Corrigé Type du CF-2CPI-2017/2018

Exercice 1 (3,(3,5 points): En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer

$$\iint_D \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy,$$

où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0;\ x^2+y^2-2x \leq 0;\ x^2+y^2-x \geq 0\right\}$.

Solution: Le changement de variable en CP est donné par $\varphi(r,\theta) = (x,y)$ avec

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Déterminons le transformé D' de D par les CP. Soit $(x,y) \in D$. Alors (vu que $r \geq 0$),

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x^2+y^2-2x \leq 0, \\ x^2+y^2-x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\sin\theta \geq 0, \\ r^2 - 2r\cos\theta \leq 0, \\ r^2 - r\sin\theta \geq 0, \end{cases} \quad \boxed{0,25 \textbf{ pt}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin\theta \geq 0, \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta, \\ r \geq \cos\theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta \geq 0, \\ \cos\theta \geq 0, \\ \cos\theta \leq r \leq 2\cos\theta, \end{cases} \quad \boxed{0,25 \textbf{ pt}}$$

Donc, $D' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\text{ t.q. } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leq r \leq 2\cos\theta\right\}$ $\boxed{0,25 \textbf{ pts pour chaque borne=1}}$

On a, si on pose $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ et $I = \displaystyle\iint_D \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy$, ainsi

$$I = \iint_D f(\varphi(r,\theta))\,|\det J_\varphi|\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r^2}\ r\ dr \right) d\theta \quad \boxed{0,5 \textbf{ pts}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} (\cos\theta - \sin\theta)\ dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \sin\theta) \left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta\ d\theta \quad \boxed{0,5 \textbf{ pt}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\ d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\ d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\ d\theta \quad \boxed{0,25 \textbf{ pts}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \boxed{0,25 \textbf{ pts}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \quad \boxed{0,5 \textbf{ pts}}$$

Remarque: Pour la personne qui se trompe de borne en mettant $0 \leq \theta \leq \pi$, elle perd $\boxed{0,25 \textbf{ pts}}$ pour la borne et $\boxed{0,5 \textbf{ pts}}$ pour le calcul de I , donc elle perd $\boxed{0,75 \textbf{ pts}}$.

Exercice 2 (3,5 points): Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{(x^2+t^2)} dt, \quad x \geq 0$$

Solution:

Posons, $f(t,x) = \dfrac{\sin t}{(x^2+t^2)}$ et $\Delta = [1,+\infty[\times[0,+\infty[$.

Première manière

La continuité: On a

1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (U ouvert contenant Δ) car c'est une composée et rapport de fonctions $\mathcal{C}^1$.. $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$

2) Etudions la convergence uniforme (par la convergence dominée) de $\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$.:

On a $|f(t,x)| \leq \dfrac{1}{t^2} = g(t)$ $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \forall x \in [0,+\infty[$ $\boxed{0,5 \textbf{ pt}}$

et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann) $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$, donc, $\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Conclusion: de (1) et (2), on déduit, grâce au théorème de conservation de la continuité, la continuité de F sur $[0,+\infty[$.. $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$

La dérivabilité: On a

1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (U ouvert contenant Δ) car c'est une composée et rapport de fonctions $\mathcal{C}^1$.

2) Comme F est continue sur $[0,+\infty[$, donc $\exists x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $\int_1^{+\infty} f(t,x_0)dt$ bien définie. $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$

3) Etudions la convergence uniforme de $\int_1^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$. On a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \sin t \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2}, \quad \boxed{0,25 \textbf{ pts}}$$

donc

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \dfrac{2x}{t^4} \leq \dfrac{2A}{t^4} \doteq h(t)$ $\boxed{0,5 \textbf{ pt}}$.$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \forall x \in [0,A], \ \forall A > 0$ $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

et $\int_1^{+\infty} h(t)dt$ converge (intégrale de Riemann) $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

Conclusion: de (1), (2) et (3), on déduit, grâce au théorème de conservation de la dérivabilité de F sur tout $[0,A] \subset [0,+\infty[$ $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$. On en déduit ainsi, que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ $\boxed{0,25 \textbf{ pts}}$.

