Janvier 2016

$2^{\text{ième}}$ année CPI	**Examen final**	**ANA 3**

- Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation.
- Documents et calculatrice interdits.
- Durée de l'épreuve : 2 heures.

Partie 1:

Exercice 1 (6 points) :

Soit $F(x) = \int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{x+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)}$.

1) Trouver le domaine de définition de F.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 2 (3 points) :

En utilisant le changement de variables suivant: $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$;

résoudre dans $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ l'équation différentielle partielle: $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$.

Exercice 3 (4 points) :

Trouver les extremums de la fonction f où :

$$f(x,y) = x^2 + y^2(1+\alpha) - 2xy - 2\alpha y + \alpha$$

avec [redacted] est un paramètre réel.

Bon courage

Nom:
Prénom:
Groupe:

Partie 2: **Répondre sur la double feuille**

Exercice 1 (1 point) :

Soient f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\boldsymbol{C}^1$ et $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par "$\Longrightarrow$", "$\Longleftarrow$", "$\Longleftrightarrow$", "aucune implication":

a) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(P) \neq \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}(P)$......................................$f \notin \boldsymbol{C}^5(\mathbb{R}^2)$.

b) $Jf(P) = 0_{\mathbb{R}^2}$ ....P est un point critique.

c) P est un point critique......................................f admet un extremum en P.

d) $f(a, y)$ est dérivable en b ....$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe en P.

Exercice 2 (6 points) :

Soit la fonction numérique réelle f donnée par:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
4) f est elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Un corrigé:

Partie 1:

Exercice 1:

Soit $f(t,x)=\dfrac{1}{t^{x+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)}\geq 0$, est définie sur $]1,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$ ($t^{x+1}=e^{(x+1)\log t}$).

1) Voyons la convergence de l'intégrale:

Au $v\left(1^+\right)$: $f(t,x)\underset{1^+}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{(t+1)(t-1)}}\underset{1^+}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(t-1)}}$ et $\displaystyle\int_1^{c>1}\frac{1}{\sqrt{(t-1)}}dt$ converge (IR, $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$) donc $\displaystyle\int_1^{c>1}f(t,x)dt$ converge d'après le critère d'équivalence.

Au $v(+\infty)$: $f(t,x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{x+2}}$ et $\displaystyle\int_{c>1}^{+\infty}\frac{1}{t^{x+2}}dt$ converge ssi $x+2>1$, (IR), ie $x>-1$) donc $\displaystyle\int_c^{+\infty}f(t,x)dt$ converge ssi $x>-1$ d'après le critère d'équivalence.

Conclusion : $D_F=]-1,+\infty[$.

2) a) Montrons que F est continue sur $]-1,+\infty[$.

on applique le théorème de conservation de la continuité sur $\Delta=]1,+\infty[\times[\alpha,+\infty[$, $\alpha>-1$:

$\rightsquigarrow$ f est continue par morceaux selon t car composée, produit et rapport de fonctions continues.

$\rightsquigarrow$ f est continue selon x car composée, produit et rapport de fonctions continues.

$\rightsquigarrow$ $|f(t,x)|\leq\dfrac{1}{t^{\alpha+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)}=\varphi(t)$, $\forall x\in[\alpha,+\infty[\subset]-1,+\infty[$ et $\forall t\in]1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt$ converge d'après la question précedente car elle est égale à $F(\alpha)$ et on a prouvé son existence,

ie que l'intégrale vérifie la CD sur tout $[\alpha,+\infty[\subset]-1,+\infty[$. Donc F est continue sur tout $[\alpha,+\infty[\subset]-1,+\infty[$.

Conclusion : F est continue sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\dfrac{-\log t}{t^{x+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)}\leq 0$; on applique le théorème de conservation de la dérivabilité sur $\Delta=]1,+\infty[\times[\alpha,+\infty[$, $\alpha>-1$:

$\rightsquigarrow$ f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues par morceaux selon t car composée, produit et rapport de fonctions continues.

