ESI, 2CPI | **Corrigé du Contrôle Intermédiare** | **Juillet 2021**

Analyse mathématique 4 | **Durée : 2 heures**

- Les documents, les calculatrices et les téléphones sont interdits.

EXERCICE 1 (0,5+1+0,5+3) :

Partie A : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et d'ordre ρ exponentiel à l'infini. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))(x) = \mathcal{L}(f(t))(x-\alpha), \forall x > \rho + \alpha.$$

Partie B :

1) Calculer $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}\right)$.

2) Trouver les constantes a, b, c et d tel que

$$\frac{x-1}{(x^2-2x+2)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

3) Résoudre

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos t, \quad t \geq 0, \\ y'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

.

Corrigé :

Partie A : On a

$$\boxed{0{,}5\text{pt}}\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-xt} dt \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(x-\alpha)t} dt = \mathcal{L}(f(t))(x-\alpha), \forall x - \alpha > \rho. \text{ CQFM}$$

Partie B :

1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1}{x^2-2x+2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1}{(x-1)^2+1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+1} + \frac{2}{(x-1)^2+1}\right) \\ &= e^t \cos t + 2e^t \sin t \quad \boxed{1\text{pt}}. \end{aligned}$$

2) On trouve :

$$\boxed{0{,}5\text{pt}}\ \frac{x-1}{(x^2-2x+2)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{5}(x+1)}{(x^2-2x+2)} - \frac{\frac{1}{5}(x+3)}{(x^2+1)}.$$

3) Appliquons la TL à l'EDO :

$$\mathcal{L}(y''+y) = \mathcal{L}(e^t \cos t),\ y'(0) = y(0) = 0.$$

Ce qui équivaut à résoudre (après utilisation de la linéarité)

$$\boxed{\text{0,25pt}}\ \mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^t \cos t),\ y'(0) = y(0) = 0.$$

Donc, en posant $Y = \mathcal{L}(y)$, il vient

$$\underbrace{(x^2 Y - xy(0) - y'(0))}_{\boxed{\text{0,5pt}}} + Y = \frac{(x-1)}{\underbrace{(x-1)^2+1}_{\boxed{\text{0,25pt}}}}, \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow (x^2+1)Y = \frac{(x-1)}{x^2-2x+2}, \quad \forall x > 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{x-1}{(x^2-2x+2)(x^2+1)} \quad \boxed{\text{0,5pt}} \\ &= \frac{\frac{1}{5}(x+1)}{(x^2-2x+2)} - \frac{\frac{1}{5}(x+3)}{(x^2+1)} \quad \boxed{\text{0,25pt}} \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{x+1}{(x^2-2x+2)} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}\right) \quad \boxed{\text{0,5pt}} \end{aligned}$$

En appliquant la TL inverse, la linéarité et la question 1, on obtient:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y) \\ &= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x+1}{(x^2-2x+2)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{x^2+1}\right) \quad \boxed{\text{0,25pt}} \\ &= \frac{1}{5}(e^t \cos t + 2e^t \sin t - \cos t - 3\sin t),\ \forall t \geq 0 \quad \boxed{\text{0,5pt}}\,. \end{aligned}$$

EXERCICE 2 (2+1+1,75+2,75) : Soient $a > 0$, $b > 0$ et la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2a} & \text{si} \quad t \in [-2a, 2a], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [-2b, 2b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer $\mathcal{F}(f)$.

2) Sachant que $1 - \cos(2ax) = 2\sin^2(ax)$, déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4} dx.$

3) Calculer $\mathcal{F}(g * g)$.

4) Prenons $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$. Sachant que $g * g$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, déduire une expression explicite de $g * g$ à l'aide de celle de f.

Corrigé :

1) Calcul de $\mathcal{F}(f)$: f est paire et on a $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\boxed{0{,}5\text{pt}}$. En effet on a

$\rightsquigarrow$ f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = 2 \int_0^{+\infty} |f(t)| dt = 2 \int_0^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right) dt \in \mathbb{R}$ qui est convergente.

