Rappel de cours

Dans cette première partie, on rappelle les résultats fondamentaux sur les intégrales définies et impropres paramétrées.

1. **Intégrales définies.**

   Soit a, b deux nombres reels, et soit la fonction

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t).$$

   Rappelons alors le théorème suivant (revoir programme de 1^{ere} année)

   Théorème 0.1. *Si la fonction f est définie et **continue** sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, alors la fonction f est intégrable sur $[a, b]$, autrement dit, l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ existe (ou encore qu'elle est finie). L'intégrale I sera notée indifferemment comme suit*

$$I = \int_a^b f(t)dt \qquad ou \qquad I = \int_{[a,b]} f(t)dt$$

   Remarque 0.1. *À retenir que les deux hypothèses fondamentales dont il faut vraiment s'assurer pour pouvoir appliquer le théorème précédent, sont le fait que l'intervalle $[a, b]$ est **fermé et borné** (on dit parfois qu'il est **compact**), et que f est **continue** en tout point de $[a, b]$.*

2. **Intégrales définies dépendant d'un paramètre s.**

   Soit maintenant a, b deux nombres reels, et soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (ie $D \subset \mathbb{R}$) et soit la fonction à deux variables

$$f : [a, b] \times D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, s) \longmapsto f(t, s).$$

   Fixons une valeur du paramètre $s \in D$. Si la fonction $f(t, s)$ est **continue** sur le compact $[a, b]$ comme fonction de la seule variable d'integration t (car on a supposé que s est fixé), alors on est assuré d'après le théorème (0.1) précédent, que l'intégrale $\int\limits_a^b f(t,s)dt$ existe. Il est clair que cette intégrale est une fonction de s, car sa valeur depend du paramètre $s \in D$, et on la note $F(s)$. On dit que la fonction $F(s)$ est une intégrale définie parametrée, et on la note

$$F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt.$$

Dans les exercices concernant la fonction $F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt$, on sera surtout interssé par traiter les deux questions naturelles suivantes :

(a) Dans quels cas, l'intégrale définie $F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt$ est elle continue comme fonction du paramètre $s \in D$?

(b) Dans quels cas, l'intégrale définie $F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt$ est elle dérivable par rapport au paramètre $s \in D$?

Pour répondre à ces deux questions, on applique les deux théorèmes suivants.

Théorème 0.2. ***(Theorème de continuité)***
Si la fonction à deux variables $f(t,s)$ est une fonction ***continue*** *sur l'ensmble $[a,b] \times D$, c'est à dire si elle est* ***continue*** *relativement à la variable d'intégration $t \in [a,b]$ et aussi* ***continue*** *relativement au paramètre $s \in D$, alors l'intégrale parametrée*

$$F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt.$$

existe *et en plus c'est une fonction* ***continue*** *comme fonction du paramètre $s \in D$.*

Remarque 0.2. *La continuité de $f(t,s)$ relativement à la variable d'intégration $t \in [a,b]$ nous assure que l'intégrale définie $F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt$ existe, et la continuité de $f(t,s)$ relativement au paramètre $s \in D$ nous assure que cette intégrale définie $F(s) = \int\limits_a^b f(t,s)dt$ est une fonction* ***continue*** *comme fonction de $s \in D$.*

Théorème 0.3. ***(Theorème de continuité)***
Si la fonction à deux variables $f(t,s)$ est une fonction ***continue*** *sur l'ensmble $[a,b] \times D$, c'est à dire si elle est* ***continue*** *relativement à la variable d'intégration $t \in [a,b]$ et aussi* ***continue*** *relativement au paramètre $s \in D$, et si en plus $f(t,s)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial s}$ qui est continue en tout point $(t,s) \in [a,b] \times D$, alors l'intégrale parametrée*

$$F(s) = \int_a^b f(t,s)dt.$$

existe *et en plus c'est une fonction* ***érivable*** *comme fonction du paramètre $s \in D$, et on a la formule de dérivation sous le signe somme*

$$F^{'}(s) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)dt.$$

Remarque 0.3. *La continuité de $f(t,s)$ relativement à la variable d'intégration $t \in [a,b]$ nous assure que l'intégrale définie $F(s) = \int_a^b f(t,s)dt$ existe, et la continuité de $f(t,s)$ relativement au paramètre $s \in D$ nous assure que cette intégrale définie $F(s) = \int_a^b f(t,s)dt$ est une fonction* ***continue*** *comme fonction de $s \in D$.*

3. **Intégrales Impropres.**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, il existe alors deux types d'intégrales impropres :
— Les intégrales impropres de la forme :

$$\int_{]a,b]} f(t)dt, \qquad \int_{[a,b[} f(t)dt, \qquad \int_{]a,b[} f(t)dt.$$

Ce genre d'intégrales sont dites de 1^{ere} espèce.
— Les intégrales impropres de la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt, \qquad \int_{a}^{+\infty} f(t)dt, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

Ce genre d'intégrales sont dites de 2^{ieme} espèce.

