$\boxed{\text{Corrigé CI ANA4 16/17}}$

Questions de cours (1.5 points) :

I) Pour chaque affirmation répondre par $\boxed{\text{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\text{F}}$ sinon.

A1 : Soient $f : \mathbb{R}\times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à t et continue par rapport à x,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \ \lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \lim_{x\to x_0} f(x,t)dt. \ \boxed{\text{F}}$$

A2 : Soient $f : \mathbb{R}\times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est intégrable par rapport à t, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \ \boxed{\text{F}}$$

II) Compléter : Soit $f : J\times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f..est continue sur $J\times[a,b]$.alors la fonction F définie par $F(x) \doteq \int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur J.

Exercice 1

1. $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\Psi(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
   Soient $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ trouvons un unique (x,y) tel que:

   $$\Psi(x,y) = (u,v) \Longleftrightarrow \begin{cases} ax+by = u \\ cx+dy = v \end{cases}$$

   ce système étant un système linéaire, il admet une unique solution si et ssi $ad-bc \neq 0$. $\hookleftarrow \boxed{0{,}5}$
   donc Ψ est bijectif et $\Psi^{-1}(u,v) = \left(\dfrac{du-bv}{ad-bc}, \dfrac{av-cu}{ad-bc}\right)$.
   de plus $\Psi \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ car ses composantes le sont.$\hookleftarrow \boxed{0{,}25}$
   de même $\Psi^{-1} \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ car ses composantes le sont.$\hookleftarrow \boxed{0{,}25}$

2. Soit l'équation aux dérivées partielles : $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad . \quad (\bigstar)$$

   $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \exists!\,(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) = \Psi^{-1}(u,v)$
   $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \exists!\,(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = f\left(\Psi^{-1}(u,v)\right) = f\circ\Psi^{-1}(u,v)$.

Posons:

$$F = f \circ \Psi^{-1} \text{ ie } f = F \circ \Psi.$$

Exprimons les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de F :

Vérifions les hypothèses de la dérivation en chaine:

$$\begin{cases} \Psi \text{ est un difféomorphisme} \\ \quad \text{et } F \text{ est la composée de fonctions de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow F$ et Ψ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2 \longleftarrow \boxed{0{,}5}$

F et Ψ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow J_{(x,y)}f = J_{\Psi(x,y)}F \times J_{(x,y)}\Psi \ldots (1)$

$$(1) \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(\Psi(x,y)) & \frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\frac{\partial F}{\partial u}(\Psi(x,y)) + c\frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b\frac{\partial F}{\partial u}(\Psi(x,y)) + d\frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y)) \end{cases} \longleftarrow \boxed{1\text{point}}$$

Remplaçons dans l'EDP:

$$(\bigstar) \iff a\frac{\partial F}{\partial u}(\Psi(x,y)) + c\frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y)) - 3\left(b\frac{\partial F}{\partial u}(\Psi(x,y)) + d\frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y))\right) = 0$$

$$\iff (a-3b)\frac{\partial F}{\partial u}(\Psi(x,y)) + (c-3d)\frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y)) = 0 \qquad \longleftarrow \boxed{0{,}5}$$

Il suffit de poser $\begin{cases} a - 3b = 0 & \longleftarrow \boxed{0{,}5} \\ \text{et } (c-3d) \neq 0 & \longleftarrow \boxed{0{,}5} \end{cases}$

$$\text{et dans ce cas } (\bigstar) \iff \frac{\partial F}{\partial v}(\Psi(x,y)) = 0$$

$$\iff \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 0$$

$$\iff F(u,v) = H(u) \quad \longleftarrow \boxed{0{,}5} \quad o\grave{u} H \in C^1(\mathbb{R})$$

$f(x,y) = H(ax+by)$ on posera $a = 3$ et $b = 1$. $\longleftarrow \boxed{0{,}5}$

Ou bien il suffit de poser $a - 3b \neq 0$ et $c - 3d = 0$ on obtient les memes résultats.

