Epreuve de moyenne durée

Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (5,3)

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble des énoncés {1,2,3,4} ci-dessous est inconsistant.

1. Ceux qui ont la propriété R ont la propriété P et ceux qui n'ont pas la propriété R ont la propriété Q.
2. Si ceux qui ont la propriété P ont la propriété Q, alors ils ont tous la propriété R.
3. Ceux qui ont la propriété P n'ont pas la propriété R.
4. Si un seul au moins n'a pas la propriété R alors, un seul au moins n'a ni la propriété P ni la propriété Q.

Exercice 3 (3-3)

On considère l'ensemble Γ de formules tel que :

Γ : $\{\exists x\exists y P(x,y) \to \forall x R(x)$,

$\forall x\exists u\forall y\forall z\big((P(x,y) \to \neg R(u)) \wedge (R(u) \to P(x,y))\big)$,

$\forall x\forall y\forall z\ (P(x,y) \vee R(x))\}$

3.1. Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble de formules ci-dessous est inconsistant.

L'utilisation de symbole de constante n'est pas autorisée.

3.2. Montrer sans utiliser la propriété de consistance de la résolution que l'ensemble de formules ci-dessous est non satisfiable.

Exercice 3 **(6)**

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes sont valides ?

Prop 1. $\exists x P(x) \to \forall x Q(x), P(y) \models \neg Q(y)$

Prop 2. $\models \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$

Prop 3. L'ensemble Γ : $\{\exists x P(x) \to \forall x Q(x), P(y), \neg Q(z)\}$ est non satisfiable.

N.B. Toutes les réponses doivent être justifiées.

N.B. Remettre un cahier d'examen sans intercalaire.

Correction

Exercice 1 (5,3)

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble des énoncés {1,2,3,4} ci-dessous est inconsistant.

1. Ceux qui ont la propriété R ont la propriété P et ceux qui n'ont pas la propriété R ont la propriété Q.
   $\beta_1 : \forall x(R(x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x(\neg R(x) \rightarrow Q(x))$ **1 point**
2. Si ceux qui ont la propriété P ont la propriété Q, alors ils ont tous la propriété R.
   $\beta_2 : \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x R(x)$ **1,5 point**
3. Ceux qui ont la propriété P n'ont pas la propriété R.
   $\beta_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ **0.5 point**
4. Si un seul au moins n'a pas la propriété R alors, un seul au moins n'a ni la propriété P ni la propriété Q.
   $\beta_4 : \exists x \neg R(x) \rightarrow \exists x \neg P(x) \wedge \neg Q(x))$ **1 point**

Mise sous forme prenexe **0.5 point**

$\beta_{1p} : \forall x \forall y((R(x) \rightarrow P(x)) \wedge (\neg R(y) \rightarrow Q(y)))$

$\beta_{2p} : \exists x \forall y((P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow R(y))$

$\beta_{3p} : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

$\beta_{4p} : \exists y \forall x (\neg R(x) \rightarrow \neg P(y) \wedge \neg Q(y)))$

Forme de Skolem **0.5 point**

$\beta_{1ps} : \forall x \forall y((R(x) \rightarrow P(x)) \wedge (\neg R(y) \rightarrow Q(y)))$

$\beta_{2ps} : \forall y((P(a) \rightarrow Q(a)) \rightarrow R(y))$

$\beta_{3ps} : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

$\beta_{4ps} : \forall x (\neg R(x) \rightarrow \neg P(b) \wedge \neg Q(b)))$

Forme clausale **0.5 point**

$\beta_{1ps} : (\neg R(x) \vee P(x)) \wedge (R(y) \vee Q(y)))$

$\beta_{2ps} : (P(a) \rightarrow Q(a)) \rightarrow R(y)) \equiv (P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee R(y) \equiv (P(a) \vee R(y)) \wedge (\neg Q(a) \vee R(y))$

