EMD 1. Décembre 2005

Exercice 1: (8,5 points)

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin y}{y - \sin x} & \text{si} \quad y \neq \sin x. \\ -1 & \text{si} \quad y = \sin x. \end{cases}$$

Posons $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \sin x\}$

1) Etudier la continuité de f sur Δ.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles sur Δ.
3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2: (4 points)

Etudier les extémas libres de la fonction :

$$f(x,y) = 4y^3 - y^4 + \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch} y}.$$

Exercice 3: (7,5 points)

1) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - 2x \leq 0;\ x^2 - y \leq 0\}$.

A l'aide du changement de variables : $\begin{cases} x = u^2 v \\ y = u v^2 \end{cases}$ calculer :

$$I = \iint_D \exp\left(\frac{x^3 + y^3}{xy}\right) dxdy.$$

2) Justifier l'égalité : $I = 2\iint_{D'} \exp\left(\frac{x^3 + y^3}{xy}\right) dxdy$ où $D' = \{(x,y) \in D \ / \ y \leq x\}$

3) Posons : $\alpha(\theta) = 2\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ et $\beta(\theta) = \dfrac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta \sin\theta}$.

De 1) et 2) trouver la valeur de :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\alpha(\theta)}{\beta(\theta)} \exp[\alpha(\theta) g(\theta)] - \frac{1}{\beta^2(\theta)} \exp[\alpha(\theta)\beta(\theta)] - \frac{1}{\beta^2(\theta)} \right] d\theta$$

Bon courage.

EMD 1 2015/2016

Un corrigé

08.5 pts (1.3 + 4 + 1.5)

la fonction f / $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-\sin y}{y-\sin x} & \text{si } y \neq \sin x \\ -1 & \text{si } y = \sin x \end{cases}$

Posons $\Delta = \{(x, \sin x) / x \in \mathbb{R}\}$

continuité de f sur Δ:

$M \in \Delta$, $M = (a, \sin a) / a \in \mathbb{R}$; a-t-on $\lim_{(x,y)\to M} f(x,y) = f(M)$?

$f(M) = -1$

$\lim_{(x,y)\to M} -1 = -1 = f(M)$

$\lim_{(x,y)\to M} \dfrac{x-\sin y}{y-\sin x} = \dfrac{a - \sin(\sin a)}{0}$

dans $\mathbb{R}$ l'équation $t - \sin(\sin t) = 0$, posons $\lambda(t) = t - \sin(\sin t)$

est une solution évidente et $\lambda'(t) = 1 - \cos t . \cos(\sin t) \geq 0$ i.e. $\lambda \nearrow$

donc λ monotone, $\lambda(0) = 0$ d'où $\lambda(t) = 0 \iff t = 0$

: $(a - \sin(\sin a) = 0 \iff a = 0)$

$\lim_{(x,y)\to M} \dfrac{x-\sin y}{y - \sin x} = \begin{cases} \infty & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{0}{0} & \text{si } a = 0 \end{cases}$

donc dire que f est discontinue en $M \in \Delta^*$

: On a une forme indéterminée.

$\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2},\ y = x} \dfrac{x-\sin y}{y-\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} 1 \neq -1 = f(0_{\mathbb{R}^2})$

2) Dérivées partielles sur Δ: Soit $M \in \Delta$, $M = (a, \sin a)$

Un corrigé

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$? $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x, \sin a) - f(a, \sin a)}{x - a} = ?$

0.5 Pour $x \neq a$, $x \in V(a)$ on a $(\sin a \neq \sin x)$ i.e. $(x, \sin a) \notin \Delta$ pour $x \in V(a)$

donc $f(x, \sin a) = \dfrac{x - \sin(\sin a)}{x - a}$

d'où $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x,\sin a) - f(a, \sin a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \dfrac{\frac{x - \sin(\sin a)}{\sin a - \sin x} + 1}{x - a}$

$= \lim_{x \to a} \dfrac{x - \sin(\sin a) + \sin a - \sin x}{(x-a)(\sin a - \sin x)}$

