Rappel

Trasformée de Fourier :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx}\, dt$$

La transformée inverse de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\, e^{itx}\, dx$$

$$= \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est cont} \\ \dfrac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} & \text{si } f \text{ est discont en } t_0. \end{cases}$$

Transformée de Fourier en Sinus et en Cosinus : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fct absolument intégrable

- Transf de Fourier en cosinus : $\hat{f}_c(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(tx)\, dt$

- Transf inverse de Fourier en cosinus : $f(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(x) \cos(tx)\, dx$

- Transformée de Fourier en sinus : $\hat{f}_s(x) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\;2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\cancel{-\infty}\;0}^{+\infty} f(t)\sin(tx)\,dt$

- Transformée inverse de Fourier en sinus : $f(t) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\;2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\cancel{-\infty}\;0}^{+\infty} \hat{f}_s(x)\sin(tx)\,dx$

- Si f est une fct paire, sa transf de Fourier coinside avec sa transf en cosinus

- Si f est une fct impaire, sa transf de Fourier coinside avec sa transf en sinus.

Propriétés :

① Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fct intégrable.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{\alpha \to \pm\infty} \int_a^b f(t)\cos(\alpha t)\,dt = \lim\limits_{\alpha \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)\,dt$

$= 0$

② Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fct loc et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors :

- $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx}\,dt$ converge normalement

- $\hat{f}$ est bornée.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \hat{f}(x) = 0$

Notations :

- $\mathcal{E}$: l'ensemble des fonctions localement et absolument intégrable

$$\mathcal{E} = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : f \in loc(\mathbb{R}) , \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \ cv \right\}$$

- $\mathcal{B} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \right.$

- D : opérateur de dérivation : $Df = f'$

- P : opérateur défini dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par $(Pf)(x) = x f(x)$

- $\hat{f}(x) = \mathcal{F}(f)(x)$

Derivée de la transformée de Fourier :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fct qui vérifie :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{E} \\ f \text{ continue} \\ Pf \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\widehat{Pf} = i D \hat{f}$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(x f(x)) = i\, \mathcal{F}'(f)(x)$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}'(x) = \mathcal{F}'(f)(x) = -i\, \mathcal{F}(x f(x))$$

Transformée de Fourier de la dérivée :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fct qui vérifie

$$\left.\begin{cases} f \in \mathcal{E} \\ f \in C^1(\mathbb{R}) \\ Df \in \mathcal{E} \end{cases}\right\} \text{ Alors } \begin{cases} f \in \mathcal{B} : \quad i P\hat{f} = \widehat{Df} \\ \quad \Leftrightarrow i x \hat{f}(x) = \mathcal{F}(f')(x) \end{cases}$$

2

Propriétés de la transformée de Fourier :

- Linéarité : $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f)(x) + \beta \mathcal{F}(\ )(x)$

  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- TF de la translation :

  $\alpha \in \mathbb{R}$, On note $f_\alpha(x) = f(x-\alpha)$, Si $f \in \mathcal{E}$

  $\mathcal{F}(f_\alpha)(x) = e^{-i\alpha x} \mathcal{F}(f)(x)$

- TF de l'homothétie :

  $k > 0$, on note $f_k(x) = f(kx)$

  $\mathcal{F}(f_k)(x) = \frac{1}{k} \mathcal{F}(f)\left(\frac{x}{k}\right)$.

- TF de produit de convolution :

  $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fct intg sur $\mathbb{R}$

  $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx$

  $\mathcal{F}(f*g)(x) = (\widehat{f*g})(x) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(x) . \hat{g}(x)$

- Égalité de Parseval :

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$$