Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (1, 2, 2, 3)

On considère les formules α et β ci-dessous :

$\alpha : \exists x \forall y \big(P(y, x) \wedge \neg P(x, y)\big)$

$\beta : (\exists x \forall y P(y, x)) \wedge (\exists x \forall y \neg P(y, x))$

Question 1. Donner les formes de Skolem de α et β.

Question 2. α est-elle satisfiable ?

Question 3. β est-elle satisfiable ?

Question 4. les propositions suivantes sont-elles valides ?

(1) **Prop1 :** "tout modèle de α est modèle de β". Vraie.

(2) **Prop2 :** "tout modèle de β est modèle de α". Fausse

Exercice 2 (3)

Trouver - s'il existe - le facteur de chacune des clauses suivantes :

C_1 : $P(x, f(y)) \vee P(f(x), y)$ **C_2 :** $R(w, f(y)) \vee R(f(x), w)$

N.B : indiquez dans chacun des cas le MGU 0,5

Exercice 3 (5)

Montrer – sans utiliser le théorème de complétude - que l'ensemble S défini ci-dessous est inconsistant. On indiquera clairement le **MGU** pour chaque application de la résolution.

1 $\alpha_1 : \exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, f(y))) \wedge (\neg Q(x, z) \rightarrow \neg P(x, y))$

$\alpha_2 : \forall x \forall y\, (R(x) \rightarrow P(x, y))$

$\alpha_3 : \forall x \forall y\, (Q(y, x) \rightarrow P(x, y))$

0,5 $\alpha_4 : \forall x \forall y \forall z\, (\neg R(z) \rightarrow Q(x, y))$

0,5 par pas MGU

Exercice 4 (4)

Montrer que la relation $\mathfrak{R}_n$ à n ($n \geq 3$) arguments définie comme suit est primitive récursive.

$$\mathfrak{R}_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} V & \text{si } x_{n-2} + x_{n-1} = x_n \text{ et } x_1 < x_2 \\ F & \text{sinon.} \end{cases}$$

non considé → -2 pts
incorrecte → -1 pt.

Exemples : $\mathfrak{R}_3(3, 8, 11) = V$ $\mathfrak{R}_5(3, 8, 11, 19, 30) = V$

$\mathfrak{R}_3(8, 3, 11) = F$ $\mathfrak{R}_5(8, 3, 11, 14, 25) = F$

$\mathfrak{R}_8(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13) = V$

N. B. Remettre, au plus, une double feuille et une intercalaire.

Bon Courage

CORRECTION

Exercice 1 (1, 2, 2, 3)

On considère les formules α et β ci-dessous :

$\alpha : \exists x \forall y\, P(y, x) \wedge \neg P(x, y)$

$\beta : (\exists x \forall y P(y, x)) \wedge (\exists x \forall y \neg P(y, x))$

Question 1. Formes de Skolem de α et β.

$$\alpha_S : \forall y\, P(y, a) \wedge \neg P(a, y)$$

$$\beta_S : (\forall y P(y, a)) \wedge (\forall y \neg P(y, b))$$

Question 2. α est satisfiable ssi α_S est satisfiable.

Supposons α_S satisfiable. Il existerait alors I telle que :

$$I \models \forall y P(y, a) \text{ et } I \models \forall y \neg P(a, y)$$

$$I \models P(y, a)_{V[y=d]} \text{ pour tout } d \in D_I \quad \text{et} \quad I \models \neg P(a, y)_{V[y=d]} \text{ pour tout } d \in D_I$$

$$I(P)(d, I(a)) \text{ pour tout } d \in D_I \quad \text{et} \quad non\ I(P)(d, I(a)) \text{ pour tout } d \in D_I$$

Posons $I(a) = d_0 \in D_I$

$$I(P)(d, d_0) \text{ pour tout } d \in D_I \quad \text{et} \quad non\ I(P)(d, d_0) \text{ pour tout } d \in D_I$$

Pour $d = d_0$

$$I(P)(d_0, d_0) \text{ et } non\ I(P)(d_0, d_0)$$

α_S est satisfiable donc α est satisfiable.

