Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2017-2018
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen 1

Exercice 1. ⟦ *3 pts* ⟧

1. *Donner la définition par induction du nombre d'occurrences de constantes dans une formule.*

2. *Soit σ une substitution. Donner la définition par induction de $F\sigma$ l'application de la substitution σ sur la formule F.*

3. *Démontrer par induction la propriété de substitution suivante: Soit A une formule, v une assignation et σ une substitution.*
   On a : $[A\sigma]_v = [A]_w$ où pour toute variable $x, w(x) = [\sigma(x)]_v$.

Réponse.

1. 1 pt

- Si $F = x$ alors $nb[F] = 0$.
- Si $F = \bot$ ou $F = \top$ alors $nb[F] = 1$
- $nb[\neg F] = nb[F]$.
- $nb[(F\alpha G)] = nb[F] + nb[G]$.

2. 1 pt

- Si $F = x$ alors $F\sigma = \sigma(x)$.
- Si $F = \top$ ou $F = \bot$ alors $F\sigma = F$.
- Si $F = \neg G$ alors $F\sigma = \neg G\sigma$.
- Si $F = (G\alpha h)$ alors $F\sigma = (G\sigma\ \alpha\ H\sigma)$

3. 2 pts.

La propriété à démontrer pour toute formule est :

$$[A\sigma]_v = [A]_w \qquad (*)$$

- Si $A = x$ alors $[A\sigma]_v = [\sigma(x)]_v = w(x) = [x]_w = [A]_w$.
- Si $A = \bot$ alors $[A\sigma]_v = [\bot]_v = 0 = [A]_w$.
- Si $A = \top$ alors $[A\sigma]_v = [\top]_v = 1 = [A]_w$.

  - Soit $A = \neg G$ telle que $[G\sigma]_v = [G]_w$.

$$[A\sigma]_v = [\neg G\sigma]_v = 1 - [G\sigma]_v = 1 - [G]_w = [\neg G]_w = [A]_w.$$

  - Soit $A = (G\alpha H)$ telle que $[G\sigma]_v = [G]_w$ et $[H\sigma]_v = [H]_w$.

$$[A\sigma]_v = [(G\sigma\alpha H\sigma)]_v = \alpha^*([G\sigma]_v, [H\sigma]_v) = \alpha^*([G]_w, [H]_w) = [G\alpha H]_w = [A]_w.$$

où α^* est le sens du connecteur α.

Exercice 2. ⟦ *4 pts* ⟧ *Soit la formule à priorité*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{z} \vee \mathbf{w}) \Rightarrow (\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z}) \vee (\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{w}).$$

1. *Donner la forme complètement parenthésée de F.*
2. *Donner l'arbre de structure de F.*
3. *Transformer la formule F en une somme de monômes(FND).*
4. *La formule F est-elle satisfaisable ? La formule F est-elle valide? Justifier.*

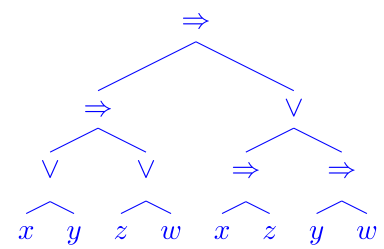
Réponse.

1.

$$\mathbf{F} = \Big(\Big((\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{z} \vee \mathbf{w})\Big) \Rightarrow \Big((\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z}) \vee (\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{w})\Big)\Big). \quad \textbf{0.5 pt}$$

2.

1 pt



3.

$$\begin{aligned} F &\equiv ((x+y) \Rightarrow (z+w)) \Rightarrow (x \Rightarrow z) + (y \Rightarrow w) \\ &\equiv (x+y)\overline{z+w} + \bar{x} + z + \bar{y} + w \\ &\equiv x\bar{z}\bar{w} + y\bar{z}\bar{w} + \bar{x} + z + \bar{y} + w \quad \textbf{1.5 pt} \end{aligned}$$

4. Oui F est satisfaisable. Elle au moins un modèle. $x = 1, z = 0, w = 0$.
Elle est valide. Car $\neg F$ est insatisfaisable. En effet:

$$\neg F \equiv (\bar{x} + z + w)(\bar{y} + z + w)x\bar{z}y\bar{w} \equiv 0. \quad \textbf{1 pt}$$

Exercice 3. ⟦ *3 pts* ⟧

Soient Γ *et* Δ *deux ensembles de formules et* A, B *et* C *des formules. Montrer ou infirmer les assertions suivantes :*

1. ***Si*** $\mathbf{\Gamma} \cup \mathbf{\Delta} \vDash \mathbf{C}$ ***alors*** $\mathbf{\Gamma} \vDash \mathbf{C}$ ***ou*** $\mathbf{\Delta} \vDash \mathbf{C}$.
2. ***Si*** $\Gamma \vDash A$ ***et*** $\Delta \vDash B$ ***et*** $\vDash (A \wedge B) \Rightarrow C$ ***alors*** $\Gamma \cup \Delta \vDash C$.

