INI. Math2. 2I. Durée : 2H

EMD 3. Juin 2006

Documents interdits (sauf le formulaire des développements en séries entières)

Exercice 1: (3 points)
Soit la suite de fonctions définie par:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}.$$

1) Etudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}$.
2) Dans $\mathbb{R}_+$ donner les domaines où la convergence est uniforme.
3) Déduire les domaines où il ya convergence sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2: (5,5 points)
Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{nx}\sin(nx)}{e^{2nx}+1},\ x>0.$$

1) Montrer que F est bien définie dans $\mathbb{R}_+^*$.
2) Etudier la continuité puis la dérivabilité de F dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3: (6 points)
Soit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{(2n)!}+n^2 4^n\right)x^n$.
1) Déterminer son rayon ainsi que son domaine de convergence.
2) Calculer sa somme.

Exercice 4: (6 points)
Soit la fonction $2\pi-$périodique définie par :

$$f(x) = e^{|x|+1},\ x\in[-\pi,\pi]$$

1) Développer f en série de Fourier.
2) Déduire les valeurs des séries numériques

$$S_1 = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ et } S_2 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}.$$

Bon courage

Un corrigé:

Exercice 1:

Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n|x|}$.

1) Etudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}$ ie calculons (si elle existe) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$.

$\leadsto$ 1er cas: $x > 0$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{nx}{nx} = 1.$

$\leadsto$ 2ème cas: $x < 0$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{nx}{-nx} = -1.$

$\leadsto$ 3ème cas: $x = 0$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 0 = 0.$

Donc $f_n \longrightarrow f$ simplement sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

2) Dans $\mathbb{R}_+$ on a $f_n \longrightarrow f$ simplement telle que $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

★ On remarque que f est discontinue en "0" et toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (comme rapport et somme de fonctions continues), d'où il n y a pas de convergence uniforme sur tout domaine contenant un voisinage de "0" ie sur tout $[0, a],\ a > 0$
(ou $[0, a[$ ou $]0, a[$).

★ Testons la convergence uniforme sur $[a, +\infty[,\ a > 0$:

Posons $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx}{1+nx} - 1\right| = \dfrac{1}{1+nx}$, or $\left(\dfrac{1}{1+nx}\right)$ est décroissante en tant que fonction en x, ce qui implique $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} g_n(x) = g_n(a) = \dfrac{1}{1+na}$, et on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{1+na} = 0 \implies f_n \longrightarrow f$ uniformément sur tout $[a, +\infty[,\ a > 0$.

3) Pour déduire les domaines où il ya convergence sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer que f_n est impare $\forall n \in \mathbb{N}$ donc on a des résultats analogues sur $\mathbb{R}_-$: pas de convergence uniforme sur tout $[a, 0],\ a < 0$, et $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur tout $]-\infty, a],\ a > 0$.

Exercice 2:

Soit la fonction F / $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{e^{nx}\sin(nx)}{e^{2nx}+1},\ x > 0.$

1) Montrons que F est bien définie dans $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}\sin(nx)}{e^{2nx}+1}$, on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{e^{nx}}{e^{2nx}}$ ie $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{e^{nx}} = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^n$,

or $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $0 < \dfrac{1}{e^x} < 1$), donc d'après le critère de comparaison $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

F est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) a) La continuité:

(1) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (car produit, composée, rapport et

somme de fonctions C^1).
(2) Etude de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$:

On a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{e^{nx}} \leq \dfrac{1}{e^{na}} = \left(\dfrac{1}{e^a}\right)^n$, $\forall a \in [a,+\infty[,\ a>0$. Or $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{e^a}\right)^n$ converge (série géométrique), ce qui prouve (par W) que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a,+\infty[,\ a>0$.
De (1) et (2) on obtient la continuité de F sur tout $[a,+\infty[,\ a>0$.
F est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) La dérivabilité:
(3) Etude de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$:

