ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

Corrigé du CI **Avril 2023**

2CPI **Analyse mathématique 4** **Durée : 1h30**

Exercice 1 (9 points) : **1) i)** $\boxed{\text{1,5 pt}}$ On a $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ et

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4x^3y^2 - 3x^2y^3 + 18x^2y^2 \\ -2x^4y - 3x^3y^2 + 12x^3y \\ 2z \end{pmatrix},$$

$$Hess(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -12x^2y^2 - 6xy^3 + 36xy^2 & -8x^3y - 9x^2y^2 + 36x^2y & 0 \\ -8x^3y - 9x^2y^2 + 36x^2y & 12x^3 - 6x^3y - 2x^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii) $\boxed{\text{1,5 pt}}$ Les points critiques de f : On a

$$p = (x,y,z) \text{ est un point critique de } f \Leftrightarrow \nabla f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2(-4x - 3y + 18) = 0, \\ x^3y(-2x - 3y + 12) = 0, & \ldots\ldots(*) \\ 2z = 0, \end{cases}$$

1er cas: Si $x = 0$, il vient que $(0,a,0)$ sont des points critiques.
2ème cas: Si $x \neq 0$ et $y = 0$, il vient que $(a,0,0)$ sont des points critiques.
3ème cas: Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, il vient

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 3y + 18 = 0 & (1), \\ -2x - 3y + 12 = 0, & (2) \\ 2z = 0, & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 0, \end{cases}.$$

<u>Conclusion:</u> L'ensemble des point critique est $S \doteq \left\{(3,2,0),\ (a,0,0),\ (0,a,0) \,/\, a \in \mathbb{R}\right\}$.

iii) <u>*Le point* $(3,2,0)$ $\boxed{\text{1 pt}}$</u>: On a

$$Hess(f)(3,2,0) = \begin{pmatrix} -144 & -108 & 0 \\ -108 & -162 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

est inversible mais indéfinie. En effet

- pour $Hess(f)(3,2,0)$, $\det\Delta_1 < 0$, $\det\Delta_2 = 11\,664 > 0$, $\det\Delta_3 = 2 \times 11\,664 > 0$.
- pour $(-Hess(f)(3,2,0))$, $\det\Delta_1 > 0$, $\det\Delta_2 = 11\,664 > 0$,

$\det\Delta_3 = -2 \times 11\,664 < 0.0.25pt$
Conclusion: $(3,2,0)$ ne donne pas un extrémum pour f, c'est donc un point selle.
Autrement. On peut utiliser le DT2 et considérer les chemins $h = k = 0$ et $k = l = 0$, pour montrer le changement de signe de $f(3+h, 2+k, 0+l) - f(3,2,0)$ pour h,k,l au voisinage de 0.

Les points $(0,a,0)$ $\boxed{\text{1,25 pt}}$: . On a $Hess(f)(0,a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.qui n'est pas inversible, donc $(0,a,0)$ sont des points critiques dégénérés.
Pour déduire la nature de ces points critiques, utilisons la définition. Soient $h,\ k$ et l proche de 0. Alors, en remarquant que

$$f(x,y,z) = -x^4y^2 - x^3y^3 + 6x^3y^2 + z^2 = x^3y^2(6-x-y) + z^2,$$

il vient

$$g(h,k,l) \doteq f(0+h, a+k, 0+l) - f(0,a,0) \ = h^3(a+k)^2(6-a-h-k) + l^2,$$

En utilisant le chemin $k = l = 0,:$, il vient $g(h,0,0) = h^3a^2(6-a-h)$ du signe de $h^3(6-a)$ qui change de signe.
ce chemin est suffisant pour conclure qu'il ya changement de signe au $v(0,0,0)$, donc les $(0,a,0)$ sont tous des points selles pour f.

