E.S.I. 2CP ALG3 Contrôle intermédiaire 07 décembre 2021 Durée : 2h

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (9 pts)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_a un endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

1- Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la matrice M_a est-elle inversible ?

2- Dans le cas où la matrice M_a n'est pas inversible , déterminer suivant le paramètre a une base de $\ker f_a$ et une base de $\mathrm{Im}\, f_a$

3- Soit $C = (v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 1, 0))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

i/ Vérifier que C est une base de $\mathbb{R}^3$.

ii/ *Déterminer la matrice de passage P de B vers C.*

iii/ *Calculer P^{-1}.*

4- *En déduire :*

i/ *Les coordonnées d'un vecteur $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base C.*

ii/ La matrice $M_a' = M_C(f_a)$.

Exercice 2 : (6 pts) Les questions suivantes sont indépendantes.

1- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

i/ Ecrire A comme somme de la matrice identité I_3 et une matrice $N \in M_3(\mathbb{R})$.

ii/ Montrer que N est une matrice nilpotente (i.e. il existe un entier $k \geq 1$ tel que : $N^k = 0$).

iii/ En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2- Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour toute matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice : $M \cdot {}^t M$ est une matrice symétrique (${}^t M$ désigne la transposée de M).

3- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2 = I_n$. Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

4- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ecrire la matrice A comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Bon courage.

$a = 1$ | $-2 + \frac{a-1}{2}$