Exercice 1 : (05 pts)

Soient K un corps commutatif, E un K-e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et

$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E définie par :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

1- Donner la matrice A associée à f relativement à la base B
2- Déterminer les sous-espaces propres de f.
3- En déduire que f est diagonalisable.
4- Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}.A.P$
5- Calculer le déterminant de f. L'endomorphisme f est-il inversible ?

Exercice 2 : (10 pts)

Soit f l'endomorphime de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1- Sans calculer le polynôme caractéristique de A, montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
2- Déterminer les vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1 et 2
3- Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. Trouver des vecteurs v et w de R 4 tels que *f(v) = u + 2v* et *f(w) = v + 2w*.
4- - Soit e un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1. Montrer que B = (e, u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^4$
5- Donner la matrice associée à f relativement à la base B.
6- En déduire que A n'est pas diagonalisable
7- Notons par M la matrice associée à f relativement à la base B.
    a. Décomposer M en somme d'une matrice Δ diagonale et d'une matrice N nilpotente. (Rappelons qu'une matrice S est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $S^m = 0$)
    b. Calculer M^n pour n entier naturel assez grand.

Exercice 3 : (05 pts)

Soient $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $C = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de R et $A = M_C(f)$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire A^3.

2- Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$. ($f^2 = f \circ f$)

3- Soit $u \in R^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$. Montrer que $B = (f^2(u), f(u), u)$ est une base de R^3.

4- Donner $M_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.