ESI, 2CPI	Corrigé du CF Analyse mathématique 4	Octobre 2020 Durée : 1h 30 min

Exercice 1 (3.5 points):

1) $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ Vérifier que

$$\frac{25}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{4x+3}{x^2+1} - \frac{4}{(x-2)} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

Réponses : On pose $F(x) = \dfrac{25}{(x-2)^2(x^2+1)}$. On a

$$F(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-2)^2}. \qquad ((*))$$

Détermination de A et B : En multipliant (*) par $\left(x^2+1\right)$, il vient

$$\frac{25}{(x-2)^2} = Ax + B + \left(x^2+1\right)\left(\frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-2)^2}\right).$$

en prenant $x = i$, on obtient

$$\frac{25}{(i-2)^2} = Ai + B \Longrightarrow A = 4 \quad \text{et} \quad B = 3.$$

Détermination de D : En multipliant (*) par $\left(x^2+1\right)$, il vient

$$\frac{25}{(x^2+1)} = (x-2)^2\frac{Ax+B}{x^2+1} + (x-2)\,C + D$$

en prenant $x = 2$, on obtient $D = 5$.
Détermination de C : En prenant $x = 0$ dans (*) on obtient $C = -4$.

2) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ En utilisant la TL, résoudre l'EDO suivante :

$$\begin{cases} y'''(t) - 4y''(t) + 4y'(t) = 25\cos(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = y\prime(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

Réponses : On pose $Y(x) = \mathcal{L}(y)(x)$. Alors, par application de la TL à l'EDO et par la linéarité, on obtient

$$\mathcal{L}\left(y''' - 4y'' + 4y'\right)(x) = 25\mathcal{L}(\cos)(x) \Longrightarrow \mathcal{L}(y''')(x) - 4\mathcal{L}(y'')(x) + 4\mathcal{L}(y')(x) = \mathcal{L}(\cos)(x), \ \forall x > 0.$$

Mais,
$$\begin{cases} \mathcal{L}(y')(x) = xY(x) - y(0), \\ \mathcal{L}(y'')(x) = x^2Y(x) - xy(0) - y'(0), \\ \mathcal{L}(y''')(x) = x^3Y(x) - x^2y(0) - xy'(0) - y''(0), \end{cases}$$
en tenant compte des conditions intiales et de la table des TL, il vient donc

$$x^3Y(x) - 4x^2Y(x) + 4xY(x) = \frac{25x}{x^2+1}$$

ainsi, $\left(x^3-4x^2+4x\right)Y(x)=\dfrac{25x}{x^2+1}\Longrightarrow Y(x)=25\dfrac{1}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)}.$

Puisque, $\dfrac{25}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{4x+3}{x^2+1}-\frac{4}{(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2}$, alors

$$Y(x)=\frac{4x+3}{x^2+1}-\frac{4}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}.$$

On en déduit par application de la TL inverse que

$$y=4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)+3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)-4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{x-2}\right)+5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right),$$

Ainsi, d'aprés la table des TL, on obtient $\boxed{y(t)=4\cos(t)+3\sin(t)-4e^{2t}+5te^{2t},\quad \forall t\geq 0.}$

Vérification (**en plus**) : On a

$$\begin{cases} y'(t)=-4\sin(t)+3\cos(t)-3e^{2t}+10te^{2t},\\ y''(t)=-4\cos(t)-3\sin(t)+4e^{2t}+20te^{2t},\\ y'''(t)=4\sin(t)-3\cos(t)+28e^{2t}+40te^{2t},\end{cases}$$

On vérifie aisement que y trouvée satisfait bien l'EDO donnée.