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue selon x car composée, produit et rapport de fonctions con-

tinues.
$\rightsquigarrow \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \dfrac{\log t}{t^{x+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)} \leq \dfrac{\log t}{t^{\alpha+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)} = \psi(t),\ \forall x \in [\alpha,+\infty[\subset\ ]-1,+\infty[$ et $\forall t \in]1,+\infty[$,

montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)dt$ converge:

Au $v(1^+)$: $\psi(t) \underset{1^+}{\sim} \dfrac{\log t}{\sqrt{2}\sqrt{(t-1)}} = \dfrac{\log(1+(t-1))}{\sqrt{2}\sqrt{(t-1)}} \underset{1^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{(t-1)}}{\sqrt{2}}$ et $\displaystyle\int_1^{c>1} \sqrt{(t-1)}dt$ converge (IR, $\alpha = -\dfrac{1}{2} < 1$ ou bien c'est un faux problème, sa limite est nulle)

donc $\displaystyle\int_1^{c>1} \psi(t)dt$ converge d'après le critère d'équivalence.

Au $v(+\infty)$: $\psi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\log t}{t^{\alpha+2}}$ et $\displaystyle\int_{c>1}^{+\infty} \dfrac{\log t}{t^{\alpha+2}}dt$ converge (IB, $\alpha+2>1$) donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} \psi(t)dt$ converge d'après le critère d'équivalence,

Donc on a bien la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi(t)dt$ ie que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie la CD sur tout $[\alpha,+\infty[\subset]-1,+\infty[$. Donc F est dérivable sur tout $[\alpha,+\infty[\subset\ ]-1,+\infty[$.

Conclusion : F est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

De plus: $F'(x) = -\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\log t}{t^{x+1}\left(\sqrt{t^2-1}\right)}dt,$

Exercice 2:

Soit $U = \mathbb{R}^2$

★ Le changement de variables : $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u + v \end{cases}$, posons:
$g\,:\,(x,y) \to (u,v) = g(x,y) = (x, y-x) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, soit $\varphi = g^{-1}$ sa fonction inverse.

★ On recherche $f \in C^1(\mathbb{U})$ donc différentiable sur U qui vérifie l'e.d.p donnée.
On posera $f(x,y) = f\left(g^{-1}(u,v)\right) = \left(f \circ g^{-1}\right)(u,v) = (f \circ \varphi)(u,v)$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{U} \ \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array}$.

★ Considérons la fonction auxiliaire : $F = f \circ \varphi \Longleftrightarrow f = F \circ g$. On est bien dans les conditions du théorème1 puisque:

$$\begin{array}{lll} g & \in & C^1(U) \text{ car } g_1 \text{ et } g_2 \text{ le sont (polynômes) donc elle est différentiable sur } U \\ f & \in & C^1(U) \text{ par hypothèse donc elle est différentiable sur } U \end{array}$$

on a donc:
$(Jf)(x,y) = (JF)(u,v) \times (Jg)(x,y)$, ceci revient à :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ce qui donne:(S) : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v} & (1)\,. \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial v} + & (2)\,. \end{cases}$

On remplace dans l'e.d.p donnée: $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u} = 1 \Longrightarrow F(u,v) = u + h(v)$ (h est une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}$ selon la variable v donc constante en u).
Conclusion: Les solutions de l'EDP sont les fonctions $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ avec $f(x,y) = x + h(y-x)$ où $h \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3:
$f(x,y) = x^2 + y^2(1+\alpha) - 2xy - 2\alpha y + \alpha,\ f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ car c'est un polynôme
Recherche des points critiques:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(1+\alpha)y - 2x - 2\alpha.$

Résolvons le système:(S) : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ (1+\alpha)y - x - \alpha = 0 & (2) \end{cases}$

(1) dans (2) donne: $(1+\alpha)x - x - \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha x = \alpha$
<u>1er cas:</u> Si $\alpha \neq 0 : x = 1$, il y a donc un seul point critique $M(1,1)$.
*Nature de ce point:
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2(1+\alpha)$.
$r = 2,\ s = 2,\ t = 2(1+\alpha)$ ie $\Delta = rt - s^2 = 4(1+\alpha) - 4 = 4\alpha \neq 0$,
$\rightsquigarrow$ Si $\alpha > 0$, comme $r > 0 \Rightarrow (M, f(M))$ est un minimum.
$\rightsquigarrow$ Si $\alpha < 0$, $(M, f(M))$ n'est pas extremum.
<u>2ème cas:</u> Si $\alpha = 0$ toujours vraie donc les points $M_a(a,a)$ sont tous des points critiques.
*Nature de ces points: les dérivées secondes sont déjà calculées, $\Delta_a = 0$.
Utilisons la définition: $f(a,a) = 0$
$f(a+h_1, a+h_2) - f(a,a) = (a+h_1)^2 + (a+h_2)^2 - 2(a+h_1)(a+h_2)$
ie $f(a+h_1, a+h_2) = h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2 = (h_1-h_2)^2 \geq 0$ donc $(M_a, f(M_a))$ sont tous des minimums.

