Examen 1

Exercice 1. ⟦ ***2,5 pts*** ⟧
Soit $nv[F]$ le nombre de variables propositionnelles distinctes dans F. Soit $nc[F]$ le nombre d'occurrences de connecteurs binaires dans F. Montrer par récurrence structurelle que pour toute formule F on a :

$$\mathbf{nv[F] \leq nc[F] + 1.}$$

Réponse.

1. Soit $F \in \mathcal{F}_0$, c'est-à-dire une variable ou une constante.
Dans ce cas, on a $nc[F] = 0$ et $nv[F] \leq 1$. (En effet si F est une variable alors $nv[F] = 1$, et si F une constante alors $nv[F] = 0$). La propriété est bien vérifiée: $nv[F] \leq 1 = nc[F] + 1$.

2. Soit G une formule vérifiant $nv[G] \leq nc[G] + 1$.
Soit $F = \neg G$. On a $nc[F] = nc[G]$ et $nv[F] = nv[G]$. Donc on déduit $nv[F] \leq nc[F] + 1$.

3. Soient G et H deux formules vérifiant $nv[G] \leq nc[G] + 1$ et $nv[H] \leq nc[H] + 1$.
Soit $F = (G\alpha H)$ où α un connecteur binaire. On a $nv[F] \leq nv[G] + nv[H]$ et $nc[F] = nc[G] + nc[H] + 1$.
Rappelons que card$(A \cup B) \leq$ card(A) + card(B).
Il vient alors que :

$$nv[F] \leq nc[G] + 1 + nc[H] + 1 = (nc[G] + nc[H] + 1) + 1 = nc[F] + 1.$$

Donc la propriété est vérifiée pour toute formule $F \in \mathcal{F}$.

Exercice 2. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *Soit la formule à priorité*

$$\mathbf{F = x \wedge (y \vee z \Rightarrow \neg x) \Rightarrow y \Rightarrow \neg z.}$$

1. *Donner la forme complètement parenthésée de F.*
2. *Transformer la formule F en une somme de monômes(FND).*
3. *La formule F est-elle satisfaisable? La formule F est-elle valide ? Justifier.*
4. *Déduire que $\{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \Rightarrow \neg\mathbf{A}\} \vDash \mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{C}$.*

Réponse.

1. **0.5 pt**

$$\mathbf{F} = \Big(\Big(\mathbf{x} \wedge ((\mathbf{y} \vee \mathbf{z}) \Rightarrow \neg\mathbf{x})\Big) \Rightarrow \Big(\mathbf{y} \Rightarrow \neg\mathbf{z}\Big)\Big).$$

2. **1.5 pt**

$$\begin{aligned} F &= (x((y+z) \Rightarrow \bar{x})) \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{z}) \\ &\equiv \overline{(x((y+z) \Rightarrow \bar{x}))} + (y \Rightarrow \bar{z}) \\ &\equiv \bar{x} + \overline{((y+z) \Rightarrow \bar{x})} + (y \Rightarrow \bar{z}) \\ &\equiv \bar{x} + (y+z)x + \bar{y} + \bar{z} \\ &\equiv \bar{x} + yx + zx + \bar{y} + \bar{z} \end{aligned}$$

3. **1 pt**

- F est satisfaisable. Du premier monôme on déduit que $x = 0, y = *, z = *$ sont des modèles de F.
- F est valide. Par exemple, il suffit de montrer que $\neg F$ insatisfaisable:

$$\neg F \equiv xyz(\bar{y} + \bar{x})(\bar{z} + \bar{x}) \equiv 0.$$

4. **1 pt** On a $\models F$. (F est valide). Donc par le théorème de substitution, $G = F_\sigma$ est valide pour $\sigma(x) = A, \sigma(y) = B, \sigma(z) = C$. Alors

$$\models (A \wedge (B \vee C \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C).$$

De la propriété de la conséquence

$$H_1, \ldots, H_n \models C ssi \models H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C.$$

on déduit alors que

$$\{A, B \vee C \Rightarrow \neg A\} \models B \Rightarrow \neg C.$$

Exercice 3. ⟦ *3 pts* ⟧

1. *Montre que si $\Gamma, A \models B$ et $\Gamma, B \models A$ alors $\Gamma \models A \Leftrightarrow B$.*

2. *Soit F et G deux formules et x une variable qui ne figure pas dans G.*
   Montrer que $(F \vee \neg x) \wedge G$ est satisfaisable ssi G est satisfaisable.

