Séries entières

Exercice 0.1

Donner le rayon de convergence R et le domaine de convergence des séries entières complexes suivantes :

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} z^n & (2) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + n^2) z^n & (3) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\cosh n} \\
(4) & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^n & (5) & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n)^n z^n & (6) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^{3n}} \\
(7) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n + \arctan n} z^{2n} & (8) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\ln(n!)} & (9) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n) z^n \\
(10) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n} z^n & (11) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+i\sqrt{n}}{1+2i\sqrt{n}}\right) z^n & (12) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n + \sinh n}{3^n} z^n
\end{array}
$$

Corrigé :

On note

- Δ_{AC} : le domaine de convergence absolue.
- Δ : le domaine de convergence simple.
- $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$: le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.
- $\overline{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq R\}$: le disque fermé de centre 0 et de rayon R.
- $\mathcal{C}(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = R\}$: le cercle de centre 0 et de rayon R (c'est le bord du $D(0,R)$).
- Sur $\mathcal{C}(0,R)$, $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. On pose $f_n(z) = \dfrac{\ln n}{n^2} z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1.
\end{aligned}
$$

Alors le rayon de convergence est $R = 1$. La série converge absolument dans $D(0,1)$.

• Etude sur $\mathcal{C}(0,1)$: $|z| = 1$, alors

$$|f_n(z)| = \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2(\ln n)^{-1}}.$$

$\sum |f_n(z)|$ est une série de Bertrand convergente. Il en résulte que

$$\Delta_{CA} = \overline{D}(0,1)$$

2. On pose $f_n(z) = (2^n + n^2) z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = 2^n + n^2 \sim_\infty 2^n = b_n$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 2.$$

Alors le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{2}$. la série converge absolument dans $D(0, \dfrac{1}{2})$.

• Etude sur $\mathcal{C}(0, \dfrac{1}{2})$:

- $|z| = \frac{1}{2}$: $|f_n(z)| = 2^n + n^2$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini alors $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$: $f_n(z) = (2^n + n^2)\frac{1}{2^n}e^{in\theta}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini alors $\sum f_n(z)$ diverge.

Il en résulte que $\Delta_{CA} = D(0, \frac{1}{2})$.

3. On pose $f_n(z) = \frac{z^n}{\cosh n}$, le coefficient de la série entière est $a_n = \frac{1}{\cosh n} \sim_\infty \frac{2}{e^n} = b_n$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{e}.$$

Alors le rayon de convergence est $R = e$. La série converge absolument dans $D(0, e)$.
- <u>Etude sur $\mathcal{C}(0, e)$</u> :
- $|z| = e$: $|f_n(z)| = \frac{e^n}{\cosh n} \sim_\infty 2$ alors $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = ee^{i\theta}$: $f_n(z) = \frac{e^n e^{in\theta}}{\cosh n} \sim_\infty 2e^{in\theta} \nrightarrow 0$ quand n tend vers l'infini alors $\sum f_n(z)$ diverge.

Il en résulte que $\Delta_{CA} = D(0, e)$.

4. On pose $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{\ln n}z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1.$$

Alors le rayon de convergence est $R = 1$. La série converge absolument dans $D(0, 1)$.
- <u>Etude sur $\mathcal{C}(0, 1)$</u> :
- $|z| = 1$: $|f_n(z)| = \frac{1}{\ln n}$, $\sum \frac{1}{\ln n}$ est une série de Bertrand divergente alors $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = e^{i\theta}$: $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{\ln n}e^{in\theta}$. Appliquons le théorème d'Abel pour étudier la nature de la série $\sum f_n(z)$.

  $f_n(z) = v_n w_n$ telle que $v_n = \frac{1}{\ln n}$ et $w_n = (-1)^n e^{in\theta}$.

  ◦ la suite (v_n) est une suite positive décroissante vers 0.

  ◦ $|\sum_{k=2}^{n} v_k| \leq |\sum_{k=2}^{n}(-e^{i\theta})^n| \leq \frac{1}{|1+e^{i\theta}|} = \frac{1}{|\cos\frac{\theta}{2}|}$, $e^{i\theta} \neq -1$.

