ESI — ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

	Contrôle Final	**Juin 2022**
2CPI	**Analyse mathématique 4**	**Durée : 2h**

- **Les documents, les calculatrices et les téléphones sont interdits.**
- **La table des TL est au verso.**

Exercice 1 (6,25 points) : Considérons la fonction F défine par l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} e^{-2xt} dt.$$

1) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
2) Monter que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. (Indication : $|\sin(u)| \leq |u|$).
3) Monter que F est deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$.
4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F'(x)$.
5) Déterminer $F'(x)$ pour $x > 0$ (Indication : $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$).

Exercice 2 (2,75 points): En supposant que $y \in C^1(\mathbb{R}^+)$ et y est d'ordre exponentiel.
Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' + y = e^t$ avec $y(0) = 1$ $\forall t \geq 0$.

Exercice 3 (5 points) : Soient $\beta > 0$ et $f_\beta(t) = e^{-\beta|t|}$.

1) Vérifier théoriquement que la TF de f existe, puis montrer que

$$\mathcal{F}(f_\beta)(x) = \frac{2\beta}{x^2 + \beta^2}.$$

2) Soit $\alpha > 0$ et considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ tel que} \\ y(t) = f_1(t) + \alpha \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-u|} y(u) du \end{array} \right. \qquad (1)$$

a- Ecrire (1) sous forme d'un problème faisant intervenir un produit de convolution.
b- En utilisant la TF, préciser les valeurs de α pour que le problème (1) admette une solution unique et déterminer cette solution.

Exercice 4 (6 points) : Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < x < 2y \text{ et } y < x^2 < 2y\right\}$.

1) Représenter graphiquement le domaine D.
2) a- Déterminer Δ le tranformé de D par le changement de variables

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y}.$$

b- Calculer $Air(D)$ en utilisant ce changement de variables.

3) Retrouver la valeur de $Air(D)$ en utilisant le théorème de Fubini.
