Institut National d'Informatique

Deuxième année Ingénieur

Lundi 11 Juin 1998

Logique Mathématique

EMD3. Durée 1h30 heures.

Documents interdits.

Exercices (3, 3, 4, 4, 4, 2)

* 1. Exprimer $sg(x+y)$ en fonction de $sg(x)$ et de $sg(y)$.

2. Montrer que la relation R définie comme suit est récursive :

$$R : \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 > x_2 > \ldots x_{n-1} > x_n \}.$$

3. Montrer que la fonction suivante est primitive récursive :

$$q(x, y, z) = \text{au quotient de } y + z \text{ par } x.$$

4. Exprimer en fonction de $r(x, y)$ et de $r(x, z)$ la fonction $r(x, y, z)$ telle que :

$$r(x, y, z) = \text{au reste de la division de } y + z \text{ par } x.$$

Peut-on en déduire que $r(x, y, z)$ est primitive récursive ?

5. Montrer que la fonction ci-dessous est récursive :

$$q(x, y) = \text{au quotient de } x \text{ par } y$$

6. Retrouver la fonction calculable par la machine de Turing suivante :

1) q_0 I D q_0	5) q_1 I G q_1	9) q_3 I D q_3	13) q_4 * Gq_4
2) q_0 * Dq_0	6) q_1 0 Dq_2	10) q_3 * Dq_3	14) q_4 0Dq_2
3) q_0 0 * q_1	7) q_2 I 0 q_2	11) q_3 0 Iq_4	15) q_2 *0q_5
4) q_2 * Gq_1	8) q_2 0 Dq_3	12) q_4 IGq_4	16) q_5 0Dq_6

NB :

- On conviendra de la convention suivante : $Car_E(x) = 0$ si $x \in E$.
- Les résultats obtenus en cours et en TD peuvent être utilisés.
- Indiquer dans chaque cas la règle utilisée et en respecter la syntaxe.

Logique mathématique

EMD 3 : Corrigé

exo1 $Sg(x+y) = (Sg(x)+Sg(y)) \dot- (Sg(x) * Sg(y))$

exo2 $Car_R(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases}0 & \text{si } x_1>x_2>\dots>x_n\\ 1 & \text{sinon (i.e } \exists x_i \mid x_i \le x_{i+1})\end{cases}$

$x_i > x_{i+1} \Rightarrow x_i \dot- x_{i+1} > 0$

$$Car_R(x_1,\dots,x_n) = \overline{Sg}((x_1\dot- x_2)*(x_2\dot- x_3)*\dots*(x_{n-1}\dot- x_n))$$
$$= \overline{Sg}\prod_{i=1}^{n-1}(x_i \dot- x_{i+1})$$

exo6

$$q_0\, \bar{x} * \bar{y} \Rightarrow q_F\, \bar{y} * \bar{x}$$

exo4 $r(x,y,z) = R(x,y)+R(x,z) - \begin{cases}0 & \text{si } R(x,y)+R(x,z)<x \\ x & \text{sinon}\end{cases}$

$$r(x,y,z) = R(x,y)+R(x,z) \dot- x * \overline{Sg}(x \dot- (R(x,y)+R(x,z)))$$
$$= \dot-(+(R(P_1^3,P_2^3),R(P_1^3,P_3^3))(x,y,z), *(P_1^3, \overline{Sg}\circ\dot- \circ +(R(P_1^3,P_2^3),R(P_1^3,P_3^3))(x,y,z)))$$

ou encore :

$$r(x,y,z) = R(x, R(x,y)+R(x,z))$$
$$= R(P_1^3(x,y,z), +(R(P_1^3,P_2^3),R(P_1^3,P_3^3))(x,y,z))$$

Exo3 (par récursion).

$$q(x,y,0) = Q(x,y)$$

$$q(x,y,z+1) = \begin{cases} q(x,y,z) & \text{si } (q(x,y,z)+1)*x > y+z+1 \\ q(x,y,z)+1 & \text{sinon}\end{cases}$$
$$= q(x,y,z) + \overline{Sg}(((q(x,y,z)+1)*x) \dot- S(y+z))$$
$$= +(P_4^4, \overline{Sg}\circ\dot-(*(S(P_4^4),P_1^4), S\circ+(P_2^4,P_3^4)))(x,y,z,q(x,y,z))$$

Exo 5 (par composition)

$$q(x,y,z) = Q(x, +(y,z))$$
$$= Q\left(P_1^3(x,y,z), +(P_2^3, P_3^3)(x,y,z)\right)$$

Exo 5

- $q(x,y) = Q(y,x)$ (quotient de x par y)
$$= Q\left(P_2^2(x,y), P_1^2(x,y)\right)$$

- Par minimisation -
$$q(x,y) = \mu_n(x \dot- ny = 0) \dot- sg(R(y,x))$$

. autre solution
$$q(x,y) = \mu_n(x \dot- ny = 0) \dot- sg\left((\mu_n(x \dot- ny = 0) * y) \dot- x\right)$$

autre sol

- $q(x,y) = \mu_n\left(yn > x\right) \dot- 1.$
$$= \mu_n\left(y(n+1) > x\right).$$
$$= \mu_n\left(\overline{sg}\left(y.(n+1) \dot- x = 0\right)\right).$$

- $q(x,y) = \mu_z\left(x \dot- (r(y,x) + y.z) = 0\right).$