Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1. (2, 2)

Question 1. On considère Γ et $\Delta \subset \Gamma$ deux ensembles de formules d'un langage propositionnel L. Soient β_1 et β_2 deux formules de L telles que :

$$\Gamma \models \beta_1 \text{ et } \Delta \models \beta_2$$

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes est (sont) valide(s) ?

P_1 : $\Gamma \cup \{\neg\beta_1\}$ satisfiable.
P_2 : $\Gamma \cup \{\neg\beta_2\}$ non satisfiable.
P_3 : $\Gamma \cup \{\neg\beta_1 \vee \neg\beta_2\}$ satisfiable.
P_4 : $\Delta \cup \{\neg\beta_1\}$ satisfiable.

Question 2. On considère Γ, $\Delta_1 \subset \Gamma$ et $\Delta_2 \subset \Gamma$ trois ensembles de formules de L et α_1 et α_2 deux formules de L telles que :

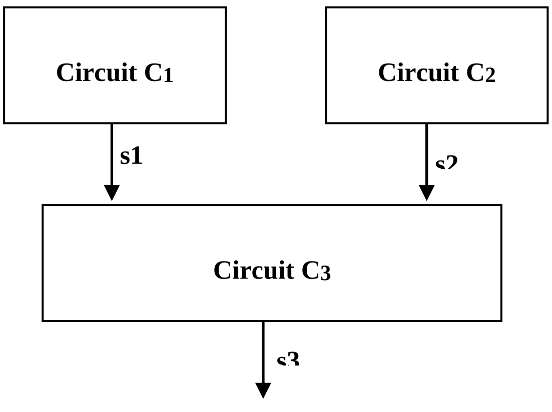
$$\Gamma \models \alpha_1 \vee \alpha_2 \text{ et } \Delta_1 \models \neg\alpha_1 \text{ et } \Delta_2 \models \neg\alpha_2$$

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes est (sont) valide(s) ?

P_1 : Γ est non satisfiable.
P_2: $\Delta_1 \cup \Delta_2$ non satisfiable.
P_3 : Δ_1 ou Δ_2 non satisfiable.
P_4 : Γ contient un sous ensemble non satisfiable.

Exercice 2. (1)

La figure ci-dessous représente deux circuits logiques C_1 et C_2 dont les sorties sont respectivement s_1 et s_2.



Question. Donner l'expression logique du circuit C_3 dont la sortie (s_3) est **V** lorsque C_1 et C_2 délivrent le même résultat et **F** lorsque C_1 et C_2 délivrent des résultats différents.

Exercice 3. (2, 2, 2, 2, 2)

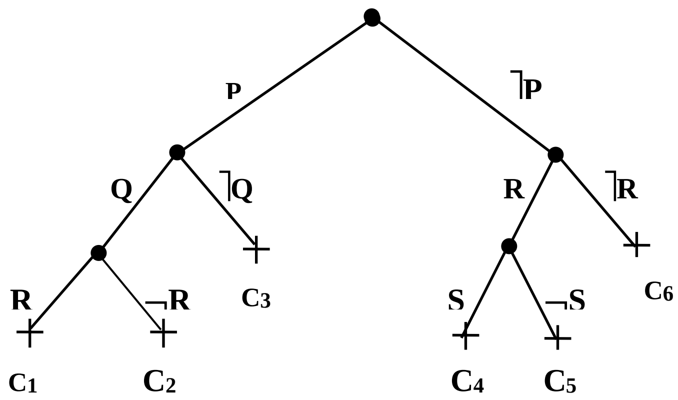
Question 1. Construire, à partir de l'arbre sémantique clos de la figure ci-dessous, un ensemble non satisfiable de clauses à **deux littéraux chacune**. On appellera S_0 cet ensemble.

Question 2. Construire, à partir de S_0 un ensemble non satisfiable de clauses S_1 tel que $S_0 \subset S_1$.

Question 3. Montrer, sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble S_0 est inconsistant.

Question 4. Montrer que l'ensemble $S_2 = \{c_1, c_2, c_4, c_6\}$ est consistant.

Question 5. Trouver une clause c telle que $S_2 \models c$.



<u>Exercice</u> 4. ((1, 1, 1) – (1) – (1))

Question 1. Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

E_1. Ceux qui trichent n'ont pas de mérite.

E_2. Le plus fort d'entre tous n'est pas le plus juste d'entre tous.

E_3. Si deux nombres ont le même successeur, alors ils sont égaux.

Question 2.

Lesquelles des expressions suivantes ne sont pas des formules :

- exp.1 $\forall x,y(P(y) \to Q(x))$
- exp.2 $P(y) \to Q(x) \to P(f(y))$
- exp.3 $\neg Q(P(z))$
- exp.4 $f(x, g(x))$

Question 3.

Soient $\beta = \forall x P(y, x) \to Q(x)$ et $t = g(x)$.

- t est-il libre pour x dans β ?
- t est-il libre pour y dans β ?

