L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

Durée : 1H30

N.B.
1- Les réponses doivent être justifiées.
2- Les réponses doivent être rédigées dans un seul cahier d'examen.
3- Il sera tenu compte de la présentation du cahier d'examen.
4- Le barême proposé est approximatif.

Exercice 1 : (6 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit le $\mathbb{R}$- e.v. $M_n(\mathbb{R})$.

1- On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle vérifie : $({}^tA).A = I_n$.
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

a/ Donner les valeurs possibles de $\det M$.

b/ En déduire que M est inversible puis donner son inverse.

2- Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $({}^tN).N$ est une matrice symétrique et que son déterminant est positif ou nul.

3- Supposons que n est impair et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A est antisymétrique.
Déterminer $\det A$.

Exercice 2 : (14 pts)

Soit la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- a/- Déterminer $\det A_\alpha$.

b/- Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?

2- On pose $\alpha = 0$ et soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A_0 = M_B(f)$.

a/- Déterminer l'endomorphisme f.

b/- Sans effectuer de calculs dire si $rg(f) = 3$. Justifier.

c/- Soit $C = (v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,0) \quad, v_3 = (-1,-1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de B vers C.

d/- En déduire $A_0' = M_C(f)$.

e/- En déduire A_0^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Bon Courage