Correction

Partie I

1. Montrer que les fonctions $f(x, y, z) = (x^y)^z$ et $g(x, y, z) = x^{|y-z|}$ sont primitives récursives

$f(x, y, z) = exp\ (x, *(y, z)) = exp\ (P_1^3(x, y, z),\ *(P_2^3, P_3^3)(x, y, z))$

$g(x, y, z) = exp\ (x, abs(y, z)) = exp\ (P_1^3(x, y, z),\ abs\ (P_2^3, P_3^3)(x, y, z))$

$abs(x, y) = |x - y|$

2.

$$\text{Car}_E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si pair et } x\ R\ si\ n < 50 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On désigne par P et S les ensembles suivants :

$P = \{2n | n \in N\}$ $\quad$ $\text{Car}_P(x) = r(2, x)$

$S = \{n | n \in N \text{ et } n < 50\}$ $\quad$ $\text{Car}_S(x) = sg\ (50 - x)$.

{ E = ens nbrs pair <
{ E = P ∩ S

$\text{Car}_P(x)$	$\text{Car}_S(x)$	$\text{Car}_E(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\text{Car}_E(x) = (\text{Car}_P(x) + \text{Car}_S(x)) \dot{-} (\text{Car}_P(x) * \text{Car}_S(x))$

3. $E = \{0, 1, 7\}$

$$\text{Car}_E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=0\ (sg(x) = 0) \text{ ou bien } x=1\ (sg|x-1| = 0) \text{ ou bien } x=7\ (sg|x-7| = 0) \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$\text{Car}_E(x) = sg\ (x * |x-1| * |x-7|)$ (le produit à plus de 2 arguments a été démontré récursif.

$\text{Car}_E(x)$ est le produit de fcts primitives récursives : E est donc récursif et par conséquent récursivement énumérable (th vu en cours).

4. $q_0 1 D q_0$
$q_0 * 1 q_1$
$q_1 1 G q_1$
$q_1 0 D q_2$
$q_2 1 0 q_2$ { on supprime
$q_2 0 D q_f$ 1 seule barre.

$1^{x+1} * 1^{y+1} \rightarrow 1^{x+1} 1 1^{y+1}$

$\|$

1^{x+y+3}

le résultat doit être 1^{x+y+2}

Durée 2 heures

Tout document interdit

Partie I

(4.5, 2 , (2,2), 4.5)

1. Traduire les phrases suivantes dans le langage du premier ordre avec égalité :

P1. Deux personnes sont parentes si elles ont le même père.

P2. Deux personnes sont parentes si leurs pères sont parents.

P3. Le père du père d'une personne est parent de cette personne.

2. Soit α une formule d'un langage L du calcul des prédicats du premier ordre, et $\alpha_{[t/x]}$ la formule obtenue en substituant dans α le terme $t = f(x)$ à la variable x. α et $\alpha_{[t/x]}$ sont-elles logiquement équivalentes ?

3. Soit la formule $\alpha : P(x, y) \to \exists u\, P(u, y)$.

3.1. α est-elle valide ?

3.2. Si la réponse à la question **3.1** est oui, démontrer sans utiliser le théorème de complétude, que α est un théorème.

4. Vérifier la consistance des ensembles suivants :

$\Gamma_1 : \{\forall x \exists y\, (x = y), P(x), \neg P(y)\}$

$\Gamma_2 : \{\forall x\, (x = y), P(x), \neg P(y)\}$

$\Gamma_1 : \{(x = y), P(z, x), \neg P(z, y)\}$

Partie II (2, 2, 1)

1. Montrer que le produit cartésien de deux ensembles E_1 et E_2 récursifs est récursif.

2. En déduire que le produit cartésien $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ $(n > 2)$ de n ensembles récursifs est récursif.

3. Soit E_1 un ensemble primitif récursif et E_2 un ensemble récursif. Que dire de l'ensemble $E = E_1 \cup E_2$?

NB : Remettre une seule double feuille et une intercalaire au plus.