N. B. Remettre un carnet d'examen sans feuille intercalaire.

Correction

Exercice 1. (2, 2)

Question 1. On considère Γ et $\Delta \subset \Gamma$ deux ensembles de formules d'un langage propositionnel L. Soient β_1 et β_2 deux formules de L telles que :

$$\Gamma \models \beta_1 \text{ et } \Delta \models \beta_2$$

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes est (sont) valide(s) ?

- P_1 : $\Gamma \cup \{\neg\beta_1\}$ satisfiable. **(non valide)**
- P_2 : $\Gamma \cup \{\neg\beta_2\}$ non satisfiable. **(valide)**
- P_3 : $\Gamma \cup \{\neg\beta_1 \vee \neg\beta_2\}$ satisfiable. **(non valide)**
- P_4 : $\Delta \cup \{\neg\beta_1\}$ satisfiable. **(non valide)**

Question 2. On considère Γ, $\Delta_1 \subset \Gamma$ et $\Delta_2 \subset \Gamma$ trois ensembles de formules de L et α_1 et α_2 deux formules de L telles que :

$$\Gamma \models \alpha_1 \vee \alpha_2 \text{ et } \Delta_1 \models \neg\alpha_1 \text{ et } \Delta_2 \models \neg\alpha_2$$

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes est (sont) valide(s) ?

- P_1 : Γ est non satisfiable. **(valide)**
- P_2: $\Delta_1 \cup \Delta_2$ non satisfiable. **(non valide)**
- P_3 : Δ_1 ou Δ_2 non satisfiable. **(non valide)**
- P_4 : Γ contient un sous ensemble non satisfiable. **(valide)**

Exercice 2. (1)

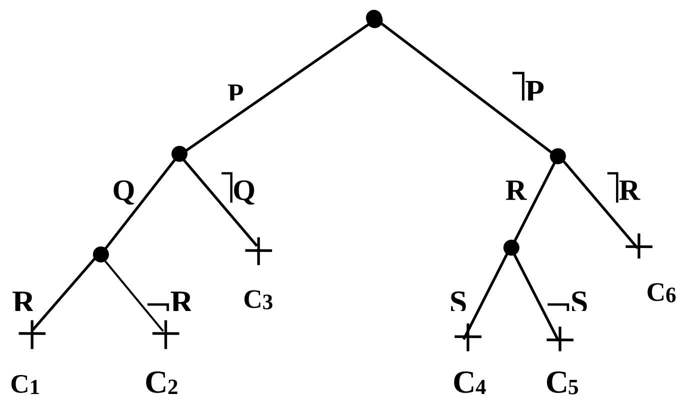
S_3 est à V si $S_1= S_2=V$ ou bien $S_1= S_2=F$.

$S_3= S_1 \leftrightarrow S_2$

Exercice 3. (2, 2, 2, 2, 2)

Question 1. Construire, à partir de l'arbre sémantique clos de la figure ci-dessous, un ensemble non satisfiable de clauses à **deux littéraux chacune**. On appellera S_0 cet ensemble.

$S_0 = \{C_1 : \neg P \vee \neg R,\ C_2 : \neg Q \vee R,\ C_3 : \neg P \vee Q,\ C_4 : P \vee \neg S,\ C_5 : \neg R \vee S,\ C_6 : P \vee R\}$



$S_1 = S_0 \cup$ {on peut ajouter une ou + clauses}

Question 3. Montrer, sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble S_0 est inconsistant.

$C_1 : \neg P \vee \neg R$
$C_2 : \neg Q \vee R$
$C_3 : \neg P \vee Q$
$C_4 : P \vee \neg S$
$C_5 : \neg R \vee S$
$C_6 : P \vee R$
$C_7 : \neg P \vee \neg Q$ res(C_1, C_2)
$C_8 : \neg P$ res(C_3, C_7)
$C_9 : P \vee \neg R$ res(C_4, C_5)
$C_{10} : P$ res(C_4, C_5)
$C_{11} : \square$ res(C_8, C_{10})

Question 4. Montrer que l'ensemble $S_2 = \{c_1, c_2, c_4, c_6\}$ est consistant.

La valuation : $\{\neg P, \neg Q, \neg S, R\}$ satisfait S_2.

Question 5. Trouver une clause c telle que $S_2 \models c$.

Prendre une clause déduite de S_2, $\neg P \vee \neg Q$ par exemple.

<u>Exercice</u> 4. ((1, 1, 1) – (1) – (1))

Question 1. Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

$T(x)$: x est un tricheur.

$M(x)$: x n'a pas de mérite.

E_1. Ceux qui trichent n'ont pas de mérite.

$$\forall x (T(x) \rightarrow \neg M(x))$$

$F(x,y)$: x est plus fort que y.

$J(x,y)$: x est plus juste que y.

E_2. Le plus fort d'entre tous n'est pas le plus juste d'entre tous.

$$\forall x\, (\forall y\, (D(x,y) \wedge F(x,y)) \rightarrow \neg \forall y J(x,y)))$$

$N(x)$: x est un nombre.

$E(x,y)$: x et y sont égaux.

$s(x)$ = au successeur de x.

E_3. Si deux nombres ont le même successeur, alors ils sont égaux.

$\forall x\, \forall y (E(s(x), s(y)) \rightarrow E(x,y))$