ALGEBRE 03 EMD 1 . LE 09/12/2021. DURÉE 2 H.

Exercice 1 (08 pts)

Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases} f(e_1) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 3e_2 - 2e_3 \\ f(e_3) &= -2e_1 + 5e_2 - 4e_3 \end{cases}$$

1. Calculer la matrice A de l'endomorphisme f relativement à la base canonique.
2. Determiner le noyau et l'image de f. Quel est le rang de f ?
3. Soit la famille de vecteurs $B' = \left\{ v_1 = 2e_1 + e_2, \quad v_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad v_3 = 2e_1 - e_2 + e_3 \right\}$.
   Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer la matrice D de l'endomorphisme f relativement à la base B'.
5. Quelle est la nature géométrique de f^2 ?
6. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^{2n+1} = A$.

Exercice 2 (06 pts)

Soient a, b des paramètres réels, et soit $S_{a,b}$ le système :

$$(S_{a,b}) : \begin{cases} 3x & & +2z & & = & a \\ & 3y & +z & +3t & = & b \\ x & +y & +z & +t & = & 1 \\ 2x & -y & +z & -t & = & b \end{cases}$$

1. Determiner le rang du système, et justifier pourquoi il n'est pas de Cramer ?
2. Pour quelles valeurs des paramètres a, b, le système $(S_{a,b})$ est résoluble ?
3. Résoudre alors le système $(S_{a,b})$ pour les valeurs précédentes de a, b.

Exercice 3 (06 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $A_n(x)$ la matrice d'ordre n définie par :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Posons $\triangle_n(x) = det\,(A_n(x))$.

1. Calculer $\triangle_2(x)$, $\triangle_3(x)$.
2. En développant suivant la dernière ligne, montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\triangle_n(x) = -x^{n-2} + x\triangle_{n-1}(x)$$

3. De la relation de récurrence precedente donner la valeur de $\triangle_n(x)$.

Corrigé + barème

Exercice 1 (08 pts)

1) La matrice de f relativement à la base B est :

$$A = \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

2) Comme $det(A) = 0$, et le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, alors $rg(f) = 2$ .... **0.5 pt**

On a

$$ker(f) = \left\{ \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{O} \right\}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $ker(f)$ vérifient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2z & = & 0 \\ -x + 3y + 5z & = & 0 \\ x - 2y - 4z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

donc

$$ker(f) = \left\{ \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad z \in \mathbb{R} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

Comme le rang $rg(f) = 2$, et les deux premières colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, alors

$$Im(f) = \left\{ \overrightarrow{V} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

3) Soit P la matrice qui exprime les vecteurs de B' en fonction des vecteurs de B, ie

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $det(P) = 1 \neq 0$. Donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$ .... **1 pt**

4) La matrice de f relativement à la base B' est

$$D = \mathcal{M}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

5) Comme la matrice de f^2 relativement à la base B' est

$$D^2 = \mathcal{M}_{B'}(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc f^2 est une projection sur le plan engendré par les vecteurs $\{v_1, v_2\}$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur v_3 .... **1 pt**

6) On a

$$A = P \ D \ P^{-1}$$

et

$$A^{2n+1} = P \ D^{2n+1} \ P^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

et comme $D^{2n+1} = D$, alors $A^{2n+1} = P \ D \ P^{-1} = A$ .... **1 pt**

Exercice 2 (06 pts)

Soit le système

$$S_{a,b}: \begin{array}{ccccccc} 3x & & +2z & & = & a \\ & 3y & +z & +3t & = & b \\ x & +y & +z & +t & = & 1 \\ 2x & -y & +z & -t & = & b \end{array}$$

Les matrices du système sont

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & \mathbf{0} & 2 & 0 & a \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & 1 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & b \end{array}\right)$$

On remarque que les colonnes $c_2 = c_4$ donc $det(A) = 0$.
Le système n'est pas de Cramer .... **1 pt**

Le mineur $\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$ est $\neq 0$ et ses bordants dans la matrice A sont

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc le rang du système est $rg\,(S_{a,b}) = 2$. .... **1 pt**

2) Les bordants dans la matrice augmentée $\widetilde{A}$ du mineur Δ sont

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & a \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 3a - 3b$$ .... **0.5 pt**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & a \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & b \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = 12b - 6a$$ .... **0.5 pt**

D'après le théorème de Fonteney-Rouché, le système $S_{a,b}$ est résoluble si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a+b & = & 3 \\ a & = & 2b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 2 \\ b & = & 1 \end{array} \right.$$ .... **0.5 pt + 0.5 pt**

3) Le système $S_{2,1}$ est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 3x & = & 2 - 2z \\ 3y & = & 1 - z - 3t \end{array} \right.$$ .... **0.5 pt + 0.5 pt**

l'espace des solutions est donc

$$S_{2,1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1-z) \\ \frac{1}{3}(1-z-3t) \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad z, t \in \mathbb{R} \right\}$$ .... **1 pt**

C'est un sous espace affine de $\mathbb{R}^4$ de $dim\,(S_{2,1}) = 2$.

Exercice 3 (06 pts)

1) On a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - 1 \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 - 2x \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

2) En developpant $\Delta_n(x)$ suivant la dernière ligne, on trouve

$$\Delta_n(x) = (-1)^{n+1} D_{n-1}(x) + x\Delta_{n-1}(x) \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt + 0.5 pt + 0.5 pt}}$$

où le mineur $D_{n-1}(x)$ est $D_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$ .... $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$

En developpant encore une fois le mineur $D_{n-1}(x)$ suivant la dernière colonne, on trouve

$$D_{n-1}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = (-1)^n x^{n-2} \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

En remplaçant la valeur de $D_{n-1}(x)$ dans $\Delta_n(x)$, on trouve

$$\Delta_n(x) = -x^{n-2} + x\Delta_{n-1}(x) \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

3) En répétant le processus, on peut exprimer $\Delta_n(x)$ successivement en fonction des mineurs

$$\Delta_{n-1}(x), \quad \Delta_{n-2}(x), \quad \Delta_{n-3}(x), \quad ...., \quad \Delta_{n-k}(x)$$

. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= x\ \Delta_{n-1}(x) - \ x^{n-2} = x\left(x\Delta_{n-2}(x) - x^{n-3}\right) - x^{n-2} \\ &= x^2\Delta_{n-2}(x) - 2x^{n-2} \\ &= x^3\Delta_{n-3}(x) - 3x^{n-2} \\ &\text{...} \quad \boxed{\textbf{1 pt}} \\ &= x^k\Delta_{n-k}(x) - kx^{n-2} \quad .... \quad (1 \leq k \leq n-2) \end{aligned}$$

En posant $k = n - 2$, on trouve

$$\Delta_n(x) = x^{n-2}\Delta_2(x) - (n-2)x^{n-2} \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

En remplaçant $\Delta_2(x)$ par sa valeur, on trouve

$$\Delta_n(x) = x^{n-1} - (n-2)x^{n-1} \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$