E.S.I. 2CPI ALG3 Contrôle intermédiaire 14 novembre 2018 Durée 1h30 mns

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (5 pt) On considère le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ et $C = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $C_1 = (w_1 = (1,1,-1), w_2 = (1,-1,1), w_3 = (-1,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

1- Déterminer la matrice P de passage de C vers C_1.

2- Déterminer P^{-1}.

3- Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement aux bases canoniques respectives B et C de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i/- Déterminer, en échelennant la matrice A, une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

ii/- Déterminer l'expression de f.

4- Soit $B_1 = (P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X + X^2, P_4 = 1 + X + X^2 + X^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de passage Q de B vers B_1.

5- En déduire la matrice : $A' = M_{B_1,C_1}(f)$.

Exercice 2 : (2,5 pt) Soit la pemutaion $\sigma \in S_8$ définie comme suit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 5 & 8 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1- Décomposer la permutaion σ en produit de transpositions.

2- En déduire la signature de la permutaion σ.

3- Donner σ^{-1} l'inverse de la permutaion σ.

Exercice 3 : (2,5 pt) (Les deux questions suivantes sont indépendantes)

1- On considère le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit (v_1, v_2, v_3) une famille de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Exprimer, en justifiant, les déterminants ci-dessous en fonction de $\det_B(v_1, v_2, v_3)$:

$$\det_B(v_3, v_1, v_2) \text{ et } \det_B(v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, v_3) \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i \in [[1,3]].$$

2- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit : $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f_α de $\mathbb{R}^3$ relativement à sa base canonique. Donner, en utilisant le calcul de déterminant, une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre α pour que f_α soit bijective.

Bon courage