**INI. Math2. 2I.**
**EMD1.** Janvier 2007.
**Durée:** 2H

**Exercice 1:(9 points)**
Soit la fonction $f$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy) - xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Etudier au point $(0,0)$ la continuité, l'existence des dérivées partielles puis la différentiabilité.
2. La fonction $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

**Exercice 2: (4.5 points)**
1. Soit l'application $\varphi$ définie par

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad / \; (x,y) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$$
$$(u,v) \longmapsto (x,y)$$

Montrer que $\varphi$ est une $C^1$-difféomorphisme (i.e. $\varphi$ bijective, $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, $\varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$)

2. Soient $f$ et $F$ deux fonctions numériques de deux variables telles que $F(u,v) = f\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$; écrire les dérivées partielles de $F$ en fonction de celles de $f$.

3. Résoudre, en utilisant un changement de variables adéquat, l'équation suivante dans $C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$

$$2x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

**Exercice 3: (3.5 points)**
Etudier les extrema de la fonction $f$ définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2)$$

**Exercice 4:(3 points)**
Soit le domaine $D$ défini dans $\mathbb{R}^2$ par

$$D = \left\{(x,y) / \; y \geqslant 0, \; y \leqslant x+1, \; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

1- Représenter géométriquement le domaine $D$.
2- Pour une fonction $f$ intégrable sur $D$, $f$ quelconque, donner une méthode de calcul de l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$.

# Corrigé EMD 1
## Math 2

**Exercice 1 :**
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy - xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Continuité de $f$ en $(0,0)$ :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy - xy}{x^2+y^2}$$

$$\sin(xy) = xy + xy\,\varepsilon(xy) \quad \text{avec} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$$

$$f(x,y) = \frac{xy + xy\,\varepsilon(xy) - xy}{x^2+y^2} = \frac{xy}{x^2+y^2}\,\varepsilon(xy)$$

on a $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ d'où $|xy| \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

donc $|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,\varepsilon(xy) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \quad \text{car } \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ bornée}$$
$$\text{et } \lim_{(0,0)} \varepsilon(xy) = 0$$

ccl : $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

$f$ est continue en $(0,0)$.

- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 0 - 0}{x^2} - 0}{x-0}$$

$$= \lim 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{car } f \text{ est symétrique}$$

Différentiabilité de $f$ en $(0,0)$

Posons : $\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - h.\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k.\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$$\varepsilon(h,k) = \frac{\sin(hk) - hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sin(hk) - hk}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}$$

on a : $\sin(hk) = hk + h^2k^2\,\varepsilon(hk)$ au $V(0,0)$

d'où :
$$\varepsilon(h,k) = \frac{h^2k^2\,\varepsilon(hk)}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3} = \underbrace{\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2}}_{\text{bornée}} \cdot \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{bornée}} \times \underbrace{k\,\varepsilon(hk)}_{\to 0}$$

En effet :

$h^2 \leq h^2+k^2 \Rightarrow \dfrac{h^2}{h^2+k^2} \leq 1$

$|k| \leq \sqrt{h^2+k^2} \Rightarrow \dfrac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$

$\Bigg\} \Longrightarrow \dfrac{|h^2k|}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{h^2k}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}$ bornée

ccl : $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 \Rightarrow f$ diff en $(0\ 0)$

On a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{y\cos(xy) - y}{x^2+y^2}}_{=g(x,y)} - \underbrace{2x\,\dfrac{\sin(xy) - xy}{(x^2+y^2)^2}}_{h(x,y)} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ est ct sur $\mathbb{R}^2 - \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ car rpp et produit de fct ct.
- Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ : on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(g(x,y) - h(x,y)\right)$$

on a : $\cos xy = 1 + o(xy) \Rightarrow g(x,y) = \dfrac{xy^2\,\varepsilon(xy)}{x^2+y^2} = \underbrace{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{bornée}}\,\underbrace{x\,\varepsilon(x,y)}_{\to 0}$

de même : $\sin xy = xy + o(x^2y^2) \Rightarrow h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot x\,\varepsilon(x,y)$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = v.\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) - \frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) = \dfrac{1}{u^2+v^2}\left(u.\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) + v\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = \dfrac{1}{u^2+v^2}\left(v^3.\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) - u.v^2\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) & (2) \end{cases}$$

on a : $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y(1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow$$

$$(*)\quad 2.\frac{u^2+v^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) - \left(1+\frac{u^2}{v^2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = 0 \quad \forall (u,v)$$

on remplace (1) et (2) dans $*$, on obtient :

$$(*) \Leftrightarrow \left(v - \frac{u^2}{v}\right)\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$$