  La série $\sum f_n(z)$ converge si $z \neq -1$.
- $z = -1$: $f_n(-1) = \frac{1}{\ln n}$, c'est le terme général d'une série divergente.

Il en résulte que

$$\Delta_{CA} = D(0, e) \qquad \Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1,\ z \neq -1\}$$

5. On pose $f_n(z) = (\ln n)^n z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = (\ln n)^n$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln n = +\infty.$$

Alors le rayon de convergence est $R = 0$ et $\Delta_{CA} = \Delta = \{0\}$.

6. On pose $f_n(z) = \dfrac{z^n}{n^{3n}}$, le coefficient de la série entière est $a_n = \dfrac{1}{n^{3n}}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Alors le rayon de convergence est $R = +\infty$ et $\Delta_{CA} = \Delta = \mathbb{C}$.

7. On pose $f_n(z) = \dfrac{(-2)^n}{n + \arctan n} z^{2n}$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Big|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\Big| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n + \arctan n}{n + 1 + \arctan(n+1)} 2|z|^2 = 2|z|^2.$$

$\sum f_n(z)$ converge absolument si $2|z|^2$ donc si $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Alors le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La série converge absolument dans $D(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

- <u>Etude sur $\mathcal{C}(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$</u> :
- $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $|f_n(z)| = \dfrac{1}{n + \arctan n} \sim_\infty \dfrac{1}{n}$, $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série divergente alors $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}$: $f_n(z) = \dfrac{(-1)^n e^{2in\theta}}{n + \arctan n}$. Appliquons le théorème d'Abel pour étudier la nature de la série $\sum f_n(z)$.
  $f_n(z) = v_n w_n$ telle que $v_n = \dfrac{1}{n + \arctan n}$ et $w_n = (-1)^n e^{2in\theta}$.

  ◦ la suite (v_n) est une suite positive décroissante vers 0.

  ◦ $|\sum_{k=1}^{n} w_k| \leq |\sum_{k=1}^{n} (-e^{2i\theta})^n| \leq \dfrac{1}{|1 + e^{2i\theta}|} = \dfrac{1}{|\cos\theta|}$, $e^{2i\theta} \neq -1$.

  La série $\sum f_n(z)$ converge si $e^{2i\theta} \neq -1$ donc si $z \neq \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$.
- $z = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$: $f_n(z) = \dfrac{1}{n + \arctan n}$, c'est le terme général d'une série divergente.

Il en résulte que

$$\Delta_{CA} = D(0, e) \qquad \Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ z \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i\}$$

8. On pose $f_n(z) = \dfrac{z^n}{\ln(n!)}$, le coefficient de la série entière est $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$. On a $n \leq n! \leq n^n$ alors

$$\ln n \leq \ln(n!) \leq (n^n) \Longrightarrow \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq \frac{1}{\ln n}.$$

On a donc $0 \leq c_n \leq a_n \leq b_n$ telle que $c_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ et $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$.

◦ $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 1$ alors la série entière $\sum c_n z^n$ est de rayon $R_c = 1$.

$$c_n \leq a_n \Longrightarrow R_c \geq R$$

◦ $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ alors la série entière $\sum b_n z^n$ est de rayon $R_b = 1$.

$$a_n \leq b_n \Longrightarrow R \geq R_b$$

Il en résulte que $R = 1$. La série converge absolument dans $D(0, 1)$.

- Etude sur $\mathcal{C}(0,1)$:
- $|z|=1$: $|f_n(z)| = \dfrac{1}{\ln(n!)} \geq \dfrac{1}{n\ln n}$, $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ est une série de Bertrand divergente alors $\sum |f_n(z)|$ diverge aussi d'après le théorème de comparaison. Il en résulte que $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = e^{i\theta}$: $f_n(z) = \dfrac{e^{in\theta}}{\ln(n!)}$. $\sum f_n(z)$ converge d'après le théorème d'Abel si $z \neq -1$.
- $z=-1$: $f_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n!)}$, c'est le terme général d'une série alternée convergente.

