

2CPI

## Contrôle Intermédiaire

Avril 2024

Durée : 2 heures

Analyse mathématique 4

\_\_\_\_\_

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
- Le sujet comporte 4 exercices et 1 questionnaire.
- Traiter les exercices 1, 2, 3 et 4 chacun sur une double feuille séparée.
- Toute copie (double feuille, intercalaire ou questionnaire) sans nom ne sera pas corrigée.

Exercice1 (3.5 points) . Soit la fonction f donnée par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + 1.$$

Déterminer les extrémums locaux et globaux de f sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice2** (5,5 points) . Soient les fonctions f et  $\varphi$  suivantes :

$$f(x,y) = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 7), \ \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 8.$$

On définit l'ensemble A par:  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \varphi(x,y) = 0\}$ .

- 1) Donner  $D_f$  ainsi que sa représentation graphique, puis montrer que  $A \subset D_f$ .
- 2) Sous la contrainte  $\varphi(x,y)=0, f$  admet-elle un minimum global et un maximum global? Justifier.
- 3) Montrer qu'il y a 4 points critiques seulement (à déterminer) issus de la méthode des opérateurs de Lagrange, on les notera  $M_i(x_i, y_i)$  où  $1 \le i \le 4$ .
- 4) Préciser les points pour lesquels ces extrema globaux sous contrainte sont atteints.

**Exercice 3 (4,5 points)**. Soient la fonction  $\varphi(u,v) = (3u + v, u + 2v)$  et le parallélogramme D de sommets (0,0); (1,2); (3,1); (4,3).

- 1) Montrer que  $(x,y) = \varphi(u,v)$  représente un changement de variables dans  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Détreminer  $\Delta$  le transformé de D par le changement de variables donné par  $\varphi$ .
- 3) Représenter graphiquement D et  $\Delta$ .
- 4) Calculer l'aire de D.
- 5) Calculer la masse d'une plaque mince occupant le domaine D dont la masse surfacique est  $f(x,y) = (2x y)^2 e^{-x+3y}$ .

Indication :  $Masse = \iint_D f(x,y) dx dy$ .

**Exercice 4 (3,5 points)**: Soit  $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \le 1, x^2 + y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2 \}$ . **I- Question bonus**: Représenter Ω.

II- Soit

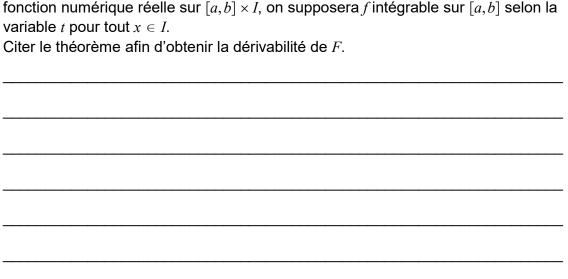
$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz.$$

- 1) Calculer I.
- 2) Compléter  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dz \right) dy \right) dx$  et donner le nom de la méthode utilisée.

Nom :	Prénom :	Groupe :
Nom:	Prénom :	Groupe :

## Répondre sur le sujet

Questionnaire (3 points) . $I$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ .
<b>1</b> ) Soit $f$ une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}^n$ . Completer : a) On dit que $f$ est coercive sur une partie non bornée $E \subset D_f$ de $\mathbb{R}^n$ ssi
b) Si $f$ est une fonction convexe sur un convexe $E$ . Alors, $\Big((a,f(a))$ est un minimum local de $f$ sur $E\Big) \Leftrightarrow$
2) Soit $F: x \to F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)dt$ où $u$ et $v$ sont des fonctions de $I$ vers $[a,b]$ et $f$ une
fonction numérique réelle sur $[a,b] \times I$ , on supposera $f$ intégrable sur $[a,b]$ selon la



- 3) Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies V, lesquelles sont fausses F sans justifier.

  A1 : Si f est continue sur  $[a,b] \times [0,+\infty[$  alors  $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ +\infty}} \int_a^b f(t,x) dt = \int_a^b \left(\lim_{\substack{x \to +\infty }} f(t,x)\right) dt$ .
  - **A2**: Soit la fonction F donnée par :  $F(x) = \int_{0}^{+\infty} f(t,x)dt$  où f une fonction

numérique réelle sur  $[0,+\infty[ imes I,$  on supposera  $f\in R_{loc}[0,+\infty[$  selon la variable t.

Si  $\int_{0}^{+\infty} f(t,x)dt$  est convergente sur tout  $[\alpha,\beta] \subseteq I$  alors F est bien définie sur I.