<u>Deuxième manière</u>

La continuité: On a

1) f est continue sur Δ car c'est une composée et rapport de fonctions continues $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

2) La condtion de domination sur f :

On a

- $|f(t,x)| \leq \dfrac{1}{t^2} = g(t);$ $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$ ... $\forall t \in [1,+\infty[, \quad \forall x \in [0,+\infty[$ $\boxed{0,5 \textbf{ pt}}$.
- $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

On obtient d'aprés le théorème de la conservation de la continuité sous le signe $\int$ .., la continuité de F sur $[0,+\infty[$ $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

La dérivabilité: On a

1) f f est continue sur Δ et $\int\limits_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge pour tout $x \in [0,+\infty[$.

2) La dérivée partiel de f par rapport à "x" existe et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \sin t \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2} \quad \boxed{0,25 \textbf{ pt}},$$

donc $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue sur Δ (composée et rapport de fonctions continues) $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

2) On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{2x}{t^4} \leq \frac{2A}{t^4} \doteq h(t) \quad \boxed{0,5 \textbf{ pt}} . \forall t \in [1,+\infty[, \ \ \forall x \in [0,A], \ \forall A > 0 \quad \boxed{0,25 \textbf{ pt}}.$$

et $\int\limits_1^{+\infty} h(t)dt$ converge (intégrale de Riemann) $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$

On obtient d'aprés le théorème de la conservation de la dérivabilité sous le signe $\int$, la dérivabilité de F sur $[0,A]$, on en déduit ainsi $\boxed{0,25 \textbf{ pts}}$, que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ $\boxed{0,25 \textbf{ pts}}$.

Exercice 3 (6,75 points):

A-

1. Vérifier que $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+5)} = \dfrac{\frac{-1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} + \dfrac{\frac{1}{10}x}{x^2+2x+5} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

2. En supposant que $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ et y, y' sont d'ordre exponentiel, Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y" + 2y' + 5y & = & \sin t \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) = 1 & \text{et} & y'(0) = 2. \end{cases}$$

B- Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Posons

$$\begin{cases} f_+(t) = f(t) \quad si \ \ t \geq 0, \\ f_-(t) = f(-t) \quad si \ \ t \geq 0. \end{cases}$$

En supposant que $\mathcal{F}(f)$, $\mathcal{L}(f_+)$ et $\mathcal{L}(f_-)$ sont bien définies, montrer que

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{L}(f_+)(ix) + \mathcal{L}(f_-)(-ix),$$

et déduire $\mathcal{F}\left(t^2 e^{-|t|}\right)(x)$.

NB: Voir la table des TL au verso de la feuille.

Solution: **A]**

1. Par calcul on a $\dfrac{\frac{-1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} + \dfrac{\frac{1}{10}x}{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+5)}$ $\boxed{0,5 \ \textbf{pt}}$

2. On pose $Y(x) = \mathcal{L}(y)(x)$ a,

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y")(x) = x^2 Y - x - 2, \quad \boxed{0,25 \ \textbf{pt}} \\ \mathcal{L}(y')(x) = xY - 1, \quad \boxed{0,25 \ \textbf{pt}} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y" + 2y' + 5y)(x) &= \mathcal{L}(\sin t)(x) \Longleftrightarrow \left(x^2+2x+5\right) Y = x + 4 + \frac{1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \ Y = \frac{x+4}{(x^2+2x+5)} + \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+5)} \quad \boxed{0,5 \ \textbf{pt}} \end{aligned}$$

3. Ainsi, d'aprés la première question,

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{x+4}{x^2+2x+5} + \frac{\frac{-1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{10}x}{x^2+2x+5}. \\ &= \frac{\frac{11}{10}x+4}{x^2+2x+5} + \frac{\frac{-1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}. \quad \boxed{0,5 \ \mathbf{pt}} \end{aligned}$$

Alors,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{11}{10}x+4}{x^2+2x+5}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{-1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}\right).$$

Par ailleurs,

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{-1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}\right) = \frac{-1}{10}cos(t) + \frac{1}{5}\sin t. \quad \boxed{0,5 \ \mathbf{pt}}$
- vu que $\frac{11}{10}x+4 = \frac{11}{10}\left(x+1-1+4\frac{10}{11}\right)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{11}{10}x+4}{x^2+2x+5}\right) &= \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1-1+4\frac{10}{11}}{(x+1)^2+4}\right) = \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1+\frac{29}{11}}{(x+1)^2+4}\right) \\ &= \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2+4}\right) + \frac{11}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{29}{11}}{(x+1)^2+4}\right) \quad \boxed{0,5 \ \mathbf{pt}} \end{aligned}$$