Alors, $\mathcal{F}(f)$ est bien définie et

$$\mathcal{F}(f)(x) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(xt) dt$$

→ Pour $x \neq 0$,

$$\mathcal{F}(f)(x) = 2 \int_0^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right) \cos(xt) dt \qquad \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

$$= 2\left[\left(1 - \frac{t}{2a}\right) \frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{2a} + \frac{1}{ax} \int_{à}^{2a} \sin(xt) dt \ \boxed{0{,}5\text{pt}} \text{(après une IPP)}$$

$$= \frac{1}{ax} \int_0^{2a} \sin(xt) dt = \frac{1}{ax}\left[-\frac{\cos(xt)}{x}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{ax}\left(-\frac{\cos(2ax)}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{ax^2}(1 - \cos(2ax)). \ \boxed{0{,}5\text{pt}}$$

→ Pour $x = 0$,

$$\mathcal{F}(f)(0) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right) dt$$

$$= 2\left[t - \frac{t^2}{4a}\right]_0^{2a} = 2a. \ \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax^2}(1 - \cos(2ax)) \text{ si } x \neq 0, \\ 2a \quad \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

2) Déduction de la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx$: On a

→ f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,

→ $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$ converge $\boxed{0{,}25\text{pt}}$, car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^{2a} \left|1 - \frac{t}{2a}\right|^2 dx = 2\left[t - \frac{t^2}{2a} + \frac{t^3}{12a^2}\right]_0^{2a} = \frac{4}{3}a < \infty.$$

Donc, d'après la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(x)|^2 dx \ \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

Mais, puisque $1 - \cos(2ax) = 2\sin^2(ax)$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(x)|^2 dx = 2\int_0^{+\infty} \left|\frac{2\sin^2(ax)}{ax^2}\right|^2 dx$$

$$= \frac{8}{a^2}\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\right|^2 dx = \frac{8}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4} dx \ \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

Ainsi,

$$\frac{4}{3}a = \frac{8}{2a^2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4} dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4} dx = \frac{1}{3}a^3\pi \ \boxed{0{,}25\text{pt}}.$$

3) Calcul de $\mathcal{F}(g)$: On a g est paire et $g \in L^1(\mathbb{R})$ $\boxed{0{,}25\text{pt}}$. Effet, on a

⇝ g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

⇝ $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = 2\int_0^{+\infty} |g(t)| dt = 2\int_0^{2b} dt \in \mathbb{R}$ qui est convergente.

Alors, $\mathcal{F}(g)$ est bien définie et $\mathcal{F}(g)(x) = 2\int_0^{2b} g(t)\cos(xt) dt$. → Pour $x \neq 0$,

$$\mathcal{F}(g)(x) = 2\int_0^{2b} \cos(xt) dt = 2\left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{2b} = 2\frac{\sin(2bx)}{x} \ \boxed{0{,}5\text{pt}}.$$

→ Pour $x = 0$, $\mathcal{F}(g)(0) = 2\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2\int_0^{2b} dt = 4b$ $\boxed{0{,}25\text{pt}}$. Ainsi,

$$\mathcal{F}(g)(x) = \begin{cases} 2\frac{\sin(2bx)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 4b & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Puisque $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $g * g \in L^1(\mathbb{R})$, $\boxed{0{,}25\text{pt}}$ alors

$$\mathcal{F}(g * g) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(g) \ \boxed{0{,}25\text{pt}} \Rightarrow \mathcal{F}(g * g)(x) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2(2bx)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 16b^2 & \text{si } x \neq 0\ . \end{cases} \quad \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

4) Prenons $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$.

$$\mathcal{F}(f)(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}\sin^2(x) \text{ si } x \neq 0, \\ 2 \quad \text{si } x \neq 0. \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{F}(g * g)(x) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2(x)}{x^2} \text{ si } x \neq 0, \\ 4 \quad \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