Partie 2:

Exercice 1:

Soient f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\boldsymbol{C}^1$ et $P=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Compléter les phrases suivantes par "$\Longrightarrow$", "$\Longleftarrow$", "$\Longleftrightarrow$", "aucune implication":

a) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(P)\neq\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial x^2}(P)\Longrightarrow f\notin\boldsymbol{C}^5(\mathbb{R}^2)$.

b) $Jf(P)=0_{\mathbb{R}^2}\Longrightarrow P$ est un point critique.

c) P est un point critique$\Longleftarrow f$ admet un extremum en P.

d) $f(a,y)$ est dérivable en $b\Longleftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe en P.

Exercice 2:

Posons $\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=0\right\}=\{(a,0)\ /\ a\in\mathbb{R}\}$

1) Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

★ Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$: f est continue car c'est la composée, produit et rapport de fonctions continues (sinus et polynomes).

★ Sur Δ : Soit $(a,0)$ $a\in\mathbb{R}$. A t on $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,0)}f(x,y)=f(a,0)=0$?

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,0)}f(x,y):\begin{cases}\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,0)\\ y\neq0}}y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)=0=f(a,0).\ (\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,0)}y^2=0\text{ et }\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right|\leq1).\\ \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(a,0)\\ y=0}}0=0=f(a,0).\end{cases}$$

Donc f est continue sur Δ.

Conclusion: f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculons (dans le cas d'existence) les dérivées partielles premières de f:

★ Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$: f est de classe C^1 (donc différentiable) car elle est la composée, produit et rapport de fonctions C^1, elle admet donc des dérivées partielles selon x et y.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

★ Sur Δ : Soit $(a,0)$ $a\in\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0)$, on a: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x,0)-f(a,0)}{x-a}=\lim_{x\longrightarrow a}\frac{0}{x-a}=0\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)=0\ \exists$.

$\rightsquigarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$, on a: $\displaystyle\lim_{\substack{y\longrightarrow0\\ y\neq0}}\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y}=\lim_{y\longrightarrow0}\frac{y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y}=\lim_{y\longrightarrow0}y\sin\left(\frac{x}{y}\right)=$ 0 donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b)=0\ \exists$.

3) Etudier la différentiabilité de f en $(a,0)$: **Par unicité**, utilisons la définition.

$$f(a+h,k)-f(a,0)=h.\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)+k.\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)+\|(h,k)\|.\varepsilon(h,k)=\sqrt{h^2+k^2}.\varepsilon(h,k)$$

$$\Longrightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \Longrightarrow \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h,k) : \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\longrightarrow(0,0)\\ k\neq 0}} \frac{k^2 \sin\left(\dfrac{a+h}{k}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \ (\bigstar) \\ \displaystyle\lim_{\substack{(h,k)\longrightarrow(0,0)\\ k=0}} 0 = 0 \end{cases}$$

$(\bigstar)$: $\displaystyle\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}.k.\sin\left(\frac{a+h}{k}\right) = 0$ ($\displaystyle\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} k.\sin\left(\frac{a+h}{k}\right) = 0$ et $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ bornée).

Donc $\displaystyle\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$.

On en déduit que f est différentiable en tout point $(a,0)$ ie sur Δ.

Conclusion: f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

4) On utilise le théorème de Scwartz, calculons les dérivées secondes (dans le cas d'existence): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) : \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{0}{x} = 0 = l_1 \ \exists$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) : \lim_{\substack{y\longrightarrow 0\\ y\neq 0}} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\longrightarrow 0\\ y\neq 0}} \frac{y\cos\left(\dfrac{0}{y}\right)}{y} = 1 = l_2 \ \exists$$

Comme $l_1 \neq l_2$ d'après le théorème de Schwartz on a que l'une des dérivées secondes au moins n'est pas continue en $(0,0)$ donc f ne peut être de classe C^2 sur tout ouvert contenant ce point, en particulier sur $\mathbb{R}^2$.