L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B : Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 :
Soient $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $f \in End(\mathbb{R}^4)$ défini par:

$$\begin{array}{rcll} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t) \end{array}$$

I/ 1- Déterminer $A = M_B(f)$ la matrice de f relativement à la base B.
Solution : Par définition :

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

2- Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\ker f$.
Solution : En échelonnant la matrice A, on obtient :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui correspond aux choix suivants :
- Base de $\operatorname{Im} f$: $(w_1 = (1,0,0,1), w_2 = (0,1,0,2))$ **(1 pt)**
- Base de $\ker f$: $(w_3 = (2,1,-1,0), w_4 = (1,1,0,-1))$ **(1 pt)**

3- $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
Solution : On a : $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ ssi la famille de vecteurs (w_1, w_2, w_3, w_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Il suffit donc d'échelonner cette famille de vecteurs. Par la méthode de l'échelonnement, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc le rang de la famille (w_1, w_2, w_3, w_4) est égal à 4, par conséquent cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$. **(1,5 pt)**

II/ Soit $C = (v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,-1,0,0), v_3 = (0,1,0,-1), v_4 = (-1,0,-1,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^4$.

1- Déterminer P la matrice de passage de B vers C.

Solution : Par définition :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \textbf{ (0,5 pt)}$$

2- Calculer P^{-1}.

Solution : Par hypothèse, nous avons :

$$\begin{cases} v_1 & = & e_1 & & +e_3 & \\ v_2 & = & e_1 & -e_2 & & \\ v_3 & = & & e_2 & & -e_4 \\ v_4 & = & -e_1 & & -e_3 & +e_4 \end{cases}$$

Il suffit d'exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs de la base C. Par exemple, en additionnant v_1 et v_4, on obtient

$$e_4 = v_1 + v_4$$

et après résolution du système on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \textbf{ (1,5 pt)}$$

3- Déterminer les coordonnées du vecteur (x, y, z, t) dans la base C.

Solution : Il suffit de calculer :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+x+y \\ x-z \\ x+y-z \\ t+x+y-z \end{pmatrix}. \textbf{ (1 pt)}$$

4- Déterminer $A' = M_C(f)$ la matrice de f relativement à la base C.

Solution : On a : $A' = P^{-1}AP$ **(0,5 pt)** et après calcul, on trouve :

$$A' = M_C(f) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \textbf{ (1 pt)}$$

Exercice 2 : Les parties suivantes sont indépendantes

I/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1- Déterminer la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sachant qu'elle est semblable à la matrice λI_n, puis calculer :

- Le rang de A.
- La matrice A^m où $m \in \mathbb{N}^*$.
- L'inverse de la matrice A dans le cas où elle est inversible.
- Le déterminant de la matrice A.

Solution : Comme A elle est semblable à la matrice λI_n donc, par définition, il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A = P^{-1}(\lambda I_n)P = \lambda I_n. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Par conséquent :

- $rg(A) = rg(\lambda I_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ n & \text{sinon} \end{cases}$. **(0,25 pt + 0,25 pt)**
- $A^m = (\lambda I_n)^m = \lambda^m (I_n)^m = \lambda^m I_n$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. **(0,5 pt)**
- On a : A est inversible ssi $rg(A) = n$ ssi $\lambda \neq 0$. **(0,5 pt)**

Dans ce cas :

$$A^{-1} = (\lambda I_n)^{-1} = \lambda^{-1} I_n$$

Il suffit par exemple de remarquer :$(\lambda I_n)\left(\lambda^{-1} I_n\right) = I_n$. **(0,5 pt)**

2- Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A^2 et B^2 ne sont pas nulles en même temps alors A et B ne sont pas semblables.

Solution : Montrons la contraposée en supposant que les matrices A et B sont semblables, donc il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $B = P^{-1}AP$, d'où $B^2 = P^{-1}A^2P$. Donc :

Si $A^2 = 0$, alors $B^2 = P^{-1}A^2P = 0$ et si $B^2 = 0$, alors $A^2 = PB^2P^{-1} = 0$. **(1 pt)**

II/ Soient $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in End(\mathbb{R}^4)$ défini par:

$$\begin{array}{rlcl} u: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (3x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + x_4, x_1 + (\alpha - 1)x_2 + x_4, \alpha x_1 + (\alpha + 1)x_4, 2x_1) \end{array}$$

1- Quelle est la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Solution : On a : $\sigma = (1,4)(4,3)$, ce qui nous donne : $\epsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1$. **(0.5 pt)**

2- Exprimer $\det u$ en fonction de $\det_B(u(e_3), u(e_2), u(e_4), u(e_1))$ puis calculer $\det u$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} \det u &= \det_B(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) \\ &= \det_B\left(u\left(e_{\sigma(3)}\right), u\left(e_{\sigma(2)}\right), u\left(e_{\sigma(4)}\right), u\left(e_{\sigma(1)}\right)\right) \\ &= \varepsilon(\sigma)\det_B(u(e_3), u(e_2), u(e_4), u(e_1)) \\ &= \det_B(u(e_3), u(e_2), u(e_4), u(e_1)). \quad (\textbf{0,75} \text{ pt}) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\det u &= \det_B(u(e_3), u(e_{\sigma(2)}), u(e_4), u(e_1)) = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha+1)\,. \quad \textbf{(0,75pt)}
\end{aligned}$$

3- Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme u est-il bijectif ?

$$u \text{ est bijectif } \iff \det u \neq 0 \iff \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$