Exercice 2

On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Trouver les points critiques de f et donner leur nature.
   $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^2\right)$ passons alors par les points critiques de f :
   $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{cases} \longleftarrow \boxed{0{,}25} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ y^3=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ x^9=x \end{cases}$
   $x^9=x \Leftrightarrow x\left(x^8-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^8=1 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$
   les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ $\longleftarrow \boxed{0{,}25\times 3}$

   Nature des points
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4 \longleftarrow \boxed{0{,}25\times 3}$

Point	r	t	s	$rt-s^2$	Conclusion
$(0,0)$	0	0	-4	-16	f n'admet pas en ce point un extrema.$\longleftarrow \boxed{0{,}5}$
$(1,1)$	$12>0$	12	-4	128	f admet en ce point un minimum local.$\longleftarrow \boxed{0{,}5}$
$(-1,-1)$	$12>0$	12	-4	128	f admet en ce point un minimum local.$\longleftarrow \boxed{0{,}25}$

2. Vérifier que $f(x,y)=(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2-2$. $\longleftarrow \boxed{0{,}5}$

3. $f(1,1)=f(-1,-1)=-2$
   et $f(x,y)-(-2)=(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2=(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2\geq 0$
   $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$
   donc f admet en ces points des extrema globaux.$\longleftarrow \boxed{1}$

Exercice 3 **(4 points) :**

$\boxed{0{,}5}$ $\hookrightarrow$Il s'agit de trouver les extrema de $f(x,y)=x^2+y^2$ sous la contrainte $x^6+y^6=1$.

Posons $g(x,y)=x^6+y^6-1$.
les hypothèses du théorème de Lagrange: $f,g\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

les points critiques de g :
$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial g}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=0 \\ 6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=x=0$
or $g(0,0)\neq 0$ donc $(0,0)$ ne vérifie pas la contrainte.$\longleftarrow \boxed{0{,}5}$

Résolvons le système de Lagrange:

$$(S)\begin{cases} \nabla_{(x,y)}(f+\lambda g)=0_{\mathbb{R}^2} \\ g(x,y)=0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ x^6 + y^6 - 1 \ = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 6\lambda x^5 = 0 ...(1) \\ 2y + 6\lambda y^5 = 0 ...(2) \\ x^6 + y^6 - 1 \ = 0 ...(3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\left(1 + 3\lambda x^4\right) = 0 ...(1) \\ y\left(1 + 3\lambda y^4\right) = 0 ...(2) \\ x^6 + y^6 - 1 \ = 0 ...(3) \end{cases} \longleftarrow \boxed{0{,}5}$$

$(1) \iff x = 0$ ou $1 + 3\lambda x^4 = 0$

1. Si $x = 0$:
   $(S) \iff \begin{cases} y\left(1 + 3\lambda y^4\right) = 0 ...(2) \\ x^6 + y^6 - 1 \ = 0 ...(3) \end{cases}$
   $(3) \iff y^6 - 1 = 0 \iff y = 1$ ou $y = -1$.
   On remplace dans (2) : $1 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = \dfrac{-1}{3}$.
   donc $\left(0, 1, \dfrac{-1}{3}\right)$, $\left(0, -1, \dfrac{-1}{3}\right)$ sont solutions du système.$\longleftarrow \boxed{0{,}25}$

2. Si $1 + 3\lambda x^4 = 0 \quad (1)'$
   $(2) \iff y = 0$ ou $1 + 3\lambda y^4 = 0$

   (a) i. Si $y = 0$:
   On remplace dans (3) : $x^6 - 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$.
   On remplace dans $(1)'$: $1 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = \dfrac{-1}{3}$.
   donc $\left(1, 0, \dfrac{-1}{3}\right)$, $\left(-1, 0, \dfrac{-1}{3}\right)$ sont solutions du système.$\longleftarrow \boxed{0{,}25}$

   ii. Si $1 + 3\lambda y^4 = 0$
   $(S) \iff \begin{cases} 1 + 3\lambda x^4 = 0 ...(1') \\ 1 + 3\lambda y^4 = 0 ...(2') \\ x^6 + y^6 - 1 \ = 0 ...(3) \end{cases}$
   $(1') - (2') \iff 3\lambda\left(x^4 - y^4\right) = 0 \iff \lambda\left(x^4 - y^4\right) = 0 \iff \lambda = 0$ ou $|x| = |y|$.

   A. Si $\lambda = 0$ alors $(1') \iff 1 = 0$ ce qui est impossible.
   B. Si $|x| = |y|$, on remplace dans le système:

$$\left\{\begin{array}{c} 1+3\lambda y^4=0...(2')\\ x^6+y^6-1\ =0...(3)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 1+3\lambda y^4=0...(2')\\ 2y^6-1\ =0...(3)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} 1+3\lambda y^4=0...(2')\\ y^6=\dfrac{1}{2}...(3)\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} |y|=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\\ \lambda=\dfrac{-1}{3y^4}...(2')\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} |y|=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\\ \lambda=\dfrac{-1}{3.2^{\frac{2}{3}}}...(2')\end{array}\right.$$

Donc $\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\right),\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\right),\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\right),\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{3.2^{\frac{2}{3}}}\right)$
$\leftarrowtail$ $\boxed{\text{1point}}$ sont solutions du système de Lagrange.