$\beta_{3ps} : \neg P(x) \vee \neg R(x)$

$\beta_{4ps} : R(x) \vee \neg P(b) \wedge \neg Q(b) \equiv (R(x) \vee \neg P(b)) \wedge (R(x) \vee \neg Q(b))$

S : $\{\neg R(x) \vee P(x),\ R(y) \vee Q(y),\ P(a) \vee R(y),\ \neg Q(a) \vee R(y),\ \neg P(x) \vee \neg R(x),\ R(x) \vee \neg P(b),\ R(x) \vee \neg Q(b)\}$

On renomme les variables **0.5 point**

Résolution **2 points**

1. $\neg R(x) \vee P(x)$
2. $R(y) \vee Q(y)$
3. $P(a) \vee R(u)$
4. $\neg Q(a) \vee R(v)$
5. $\neg P(x) \vee \neg R(x)$
6. $R(w) \vee \neg P(b)$
7. $R(s) \vee \neg Q(b)$
8. $P(a)$ Res(1,3)
9. $R(a)$ Res(2,4)
10. $\neg R(a)$ Res(5,8)
11. $\square$ Res(9,10)

S$\vdash$ □ $\Rightarrow$ S inconsistant $\Rightarrow$ l'ensemble $\{\beta_1,\beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ est inconsistant et par conséquent l'ensemble des énoncés est inconsistant.

Exercice 2 (3-3)

On considère l'ensemble Γ de formules tel que :

Γ : $\{\exists x\exists y P(x,y) \rightarrow \forall x R(x),$

$\forall x\exists u\forall y\forall z\big((P(x,y) \rightarrow\neg R(u)) \wedge (R(u) \rightarrow P(x,y))\big),$

$\forall x\forall y\forall z\ (P(x,y) \vee R(x))\}$

3.1. Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble de formules ci-dessous est inconsistant.

Forme prenexe et Skolem des formules de Γ : 1 point pour toutes les étapes de mise en forme

Γ_{ps} : $\{\forall x\forall y\forall z(P(x,y) \rightarrow R(z)),$

$\forall x\ \forall y\forall z\big((P(x,y) \rightarrow\neg R(f(x))) \wedge (R(f(x)) \rightarrow P(x,y))\big),$

$\forall x\forall y(P(x,y) \vee R(x))\}$

Forme clausale des formules de Γ :

S :$\{\neg P(x,y) \vee R(z), \neg P(x,y) \vee\neg R(f(x)), \neg R(f(x)) \vee P(x,y), P(x,y) \vee R(x)\}$

On renomme les variables

S :$\{\neg P(x_1,y_1) \vee R(z_1), \neg P(x_2,y_2) \vee\neg R(f(x_2)), \neg R(f(x_3)) \vee P(x_3,y_3), P(x_4,y_4) \vee R(x_4)\}$

<u>Résolution</u> **2 points**

C1.	$\neg P(x_1,y_1) \vee R(z_1)$	
C2.	$\neg P(x_2,y_2) \vee\neg R(f(x_2))$	
C3.	$\neg R(f(x_3)) \vee P(x_3,y_3)$	
C4.	$P(x_4,y_4) \vee R(x_4)$	
C5.	$\neg R(f(x_3))$	Res (C_2, C_3)
C6.	$P(f(x_3),y_4) \vee R(f(x_3))$	$C_4[f(x_3)/x_4]$
C7.	$P(f(x_3),y_4) \vee P(x_3,y_3)$	Res (C_3, C_6)
C8.	$P(f(x_3),y_4)$	Facteur de C7 $[f(x_3)/x_3, y_4/y_3]$
C9.	$\neg P(f(x_3),y_4) \vee R(f(x_3))$	$C_1[f(x_3)/x_1, f(x_3)/z_1]$
C10.	$R(f(x_3))$	Res (C_8, C_9)
C11.	□	Res(5,10)

