Exercice :

Soient $A_b = \begin{pmatrix} 1 & b & b-1 \\ 3 & 2 & b \\ b-1 & b & b+1 \end{pmatrix}$ $B_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

R ~~1/~~ Discuter et résoudre le système $(A_b X = B_b) : (S_b)$

R ~~2/~~ Pour $b = 1$, Ecrire la matrice $(A_1 | I_3)$ sous forme echelonnée réduite et déduire une solution du système (S_1).

~~3/ Pour~~ $b = 0$, Déterminer les valeurs propres de A_0. La matrice A_0 est-elle diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice :

$$\text{Det } A_b = \begin{vmatrix} 1 & b & b-1 \\ 3 & 2 & b \\ b-1 & b & b+1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\text{Det } A_b = \begin{vmatrix} 2-b & 0 & -2 \\ 3 & 2 & b \\ b-1 & b & b+1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[(2-b)(b+1) + 2(b-1)\right] - b\left[(2-b)b + 6\right]$$
$$= -2b(b-3) - b\left[-b^2 + 2b + 6\right]$$
$$= -b\left[2b - 6 - b^2 + 2b + 6\right]$$
$$= -b\left(-b^2 + 4b\right]$$
$$= b^2(b-4)$$

$\text{Det } A_b = 0$, pour $(b = 0) \vee (b = 4)$

On distingue 3 cas :

- Si $(b \neq 0) \wedge (b \neq 4)$:

(S_b) est de cramer, il possède une seule solution $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, avec :

$$x = \frac{1}{b^2(b-4)} \begin{vmatrix} 0 & b & b-1 \\ 3 & 2 & b \\ b & b & b+1 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{b^2(b-4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b-1 \\ 3 & 3 & b \\ b-1 & b & b+1 \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{1}{b^2(b-4)} \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ b-1 & b & b \end{vmatrix}$$

• Si $b=0$, on a : $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(A_0|B_0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

On voit que dans A_0 et $(A_0|B_0)$: $L_1 = -L_3$

Donc $rg\, A_0 = rg(A_0|B) = 2$ $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$

et par suite (S_0) admet une infinité de solution

$$(S_0) \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(z, -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

• Si $b=4$, on a : $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $(A_4|B_4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right)$

$rg\, A_4 = 2$ mais $rg(A_4|B_4) = 3$

(Pour A_4, il suffit de calculer $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$) $\Rightarrow rg\, A_4 = 2$

(Pour $(A_4|B_4)$, on a $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$) $\Rightarrow rg(A_4|B_4) = 3$

Donc (S_4) n'admet pas des solutions

$$S = \emptyset$$

2/ $$(A_1|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$(A_1|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$(A_1|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$(A_1|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$(A_1|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

on déduit $A_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution de (S_1) : on a : $(S_1) \Leftrightarrow A_1 X = B_1 \Rightarrow X = A_1^{-1} B_1$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solution est $(1, -1, 2)$

3/ $$\mathrm{Det}(A_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 0$. v.p simple, $\lambda_2 = 2$ v.p. double.

$E_{\lambda_2} = \ker(A_0 - 2I)$

$$(A_0 - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = z = 0) \wedge y \in \mathbb{R}$$

$E_{\lambda_2} = \{(0, y, 0)\} = \mathrm{vect}\{(0,1,0)\}$. $[\dim E_{\lambda_2} = 1] \neq [m(\lambda_2) = 2]$

Donc A_0 n'est pas diagonalisable.