# Corrigé type exercice 1 (6 pts) :

Si $(y,z)$ est solution du système d'équations différentielles alors les transformées de Laplace de $y,\ z, y'$ et $z'$ sont bien définies , car $y,z \in C^2(\mathbb{R}^+)$, et $y,\ z$ sont d'ordre exponentiel. Et si l'on pose $Y = \mathcal{L}(y)(x)$ et $Z = \mathcal{L}(z)(x)$, alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y')(x) = xY(x) - y(0) = xY(x) - 1, \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}} \\ \mathcal{L}(z')(x) = xZ(x) - z(0) = xZ(x) - 1, \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}} \end{cases}$$

Donc, en appliquant la TL au système donné et en utilisant la propriété de linéarité et la table des TL il vient

$$\begin{cases} xY(x) + Y(x) - Z(x) - 1 = \mathcal{L}(e^t)(x), \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}} \\ xZ(x) - Y(x) + Z(x) - 1 = \mathcal{L}(e^t)(x), \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xY(x) + Y(x) - Z(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1, \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}} \\ xZ(x) - Y(x) + Z(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1, \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}} \end{cases}$$

En retranchant la deuxième équation de la première, on obtient

$$\forall x > 1,\ x(Y(x) - Z(x)) + 2(Y(x) - Z(x)) = 0 \Rightarrow \forall x > 1,\ (x+2)(Y(x) - Z(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x > 1,\ Y(x) - Z(x) = 0 \Rightarrow \forall x > 1,\ \ Y(x) = Z(x). \leftarrow \boxed{1 \text{ pt}}$$

En remplaçant dans la deuxième équation du dernier système, il vient

$$Y(x) = Z(x) = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x},\ \ \forall x > 1 \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$$

comme

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}, \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$$

il vient

$$Y(x) = Z(x) = \frac{1}{x-1}. \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$$

En utilisant la transformée inverse de Laplace et la table des TL, on obtient

$$y(t) = z(t) = e^t,\ \ \forall t \geq 0. \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$$

Enfin, on vérifie facilement que $(y(t), z(t)) = (e^t, e^t)$ est solution du système donné.

## Corrigé type exercice 2 (6,5 pts+bonus de 0,5pts) :

On pose $f(t,x) = e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$. La fonction $F$ est une fonction donnée par une intégrale généralisée dependante d'un paramètre qui a un problème au $v(+\infty)$ seulement.$\leftarrow$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

1) Détermination du domaine de définition de $F$.
On a $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et

- Pour $x = 0$, $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{t\to+\infty} = \frac{1}{2} \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$, on peut aussi dire

qu'elle converge car c'est une intégrale de réference (Intégrale expo).

- Pour $x \neq 0$, $f(t,x) \overset{au\ V(+\infty)}{\sim} e^{-2t}\sqrt{x^2e^{2t}} = |x|e^{-t} \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$, donc $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge (car

$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge, ref) $\leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$.

On en déduit $D_F = \mathbb{R}$.

2) a) Montrer que $\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$.

On a, pour $t \geq 0$ et $x > 0$ $\leftarrow \boxed{1 \text{ pt}}$,

$$x^2e^{2t} \leq 1+x^2e^{2t} \leq 1+x^2e^{2t} + \frac{e^{-2t}}{4x^2} = \left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2e^{2t}} \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq \sqrt{\left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow |x|e^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq \left|xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right|$$

$$\overset{car\ x>0}{\Leftrightarrow} xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

b) On a, pour $x > 0$, $\leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

$$x\int_0^{+\infty} e^{-t}dt \leq F(x) \leq x\int_0^{+\infty} e^{-t}dt + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-3t}dt$$

$$\overset{\text{par clacul}}{\Leftrightarrow} x \leq F(x) \leq x + \frac{1}{6x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq F(x) - x \leq \frac{1}{6x}.$$

En passant à la limite quand $x \to +\infty$ dans les deux dernières doubles inégalités, on obtient,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} (F(x) - x) = 0. \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$$

Comme $F$ est paire, il vient :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} (F(x) + x) = 0. \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}}$$

3) a) $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Appliquons le théoréme de conservation de la dérivabilité $\leftarrow$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$:

$\rightsquigarrow$ $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$\rightsquigarrow$ $F$ est définie en tout point de $\mathbb{R}$, donc $\exists x_0 \in \mathbb{R} \,/\, \int_0^{+\infty} f(t,x_0)dt$ est convergente.