Remarque 0.4. *Il faut commencer d'abord par retenir qu'une intégrale imprpre de 1^{ere} ou de 2^{ieme} espèce, n'est pas à proprement parler une intégrale, mais plutôôt la limite d'une intégrale.*

Exemple

On définit l'intégrale imprpre $\int\limits_{[a,b[} f(t)dt$ *de la manère suivante*

$$\int\limits_{[a,b[} f(t)dt = \lim_{X \longrightarrow b} \int\limits_a^X f(t)dt$$

De même, on définit l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ *de la manière :*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \int\limits_a^X f(t)dt$$

Remarque 0.5. *Du moment que les intégrales impropres sont des limites d'intégrales, alors le premier problème qui se pose dans l'étude de ces intégrales est le problème de convergence. En effet, dire par exemple que l'intégrale imprpre* $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge si*

$$\lim_{X \longrightarrow +\infty} \int\limits_a^X f(t)dt$$

existe et en plus elle est finie. On fait de même pour les intégrales imprpores de 1^{ere} espèce.
Si l'intégrale impropre $\int f(t)dt$ converge, on dit alors que la fonction $f(t)$ est intégrable. ***Exemple.***
Si $\lambda > 0$, alors l'intégrale imprpore $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *converge.*
En effet, on a

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \int\limits_0^X e^{-\lambda t}dt = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{t=0}^{t=X} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda t} - 1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Critères de convergence des Intégrales imprpres.

Les critères suivants sont très utiles dans les exercices :

$$\int_a^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda > 0.$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > 1. \quad \text{(Critère de Riemann)}$$

$$\int_a^{b} \frac{1}{(t-b)^\beta} dt \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < 1.$$

4. **Intégrales impropres dépendant d'un paramètre s.**

Soit maintenant a un nombre reel, et soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (ie $D \subset \mathbb{R}$) et soit la fonction à deux variables

$$f : [a, +\infty[\times D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, s) \longmapsto f(t, s).$$

On s'interesse à étudier une intégrale impropre de la forme suivante (les autres intégrales se traitent de la même façon)

$$F(s) = \int_a^{+\infty} f(t, s) dt$$

Si pour tout s fixé, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t, s)dt$ converge, on dit que cette l'intégrale converge simplement.

Remarque 0.6. ***(Les types de convergence)***

(a) ***Convergence simple.***
Elle consiste à determiner l'ensemble $D \subset \mathbb{R}$ pour lequel l'intégrale $F(s) = \int_a^{+\infty} f(t, s)dt$ converge simplement(ie point par point). Cet ensembel constitue le domaine de définition de la fonction $F(s)$, et en même temps le domaine de convergence simple de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t, s)dt$.

(b) ***Convergence normale.***

L'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(t,s)dt$ *est dite normalement convergente sur l'ensemble des paramètres* $s \in D$*, s'il existe une fonction positive intégrable* $g(t)$ *définie sur* $[a, +\infty[$*, et ne dépendant pas du paramètre* s*, et telle que*

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(t,s)|\, dt \leq \int\limits_a^{+\infty} g(t)dt$$

autrement dit

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t,s)dt \text{ converge normalement } \iff \int\limits_a^{+\infty} \sup_{s\in D} |f(t,s)|\, dt \quad \text{converge}$$

(c) ***Convergence uniforme.***

Généralement, on ramène l'étude de la convergence uniforme de l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(t,s)dt$ *à l'étude de la convergence uniforme de la suite de fonctions* $F_n(s) = \int\limits_a^{n} f(t,s)dt$*.*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t,s)dt \text{ converge uniformement } \iff \int\limits_a^{n} f(t,s)dt \quad \text{converge uniformement}$$

On a les implications suivantes :

Convergence Normale $\Longrightarrow$ Convergence Uniforme $\Longrightarrow$ Convergence Simple

Remarque 0.7. — *Pour montrer que l'intégrale impropre* $F(s) = \int\limits_a^{+\infty} f(t,s)dt$ *converge uniformément, on passe généralement par la convergence normale.*

— *Pour montrer que l'intégrale impropre* $F(s) = \int\limits_a^{+\infty} f(t,s)dt$ *ne converge pas uniformément, on procède comme on le faisait pour les séries de fonctions, ie on construit un contre exemple, ie une fonction*

$$s = g(t)$$

telle que l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} f(t,g(t))dt$ *diverge.*

Dans les exercices concernant la fonction $F(s) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$, on sera interssé par traiter les deux questions naturelles suivantes :

(a) Dans quels cas, l'intégrale impropre $F(s) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$ est elle continue comme fonction du paramètre $s \in D$?

