Ecole nationale Supérieure d'Informatique

Avril 2017

2CPI

Contrôle intermédiaire

Analyse mathématique 4

Durée : 2 heures

- Les documents et les téléphones portables sont interdits.

Questions de cours (1.5 points) :

I) Pour chaque affirmation répondre par $\boxed{V}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{F}$ sinon.

A1 : Soient $f : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à t et continue par rapport à x,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(x,t)dt. \quad \boxed{}$$

A2 : Soient $f : \mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable par rapport à x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est intégrable par rapport à t, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt. \quad \boxed{}$$

II) Compléter : Soit $f : J \times [a,b] \to \mathbb{R}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f.....................alors la fonction F définie par $F(x) \doteq \int_a^b f(x,t)\, dt$ est continue sur J.

Exercice 1 (5 points) :

1. Soit la fonction Ψ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par: $\Psi(x,y) = (ax+by, cx+dy)$

   où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

   Montrer que Ψ est un C^1 –difféomorphisme si et ssi $ad - bc \neq 0$.

2. Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{où } f \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

   En posant:

$$\begin{cases} u = ax + by, \\ v = cx + dy, \end{cases}$$

   où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$.

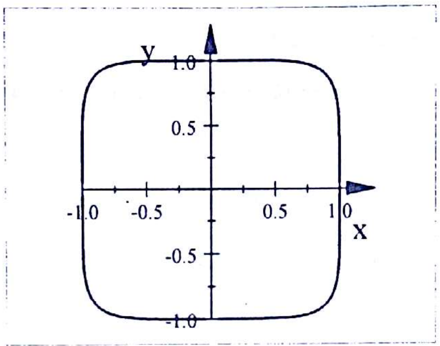
   Comment choisir a,b,c,d pour que cette EDP admette ses solutions sous forme $H(3x+y)$ où $H \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (4,5 points) : On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Trouver les points critiques de f et donner leur nature.
2. Vérifier que $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 - 2$.
3. En déduire que les extrema locaux de f sont globaux.

Exercice 3 (4 points) : Déterminer les points de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$ les plus proches et les plus éloignés de l'origine O, sachant que la réprésentation graphique de cette courbe est la suivante :



Courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$

NB : $2^{\frac{2}{3}} = 1.59$.

Exercice 4 (5 points) : On pose

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 1,\ 3y - 2x \leq 1 \text{ et } 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 \leq 36\right\}.$$

1. Détreminer Δ le transformé de D par le changement de variables

$$\begin{cases} u = \dfrac{x-1}{3}, \\ v = \dfrac{y-1}{2}. \end{cases}$$

2. Représenter Δ grapphiquement.
3. Calculer

$$\iint_D (x-1)(y-1)\, dx\, dy.$$