Lakovitch

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة الوطنية العليا للإعلام الآلي
(المعهد الوطني للتكوين في الإعلام الآلي سابقا)
Ecole nationale Supérieure d'Informatique
ex. INI (Institut National de formation en Informatique)

CONCOURS d'accès à l'ESI

Epreuve : Mathématiques-Statistiques-Logique Mathématique
Code : MATHS

Date : 02 Juillet 2011
Durée : 4 heures

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 3 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3,4,....)
- La calculatrice est autorisée.
- Les documents sont interdits.
- Les quatre parties du sujet doivent être rédigées sur des copies séparées.

PARTIE 1 : ALGEBRE (5 pts)

Exercice : (5 pts)

Soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$, et soit A la matrice associée à f relativement à la base canonique notée $C = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable?.

2- On note les valeurs propres de A par λ_1 et λ_2 tels que : $\lambda_1 < \lambda_2$, et par v, w des vecteurs propres associés, respectivement, à λ_1 et λ_2.

Montrer qu'il existe un vecteur v' tel que : $f(v') = v - v'$.

3- On pose $B = (v, v', w)$.

a/ Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

b/ Déterminer la matrice $A' = M_B(f)$.

PARTIE 2 : ANALYSE (7 pts)

Exercice 1 : (2 pts)
Soit :

$$u_n(x) = \frac{\exp(-\sqrt{n}.x)}{\sqrt{n^3+1}}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que $\sum u_n(x)$ est convergente si $x \geq 0$, et divergente si $x < 0$.
2) Montrer que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$
et dérivable sur$]0, +\infty[$.

Exercice 2 : (2.5 pts)
Soit la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par: pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^n \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comment faut-il choisir n pour que
i) f soit continue dans $\mathbb{R}^2$,
ii) f soit différentiable dans $\mathbb{R}^2$,
iii) f ait ses dérivées partielles premières continues en $(0,0)$?

Exercice 3 : (2.5 pts)
On considère l'application :

$$\Psi \ : \ D =]0, +\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]0, 2\pi[\ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

définie pour tout $(r, \theta, \phi) \in D$ par $\Psi(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$, avec :

$$x = r\cos\theta.\cos\varphi \ , \quad y = r\cos\theta.\sin\varphi \ , \quad z = r\sin\theta.$$

1) Déterminer l'ensemble $\Psi(D)$.
2) Déterminer la matrice Jacobienne M_Ψ .
3) Calculer le Jacobien J_Ψ .
4) Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$.
Calculer le volume de Ω, que l'on notera $V(\Omega)$.

PARTIE 3 : PROBABILITES ET STATISTIQUES (5 pts)

Exercice 1 : (2.5pts)
Soit $(X_1, X_2, ...X_n)$ un $n-$échantillon de loi de normale avec :

$$E(X_1) = 0, \quad Var(X_1) = \sigma^2, \quad E(X_1^4) = 3.\sigma^4$$

On suppose $\theta = \sigma^2$ inconnue.

a) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_\pi$ de θ est : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

b) Quelle est son biais ? son risque quadratique ?

c) Montrer que $\widehat{\theta}_\pi$ est consistant.

Exercice 2 : (2.5pts)
Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 5 millions chacun. Chaque navire a par an une probabilité de couler égale à $0,001$. S'il ne coule pas, il est considéré en état de marche.

1) X est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de navires coulés pendant un an.

Trouver sa loi de probabilité, son espérance mathématique et sa variance ?

2) Quelles réserves doit posséder la compagnie pour être sûre de payer les indemnités avec une probabilité de $0,999$ à la fin de l'année.

[On donne : Si Y suit une loi de poisson $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right)$: $P(Y \leq a) \geq 0.999 \Rightarrow (a \geq 4)$].

PARTIE 4 : LOGIQUE MATHEMATIQUE (3 pts)

Exercice :

1- Donner une formule - que l'on désignera par β_p - sous forme normale prenexe telle que

$$\beta_p \equiv (\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \rightarrow \exists x\ \exists y\ \ (P(x) \rightarrow Q(y))$$

2- Montrer, à l'aide d'un arbre sémantique, que β_p est valide.