Exercice 1 : (05 pts)
Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E définie par :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

1- Donner la matrice A associée à f relativement à la base B.
Solution :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2- Déterminer les sous-espaces propres de f.
Solution : Calculons le polynôme caractéristique de f.

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-X & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1-X & 1 & \cdots & 1 \\ n+1-X & 2-X & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1-X & 1 & \cdots & 2-X \end{vmatrix},$$

où nous avons remplacé la première colonne par la somme de toutes les colonnes. Maintenant notons par L_i, pour $1 \leq i \leq n$, les lignes du derniers déterminant et remplaçons L_i par $L_i - L_1$ pour $2 \leq i \leq n$. On obtient :

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} n+1-X & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (n+1-X)(1-X)^{n-1}.$$

D'où $\mathrm{Spec}(f) = \{1_{(n-1)}, n+1\}$.
Calculons maintenant l'espace propre associé à 1. Pour cela, posons $g = f - \mathrm{Id}_E$ et échelonnons la matrice $A - I_n$ dont les colonnes sont données par $g(e_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

$$A - I_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où nous avons remplacé $g(e_i)$ par $g(e_i) - g(e_1) = g(e_i - e_1) = 0$ pour $2 \leq i \leq n$. On en déduit que $\mathrm{rg}(A - I_n) = 1$ et donc $\dim E_1 = n-1$ et $E_1 = < e_2 - e_1, e_3 - e_1, \dots, e_n - e_1 >$.
Posons maintenant $h = f - (n+1)\mathrm{Id}_E$ et regardons la matrice $A - (n+1)I_n$ dont les colonnes sont données par $h(e_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

$$A - (n+1)I_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où nous avons remplacé $h(e_n)$ par $h(e_1)+h(e_2)+\cdots+h(e_n) = h(e_1+e_2+\cdots+e_n) = 0$. Donc le vecteur "non nul" $e_1+e_2+\cdots+e_n \in E_{n+1}$. Puisque $n+1$ est une valeur propre simple de f, alors $\dim E_{n+1} = 1$. On en déduit que $E_{n+1} =< e_1 + e_2 + \cdots + e_n >$.

3- En déduire que f est diagonalisable.
Solution : f diagonalisable car

$$\dim E_1 + \dim E_{n+1} = n = \dim E.$$

4- Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.
Solution :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

5- Calculer le déterminant de f. L'endomorphisme f est-il inversible ?
Solution : On sait que le déterminant de f est le produit de toutes ses valeurs propres, donc $\det f = n+1$. Puisque $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $\det f \neq 0$, on en déduit que f est inversible.

Exercice 2 : (10 pts)
Soit f l'endomorphime de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1- Sans calculer le polynôme caractéristique de A, montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
Solution : Pour montrer que λ est une valeur propre de A on peut montrer, par exemple, que $\det(A - \lambda I_4) = 0$ ou que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_4) < 4$. Posons $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ et échelonnons la matrice $A - I_4$ dont les colonnes sont données par $g(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 4$.

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où le vecteur nul est donné par $g(e_1) - g(e_2)$. On en déduit que $\operatorname{rg}(A - I_4) = 3$ et par conséquent 1 est une valeur propre de A.
Posons maintenant $h = f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ et échelonnons la matrice $A - 2I_4$ dont les colonnes sont données par $h(e_i)$ pour $1 \leq i \leq 4$.

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où le vecteur nul est donné par $h(e_1) - h(e_2) + h(e_3)$. On en déduit que $\operatorname{rg}(A - 2I_4) = 3$ et par conséquent 2 est une valeur propre de A.