(b) Dans quels cas, l'intégrale impropre $F(s) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$ est elle dérivable par rapport au paramètre $s \in D$?

Pour répondre à ces deux questions, on applique les deux théorèmes suivants.

Théorème 0.4. ***(Theorème de continuité)***
*Si l'intégrale $\int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$ **converge uniformément**, et si la fonction à deux variables $f(t,s)$ est une fonction est **continue** relativement au paramètre $s \in D$, alors l'intégrale parametrée*

$$F(s) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt.$$

*est une fonction **continue** comme fonction du paramètre $s \in D$.*

Remarque 0.8. *A retenir que la convergence simple de l'intégrale parametré $\int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$ et la continuité de $f(t,s)$ par rapport au paramètre s ne suffisent pas pour assurer la continuité de l'intégrale $F(s) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$ par rapport à s.*

Théorème 0.5. ***(Theorème de dérivabilité)***
Si la fonction à deux variables $f(t,s)$ est dérivable relativement au paramètre s, et si les deux intégrales paramètrées

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt \quad \text{et} \quad \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)dt$$

convergent uniformément, alors la fonction $F(s) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(t,s)dt$ est dérivable par rapport au paramètre s, et en plus, on a la formule de *dérivation sous le signe somme suivante*

$$F^{'}(s) = \int_{a}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)dt$$

Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 2 :

1. Soit la fonction $F(x)$ définie par l'intégrale parametrée

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-tx^2} dt$$

   (a) **Convergence simple.**

   Il est clair que l'integrale

$$\begin{array}{lcl} F(x) \quad \text{est convergente} & \Longleftrightarrow & x^2 > 0 \\ & \Longleftrightarrow & x \neq 0 \end{array}$$

   et donc le domaine de convergence simple de $F(x)$ est

$$Dom_F = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$$

   (b) **Convergence uniforme.**

   Pour des raisons de symetrie, on se contente d'étudier la convergence uniforme de $F(x)$ seulement sur $]0, +\infty[$.

   i. Observons d'abord que la présence du nombre 0 à l'extrémité de l'intervalle $]0, +\infty[$, va nous poser un problème, et donc on va perdre la convergence uniforme sur cet intervalle. En effet, pour celà, il suffit de construite un contre exemple, ie une fonction $x = g(t)$, de manière que si l'on remplace le paramètre x par cette fonction $g(t)$, l'intégrale que l'on obtienne (qui bien sûr n'est plus paramètrée) devienne divergente.
   Remplaçons le paramètre x par la fonction $x = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, alors l'integrale

$$F = \int_{0}^{+\infty} e^{-tg(t)^2} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-1} dt = +\infty$$

est clairement divergente, et donc sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'integrale $F(x)$ ne converge pas uniformément.

ii. Essayons de nous placer un peu loin de 0, et coisissons un reel $a > 0$, et étudions la convergence uniforme sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
On a

$$\begin{aligned}
& x \geq a \\
\Longrightarrow \quad & x^2 \geq a^2 \\
\Longrightarrow \quad & tx^2 \geq a^2 t && (\text{car} \quad t \geq 0) \\
\Longrightarrow \quad & -tx^2 \leq -a^2 t \\
\Longrightarrow \quad & e^{-tx^2} \leq e^{-ta^2} && (\text{car l'exponentielle est croissante}) \\
\Longrightarrow \quad & \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-ta^2} dt
\end{aligned}$$

et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta^2} dt$ est clairement convergente (car $a^2 > 0$), et est en plus independante du paramèètre $x \in [a, +\infty[$, alors par le principe de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$, et donc elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Conclusion : L'intégrale $F(x)$ converge uniformément sur tous les domaines de la forme

$$Dom_{a,b}(F) =]-\infty, -b] \bigcup [a, +\infty[\qquad (\text{avec } a, b > 0)$$

Remarque : Il n'est pas necessaire de choisir $a = b$ dans le domaine de la convergence uniforme précédent, car le travail qu'on a fait en prenant $a > 0$, on peut le refaire avec un autre nombre $b > 0$, et de montrer la convergence uniforme sur l'intervalle $]-\infty, -b]$.

