Toutes les réponses doivent être portées sur **un seul cahier.**

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (7 pts)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f_{a,b}$ un endomorphisme du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique de $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & a \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

1- Déterminer suivant les paramètres a et b une base de $\ker f_{a,b}$ et le rang de $f_{a,b}$ (**dans tout l'exercie il n'est pas demandé de déterminer l'expression de** $f_{a,b}$).

2- Pour quelles valeurs de a et b la matrice $A_{a,b}$ est-elle inversible.

3- On pose $a = 2$ et $b = 1$ et notons $f_{2,1}$ par f et $A_{2,1}$ par A.

i/- Soit la famille de vecteurs $B' = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,2,1), v_3 = (1,2,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\det_B(v_1, v_2, v_3)$.

ii/- En déduire que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

iii/ Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base B'.

iv/ En déduire la matrice $A' = M_{B'}(f)$.

v/ Déterminer la matrice P de passage de B vers B'.

vi/ Calculer P^{-1}.

vii/ Donner une relation entre A et A'

viii/ Calculer $A^{2016.}$

Exercice 2 : (3 pts) (Les questions suivantes sont indépendantes)

1- Soit λ un nombre réel et soit u l'endomorphisme définie par :

$$u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], \quad u\left(a + bX + cX^2 + dX^3\right) = -a + (2a+b)X + (a+2b+\lambda c)X^2 + \left(a+b+\lambda^2 d\right)X^3$$

Calculer $\det u$.

2- Donner dans S_5 deux permutations (différentes de l'identité et qui ne sont pas des transpositions) dont l'une est de signature positive et l'autre négative. Justifier.

3- Montrer, pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), que : $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (se ramener aux endomorphismes par l'association canonique).

Bon courage