2013/2014. CP2. ANA4

Examen final en ANA4.
Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.

<u>Exercice 1</u> (5pts)
Les deux parties **I** et **II** sont indépendantes.
I- Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) des séries numériques suivantes:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{3^{n-2}},\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

II- Pour $n\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$ on pose $f_n(x)=n^2x\,(1-x)^n$.
a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)|$, en déduire le domaine de convergence simple D de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ vers une fonction f à déterminer.
b) Calculer $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$, en déduire que la suite $\{f_n\}_n$ ne converge pas uniformément sur D.

<u>Exercice 2</u> (4pts)
Soit la série de fonctions: $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}$
1) Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}_+^*$, on posera $F(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}$.
2) Etudier la convergence uniforme de la série sur $[a,+\infty[$, $a>0$.
3) Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Exercice 3</u> (5pts)
Soit la série entière: $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n\left(n^2+1\right)}{(n+1)}x^n$.
1) Déterminer son rayon ainsi que son domaine de convergence.
2) Calculer sa somme.

<u>Exercice 4</u> (6pts)
Soit f une fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x)=e^{|x|+1}$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.
1) Developper f en série de Fourier.
2) En déduire les valeurs des séries numériques:

$$S_1=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)},\ S_2=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n^2+1)}$$