Interrogation écrite

Durée 30 mn

Tout document interdit

Exercice 1 (3)

Cocher la ou les propositions que vous jugez valide(s) ?

- ☐ $\models \alpha$ ssi $\models \forall x\alpha$
- ☐ α satisfiable ssi $\forall x\alpha$ satisfiable
- ☐ α satisfiable ssi $\exists x\alpha$ satisfiable
- ☐ $\neg\alpha$ satisfiable ssi $\neg\forall x\alpha$ satisfiable
- ☐ $\neg\alpha$ non satisfiable ssi $\exists x\alpha$ satisfiable
- ☐ $\neg\alpha$ non satisfiable ssi $\forall x\neg\alpha$ satisfiable

Exercice 2 (2)

On considère la formule β telle que :

$$\boldsymbol{\beta} : \forall x P(x) \wedge \forall x \neg P(x) \rightarrow P(u) \wedge \neg P(v)$$

Questions :

1. β est-elle valide ?
2. Si vous pensez que oui, le montrer à l'aide d'un arbre sémantique.
3. Si vous pensez que non, donner un modèle de Herbrand de $\neg\beta$.

N.B. Pour la question 1, répondre directement sur le sujet.
Remettre une seule double feuille sans intercalaire.

Correction

Exercice 1 (3)

Cocher la ou les propositions que vous jugez valide(s) ?

- ☒ $\models \alpha$ ssi $\models \forall x \alpha$
- ☐ α satisfiable ssi $\forall x \alpha$ satisfiable
- ☒ α satisfiable ssi $\exists x \alpha$ satisfiable
- ☒ $\neg\alpha$ satisfiable ssi $\neg\forall x \alpha$ satisfiable
- ☐ $\neg\alpha$ non satisfiable ssi $\exists x \alpha$ satisfiable
- ☒ $\neg\alpha$ non satisfiable ssi $\forall x \neg\alpha$ satisfiable

Correction Exercice 2 (2)

1. Oui est β est valide.
2. **Arbre sémantique :**

$\models \beta$ ssi $\neg\beta$ non satisfiable ssi $(\neg\beta)_p$ non satisfiable

$(\neg\beta)_p$ non satisfiable ssi sa fermeture existentielle $\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_p$ (car u et v sont libres dans β).

$\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_p$ est non satisfiable ssi sa forme de Skolem $\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_{pS}$ est non satisfiable

(0.5)

2.1.On renomme les variables liées de **β :** $\forall x P(x) \wedge \forall y \neg P(y) \rightarrow P(u) \wedge \neg P(v)$

2.2.$\neg\beta$: $\mathbf{(}\forall x P(x) \wedge \forall y \neg P(y)\mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\neg P(u) \vee P(v)\mathbf{)}$ **(0.25 point)**

2.3. $(\neg\beta)_p$: $\forall x \forall y\ \mathbf{((}P(x) \wedge \neg P(y)\mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\neg P(u) \vee P(v)\mathbf{))}$ **(0.25 point)**

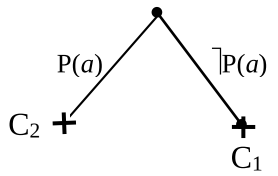
2.4. $\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v}\ (\neg\beta)_p$: $\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} \forall x \forall y\ \mathbf{((}P(x) \wedge \neg P(y)\mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\neg P(u) \vee P(v)\mathbf{))}$ **(0.5 point)**

2.5. : $(\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_p)_S$: $\forall x \forall y\ \mathbf{((}P(x) \wedge \neg P(y)\mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\neg P(a) \vee P(b)\mathbf{))}$ **(0.5 point)**

2.6. Ensemble de clauses issu de $(\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_p)_S$:

S : { $P(x)$, $\neg P(y)$**,** $\neg P(a) \vee P(b)$}

2.7. Arbre sémantique : **(0.5 point)**



L'arbre sémantique issu de S est clos. S est donc non satisfiable. Par conséquent $(\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_p)_S$ donc $\exists \boldsymbol{u} \exists \boldsymbol{v} (\neg\beta)_p$ est non satisfiable. On en déduit que $(\neg\beta)_p$ donc $\neg\beta$ est non satisfiable, donc $\models \beta$.