Réponse

1. **1pt** Supposons que $\Gamma, A \models B$ et $\Gamma, B \models A$. Montrons $\Gamma \models A \Leftrightarrow B$.
Soit v modèle de Γ. On distingue deux cas:
- $[A]_v = 1$. Donc v est modèle de $\Gamma \cup A$. Comme $\Gamma, A \models B$ on déduit que $[B]_v = 1$ et donc $[A \Leftrightarrow B]_v = 1$.
- $[A]_v = 0$. Par l'absurde supposons $[B]_v = 1$. Comme $\Gamma, B \models A$, on aura $[A]_v = 1$. Contradiction. Donc $[B]_v = 0$. Alors $[A \Leftrightarrow B]_v = 1$.

2. **2pt**

$\Rightarrow$ Supposons $(F \vee \neg x) \wedge G$ satsifaisable. Donc il existe v telle que $[(F \vee \neg x) \wedge G]_v = 1$. Par définition du $\wedge$, on a $[G]_v = 1$. Donc G a au moins un modèle(satisfaisable).

$\Leftarrow$ Supposons G satsifaisable. Donc il existe v telle que $[G]_v = 1$.
Considérons l'assignation $w(y) = v(y)$ si $y \neq x$ et $w(x) = 0$.
$[(F \vee \neg x) \wedge G]_w = \min([(F \vee \neg x)]_w, [G]_w)$.
$[(F \vee \neg x)]_w = 1$ (car $[\neg x]_w = 1$.)
Comme w coincide avec v sur les variables de G on a : $[G]_w = [G]_v = 1$. Il vient que $[(F \vee \neg x) \wedge G]_w = 1$.

Exercice 4. ⟦ *3 pts* ⟧

1. *Transformer $\neg F$ en forme normale conjonctive où*

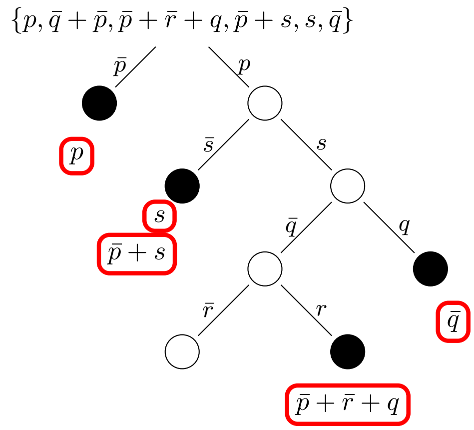
$$\mathbf{F = p \wedge (q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow s) \Rightarrow s \Rightarrow q.}$$

2. *En utilisant l'arbre sémantique, étudier la validité de F.*

Réponse.

1. **1,5 pts**

$$\begin{aligned}\neg F &\equiv \overline{\left(p(q \Rightarrow \bar{p})\right) \Rightarrow \left((pr \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow s) \Rightarrow (s \Rightarrow q))\right)} \\ &\equiv \left(p(q \Rightarrow \bar{p})\right)\left(\overline{(pr \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow s) \Rightarrow (s \Rightarrow q))}\right) \\ &\equiv \left(p(q \Rightarrow \bar{p})\right)\left((pr \Rightarrow q)(p \Rightarrow s)\overline{s \Rightarrow q}\right) \equiv p(\bar{q} + \bar{p})(\bar{p} + \bar{r} + q)(\bar{p} + s)s\bar{q}.\end{aligned}$$



2. **1,5 pts**

On trouve que l'arbre n'est pas fermé. $\neg F$ est satisfaisable, et on reconnaît le seul modèle qui est $(p = 1, s = 1, q = 0, r = 0)$. Alors F n'est pas valide.

Exercice **5**. ⟦ ***4 pts*** ⟧

En utilisant la méthode de résolution, montrer que

$$\{\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}, \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c}, \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{c}\} \models (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \neg\mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c}).$$

Réponse. On sait que

$\{\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}, \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c}, \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{c}\} \models (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \neg\mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c})$ ssi $\{\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}, \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c}, \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{c}\}, \neg(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \vee (\neg\mathbf{a} \wedge \neg\mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c}) \models \bot$.

Et par les équivalences remarquables , ssi $\{\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\} \models \bot$. **0,5 pts**

(1)	$a+b+c$	Hyp
(2)	$\bar{a}+b$	Hyp
(3)	$\bar{b}+c$	Hyp
(4)	$\bar{c}+a$	Hyp
(5)	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	Hyp
(6)	$b+c$	Res (1,2)
(7)	$a+c$	Res (1,3)
(8)	$a+b$	Res (1,4)
(9)	a	Res (4,7)
(10)	$\bar{b}+\bar{c}$	Res (5,9)
(11)	b	Res (2,8)
(12)	c	Res (11,3)
(13)	$\bar{b}$	Res (10,12)
(14)	$\bot$	Res (11,13)

On a prouvé que : $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, a+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, a+b+c\} \vdash \bot$. **3pts** Par le théorème de correction de la résolution on déduit alors que $\{\bar{a}+b, \bar{b}+c, a+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, a+b+c\} \models \bot$. **0,5pt**

Exercice **6**. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *Rappelons les résultats vus dans le cours: le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est un système complet et le système $\{0, 1, \Leftrightarrow, \neg\}$ est incomplet.*

*Le connecteur binaire **`ou exclusif`** est défini par $x \oplus y \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$.*

1. *Que vaut $0 \oplus 0$? Déduire que le système $\{\oplus\}$ est incomplet.*
2. *Exprimer $\neg x$ et $x \vee y$ dans le système $\{1, \wedge, \oplus\}$. Que peut-on déduire?*
3. *Le système $\{1, \wedge, \oplus\}$ est-il minimal ? Justifier.*

Réponse.

