Exercice 1 : (3.5pt) Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ -x + 3y + 3z = 4a \\ x - y + z = 4 \\ -2x + 2y + (2-a)z = -2b \end{cases}$$

1. Utiliser la méthode de l'échelonnement par ligne pour trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que (S) soit compatible.

Solution : En échelonnant par ligne le système (S) (ou la matrice du système (S)), on obtient le système équivalant suivant :

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2y + z = 4a-2 \\ z = 2 \\ (a+2)z = 2(b+2) \end{cases} \qquad \textbf{(0.75pt)}$$

On en déduit que le système (S) est compatible si et seulement si $2(a+2) = 2(b+2)$ si et seulement si $a = b$. **(0.75pt)**

2. Résoudre le système (S) lorsqu'il est compatible.

Solution : Le système (S) est donc compatible lorsque $a = b$, dans ce cas on remplace $z = 2$ dans la deuxième équation puis y et z dans la première équation, on obtient la solutions du système (S) : $(x, y, z) = (2a, 2a-2, 2)$. **(2pt)**

Exercice 2 : (6.5pt) Soient $n \geq 2$ un entier et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que 0 est une valeur propre de M. Quelle est la dimension du sous-espace propre E_0 ?

Solution : On sait que λ est une valeur propre de M si et seulement si $\mathrm{rg}(M - \lambda I_n) < n$, on en déduit que 0 est une valeur propre de M car $\mathrm{rg}(M) = 1 < 2 \leq n$, **(0.5pt)** et on a :

$$\dim E_0 = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

2. Que peut-on dire de la multiplicité de 0 ?

Solution : On a $\dim E_0 \leq m(0) \leq n$, i.e., $n - 1 \leq m(0) \leq n$. **(0.5pt)**

3. En déduire que le polynôme caractéristique de M est de la forme $(-1)^n X^{n-1}(X - \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier pourquoi $\alpha = \mathrm{Tr}(M)$.

Solution : On sait que M admet n valeurs propres dans $\mathbb{C}$, puisque 0 est une valeur propre de M d'ordre au moins $n-1$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ la n-ième valeur propre de M, alors :

$$P_M(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}(M)} (\lambda - X) = (-X)^{n-1}(\alpha - X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \alpha).$$

Puisque par hypothèse $P_M(X) \in \mathbb{R}[X]$, on en déduit que $\alpha \in \mathbb{R}$. **(1.5pt)**

On a :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(M)} \lambda = \alpha. \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Solution : Si $\alpha = 0$ on aura $\dim E_0 = n - 1 < m(0) = n$, on en déduit que M n'est pas diagonalisable, d'où

$$M \text{ diagonalisable} \Longrightarrow \alpha \neq 0.$$

Réciproquement, si $\alpha \neq 0$ (donc α est une valeur propre simple de M), on aura

$$\dim E_0 + \dim E_\alpha = (n-1) + 1 = n,$$

d'où M est diagonalisable.
Conclusion :

$$M \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{Tr}(M) \neq 0. \qquad \textbf{(0.75pt)} + \textbf{(0.75pt)}$$

Application : Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elle diagonalisables ?

Solution : Puisque par hypothèse $n \geq 2$ alors $1 - n \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(A) = 1$, i.e., en notant par C_i, pour $1 \leq i \leq n$, la i-ième colonne de A et en remplaçant C_j par $C_n - (1-n)C_j$, pour $1 \leq j \leq n-1$, on obtient :

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1-n \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente A n'est pas diagonalisable car $\mathrm{Tr}(A) = 0$. **(0.75pt)**

Il est clair que $\mathrm{rg}(B) = 1$ et $\mathrm{Tr}(B) = n \neq 0$, d'après la question précédente B est diagonalisable. **(0.75pt)**

Exercice 3 : (10pt) Soient α, β, γ des réels non tous nuls et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur propre de f. Préciser la valeur propre associée.

Solution : Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de v relativement à la base B, on a :

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma \\ \alpha\beta + \beta^2 + \beta\gamma \\ \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha + \beta + \gamma) \\ \beta(\alpha + \beta + \gamma) \\ \gamma(\alpha + \beta + \gamma) \end{pmatrix} = (\alpha + \beta + \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

On en déduit que v est un vecteur propre (non nul) de f **(0.75pt)**et $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$ est la valeur propre de f associée à v. **(0.75pt)**

2. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} \alpha - \beta - \gamma - X & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma - X & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta - X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma - X & \alpha + \beta + \gamma - X & \alpha + \beta + \gamma - X \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma - X & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta - X \end{vmatrix} \text{(somme des lignes)} \\
&= (\alpha + \beta + \gamma - X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta - \alpha - \gamma - X & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta - X \end{vmatrix} \\
&= (\alpha + \beta + \gamma - X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -\alpha - \beta - \gamma - X & 0 \\ 2\gamma & 0 & -\alpha - \beta - \gamma - X \end{vmatrix} \\
&= (\alpha + \beta + \gamma - X)(-\alpha - \beta - \gamma - X)^2 \\
&= (\lambda - X)(-\lambda - X)^2. \quad \textbf{(2pt)}
\end{aligned}$$

3. Discuter suivant les valeurs des réels α, β, γ la diagonalisation de A.

Solution :
<u>1er cas</u> : Si $\lambda = 0$, (i.e., $\alpha + \beta + \gamma = 0$) alors $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_{(3)}\}$, dans ce cas A est diagonalisable si et seulement si $A = 0$, mais $A = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & 2\gamma \end{pmatrix} \neq 0$ car α, β, γ sont non tous nuls, d'où A n'est pas diagonalisable. **(0.5pt)**

<u>2ème cas</u> : Si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda, -\lambda_{(2)}\}$, dans ce cas A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-\lambda} = 2$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A + \lambda I_3) = 1$. On a

$$A + \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 2\beta & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & 2\gamma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 0 & 0 \\ 2\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque α, β, γ sont non tous nuls, alors $\text{rg}(A + \lambda I_3) = 1$ et donc A est diagonalisable. **(1pt)**

4. Lorsque A est diagonalisable, déterminer :

(a) Une base de chacun des sous-espaces propres.

Solution : D'après la question précédente, on a :

$$E_\lambda = \langle v_1 = v \rangle \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

et

$$E_{-\lambda} = \ker(f + \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = \langle v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (-1, 0, 1) \rangle . \qquad \textbf{(1pt)}$$

(b) Une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

Solution :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pt)} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} . \quad \textbf{(0.5pt)}$$

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que A soit inversible.

Solution : On a $\det A = \lambda^3$, d'où A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$. **(1pt)**

6. Trouver l'expression de A^{-1} en fonction de A.

Solution : Remarquons que $D = \lambda J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifiant $J^{-1} = J$.

On en déduit que

$$A = PDP^{-1} = \lambda PJP^{-1} \Longrightarrow PJP^{-1} = \frac{1}{\lambda} A.$$

D'où :

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \frac{1}{\lambda} PJP^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} A. \qquad \textbf{(1.5pt)}$$