2. Soit la fonction $G(x)$ définie par l'intégrale parametrée

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$$

(a) **Convergence simple.**

On distingue deux cas :
1^{er} cas. $x \leq 0$.
Observons dans ce cas que si $x \leq 0$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$ est necessairement divergente.
En effet, si $x \leq 0$, on a

$$e^{-t^2 x} \geq 1$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt \geq \int_0^{+\infty} dt = +\infty$$

et comme $\int_0^{+\infty} dt$ diverge, alors par le principe de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$ diverge.
2^{eme} cas. $x > 0$.
Décomposons l'intervalle $[0, +\infty[= [0, 1] \bigcup [1, +\infty[$. On a alors

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt = \int_0^{1} e^{-t^2 x} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$$

Comme l'intégrale $\int_0^{1} e^{-t^2 x} dt$ est une intégrale définie, et donc par définition elle est convergente (car la fonction à intégrer est continue), il suffit alors d'étudier la deuxième intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$.
Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
& t \geq 1 \\
\Longrightarrow\ & t^2 \geq t \\
\Longrightarrow\ & x.t^2 \geq t.x \qquad\qquad (\text{car} \quad x \geq 0) \\
\Longrightarrow\ & -x.t^2 \leq -x.t \\
\Longrightarrow\ & e^{-x.t^2} \leq e^{-x.t} \quad \text{car l'exponentielle est croissante} \\
\Longrightarrow\ & \int_1^{+\infty} e^{-x.t^2} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-x.t} dt
\end{aligned}$$

et comme $x > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x.t}dt$ est convergente, et donc par le principe de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x.t^2}dt$ converge. En conclusion, on a

$$G(x) \quad \text{est convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0$$

et donc le domaine de convergence simple de $G(x)$ est

$$Dom_G =]0, +\infty[$$

(b) **Convergence uniforme.**
Supposons donc $x > 0$, et décomposons comme précédemment l'intégrale

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}dt = \int_0^1 e^{-t^2 x}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2 x}dt$$

il suffit d'étudier donc seulemnt la convergence uniforme de

$$\int_1^{+\infty} e^{-x.t^2}dt \qquad (\text{avec} \quad x \in]0, +\infty[)$$

i. Observons d'abord que lorsque x s'approche du nombre 0 dans l'intervalle $]0, +\infty[$, on peut avoir un problème de convergence, et donc on risque de perdre la convergence uniforme sur intervalle $x \in]0, +\infty[$. En effet, pour celà, il suffit de construite un contre exemple, ie une fonction $x = g(t)$, de manière que si l'on remplace le paramètre x par cette fonction $g(t)$, l'intégrale que l'on obtienne (qui bien sûr n'est plus paramètrée) devienne divergente.
Remplaçons le paramètre x par la fonction $x = g(t) = \frac{1}{t^2}$, alors l'integrale

$$G = \int_1^{+\infty} e^{-t^2 g(t)}dt = \int_1^{+\infty} e^{-1}dt = +\infty$$

est clairement divergente, et donc sur l'intervalle $x \in]0, +\infty[$, l'integrale $G(x)$ ne converge pas uniformément.

ii. Essayons maitenant de nous éloigner un peu de $x = 0$, et choisissons un reel $a > 0$, et étudions la convergence uniforme de $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2 g(t)} dt$ pour $x \in [a, +\infty[$.
Comme pour $t \in [1, +\infty[$, On a $t^2 \geq t$, alors

$$\begin{array}{lll} & x \geq a & \\ \Longrightarrow & x.t^2 \geq a.t^2 & (\text{car} \quad t^2 \geq 0) \\ \Longrightarrow & x.t^2 \geq a.t & (\text{car} \quad t^2 \geq t) \\ \Longrightarrow & -x.t^2 \leq -a.t & \\ \Longrightarrow & e^{-x.t^2} \leq e^{-a.t} & (\text{car l'exponentielle est croissante}) \\ \Longrightarrow & \int\limits_1^{+\infty} e^{-x.t^2} dt \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-a.t} dt & \end{array}$$

et comme l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} e^{-a.t} dt$ est clairement convergente (car $a > 0$), et est en plus independante du paramèètre $x \in [a, +\infty[$, alors par le principe de comparaison, l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x.t^2} dt$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$, et donc elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Conclusion : L'intégrale $G(x)$ converge uniformément sur tous les domaines de la forme

$$Dom_{a,b}(G) = [a, +\infty[\qquad\qquad (\text{avec } \ a > 0)$$

Corrigé de l'exercice 3 : Soit l'intégrale

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

1. L'intégrale I existe car c'est une intégrale définie. En effet, l'intervalle d'intégration $[0, 1]$ est fermé et borné, et la fonction à integrer

$$f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

est définie et continue sur $[0, 1]$.

