EMD3

Exercice1 (3,5 point)

On pose: $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}dt.$

1) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.
2) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 (3,5 points)

Etudier la nature des séries numériques suivantes:

1) $\sum_n 2^{-n^2}$, 2) $\sum_n \frac{\log n}{n}\cos(na)$ (suivant les valeurs du paramètre a).

Exercice3 (5 points)

Considérons la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^{2n+1}$ où l'on a:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)} \quad n \geq 1$$

1) Déterminer son rayon ainsi que son domaine de convergence, puis calculer sa somme S.
2) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice4 (8 points)

Soit la série de fonction de terme général $f_n(x)$ telle que:

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)} \quad n \geq 1$$

I. 1) Montrer que la série $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Posons $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

2) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

II. Dans cette partie, **on admettra que :**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+x^2u)}du \leq \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+x^2u)}du \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

2) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+x^2u)}du$.
3) En déduire que $S(x) \underset{0^+}{\sim} x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.
4) Montrer que S n'est pas dérivable en 0.

Bon courage

Un corrigé de l'EMD3 2009/2010:

Exercice 1:

1) Continuité de F sur $\mathbb{R}_+$: posons $f(t,x) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt^2}$, on a :

a) f est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}_+$.

b) Etudions la convergence uniforme de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$:

Comme $|f(t,x)| \leq \dfrac{2}{t^2}e^{-xt^2} \leq \dfrac{2}{t^2}\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann).

D'où d'après Weirestrass $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

De a) et b) F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = (\cos t - 1)e^{-xt^2}$.on a :

c) f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}_+$.

d) Etudions la convergence uniforme de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$:

Comme $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq 2e^{-xt^2} \leq 2e^{-at^2}\ \forall\ x \in [a,+\infty[,\ a > 0,$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at^2}dt$ converge ($\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-at^2} = 0$).

D'où d'après Weirestrass $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément sur tout $[a,+\infty[,\ a > 0.$

De c) et d) F est dérivable sur tout $[a,+\infty[,\ a > 0$ ie F dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2:

1) Utilisons la régle de Cauchy: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2^{-n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 < 1.$

On en déduit que la série numérique donnée est convergente.0

2) <u>1er cas:</u> $a \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Utilisons Abel, posons $u_n = \dfrac{\log n}{n}$ et $v_n = \cos(na)$.

★ Soit $f(t) = \dfrac{\log t}{t}$, $f'(t) = \dfrac{t\frac{1}{t} - \log t}{t^2} = \dfrac{1-\log t}{t^2} < 0$ pour $t >>$ donc $(u_n)_n \searrow$.

★ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$

★ $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} v_n\right| \leq \frac{1}{\left|\sin(\frac{a}{2})\right|}\ \forall a \neq 2k\pi.$

Conclusion: $\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{\log n}{n}\cos(na)$ converge $\forall a \neq 2k\pi$.

Bon courage

2ème cas: $a = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n}$ diverge (Bertrand).

Exercice 3:

1) a) Soit $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^{2n+1} = x \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(x^2)^n}{(2n+1)(2n-1)}$, posons $y = x^2$.

Considérons alors la s.e $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} y^n}{(2n+1)(2n-1)}$, calculons son rayon R_y:

$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ (rapport de polynomes), d'après le théorème de Hadamard :$R_y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R = \sqrt{1} = 1$. Donc $\Delta =]-1,1[$ est son intervalle de covergence.

b) Déterminons le domaine de convergence D, ie étude aux bornes.

On a que $|u_n(\pm 1)| = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n(\pm 1)$ convergent absolument ie il ya convergence aus deux bornes.

Conclusion : $D = [-1,1]$.

c) Calculons sa somme S.

Tout d'abord on a $\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)} + \frac{-1}{(2n+1)} \right)$

Donc $S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{2} S_1(x) - \frac{1}{2} S_2(x)$ ce partage est possible car les deux s.e sont convergentes sur D (elles ont 1 pour rayon et convergent en ± 1).

★ $S_1(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n+1}$, posons $N = n-1$ pour avoir

$2n-1 = 2(n-1)+1 = 2N+1$.

ie $S_1(x) = \sum_{N\geq 0} \frac{(-1)^{N+2}}{(2N+1)} x^{2N+3} = x^2 \sum_{N\geq 0} \frac{(-1)^N}{(2N+1)} x^{2N+1} = x^2 (Arctgx)\ \forall x \in [-1,1]$.

★ $S_2(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)} x^{2n+1} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} = -(Arctgx - x)\ \forall x \in [-1,1]$.

Conclusion: $S(x) = \frac{1}{2}[x^2(Arctgx) + Arctgx - x]\ \forall x \in [-1,1]$.

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} = S(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1 \right]$.

Exercice4:

I 1) Convergence normale:

On a que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)|$ car f_n est paire.

Posons $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{|x|}{n(1+nx^2)} = \frac{x}{n(1+nx^2)}\ \forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$.

Nous avons le TV

suivant:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$		$-$
g_n	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = g_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann) donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2) La continuité de S:
(1) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (car produit, composée, rapport et somme de fonctions C^1).
(2) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
De (1) et (2) on obtient la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

3) La dérivabilité de S:
(3) Etude de la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n'$:
On a $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2} \Rightarrow |f_n'(x)| \leq \frac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq \frac{1}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2a^2}$
ceci est vrai $\forall x \in]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[,\ a > 0.$ or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann)
donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout
$]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[,\ a > 0.$
De (1) et (3) on obtient la dérivabilité de F sur tout $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[,\ a > 0.$
F est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

II. 1) Calculons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+x^2u)}du$: on a $\frac{1}{u(1+x^2u)} = \frac{1}{u} - \frac{x^2}{1+x^2u}\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.
D'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+x^2u)}du = [\log u - \log(1+x^2u)]_1^{+\infty} = \left[\log\left(\frac{u}{1+x^2u}\right)\right]_1^{+\infty} = -\log x^2 + \log(1+x^2$$

On trouve $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u(1+x^2u)}du = \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2) $\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq 1 + \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ \forall x \in \mathbb{R}^*$.

$$\Rightarrow\ x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leq x\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(1+nx^2)} \leq x + x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

$$\Rightarrow\ 1 \leq \frac{\sum_{n\geq 1} f_n(x)}{h(x)} \leq \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + 1\ \forall x \in \mathbb{R}^* \,/\, h(x) = x\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Et on a bien $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 0 \;\Rightarrow\; S(x) \underset{0^+}{\sim} x\log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{S(x)-S(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{S(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$.
S n'est pas dérivable à droite de $0^+ \;\Rightarrow\; S$ n'est pas dérivable en 0.

Bon courage