On a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{\left[ne^{nx}\sin(nx) + ne^{nx}\cos(nx)\right]\left[e^{2nx}+1\right] - 2ne^{2nx}\left[e^{nx}\sin(nx)\right]}{\left[e^{2nx}+1\right]^2} \\ &= \underbrace{\frac{ne^{nx}\left[\sin(nx)+\cos(nx)\right]}{e^{2nx}+1}}_{g_n(x)} - \underbrace{\frac{2ne^{3nx}\left[\sin(nx)\right]}{\left[e^{2nx}+1\right]^2}}_{h_n(x)} \end{aligned}$$

Or $|g_n(x)| \leq \dfrac{2ne^{nx}}{e^{2nx}} \leq \dfrac{2n}{e^{nx}} \leq \dfrac{2n}{e^{na}}$ et $|h_n(x)| \leq \dfrac{2n}{e^{nx}} \leq \dfrac{2n}{e^{na}}$, ceci $\forall a \in [a,+\infty[,\ a>0$.
La série numérique $\sum \dfrac{n}{e^{na}}$ converge pa la régle de l'ordre ($\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2.\dfrac{n}{e^{na}} = 0$).
Alors $\sum g_n$ et $\sum h_n$ convergent normalement (W) sur tout $[a,+\infty[,\ a>0$.
ie $\sum f_n'$ converge normalement (par linéarité) donc uniformément sur tout $[a,+\infty[,\ a>0$.
De (1) et (3) on obtient la dérivabilité de F sur tout $[a,+\infty[,\ a>0$.
F est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3:

Soit la s.e $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{(2n)!} + n^2 4^n\right)x^n$, posons $a_n = \dfrac{1}{(2n)!} > 0;\ b_n = n^2 4^n > 0$.
1) a) Calcul du rayon R.
$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{(2n+2)!}.\dfrac{(2n)!}{1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$, d'après le théorème de Hadamard :$R_a = +\infty$, R_a étant le rayon de la s.e $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$.

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{(n+1)^2 4^{n+1}}{n^2 4^n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 4\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = 4$, d'après le théorème de Hadamard :$R_b = \dfrac{1}{4}$, R_b étant le rayon de la s.e $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$.

Comme $R_a \neq R_b \Longrightarrow R = \inf(R_a, R_b) = \frac{1}{4} \Longrightarrow \Delta =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ est l'intervalle de covergence.

b) Déterminons le domaine de convergence D, ie étude aux bornes.

$\rightsquigarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge en $\pm\frac{1}{4}$ puisque son rayon est $R_a = +\infty \Longrightarrow D_a =]-\infty, +\infty[$.

$\rightsquigarrow \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ diverge en $\pm\frac{1}{4}$ puisque CN non verifiée: $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 4^n \left|\pm\frac{1}{4}\right| = +\infty \neq 0$.

La s.e donnée diverge donc en $\pm\frac{1}{4}$ par linéarité $\Longrightarrow$ $D =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

2) Calculons sa somme S.

$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^n + \sum_{n\geq 0} n^2 4^n x^n = S_1(x) + S_2(x)$ ce partage est possible car les deux s.e sont convergentes sur D.

★ Calculons $S_1(x)$:

$\rightsquigarrow$ Si $x \geq 0$ posons $x = (\sqrt{x})^2$ et donc $S_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = ch(\sqrt{x})$.

$\rightsquigarrow$ Si $x < 0$ posons $x = -\left(\sqrt{-x}\right)^2$ et donc $S_2(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$.

On obtient: $S_1(x) = \begin{cases} ch(\sqrt{x}) \text{ si } x \geq 0. \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) \text{ si } x < 0. \end{cases}$

★ Calculons $S_2(x)$:

On a que $n(n-1) = n^2 - n \Longrightarrow n^2 = n(n-1) + n$, on remplace dans $S_2(x)$:

$$\begin{aligned}
S_2(x) &= \sum_{n\geq 0} (n(n-1)+n)(4x)^n \\
&= (4x)^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)(4x)^{n-2} + (4x) \sum_{n\geq 1} n(4x)^{n-1} \\
&= (4x)^2 . \left(\frac{1}{1-X}\right)''_{/X=4x} + (4x)\left(\frac{1}{1-X}\right)'_{/X=4x} \\
&= (4x)^2 . \frac{2}{(1-4x)^3} + (4x)\frac{1}{(1-4x)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion: $S(x) = \begin{cases} ch(\sqrt{x}) + \frac{32x^2}{(1-4x)^3} + \frac{4x}{(1-4x)^2} \text{ si } x \geq 0. \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) + \frac{32x^2}{(1-4x)^3} + \frac{4x}{(1-4x)^2} \text{ si } x < 0. \end{cases}$.

