L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : **(9 pts)**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_a un endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix}.$$

1- Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la matrice M_a est-elle inversible ?

Solution : On a M_a inversible si et seulement si $rgM_a = 3$ si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq, -2$. **(1pt)**
2- Dans le cas où la matrice M_a n'est pas inversible, déterminer suivant le paramètre a une base de $\ker f_a$ et une base de $\operatorname{Im} f_a$.

Solution : Pour $a = 0$, on a :

$$M_0 = M_B(f_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

On en déduit que $((0, 1, -1))$ est une base de $\ker f_0$ et $((-1, 2, 1), (0, 0, 1))$ est une base de $\operatorname{Im} f_0$. **(0.5pt)+(0.5pt)**
De même, pour $a = -2$, on a :

$$M_{-2} = M_B(f_{-2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(0.25pt)}$$

On en déduit que $((0, 0, 1))$ est une base de $\ker f_{-2}$ et $((-1, 2, 1), (0, -1, 1))$ est une base de $\operatorname{Im} f_{-2}$. **(0.5pt)+(0.5pt)**
3- Soit $C = (v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (1, 1, 0))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
i/ Verifier que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
Solution : On a : $\text{card}C = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc C est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si C est libre si et seulement $rgC = 3$. Echelonnons donc la famille C :

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \sim & v_1 & v_2 & v_3 - v_1 + v_2 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \sim & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

d'où $rgC = 3$ et donc C est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.75pt)**

ii/ Déterminer la matrice de passage P de B vers C.

Solution : On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

iii/ Calculer P^{-1}.

Solution : On :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - e_3 \\ v_2 = -e_2 + e_3 \\ v_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}\left(-v_1 - v_2 + v_3\right) \\ e_3 = \frac{1}{2}\left(-v_1 + v_2 + v_3\right) \end{cases} \qquad \textbf{(1pt)}$$

on en déduit que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

4- En déduire :

i/ Les coordonnées du vecteur $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base C.

Solution : On a :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix},$$

on en déduit que :

$$w = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)v_1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)v_2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)v_3. \qquad \textbf{(1pt)}$$

ii/ La matrice $M_a^{'} = M_C\left(f_a\right)$.

Solution : On a:

$$\begin{aligned} M_a^{'} &= P^{-1}M_aP \qquad \textbf{(0.5pt)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - 1 & 0 & -\frac{1}{2}a - 3 \\ -\frac{1}{2}a - 2 & a & -\frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}a + 2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Exercice 2 : **(6 pts)** Les questions suivantes sont indépendantes.

1- Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

i/ Ecrire A comme somme de la matrice identité I_3 et une matrice $N \in M_3(\mathbb{R})$.

Solution : On a :

$$A = I_3 + N, \qquad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

ii/ Montrer que N est une matrice nilpotente (i.e. il existe un entier $k \geq 1$ tel que : $N^k = 0$).

Solution : On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

et

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(0.25pt)}$$

on en déduit que N est nilpotente. **(0.25pt)**

iii/ En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Puisque $NI_3 = I_3N$, on a, par le binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Puisque $A^k = 0$ pour $k \geq 2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^n &= N^0 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \qquad \textbf{(0.25pt)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda & n\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & n\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\alpha\beta & n\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n\beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 2. \qquad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier qu'en fait cette dernière formule est vraie pour $n \geq 0$. **(0.25pt)**

2- Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour toute matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice : $M \cdot^t M$ est une matrice symétrique (${}^tM$ désigne la transposée de M).

Solution : On a :

$$^t\left(M \cdot^t M\right) =^t \left({}^tM\right) \cdot^t M = M \cdot^t M,$$

d'où $M \cdot^t M$ est une matrice symétrique d'ordre n. **(0.75pt)**

3- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2 = I_n$. Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Solution : On a :

$$A^k = \begin{cases} I_n, & k \text{ pair} \\ A, & k \text{ impair} \end{cases}. \qquad \textbf{(0.75pt)}$$

4- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ecrire la matrice A comme somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.

Solution : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et supposons qu'il existe deux matrices $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = M + N$ avec ${}^tM = M$ et ${}^tN = -N$, alors on obtient:

$$\begin{cases} A = M + N \\ {}^tA =^t M +^t N \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = M + N \\ {}^tA = M - N \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} M = \frac{1}{2}\left(A +^t A\right) \\ N = \frac{1}{2}\left(A -^t A\right) \end{cases}, \qquad \textbf{(1pt)}$$

Les matrices M et N obtenues vérifient bien $A = M + N$ avec M symétrique et N antisymétrique. **(0.5pt)**