

2CPI

Contrôle final
Analyse mathématique 4

Durée : 2 heures

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
- Il sera tenu compte de la présentation et la clarté des réponses

Veuillez rédiger les exercices 1,2 et 3 sur une double feuille séparée.

Exercice 1 (3 points): Soit $f(x,y) = -(x-1)^2 - (x-e^y)^2$.

1. Déterminer les points critiques.
2. f admet elle des extrémums locaux de f ? Si oui lesquels sont globaux?

Exercice 2 (3 points): Calculer le volume de Ω , où

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0\}.$$

Exercice 3 (5 points) : On pose $f(t,x) = e^{-t^2} \cos(xt)$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
3. Montrer que $F'(x) = -\frac{1}{2}xF(x)$.
4. En déduire l'expression de F sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Veuillez rédiger les exercices 4 et 5 sur le cahier.

Exercice 4 (4 points): Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformée de Laplace

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(2t) \text{ pour } t > 0, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Table des TL:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(x)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(x)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(x)$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{x^{n+1}}, x > 0$	$\sin(at)$	$\frac{a}{x^2 + a^2}, x > 0$	$sh(at)$	$\frac{a}{x^2 - a^2}, x > a $
e^{at}	$\frac{1}{x - a}, x > a$	$\cos(at)$	$\frac{x}{x^2 + a^2}, x > 0$	$ch(at)$	$\frac{x}{x^2 - a^2}, x > a $

Exercice 5 (5 points):

1. Calculer $\mathcal{F}(e^{-a|t|})$ pour $a > 0$.
2. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|}$.
3. On pose $g_a(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$ avec $a > 0$.

En appliquant la transformée de Fourier, trouver une fonction $y \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}^*)$ solution de

$$y * g_a = g_\beta \text{ avec } \beta > a > 0.$$

Bon Courage