Exercice : pour $m \in \mathbb{R}$, Soient :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 1+m \\ -m \\ m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1/ Déterminer les valeurs propres de A_m.

2/ Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est diagonalisable ? Diagonaliser A_0.

3/ Déduire que le système : $A_m X = B_m$ est de Cramer.

4/ Calculer A_0^{-1}, et déduire une solution du système

$$A_0 X = B_0$$

(A_0^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan)

Corrigé de l'exercice :

1/ $P_{A_m}(\lambda) = \text{Det}(A_m - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 1+m-\lambda & 1+m & 1 \\ -m & -m-\lambda & -1 \\ m & m-1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1+m-\lambda & 1+m & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ m & m-1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1+m-\lambda & m & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \\ m & m-1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\left[(1+m-\lambda)(m-1+\lambda) - m^2\right]$$

$$= (1+\lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda - 1)$$

$$P_A(\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda-1)^2$$

Donc A_m possède deux valeurs propres :

$\lambda_1 = -1$ v.p simple et $\lambda_2 = 1$ v.p double.

2/ A_m est diagonalisable si $\dim E_{\lambda_2} = 2$

$E_{\lambda_2} = \ker(A_m - \lambda_2 I)$.

$$(A_m - \lambda_2 I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ -m & -m-1 & -1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx - (m+1)y - z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + my = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(x+y) = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \text{---} (*)$$

On distingue 2 cas :

- Pour $m \neq 0$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow x = -y = z$

  et dans ce cas $\dim E_{\lambda_2} = 1$

- Pour $m = 0$: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow y = -z \wedge x \in \mathbb{R}$

  et dans ce cas $E_{\lambda_2} = \{(x, y, -y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$

$E_{\lambda_2} = \text{vect}\{(1,0,0), (0,1,-1)\}$ et $\dim E_{\lambda_2} = 2$

Conclusion : A_m est diagonalisable pour $m = 0$

Autre méthode :

on sait que : $\dim E_{\lambda_2} + rg(A_m - \lambda_2 I) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Donc pour déterminer les valeurs de m pour que A_m soit diagonalisable, il suffit de déterminer m tel que $rg(A_m - \lambda_2 I) = 1$

$$rg(A_m - \lambda_2 I) = rg(A_m - I) = rg\begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ -m & -m-1 & -1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans $(A_m - I)$ on voit que $L_2 = -L_1$,

Donc $rg(A_m - I) = rg\begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix}$

pour que le $rg\begin{pmatrix} m & 1+m & 1 \\ m & m-1 & -1 \end{pmatrix} = 1$, il faut que le déterminant de tout matrice d'ordre 2 extraite de $(A_m - I)$ est nul.

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

On a $(A_0 - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $rg(A_0 - I) = 1$.

· Diagonalisation de A_0 :

cherchons $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et une matrice de passage
$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

tq : $M(f)_B = P^{-1} A_0 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

pour v_1, v_2, on prend : $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1)$

$E_{\lambda_1} = \ker(A_0 + I)$

$(A_0+I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = -x$

$E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(-1, 1, 1)\}$ soit $v_3 = (-1, 1, 1)$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1} A_0 = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3/ Le système $A_m X = B_m$ est de Cramer, on a :

$\text{Det } A_m = P_{A_m}(0) = -1 \neq 0$.

ou bien : $\text{Det } A_m = (\lambda_1)(\lambda_2) = -1 \neq 0$

4/ $(A_0|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_3 \leftarrow -L_3$, $L_2 \leftarrow -L_2$

$(A_0|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$(A_0|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$(A_0|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ Donc $A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

$A_0 Y = B_0 \iff X = A_0^{-1} B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $(1,0,0)$ est une solution du système : $A_0 Y = B_0$.