$\Leftrightarrow F(u,v) = \psi(u)$, $\forall u$ où $\psi$ est une fct de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f(x,y) = \psi\left(y\sqrt{\frac{2x}{y^2+1}}\right)$$

## Exercice 3 :

Calcul des pts critiques : $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3xy^2 = 0 \\ -3yx^2 + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2-3y^2) = 0 \\ y(-3x^2+4y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3y^2 = 0 \\ y(-3x^2+4y^2) = 0 \end{cases}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$

d'où : $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0+0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est ct sur $\mathbb{R}^2$.

or $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ ct sur $\mathbb{R}^2$.

ccl : $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2 :

1 $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$

1/ $\varphi$ biject ? : soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ $\exists ?\,(u,v)$ tq : $\varphi(u,v)=(x,y)$

$\varphi(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow 2x = u^2+v^2$ et $y = \frac{u}{v}$

$\Leftrightarrow 2x = y^2v^2+v^2$ et $y=\frac{u}{v}$

$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2x}{1+y^2}$ et $u = y.v$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}$ $(v>0)$ et $u = y\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}$

le couple $(u,v)$ existe, $(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, et est unique.

d'où $\varphi$ est bijective.

de plus $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ / $\varphi^{-1}(x,y) = \left(y\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right)$

$\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont ct car leurs fcts composantes sont ct.

ccl : $\varphi$ est un $C^1$ difféomorphisme.

$F(u,v) = f(\varphi(u,v)) \Rightarrow J_{(u,v)}F = J_{\varphi(u,v)}f \times J_{(u,v)}\varphi$

donc $\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \;\; \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\right)\begin{pmatrix} u & v \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{pmatrix}$

$$S \iff \begin{cases} 0=0 \\ 4y^3=0 \end{cases} \iff y=0$$

$x \neq 0$ : $(S) \iff \begin{cases} 2x^2-3y^2=0 \\ y(-3x^2+4y^2)=0 \end{cases}$

• si $y=0$ : $(S) \iff \begin{cases} 2x^2=0 \\ \text{et } 0=0 \end{cases}$ pas de slf.

si $y \neq 0$ : $(S) \iff \begin{cases} 2x^2-3y^2=0 \\ -3x^2+4y^2=0 \end{cases}$

$\iff x=0$ et $y=0$

donc pas des slf.

ccl : $(S) \iff (x,y)=(0,0)$

seul pt critique $(0,0)$

Nature du pt : étude du signe de $f(x,y)-f(0,0)$

$f(x,y)-f(0,0) = (x^2-y^2)(x^2-2y^2)$

posons $y=\lambda x$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(x,\lambda x)-f(0,0) = (x^2-\lambda^2x^2)(x^2-2\lambda^2x^2)$

$= x^4(1-\lambda^2)(1-2\lambda^2)$

| $\lambda$ | | $-1$ | | $-1/\sqrt{2}$ | | $0$ | | $1/\sqrt{2}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-\lambda^2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $1-2\lambda^2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x,\lambda x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

si on choisit $\lambda_1 \in ]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ . $f(x,\lambda_1 x) > 0$ au $V_0$

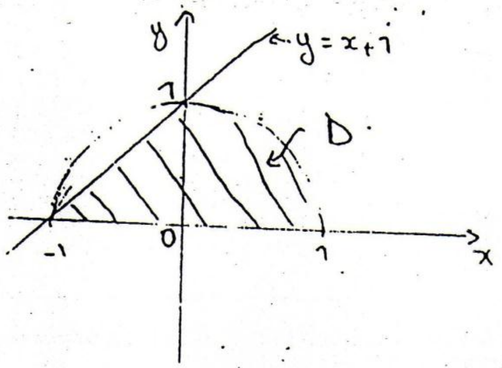
" $\lambda_2 \in ]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ $f(x,\lambda_2 x) < 0$ au $V_0$

ccl : $((0,0), f(0,0))$ n'est pas un extremum.

**Exercice 4**

$D = \{(x,y) \ / \ y \geq 0 \ , \ y \leq x+1 \ , \ x^2+y^2 \leq 1\}.$

1)




2) Le domaine D est régulier par rapport à y puisque toute dte passant par un pt intérieur à D coupe D en au plus deux pts et on a :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y-1 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

de plus :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$