$= \dfrac{a - \sin(\sin a)}{0}$

0.5 $= \begin{cases} \infty & \text{si } a \neq 0 \\ \frac{0}{0} & \text{si } a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)$ n'existe pas pour $M \in \Delta^*$

En $(0,0)$: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{-x \sin x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{o(x^2)}{-x^2}$ (car $x - \sin x = o(x^2)$ et $x \sin x \underset{0}{\sim} x^2$)

1 $= 0$ i.e. $(x, \sin a) \notin \Delta$

i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)$? $\lim_{y \to \sin a} \dfrac{f(a,y) - f(a, \sin a)}{y - \sin a} = \lim_{y\to\sin a} \dfrac{\frac{a - \sin y}{y - \sin a} + 1}{y - \sin a}$ 0.5 (car $y \neq \sin a$)

$= \lim_{y \to \sin a} \dfrac{a - \sin y + y - \sin a}{(y - \sin a)^2}$

0.5 $= \dfrac{a - \sin(\sin a)}{0}$

$= \{ \infty$ si $a \neq 0$

Différentiabilité ... :

Sur Δ : f discontinue donc f non différentiable

Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$: f est de classe C^∞ car rapport de fonctions qui le sont, elle est donc différentiable.

D'où f différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$.

Exo 2 : (4 pts) Soit f / $f(x,y) = 4y^3 - y^4 + \frac{sh^2 x}{ch y}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Points critiques : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2\, sh x\, ch x}{ch y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y^2 - 4y^3 - \frac{sh^2 x\, sh y}{ch^2 y}$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} sh x\, ch x = 0 \\ 12y^2 - 4y^3 - \frac{sh^2 x\, sh y}{ch^2 y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 4y^2(3-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (y=0) \text{ ou } (y=3) \end{cases}$$

On a donc deux points critiques $A(0,3)$, $B(0,0)$

Nature de ces points:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{ch y}(ch^2 x + sh^2 x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2}{ch^2 y}\, sh x\, ch x\, sh y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y - 12y^2 - \frac{sh^2 x}{ch^4 y}(ch^3 y - 2\, ch y\, sh^2 y)$$
$$= 24y - 12y^2 - \frac{sh^2 x}{ch^3 y}(1 - sh^2 y)$$

En A : $r = \frac{2}{ch 3}$, $s = 0$, $t = -36$

$\Delta = rt - s^2 = \frac{-72}{ch 3} < 0 \Rightarrow (A, f(A))$ n'est pas un extremum

En B : $\Delta = 0 \Rightarrow$ RAD

$d^2_B f(h_1,h_2) = 2h_1^2 \geq 0$ s'annulle en tout $(0,h_2)$ (h_2 quelconque $\in \mathbb{R}$)
RAD

Etudions le signe de $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ pour $(x,y) \in V(0_{\mathbb{R}^2})$

On a $f(0,y) = 4y^3 - y^4 = y^3(4-y)$ qui est du signe de y^3 pour $y \in V(0)$ et y^3 change de signe au $V(0)$

donc $(B, f(B))$ n'est pas un extremum

Exo 3. 7,5 pts (3 + 1 + 3,5)

Soit $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ / $f(x,y) = e^{\frac{x^3+y^3}{xy}}$, $D = \{(x,y) / y^2 - 2x \le 0 ...$

1) Soit le changement de variables $\begin{cases} x = u^2 v \\ y = u v^2 \end{cases}$; posons $\Psi(u,v) = (u^2 v, ...$

$\det J\Psi(u,v) = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = 3u^2v^2$. On a $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

0,5

$$\to I = 3\iint_\Delta e^{\frac{(u^2v)^3 + (uv^2)^3}{u^3v^3}}\, u^2 v^2\, du\, dv \quad / \Delta = \Psi^{-1}(D)$$
$$= 3\iint_\Delta u^2v^2 e^{v^3+u^3}\, du\, dv .$$

Δ ?

$$(x,y) \in \mathring{D} \iff \begin{cases} y^2 - 2x < 0 \\ x^2 - 2y < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (uv^2)^2 - 2(u^2v) < 0 \\ (u^2v)^2 - 2(uv^2) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^2v^4 - 2u^2v < 0 \\ u^4v^2 - 2uv^2 < 0 \end{cases}$$

