République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

المدرسة الوطنية العليا للإعلام الآلي
(المعهد الوطني للتكوين في الإعلام الآلي سابقا)
Ecole nationale Supérieure d'Informatique
ex. INI (Institut National de formation en Informatique)

CONCOURS d'accès à l'ESI

Epreuve : Mathématiques-Statistiques-Logique Mathématique
Code : MATHS

Date : 01 Juillet 2013
Durée : 3 heures

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 3 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3,4,….)
- La calculatrice est autorisée.
- Les documents sont interdits.
- Les quatre parties du sujet doivent être rédigées sur des copies séparées.

PARTIE 1 : ALGEBRE (5 pts)

Exercice : (5 pts)

On considère la matrice réele

$$A = \begin{pmatrix} 3a-1 & -3a+1 & -3a+b+1 & 2a-1 \\ 2a-1 & -2a+1 & -2a & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

a, b étant des paramètres.

1) Montrer que le polyôme caractéristique de A est $X(X-1)(a-X)^2$.
2) Préciser les valeurs propres de la matrice A selon les valeurs des paramètres.
3) Trouver les valeurs des paramètres pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
4) Calculer les sous-espaces propres de A lorsque $a = 1$ et $b = 0$.

PARTIE 2 : ANALYSE (6 pts)

Exercice 1 : (4.5 pts)

Soit la série de fonctions définie par :

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) \text{ telle que } u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

1) Montrer que la série converge pour $x \geq 0$.

On posera la fonction F définie dans $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

2) a) Etudier la continuité de F.

b) Montrer la convergence normale de $\sum_{n\geq 0} u'_n(x)$ puis étudier la dérivabilité de F.

Exercice 2 : (1,5 pts)

Soit la série entiére : $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) x^n$

1) Calculer son rayon et déterminer son domaine de convergence D.

2) Calculer sa somme sur D.

Rappel : $log\,(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\ \forall x \in [-1, 1[$ et $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n\ \forall x \in\ ]-1, 1[$

PARTIE 3 : PROBABILITES ET STATISTIQUES (5 pts)

Exercice 1 : (3 pts)

Pour obtenir une estimation de la population d'hyperglycémiques parmi les personnes âgées de plus de 60 ans (population E), on choisit au hasard 170 personnes dans E; on constate que parmi celle-ci, 34 sont hyperglycémiques.

1) Donner un intervalle de confiance au risque 5% pour le pourcentage exact p de personnes hyperglycémiques dans E.

2) Si l'on effectuait 200 fois le tirage au sort de 170 personnes de E, on pourrait construire 200 intervalles de confiances du type précédent. Parmi ces 200 intervalles, combien, en moyenne, contiendraient la valeur p?

[**Indication** : dans la première question; le quantile utile pour les calculs est égal à 1.96].

Exercice 2 : (2pts)

Soit X une v.a.continue de densité de probabilité donnée par :

$$f_\theta(x) = \left(\theta . x^{\left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)}\right)^{-1}, \quad x > 1, \quad \theta > 0.$$

Soit la v.a $Y = \log(X)$,

Déterminer (avec démonstration) la densité de probabilité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

PARTIE 4 : LOGIQUE MATHEMATIQUE (4 pts)

Exercice 1 : (2 pts)

Trouver un modèle de Herbrand pour l'ensemble de formules Γ tel que :

Γ : $\{(\exists x \rceil P(x)) \vee \exists x \rceil Q(x), \forall x ((P(x) \to R(x)) \wedge (Q(x) \to R(x)))\}$

Exercice 2 : (2 pts)

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

"Si un étudiant a un binôme, alors cet étudiant n'est pas monôme."

"Si chaque étudiant a un binôme, alors aucun étudiant n'est monôme.