ESI
2012/2013
CP2

ANA3
Controle intermédiaire
Durée 2h

Aucun document n'est autorisé.
La table des TL est au verso de la feuille.

Exercice1 (5 points)

On pose: $F(x) = \int_0^1 f(t,x)dt$, où $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$.

1) Montrer que $DF = \mathbb{R}_+^*$.
2) Etudier la continuité de F sur DF.

$e^{-t} e^{(x-1)\log t}$

$e^{-t+(x-1\log t)}$

$= e^{t\left(-1 + \frac{(x-1)\log t}{t}\right)} = +\infty$

Exercice2 (3.5 points)

1) a) Montrer que $\mathcal{L}\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) = \frac{1}{4}\log\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$.

b) Evaluer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt$.

2) a) Calculer $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s-3}{s^2+1}\right)$.

b) Résoudre $y'' + y = t$, avec $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

$\frac{s^3 - 2s^2 + 1}{s^4 + s^2}$

Exercice 3 (5 points)

On pose $f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \le 1 \\ 0 & \text{si } |t| \succ 1 \end{cases}$.

1) Représenter la fonction f.
2) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, puis calculer $\mathcal{F}f$.
3) Appliquer la formule d'inversion de Fourier à f en tout point t de $\mathbb{R}_+$.
4) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(s)}{s^2}\cos(st)ds$, $t \in \mathbb{R}_+$.
5) Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(s)}{s^2}ds$.

Exercice 4 (1.5)

Soit la norme $\|.\|$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $\|(x,y)\| = |x| + |x-y|$.
Représenter graphiquement la boule ouverte $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

Bon Courage