1,5

$$\iff \begin{cases} u^2(v^4 - 2v) < 0 \\ v^2(u^4 - 2u) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v^4 - 2v \leq 0 \\ u^4 - 2u \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v(v^3 - 2) \leq 0 \\ u(u^3 - 2) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < u < \sqrt[3]{2} \\ 0 < v < \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

On peut donc prendre $\Delta =]0;\sqrt[3]{2}[^2$, on aura

$$I = 3\iint_{[0,2^{1/3}]^2} u^2v^2 e^{u^3v^3}\, du\, dv$$

1

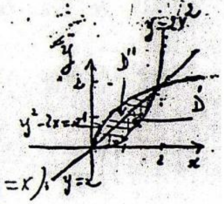
$$= 3\left(\int_0^{\sqrt[3]{2}} u^2 e^{u^3} du\right)\left(\int_0^{\sqrt[3]{2}} v^2 e^{v^3} dv\right) \quad (\text{var. séparables})$$

$3\left(\frac{1}{3}\left[e^{2t}\right]_0\right)$ ie $\underline{I = \frac{1}{3}(e^2-1)^2}$

$= 2\iint_{D'} f$, $/ D' = \{(x,y)\in D / y \le x\}$

[Re]marque que $f(y,x) = f(x,y)$, de plus D est symétrique par rapport à la droite $y=x$, en effet

$(x,y)\in D \iff \begin{cases} y^2-2x\le 0 & (1)\\ x^2-2y\le 0 & (2)\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-2y\le 0 & (2)\\ y^2-2x\le 0 & (1)\end{cases} \iff (y,x)\in D$



(On lire géométriquement)

et on a $D = D' \cup D''$ / D' et D'' symétriques par rapport à $(y=x)$

d'où $\underline{I = 2\iint_{D'} f}$

[On p]eut déduire J :

soit $I' = \frac{1}{2} I = \iint_{D'} f$, passons aux coordonnées polaires ds I'

$I' = \iint_{\Delta'} r e^{r\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\cos\theta\sin\theta}}\, dr\,d\theta$, cherchons Δ' (On peut le retrouver géométriquement)

$(x,y)\in D' \iff \begin{cases} x^2-2y<0 \\ y<x\end{cases}$ (La courbe $y^2-2x=0$ n'intervient pas)

$\iff \begin{cases} r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta < 0\\ \cos\theta < \sin\theta \\ r>0,\ 0\le\theta<2\pi\end{cases}$ (en fait $r>0$ car $(0,0)\notin \mathring{D}'$)

$\iff \begin{cases} r\cos^2\theta < 2\sin\theta\\ \sin\theta>0\\ \cos\theta\le\sin\theta\\ r>0,\ 0<\theta<2\pi\end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0<\theta<\pi/4 \\ 0<r<2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\end{cases}$ (car $\cos^2\theta\ne 0$)

Posons $\Delta' = \left\{(r,\theta) / 0<\theta<\pi/4,\ 0<r<2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\}$

$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r e^{r\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{\cos\theta\sin\theta}}\,dr\right)d\theta$ (Thm de Fubini)

$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\alpha(\theta)} r e^{r\beta(\theta)}\right)d\theta$

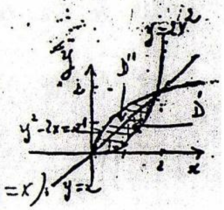
$= J$ D'où $J = I' = \frac{1}{2} I$

$3\left(\frac{1}{3}\left[e^{u^3}\right]_0\right)$ dc $\underline{\underline{I = \frac{1}{3}(e^2-1)^2}}$

$= 2\iint_{D'} f$, $D' = \{(x,y) \in D \,/\, y \leq x\}$

[Re]marque que $f(y,x) = f(x,y)$, de plus D est symétrique par rapport à la droite $y = x$, en effet

$(x,y) \in D \iff \begin{cases} y^2 - 2x \leq 0 \ (1) \\ x^2 - 2y \leq 0 \ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y \leq 0 \ (2) \\ y^2 - 2x \leq 0 \ (1) \end{cases} \iff (y,x) \in D$



(On lit géométriquement)

et on a $D = D' \cup D''$ / D' et D'' symétriques par/à $(y = x)$

d'où $\underline{\underline{I = 2\iint_{D'} f}}$

[On pe]ut déduire J :

[So]it $I' = \frac{1}{2} I = \iint_{D'} f$, passons aux coordonnées polaires ds I'.

