L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1: (4.5 pt)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $B = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Soit $C = (P_1 = 1 - X + X^2, P_2 = X - X^2, P_3 = X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
1/ Déterminer la matrice de passage P de B vers C.
Solution : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 pt).**
2/ Calculer P^{-1}.

Solution : On exprime $1, X, X^2$ en fonction de P_1 , P_2 et P_3 ou bien on utilise la méthode des déterminants (calcul des cofacteurs), on trouve:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2.5\ pt}).$$

3/ En déduire les coordonnées du vecteur $A = a + bX + cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base C.
Solution : $P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b+c \end{pmatrix}$ **(1 pt).**

Exercice 2: (5.5 pt)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ et on note par B sa base canonique. Soient :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 2 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} = \det_B(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Pour tout $1 \leq i \leq 5$, le vecteur x_i de $\mathbb{R}^5$ désigne la ième colonne de Δ relativement à la base B.

1/ Décomposer σ en un produit de transpositions puis déduire la signature de σ.

Solution : On a : $\sigma = (1,3)\,(3,2)\,(2,5)$ donc $\epsilon(\sigma) = (-1)^3$. **(1 pt)** + **(0.5 pt).**

2/ Soit $\Delta' = \det_B(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)})$. Calculer Δ' (Remarquer que Δ' est un déterminant triangulaire par blocs).

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
\Delta' &= \det_B(x_3, x_5, x_2, x_4, x_1) \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} \quad \textbf{(0.5 pt)} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10. \quad \textbf{(2 pt)}
\end{aligned}$$

3/ En déduire Δ.

Solution : Comme :

$$\det_B(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = \epsilon(\sigma) \cdot \det_B(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \qquad \textbf{(1 pt)}$$

Donc $\Delta = -\Delta' = -10$. **(0.5 pt)**