

Exercice 06

on a :

$$x * y \equiv (x \wedge \neg y)$$

1) $0 * 0 \equiv 0$

Donc pour l'assignation donnant 0
à toutes les variables, toute formule
écrite avec $\{0, *\}$ aura pour valeur 0.

Donc on ne peut pas exprimer $\neg x$
Donc le système $\{0, *\}$ est incomplet.

2) on a :

$$\neg x \equiv 1 * x$$

$$x \wedge y \equiv x \wedge \neg \neg y \equiv (x * \neg y) \equiv (x * (1 * y))$$

$$x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \equiv (1 * ((1 * x) * y))$$

Donc le système $\{1, *\}$ est complet

3) On peut dire que les systèmes $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$
sont complets.

Comme $x \vee y \equiv x * \neg y$ donc $\{\neg, *\}$ est complet

Comme $1 \equiv x \Rightarrow x$ Donc $\{\Rightarrow, *\}$ est complet

Comme $1 \equiv x \Leftrightarrow x$ Donc $\{\Leftrightarrow, *\}$ est complet.

On a utilisé le fait que $\{1, *\}$ est
déjà complet.