Corrigé EMD 3

(2000 | 2001).

Log II

Partie 1 :

1) $B_3 : P(y) \to (\neg P(x) \to \neg(y=x))$

B_3 est un thm : montrons que : $P(y) \vdash (\neg P(x) \to \neg$

1) $P(y)$

2) $y=x \to (P(y) \to P(x))$ A_7

3) $(y=x \to (P(y) \to P(x))) \to (((y=x) \to P(y)) \to ((y=x) \to$

4) $(y=x \to P(y)) \to (y=x \to P(x))$ MP (2, 3)

5) $P(y) \to ((y=x) \to P(y))$ A_1

6) $y=x \to P(y)$ MP (1, 5)

7) $y=x \to P(x)$ MP (4, 6)

8) $\neg P(x) \to \neg(y=x)$ $(\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

2) $P = I(P)$ et $Q = I(Q)$ rq : P et Q sont Réc

a) $R_1 = I(B_1)$ est R ? $(B_1 = \neg P(x))$

$$Car_{R_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_1(x) \text{ est F} \\ 0 & \text{si } R_1(x) \text{ est V} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } P(x) \\ 0 & \text{si } P(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } Car_P(x) = 0 \\ 0 & \text{si } Car_P(x) = 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } Car \\ 0 & \text{si } Car \end{cases}$$

$$= \overline{Sg}(Car_P(x)) = 1 \dot{-} Car_P(x)$$

Car_P est R car P est R
$\overline{Sg}$ est R
$\Bigg\} \Rightarrow \overline{Sg} \circ Car_P$ est R

3) $Car_{R_3}(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{N}$?

on a : $Car_{R_3}(x,y) = (1 \dot- Car_{\beta}(y)) \times Car_{\beta}(x) \times (1 \dot- Car_{x=y}$

si $x \neq y$ $\quad 1 \dot- Car_{x=y}(x,y) = 1 \dot- 1 = 0$

d'où $Car_{R_3}(x,y) = 0$

si $x = y$ on a : $Car_{R_3}(x,y) = (1 \dot- Car_{\beta}(x))\, Car_{\beta}(x) \times$

$= Car_{\beta}(x) \dot- (Car_{\beta}(x) \ldots$

$= Car_{\beta}(x) \dot- Car_{\beta}(x) \ldots$

$(Car_{\beta}(x) \times Car_{\beta}(x) = Car_{\beta}(x) \quad$ (Calcul))

4) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} \quad Car_{R_3}(x,y) = 0$

donc $\forall x, y \in \mathbb{N}$: $R_3(x,y)$ est V

or $R_3(x,y) = I(\beta_3(X,Y))_{v\binom{X=x}{Y=y}}$

donc $I(\beta_3(X,Y))_{v\binom{X=x}{Y=y}}$ est V pour tte valeur x et y

d'où : $I \models \beta_3$

5) et 6) même chose que 4 et 5)

2) $R_2 = I(\beta_2)$ est R ? $\quad P_2 \circ I(x) \longrightarrow$ 1.

$R_2(x,y) = I(\beta_2(X,Y))_{\sigma(X=x,\,Y=y)} = (\text{non } P(x)) \text{ ou } (P(y))$

$R_2(x,y)$ est F $\iff$ $P(x)$ est V et $P(y)$ est

d'où : $Car_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(x) \text{ est V et } P(y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$Car_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Car_P(x) = 0 \text{ et } Car_P(y) \\ 0 & \text{~~sinon~~ si } Car_P(x) = 1 \text{ ou } Ca \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } 1 \dot{-} Car_P(x) = 0 \text{ ou } Car \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } (1 \dot{-} Car_P(x)) * (Car_P \end{cases}$

$= Sg((1 \dot{-} Car_P(x)) * Car_P(y$

ou bien : $Car_{R_2}(x,y) = (1 \dot{-} Car_P(x)) * ($

$= \overline{Sg}(Car_P(x))$

on a : $Car_{R_2}(x,y) = Sg(1 \dot{-} Car_P(x)) * Car_P$

$= Sg((S(Z(P_1^2(x,y))) \dot{-} Car_P$

R_2 est la composée de fct R donc elle

2ème méthode :

on a : $R_2(x,y) = I(\beta_2(X,Y))_{\sigma(X=x,\,Y=y)} = (no$

$R_2(x,y)$ est V $\iff$ $R_1(x)$ est V ou $P(y)$ est V

$Car_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } Car_{R_1}(x) = 0 \text{ ou } Car_P \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$R_2 = I(\beta_2)$ est ... : $\beta_2 = \dots$