On remarque donc pour ces valeurs de a et b

$$\mathcal{F}(g * g)(x) = 2\mathcal{F}(f)(x) \ \boxed{0{,}5\text{pt}}.$$

Appliquons maintenant le théorème d'inversion de Fourier respectivement pour f et $g * g$.

a) Application pour f $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ (pour les conditions): On a

$\rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$

$\rightarrow f$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,

$\rightarrow \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}dx$ converge, car

$$\begin{cases} \bullet \text{ au voisinage de } +\infty, \ |\mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}| \leq \frac{2}{x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \text{ converge,} \\ \bullet \text{ au voisinage de } 0, \ \int_0^1 |\mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}|dx = \int_0^1 \mathcal{F}(f)(x)dx \text{ et } \mathcal{F}(f) \text{ continue en } 0, \end{cases}$$

donc (puisque $\mathcal{F}(f)$ est paire), $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}dx = 2\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}dx$ converge.

Ainsi, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}dx = f(t) \ \boxed{0{,}5\text{pt}}.$$

b) Application pour $g * g$ $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ (pour les conditions): On a

$\rightarrow g * g \in L^1(\mathbb{R})$

$\rightarrow g * g$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,

$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(g * g)(x)e^{ixt}dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)e^{ixt}dx$ converge, car on vient de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(g * g)(x)e^{ixt}dx$ converge.

Ainsi, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(g * g)(x)e^{ixt}dx = (g * g)(t) \ \boxed{0{,}25\text{pt}}.$$

On déduit de ce qui précède

$$(g * g)(t) = 2f(t) \ \boxed{0{,}5\text{pt}},$$

c'est à dire pour $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$, on a $(g * g)(t) = 2f(t) = \begin{cases} 2 - |t| \ \text{ si } \ t \in [-2,2], \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$

EXERCICE 3 (4.5 points) : Soit dans le plan $x \geq -1$ le domaine D limité par les courbes d'équations

$$x = -1;\; y = -x^2 + 2;\; y = -2x - 2;\; y = -2.$$

1) Représenter géométriquement le domaine D.

2) Compléter $D = D_1 \cup D_2$ (avec $Air(D_1 \cap D_2) = 0$), où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \ldots \leq x \leq \ldots,\; -2x-2 \leq y \leq -x^2+2\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 2,\; \ldots \leq y \leq \ldots\right\}.$$

3) Compléter $D = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3$ (avec $Air(D'_1 \cap D'_2) = 0$ et $Air(D'_2 \cap D'_3) = 0$), où

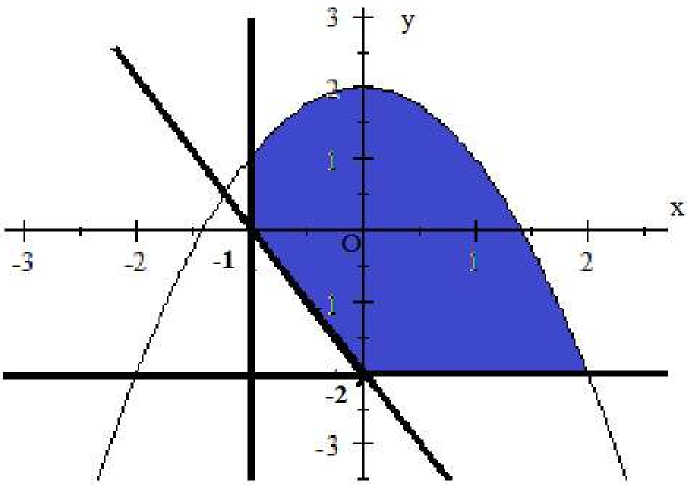
$$D'_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \leq y \leq 0,\; \ldots \leq x \leq \ldots\right\},$$
$$D'_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \ldots \leq y \leq \ldots,\; -1 \leq x \leq \sqrt{2-y}\right\},$$
$$D'_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \ldots \leq y \leq 2,\; -\sqrt{2-y} \leq x \leq \ldots\right\}.$$

4) Calculer l'aire de D.