2. Soit $a > 0$ et soit $(t, x) \in [0, 1] \times [a, +\infty[$.
Considérons alors la fonction $f(x, t) = \frac{1}{x^2+t^2}$ et l'intégrale paramètrée

$$F(x) = \int_0^1 f(x, t) = \int_0^1 \frac{dt}{x^2 + t^2}$$

Du moment que pour tout $x \geq a > 0$, la fonction $f(x, t)$ est définie et continue sur $[0, 1]$, alors l'intégrale $F(x) = \int_0^1 f(x, t)$ est une intégrale définie. Par ailleurs, la fonction $f(x, t)$ est continue relativement au paramètre $x \in [a, +\infty[$, donc $F(x) = \int_0^1 f(x, t)$ est continue relativement à x. Et comme $f(x, t)$ est dérivable de classe $\mathcal{C}^1$ relativement à x, alors l'intégrale parametrée $F(x) = \int_0^1 f(x, t)$ est aussi dérivable de classe $\mathcal{C}^1$ relativement au paramèètre x.
<u>Conclusion</u> :
L'intégrale parametrée $F(x) = \int_0^1 f(x, t)$ est dérivable de classe $\mathcal{C}^1$ relativement au paramètre $x \in [a, +\infty[$.

3. Sachant qu'une primitive de la fonction $g(u) = \frac{1}{1+u^2}$ est la fonction $G(u) = Arctg(u)$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{dt}{x^2 + t^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{d\left(\frac{t}{x}\right)}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{x} . \left[Arctg\left(\frac{t}{x}\right) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{x} . \left[Arctg\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right] \\ &= \frac{1}{x} . Arctg\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc
$$F(x) = \frac{1}{x}.Arctg\left(\frac{1}{x}\right)$$
Par dérivation, on obtient
$$F^{'}(x) = -\frac{Arctg\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} + \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{x}$$
ce qui fait
$$\begin{aligned} F^{'}(x) &= -\frac{Arctg\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} + \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2}\left[Arctg\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}\right] \end{aligned}$$

<u>Calcul de I</u>
Considérons l'intégrale parametrée
$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{x^2+t^2}$$
On a d'après le théorème de la dérivée d'une intégrale parametrée (dérivation sous le signe somme)
$$F^{'}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+t^2\right)^2}dt \tag{1}$$
et d'après la question précédente
$$F^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}\left[Arctg\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}\right] \tag{2}$$
En comparant (1) et (2), on obtient
$$-\int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+t^2\right)^2}dt = -\frac{1}{x^2}\left[Arctg\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}\right]$$
En posant $x = 1$, on en déduit que
$$-2I = -\left[Arctg(1) + \frac{1}{2}\right]$$

ce qui donne

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

Corrigé de l'exercice 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + \sqrt{t}} dt$$

Pour étudier la convergence simple de $I(x)$, décomposons la en somme de deux intégrales

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x)$$

avec

$$I_1(x) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + t^{\frac{1}{2}}} dt$$

et

$$I_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + t^{\frac{1}{2}}} dt$$

1. Etudions l'intégrale $I_2(x)$. Cette intégrale est imprpre au voisinage de $+\infty$.
   Au voisinage de $+\infty$, c'est à dire quand t est assez grand, le terme $t^{\frac{1}{2}}$ est negligeable devant t^3, et on peut écrire
   $$t^{\frac{1}{2}} = 0\left(t^3\right)$$
   On en conclut alors que
   $$t^3 + t^{\frac{1}{2}} \approx t^3$$
   Donc
   $$\begin{aligned} I_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + t^{\frac{1}{2}}} dt &\approx \int_1^{+\infty} \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{t^3} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{2-x}}{t^3} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \end{aligned}$$

En rappelant les conditions de convergence des intégrales impropres, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-x}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad 3-x>1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2>x$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad x+1>1 \quad \Longleftrightarrow \quad x>0$$

En conclusion $I_2(x)$ converge si et seulement si $2 > x$ et $x > 0$, ce qui veut dire

$$I_2(x) \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad 0<x<2 \tag{3}$$

2. Etudions l'intégrale $I_1(x)$. Cette intégrale est imprpre au voisinage de $t = 0$.
Au voisinage de $t = 0$, le terme t^3 est negligeable devant $t^{\frac{1}{2}}$, et on peut écrire

$$t^3 = 0\left(t^{\frac{1}{2}}\right)$$

On en conclut alors que

$$t^3 + t^{\frac{1}{2}} \approx t^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^1 \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + t^{\frac{1}{2}}} dt \approx \int_0^1 \frac{t^x + t^{2-x}}{t^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^x}{t^{\frac{1}{2}}} dt + \int_0^1 \frac{t^{2-x}}{t^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-x}} + \int_0^1 \frac{dt}{t^{x-\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

En rappelant les conditions de convergence des intégrales impropres, on a

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-x}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}-x<1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}<x$$

et

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{x-\frac{3}{2}}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{3}{2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{2}$$