$\rightsquigarrow$ L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie le critère de convergence dominée sur tout $[0,+\infty[$.

En effet, pour tout $\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2e^{2t}}} \quad \leftarrow \boxed{0{,}25 \text{ pt}} \text{ sur } [0,+\infty[\times\mathbb{R}.$$

D'où,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \begin{cases} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2e^{2t}}} = e^{-t} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \leq e^{-t} \leftarrow \boxed{0{,}5 \text{ pt}},$$

avec $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (ref) $\leftarrow$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$.

Alors, $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$.

b) Tableau de variations de $F$ $\leftarrow$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$ On remarque d'abord que $F$ est paire et vu que pour $x > 0$, $x \leq F(x) \leq x + \frac{1}{6x}$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x) = +\infty$. Par ailleurs, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = x\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2e^{2t}}}dt.$$

D'où le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $F$ | $+\infty$ $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

Le graphe $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

## Corrigé type exercice 3 (7,5 pts+bonus de 0,5pt):

**Partie I** : $\leftarrow$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$ On a, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(f*f)(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(-t-u)du \overset{f\text{ paire}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u)f(t+u)du \overset{v=-u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)f(t-v)dv = (f*f)(t).$$

**Partie II** :

1) On $f,\ g,\ h,\ k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car

$\rightsquigarrow$ $f,\ g,\ h,\ k$ sont continues sur $\mathbb{R}$ $\leftarrow$ $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$.

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \overset{|f|\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ qui est convergente (intégrale expo, ref)$\leftarrow$ $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$.

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt \overset{|h|\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ qui est convergente (intégrale de Rieman, ref)$\leftarrow$ $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$.

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt \overset{|g|\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2}dt$ qui est convergente (intégrale de Rieman, ref)$\leftarrow$ $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$.

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |k(t)|dt \overset{|k|\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$ qui est convergente (intégrale de Rieman, ref)$\leftarrow$ $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$

2) a) On a $\displaystyle\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.e^{-|t|}dt \overset{f\text{ paire}}{=} 2.\int_0^{+\infty} \cos(xt).e^{-t}dt$ $\leftarrow$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$.

**Donner** $\boxed{1\text{ pt}}$ **pour l'une des méthodes**

1ere méthode (en utilisant la TL) : On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(x) = 2.\int_0^{+\infty} \cos(xt).e^{-t}dt = 2\mathcal{L}(\cos(xt))(1) = \frac{2}{x^2+1}.$$

2ème méthode: Travailler avec $\displaystyle\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.e^{-|t|}dt.$

On remarque d'abord que $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} e^{-(ix+1)t} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{-ixt}.e^{-t} = \lim_{t\to\pm\infty} (\cos(xt).e^{-t} - i\sin(xt)e^{-t}) = 0.$

Ainsi,

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ixt}f(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-ixt}.e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(ix+1)t}dt = \frac{-1}{ix+1}[e^{-(ix+1)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{ix+1},$

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t).dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}.e^{t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(ix-1)t}dt = \frac{-1}{ix-1}[e^{-(ix-1)t}]_{-\infty}^{0} = \frac{-1}{ix-1},$

Donc $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{1}{ix+1} - \dfrac{1}{ix-1} = \dfrac{2}{x^2+1}$ .

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} g(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.\frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\overset{g\text{ paire}}{\Rightarrow} \mathcal{F}(g)(x) = 2.\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t^2+1} dt \leftarrow \boxed{0{,}5\text{ pt}}. \qquad (1)$$

Appliquons le théorème d'inversion de Fourier pour $f \leftarrow \boxed{1\text{ pt}}$. Puisque

→ la fonction $f$ est

- continue sur $\mathbb{R}$
- dérivable à gauche et à droire en tout point de $\mathbb{R}$,

→ $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et elle est paire puisque $f$ l'est.

alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(tx).\mathcal{F}(f)(x)dx \Leftrightarrow e^{-|t|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1} dx.$$

en échangeant les notations $t$ et $x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}. \qquad (2)$$

De (1) et (2), il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(g)(x) = \pi.e^{-|x|}.$$

c) $\boxed{0{,}75\text{ pt}}$ On a

$$g'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} = -2h(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(h) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}(g')$$

Mais, puisque $g, g' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, d'après le cours $\mathcal{F}(g')(x) = ix\mathcal{F}(g)$, ainsi

$$\mathcal{F}(h)(x) = -\frac{1}{2} ix\mathcal{F}(g)(x) = -\frac{1}{2} i\pi x.e^{-|x|}$$

3) a) On a

$$(f*f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u).f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-u|}.e^{-|u|}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|t-u|+|u|)}du \leftarrow \boxed{0{,}25\text{ pt}},$$

**Donner $\boxed{1\text{ pt}}$ pour le reste**. En fait on a

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0 \\ -u, & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \quad \text{et } |t-u| = \begin{cases} t-u, & \text{si } t-u \geq 0 \\ -(t-u), & \text{si } t-u \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} t-u, & \text{si } u \leq t \\ -(t-u), & \text{si } u \geq t \end{cases}$$

Pour $t \geq 0$ :

$$
\begin{aligned}
(f*f)(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-((t-u)-u)}du + \int_{0}^{t} e^{-((t-u)+u)}du + \int_{t}^{+\infty} e^{-(-(t-u)+u)}du \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(t-2u)}du + \int_{0}^{t} e^{-t}du + \int_{t}^{+\infty} e^{-(-t+2u)}du \\
&= e^{-t}\int_{-\infty}^{0} e^{2u}du + e^{-t}\int_{0}^{t} du + e^{t}\int_{t}^{+\infty} e^{-2u}du \\
&= e^{-t}\left[\frac{e^{2u}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + te^{-t} + e^{t}\left[-\frac{e^{-2u}}{2}\right]_{t}^{+\infty} \\
&= \frac{e^{-t}}{2} + te^{-t} + e^{t}\left(\frac{e^{-2t}}{2}\right) \\
&= e^{-t} + te^{-t}.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs vu que $f$ est paire, alors $f*f$ est paire, ainsi, pour $t \leq 0$, on a

$$(f*f)(t) = (f*f)(-(-t)) = (f*f)(-t) \overset{-t\geq 0}{=} e^{t} - te^{t}$$

On en en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (f*f)(t) = e^{-|t|} + |t|e^{-|t|}. \tag{3}$$

b) Détermination de $\mathcal{F}(k)$ : En appliquant la TF à $(3) \longleftarrow$ $\boxed{\text{0,25 pt}}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}(f))^2(x) &= \mathcal{F}(h(t))(x) \\
\Leftrightarrow \mathcal{F}(e^{-|t|} + |t|e^{-|t|})(x) &= \frac{4}{(x^2+1)^2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{F}(e^{-|t|} + |t|e^{-|t|})(x) &= \frac{4}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

**Donner** $\boxed{\text{1 pt}}$ **pour le reste**. Appliquons le théorème d'inversion de Fourier fonction $t \mapsto e^{-|t|} + |t|e^{-|t|}$. Puisque

→ cette fonction est

- continue sur $\mathbb{R}$
- dérivable à gauche et à droire en tout point de $\mathbb{R}$,

→ $\mathcal{F}(e^{-|t|} + |t|e^{-|t|}) = \dfrac{4}{(x^2+1)^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$
\begin{aligned}
e^{-|t|} + |t|e^{-|t|} &= \frac{4}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{1}{(x^2+1)^2}.dx = \frac{2}{\pi}\mathcal{F}(k)(-t) \\
\Leftrightarrow \mathcal{F}(k)(-t) &= \frac{\pi}{2}e^{-|t|} + |t|e^{-|t|} \\
\Leftrightarrow \mathcal{F}(k)(t) &= \frac{\pi}{2}e^{-|t|} + |t|e^{-|t|}.
\end{aligned}
$$

En échangeant les notations $t$ et $x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(k)(x) = \frac{\pi}{2}(e^{-|x|} + |t|e^{-|x|}). \tag{2}$$