Il en résulte que

$$\Delta_{CA} = D(0,1) \qquad \Delta = \overline{D}(0,1)$$

9. On pose $f_n(z) = (\cos n)z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = \cos n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq 1 \Longrightarrow R \geq 1.$$

On fait un raisonnement par l'absurde pour trouver R le rayon de la série $\sum (\cos n)z^n$. Supposons que $R > 1$, alors $\forall z \in D(0,R)$, la série $\sum f_n(z)$ converge en particulier si $z=1$ or la série $\sum \cos n$ diverge.
Alors le rayon de convergence est $R=1$. La série converge absolument dans $D(0,1)$.
Sur $\mathcal{C}(0,1)$, la série est divergente donc $\Delta_{CA} = \Delta = D(0,1)$.

10. On pose $f_n(z) = \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{2n} z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{2n}$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^2 = 4$$

Alors le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{4}$. La série converge absolument dans $D(0,\dfrac{1}{4})$.

- Etude sur $\mathcal{C}(0,\dfrac{1}{4})$:
- $|z| = \dfrac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^{2n} \frac{1}{4^n} = \left(2 - \frac{3}{n+2}\right)^{2n} \frac{1}{4^n} \\ &= \left(1 - \frac{3}{2(n+2)}\right)^{2n} = e^{2n\ln(1-\frac{3}{2(n+2)})} \\ &\sim_\infty e^{2n(-\frac{3}{2(n+2)})} \sim_\infty e^{-3} \neq 0 \end{aligned}$$

Alors $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = \dfrac{1}{4}e^{i\theta}$: $f_n(z) = \left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^{2n} \dfrac{1}{4^n}e^{in\theta} \nrightarrow 0$ quand n tend vers l'infini alors $\sum f_n(z)$ diverge.

Il en résulte que $\Delta_{CA} = \Delta = D(0,\dfrac{1}{4})$.

11. On pose $f_n(z) = \left(\dfrac{1+i\sqrt{n}}{1+2i\sqrt{n}}\right) z^n$, le coefficient de la série entière est $a_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{n}}{1+2i\sqrt{n}}\right)$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{|1+i\sqrt{n+1}|}{|1+2i\sqrt{n+1}|}\frac{|1+2i\sqrt{n}|}{|1+i\sqrt{n}|}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{4n+5}}\frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Alors le rayon de convergence est $R = 1$. La série converge absolument dans $D(0,1)$.

- Etude sur $\mathcal{C}(0,1)$:
- $|z| = 1$: $|f_n(z)| = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+1}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \dfrac{1}{2} \neq 0$, alors $\sum f_n(z)$ ne converge pas absolument.
- $z = e^{i\theta}$: $f_n(z) = \left(\dfrac{1+i\sqrt{n}}{1+2i\sqrt{n}}\right)e^{in\theta}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini alors $\sum f_n(z)$ diverge.

Il en résulte que $\Delta_{CA} = \Delta = D(0,1)$.

12. On pose $f_n(z) = \dfrac{5^n + \sinh n}{3^n}z^n$, le coefficient de la série entière est

$$a_n = \frac{5^n+\sinh n}{3^n} \sim_\infty \frac{5^n}{3^n} = b_n.$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{5}{3}.$$

Alors le rayon de convergence est $R = \dfrac{3}{5}$. La série converge absolument dans $D(0,\dfrac{3}{5})$.
On peut vérifier facilement que pour tout $z \in \mathcal{C}(0,1)$ la série $\sum f_n(z)$ est divergente. Il en résulte que $\Delta_{CA} = \Delta = D(0,1)$.

Exercice 0.2

Donner le rayon de convergence R et le domaine de convergence des séries entières réelles suivantes et étudier la convergence aux bords des intervalles de convergence.

(1)	$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+3)!x^n$	(2)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n+1)x^n$	(3)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{n^n}x^n$
(4)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+5)^n}{n2^n}$	(5)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)!}{n^n}(x-3)^n$	(6)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$
(7)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!e^n}x^n$	(8)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3....(2n-1)}{2.4......(2n)}.\frac{x^n}{2n+1}$	(9)	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{e^n}x^{2n+1}$

Corrigé :

1. On pose $f_n(x) = (-1)^n(n+3)!x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = (-1)^n(n+3)!$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} n+4 = +\infty.$$

Alors le rayon de convergence est $R = 0$ et $\Delta_{CA} = \Delta = \{0\}$.