En conclusion $I_1(x)$ converge si et seulement si $\frac{1}{2} < x$ et $x < \frac{5}{2}$, ce qui veut dire

$$I_1(x) \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \tag{4}$$

En comparant les résultats (3) et (4) on en déduit que

$$I(x) \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} < x < 2$$

Solution de l'exercice 6 : Soit l'application $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ (A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$) définie par

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-tx}\sin t}{t}, & \text{si } t \neq 0\,; \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. On suppose que $A = [0,1]$, et $B = \mathbb{R}$. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t,x)dt$
   a. Montrons que F est continue, dérivable et calculons F'
      - Continuité de F dans $\mathbb{R}$: f est continue par rapport aux variables $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, donc F est continue dans $\mathbb{R}$.
      - Dérivabilité de F dans $\mathbb{R}$:
        — f est continue dans $[0,1] \times \mathbb{R}$.
        — $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -e^{-tx}\sin t$ est une fonction continue dans $[0,1] \times \mathbb{R}$, alors F est dérivable et

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \int_0^1 -e^{-tx}\sin t dt \tag{5}$$

      - Calcul de $F'(x)$: Intégrons deux fois par partie (5)

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{e^{-tx}\sin t}{x}\right]_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 e^{-tx}\cos t dt \\ &= \frac{e^{-x}\sin 1}{x} - \frac{1}{x}\left[\left(\frac{-e^{-tx}\cos t}{x}\right)_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 e^{-tx}\sin t dt\right] \\ &= \frac{e^{-x}\sin 1}{x} + \frac{e^{-x}\cos 1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}F'(x) \end{aligned}$$

Ce qui implique que $F'(x) = \dfrac{(x\sin 1 + \cos 1)e^{-x} - 1}{x^2+1}$

b. Montrons que F est de classe C^1 : F' est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions continues alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $A = [0, +\infty[$ et $B =]0, +\infty[$

a. Montrons que F est continue dans $\mathbb{R}$:

$\star$ f est continue par rapport aux variables $(t, x) \in [0, +\infty[\times[a, +\infty[$.

$\star$ $|f(t, x)| \leq e^{-ta} = g(t)$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge alors F est normalement convergente, par suite uniformement convergente.

En déduit que F est continue dans $\mathbb{R}^+$

b. Montrons que F est dérivable :

f est continue par rapport aux variables $(t, x) \in [0, +\infty[\times[a, +\infty[$.

$\star$ $\int_0^{+\infty} f(t, x)dt$ converge.

$\star$ $\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times[a, +\infty[$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -e^{-tx}\sin t$ existe et est continue.

$\star$ $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq e^{-ta} = g(t)$ donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$ converge uniformement

D'où F est dérivable.

c. Calculons $F'(x)$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^{+\infty} -e^{-tx}\sin t dt \\
&= Im\Big(\int_0^{+\infty} -e^{-(x+i)t}dt\Big) \\
&= Im\Big(-\frac{e^{-(x+i)t}}{x+i}\Big)_0^{+\infty} \\
&= Im(\frac{1}{x+i}) \\
&= Im(\frac{x-i}{x^2+1}) \\
&= -\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{-tx}\sin t}{t}dt = 0.$

d. déduisons l'expression de F :

$F(x) = \int F'(x)dx = -\int \dfrac{1}{x^2+1} = -\arctan x + C$

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0 \Longleftrightarrow C = \dfrac{\pi}{2}$

d'où $F(x) = -\arctan x + \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+_*$ la fonction définie par $f(t,x) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t}$

1. Montrons que $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge :
   - $\star$ $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} t^2 f(t,x) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ est de même nature que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui est convergente, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge simplement.
   - $\star$ $f(t,x) = h(t)g(t,x)$ où $h(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et $g(t) = e^{-tx}$
     - $\star$ $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} h(t) = 0$.
     - $\star$ h est une fonction décroissante pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
     - $\star$ $\left| \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt \right| = \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{a}$, $\forall x > a > 0$.

   Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ est uniformement convergente d'après le théorème d'Abel.
2. Montrons que F est continue :
   - $\star$ f est une fonction continue par rapport aux variables $(t, x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
   - $\star$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformement

   Alors F est continue sur $\mathbb{R}^+_*$.