2- Déterminer les vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1 et 2.
Solution : D'après l'échelonnement précédent, on a

$$E_1 =< (1,-1,0,0) > \quad \text{et} \quad E_2 =< (1,-1,1,0) > .$$

3- Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. Trouver des vecteurs v et w de $\mathbb{R}^4$ tels que $f(v) = u + 2v$ et $f(w) = v + 2w$.
Solution : Posons $u = (1,-1,1,0)$ et $v = (x,y,z,t)$, alors

$$f(v) = u + 2v \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & & & + & z & - & t & = & 1 \\ -x & - & 2y & - & z & - & 3t & = & -1 \\ x & + & y & & & + & 3t & = & 1 \\ x & + & y & & & + & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions sont $\{(x,-2-x,2+x,1)|x \in \mathbb{R}\}$. On peut prendre $v = (-1,-1,1,1)$.
Posons maintenant $w = (x,y,z,t)$, alors

$$f(w) = v + 2w \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & & & + & z & - & t & = & -1 \\ -x & - & 2y & - & z & - & 3t & = & -1 \\ x & + & y & & & + & 3t & = & 1 \\ x & + & y & & & + & 2t & = & 1 \end{array}\right.$$

Les solutions sont $\{(1+z,-z,z,0)|z \in \mathbb{R}\}$. On peut prendre $w = (1,0,0,0)$.

4- Soit e un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1. Montrer que $B = (e,u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Solution : D'après l'échelonnement dans la question **1**, on peut prendre $e = (1,-1,0,0)$.
Pour montrer que B est une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer qu'elle est libre en échelonnant :

$$\begin{array}{cccc} e & u & v & w \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} e & \overbrace{u-e}^{u'} & \overbrace{v+e}^{v'} & \overbrace{w-e}^{w'} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc} e & v' & u' & 2w'+v'-u' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

D'où B est libre et puisque $\mathrm{card}(B) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, alors B est une base de $\mathbb{R}^4$.

5- Donner la matrice associée à f relativement à la base B.
Solution : On sais que $f(e) = e, f(u) = 2u, f(v) = u + 2v$ et $f(w) = v + 2w$, d'où

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6- En déduire que A n'est pas diagonalisable.
Solution : D'après la question précédente, il est évident que $P_A(X) = (1-X)(2-X)^3$ et A n'est pas diagonalisable car 2 est une valeur propre de multiplicité 3 et on a vu, d'après la question **2** que $\dim E_2 = 1$.

7- Notons par M la matrice associée à f relativement à la base B.

a- Décomposer M en somme d'une matrice Δ diagonale et d'une matrice N nilpotente. (Rappelons qu'une matrice S est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ tel que $S^m = 0$)

Solution : Posons

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien Δ diagonale, N nilpotente et $M = \Delta + N$.

b- Calculer M^n pour n entier naturel assez grand.

Solution : On a

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où Δ et N commutent, on peut donc utiliser le binôme de Newton.
Soit $n \geq 3$, on a

$$M^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k \Delta^{n-k} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \Delta^{n-2}.$$

On a

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

$$N\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^2\Delta^{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : (05 pts)
Soient $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $C = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = M_C(f)$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire A^3.
Solution : $P_A(X) = -X^3$.
D'après le Théorème de Cayley-Hamilton on a $P_A(A) = 0$, on en déduit que $A^3 = 0$.

2- Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$. ($f^2 = f \circ f$)
Solution : Raisonnons par l'absurde en supposant que : $\forall u \in \mathbb{R}^3 : f^2(u) = 0$ donc $f^2 \equiv 0$, i.e., $A^2 = 0$ mais un simple calcul montre que $A^2 \neq 0$ d'où une contradiction.

3- Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$. Montrer que $B = (f^2(u), f(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Solution : Puisque $\mathrm{card}(B) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que B est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u = 0. \tag{1}$$

En appliquant f à gauche et à droite de l'égalité (1), on obtient

$$\beta f^2(u) + \gamma f(u) = 0. \quad (\text{Car } f^3(u) = 0 \text{ puisque } A^3 = 0) \tag{2}$$

En appliquant f à gauche et à droite de l'égalité (2), on obtient

$$\gamma f^2(u) = 0. \tag{3}$$

Puisque par hypothèse $f^2(u) \neq 0$, on en déduit que $\gamma = 0$ que l'on remplace dans (2), ce qui nous donne $\beta = 0$. Remplaçons maintenant $\gamma = \beta = 0$ dans (1), on en déduit que $\alpha = 0$ et donc B est libre.

4- Donner $M_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.
Solution :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$