E.S.I. 2CPI ALG3 Examen Final 15 janvier 2019 Durée : 02h

L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.
1- Le barème est approximatif.
2- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
3- Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (04pt) Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & 3y & + & 3z & = & 4a \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -2x & + & 2y & + & (2-a)z & = & -2b \end{array}\right.$$

1. Utiliser la méthode de l'échelonnement par ligne pour trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que (S) soit compatible.
2. Résoudre le système (S) lorsqu'il est compatible.

Exercice 2 : (06pt) Soient $n \geq 2$ un entier et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que 0 est une valeur propre de M. Quelle est la dimension du sous-espace propre E_0 ?
2. Que peut-on dire de la multiplicité de 0 ?
3. En déduire que le polynôme caractéristique de M est de la forme $(-1)^n X^{n-1}(X-\alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier pourquoi $\alpha = Tr(M)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Application : Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elle diagonalisables ?

Exercice 3 : (10pt) Soient α, β, γ des réels non tous nuls et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\alpha-\gamma & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur propre de f. Préciser la valeur propre associée.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A.
3. Discuter suivant les valeurs des réels α, β, γ la diagonalisation de A.
4. Lorsque A est diagonalisable, déterminer :
   (a) Une base de chacun des sous-espaces propres.
   (b) Une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que A soit inversible.
6. Trouver l'expression de A^{-1} en fonction de A.

Bon courage