2. On pose $f_n(x) = \ln(n+1)x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \ln(n+1)$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

La rayon de convergence $R = 1$.
Pour $x = \pm 1$, $f_n(x) \nrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, alors la série diverge, donc $\Delta =]-1,1[$.

3. On pose $f_n(x) = \dfrac{2^n + 3^n}{n^n} x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^n} \sim_\infty \dfrac{3^n}{n^n} = b_n$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0.$$

Alors le rayon de convergence $R = +\infty$ et $\Delta_{CA} = \Delta = \mathbb{R}$.

4. On pose $f_n(x) = \dfrac{(x+5)^n}{n2^n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x+5}{2}\right)^n$.

On a une série entière en $y = \dfrac{x+5}{2}$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{y^n}{n}$ est $R = 1$, son domaine de convergence est $\Delta_y = [-1, 1[$.

$$-1 \leq y < 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{x+5}{2} < 1 \Longleftrightarrow -7 \leq x < -3.$$

Finalement on a $\Delta = [-7, -5[$

5. On pose $f_n(x) = \dfrac{(n-1)!}{n^n}(x-3)^n$. On a une série entière en $y = x - 3$ et $a_n = \dfrac{(n-1)!}{n^n}$.

$$f_n(x) = f_n(y+x) = g_n(y) = \frac{(n-1)!}{n^n} y^n$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}.$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})} \sim_\infty e^{(n+1)(\frac{1}{n})} = e^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} e.\right)$$

Le rayon de convergence est $R = e$.

Pour $|y| = e$ on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{g_{n+1}(y)}{g_n(y)}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} e = 1.$$

Appliquons le théorème de Raab-Duhammel,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(1 - \left|\frac{g_{n+1}(y)}{g_n(y)}\right|\right) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(1 - e^{-(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})} e\right) \\
&\sim_\infty \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(1 - e^{(-n-1)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2})} e\right) \quad (\ln(1+x) \sim_0 x - \frac{x^2}{2}) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}}\right) \\
&\sim_\infty \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(1 - (1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2})\right) \quad (e^x \sim_0 1 + x) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > 1.
\end{aligned}$$

Alors la série converge et on a $\Delta_y = [-e, e]$, finalement $\Delta = [-e+3, e+3]$.

6. On pose $f_n(x) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Le rayon de convergence est $R = 4$.

- Pour $x = 4$, $f_n(4) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$.
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(4)}{f_n(4)}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2n+2}{2n+1} = 1.$$
Appliquons le théorème de Raab-Duhammel
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\left(1-\frac{f_{n+1}(4)}{f_n(4)}\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{-n}{2n+1} = -\frac{1}{2} < 1,$$
ALors la série $\sum f_n(4)$ diverge.
- Pour $x = -4$, $f_n(-4) = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$.
D'après la formule de Stirling $n! \sim_\infty \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$. On trouve
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(-4) \sim_\infty \lim_{n\longrightarrow+\infty}(-1)^n\sqrt{\pi n} \neq 0.$$
Alors la série $\sum f_n(-4)$ diverge.

Fianlement le domaine de convergence est $\Delta =]-4, 4[$.

7. On pose $f_n(x) = \frac{n^n}{n!e^n}x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \frac{n^n}{n!e^n}$
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{e} = 1.$$
Le rayon de convergence $R = 1$.
   - Pour $x = 1$, $f_n(1) = \frac{n^n}{n!e^n} \sim_\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}}$, la série $\sum\frac{1}{n^{1/2}}$ est une série de Riemann divergente alors la série $\sum f_n(1)$ diverge aussi.
   - Pour $x = -1$, $f_n(-1) = (-1)^n\frac{n^n}{n!e^n}$, c'est le terme général d'une série alternée convergente car
     - $\lim_{n\longrightarrow+\infty}|f_n(-1)| \sim_\infty \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}} = 0$.
     - la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}}\right)_n$ est décroissante alors la suite $\Big(|f_n(-1)|\Big)_n$ est aussi décroissante.