Question 3. β est satisfiable ssi β_S est satisfiable.

β_S est satisfiable ssi il existe I telle que :

$$I \models \forall y P(y, a) \text{ et } I \models \forall y \neg P(y, b)$$

SSI

$$I \models P(y, a)_{V[y=d]} \text{ pour tout } d \in D_I \quad \text{et} \quad I \models \neg P(y, b)_{V[y=d]} \text{ pour tout } d \in D_I$$

SSI

$$I(P)(d, I(a)) \text{ pour tout } d \in D_I \quad \mathbf{(1)}$$

$$\text{et} \quad (non\ I(P)(d, I(b))) \text{ pour tout } d \in D_I \quad \mathbf{(2)}$$

L'interprétation I définie ci-dessous est un modèle de β_S :

$$\begin{cases} D_I = \{1, 2, 3\} \\ I(P) : \text{'est divisible par'} \quad non\ I(P) : \text{'est non divisible par'} \\ I(a) = 1 \\ I(b) = 0 \end{cases}$$

(1) est vraie car quelque soit $d \in N$, d est divisible par 1

(2) est vraie car quelque soit $d \in N$, d est non divisible par 0.

β_S est satisfiable donc β est satisfiable

Question 4. les propositions suivantes sont-elles valides ?

Prop1 : "tout modèle de α est modèle de β".

Prop2 : "tout modèle de β est modèle de α".

α n'admet pas de modèle car non satisfiable. Prop1 est donc valide.

Prop2 est fausse car β est satisfiable (donc admet un modèle) alors que α n'admet pas de modèle.

Exercice 2 (3)

Donner - s'il existe - un facteur de chacune des clauses suivantes :

C_1 : $P(x, f(y)) \vee P(f(x), y)$

Recherche du MGU pour $\{E_1 = P(x, f(y)),\ E_2 = P(f(x), y)\}$

Le terme $f(x)$ de E_2 contient la variable x qui figure – à la même position - dans E_1.

C_1 n'admet donc pas de facteur.

============

C_2 : $R(w, f(y)) \vee R(f(x), w)$

Recherche du MGU pour $\{E_1 = R(w, f(y)),\ E_2 = R(f(x), w)\}$

$\theta_0 = \varepsilon$

$\theta_1 = \theta_0 \circ [f(x)/w] = \{f(x)/w\}$

$$\{(E_1)_{\theta 1} = R(f(x), f(y)),\ (E_2)_{\theta 1} = R(f(x), f(x))\}$$

$\theta_2 = \theta_1 \circ\ [x/y] = \{ f(x)_{[x/y]}/ w, x/y\} = \{ f(x)/ w, x/y\}$

$$\{(E_1)_{\theta 2} = R(f(x), f(x)),\ (E_2)_{\theta 2} = R(f(x), f(x))\}$$

$$MGU = \{ f(x)/ w, x/y\}$$

$C_2 = R(f(x), f(x)) \vee R(f(x), f(x)) = R(f(x), f(x))$,

============

C_3 : $R(x, y) \vee R(y, x)$

$\theta_1 = f(x)/ w$

$$C_3\theta_1 = R(f(x), g(y)) \vee R(f(x), z)$$

$\theta_2 = f(y)/ z$

Exercice 3 (5)

Montrer – sans utiliser le théorème de complétude - que l'ensemble S défini ci-dessous est inconsistant. On indiquera clairement le **MGU** pour chaque application de la résolution.