   - Montrons que F est dérivable :
   - $\star$ f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
   - $\star$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_* : \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-te^{-tx}}{1+t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
   - $\star$ $\forall x \in \mathbb{R}^+_* : \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformement.
   - $\star$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-tx}}{1+t}dt$ converge uniformement, en effet

$$\left| \frac{-te^{-tx}}{1+t} \right| \leq e^{-tx} = g(t)$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

3. Montrons que F est de classe $C^1(\mathbb{R}_*^+)$: F' est continue car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ converge uniformement, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ donc F est de classe $C^1(\mathbb{R}_*^+)$.
4. $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} F'(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{-te^{-tx}}{1+t}dt = 0.$$
   et
   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t}dt = 0.$$
   $$\begin{aligned} F(x) - F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t}dt - \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-tx}}{1+t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$
   Donc $x(F'(x) - F(x)) = 1$. On déduit que F est la solution de l'equation différentielle
   $$\begin{cases} x(y'-y) = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 8 : Pour $x > 0$, on définit l'application $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-tx}dt$

1. Montrons que F est continue sur $]0, +\infty[$:
   Soit $f(t,x) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-tx}$ définie et continue sur $]0,1] \times \mathbb{R}_*^+$.
   $|f(t,x)| \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}dt$ converge car
   $$\lim_{t\longrightarrow0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \lim_{t\longrightarrow0} \frac{1-(1-\frac{t^2}{2})}{t^2} = \frac{1}{2}.$$
   Alors $\displaystyle\int_0^1 f(t,x)dt$ converge normalement donc uniformement, par consequent F est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrons que F' et F'' existent :

   - Montrons que F est dérivable :

$\star$ f est continue sur $]0,1] \times \mathbb{R}_*^+$.

$\star$ $\forall (t,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}_*^+ : \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\dfrac{1-\cos t}{t} e^{-tx}$ est une fonction continue sur $]0,1] \times \mathbb{R}_*^+$.

$\star$ $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : \displaystyle\int_0^1 f(t,x)dt$ converge uniformement.

$\star$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \int_0^1 -\frac{1-\cos t}{t} e^{-tx} dt$ converge uniformement. en effet

$$\left| -\frac{1-\cos t}{t} e^{-tx} \right| \leq e^{-ta}, \ \forall x > a > 0, \text{ et } \int_0^1 e^{-ta} dt \text{ converge.}$$

Donc F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{1-\cos t}{t} e^{-tx} dt$$

- Montrons que F' est dérivable :

$\star$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]0,1] \times \mathbb{R}_*^+$.

$\star$ $\forall (t,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}_*^+ : \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = (1-\cos t) e^{-tx}$ est une fonction continue sur $]0,1] \times \mathbb{R}_*^+$.

$\star$ $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ converge uniformement.

$\star$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt = \int_0^1 (1-\cos t) e^{-tx} dt$ converge uniformement. $(|(1-\cos t)e^{-tx}| \leq 2e^{-ta})$.

Donc F' est dérivable et

$$F''(x) = \int_0^1 (1-\cos t) e^{-tx} dt$$

Alors F est de classe C^2.

3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} F'(x) = \int_0^1 \lim_{x \longrightarrow +\infty} -\frac{1-\cos t}{t} e^{-tx} dt = 0.$ et

$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = \int_0^1 \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-tx} dt = 0.$

•Calculons $F(x)$

$$
\begin{aligned}
F''(x) &= \int_0^1 (1-\cos t)e^{-tx}dt \\
&= \int_0^1 e^{-tx}dt - \int_0^1 e^{-tx}\cos t dt \\
&= \Big[-\frac{e^{-tx}}{x}\Big]_0^1 - Re\Big(\int_0^1 e^{(i-x)t}dt\Big) \\
&= \frac{1-e^{-x}}{x} - Re\Big(\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\Big) \\
&= \frac{1-e^{-x}}{x} + \frac{1}{x^2+1}\big(\cos(1)xe^{-x} - x - \sin(1)e^{-x}\big)
\end{aligned}
$$

$F'(x) = \int F''(x)dx = ...$

Corrigé de l'exercice 9 :

A) Soit la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t,x) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

. On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$$

1. <u>Montrons que F est continue dans $[0,+\infty[$</u> :

   ⋆ f est continue par rapport aux variables $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
   ⋆ $|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t)$, et $\int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{\pi}{2}$, donc $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément,

   d'où la continuité de F dans $[0,+\infty[$.

   • <u>Montrons que F est deux fois dérivable</u> :

   ⋆ f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
   ⋆ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$$

   Les deux dérivées partielles sont des fonctions continues dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$

   ⋆ $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$: $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément.

$\star$ $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)dt$ convergent uniformement.
en effet

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq e^{-ta}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq e^{-ta} \quad \forall x > a > 0,$$

et $h(t) = e^{-ta}$ est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

On déduit que F est deux fois dérivable avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}dt, \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}dt$$

2. $\forall x > 0 : F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2} + \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt = 0.$

B) Soit la fonction $g : [0, +\infty[\times[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t,x) = \frac{\sin t}{x+t}$$

On pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} g(t,x)dt$$

1. <u>Montrons que G est uniformement convergente</u> :

   - Si $x = 0$: $G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est une intégrale convergente.
   - Si $x > 0$: Intégrons G par partie
     $u(t,x) = \frac{1}{x+t}, \quad u'(t,x) = -\frac{1}{(x+t)^2}$
     $v'(t) = \sin t, \qquad v(t) = -\cos t$

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[-\frac{\cos t}{x+t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}dt \\ &= \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}dt \end{aligned} \tag{6}$$

La convergence de $G(x)$ depend de la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t,x)dt$ avec $h(t,x) = \frac{\cos t}{(x+t)^2}$

$$|h(t,x)| \leq \frac{1}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(a+t)^2}, \quad \forall x > a > 0,$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(a+t)^2}dt$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t,x)dt$ converge uniformement, d'où la convergence uniforme de $G(x)$.

