République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارةالتعليمالعاليوالبحثالعلمي

CONCOURS d'ACCESAUX ECOLES SUPERIEURES EN INFORMATIQUE

Epreuve : Mathématiques

Durée : 3h00

Coefficient : 4

[redacted]

<u>Instructions Générales</u> (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 3pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation.
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies.
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2,3,4,...).
- Les documents sont interdits, sauf indication contraire sur le sujet.
- L'emploi d'une calculatrice est interdit.
- Aucun échange n'est autorisé entre les candidats.
- Les parties I, II, III et IVsont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.
- Les parties I, II, III et IV doivent être rédigées sur des copies séparées.

PARTIE I (Analyse)

Exercice 1 (3,5 pts)

On pose $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$. Trouver les extrémums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (3,5 pts)

Soit P un polynôme non nul.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

2. On prend $P(n) = 1 + n + n^2$.

   (a) Trouver le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n$.

   (b) Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n$.

PARTIE II (Algèbre)

Exercice (5 pts)
Soit α un paramètre réel et soit la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer le polynôme caractérique de A_α.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre α pour que la matrice A_α soit diagonalisable.

3. On pose : $\alpha = 1$.

   (a) Calculer les espaces propres associés au valeurs propres.

   (b) Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $D = P^{-1}.A_1.P$.

   (c) En déduire, sans effectuer de calculs, la matrice A_1^n pour tout entier pair $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE III (Probabilités-Statistique)

Exercice (5 pts)

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité donnée par :

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

où $\alpha > 1$ est un paramètre inconnu.

a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

b) On pose $Y = \ln(X)$:

i) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et sa densité de probabilité f_Y.

ii) De quelle loi usuelle est la v.a Y ? .

iii) Montrer qu'on a bien : $E(Y) = \frac{1}{\alpha-1}$. En déduire un estimateur de α construit à partir d'un échantillon $Y_1, ..., Y_n$ de la loi de Y.

c) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de α construit à partir d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de la loi de X.

PARTIE IV (Logique mathématique)

Exercice (3 pts)

1. Ecrire dans le langage des prédicats les énoncés suivants :

   (a) On ne peut pas être amis et ennemis.

   (b) Les ennemis des amis d'une personne sont ennemis de cette personne.

   (c) Il y a une personne qui est amie de tout le monde et il y a une personne qui est ennemie de tout le monde.

   On supposera que la relation Ami est symétrique.

2. Montrer à l'aide de la résolution que l'ensemble des énoncés $\{a,\ b,\ c\}$ auquel on ajoute la symétrie de la relation "Ami" est insatisfaisable (non satisfiable).

N.B. Utiliser uniquement les symboles de prédicat A (ami) et E (ennemi).