Contrôle Intermédiaire

Durée 1h30 heure

Tout document interdit

Exercice 1 (2,2)

A l'hôtel :

Il ne reste plus qu'une seule chambre à deux personnes de libre. Quatre personnes (Tayeb, Idir, Aghiles et Mourad) habituées de l'hôtel sont sur la liste des demandeurs. A qui le patron doit-il affecter cette chambre sachant que :

- Tayeb ne peut partager la chambre ni avec Idir ni avec Aghiles.
- Idir ne peut partager la chambre ni avec Aghiles ni avec Mourad
- Aghiles ne peut partager la chambre ni avec Mourad ni avec Idir

1. Traduire le problème qui se pose au patron dans le langage des propositions.
2. Existe-t-il une (ou des) solution(s) au problème ? Si oui laquelle ou lesquelles ?

Solution

Traduire le problème qui se pose au patron dans le langage des propositions.

Posons

P_{TI} : Tayeb partage la chambre avec Idir

P_{TA} : Tayeb partage la chambre avec Aghiles

P_{IA} : Idir partage la chambre avec Aghiles

P_{IM} : Idir partage la chambre avec Mourad

P_{AM} : Aghiles partage la chambre avec Mourad

P_{AI} : Aghiles partage la chambre avec Idir

Le problème peut être formulé par :

$\beta_1 : \neg P_{TI} \wedge \neg P_{TA}$
$\beta_2 : \neg P_{IA} \wedge \neg P_{IM}$
$\beta_3 : \neg P_{AM} \wedge \neg P_{AI}$
$\gamma_1 : P_{AM} \leftrightarrow P_{MA}$
$\gamma_2 : P_{AI} \leftrightarrow P_{IA}$
$\gamma_3 : P_{AT} \leftrightarrow P_{TA}$
$\gamma_4 : P_{IM} \leftrightarrow P_{MI}$
$\gamma_5 : P_{IT} \leftrightarrow P_{TI}$
$\gamma_6 : P_{IA} \leftrightarrow P_{AI}$

$\alpha : (P_{TI} \vee P_{TA} \vee P_{TM}) \vee (P_{IT} \vee P_{IM} \vee P_{IA}) \vee (P_{AT} \vee P_{AM} \vee P_{AI}) \vee (P_{MT} \vee P_{MA} \vee P_{MI})$

Utiliser les formules β pour exclure les combinaisons impossibles de la formule α (en rouge gras dans la formule ci-dessous) :

$\alpha : (\mathbf{P_{TI}} \vee \mathbf{P_{TA}} \vee P_{TM}) \vee (P_{IT} \vee \mathbf{P_{IM}} \vee \mathbf{P_{IA}}) \vee (P_{AT} \vee \mathbf{P_{AM}} \vee \mathbf{P_{AI}}) \vee (P_{MT} \vee P_{MA} \vee P_{MI})$

Utiliser les formules γ pour simplifier la formule ci-dessous :

$\alpha : P_{TM} \vee \mathbf{P_{IT}} \vee \mathbf{P_{AT}} \vee P_{MT} \vee \mathbf{P_{MA}} \vee \mathbf{P_{MI}}$
$\alpha : P_{TM} \vee P_{MT}$

Solution : Tayeb et Mourad partagent la chambre.

Exercice 2 (2, 2, 3)

Q1. Montrer, sans utiliser la propriété de complétude de la résolution :
$P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \rightarrow R)$

Q2. Déduire la proposition suivante de **Q1** :
$\models (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow R)))$

Q3. Déduire la proposition suivante de **Q2** :
$(A \rightarrow (Q \rightarrow R)),\ (A \rightarrow Q) \vdash (A \rightarrow (R \vee \neg A)))$

Solution Q1

$\Gamma \vdash \beta$ ssi $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ inconsistant ssi l'ensemble S des clauses obtenu à partir de $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ est inconsistant ssi $S \vdash \square$ **0,25 point**

$\Gamma : \{P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P\}$

$\neg\beta : \neg(P \rightarrow (P \rightarrow R)) = P \wedge P \wedge \neg R$

L'ensemble des clauses :
$S : \{\neg P \vee \neg Q \vee R, \neg P \vee Q, P, \neg R\}$ **0,25 point**