2. Montrons que G est deux fois dérivable dans $]0,+\infty[$:

   - $\star$ g est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
   - $\star$ $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t,x)dt$ converge uniformement.
   - $\star$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$:

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = -\frac{\sin t}{(x+t)^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x) = \frac{2\sin t}{(x+t)^3}$$

   Les deux dérivées partielles sont des fonctions continues dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$
   - $\star$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x)dt$ convergent uniformement.

   en effet

   $$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{1}{(a+t)^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq \frac{2}{(a+t)^3} \quad \forall x > a > 0,$$

   et les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a+t)^2}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(a+t)^3}$ sont convergentes.

   On déduit que G est deux fois dérivable avec

   $$G'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{\sin t}{(x+t)^2}dt, \quad G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t}{(x+t)^3}dt$$

3. $G''(x) + G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sin t}{(x+t)^3}dt + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}dt$

   Intégrons la première intégrale par partie et remplaçons G par l'expression trouvée dans (6), on aura

   $$\begin{aligned} G''(x) + G(x) &= \Big[-\frac{\sin t}{(x+t)^2}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}dt + \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}dt \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

   $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} G''(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2\sin t}{(x+t)^3}dt = 0.$

   $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\sin t}{x+t}dt = 0.$

4. Résoudre l'équation différentielle vérufiée par $H = F - G$ et déduire que $F = G$:
   F et G sont des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_*^+$. $H = F - G$ est donc solution de l'equation

$$y'' + y = 0 \tag{7}$$

   L'equation caractéristique est donnée par $r^2 + 1 = 0$, elle admet deux racines complexe conjuguées : $r_1 = i$, $r_2 = -i$ alors la solution de l'equation (7) est donnée par

$$y(x) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

   donc $H(x) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} H(x) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ et $\mu = 0$ ce qui implique que $H(x) = 0$, d'où on a

$$F(x) = G(x) \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

$$G(0) = F(0) \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé de l'exercice 10 : Considérons la fonction $F(x) = \int_{pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x \cos t) dt$

1. Montrons que F est bien définie :
   On a $t \in [-\pi, \pi]$, Pour que F soit bien définie il faut que $1 + x^2 - 2x \cos t > 0$, cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Soit

$$f : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t, x) = \ln(1 + x^2 - 2x \cos t)$$

   • Montrons que F est continue : f est une fonction continue par rapport aux variables $(t, x) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Alors F est continue dans $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.
2. Montrons que F est dérivable dans $]-1, 1[$:

   ⋆ f est continue dans $[-\pi, \pi] \times]-1, 1[$.
   ⋆ f est dérivable dans $[-\pi, \pi] \times]-1, 1[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{2x - 2\cos t}{1 + x^2 - 2x \cos t}$$

La fonction dérivée partielle est continue et est dérivable dans $[-\pi, \pi] \times]-1, 1[$.
Alors F est dérivable dans $]-1, 1[$ et

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$$

3. On pose $y = \tan(\frac{t}{2})$, $\cos t = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $dt = \frac{2}{1+y^2}$, $t = 2\arctan y$
$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x - 2\frac{1-y^2}{1+y^2}}{1 + x^2 - 2x\frac{1-y^2}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy$$
après la simplifications on obtien
$$F'(x) = 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)y^2 + x - 1}{\big((x+1)^2y^2 + (x-1)^2\big)(1+y^2)} dy$$
On décompose la fraction à intégrer en éléments simple on aura
$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{2}{x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x+1)^2y^2 + (x-1)^2} + \frac{1}{1+y^2} dy \\
&= \frac{2}{x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2\big[1 + \big(\frac{x+1}{x-1}y\big)^2\big]} + \frac{1}{1+y^2} dy \\
&= \frac{2}{x}\Big[\arctan\big(\frac{x+1}{x-1}y\big) + \arctan y\Big]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{2}{x}\Big[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Big] \ (\text{car} \frac{x+1}{x-1} < 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$
$F(x) = \int F'(x)dx = C$ et $F(0) = 0$ alors $C = 0$ donc $F(x) = 0$.