

Contrôle intermédiaire
Durée 2h

Documents interdits.

Exercice1 4 points

Soit une application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que: $N(x,y) = |x+y| + |x|$

- 1) Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Représenter $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

Exercice 2 4points

- 1) Dans \mathbb{R}^2 , Donner un ensemble D et un point X_0 tels que:
 X_0 soit un point adhérent à D sans être un point d'accumulation de D .
- 2) Dans \mathbb{R}^2 , Donner un ensemble, autre que \emptyset et \mathbb{R}^2 , qui ne soit ni ouvert ni fermé.
- 3) Montrer que: $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ telsque } x^3 + y^3 < 1\}$ n'est pas borné dans \mathbb{R}^2 .
- 4) Soient f une fonction à deux variables réelles et (a,b) un point d'accumulation de Df ;
montrer que:
si $\exists l > 0$ / $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$ alors $f > 0$ au voisinage de (a,b) .

Exercice 3 5points

Calculer les limites suivantes:

- 1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, 2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^5}{x^4+x^2y^2+y^4}$,
- 3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2}$, 4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\text{Log}(x+y)}{x^2+2xy+y^2-1}$.

Exercice4 7points

I/ Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+t)}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+t) - t}{t^2} .$$

II/ Considérons une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \left(\frac{\text{Log}(1+x)}{x} - 1 \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer Df .
- 2) Etudier la continuité de f en $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$.
- 3) Caculer les dérivées partielles premières de f au point $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$.
- 4) f est-elle de classe C^1 sur Df ?

On rappelle que:

Au voisinage de 0, $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n + o(t^n)$.