Or $\rightarrow$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1}{(x+1)^2+4}\right) = e^{-t}cos(2t) \quad \boxed{0,75 \ \mathbf{pt}}$

$\rightarrow$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{29}{11}}{(x+1)^2+4}\right) = \frac{29}{22}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(x+1)^2+4}\right) = \frac{29}{22}e^{-t}\sin(2t) \quad \boxed{0,75 \ \mathbf{pt}}$

on en déduit, $y(t) = \frac{-1}{10}cos(t)+\frac{1}{5}\sin t+\frac{11}{10}e^{-t}cos(2t)+\frac{29}{20}e^{-t}\sin(2t)\,. \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$

B] Montrons la formulle $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{L}(f_+)(ix) + \mathcal{L}(f_-)(-ix)$. On a

$$\mathcal{F}(f)(x) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}.f(t)dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}.f(t)dt \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$$

• D'une part en remarquant que pour $t \in [0, +\infty[$, $f(t) = f_+(t)$ et en posant $y = ix$, il vient

$$\int_0^{+\infty} e^{-ixt}.f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-yt}.f_+(t)dt = \mathcal{L}(f_+)(y) = \mathcal{L}(f_+)(ix). \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$$

• D'autre part, on

$$\int_{-\infty}^0 e^{-ixt}.f(t)dt \overset{s=-t}{=} \int_{+\infty}^0 -e^{ixs}.f(-s)ds = \int_0^{+\infty} e^{ixs}.f(-s)ds \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$$

en remarquant que pour $s \in [0, +\infty[$, $f(-s) = f_-(s)$ et en posant $z = -ix$, il vient

$$\int_{-\infty}^0 e^{-ixt}.f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-zs}.f_-(s)ds = \mathcal{L}(f_-)(z) = \mathcal{L}(f_-)(-ix). \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$$

Déduisons $\mathcal{F}\left(t^2 e^{-|t|}\right)(x)$.

Posons $f(t) = t^2 e^{-|t|}$. Alors, $f_+(t) = t^2 e^{-t}$, pour $t \geq 0$. Donc, d'aprés la propriété de la dérivée de la TL, il vient

$$\mathcal{L}(f_+)(x) = \mathcal{L}\left(t^2 e^{-t}\right)(x) = \mathcal{L}\left(e^{-t}\right)^{(2)}(x), \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$$

mais d'aprés la table des TL, $\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$, ainsi

$$\mathcal{L}(f_+)(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}.$$

Comme f est paire, on en déduit que $f_+ = f_-$. Ainsi, $\mathcal{L}(f_+)(x) = \mathcal{L}(f_-)(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$. Donc,

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{L}(f_+)(ix) + \mathcal{L}(f_-)(-ix) = \frac{2}{(ix+1)^3} + \frac{2}{(-ix+1)^3} = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}.$$

Remarque: On peut déduire $\mathcal{F}\left(t^2 e^{-|t|}\right)(x)$ d'une autre manière (plus rigoureuse).

• Vérifier par un calcul directe que $\mathcal{L}\left(e^{-t}\right)(ix) = \dfrac{1}{ix+1}$ (facile) .

• Vérifier que $\left(\mathcal{L}(g)(ix)\right)^{(2)} = -\mathcal{L}\left(t^2 g(t)\right)(ix)$ pour tout $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (facile)

.

• Déduire $\mathcal{L}\left(t^2 e^{-t}\right)(ix)$.

• Utiliser la formule pour déduire $\mathcal{F}(f)(x)$.

Exercice 4 (6,25 points) :

1. Sachant que $\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, en déduire $\mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\right)$ pour $a > 0$.
2. Montrer que si $f, f\,' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f\,')(x) = ix\mathcal{F}(f)(x)$.
3. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation différentielle suivante
$$-2y"(t) + 6y(t) = e^{-3|t|},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que si une fonction g telle que $g, g', g" \in L^1(\mathbb{R})$ est solution de cette équation alors
$$\mathcal{F}(g)(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+9}\right).$$
   (b) En supposant que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable à gauche et à droite de tout $t \in \mathbb{R}$, déduire l'expression de g (justifier votre réponse).

