EMD

Durée 2h

Tout document interdit

Exercice 1 (4) (antinomie de Russel)

Montrer que l'énoncé suivant est faux :

« Il existe y tel que x appartient à y ssi x n'appartient pas à lui-même ».

(Ceci revient à montrer que l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-même n'existe pas).

Exercice 2 (2)

Montrer la proposition suivante : $\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots . \wedge P(t_n)$

Exercice 3 (3-3)

Les propositions suivantes sont-elles valides ? Justifier.

1. Si $\models \forall x\alpha$ alors $\models \alpha$
2. Si $\forall x\alpha$ non satisfiable alors α non satisfiable

Exercice 4 (1, 1) – (3-3)

Question 1. Montrer que les deux formules α et β sont satisfiables :

$\alpha : \exists x(S(x) \vee P(x))$

$\beta : (\exists x S(x)) \vee \exists x P(x))$

Question 2. La proposition $\models \alpha \rightarrow \beta$ est-elle valide ? Si vous pensez que oui, le montrer :

1. à l'aide de la résolution ;
2. à l'aide d'un arbre sémantique.

E M D
Correction

Exercice 1 (4) (antinomie de Russel)

Montrer que l'énoncé suivant est faux :

« Il existe y tel que x appartient à y ssi x n'appartient pas à lui-même ».

$\beta : \exists y \forall x(A(x,y) \leftrightarrow \neg A(x,x))$ **0.5 point**

Montrer que l'énoncé est faux revient à montrer que β est non satisfiable.

β est non satisfiable ssi β_S est non satisfiable ssi l'ensemble S des clauses issu de β_S est non satisfiable.

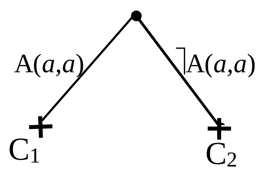
$\beta_S : \forall x(A(x,a) \leftrightarrow \neg A(x,x)) \equiv \forall x((\neg A(x,a) \vee \neg A(x,x)) \wedge (A(x,x) \vee A(x,a)))$ **0.5 point**

Renommer les variables **0.5 point**

L'ensemble des clauses après avoir renommé les variables est :

$S : \{\neg A(x,a) \vee \neg A(x,x),\ A(z,z) \vee A(z,a)\}$ **0.5 point**

Montrer que S est non satisfiable

1. **Par la résolution**	2. **Arbre sémantique**
$C_0 : \neg A(x,a) \vee \neg A(x,x)$ $C_1 :\ A(z,z) \vee A(z,a)$ $C_2 : \neg A(a,a)$ facteur de C_1 $[a/x]$ **1 point** $C_3 :\ A(a,a)$ facteur de C_2 $[a/z]$ $C_4 : \square$ Res (C_2, C_3) $S \vdash \square \Rightarrow$ S inconsistant $\Rightarrow$ non satisfiable (propriété de consistance) **1 point**	**1p**  Il existe un arbre sémantique clos pour S. S est donc non satisfiable. **1point**

3. En supposant l'existence d'un modèle pour β :

On suppose β satisfiable. Il existerait dans ce cas, une interprétation *I* telle que : $I \models \beta$ **0.5 point**

$I \models \exists y \forall x(A(x,y) \leftrightarrow \neg A(x,x))$ ssi :

il existe au moins un élément $d \in D_I$, soit d_y l'un de ces éléments, tel que pour tout $d' \in D_I$

$$I \models A(x,y) \leftrightarrow \neg A(x,x))_{v(y=d,\ x=d')}$$ **1 point**

Nous avons par conséquent :

Pour tout d $\quad I(A)(d,d_y)$ ssi non $A(d,d))$ pour un certain $d_y \in D_I$ **0.5 point**

Pour $d = d_y$ $\quad I(A)(d_y,d_y)$ ssi non $A(d_y, d_y))$ Contradiction **0.5 point**

Conclusion : β est non satisfiable $\Rightarrow\ \models \neg\beta$ **0.5 point**

Exercice 2 (2)

Montrer la proposition suivante : $\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots . \wedge P(t_n)$

Récurrence sur n

$n = 1$

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1)$ est une instance de la formule $\models \forall x \alpha \rightarrow \alpha(t_1)$ **0.5 point**

$n = 2$

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2)$ **0.5 point**

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1)$ et $\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1)$

On en déduit $\models (\forall x P(x) \rightarrow P(t_1)) \wedge (\forall x P(x) \rightarrow P(t_1))$

$(\forall x P(x) \rightarrow P(t_1)) \wedge (\forall x P(x) \rightarrow P(t_1)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2)$ (la $1^{ière}$ formule est obtenue par distribution de $\rightarrow$ à partir de la seconde :

On déduit : $\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2)$

Hypothèse de récurrence :

On suppose la proposition valide jusqu'à l'ordre n

A l'ordre $n+1$ **1 point**

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_{n+1})$ (cas où n=1)

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots . \wedge P(t_n)$ (hypothèse de récurrence)

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots . \wedge P(t_n)$ et $\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_{n+1})$

