2010/2011 ESI

Nom:
Prénom:
Groupe:

Controle intermédiaire 2
ANA4

Partie1

Dans chacun des cas suivants, dire lequel des deux Fubini est le plus approprié au calcul
de l'intégrale $\iiint_{\Omega_i} f(x,y,z)dxdydz$ où: f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^3$.

et $i \in \{1,2,3,4\}$.

1) $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1+y\}$.

....

....

2) $\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq y \leq 1 \text{ et } x^2+z^2 \leq 1\}$.

....

....

3) $\Omega_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1 \text{ et } 2+y^2 \leq z \leq 4-y^2\}$.

....

....

4) Ω_4 est le domaine limité par le cône d'équation $z = \sqrt{x^2+y^2}$,
le cylindre d'équation $x^2+y^2 = 1$ et le paraboloide d'équation $z = 1+x^2+y^2$.
Pour Ω_4, représenter d'abord le domaine, ensuite répondez à la question en la justifiant.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Partie 2

Répondez par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

★ $\forall f, g \in R_{loc}[a,b[$:

1) Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors $\int_a^b (f(t)+g(t))dt$ diverge.

....

....

2) Si $\forall t\ f(t) \leq g(t) \leq 0$ et $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b g(t)dt$ converge.

....

....

....

....

....

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(t)dt$ est de même nature que $\int_a^b \lambda f(t)dt$.

....

....

....

....

....

★ $\forall f \in R_{loc}[a,b]-\{c\}$:

4) Si $\int_a^c f(t)dt$ converge et $\int_c^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

....

....

....

....

....

5) Si $\int_a^c f(t)dt$ diverge et $\int_c^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

....

....

....

....

....

★ $\forall f \in R_{loc}[a,+\infty[\ , f \geq 0$

6) Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

....

....

....

....

....

7) Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$\forall f \in R_{loc}]-\infty, +\infty[$:

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt.$

Exercice 2 6points

1) Calculer $I = \iiint_{\Omega} (x+1)(3z+1)dxdydz.$

où $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x+1)^2 + (\frac{y}{2})^2 + (3z+1)^2 \leq 1\right\}$.

2) Pouvait on trouver la valeur de I sans faire aucun calcul?

Exercice 3 4 points

Etudier la nature des intégrales généralisées (convergence et convergence absolue)

1) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{|Log(t)|^{\frac{1}{2}}} dt.$

2) $\int_0^{+\infty} (e^{\frac{\sin t}{t}} - 1)dt.$