vee L(a) \qquad C_2[a/y] \\
C_5 &: D(a) \vee L(a) \qquad Res(C_1', C_2') \\
C_3' &: \neg D(a) \vee L(a) \qquad C_3[a/y] \\
C_6 &: L(a) \qquad Res(C_5, C_3') \\
C_4' &: \neg L(a) \qquad C_4[a/x] \\
C_5 &: \bot \qquad Res(C_6, C_4')
\end{aligned}
$$

Troisième méthode **Résolution: par unification**

$$
\begin{aligned}
C_1 &: \neg G(x) \vee D(x) \\
C_2 &: G(a) \vee L(y) \\
C_3 &: \neg D(a) \vee L(y) \\
C_4 &: \neg L(x) \\
C_5 &: D(a) \vee L(y) \qquad Res(C_1, C_2) MGU(x \leftarrow a) \\
C_6 &: L(y) \qquad Res(C_5, C_3) MGU(\{\}) \\
C_7 &: \bot \qquad Res(C_4, C_6) MGU(\{x \leftarrow y\})
\end{aligned}
$$

On a montré que $S = \{E_1, E_2, E_3\} \vdash \bot$ et comme la résolution est correcte, on a $S \vDash \bot$.