ESI, 2CPI **Corrigé du contrôle Intermédiare** **Juin 2021**

Analyse mathématique 4 **Durée : 1h30**

EXERCICE 1 (5 points) : Déterminer les solutions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ de l'EDP suivante :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).f^2(x,y) = \frac{1}{3}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

à l'aide du changement de variables $(u,v) = \varphi(x,y)$ avec $\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y),\ \frac{1}{2}(x-y)\right)$.

Indication : Considérer la fonction F définie par $F(u,v) = (f \circ \varphi^{-1})(u,v)$

Corrigé

0,75 pt

Le changement de variable est donné par $\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y),\ \frac{1}{2}(x-y)\right)$, donc,

$$\varphi^{-1}(u,v) = (u+v, u-v).$$

D'après le théorème de composition, il vient que $F(u,v) = (f \circ \varphi^{-1})(u,v)$ est une fonction $C^1(\mathbb{R}^2)$ car les composantes de φ^{-1} sont des polynômes et $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ par hypothèse).

2,5 pt De plus,

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (F \circ \varphi)(x,y) \\
&\Rightarrow J_f(x,y) = J_F(\varphi(x,y))\, J_\varphi(x,y) \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(\varphi(x,y)); \quad \frac{\partial F}{\partial v}(\varphi(x,y))\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v); \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

1,75 pt En remplacant dans l'EDP de départ et en tenant compte que $f(x,y) = f(\varphi^{-1}(u,v)) = F(u,v)$, on obtient

$$F^2(u,v)\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\partial (F^3)}{\partial v}(u,v) = 1.$$

Donc,

$$F^3(u,v) = v + h(u) \Rightarrow F(u,v) = \sqrt[3]{v + h(u)}.$$

avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Ainsi, les solutions de l'EDP sont les fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ de la forme

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x-y) + h\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

EXERCICE 2 (10 points) : Soient les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad g(x,y) = xy - 9.$$

1) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2) Déterminer les points critiques de f.

3) Etudier les extrema locaux de f.

4) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver les extrema locaux de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Corrigé

1) $\boxed{\textbf{1,5 pt}}$ On a $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$ et f est symétrique

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0. & \end{cases}$$

2) $\boxed{\textbf{1,5 pt}}$ Les points critiques de f : On a

$$p = (x,y) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} = 0, \\ 1 - \frac{1}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Ainsi, les points critiques de f sont :

$$\begin{cases} \bullet\ P_1 = (1,1), & \bullet\ P_2 = (-1,-1), \\ \bullet\ P_3 = (1,-1), & \bullet\ P_4 = (-1,1) \end{cases}$$

3) $\boxed{\textbf{2 pts}}$ Etudier les extréma locaux de f : Si f admet un extrema local en p, alors p est un point critique. On a

$$r \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}, \quad t \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}, \quad s \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

On a

Le point critique	r	t	s	$\Delta = rt - s^2$	
$P_1 = (1,1)$	$2 > 0$	2	0	$4 > 0$	f a un minimum local en P_1
$P_2 = (-1,-1)$	$-2 < 0$	-2	0	$4 > 0$	f a un maximum local en P_2
$P_3 = (1,-1)$	2	-2	0	$-4 < 0$	f n'a pas un extremum local en P_3
$P_4 = (-1,1)$	-2	2	0	$-4 < 0$	f n'a pas un extremum local en P_4

4) On a $D_g = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Considérons le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) \doteq f(x,y) + \lambda g(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(xy - 9) \leftarrow \boxed{\textbf{0,25 pt}}$$

On a $\nabla g(x,y) = (y,x)$, donc

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Mais, $(0,0)$ ne vérifie pas la contrainte $g(x,y) = 0$. $\leftarrow$ $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$

Donc, si f admet un extrema lié en $p = (x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0). \leftarrow \boxed{\textbf{0,25 pt}}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} + \lambda y = 0, \\ 1 - \dfrac{1}{y^2} + \lambda x = 0, \\ xy = 9. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} + \lambda xy = 0, \\ y - \frac{1}{y} + \lambda yx = 0., \\ xy = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} + \lambda xy = 0, \\ y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x}, \\ xy = 9. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \\ \lambda = \frac{8}{27}, \end{cases} \leftarrow \boxed{\textbf{0,75 pt}} \vee \begin{cases} x = -3, \\ y = -3, \\ \lambda = -\frac{8}{27}. \end{cases} \leftarrow \boxed{\textbf{0,75 pt}}$$

La résolution de ce système donne les solutions suivantes :

- $p = (x,y) = (3,3)$ et $\lambda = \frac{8}{27}$,
- $p = (x,y) = (-3,-3)$ et $\lambda = -\frac{8}{27}$.

La nature du point $(3,3)$.