Réponse.

1. **1 pt** Faux. Donnons un contre exemple.

$$\Gamma = \{a\}; \Delta = \{b\}; C = (a \wedge b).$$

On a

$$\{a, b\} \vDash \{a \wedge b\} \text{ mais on a ni } \{a\} \vDash \{a \wedge b\} \text{ ni } \{b\} \vDash \{a \wedge b\}$$

2. Soit v modèle de $\Gamma \cup \Delta$. Donc v est modèle de Γ et modèle de Δ.
De $\Gamma \vDash A$ on déduit que $[A]_v = 1$ et de $\Delta \vDash B$ que $[B]_v = 1$. Il s'ensuit que $[A \wedge B]_v = 1$.
Comme $(A \wedge B) \Rightarrow C$ est valide, alors on a aussi $[(A \wedge B) \Rightarrow C]_v = 1$. De la définition du sens de l'implication on conclut que $[C]_v = 1$.

2 pt

Exercice 4. ⟦ *6 pts* ⟧

1. *Transformer $\neg F$ en forme normale conjonctive où*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{x} \Rightarrow \neg(\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})) \wedge (\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{x} \vee \neg\mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{w} \wedge \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \wedge \neg\mathbf{y}$$

Attention: Vous n'avez pas le droit de distribuer le produit par rapport à la somme.

2. *En utilisant l'arbre sémantique, étudier la validité de F.*

3. *En utilisant la résolution retrouver le résultat sur la validité de F.*

Réponse.

1. En utilisant l'équivalence remarquable $\overline{(A \Rightarrow B)} \equiv A\overline{B}$ on obtient:

$$\neg F \equiv (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})(\bar{w} + x + \bar{z})wz(\bar{x} + y)$$ **2 pt**

2 **Arbre sémantique** Soit Γ l'ensemble des clauses équivalent à $\neg F$:

$$\Gamma = \{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}, \bar{w} + x + \bar{z}, w, z, \bar{x} + y\}$$

Faisons le selon l'énumération w, z, x, y.

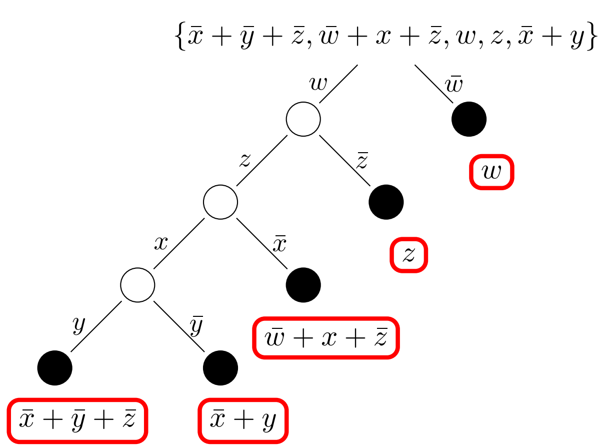


Figure 1: Arbre sémantique selon l'énumération: w, z, x, y.

L'arbre est fermé. Donc l'ensemble Γ est contradictoire. Alors F est valide. **2 pt**.

3. **Résolution.**

(1)	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	Hyp
(2)	$\bar{w}+x+\bar{z}$	Hyp
(3)	w	Hyp
(4)	z	Hyp
(5)	$\bar{x}+y$	Hyp
(6)	$\bar{x}+\bar{y}$	Res (1,4)
(7)	$\bar{w}+x$	Res (2,4)
(8)	$\bar{x}$	Res (5,6)
(9)	$\bar{w}$	Res (7,8)
(10)	$\perp$	Res (3,9)

On a montré

$$\{\bar{a}+d, \bar{b}+e, f+\bar{c}, a+b+c, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\} \vdash \perp$$

Par le théorème de correction de la résolution on conclut que $\neg F$ est contradictoire. **2 pts**

Exercice 5. ⟦ ***3 pts*** ⟧ *On rappelle que le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet. On définit les connecteurs ternaires $*$ et α par*

$$*(x,y,z) \equiv x\bar{y}+\bar{z} \text{ et } \alpha(x,y,z) \equiv x\bar{y}+z.$$

1. *Le système $\{\alpha\}$ est-il complet? Montrer le.*

2. *Le système $\{*\}$ est-il complet? Montrer le.*

Réponse.

1. $\alpha(0,0,0) \equiv 0$. Donc pour l'assignation constante donnant 0 à toutes les variables, toute formule écrite avec $\{\alpha\}$ aura comme valeur 0. Donc on ne peut pas exprimer 1 par exemple. Donc $\{\alpha\}$ est incomplet. **1 pt**

2. On note que $\{\neg, \vee\}$ est complet. Car $x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$.

- $\neg x \equiv *(x,x,x)$
- $x \vee y \equiv *(x, *(x,x,x), *(y,y,y))$.

Alors $\{*\}$ est complet. **2 pt**