Les points $(a,0,0)$ $\boxed{\text{1,75 pt}}$: . On a $Hess(f)(a,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui n'est pas inversible donc $(a,0,0)$ sont des points critiques dégénérés.
Pour déduire la nature de ces points critiques, utilisons la définition. Soient $h,\ k$ et l proche de 0. Alors, en remarquant que il vient

$$g(h,k,l) \doteq f(a+h, 0+k, 0+l) - f(a,0,0) \ = (a+h)^3k^2(6-a-h-k) + l^2,$$

$\rightsquigarrow$ Cas 1 : si $a < 0,$ alors pour $h,\ k,$ et l assez petits, $a+h < 0$ et $(6-a)-h-k > 0,$ donc $g(h,k,l) < 0,$ donc f présente un maximum local en $(a,0,0)$.

$\rightsquigarrow$ Cas 2 : si $a > 6,$ alors pour $h,\ k,$ et l assez petits, $a+h > 0$ et $(6-a)-h-k < 0,$ donc $g(h,k,l) < 0,$ donc f présente un maximum local en $(a,0,0)$.

$\rightsquigarrow$ Cas 3 : si $0 < a < 6,$ alors pour $h,\ k,$ et l assez petits, $a+h > 0$ et $(6-a)-h-k > 0,$ donc $g(h,k,l) > 0,$ donc f présente un minimum local en $(a,0,0)$.

$\rightsquigarrow$ Cas 4 : si $a = 0,$ en prenant le chemin $l = 0,\ k = h,$ et h assez petits, il vient $g(h,h,0) = h^5(6-2h)$ change de signe avec h, donc $(0,0,0)$ est un point-selle pour f.

$\rightsquigarrow$ Cas 5 : si $a = 6,$ en prenant le chemin $l = 0,\ k = h,$ et h assez petits, il vient $g(h,h,0) = -2(6+h)^3h^3,$ puisque dans ce cas $6+h > 0,$ alors, $g(h,h,0)$ change de signe aevc h, donc $(6,0,0)$ est un point-selle pour f.

2) **i**) $\boxed{\text{1 pt}}$En remplaçant z par 1, et y par x , on en déduit que

$\big((a,b,c)$ est un extremum de f sur $A\big) \Leftrightarrow \big(b = a$ et $c = 1$ où a est un extremum de $\psi(x) \doteq -2x^6 + 6x^5 +$

Par ailleurs, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi'(x) = -12x^5 + 30x^4 = -6x^4(-2x+5),$ donc

$$\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{2}.$$

On a le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x^4		$+$		$+$		$+$	
$-2x+5$		$+$		$+$		$-$	
$\psi'(x)$		$+$		$+$		$-$	
ψ		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Il est clair que h admet un maximum local en $\frac{5}{2}$. Par contre pour x proche de $0,$ $\psi(x) - \psi(0) = x^5(-2x+6)$ change de signe donc le point critique 0 est un point-selle pour $\psi.$

On en déduit que f admet un seul extremum local sur $A,$ qui un mimimum local atteint en $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right).$

Autrement. On peut obtenir le même résultat en utilisant ψ'' pour montrer que $\frac{5}{2}$ est un point minimum de $\psi,$ et 0 est un point d'inflexion de $\psi.$

ii) $\boxed{\text{1 pt}}$ Posons $\varphi_1(x,y,z) = x - y$ et $\varphi_2(x,y,z) = z - 1.$ On a $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla\varphi_1(x,y,) = (1,-1,0) \neq (0,0,0),$ donc $\left\{\nabla\varphi_1(x,y,z),\ \nabla\varphi_2(x,y,z)\right\} = \left\{ {}^t(1,-1,0),\ {}^t(0,0,1)\right\}$ est toujours libre (pas de points douteux). Donc, on peut utiliser le théorème de Lagrange avec le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) \doteq f(x,y) + \lambda_1\varphi_1(x,y) + \lambda_2\varphi_2(x,y).$$

Exercice 2 (**5 points**) : 1) Utilisons les CP φ :

$$\boxed{0{,}25\text{ pt}}\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ |\det(J\varphi)(r,\theta)| = r. \end{cases} \boxed{0{,}25\text{ pt}}$$

Soit D'_a le transformé de $\overset{o}{D}_a$ par φ, on a (méthode algébrique):

$$(x,y,z) \in \overset{o}{D}_a \iff \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x^2+y^2 < a^2 \end{cases} \overset{\text{CP}}{\iff} \begin{cases} r\cos\theta > 0 \\ r\sin\theta > 0 \\ r^2 < a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 < r < a \end{cases}$$