Solution :

1. On a pour $a > 0$, grâce à la propriété de la TL d'une dilatée (changement d'èchelle)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\right)(x) &= \mathcal{F}\left(e^{-|\alpha t|}\right)(x)\\ &= \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad \boxed{0,5\ \textbf{pt}}\\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{2}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{1}{\alpha}\frac{2\alpha^2}{x^2+\alpha^2} = \frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}. \quad \boxed{0,5\ \textbf{pt}}\end{aligned}$$

2. **<u>Premère manière:</u>** Comme $f\,' \in L^1(\mathbb{R})$, alors, $\mathcal{F}(f')$ est bien définie et
$$\mathcal{F}(f')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-ixt}.f'(t)dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}.f'(t)dt.$$

   D'une part,
$$\int_0^{+\infty} e^{-ixt}.f'(t)dt = \lim_{y\to+\infty}\left(\int_0^{y} e^{-ixt}.f'(t)dt\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\left[e^{-ixt}.f(t)\right]_0^y + ix\int_0^{y} e^{-ixt}.f(t)dt\right).$$

Or $\begin{cases} \int\limits_0^{+\infty} |f\,'(t)|\,dt \quad \text{converge} \Longrightarrow \int\limits_0^{+\infty} f\,'(t)dt \ \text{ converge,} \\ \int\limits_0^{+\infty} f\,'(t)dt = \lim\limits_{y\to+\infty} f(y) - f(0), \end{cases}$ donc $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)$ existe et finie. $\boxed{0,25\ \textbf{pts}}$

Notons $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 0$ et montrons que $L = 0$.Supposons que $L > 0$.On a par définition de la limite (en prenant $\varepsilon = \frac{L}{2}$)

$$\exists A > 0:\ \forall t > A \Longrightarrow |f(t) - L| \leq \frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{L}{2} \leq f(t) \leq \frac{3L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2}\int\limits_0^{+\infty} dt \ \leq \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$$

D'où $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge ce qui contredit le fait que $f \in L^1(\mathbb{R})$.Donc, $L \leq 0$.

De la même manière on montre que L ne peut pas être < 0,. Ainsi $L = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 0$ $\boxed{\boxed{0,25\ \textbf{pt}}\ \ \textbf{pour montrer que}\ \lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 0}$

Remarque On peut montrer que $L = 0$ autrement, en utilisant le lemme suivant: Soit $f \in R_{loc}[0, +\infty[$, si $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ ou n'$\nexists$ Comme on a montré que $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)$ existe et finie, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

D'où $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-ixy}.f(y) = 0$ car e^{-ixy} est bornée.Donc,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ixt}.f'(t)dt = -f(0) + ix\int\limits_0^{+\infty} e^{-ixt}.f(t)dt. \qquad \boxed{0,25\ \textbf{pt}}$$

De même $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ixt}.f'(t)dt = f(0) + ix\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ixt}.f(t)dt$ $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$, Ainsi,

$$\mathcal{F}(f')(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.f'(t)dt = ix\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.f(t)dt.$$

<u>**Deuxième manière:**</u> On a $\mathcal{F}(f\,')(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.f\,'(t)dt = \left[e^{-ixt}.f(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} +$

$ix\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.f(t)dt$ (après une IPP), pour calculer $\left[e^{-ixt}.f(t)\right]_{-\infty}^{+\infty}$ il suffira de calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}\cos(xt)f(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\sin(xt)f(t)$, $\lim\limits_{t\to-\infty}\cos(xt)f(t)$, $\lim\limits_{t\to-\infty}\sin(xt)f(t)$ ce qui correspond aux parties réelles et parties imaginaires, choisissons de calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}\cos(xt)f(t)$, les autres limites se feront de façon analogue:

Pour cela utilisons le lemme suivant: Soit $f\in R_{loc}[0,+\infty[$, si $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ ou n'$\nexists$:
(en effet les deux autres cas $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=k\neq 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\pm\infty$ donneraient $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)dt$ diverge - par la régle de l'ordre- ce qui est contradictoire).$\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$

Utilisons alors ce lemme, puisque $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge donc $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge ie $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ ou n'$\nexists$... $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$.