   Le domaine de convergence est $\Delta = [-1, 1[$.

8. On pose $f_n(x) = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4......(2n)}.\frac{x^n}{2n+1}$, le coéfficient de la série entière est
$a_n = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4......(2n)(2n+1)}$.
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = 1.$$
Le rayon de convergence est $R = 1$.
Pour $|x| = 1$, $|f_n(x)| = \frac{1.3....(2n-1)}{2.4......(2n)(2n+1)}$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = 1$.
Appliquons le théorème de Raab-Duhammel
$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\left(1-\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} n\left(1-\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}\right)\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{6n^2+4n}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{3}{2} > 1.\end{aligned}$$
Alors la série converge sur le bord du domaine de convergence et $\Delta = [-1, 1]$.

9. On pose $f_n(x) = \dfrac{\ln n}{e^n} x^{2n+1}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|x| \ln(n+1)}{e \ln n} = \frac{|x|}{e}.$$

La série $\sum |f_n(x)|$ converge si $\dfrac{|x|}{e} < 1 \iff |x| < e$, alors le rayon de convergence est $R = e$.
• Pour $x = e$, $f_n(e) = e^{n+1} \ln n \nrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Alors $\sum f_n(e)$ diverge.
• Pour $x = -e$, $f_n(-e) = (-1)^n e^{n+1} \ln n \nrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Alors $\sum f_n(-e)$ diverge.
Finalement $\Delta =]-e, e[$.

Corrigé :

Exercice 0.3

Pour les séries suivantes, déterminer le domaine de convergence puis calculer leur somme. Etudier ces séries aux bornes du domaine de convergence :

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n+2}{n!} x^n & (2) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n & (3) & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)(n+2)} \\
(4) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n-1}{(n+3)n!} x^n & (5) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n & (6) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n} \\
(7) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cosh n}{2^n} x^n & (8) & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n & (9) & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}
\end{array}$$

Corrigé :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n+2}{n!} x^n$, Le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{n^2+3n+2}{n!}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Longrightarrow R = +\infty.$$

Alors $\Delta = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n+2}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 4x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= x^2 e^x + 4x e^x + 2e^x = (x^2+4x+2)e^x.
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$, Le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Longrightarrow R = 1$$

- Pour $x = \pm 1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{n}{n+1} x^n \neq 0$, alors $\Delta =]-1, 1[$.
  Pour calculer la somme on écrit $a_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

- Si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x).
\end{aligned}$$

- Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \Delta$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x} \ln(1-x) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)(n+2)}$, Le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{1}{(n-1)(n+2)}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Longrightarrow R = 1$$

- Pour $|x| = 1$, $|f_n(x)| = \left| \dfrac{x^n}{(n-1)(n+2)} \right| = \dfrac{1}{(n-1)(n+2)} \sim_\infty \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors la série $\sum f_n(x)$ converge aux bornes du domaine de convergence. On a alors $\Delta = [-1, 1]$.
  Pour calculer la somme on écrit $a_n = \dfrac{1}{(n-1)(n+2)} = \dfrac{1}{3(n-1)} - \dfrac{1}{3(n+2)}$.

- Si $x \in [-1, 1[$ et $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \\
&= \frac{x}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{3x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \\
&= \frac{x}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{3x^2} \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\frac{x}{3} \ln(1-x) - \frac{1}{3x^2} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \\
&= -\frac{x}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{3x^2} \ln(1-x) + \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} + \frac{x}{9}
\end{aligned}$$

- Si $x=1$, on a

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3(n-1)} - \frac{1}{3(n+2)} \\ &= \left[\frac{1}{3(n-1)} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3(n+1)}\right] - \left[\frac{1}{3n} + \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)}\right] \\ &= v_n - v_{n+1}, \end{aligned}$$

tels que $v_n = \dfrac{1}{3(n-1)} + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{3(n+1)}$. La série $\sum f_n(1)$ est une série télescopique, sa somme est

$$f(1) = v_2 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \frac{11}{18}.$$

- Si $x=0$, on a $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{10} + \ldots$, alors $f(0)=0$.