On obtient donc

$$D'_a = \left\{ (r,\theta) \in]0,2\pi[\times\mathbb{R} \,/\, 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2},\ 0 < r < a \right\} \boxed{1{,}25\text{ pt}}$$

Donc d'après le théoréme de changement de variables $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$ on a:

$$I = \iint_{D'_a} (\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta).\,rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta)drd\theta \boxed{0{,}5\text{ pt}}$$

à variables séparées sur un pavé $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$, on a alors

$$I = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} + \cos\theta\sin\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{8}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \boxed{0{,}5\text{ pt}},$$

2) Comme

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \le z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ ,\ x^2+y^2 \le z^2 \right\}.$$

Appliquons Fubini2 puisque Ω est sous la forme voulue donc:

$$J = \int_0^1 z \iint_{D_z} (x^2+xy)dxdydz \,/\, D_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le z^2 \right\}, \boxed{1\text{ pt}}$$

Utilisons la question 1,

$$J = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\int_0^1 z^5 dz = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+1\right).\left[\frac{z^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{48}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \boxed{0{,}5\text{ pt}}.$$

Exercice 3 (**6 points**) :

1) Remarquons d'abord que $1+xt>0$ et $1+t^2>0$ pour tout $(t,x)\in\Delta \doteq [0,1]\times]-1,+\infty[$ $\boxed{\text{0,5 pt}}$. Ainsi, F est donnée par une intégrale paramétrée propre $\boxed{\text{0,5 pt}}$.

Posons $f(t,x)=\dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$, alors f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ $\boxed{\text{0,5 pt}}$ (car c'est la composition et le rapport de fonctions C^1). Donc, d'après théorème de conservation de la dérivabilité pour les intégrales paramétrées propre, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ $\boxed{\text{0,5 pt}}$. De plus,

$$F'(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt=\int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}dt \ \boxed{\text{0,5 pt}}.$$

2) On a

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{(1+x^2)}\int_0^1\left(-\frac{x}{(1+xt)}+\frac{x}{(1+t^2)}+\frac{t}{(1+t^2)}\right)dt\\
&= \frac{1}{(1+x^2)}\Big[-\ln(1+xt)+x\arctan(t)+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_{t=0}^{t=1}\\
&= \frac{1}{(1+x^2)}\left(-\ln(1+x)+x\arctan(1)+\frac{1}{2}\ln(2)\right)\\
&= \frac{1}{(1+x^2)}\left(-\ln(1+x)+x\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}\right) \ \boxed{\text{1 pt}}.
\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x F'(s)ds \ \boxed{\text{0,5 pt}} = -\int_0^x \frac{\ln(1+s)}{(1+s^2)}ds+\frac{\pi}{4}\int_0^x \frac{s}{(1+s^2)}ds+\frac{\ln(2)}{2}\int_0^x\frac{1}{(1+s^2)}ds\\
&= -\int_0^x \frac{\ln(1+s)}{(1+s^2)}ds+\frac{\pi}{8}\ln(1+x^2)+\frac{\ln(2)}{2}\arctan(x) \ \boxed{\text{0,5 pt}}.
\end{aligned}$$

4) En particulier, F est continue en 1 $\boxed{\text{0,5 pt}}$, donc

$$\begin{aligned}
F(1) &= \lim_{x\to 1}\left(-\int_0^x \frac{\ln(1+s)}{(1+s^2)}ds+\frac{\pi}{8}\ln(1+x^2)+\frac{\ln(2)}{2}\arctan(x)\right)\\
\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{(1+s^2)}ds &= -\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{(1+s^2)}ds+\frac{\pi}{8}\ln(2)+\frac{\ln(2)}{2}\arctan(1) \ \boxed{\text{0,5 pt}}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
I &= -I+\frac{\pi}{8}\ln(2)+\frac{\pi\ln(2)}{8}\\
\Rightarrow I &= \frac{\pi}{8}\ln(2) \ \boxed{\text{0,5 pt}}.
\end{aligned}$$