D'autre part

$$f\,'\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\Rightarrow\int\limits_{0}^{+\infty}|f\,'(t)|\,dt\quad\text{converge}\Longrightarrow\int\limits_{0}^{+\infty} f\,'(t)dt\ \ \text{converge},$$

or $\int\limits_{0}^{+\infty} f\,'(t)dt=\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)-f(0)\in\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ existe et est égale à une constante, on en conclut, d'aprés le lemme cité au dessous, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$... $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$.

On obtient que $\lim\limits_{t\to+\infty}\cos(xt)\,f(t)=0$, de même pour les autres limites.
Conclusion : $\mathcal{F}(f\,')(x)=ix\mathcal{F}(f)(x)$

1. on a $\quad -2g"(t)+6g(t)=e^{-3|t|}\quad\forall t$

   (a) Comme $g,g',g"\in L^1(\mathbb{R})$ alors
   $\mathcal{F}(-2g"(t)+6g(t))(x)=\mathcal{F}\left(e^{-3|t|}\right)(x)\Longleftrightarrow -2\mathcal{F}(g"(t))(x)+6\mathcal{F}(g(t))(x)=\dfrac{6}{x^2+9}$ $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$
   Mais,
   $\to\quad g,g'\in L^1(\mathbb{R})\Longrightarrow\mathcal{F}(g')(x)=ix\mathcal{F}(g)(x)\ \forall x,$ $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$

$\rightarrow \quad g', g" \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathcal{F}(g")(x) = ix\mathcal{F}(g')(x) = ix(ix\mathcal{F}(g)(x)) = -x^2\mathcal{F}(g)(x) \quad \forall x,$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$

ce qui joint à (1), donne

$2x^2\mathcal{F}(g)(x) + 6\mathcal{F}(g)(x) = \dfrac{6}{x^2+9}$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$ $\Longleftrightarrow \mathcal{F}(g)(x) = \dfrac{3}{(x^2+3)(x^2+9)} \forall x \in \mathbb{R}.$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$

Il est clair que $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3+x^2} - \dfrac{1}{9+x^2}\right) = \dfrac{3}{(x^2+3)(x^2+9)} \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$, donc

$$\mathcal{F}(g)(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x^2} - \frac{1}{9+x^2}\right).$$

(b) D'après la première question, $\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2} = \mathcal{F}\left(e^{-|\alpha t|}\right)(x)$. Donc,

$\rightarrow$ pour $\alpha = \sqrt{3}$, $\dfrac{1}{3+x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\mathcal{F}\left(e^{-\sqrt{3}|t|}\right)(x).$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$

$\rightarrow$ pour $\alpha = 3$, $\dfrac{1}{9+x^2} = \dfrac{1}{6}\mathcal{F}\left(e^{-|3t|}\right)(x).$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x^2} - \frac{1}{9+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathcal{F}\left(e^{-\sqrt{3}|t|}\right)(x) - \frac{1}{6}\mathcal{F}\left(e^{-|3t|}\right)(x)\right) \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|} - \frac{1}{12}e^{-|3t|}\right)(x) \quad \boxed{0,25 \ \mathbf{pts}} \\
&= \mathcal{F}(h)(x), \ \forall x. \qquad ((2))
\end{aligned}$$

avec $h(t) = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|} - \dfrac{1}{12}e^{-|3t|}$

Ainsi, en appliquant le théorème d'inversion de Fourier

$\rightarrow$comme g est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.... $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$, il vient

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{+A} e^{iax}\mathcal{F}g(x)dx\right), \qquad \boxed{0,5 \ \mathbf{pt}} \qquad ((3))$$

$\rightarrow$ comme:h est continue sur $\mathbb{R}$ et derivable sur $\mathbb{R}^*$ $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$, et de plus elle est derivable a droite et a gauche de 0 $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$, il vient

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{+A} e^{iax}\mathcal{F}h(x)dx\right). \qquad \boxed{0,5 \ \mathbf{pt}} \qquad ((4))$$

De (2), (3) et (4) on obtient $g(t) = h(t) = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|} - \dfrac{1}{12}e^{-|3t|}$, $\forall t$... $\boxed{0,25 \ \mathbf{pt}}$