$I' = \iint_{\Delta'} r e^{r \frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta \sin\theta}} \, dr \, d\theta$, cherchons Δ' (on peut le retrouver géométriquement)

$(x,y) \in D' \iff \begin{cases} x^2 - 2y < 0 \\ y < x \end{cases}$ (la courbe $y^2 - 2x = 0$ n'intervient pas)

$\iff \begin{cases} r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta < 0 \\ \cos\theta < \sin\theta \\ r > 0 \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$ (en fait $r > 0$ car $(0,0) \notin \mathring{D}'$)

$\iff \begin{cases} r\cos^2\theta < 2\sin\theta \\ \sin\theta > 0 \\ \cos\theta \leq \sin\theta \\ r \geq 0 \ ; \ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0 < \theta < \pi/4 \\ 0 < r < 2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}$ (car $\cos^2\theta \neq 0$)

Posons $\Delta' = \left\{(r,\theta) \,/\, 0 < \theta < \pi/4 \ , \ 0 < r < 2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\}$

$= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r e^{r \frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta \sin\theta}} \, dr \right) d\theta$ (Thm de Fubini

$= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\alpha(\theta)} r e^{r\beta(\theta)} \right) d\theta$

$= J$ D'où $J = I' = \frac{1}{2} I$.

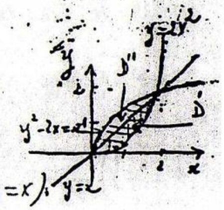
de plus

$3\left(\frac{1}{3}\left[e^{2r}\right]_0\right)$ $\underline{\text{ie}}$ $\underline{\underline{I = \frac{1}{3}(e^2-1)^2}}$

$= 2\iint_{D'} f$, / $D' = \{(x,y) \in D \,/\, y \leq x\}$

[illegible]marque que $f(y,x) = f(x,y)$, de plus D est symétrique par rapport à la droite $y = x$, en effet

$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2x \leq 0 \ (1) \\ x^2 - 2y \leq 0 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y \leq 0 \ (2) \\ y^2 - 2x \leq 0 \ (1) \end{cases} \Leftrightarrow (y,x) \in D$



(On lien géométriquement)

et on a $D = D' \cup D''$ / D' et D'' symétriques par/à $(y = x)$

d'où $\underline{\underline{I = 2\iint_{D'} f}}$.

[illegible]t déduire : J :

[illegible]t $I' = \frac{1}{2} I = \iint_{D'} f$, passons aux coordonnées polaires ds I'

$I' = \iint_{\Delta'} r e^{r \frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta \sin\theta}} \, dr \, d\theta$, cherchons Δ' (On peut le retrouver géométriquement)

$(x,y) \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y < 0 \\ y < x \end{cases}$ (La courbe $y^2 - 2x = 0$ n'intervient pas)

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta < 0 \\ \cos\theta < \sin\theta \\ r > 0 \ , \ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$ (En fait $r > 0$ car $(0,0) \notin \mathring{D}'$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} r \cdot \cos^2\theta < 2\sin\theta \\ \sin\theta > 0 \\ \cos\theta \leq \sin\theta \\ r \geq 0 \ ; \ 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < \pi/4 \\ 0 < r < 2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}$ (car $\cos^2\theta \neq 0$)

Posons $\Delta' = \left\{(r,\theta) \,/\, 0 \leq \theta < \pi/4 \ , \ 0 < r < 2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\}$

$= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r e^{r\frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta\sin\theta}} \, dr \right) d\theta$ (Thm de Fubini

$= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\alpha(\theta)} r e^{r\beta(\theta)} \right) d\theta$

$= J$ D'où $J = I' = \frac{1}{2} I$.

$\frac{1}{3}(e^2-1)^2$
/ D' ... $\leq x\}$
de plus