Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Novembre 2019**

2CPI **Contrôle Intermédiaire** **Durée : 1h45**

Analyse mathématique 3

- Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
- Il sera tenu compte de la présentation et la clarté des réponses.

Exercice 1 (5 points): Les questions sont indépendantes.

1. Donner la définition d'une série entière et de son rayon de convergence.
2. Etudier la nature de la série numérique
$$\sum_{n\geq 1} \exp\left(n \log\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
3. Soit $\alpha > 0$. Etudier, suivant les valeurs du paramètre α, la nature (convergence absolue et semi-convergence) de la série numérique
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{\alpha}}.$$

Exercice 2 (4 points) :

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$.

1. Etudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer sa convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
3. Etudier sa convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 (6 points) :

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{(1+e^x)}}$.

1. Trouver le domaine D de convergence de la série.

Posons $F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{(1+e^x)}},\ x \in D$.

Etudier la continuité, puis la dérivabilité de F sur D.

Bon Courage

Un corrigé type:

Exercice 1:

1. Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n(x) = a_n x^n$ $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$ avec$(a_n)_n$ une suite numérique réelle indépendante de x. $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$
   La définition du rayon $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$

2. Posons $u_n = \exp\left(n \log\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$, utilisons les DL :

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n \log\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \end{aligned}\right\} ... \boxed{\mathbf{0{,}5}}$$

   Donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$ et la série numérique diverge par la condition nécessaire. $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$

3. Posons $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$
   La convergence absolue: On a $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\sum |u_n|$ est une série de Riemann $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$ qui est convergente ssi $\alpha > 1$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$.
   La convergence simple: On a pour $\alpha > 1$ la série converge absolument donc simplement, il reste à étudier le cas $\alpha \in]0, 1]$ pour cela utilisons la régle d'Abel $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$: posons $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $w_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
   D'une part: $(v_n)_n$ est décroissante $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$,
   D'autre part $|S_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} w_k\right| = \left|-1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1... + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right| \leq 2$ $\boxed{\mathbf{0{,}75}}$.
   Ce qui nous donne sa convergence.
   La semi-convergence: Elle est semi-convergente pour $\alpha \in]0, 1]$ $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$

Exercice 2 :

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ telle que $f_n(x) = ne^{-n^2 x^2} \geq 0$.

1. La convergence simple sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} ne^{-n^2 x^2}$.
   1er cas : $x \neq 0$: $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$

2ème cas : $x=0$: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)=+\infty$. $\boxed{\textbf{0,25}}$
On en conclut que la suite de fonction est convergente sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ vers la fonction nulle $\boxed{\textbf{0,25}}$(elle diverge en $x_0=0$).

2. La convergence uniforme sur tout $[a,+\infty[$ où $a>0$. On pose $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)$, on a:

$$g_n(x)\leq ne^{-n^2a^2}=M_n\ \boxed{\textbf{0,5}}\quad \forall x\in[a,+\infty[\ \boxed{\textbf{0,25}}\quad \text{où } a>0$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} M_n=0$ $\boxed{\textbf{0,5}}$, ce qui implique la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq0}$ sur tout $[a,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$où $a>0$.

3. La convergence uniforme sur $]0,+\infty[$. Choisissons $x_n=\dfrac{1}{n}$, la suite $(x_n)_n\subset]0,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$, on a

$$\sup_{]0,+\infty[} g_n(x)\geq g_n(x_n)=\frac{n}{e}=m_n\boxed{\textbf{0,5}}$$

et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} m_n=+\infty\neq0$ $\boxed{\textbf{0,5}}$, ce qui implique que $(f_n)_{n\geq0}$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$.

Exercice 3 : Posons $u_n(x)=\dfrac{1}{n^{(1+e^x)}}>0$.

1. La série proposée est une série de Riemann donc elle converge puisque $(1+e^x)>1$ $\boxed{\textbf{0,5}}$.
Ceci donne $D=]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,5}}$.

2. **a) Continuité de F :**
Appliquons le théorème de conservation de la continuité pour les séries de fonctions.
★ Etude de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq1} u_n(x)$:
u_n est décroissante selon x, on obtient :
$u_n(x)\leq\dfrac{1}{n^{(1+e^a)}}=c_n$ $\boxed{\textbf{0,5}}$$\forall x\in[a,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$, $\forall n\geq1$ et $\sum\limits_{n\geq1} c_n$ converge car c'est une série de Riemann $(1+e^a>1)$ $\boxed{\textbf{0,25}}$.
On obtient la convergence uniforme de la série (par la convergence dominée) sur tout $[a,+\infty[\subset]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$.
★ Toutes les u_n sont continues sur $]-\infty,+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions continues $\boxed{\textbf{0,25}}$.
Donc F est continue sur tout $[a,+\infty[\subset]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$. Conclusion: F est continue sur $]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\textbf{0,25}}$.

b) Dérivabilité de F :

Appliquons le théorème de conservation de la dérivabilité pour les séries de fonctions.

★ Toutes les u_n sont dérivables sur $]-\infty,+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$.

★ Etude de la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} u_n'(x)$:

On a $u_n'(x) = (\exp[-(1+e^x)\log n])' = -\log n . e^x \exp[(1+e^x)\log n]$ $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$

On constate que $|u_n'(x)| = \dfrac{\log n}{n^{(1+e^x)}} e^x \leq \dfrac{\log n}{n^{(1+e^a)}} e^b = t_n,$ $\boxed{\mathbf{0{,}75}}$ $\forall x \in [a,b]$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$, $(a<b)$ $\forall n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 1} t_n$ converge car c'est une série de Bertrand $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$ $((1+e^a)>1)$.

On obtient la convergence normale par majoration (la convergence dominée), d'où la convergence uniforme de la série sur tout $[a,b] \subset]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$.

★ On a déjà montré que la série converge sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$ donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\sum u_n(x_0)$ converge.

Donc F est dérivable sur tout $[a,b] \subset]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$. Conclusion: F est dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ $\boxed{\mathbf{0{,}25}}$.