Conclusion:

Si f admet en un point (a,b) un extrema lié à la contrainte g
alors $(a,b)\in\left\{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1),\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\right),\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\right),\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}}\right),\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}}\right)\right\}$.
D'après la figure, l'ensemble $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^6+y^6=1\right\}$ est fermé borné
et comme f est continue sur cet ensemble alors f est bornée et elle atteint ses bornes $\leftarrowtail$ $\boxed{0{,}5}$
donc f admet au moins deux extrema:
Or $f(1,0)=f(-1,0)=f(0,1)=f(0,-1)=1$
et $f\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\right)=f\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\right)=f\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}}\right)=f\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}}\right)=\dfrac{2}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}>1$
alors les points les plus proches sont $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ $\leftarrowtail$ $\boxed{0{,}25}$
Les points les plus éloignés sont $\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\right),\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}}\right),\left(\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}}\right),\left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{6}}},\dfrac{-1}{2^{\frac{1}{6}}}\right)$. $\leftarrowtail$ $\boxed{0{,}25}$

Exercice 4 (5 points) : On pose

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \ y\geq 1,\ 3y-2x\leq 1 \text{ et } 4(x-1)^2+9(y-1)^2\leq 36\right\}.$$

1. $\left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{x-1}{3},\\ v=\dfrac{y-1}{2}.\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3u+1\\ y=2v+1\end{array}\right.$

$$(x,y)\in\overset{\circ}{D}\iff\left\{\begin{array}{c} y>1\\ 3y-2x<1\\ 4(x-1)^2+9(y-1)^2<36\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} 2u+1>1\\ 3(2v+1)-2(3u+1)<1\\ 4(3u)^2+9(2v)^2<36\end{array}\right.$$

$$(x,y)\in\overset{\circ}{D}\iff\left\{\begin{array}{c} u>0\\ v-u<0\\ u^2+v^2<1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c} u>0\\ v<u\\ u^2+v^2<1\end{array}\right.$$

donc $\Delta=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ /\ u>0, v<u,\ \text{et } u^2+v^2<1\right\}$. $\leftarrowtail$ $\boxed{\text{1point}}$

2. Représenter Δ grapphiquement.$\hookleftarrow$ $\boxed{0{,}5}$

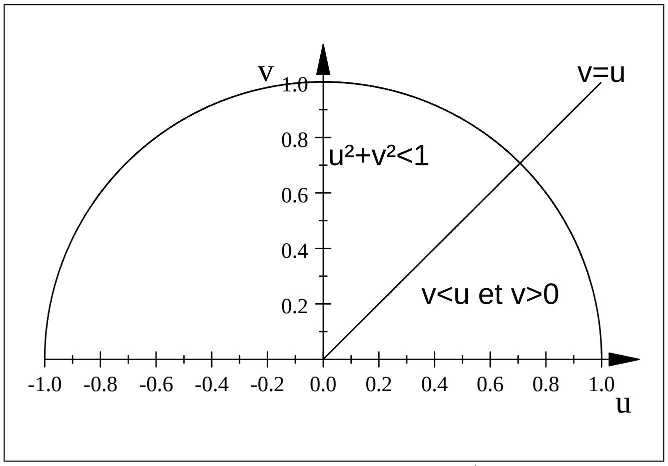

Figure représentative de Δ.

3. Calculer
$$\iint_D (x-1)(y-1)dxdy.$$

Soit le difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi(u,v) = (3u+1, 2v+1) = (x,y)$

$\det J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \hookleftarrow \boxed{0{,}5}$

$I = \iint_D (x-1)(y-1)\ dx\ dy = 36\iint\limits_{\Delta} uvdudv. \hookleftarrow \boxed{0{,}75}$

Appliquons les coordonnées polaires:

$x = r\cos(\theta)\,,\ y = r\sin\theta,\ r > 0,\ \theta \in]0, 2\pi[$

$(u,v) \in \Delta \Longleftrightarrow 0 < r < 1$ et $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}. \hookleftarrow \boxed{1\text{point}}$

$$\begin{aligned} I &= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta \\ &= 36\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta\right)\int_0^1 r^3dr \\ &\qquad \text{car on intègre sur un pavé une fonction à variables séparables.} \hookleftarrow \boxed{0{,}5} \\ &= \frac{9}{4} \quad \hookleftarrow \boxed{0{,}75} \end{aligned}$$