Corrigé Epreuve de Remplacement
Log π.

Partie I

1/ Traduction des phrases. D = domaine des êtres humains.

Posons : $IR(d,d')$: d et d' sont parents.

$IP(d)$ = le père de d.

P_1 : Deux personnes sont parentes si elles ont le même père.

Traduct de P_1 : $\forall x \forall y \; (P(x) = P(y) \to R(x,y))$.

P_2 : Deux personnes sont parents si leurs pères sont parent.

Traducti de P_2 : $\forall x \forall y \; (R(P(x), P(y)) \to R(x,y))$.

P_3 : « Le père du père d'une personne est parent de cette personne ».

posons : $IS(d,d')$: « d est parent de d' »

Traduct de P_3 : $\forall x \; (S(P(P(x)), x))$.

ou bien : $\forall x \forall y \; (y = P(P(x)) \to S(P(P(x)), y))$.

2/ α et $\alpha_{[t|x]}$ ne sont pas toujours logiquement équivalent.

Exple : α : $P(x)$

$\alpha_{[f(x)|x]}$: $P(f(x))$

il existe une interprétat I de domaine $D = \mathbb{N}$ tq :

IP : ... est pair

$If(d) = 2d+1$, $v(x) = 0$

telle que : $I(P(x))_{v(x=0)} = V$ et $I(P(f(x)))_{v(x=0)} = IP(If(0)) = F$

3/ α : $P(x,y) \to \exists u \; P(u,y)$

3-1/ α est Valide.

Montrons le par l'absurde.

Supposons α non Valide : $\exists I$ de domaine D, il existe $d = v(x)$, $d' = v(y)$ tq :

$I(P)(d,d') = V$ et $I(\exists u\, P(u,y))_{v(y=d')} = F$.

$I(\exists u P(u,y))_{v(y=d')} = F \iff I(P)(d'',d') = F$ pour tout $d'' \in D$.

en particulier pour $d'' = d$ d'où : $\left.\begin{array}{l} I(P)(d,d') = F \\ \text{et } I(P)(d,d') = V \end{array}\right\}$ absurde.

3-2 α est un théorie

mont α : $P(x,y) \vdash \exists u P(u,y)$.

i.e $P(x,y) \vdash \neg(\forall u \neg P(u,y))$.

1) $P(x,y)$ hyp.

2) $(\neg\neg(\forall u \neg P(u,y)) \to \neg P(x,y)) \to ((\neg\neg(\forall u\neg P(u,y)) \to P(x,y)) \to (\neg(\forall u \neg P(u,$ A_3

3) $\neg\neg(\forall u \neg P(u,y)) \to \forall u \neg P(u,y)$ (thm)

4) $\forall u \neg P(u,y) \to \neg P(x,y)$ A_4

5) $\neg\neg(\forall u \neg P(u,y)) \to \neg P(x,y)$ (transitivité).

6) $(\neg\neg(\forall u \neg P(u,y)) \to P(x,y)) \to (\neg(\forall u \neg P(u,y)))$ MP(2,5)

7) $P(x,y) \to ((\neg\neg \forall u \neg P(u,y)) \to P(x,y))$ A_1

8) $\neg\neg \forall u \neg P(u,y) \to P(x,y)$ MP(1,7)

9) $\neg(\forall u \neg P(u,y))$ MP(6,8)

4/ 1) $\Gamma_1 = \{\forall x \exists y\, (x=y),\ P(x),\ \neg P(y)\}$ consistant car :

$\exists I$ de domaine $\mathbb{N}$, $\exists v(x)=0$, $\exists v(y)=1$ tq

IP : "... est un nbre pair"

et $I(\forall x \exists y (x=y)) = V$, $I(P)(0) = V$, $I(\neg P(y))_{v(y=1)} = V$.

i.e il y'a une interprét I de domaine $\mathbb{N}$ qui satisfait les 3 formules de Γ_1.

