L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

Exercice 1 : (9.5 pts)
Soit la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 2 & \alpha^2 - 7\alpha \\ 2 & 3 & \alpha - 7 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Discuter, suivant le paramètre α, la diagonalisation de A_α.
2- On pose : $\alpha = 2$.
a/ Vérifier que A_2 est diagonalisable.
b/ Trouver une matrice P telle que $P^{-1}.A_2.P$ soit diagonale.
c/ En déduire la matrice A_2^n où $n \in \mathbb{N}^*$.
d/ Exprimer, en utilisant le théorème de Cayley Hamilton, A_2^n comme polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en A_2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$.
e/ Montrer que calculer A_2^n revient à résoudre un système linéaire carré que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de résoudre le système obtenu).

Exercice 2 : (6.5 pts)
Soit, dans $\mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha\beta z & = & \alpha \\ \beta x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^2\beta z & = & \alpha^2\beta \end{array} \right. \qquad (S_{\alpha,\beta})$$

où α et β sont des paramètres réels .
1- Calculer le déterminant de la matrice du système $(S_{\alpha,\beta})$.
2- Pour quelles valeurs de α et β le système $(S_{\alpha,\beta})$ est de Cramer. Dans ce cas, résoudre $(S_{\alpha,\beta})$.
3- Résoudre $(S_{\alpha,\beta})$ dans le cas où il n'est pas de Cramer.

Exercice 3 : (4 pts)
Soit une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique :

$$P_M(X) = -X^3 + X^2 - X + 1.$$

1- Déterminer : $Tr(M)$, $\det(M)$, $rg(M)$.
2- Dire pourquoi M est inversible, puis donner l'expression de M^{-1} en fonction de M.
3- Est ce que M est diagonalisable ?. Justifier.
4- Est ce que M est diagonalisable si on considère $M \in M_3(\mathbb{C})$?. Justifier.

Bon Courage