Interrogation écrite

Durée 1 heure

Tout document interdit

Exercice 1 (3 points)
Lesquelles des propositions suivantes sont valides et lesquelles ne le sont pas ?

a. $(\forall x\alpha) \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
b. $(\forall x\alpha) \vee \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$
c. $(\exists x\alpha) \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$
d. $\forall x \exists y(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(y)) \equiv \exists u\mathrm{P}(u) \rightarrow \exists z\mathrm{Q}(z)$
e. $\forall x \exists y(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(y)) \equiv \forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(f(x)))$

Illustrer toute proposition non valide par un contre-exemple.

Exercice 2 (2 points)
Donner un modèle de l'ensemble Γ de formules tel que :

$$\Gamma : \{\forall x\mathrm{P}(x,f(x)),\ \forall y \neg \mathrm{P}(y, y),\ \forall u \forall v \forall w((\mathrm{P}(u, v) \wedge \mathrm{P}(v,w)) \rightarrow \mathrm{P}(u, w))\}$$

Exercice 3 (1, 1.5, 0.5, 1, 0.5,0.5)
On considère β la formule telle que :

$$\beta : \forall y \exists z \forall x((\neg \mathrm{P}(z, x) \vee \neg \mathrm{P}(x, z)) \wedge \mathrm{P}(x, y))$$

3.1. Mettre β sous forme clausale. On désignera par S l'ensemble des clauses issu de β.

3.2. Laquelle des propositions suivantes est valide :

a. S est satisfiable ssiβ est satisfiable.
b. La conjonction des clauses de S est satisfiable ssiβ est satisfiable.
c. La conjonction des clauses de S est valide ssiβ est valide.

3.3. Quel est le domaine de Herbrand de S ?

3.4. Montrer à l'aide d'un arbre sémantique que S est non satisfiable.

3.5. Donner un sous-ensemble non satisfiable de clauses de S. On appellera S' cet ensemble.

3.6. Montrer que l'ensemble de clauses obtenu en substituant une variable propositionnelle à chaque littéral de S' estnon satisfiable.

N. B. Remettre une seule double feuille.

e

CORRECTION

Exercice 1 (3 points)

Lesquelles des propositions suivantes sont valides et lesquelles ne le sont pas ?

a) $(\forall x\alpha) \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha\wedge\beta)$ Valide**(0.5)**

b) $(\forall x\alpha) \vee \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha\vee\beta)$ Non valide **(1pt)**
Contre-exemple : l'interprétation I de domaine D : {2, 3, 4} telle que I(P) : « pair », est un modèle de $\forall x\ (P(x) \vee \neg P(x))$ mais pas de $(\forall x P(x)) \vee \forall x \neg P(x)$

c) $(\exists x\alpha) \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha\vee\beta)$ Valide**(0.5)**

d) $\forall x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y)) \equiv \exists u P(u)\rightarrow \exists z Q(z)$ Valide**(0.5)**

e) $\forall x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y)) \equiv \forall x(P(x)\rightarrow Q(f(x)))$ Non Valide **(0.5)**

Illustrer toute proposition non valide par un contre-exemple.

Exercice 2 (2 points)

Donner un modèle de l'ensemble Γ de formules tel que :

$$\Gamma : \{\forall x P(x,f(x)),\ \forall y \neg P(y, y),\ \forall u\forall v\forall w((P(u, v) \wedge P(v,w)) \rightarrow P(u, w))\}$$

I de domaine N telle que :

I(P) : '<' I(f) : 'successeur'

Exercice 3 (1, 1.5, 0.5, 1, 0.5, 0.5)

On considère β la formule telle que :

$$\beta : \forall y\exists z\forall x\ ((\neg P(z, x) \vee \neg P(x, z)) \wedge P(x, y))$$

3.1. Mettre β sous forme clausale. On désignera par S l'ensemble des clauses issu de β.

$\beta_S : \forall y\forall x\ ((\neg P(f(y), x) \vee \neg P(x, f(y)) \wedge P(x, y))$ **0.5 point**

$$\equiv$$

$$\forall y\forall x(\neg P(f(y), x) \vee \neg P(x, f(y)) \wedge \forall y\forall x\ P(x, y)$$

On renomme les variables :

$$\forall y\forall x(\neg P(f(y), x) \vee \neg P(x, f(y)) \wedge \forall u\forall v\ P(v, u)$$

S : { $\neg P(f(y), x) \vee \neg P(x, f(y)),\ P(u, v)\}$ **0.5 point**

3.2. Laquelle des propositions suivantes est valide **0.5, 0.5, 0.5** :

d. S est satisfiable ssiβ est satisfiable. **Valide**

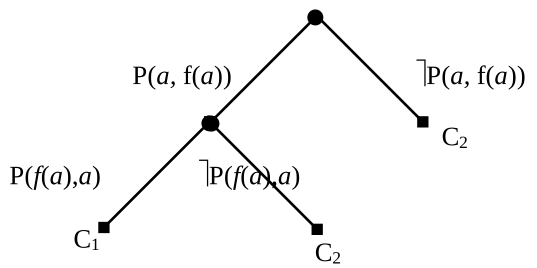
e. La conjonction des clauses de S est satisfiable ssiβ est satisfiable. **Valide**

f. La conjonction des clauses de S est valide ssiβ est valide. **Non valide**

3.3. Quel est le domaine de Herbrand de S ?**0,5 pt**

H : {a, $f(a)$, ……, $f^i(a)$, ………}

3.4. Montrer à l'aide d'un arbre sémantique que S est non satisfiable.**1point**



-0,5 si l’étudiant ne précise pas les substitutions qu’il fait pour avoir ses instances de base.

3.5. Donner un sous-ensemble non satisfiable de clauses de S. On appellera S’ cet ensemble.

S’ : **{** $\neg P(f(a), a) \vee \neg P(a, f(a))$, $P(f(a),a)$, $P(a,f(a))$} **0,5 pt**

Ici, on falsifie une instance de C1 et deux instances de C2.

3.6. Montrer que l’ensemble de clauses obtenu en substituant une variable propositionnelle à chaque littéral de S’ est non satisfiable.**0,5 point**

Je substitue **R** à $P(f(a), a)$, **Q** à $P(a,f(a))$ dans S’

On obtient l’ensemble de clauses : { $\neg R \vee \neg Q$, R, Q}
$\neg R \vee \neg Q$
R
Q
$\neg Q$
□

e