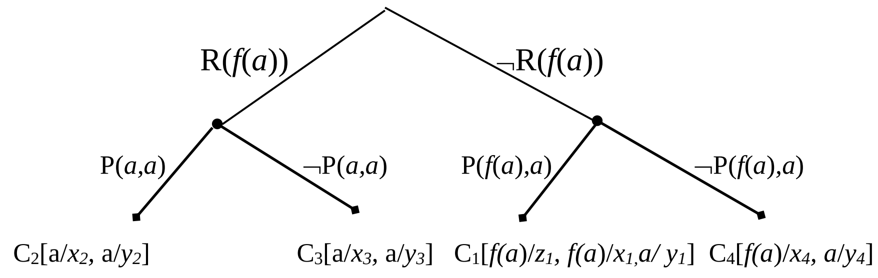
3.2. Montrer sans utiliser la propriété de consistance de la résolution que l'ensemble de formules ci-dessous est non satisfiable.

1 point pour toutes les étapes préliminaire

Domaine de Herbrand : H : $\{a, f(a), \ldots\ldots\}$

Base de Herbrand : H : {P(a, a), P(a, f(a)), …., R(f(a)),……}

Arbre sémantique **2 points**



Exercice 3 **(6)**

Laquelle ou lesquelles des propositions suivantes sont valides ?

Prop 1. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x), P(y) \models \neg Q(y)$
Prop 2. $\models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
Prop 3. L'ensemble Γ : $\{\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x), P(y), \neg Q(z)\}$ est non satisfiable

Proposition 2

$\beta : \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$

Nous proposons la solution suivante, mais les autres solutions sont acceptées lorsqu'elles sont justifiées.

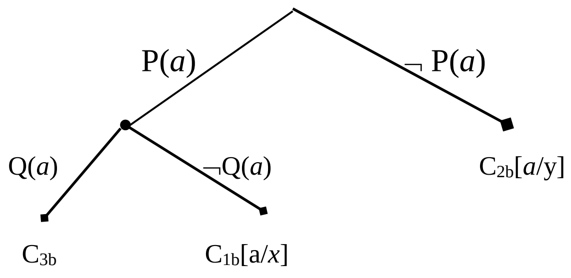
$\models \beta$ ssi $\neg\beta : (\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge (\forall x P(x)) \wedge \exists x \neg Q(x)$ est non satisfiable. $\neg\beta$ est non satisfiable ssi il existe un arbre sémantique clos pour S l'ensemble de clauses qui en est issu.

L'ensemble S des clauses issu de $\neg\beta$ est le suivant :

S : $\{\neg P(x) \vee Q(x), P(x), \neg Q(a)\}$ a est un symbole de constant arbitraire.

Nous renommons les variables de S :

S : $\{\neg P(x) \vee Q(x), P(y), \neg Q(a)\}$



Proposition 3

La variable y et la variable z sont libres dans P(y) et ¬Q(z). Ces deux formules ne sont donc pas des clauses. Nous ne pouvons donc pas utiliser la résolution ou un arbre sémantique. Pour pouvoir utiliser l'une ou l'autre de ces deux méthodes, il faut utiliser la propriété suivante :

$\{\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x), P(y), \neg Q(z)\}$ est non satisfiable ssi $\{\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x), \exists y P(y), \exists z \neg Q(z)\}$

est non satisfiable.

Nous proposons la solution suivante :

Supposons que Γ soit satisfiable. Il existerait dans ce cas une interprétation I et une valuation v telles que :

$I \models \exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ (1)

et $I \models P(y)_v$ (2)

et $I \models \neg Q(z)_v$ (3)

Posons $v(y) = d_y \in D_I$ et $v(z) = d_z \in D_I$

Si $I(P)(d)$ pour moins un élément $d \in D_I$, alors $I(Q)(d)$ pour tout $d \in D_I$ **(1')**

La partie gauche de la proposition 1' est vérifiée puisque nous avons $I(P)(d_y)$. Par conséquent la partie droite de **(1')** est aussi vérifiée. Nous avons donc :

$I(Q)(d)$ pour tout $d \in D_I$ (4)

De **(4)**, nous pouvons déduire $I(Q)(d_z)$. Contradiction avec **(3)**.