Soit $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $g(3+h_1,3+h_2) = 0$, c'est à dire $(3+h_1)(3+h_2) = 9$. On a

$$\begin{aligned} f(3+h_1,3+h_2) - f(3,3) &= (3+h_1) + (3+h_2) + \frac{1}{3+h_1} + \frac{1}{3+h_2} - \frac{20}{3} \\ &= (3+h_1) + \frac{9}{3+h_1} + \frac{1}{3+h_1} + \frac{(3+h_1)}{9} - \frac{20}{3} \\ &= 10\left(\frac{(3+h_1)}{9} + \frac{1}{3+h_1} - \frac{2}{3}\right) \\ &= 10\frac{(3+h_1)^2 + 9 - 6(3+h_1)}{9(3+h_1)} = 10\frac{h_1^2}{9(3+h_1)} \end{aligned} \leftarrow \boxed{\textbf{0,75 pt}}$$

Pour h_1 assez proche de 0, $3 + h_1 > 0$, ce qui implique $\dfrac{h_1^2}{9(3+h_1)} \geq 0$, et ainsi

$f(3+h_1,3+h_2) \geq f(3,3)..\leftarrow \boxed{\textbf{0,5 pt}}$

Donc, f admet en $(3,3)$ un minimum local sous la contrainte $xy-9=0$..← $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$.

La nature du point $(-3,-3)$. On peut l'étudier de deux méthodes différentes. **Une seule des deux sera notée**.

Méthode 1 : Comme

$$f(-x,-y)=-f(x,y), \leftarrow \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

on déduit que f admet en $(-3,-3)$ un maximum local sous la contrainte $xy-9=0$..

← $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

Méthode 2 : Soit $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ avec $g(-3+h_1,-3+h_2)=0$, c'est à dire $(-3+h_1)(-3+h_2)=9$. On a

$$\left.\begin{aligned}
f(-3+h_1,-3+h_2)-f(-3,-3) &= (-3+h_1)+(-3+h_2)+\frac{1}{-3+h_1}+\frac{1}{-3+h_2}+\frac{20}{3}\\
&= (-3+h_1)+\frac{9}{-3+h_1}+\frac{1}{-3+h_1}+\frac{(-3+h_1)}{9}+\frac{20}{3}\\
&= 10\left(\frac{(-3+h_1)}{9}+\frac{1}{-3+h_1}+\frac{2}{3}\right)\\
&= 10\frac{(-3+h_1)^2+9+6(-3+h_1)}{9(-3+h_1)} = 10\frac{h_1^2}{9(-3+h_1)}
\end{aligned}\right\} \leftarrow \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Pour h_1 assez proche de 0, $-3+h_1<0$, ce qui implique que $\dfrac{{h_1}^2}{9(-3+h_1)}\leq 0$, et ainsi $f(3+h_1,3+h_2)\leq f(3,3)$. Donc, ,$f$ admet en $(-3,-3)$ un maximum local sous la contrainte $xy-9=0$.. ← $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

EXERCICE 3 (5 points): Considérons la fonction suivante :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)} dt, \quad x > 0.$$

1) Etudier la continuité de F sur $[0,+\infty[$.
2) Etudier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$.

Corrigé :

Posons, $f(t,x) = \dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)}$, $f \in R_{loc}[0,+\infty[$ selon t.

1) La continuité sur $[0,+\infty[$:

On remarque d'abord que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)} dt$ est une intégrale paramètrée qui pose problème en $+\infty$. $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$

On a

a) f est continue sur $\Delta = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car c'est une composée et rapport de fonctions continues. $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$, on peut aussi dire que est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (U ouvert contenant Δ) car c'est une composée et rapport de fonctions $\mathcal{C}^1$ pour l'utiliser dans la dérivée.

b) Etudions la convergence dominée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$:

Pour tout $(t,x) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$ on a

$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t), \quad \boxed{0,5 \textbf{ pt}}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ converge } \boxed{0,25 \textbf{ pt}}$$

(car $\dfrac{1}{1+t^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ intégrale de Riemann $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$), donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ vérifie la condition de la convergence dominée sur $[0,+\infty[$.

Conclusion : De (a) et (b), on déduit, grâce au théorème de conservation de la continuité, que F est continue sur $[0,+\infty[$.. $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$

2) La dérivabilité sur $]0,+\infty[$:

a) La dérivée partielle de f par rapport à "x" existe et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -e^{-x(1+t^2)} \quad \boxed{0,5 \textbf{ pt}},$$

donc

$x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue sur Δ (composée et rapport de fonctions continues). $\boxed{0,25 \textbf{ pt}}$.

On peut aussi dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (U ouvert contenant Δ) car c'est une compossée et rapport de fonctions $\mathcal{C}^1$.

b) Comme F est continue sur $[0,+\infty[$, donc $\exists x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $\int_0^{+\infty} f(t,x_0)dt$ bien définie.

$\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$

c) Etudions la convergence dominée de $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$.

Pour tout $(t,x) \in [0,+\infty[\times[A,+\infty[$ (avec $A > 0$), $\boxed{0,5\ \textbf{pt}}$ ona

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = e^{-x\left(1+t^2\right)} \leq e^{-A\left(1+t^2\right)} \doteq h(t). \quad \boxed{0,5\ \textbf{pt}}$$

et $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge d'après la régle de l'ordre

$(\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-A\left(1+t^2\right)} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{2\log t - A\left(1+t^2\right)} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t^2\left[\frac{2\log t}{t^2} - A\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right]} = 0)$ $\boxed{0,5\ \textbf{pt}}$.

Conclusion : De (a), (b) et (c), on déduit, grâce au théorème de conservation de la dérivabilité, que F est dérivable sur tout $[A,+\infty[\subset]0,+\infty[$ $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$. On en déduit ainsi, que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ $\boxed{0,25\ \textbf{pt}}$.

Bon courage