

Durée 1 heure 30**Tout document interdit****Exercice 1 (2, 2, 2)**

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

1. Tout diviseur d'un nombre est inférieur ou égal à ce nombre.
2. Si un nombre est égal à sa racine carrée, ce nombre est égal à 1.
3. Celui qui a la meilleure note est le seul accepté.

Exercice 2 (9)

Vérifier, à l'aide d'un arbre sémantique, la validité de la proposition suivante :

$$(\forall y Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge R(x)), \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)), \forall y (\exists x \neg P(x) \rightarrow Q(y))) \models (\forall x \forall y (P(x) \vee \neg R(y)) \wedge \exists z P(z))$$

Exercice 3 (3, 2)

Soient l'ensemble de clauses S tel que :

$$S : \{P(a) \vee \neg Q(x), \neg P(x) \vee \neg Q(y), \neg P(x) \vee Q(b)\}$$

et J une interprétation des clauses de S définie comme suit :

$$D_J : \{ @, \$ \}, J(a) = @, J(b) = \$ \text{ et :}$$

<i>d</i>	<i>J(P)(d)</i>	<i>J(Q)(d)</i>
@	F	F
\$	F	F

1. Donner une interprétation de Herbrand (J_h) correspondant à J.
2. Vérifier que J_h satisfait S.

SECTION A**Exercice 1 (2, 2, 2)**

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

4. Tout diviseur d'un nombre est inférieur ou égal à ce nombre.
5. Si un nombre est égal à sa racine carrée, ce nombre est égal à 1.
6. Celui qui a la meilleure note est le seul accepté.

Exercice 2 (6.5, 1.5)

1. Donner l'ensemble S des clauses issu de l'ensemble ci-dessous :

$$\Gamma : \{(\forall y Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge R(x)), \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)), \forall y (\exists x \neg P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x \forall y (P(x) \vee \neg R(y)) \rightarrow \forall z \neg P(z)\}$$

2. Donner un ensemble B contenant une instance de base de chacune des clauses de S.

Exercice 2 (3, 3)

1. Vérifier la validité de la formule β_1 ci-dessous :

$$\beta_1 : \forall x (S(x) \wedge P(x)) \rightarrow (\forall x S(x)) \wedge \forall x P(x)$$

2. Vérifier, en utilisant la forme de Skolem, la validité de la formule β_2 ci-dessous :

$$\beta_2 : \forall x (S(x) \vee P(x)) \rightarrow (\forall x S(x)) \vee \forall x P(x)$$

CORRECTION

Exercice 1 (2, 3)

Ecrire les phrases suivantes dans le langage des prédicats du premier ordre :

1. Tout diviseur d'un nombre est inférieur ou égal à ce nombre.

$$\forall x \forall y (D(x, y) \rightarrow I(x, y) \vee E(x, y))$$

2. Si un nombre est égal à sa racine carrée, ce nombre est égal à 1.

$$\forall x (E(x, r(x)) \rightarrow E(x, a))$$

3. Seul le meilleur est accepté.

$$\forall x \forall y (D(x, y) \wedge M(x, y) \rightarrow A(x))$$

Exercice 2

Vérifier, à l'aide d'un arbre sémantique, la validité de la proposition suivante :

$$(\forall x Q(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge R(x)), \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)), \forall y (\exists x \neg P(x) \rightarrow Q(y))) \models (\forall x \forall y (P(x) \vee \neg R(y)) \wedge \exists z P(z))$$

SSI

$$\{(\forall y Q(y) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge R(x)), \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)), \forall y (\exists x \neg P(x) \rightarrow Q(y)), \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge R(y)) \vee \forall z \neg P(z))\}$$

non satisfiable

1. Renommer les variables : (0.5)

$$\{\forall y (\forall x Q(x) \rightarrow (P(y) \wedge R(y))), \forall u \exists v (P(u) \rightarrow P(v)), \forall z (\exists w \neg P(w) \rightarrow Q(z)), \exists s \exists t (\neg P(s) \wedge R(t)) \vee \forall p \neg P(p)\}$$

2. Forme prenex des formules de l'ensemble : (2pts)

$$\{\forall y \exists x (Q(x) \rightarrow (P(y) \wedge R(y))), \forall u \exists v (P(u) \rightarrow P(v)), \forall z \forall w (\neg P(w) \rightarrow Q(z)), \exists s \exists t \forall p ((\neg P(s) \wedge R(t)) \vee \neg P(p))\}$$

3. Forme de Skolem (2pts)

$$\{\forall y (Q(f(y)) \rightarrow (P(y) \wedge R(y))), \forall u (P(u) \rightarrow P(g(u))), \forall z \forall w (\neg P(w) \rightarrow Q(z)), \forall p ((\neg P(a) \wedge R(b)) \vee \neg P(p))\}$$

4. Forme clausale (2pts)

$$Q(f(y)) \rightarrow (P(y) \wedge R(y)) \equiv (\neg Q(f(y)) \vee P(y)) \wedge (\neg Q(f(y)) \vee R(y))$$

$$P(u) \rightarrow P(g(u)) \equiv \neg P(u) \vee P(g(u))$$

$$\neg P(w) \rightarrow Q(z) \equiv P(w) \vee Q(z)$$

$$(\neg P(a) \wedge R(b)) \vee \neg P(p) \equiv (\neg P(a) \vee \neg P(p)) \wedge (R(b) \vee \neg P(p))$$

$$S : \{ \neg Q(g(y)) \vee P(y), \neg Q(g(y)) \vee R(y), \neg P(u) \vee P(f(u)), P(w) \vee Q(z), \neg P(a) \vee \neg P(p), R(b) \vee \neg P(p) \}$$

5. Arbre sémantique (2.5pts)

