

Partie 1: Analyse

Exercice 1: (4 pts)

1) Etudier la nature des séries numériques suivantes:

$$A = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha} - 1};$$

$$B = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha} - 1}; \quad (\alpha > 0)$$

2) En déduire la nature de la série:

$$C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}$$

Exercice 2: (4 pts)

On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f .
2. Donner l'expression de la transformée inverse.
3. En déduire la valeur des intégrales suivantes:

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 - 1} dx; \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{x^2 - 1} dx; \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin^2(\pi x)}{(x^2 - 1)^2} dx.$$

Rappel. $\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

Partie 2: Algèbre

Exercice (07 pts)

Soient a et b deux paramètres réels. On considère le système $(S_{a,b})$ défini par :

$$\begin{cases} 2x + y + z + t & = & 0 \\ -2x + z - t & = & 1 \\ 4x + 3y + (b+4)z + (a+1)t & = & 1 \\ 2x + 3y + (b+5)z + (a+2b)t & = & a+1 \end{cases}$$

1. Mettre le système $(S_{a,b})$ sous forme échelonnée. En déduire le déterminant du système $(S_{a,b})$.
2. Discuter le rang du système selon les valeurs de a et b .
3. Pour $b \neq 0$, montrer que le système $(S_{a,b})$ a une solution unique, et donner l'expression de cette solution en fonction de a et b .
4. Pour $b = 0$, donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le système $(S_{a,0})$ soit résoluble.
5. Résoudre le système $(S_{1,0})$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions?

Partie 3: Logique

Exercice 1 (5 pts)

Soit l'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ où

$$F_1 = \exists y(P(y) \wedge (\exists x R(b, x) \Rightarrow \forall x R(y, x)))$$

$$F_2 = \forall y(P(y) \Rightarrow R(b, y))$$

$$F_3 = \forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow \neg P(x) \vee S(y))$$

$$F_4 = \neg S(a)$$

1. Montrer que l'ensemble Γ est contradictoire en utilisant la résolution en calcul des prédicats.
2. Retrouver le résultat avec un arbre sémantique.
3. Donner un ensemble contradictoire d'instances de base.

then b

la résolution ?