Durée 2 h ures

Tout documen interdit

Partie I (,2, 4, 2)

1. Montrer que les fonctions $f(x, y, z) = (x^y)^z$ et $g(x, y, z) = x^{|y-z|}$ sont primitives récursives.
2. Trouver la fonction caractéristique de l'ensem de des nombres pairs inférieurs à 50. Qu'en déduisez-vous ?
3. Montrez que l'ensemble E = {0, 1, 7} est réc sivement énumérable.
4. Définir la machine de Turing qui calcule la f nction $f(x, y) = (x + y) + 1$. Ne pas dépasser 10 instructions.

Partie II

(2, 4, , 3)

Traiter les questions dans l'ordr dans lequel elles sont posées.

Soit $f(x)$ une fonction strictement croissante primitive récur ve.

1. Montrez que l'ensemble $D = \{ x \mid f(x) = y\}$ e t récursif.
2. Montrez que la relation $R_1(y) = \exists x\ (f(x) = y)$ est récursive. Que pouvez-vous en déduire concernant l'ensemble $D' = \{ f(x) \mid x \in N\}$. Jus ifiez.
3. Soi Δ un ensemble fini de fonctions primit ves récursives tel que :

strictement $\Delta = \{f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ avec $k > 1$

$f_0, f_1, \dots, f_k$ sont croissantes.

On considère les ensembles suivants :

$$F_1 = \{ f_1(x) \mid x \in N\}$$
$$F_2 = \{ f_2(x) \mid x \in N\}$$
$$\dots$$
$$F_k = \{ f_k(x) \mid x \in N\}$$

et

$$F = \{ F_1 \cap \dots \cap F_k \} = \{y \mid \exists x\ (f_1(x) = y) \text{ et } \exists x\ (f_2(x) = y) \text{ et } \dots \text{et } \exists x (f_k(x) = y)\}$$

Question. Montrer que F est récursif.

4. On définit la relation binaire $R_2(x, y) : N \to \{V, F\}$ telle que :

$$R_2(x, y) = \begin{cases} V \text{ si } y \in F \text{ et } x \in D \text{ tel que } D = \{x \mid f_1(x) = y\} \cup \dots \cup \{ x \mid f_k(x) = y\} \\ \\ F \text{ sinon.} \end{cases}$$

Question. Montrez que la relation R_2 est r cursive.

Remettre, au plus, une seule double feuille et une seule intercalaire.

Correction

Partie I

1. Montrez que les fonctions $f(x, y, z) = (x^y)^z$ et $g(x, y, z) = x^{|y-z|}$ sont primitives récursives

$f(x, y, z) = exp\,(x, *(y, z)) = exp\,(P_1^3(x, y, z), *(P_2^3, P_3^3)(x, y, z))$

$g(x, y, z) = exp\,(x, abs(y, z)) = exp\,(P_1^3(x, y, z), abs\,(P_2^3, P_3^3)(x, y, z))$

$abs(x, y) = |x - y|$

2.

$$\mathrm{Car}_E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si pair et } x\ R\ si\ n < 50 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On désigne par P et S les ensembles suivants :

$P = \{2n | n \in N\}$ $\quad\quad$ $\mathrm{Car}_P(x) = r(2, x)$

$S = \{n | n \in N \text{ et } n < 50\}$ $\quad\quad$ $\mathrm{Car}_S(x) = sg\,(50 - x)$.

{ E = ens nbrs pair < 50
{ E = P ∩ S

$\mathrm{Car}_P(x)$	$\mathrm{Car}_S(x)$	$\mathrm{Car}_E(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\mathrm{Car}_E(x) = (\mathrm{Car}_P(x) + \mathrm{Car}_S(x)) \dot{-} (\mathrm{Car}_P(x) * \mathrm{Car}_S(x))$

3. $E = \{0, 1, 7\}$

$$\mathrm{Car}_E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=0\ (sg(x) = 0) \text{ ou bien } x=1\ (sg|x-1| = 0) \text{ ou bien } x=7\ (sg|x-7| = 0) \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$\mathrm{Car}_E(x) = sg\,(x * |x-1| * |x-7|)$ (le produit à plus de 2 arguments a été démontré récursif.

$\mathrm{Car}_E(x)$ est le produit de fcts primitives récursives : E est donc récursif et par conséquent récursivement énumérable (th vu en cours).

4. $q_0\ 1\ D\ q_0$ $\quad\quad$ $1^{x+1} * 1^{y+1} \rightarrow 1^{x+1}\ 1\ 1^{y+1}$

$q_0 * 1\ q_1$ $\quad\quad$ $\| \ 1^{x+y+3}$

$q_1\ 1\ G\ q_1$

$q_1\ 0\ D\ q_2$ $\quad\quad$ le résultat doit être 1^{x+y+2}

$q_2\ 1\ 0\ q_2$ } on supprime

$q_2\ 0\ D\ q_f$ $\quad\quad$ 1 seule barre.