Exercice **1**. *Trouver un modèle de Herbrand pour l'ensemble de formules* Γ *tel que :*

$$\Gamma : \{(\exists x \neg P(x)) \vee (\exists x \neg Q(x)), \forall x((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x)))\}$$

Forme clausale

$$S = \{\neg P(a) \vee \neg Q(a), \neg P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee R(x)\}$$

Le domaine de Herbrand de cet ensemble de formules est $H = \{a\}$*. La base est* $A = \{P(a), Q(a), R(a)\}$*.* $H = \{a\}$*.* $I_h = \{\neg P(a), Q(a), R(a)\}$ *est une interpération de Herbrand modèle de* S*.*

Exercice **2**. *Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre:*
"Si un étudiant a un binôme, alors cet étudiant n'est pas un monôme."
"Si chaque étudiant a un binome, alors aucun étudiant n'est monôme."

Solution Soit les prédicats:
$E(x)$: x est un étudiant.
$M(x)$: x est monôme.
$B(x, y)$: x a un binôme y.

- $\forall x((E(x) \wedge \exists y B(x, y)) \Rightarrow \neg M(x))$.

- $(\forall x(E(x) \Rightarrow (\exists y B(x, y)))) \Rightarrow (\forall x(E(x) \Rightarrow \neg M(x)))$

Si on considère que tous les objets sont des étudiants et on utilise uniquement les prédicats
$M(x)$: x est monôme.
$B(x, y)$: x a un binôme y.
La formalisation se simplifie

- $\forall x(\exists y B(x, y) \Rightarrow \neg M(x))$.

- $(\forall x \exists y B(x, y)) \Rightarrow (\forall x \neg M(x))$

Exercice **3**. **1.** *Donner une formule-que l'on désignera par* β_p *sous forme normale prénexe telle que*

$$\beta_p \equiv (\forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)) \Rightarrow \exists x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y))$$

2. *Montrer à l'aide d'un arbre sémantique, que* β_p *est valide.*

Solution **1.**

$$\begin{aligned}
F &\equiv (\forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)) \Rightarrow \exists x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y)) \\
&\equiv (\forall x_1 P(x_1) \Rightarrow \exists x_2 Q(x_2)) \Rightarrow \exists x_3 \exists y_1 (P(x_3) \Rightarrow Q(y_1)) \\
&\equiv (\exists x_1 \exists x_2 (P(x_1) \Rightarrow Q(x_2))) \Rightarrow \exists x_3 \exists y_1 (P(x_3) \Rightarrow Q(y_1)) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists y_1 ((P(x_1) \Rightarrow Q(x_2)) \Rightarrow (P(x_3) \Rightarrow Q(y_1)))
\end{aligned}$$

$$\beta_p \equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists y_1((P(x_1) \Rightarrow Q(x_2)) \Rightarrow (P(x_3) \Rightarrow Q(y_1)))$$

2.

$$\neg\beta_p \equiv \exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall y_1 \neg(((P(x_1) \Rightarrow Q(x_2)) \Rightarrow (P(x_3) \Rightarrow Q(y_1))))$$

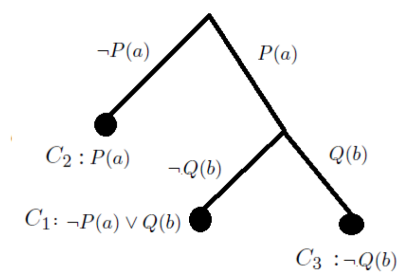
Formes de Skolem de $\neg\beta_p$

$$\forall x_3 \forall y_1 \neg(((P(a) \Rightarrow Q(b)) \Rightarrow (P(x_3) \Rightarrow Q(y_1))))$$

Formes clausale $\neg\beta_p$

$$\begin{array}{lcl} C_1 & : & \neg P(a) \vee Q(b) \\ C_2 & : & P(x_3) \\ C_3 & : & \neg Q(y_1) \end{array}$$

L'arbre sémantique fermé est trop simple.



On peut ne pas énumérer les instances de bases, mais indiquer quand on ferme une branche, quelle clause a engendré l'instance de base qui ferme la branche.