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{3}\ln(1-x) + \dfrac{1}{3x^2}\ln(1-x) + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{x}{9} & si \quad x \in [-1,0[\cup]0,1[\\ \dfrac{11}{18} & si \quad x=1 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n-1}{(n+3)n!}x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{n^2+3n-1}{(n+3)n!}$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \Longrightarrow R = +\infty.$$

Alors $\Delta = \mathbb{R}$. Simplifions l'expésion de a_n pour calculer la somme.

$$a_n = \frac{n^2+3n-1}{(n+3)n!} = \frac{n(n+3)-1}{(n+3)n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+3)n!}.$$

- Si $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+3n-1}{(n+3)n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)n!} \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)n!} \\ &= xe^x - \frac{1}{x^3}T(x), \end{aligned}$$

tels que $T(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)n!} \Longrightarrow T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2e^x$. Alors

$$T(x) = \int_0^x t^2 e^t \, dt.$$

Une double intégration par partie donne

$$T(x) = (x^2-2x+2)e^x - 2.$$

Finalement on touve

$$f(x) = xe^x + \frac{1}{x^3}\left((x^2-2x+2)e^x - 2\right).$$

- Si $x \neq 0$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+3n-1}{(n+3)n!}x^n=-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}x+\frac{9}{10}x^2+\dots$$

alors $f(0)=-\dfrac{1}{3}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=\begin{cases} xe^x+\dfrac{1}{x^3}\Big((x^2-2x+2)e^x-2\Big) & si \quad x\in\mathbb{R}^* \\ -\dfrac{1}{3} & si \quad x=0\end{cases}$$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+3}{2n+1}x^n$, Le coéfficient de la série entière est $a_n=\dfrac{2n+3}{2n+1}$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1\Longrightarrow R=1$$

- Pour $x=\pm 1$, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2n+3}{2n+1}x^n\neq 0$, alors $\Delta=]-1,1[$.

Pour calculer la somme on écrit $a_n=\dfrac{2n+3}{2n+1}=1+\dfrac{2}{2n+1}$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\frac{1}{1-x}+2S(x)$$

- Si $x>0$, on a

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1}$$

On pose $\sqrt{x}=t$, on aura

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}=\frac{1}{1-t^2}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=\arg\tanh t$$

alors $S(x)=\dfrac{\arg\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ et $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+2\dfrac{\arg\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

- Si $x<0$, on a

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-(-x))^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1}$$

On pose $\sqrt{-x}=t$, on aura

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{2n}=\frac{1}{1+t^2}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{2n+1}=\arctan t$$

alors $S(x)=\dfrac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$ et $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+2\dfrac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$.

- Si $x=0$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+3}{2n+1}x^n=3+\frac{5}{3}x+\frac{7}{5}x^2+\dots$$

alors $f(0)=3$. Pour tout $x\in\Delta$, on a

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+2\dfrac{\arg\tanh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & si \quad x\in]0,1[\\ \dfrac{1}{1-x}+2\dfrac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & si \quad x\in]-1,0[\\ 3 & si \quad x=0\end{cases}$$

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n}$, On a $\left| \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n} \right| \leq \frac{x^{2n}}{n!}$.

La série $\sum \frac{x^{2n}}{n!}$ converge pour tout réel x. (vous pouvez utiliser le théorème de D'Alembert)

Alors la série entière $\sum \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^{2n}$ converge dans $\Delta = \mathbb{R}$ et le rayon de convergence est $R = +\infty$.

$$a_n = \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} = \frac{1}{2n!} - \frac{\cos(2n\theta)}{2n!}.$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n\theta)}{n!} x^{2n} \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i2n\theta}}{n!} x^{2n} \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(x^2 e^{i2\theta}\right)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \mathbf{Re} \left(e^{x^2 e^{i2\theta}} \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2 \cos(2\theta)} \cos\left(x^2 \sin(2\theta)\right).
\end{aligned}$$

$$\left(e^{x^2 e^{i2\theta}} = e^{x^2\left(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right)} = e^{x^2\cos(2\theta)} \left(\cos(x^2 \sin(2\theta)) + i \sin(x^2 \sin(2\theta)) \right) \right)$$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cosh n}{2^n} x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \frac{1+\cosh n}{2^n} \sim_\infty \frac{e^n}{2^{n+1}} = b_n$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{e}{2} \Longrightarrow R = \frac{2}{e}.$$

