

DOCUMENTS, CALCULATRICES, ET TELEPHON ES PORTABLES INTERDITS.

Exercice 1 ( 2,5 pts)

Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  une série numérique.

- 1) Montrer que si  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  converge alors  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$  converge.
- 2) Supposons que  $\forall n, u_n > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(u_n) = a \in \mathbb{R}^+$ , étudier la nature de  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ .

Exercice 2 ( 6 pts)

Soit la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-x}}$ .

- 1) Trouver le domaine  $D$  de convergence de cette série.

2) Posons  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-x}}$   $x \in D$ .

Etudier la continuité puis la dérivabilité de  $F$  sur  $D$ .

Exercice 3 (5 pts)

Soit la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n)!} + n(4^n) \right) x^n$ .

- 1) Déterminer son rayon de convergence ainsi que son domaine de convergence.
- 2) Calculer sa somme.

Exercice 4 ( 6,5 pts)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |\cos x|$ .

- 1) Représenter  $f$  et vérifier qu'elle est  $\pi$  périodique.
- 1) Développer  $f$  en série de Fourier.
- 2) Dédire la valeur de la série numérique  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$ .
- 3) Dédire la valeur de la série de fonctions  $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(nx)}{4n^2 - 1}$ .

Formules trigonométriques:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$