Exercice 4:

Soit $f(x) = e^{|x|+1}$, $x \in [-\pi, \pi]$ $2\pi-$périodique.

1) Développons f en série de Fourier.

a) Existence et convergence de $F(f)$:

★ f est continue sur $[-\pi,\pi]$ car c'est la composée et la somme de fonctions continue, de plus $f(-\pi)=f(\pi)$ et f est $2\pi-$périodique, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ (elle est en particulier localement intégrable). Donc $F(f)$ existe.
★ f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$: $f_{/]0,\pi[}(x)=e^{x+1}$ est C^1, de même sur $]-\pi,0[$ par parité.
Donc d'après le théoréme de Dirichlet $F(f)$ converge normalement vers f ie $F(f)(x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.
b) Calcul des coefficients de $F(f)$:
★ f est paire $\Longrightarrow\ b_n=0\ \forall n\geq 1$.
★ f est paire $\Longrightarrow\ a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x+1}dx=\dfrac{2}{\pi}\left(e^{\pi+1}-e\right).$
★ f est paire $\Longrightarrow\ a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos nxdx\ \forall n\geq 1$ ie $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{x+1}\cos nxdx.$

Faisons une 1ére IPP: $\begin{cases} u=e^{x+1} \longrightarrow u'=e^{x+1} \\ v'=\cos nx \longrightarrow v=\dfrac{1}{n}\sin nx \end{cases}$, on a alors:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left[e^{x+1}\sin nx\right]_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi e^{x+1}\sin nxdx\right) \\ &= \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi e^{x+1}\left(-\sin nx\right)dx \end{aligned}$$

Faisons une 2ème IPP: $\begin{cases} u=e^{x+1} \longrightarrow u'=e^{x+1} \\ v'=-\sin nx \longrightarrow v=\dfrac{1}{n}\cos nx \end{cases}$, on a alors:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{n}\left[e^{x+1}\cos nx\right]_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi e^{x+1}\cos nxdx\right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n e^{\pi+1}-e-\frac{\pi}{2}a_n\right) \end{aligned}$$

On tire $a_n=\dfrac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n e^{\pi+1}-e\right).\dfrac{n^2}{n^2+1}=\dfrac{2e}{\pi}.\dfrac{\left((-1)^n e^\pi-1\right)}{n^2+1}\ \forall n\geq 1.$
Conclusion:

$$F(f)(x)=\frac{e^{\pi+1}-e}{\pi}+\frac{2e}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^\pi-1}{n^2+1}.\cos nx=e^{\pi+1}\ \forall x\in[0,\pi].$$

2) Déduisons les valeurs de $S_1=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $S_2=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$.

Remplaçons dans $F(f)(x)$ x par 0 puis par π, on obtient alors le système suivant:

$$\begin{cases} e = \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi} + \dfrac{2e}{\pi}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n e^{\pi}}{n^2+1} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}\right) \\ e^{\pi+1} = \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi} + \dfrac{2e}{\pi}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{\pi}}{n^2+1} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right) \end{cases}$$

ie S_1 et S_2 vérifient:

$$\begin{cases} e^{\pi}S_1 - S_2 = \dfrac{\pi}{2e}\left(e - \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi}\right) \overset{\text{noté}}{=} c_1 \\ -S_1 + e^{\pi}S_2 = \dfrac{\pi}{2e}\left(e^{\pi+1} - \dfrac{e^{\pi+1}-e}{\pi}\right) \overset{\text{noté}}{=} c_2 \end{cases}$$

On résout le dérnier système et on trouve:

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{e^{\pi}c_1 + c_2}{e^{\pi}-1} \\ S_2 = \dfrac{\left(e^{2\pi} - e^{\pi} + 1\right)c_1 + e^{\pi}c_2}{e^{\pi}-1} \end{cases}$$