1. **1pt** $0 \oplus 0 = 0$. Pour l'assignation constante donnant 0 à toutes les variables, la valeur de toute formule F écrite dans le système $\{\oplus\}$ sera 0. Donc on ne peut pas exprimer $\neg x, 1$. Donc $\{\oplus\}$ est incomplet.

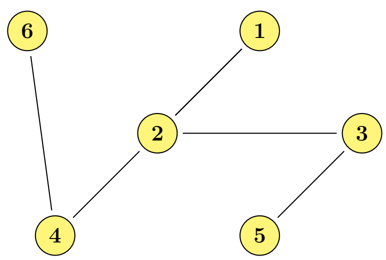
2. **1,5pt** $\neg x \equiv x \oplus 1$. $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \equiv ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)) \oplus 1$.
Comme $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet, on déduit que $\{1, \wedge, \oplus\}$ est complet.
3. **1,5pt** Oui $\{1, \wedge, \oplus\}$ est minimal.

(a) $\{1, \wedge\}$ est incomplet:
Pour l'assignation constante 1, toute formule écrite dans ce système aura comme valeur 1. Donc on ne pourra pas exprimer ni 0 ni $\neg x$ par exemple.

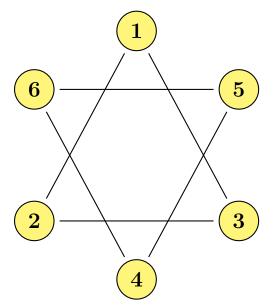
(b) $\{\wedge, \oplus\}$ est incomplet: Avec une variable x, on peut exprimer x. On peut faire aussi le 0 car $x \oplus x \equiv 0$. Maintenant remarquons que $x \wedge x \equiv x; x \wedge 0 \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$.
$x \oplus x \equiv 0; 0 \oplus 0 \equiv 0; x \oplus 0 \equiv x$. Donc les seules formules qu'on peut exprimer sont 0 et x.

(c) $\{1, \oplus\}$ est incomplet.
Par l'absurde, supposons que $\{1, \oplus\}$ est complet. Remarquons que $x \oplus y \equiv \neg(x \Leftrightarrow y)$. Donc $\{1, \neg, \Leftrightarrow\}$ est complet. Alors $\{0, 1, \neg, \Leftrightarrow\}$ est complet. Ceci est en contradiction avec le résultat vu dans le cours. On conclut alors que $\{1, \oplus\}$ est incomplet.

Exercice **7**. *[[**Bonus**]] Formalisez le problème de déterminer si un graphe non orienté avec n sommets est **connexe ou non** avec la logique propositionnelle.*



Graphe non orienté connexe



Graphe non orienté non connexe

PS.

- *Un graphe non orienté est caractérisé par l'ensemble de ses sommets et l'ensemble de ses arrêtes. Par exemple le graphe de droite:* $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(6, 4), (2, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 5)\}\}$.
- *Un graphe non orienté est connexe si pour touts sommets a et b il existe une chaîne(chemin) entre a et b. (voir figures).*

Réponse.

Considérons les variables propositionnels a_{ij} qui seront interprétés comme la présence d'une arrête entre les sommets i et j.
Considérons les variables propositionnels c_{ij} qui seront interprétés comme l'existence d'un chemin entre les sommets i et j.
Soit Δ l'ensemble des paires de sommets qui sont reliés par une arrête.
Soit

$$A = \bigwedge_{(i,j)\in\Delta} a_{ij} \wedge \bigwedge_{(i,j)\notin\Delta} \neg a_{ij}.$$

La formule A code le graphe.
La connexité est donné par définition comme:$C \equiv \bigwedge_{i\neq j} c_{ij}$.
Il reste le plus important de coder la relation entre les a_{ij} et les c_{ij}.

$$D \equiv \bigwedge_{i\neq j} \big(c_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} \vee \bigvee_{k} (c_{ik} \wedge a_{kj})\big).$$

Le graphe codé par A est connexe ssi la formule suivante valide: $(A \wedge D) \Rightarrow C$. Autrement dit : $A \vDash (D \Rightarrow C)$. Donc on peut conclure que chaque modèle de la formule $(D \Rightarrow C)$ constitue un graphe connexe.