$R_2(x,y) = I(\beta_2(X,Y))_{\sigma\binom{X=x}{Y=y}} = (\text{non } P(x)) \text{ ou } (P(y))$. 1

$R_2(x,y)$ est F $\Longleftrightarrow$ $P(x)$ est V et $P(y)$ est F

d'où : $Car_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(x) \text{ est V et } P(y \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$Car_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Car_P(x) = 0 \text{ et } Car_P(y) \dots \\ 0 & \text{sinon si } Car_P(x) = 1 \text{ ou } Ca\dots \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } 1 \dot{-} Car_P(x) = 0 \text{ ou } Car \dots \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } (1 \dot{-} Car_P(x)) * (Car_P \dots \end{cases}$

$= \overline{Sg}\left((1 \dot{-} Car_P(x)) * Car_P(y) \dots \right.$

ou bien : $Car_{R_2}(x,y) = (1 \dot{-} Car_P(x)) * (\dots$

$= \overline{Sg}(Car_P(x)) \dots$

on a : $Car_{R_2}(x,y) = \overline{Sg}\left(1 \dot{-} Car_P(x)\right) * Car_P \dots$

$= \overline{Sg}\left((S(Z(P_1^2(x,y))) \dot{-} Car_P \dots \right.$

R_2 est la composée de fct R donc ell...

<u>2ème méthode</u> :

on a : $R_2(x,y) = I(\beta_2(X,Y))_{\sigma\binom{X=x}{Y=y}} = (no\dots$

$R_2(x,y)$ est V $\Longleftrightarrow$ $P(x)$ est V ou $P(y)$ est ...

$Car_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 0 & Car_{R_2}(x) = 0 \text{ ou } Car_P \dots \\ 1 & \end{cases}$

Partie 2

1) $R = \{x \in \mathbb{N}$ tq : $f(x) = 0\}$

$$Car_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in R \\ 1 & \text{si } x \notin R \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0 \\ 1 & \text{si } f(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$= Sg(|f(x)|) = Sg(f(x))$$ car f : IN

$\left.\begin{array}{l} f \text{ est } R \\ Sg \text{ est P.R donc } R \end{array}\right\} \Rightarrow Car_R$ est R.

2) Machine de Turing qui calcule Sg :

1) $q_0 \, 1 \, D \, q_1$

2) $q_1 \, 0 \, G \, q_2$

3) $q_2 \, 1 \, D \, q_3$

4) $q_3 \, 1 \, 0 \, q_4$

5) $q_4 \, 0 \, D \, q_3$

6) $q_3 \, 0 \, G \, q_5$

7) $q_5 \, 0 \, G \, q_5$

8) $q_5 \, 1 \, G \, q_6$

Logique mathématique – EMD3

Durée 2 heures

Tout document interdit

Partie 1 (2, 6.5, 2, 2, 1.5, 2)

On considère L un langage du premier ordre avec égalité. L ne contient pas de symboles de constantes et de symboles de variables. Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ trois formules de L telles que :

$\beta_1 : \neg P(x)$

$\beta_2 : P(x) \rightarrow P(y)$

$\beta_3 : P(y) \rightarrow (\neg P(x) \rightarrow \neg(y = x))$

$\beta_4 : (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\neg Q(y) \rightarrow \neg P(x))$

On considère l'interprétation I de domaine $D_I = N$ telle que :

$I(P) = P$ $\quad I(Q) = Q$ $\quad I(\beta_1) = R_1$ $\quad$ (P, Q et R_1 sont des propriétés)

$I(\beta_2) = R_2$ $\quad I(\beta_3) = R_3$ $\quad I(\beta_4) = R_4$ $\quad$ (R_2, R_3 et R_4 sont des relations binaires)

Questions

1. Montrer que β_3 est un théorème du calcul des prédicats avec égalité.
2. Montrer que si P et Q sont récursives, R_1, R_2, R_3, R_4 sont aussi récursives.
3. Montrer que : $Car_{R3}(x, y) = 0 \quad \forall x \in N$ et $\forall y \in N$.
4. En déduire que $I \models \beta_3$.
5. Montrer que $Car_{R4}(x, y) = 0 \quad \forall x \in N$ et $\forall y \in N$.
6. En déduire que $I \models \beta_4$.

Partie 1 (2, 2)

1. Soit $f(x)$ une fonction récursive. Montrer que l'ensemble R des racines de f est récursif.
2. Construire la machine de Turing qui calcule la fonction $sg(x)$. (10 instructions au plus).

☞ Il sera tenu compte de la concision des réponses. Il ne sera pas accepté plus d'une feuille intercalaire.