$\Rightarrow \models \mathbf{(}\forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots . \wedge P(t_n) \mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\forall x P(x) \rightarrow P(t_{n+1})\mathbf{)}$

On met en facteur $\forall x P(x) \rightarrow$ (cas où n =2)

$\models \forall x P(x) \rightarrow P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \ldots . \wedge P(t_n) \wedge P(t_1)$

Exercice 3 (3-3)

3.1. Si $\models \forall x \alpha$ alors $\models \alpha$

Raisonnement par l'absurde :

On suppose : $\models \forall x \alpha$ **(1)** et $\not\models \alpha$ **(2)**

(1) $\not\models \alpha$ ssi $\neg\alpha$ satisfiable i-e, il existe une interprétation, appelons la J, et une valuation v (soit v_0) telles que $J \models \neg\alpha_{v0}$
Posons $v_0(x) = d_0$

(1') $J \models \neg\alpha_{v0(x=d0)}$

(2) $\models \forall x \alpha$ ssi pour toute interprétation I et pour toute valuation v, $I \models \alpha_{v(x=d)}$ pour tout $d \in D_I$. Ceci est particulièrement vrai pour l'interprétation J et pour la valuation v_0. On en déduit : $J \models \alpha_{v(x=d0)}$ contradiction avec **(1').**

(3.2) Si $\forall x \alpha$ non satisfiable alors α non satisfiable.

Cette proposition n'est pas valide. Contre-exemple :

La formule $\forall x P(x) \wedge \neg P(y)$ est non satisfiable mais $P(x) \wedge \neg P(y)$ est satisfiable.

Exercice 4 (1, 1) – (3-3)

Question 1. Montrer que les deux formules α et β sont satisfiables :

$\alpha : \exists x(S(x) \vee P(x))$

$\beta : (\exists x S(x)) \vee \exists x P(x))$

Il s'agit de trouver une interpretation I et une interprétation J telles que :

$$I \models \alpha$$
$$J \models \beta$$

$I \models \alpha$ ssi $I \models (S(x) \vee P(x))_{v(x=d)}$ pour au moins un élément $d \in D_I$ – soit d_0 l'un de ces éléments

$I(S)(d_0)$ ou $I(P)(d_0)$ **1 point**

Exemple de modèle : D_I = N, I(P) = « pair »

$J \models \beta$ ssi $J \models S(x)_{v(x=d)}$ pour au moins un élément $d \in D_I$ (soit d_0 l'un de ces éléments)

ou $J \models P(x))_{v(x=d)}$ pour au moins un élément $d \in D_I$ (soit d_1 l'un de ces éléments)

$I(S)(d_0)$ ou $I(P)(d_1)$ **1 point**

Exemple de modèle : D_I = N, I(P) = « pair »

Question 2. La proposition $\models \alpha \rightarrow \beta$ est-elle valide ? Si vous pensez que oui, le montrer :

3. à l'aide de la résolution ;
4. à l'aide d'un arbre sémantique.

La proposition $\models \alpha \rightarrow \beta$ est valide ssi $\alpha \wedge \neg \beta$ est non satisfiable Ssi l'ensemble S des clauses issu de $(\alpha \wedge \neg \beta)_{PS}$ est non satisfiable **0.5 point**

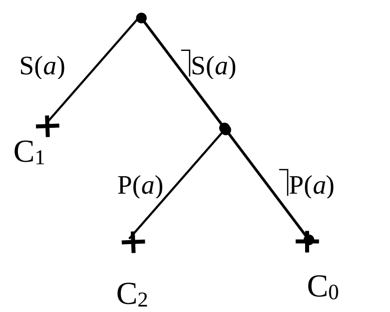
On renomme les variables :

$(\alpha \wedge \neg \beta) : \exists x(S(x) \vee P(x)) \wedge \forall u \neg S(u) \wedge \forall v \neg P(v)$ **0.5 point**

$(\alpha \wedge \neg \beta)_P : \exists x \forall u \forall v\ \mathbf{(}\ (S(x) \vee P(x)) \wedge \neg S(u) \wedge \neg P(v)\mathbf{)}$

$(\alpha \wedge \neg \beta)_{PS}: \forall u \forall v\ \mathbf{(}(S(a) \vee P(a)) \wedge \neg S(u) \wedge \neg P(v)\mathbf{)}$ **0.5 point**

S : $\{S(a) \vee P(a), \neg S(u), \neg P(v)\}$ **0.5 point**

1. **Par la résolution** **2 points**	2. **Arbre sémantique** **2 points**
$C_0 : S(a) \vee P(a)$ $C_1 : \neg S(u)$ $C_2 : \neg P(v)$ $C_3 : \neg S(a)$ $C_1[a/u]$ $C_4 : \neg P(a)$ $C_2[a/v]$ $C_5 : P(a)$ Res(C_0, C_3) $C_6 : \square$ Res (C_4, C_5) **1 point** $S \vdash \square \Rightarrow$ S inconsistant $\Rightarrow$ non satisfiable (propriété de consistance) **1 point**	 Il existe un arbre sémantique clos pour S. S est donc non satisfiable. **1 point**