INI.2006/2007 Math2. 2I

Durée: 2h

EMD2 Mars 2007.

DOCUMENTS INTERDITS.

Exercice 1: (6,5 points: 1,5+ 3+ 2)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ y \leq x^2 - 2x + 2,\ y \geq -x\}$.

1) Donner une représentation graphique de D.

2) Intervertir l'ordre d'intégration dans le calcul de $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (où f est une fonction intégrable sur D).

3) Calculer $\iint\limits_D xdxdy$.

Exercice 2:(6,5 points: 1,5+ 2+ 1,5+ 1,5)

Soit le domaine Ω limité par les surfaces d'équations:

$$x^2 + y^2 = 1;\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ z = 3 - (x^2 + y^2)$$

1) Représenter graphiquement le domaine Ω.

2) Soient $I = \iiint\limits_\Omega [(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4)]dxdydz$ et $J = \iiint\limits_\Omega \left[(x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2\right]dxdydz$.

a) Calculer I.

b) Déduire la valeur de J.

3) Soit le domaine $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \Omega / 0 \leq z \leq 1\}$, donner la méthode de calcul de $\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz$ où f est une fonction intégrable sur Ω, en utilisant:

a) Le théoréme2 de Fubini.

ou bien

b) Les coordonnées sphériques.

Attention: Pour la question 3): choisir a) ou b).

Exercice 3:(7 points: 3+ 4)

1) Etudier la nature de l'intégrale suivante selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx.$$

2) Donner la nature (convergence absolue, semi-convergence) de l'intégrale suivante:

$$\int_e^{+\infty} \log\left(1 + \frac{\sin x}{x \log x}\right) dx.$$

Bon courage!