- Pour $x = \pm \frac{2}{e}$, on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1+\cosh n}{2^n} x^n \neq 0$, alors il n'y a pas de convergence aux bornes du domaine $\Delta =]-\frac{2}{e}, \frac{2}{e}[$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cosh n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{ex}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2e}\right)^n \\
&= \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{ex}{2}}{1-\frac{ex}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{2e}}{1-\frac{x}{2e}} \\
&= \frac{x}{2-x} + \frac{ex}{2(2-ex)} + \frac{x}{2(2e-x)}.
\end{aligned}$$

8. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$, le coéfficient de la série entière est $a_n = n^{(-1)^n}$. Soit $f_n(x) = n^{(-1)^n} x^n$ le terme général de la série, on note R_a son rayon de convergence et soient b_n et c_n deux coéfficients de deux séries entières de rayon R_b et R_c respectivement tels que $b_n = n$ et $c_n = \frac{1}{n}$. On a alors

$$c_n \leq a_n \leq b_n \Longrightarrow R_b \leq R_a \leq R_c.$$

On peut facilement trouver $R_b = R_c = 1$, on en déduit que $R_a = 1$.

- pour $x=\pm 1$, $f_n(x) \nrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$ alors il n'y a pas de convergence aux borne du domaine $\Delta =]-1, 1[$.
  On a $a_n = \begin{cases} a_{2n} = 2n \\ a_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$
  On peut écrire la somme sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2 n + 1}{2n+1} = S_1(x) + S_2(x)$$

Calculons $S_1(x)$.

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^{2n}\right)' = x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\right)' \\ &= x \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

Calculons $S_2(x)$.

$$\begin{aligned} S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &\implies S_2'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \\ &\implies S_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \arg\tanh x. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \arg\tanh x, \quad \forall x \in \Delta.$$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n}$, le coéfficient de la série entière est $a_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{3+(-1)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & si \quad n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{2} & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

Le rayon de convergence est donnée par

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sup\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)} = 2.$$

- Pour $x = \pm 2$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} \neq 0$, alors il n'y a pad de convergence aux bornes du domaine de convergence $\Delta =]-2, 2[$.
  On a $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4^{2n}} & si \quad n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{2^{2n+1}} & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$

On peut écrire la somme sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^{2n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{16}\right)^n + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{16}} + \frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{16}{16-x^2} + \frac{2x}{4-x^2} \end{aligned}$$

Exercice 0.4

On considère la série entière de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$$

1. *Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence.*
2. *Calculer la somme de la série* $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^n n(n-1)}$

Corrigé :

1. on a $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, et $\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ alors $R = 1$.
   - $x = 1$: $f_n(1) = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, La série $\sum f_n(1)$ est une série alternée convergente.
   - $x = -1$: $f_n(-1) = \frac{1}{n(n-1)}$, La série $\sum f_n(-1)$ est équivalente à la série convergente

   $\sum \frac{1}{n^2}$, alors elle converge.

   Donc $\Delta = [-1, 1]$.
2. On a $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$ donc

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)}$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

alors

$$S'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$$

et

$$S(x) = \int_0^x \ln(1+t)dt = (1+x)\ln(1+x) - x$$

3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^n n(n-1)} = (1 + \frac{1}{\pi}) \ln(1 + \frac{1}{\pi}) - \frac{1}{\pi}$

Exercice 0.5

On considère la série entière de terme général

$$f_n(x) = \frac{x^{4n}}{4n+1}$$

1. *Déterminer le rayon de convergence.*
2. *Etudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.*
3. *Calculer la somme de la série* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{4n+1}$

Corrigé :

1. $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{4n+1}{4n+5}|x| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} |x|.$
   La série $\sum f_n$ converge si $|x| < 1$ alors $R = 1$.
2. Etude de convergence aux bornes de l'intervalle de convergence :
   - $x = 1$: $f_n(1) = \frac{1}{4n+1}$, la série $\sum f_n(1)$ est équivalente à une série harmonique alors elle diverge.
   - $x = -1$: $f_n(-1) = \frac{(-1)^{4n}}{4n+1} = \frac{1}{4n+1}$, la série $\sum f_n(-1)$ diverge aussi.