Corrigé

1) Représentation graphique du domaine D :

$\boxed{0{,}25\text{pt}}$ pour la parabole, $\boxed{0{,}25\text{pt}}$ pour les droites, $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ pour le domaine.



2) $\boxed{0{,}25\text{pt}}$ pour chaque bonne réponse.

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \leq x \leq 0,\; -2x-2 \leq y \leq -x^2+2\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 2,\; -2 \leq y \leq -x^2+2\right\}.$$

3) $\boxed{0{,}25\text{pt}}$ pour chaque bonne réponse.

$$D'_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \leq y \leq 0,\; \frac{-1}{2}y - 1 \leq x \leq \sqrt{2-y}\right\},$$
$$D'_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq y \leq 1,\; -1 \leq x \leq \sqrt{2-y}\right\},$$
$$D'_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq y \leq 2,\; -\sqrt{2-y} \leq x \leq \sqrt{2-y}\right\}.$$

4) Aire de D :

En appliquant la première formule de Fubini (car il ya moins de calculs) et en utilisant la question 2, il vient (grâce à la propriété de l'additivité par rapport au domaine)

$$\begin{aligned}
Aire(D) &= \iint_D dxdy \quad \boxed{0{,}25\text{pt}} \\
&= \int_{-1}^{0}\int_{-2x-2}^{-x^2+2} dydx + \int_{0}^{2}\int_{-2}^{-x^2+2} dydx. \quad \boxed{0{,}25\text{pt}} \\
&= \int_{-1}^{0}(-x^2+2x+4)dx + \int_{0}^{2}(-x^4+4)dx \quad \boxed{0{,}25\text{pt}} \\
&= \left[\frac{-x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{0}^{2} = 8 \quad \boxed{0{,}25\text{pt}}.
\end{aligned}$$

EXERCICE 4 (3 points): Soit

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \le z \le 1-(x^2+y^2)\right\}.$$

Calculer $I = \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz.$

Corrigé: Utilisons le changement de variables en coordonnées cylindriques (CC)

$$\boxed{0{,}25\text{pt}} \quad \varphi : \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, & \text{avec } (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\\ z = z, \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \\ |\det(J\varphi)(r,\theta)| = r \ \boxed{0{,}25\text{pt}}. \end{cases}$$

Soit Ω' le transformé de $\overset{o}{\Omega}$ par les CC (ie par φ). On a, par la méthode algébrique,

$$(x,y,z) \in \overset{o}{\Omega} \iff x^2+y^2 < z < 1-(x^2+y^2) \overset{\text{CC}}{\iff} r^2 < z < 1-r^2$$

$$\iff \begin{cases} r^2 < z < 1-r^2, \\ r^2 < 1-r^2, \end{cases} \iff \begin{cases} r^2 < z < 1-r^2, \\ 2r^2-1 < 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r^2 < z < 1-r^2, \\ 0 < r < \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $$\Omega' = \left\{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\times \mathbb{R} \,/\, \underbrace{0 < \theta < 2\pi}_{\boxed{0{,}5\text{pt}}},\ \underbrace{0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\boxed{0{,}5\text{pt}}},\ \underbrace{r^2 < z < 1-r^2}_{\boxed{0{,}5\text{pt}}} \right\}.$$

Donc, d'après le théoréme de changement de variables, on a

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} z.rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r \int_{r^2}^{1-r^2} zdzdrd\theta \quad \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r\Big((1-r^2)^2 - r^4\Big)drd\theta \ \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

$$\underset{\text{séparées sur un pavé}}{\overset{\text{car à variables}}{=}} \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r(1-2r^2)dr\right) \quad \boxed{0{,}25\text{pt}}$$

$$= \frac{1}{2}.2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{2r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\Big) = \frac{\pi}{8} \ \boxed{0{,}25\text{pt}}.$$