C0 : $\neg P \vee \neg Q \vee R$
C1 : $\neg P \vee Q$
C2 : P
C3 : $\neg R$
C4 : $\neg P \vee \neg Q$ res (C3,C0)
C5 : Q res (C2,C1)
C6 : $\neg Q$ res (C2,C4)
C7 : $\square$ res(C5,C6), **1 point**

$S \vdash \square$, donc S est inconsistant d'où $\{ P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q \} \cup \{ P \wedge P \wedge \neg R \}$ est inconsistant $\Rightarrow$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \rightarrow R)$ **0,5 point**

Solution Q2

Q2. Déduire la proposition suivante de **Q1** :

$$\models (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow R)))$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \rightarrow R) \ \textbf{Q1}$$

$$\Downarrow$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q \models P \rightarrow (P \rightarrow R)$$

(Propriété de la consistance) 1 point

$$\Downarrow$$

$$\models (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow R)))$$

Corollaire vu en cours $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ *ssi* $\models (\ldots(\alpha_1, \ldots \rightarrow (\alpha_{n-1} \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))\ldots))$ 1 point

Solution Q3

Q3. Déduire la proposition suivante de **Q2** :

$$(A \rightarrow (B \rightarrow D)),\ (A \rightarrow B) \vdash (A \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A))$$

De **Q2** nous avons **:**

$$\models (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow R)))$$

$\Downarrow$ **1 pt**

$$\models (A\rightarrow (B \rightarrow D)) \rightarrow ((B\rightarrow D) \rightarrow (A\rightarrow (A\rightarrow D)))$$

(Théorème de substitution P à A ; Q à B ; R à D)

$\Downarrow$ **1 pt**

$$\models (A\rightarrow (B \rightarrow D)) \rightarrow ((B\rightarrow D) \rightarrow (A\rightarrow (\urcorner D\rightarrow \urcorner A)))$$

(Théorème de remplacement : $A\rightarrow D$ par $\urcorner D\rightarrow \urcorner A$)

$\Downarrow$ **0.5pt**

$$A\rightarrow (B\rightarrow D),\ A\rightarrow B \models A\rightarrow(\urcorner D\rightarrow \urcorner A)$$

$\Downarrow$ **0.5pt**

$$A\rightarrow (B\rightarrow D),\ A\rightarrow B \vdash A\rightarrow(\urcorner D\rightarrow \urcorner A)$$

(Propriété de complétude)

Exercice 3 (3)

Soit Γ un ensemble satisfiable de formules et β une formule n'appartenant pas à Γ. Montrer que les ensembles $\Gamma \cup \{\beta\}$ et $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ ne peuvent pas être tous les deux non satisfiables.

Solution

Supposons $\Gamma \cup \{\beta\}$ et $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ tous deux non satisfiables.

Étant donné que Γ est satisfiable, alors il existe au moins une valuation (appelons là *v*) qui satisfait toutes les formules de Γ. Cette même valuation ne satisfait pas β car $\Gamma \cup \{\beta\}$ est non satisfiable. De ce fait, cette valuation satisfait $\neg\beta$. Ceci implique que $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$est satisfiable : contradiction avec l'hypothèse.

Exercice 4 (1, 2, 3)

Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du 1ier ordre :

1. S'il existe un blanc alors il existe un noir.

   $B(x)$: *x* est blanc $N(x)$: *x* est noir

   $\exists x B(x) \rightarrow \exists x N(x)$

2. Deux personnes sont parentes si elles ont le même père et la même mère.

   $P(x,y)$: *x* est parent de *y* $R(x,y)$: *x* est le père de *y*

   $M(x,y)$: *x* est la mère de *y* $E(x,y)$: *x* est le même que *y*

   $\forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2\forall z_1\forall z_2((M(x_1,y_1) \wedge R(z_1,y_1) \wedge M(x_2,y_2) \wedge R(z_2,y_2) \wedge E(z_1,z_2) \wedge E(x_1,x_2) \wedge \urcorner E(y_1,y_2))$
   $\rightarrow P(y_1,y_2))$

3. Si pour chaque nombre il existe un nombre plus grand, alors il n'existe pas de nombre plus grand que tous les nombres.

   $N(x)$: *x* est un nombre

   $G(x,y)$: *x* est plus grand que *y*

   $\forall x(N(x) \rightarrow\exists y(N(y)\wedge G(y,x)))\rightarrow\urcorner(\exists x(N(x)\wedge \forall y(N(y)\rightarrow G(x,y))))$