   Donc $\Delta =]-1, 1[$.
3. Calcul de la somme $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{4n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \text{ avec } x \neq 0.$$

On pose $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, alors $T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$ et

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)}$$

alors

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} \\ &= \int_0^x \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{2(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\arctan x \end{aligned}$$

Donc

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \arctan x\right), & x \in \Delta\backslash\{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Exercice 0.6

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}.$$

1. *Donner Δ le domaine de définition de f.*
2. *Vérifier que pour tout $x \in \Delta$, on a*

$$f(x) = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\Big).$$

3. Développer la fonction f en série entière et préciser le rayon de convergence.

Corrigé :

1. On a $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$, alors
$$\Delta=\{x\in\mathbb{R}: x\neq -1 \text{ et } x\neq 2\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}.$$
2. La relation est facilement démontrer en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples ou en réduisant au même dénominateur.
3. On remarque que f est la somme de deux séries géométriques.
$$f(x)=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\Big)=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})}\Big)$$
   - $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$, de rayon $R_1=1$.
   - $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$, de rayon $R_2=2$.

   Il résulte que
$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)x^n$$
   Puisque $R_1\neq R_2$ alors le rayon de convergence de la somme est donné par
$$R=\min(R_1,R_2)=1.$$

Exercice 0.7

Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence.

1. $f(x)=\ln(x^2-7x+12)$.
2. $f(x)=\sin^3 x$.
3. $f(x)=e^x\cos x$.

Corrigé :

1. On a $\forall x\in\mathbb{R}: x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$, donc le domaine de définition de f est : $D_f=]-\infty,3[\cup]4,+\infty[$.
$\forall x\in]-\infty,3[: x-3<0$ et $x-4<0$. Alors
$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& \ln\left[(x-3)(x-4)\right]\\ &=& \ln|x-3|+\ln|x-4|\\ &=& \ln(3-x)+\ln(4-x)\\ &=& \ln 3+\ln(1-\dfrac{x}{3})+\ln 4+\ln(1-\dfrac{x}{4})\\ &=& \ln 12+\ln(1-\dfrac{x}{3})+\ln(1-\dfrac{x}{4}). \end{array}$$
Or
$$\ln(1-\frac{x}{3})=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{x}{3}\Big)^n \text{ avec } \Big|\frac{x}{3}\Big|<1\iff |x|<3=R_1$$

et

$$\ln(1-\frac{x}{4}) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n \text{ avec } \Big|\frac{x}{4}\Big| < 1 \Longleftrightarrow |x| < 4 = R_2$$

Par suite

$$f(x) = \ln 12 - \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\Big)\frac{x^n}{n},$$

de rayon de convergence $R = \min(R_1, R_2) = 3$.

2. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \sin^3 x &= \Big(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\Big)^3 \\ &= \frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}. \end{aligned}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ et } \sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}.$$

Alors il en résulte

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Par la règle de D'Alembert pour les séries numériques, cette série converge pour tout réel x alors $R = +\infty$.

3. $f(x) = e^x\cos x$. On a $e^{ix} = \cos x + i\sin x \Longrightarrow e^x e^{ix} = e^x\cos x + ie^x\sin x$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{Re}\Big(e^{(1+i)x}\Big) \\ &= \mathbf{Re}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n\Big). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow (1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}\big(\cos(n\frac{\pi}{4}) + i\sin(n\frac{\pi}{4})\big),$$

donc $\mathbf{Re}(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\cos(n\frac{\pi}{4})$.

Par suite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos(n\frac{\pi}{4})}{n!}x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le coéfficient de cette série entière est $a_n = \dfrac{2^{\frac{n}{2}}\cos(n\frac{\pi}{4})}{n!}$, par comparaison on aura $R = +\infty$.