L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (4 pts) Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & k \\ x & +y & +z & = & 1 \\ 5x & +2y & -z & = & m \\ 3x & +2y & +z & = & 4 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ et } m \text{ sont dans } \mathbb{R}.$$

Résoudre suivant les paramètres m et k le système (S) en utilsant le théorème de Rouché-Fontené.

Exercice 2 : (11 pts) Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée à la base canonique C est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2- Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = nA + (1-n)\, I_3$.

3- **a/** Dire pourquoi $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1.

b/ Montrer que tout générateur de $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ est un vecteur propre de u.

c/ Donner une base de $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ qu'on notera par (v_2).

d/ Déterminer un vecteur v_3 tel que $u(v_3) = v_2 + v_3$.

e/ Déterminer un vecteur propre v_1 de u non colinéaire à v_2.

f/ Montrer que $C' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

g/ Déterminer la matrice A' associée à u relativement à la base C'.

h/ Déterminer une matrice inversible P vérifiant : $A' = P^{-1}.A.P$.

e/ Retrouver A^n.

4- Soit le polynôme $P(X) = (X-1)^2$ et soit Q un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

a/ Exprimer le reste de la Division Euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et de $Q\prime(1)$ où $Q\prime$ désigne le polynôme dérivé de Q.

b/ Retrouver A^n en utilisant la question **a/** avec un choix judicieux du polynôme Q (On remarque que $P(A) = 0$).

Exercice 3 : (5 pts) les deux parties I/ et II/ sont indépendantes

I/Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in End(E)$. Soit B une base de E et $A = M_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.

Supposons que la matrice A est inversible. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1}.

II/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & .. & .. & .. & .. & .. & \dots . & .. \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ C_{n-2}^0 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & & & & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & & & & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & & & & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(Indication : on rappelle que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$: on a $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$).

Bon courage