2) $\Gamma_2 = \{\forall x\, (x=y),\ P(x),\ \neg P(y)\}$ est inconsistant

car : $\forall x\, (x=y) \to x=y$ A_4

2) $(x=y) \to (P(x) \to P(y))$

3) $\forall x\,(x=y) \to (P(x) \to P(y))$ transitiv

4) $\forall x\,(x=y)$ hyp 1

5) $P(x) \to P(y)$ Mp(3,4)

6) $P(x)$ hyp 2

7) $P(y)$ Mp(5,6)

d'où $\Pi_1 \vdash P(y)$ ~~or~~ $\Pi_1 \vdash \neg P(y)$ (évident)

d'où Π_1 inconsistant.

3) $\Pi_3 = \{x=y,\ P(z,x),\ \neg P(z,y)\}$ est inconsistant.

1) $x=y \to (P(z,x) \to P(z,y))$ Axiome.

2) ~~P(z~~ $x=y$ hyp 1

3) $P(z,x) \to P(z,y)$ Mp(1,2)

4) $P(z,x)$ hyp 2.

5) $P(z,y)$ Mp(3,4)

d'où : $\Pi_3 \vdash P(z,y)$ or $\Pi_3 \vdash \neg P(z,y)$

donc Π_3 inconsist.

Partie II :

1) E_1 et E_2 sont Récursifs : $E_1 \times E_2$ est R ?

$$\mathrm{Car}_{E_1\times E_2}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in E_1\times E_2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E_1 \text{ et } y \in E_2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{Car}_{E_1}(x)=0 \text{ et } \mathrm{Car}_{E_2}(y)=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} = \underbrace{\mathrm{Sg}}_{\text{P.R}}(\overset{R}{\mathrm{Car}_{E_1}(x)} + \overset{R}{\mathrm{Car}_{E_1}}$$

2) par récurrence sur n.

3) E_1 est ~~P~~ Primitif récursif et E_2 est Récursif

$E_1 \cup E_2$ est récursif

mais on ne peut pas affirmer qu'il est P.R.

Durée 2 heures

Tout document interdit

(3, 2, 2) – (2, 3) – ((2, 2, 2, 1), 3)

1. On considère L un langage du premier ordre et Γ un ensemble de formules de L tel que : $\Gamma : \{\exists xP(x,y), \exists yP(x,y), \exists xP(x,x)\}$.

   1.1. Γ est-il consistant ? Si oui, en donner un modèle.

   1.2. La proposition $\exists xP(x,y), \exists yP(x,y) \models \exists xP(x,x)$ est-elle valide ?

   1.3. Donner une forme prenexe de la formule $\beta : \exists xP(x,y) \rightarrow (\exists yP(x,y) \rightarrow \exists xP(x,x))$

2. On considère les formules : $\exists x\forall yP(x,y)$, $\forall y\exists x\, P(x,y)$ et $\forall yP(f(y), y)$.

   2.1. Vérifier la validité de la proposition suivante : $\forall yP(f(y), y) \models \exists x\forall yP(x,y)$

   2.2. Montrer sans utiliser la propriété de complétude que : $\forall yP(f(y), y) \vdash \forall y\exists x\, P(x,y)$

3. Soient les phrases suivantes :

   Phrase1 : tout nombre premier, excepté 2, est impair.

   Phrase2 : aucun nombre pair, excepté 2, n'est premier.

   Phrase3 : si le reste de la division de x par y est égal à 0, x est un multiple de y.

   Phrase4 : si le successeur de x est égal au successeur de y, x et y désignent le même nombre.

   3.1. Traduire les phrases ci-dessus dans le langage du premier ordre. On désignera par α, β, γ et δ les formules correspondant à Phrase1, Phrase2, Phrase3 et Phrase4 respectivement.

   3.2. Montrer sans utiliser la propriété de complétude que :

$$\alpha \vdash \beta.$$

NB : Remettre une seule double feuille et une intercalaire au plus.