ESI
2012/2013

2CPI
ANA4

Controle intermédiaire
Durée 2h

Documents et Calculatrice interdits.

Exercice 1 (3,5 points)

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } |x| \leq x^2 + y^2\right\}$.

1) Représenter le domaine D.

2) Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy.$

On rappelle que $\displaystyle\int \frac{1}{1+(\cos t)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{tg(t)}{\sqrt{2}}\right) + C.$

Exercice 2 (3,5 points)

On pose $\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 4\right\}$.

1) Calculer le volume de Ω_1.

On pose $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ où $\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, 4 \leq z \leq 8 - (x^2+y^2)\right\}$.

2) Représenter Ω.

3) Calculer le volume de Ω.

Exercice 3 (4 points)

1) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n + \left(\frac{2012}{2013}\right)^n}$.

2) Etudier la convergence absolue et la semie convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1.$

Exercice 4 (2,5 points)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions telle que: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(n+x)^2}$.

1) Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.

3) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

4) Y'a-t-il convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[-A, 0]$ pour $A > 0$.