Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2017-2018
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen 1

Exercice 1. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *Soit la formule à priorité*

$$\mathbf{F} = \neg((\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{z} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{z})).$$

1. *Rappelons que* $\models \neg(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y))$.
   Déduire que pour toutes formules A *et* B *on a :* $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.
2. *Donner l'arbre de structure de* F.
3. *Transformer la formule* F *en une somme de monômes(FND).*
4. *La formule* F *est-elle satisfaisable ? La formule* F *est-elle valide? Justifier.*

Exercice 2. ⟦ ***3 pts*** ⟧

1. *Soient* F *et* G *deux formules. Montrer que :*

$$\models F \wedge G \text{ si et seulement si} \models F \text{ et } \models G.$$

2. *Soient* F *et* G *deux formules qui n'ont aucune variable commune. Montrer que*

$$\models F \vee G \text{ si et seulement si} \models F \text{ ou } \models G.$$

Exercice 3. ⟦ ***3 pts*** ⟧

1. *Transformer* $\neg F$ *en forme normale conjonctive où*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{s} \wedge \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r}) \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \Rightarrow (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{t}) \Rightarrow (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{t} \wedge \mathbf{p}$$

   Attention: Vous n'avez pas le droit de distribuer le produit par rapport à la somme.

2. *En utilisant l'arbre sémantique, étudier la validité de* F.

Exercice 4. ⟦ ***3 pts*** ⟧
*Utiliser la méthode de résolution(**Stratégie positive**) pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.*

1.

$$\{\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{d}, \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{e}, \mathbf{f} \vee \neg\mathbf{c}\} \models (\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{d} \vee \mathbf{e} \vee \mathbf{f}).$$

2.

$$\{\mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c}), \mathbf{b} \Rightarrow (\neg\mathbf{a} \vee \mathbf{c})\} \models \mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c}.$$

Exercice 5. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *On rappelle que le système* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *est complet.*
On définit le connecteur binaire $*$ *par*

$$x * y \equiv \neg(x \Rightarrow y).$$

1. *Que vaut* $0 * 0$? *Déduire que le système* $\{0, *\}$ *est incomplet.*
2. *Montrer que le système* $\{1, *\}$ *est complet.*
3. *Déduire que les systèmes* $\{\Leftrightarrow, *\}, \{\Rightarrow, *\}, \{\neg, *\}$ *sont complets.*

Exercice 6. ⟦ ***3 pts*** ⟧
Soient les lettres propositionnelles r, p, b, s *et* h *formalisant les propositions suivantes.*

r : *" Il est riche"*

p : *" Il est pauvre"*

b : *" Il est en bonne santé"*

s : *" Il fait du sport "*

h : *" Il est heureux"*

Question 1: *Formaliser les propositions suivantes à l'aide de ces lettres propositionnelles et des connecteurs usuels* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

1. *"Si il est pauvre alors il n'est pas riche "*
2. *"Faire du sport est une condition nécessaire pour être en bonne santé"*
3. *"Il est heureux si et seulement s'il est en bonne santé ou il est riche"*
4. *"Il est heureux et pauvre implique qu'il fait du sport"*

Question 2: *Le dernier énoncé est-il conséquence logique des 3 premiers?*
Justifier en utilisant Davis-Putnam.

Bon courage — **Le barème est donné à titre indicatif**