α_1 : $\exists x \exists y \forall z\ (P(x, y) \to \neg Q(x, f(y))) \wedge (\neg Q(x, z) \to \neg P(x, y))$

α_2 : $\forall x \forall y\ (R(x) \to P(x, y))$

α_3 : $\forall x \forall y\ (Q(y, x) \to P(x, y))$

α_4 : $\forall x \forall y\ (\neg R(x) \to Q(x, y))$

Forme de Skolem

$\alpha_{1S} : \forall z\, (P(a, b) \rightarrow \urcorner Q(a, f(b))) \wedge (\urcorner Q(a, z) \rightarrow \urcorner P(a, b))$

Forme clausale

$S : \{\ \urcorner P(a, b) \vee \urcorner Q(a, f(b))$
$Q(a, z) \vee \urcorner P(a, b)$
$\urcorner R(x) \vee P(x, y)$
$\urcorner Q(y, x) \vee P(x, y)$
$R(x) \vee Q(x, y)\ \}$

On renomme les variables

$C_1 : \urcorner P(a, b) \vee \urcorner Q(a, f(b))$
$C_2 : Q(a, z) \vee \urcorner P(a, b)$
$C_3 : \urcorner R(x) \vee P(x, y)$
$C_4 : \urcorner Q(v, u) \vee P(u, v)$
$C_5 : R(w) \vee Q(s, t)$

Démonstration

$\mathbf{C_1 : \urcorner P(a, b) \vee \urcorner Q(a, f(b))}$
$\mathbf{C_2 : Q(a, z) \vee \urcorner P(a, b)}$
$\mathbf{C_3 : \urcorner R(x) \vee P(x, y)}$
$\mathbf{C_4 : \urcorner Q(v, u) \vee P(u, v)}$
$\mathbf{C_5 : R(w) \vee Q(s, t)}$

Résoudre **C_4 et C_5 :**

$\mathbf{C'_5 : R(w) \vee Q(v, u)}$ MGU = $\{v/s, u/t\}$
$C_6 : R(w) \vee P(u, v)$ Res (C_4, C_5)

Résoudre **C_3 et C_6 :**

$C'_3 : \urcorner R(w) \vee P(w, y)$ MGU = $\{w/x\}$
$C_7 : P(u, v) \vee P(w, y)$ Res (C_6, C'_3)
$C'_7 : P(u, v)$ Facteur de C_7 MGU = $\{u/w, v/y\}$

Résoudre **C_2 et C'_7 :**

$C''_7 : P(a, b)$ MGU = $\{a/u, b/v\}$
$C_8 : Q(a, z)$ Res (C_2, C''_7)

Résoudre **C_1 et C'_8 :**

$C'_8 : Q(a, f(b))$ MGU = $\{f(b)/z\}$
$C_9 : \urcorner P(a, b)$ Res (C_1, C'_8)

Résoudre C''$_7$ **et C$_9$:**

C$_{10}$: □ Res (C''$_7$, C$_9$)

Exercice 4 (3)

Par récurrence sur n le nombre d'arguments de $\mathfrak{R}$.

$n = 3$

$$\mathfrak{R}_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \text{V si } x_1 + x_2 = x_3 \text{ et } x_1 < x_2 \\ \text{F sinon.} \end{cases}$$

$\text{Car}_{\mathfrak{R}3}(x_1, x_2, x_3) = sg(\overline{sg}(x_2 \dot{-} x_1) + |(x_1 + x_2) - x_3|))$

Hypothèse de récurrence : on suppose la relation primitive jusqu'à l'ordre n :

$\Rightarrow$ $\text{Car}_{\mathfrak{R}n}(x_1,\dots,x_n)$ Primitive Récursive

Pour n + 1 arguments

$$\mathfrak{R}_{n+1}(x_1,\dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{cases} \text{V si } \mathfrak{R}_n(x_1,\dots,x_n) = \text{V et si } x_{n-1} + x_n = x_{n+1} \\ \text{F sinon.} \end{cases}$$

$\text{Car}_{\mathfrak{R}(n+1)}(x_1,\dots,x_n, x_{n+1}) = sg(\text{Car}_{\mathfrak{R}n}(x_1,\dots, x_n) + \text{Car}_{\mathfrak{R}3}(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}))$