Exercice 2 (4 points): Soit $f(t)=\begin{cases}1+t & \text{si } t\in[-1,0],\\ 1-t & \text{si } t\in[0,1],\\ 0 \quad \text{sinon.}\end{cases}$

1) $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ Faire la repésentation graphique de la fonction f. (Le graphe est ci-dessous)

2) $\boxed{\textbf{0,75 pt}}$ Montrer que $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Réponse : on a:

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après le graphe et elle est paire) de plus $f(t)\geq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt \overset{|f| \text{ paire}}{=} 2\int_0^1(1-t)\,dt=2\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1\in(\mathbb{R}).$

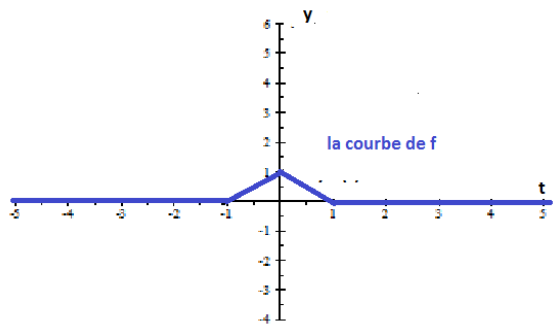
On obtient que $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

3) $\boxed{\textbf{1,5 pt}}$ Calculer la transformée de Fourier de f.**Réponse :** On a $\mathcal{F}f(x)=$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}.f(t)dt$, comme f est paire Alors,

$$\mathcal{F}f(x)=2.\int_0^{+\infty}\cos(xt).f(t)dt=2.\int_0^1\cos(xt)(1-t)\,dt$$

1er cas: $x\neq 0$: Faisons une IPP: $\begin{cases}u=1-t\longrightarrow u'=-1\\ v'=\cos(xt)\longrightarrow v=\dfrac{\sin(xt)}{x}\end{cases}$



$$\mathcal{F}f(x) = 2\left(\left[\frac{(1-t)\sin(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{x}\int_0^1 \sin(xt)\,dt\right) = \frac{2}{x}\left(\left[\frac{-\cos(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t=1}\right) = \frac{2}{x^2}(1-\cos x)$$

<u>2ème cas: $x = 0$:</u> $\mathcal{F}f(0) = 2.\int_0^1 (1-t)\,dt = 1.$

Conclusion: $\mathcal{F}f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1-\cos x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4) $\boxed{\textbf{1,25 pt}}$ En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(\cos x)(1-\cos x)}{x^2}dx.$

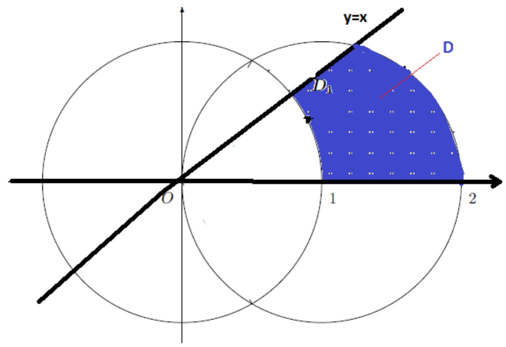
Réponse : Appliquons le TIF afin de déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(\cos x)(1-\cos x)}{x^2}dx.$

En fait comme f est dérivable à droite et à gauche de chaque point de $\mathbb{R}$ (elle est même dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$) et elle est continue sur $\mathbb{R}$, de plus elle est paire, le TIF donne

$$f(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(ax).\mathcal{F}f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(ax).\frac{(1-\cos x)}{x^2}dx, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Prenons $a = 1$, alors $0 = f(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(x).\frac{(1-\cos x)}{x^2}dx$,donc

$$\int_0^{+\infty} \cos(x).\frac{(1-\cos x)}{x^2}dx = 0$$



Exercice 3 (2,5 points): Soit le domaine D qui se trouve à l'extérieur du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

et à l'intérieur du cercle d'équation

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

et limité par les droites $y = 0$ et $y = x$.

1) $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ Représenter graphiquement D dans un repère orthonormé. (la présentations est ci-dessus)

2) $\boxed{\textbf{1,25 pt}}$Soit D' le transformé de D par les coordonnées polaires. Compléter:

$$D' = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\quad \text{tel que} \quad \underline{\ 0\ } < \theta < \underline{\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad \underline{\ 1\ } < r < \underline{2\cos\theta} \right\}$$

3) $\boxed{\textbf{0,75 pt}}$ En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$

Réponse ;Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par $\phi(r,\theta) = (x,y)$ avec

$$\begin{cases} x = r\cos, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy &= \int\int_{D'} \frac{1}{r}\ r\ drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{2\cos\theta} dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [r]_1^{2\cos\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2\cos\theta - 1]\, d\theta = [2\sin\theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$