DOCUMENTS INTERDITS.

Exercice1: (4 points)

Soit $D = D_1 \cup D_2$ où

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\} \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1,\ y \leq x \leq 0\right\} \end{aligned}$$

1) Représenter graphiquement le domaine D.
2) Est il régulier selon x? Est il régulier selon y ?
3) Calculer $I_1 = \iint\limits_{D_1} y \ dxdy$.
4) En déduire (en justifiant) la valeur de $I = \iint\limits_{D} y \ dxdy$.

Exercice2: (5 points)

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{(t^2+1)\sqrt{1-t^2}} dt.$

2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^\alpha e^t}{(1+e^t)^\alpha} \ dt$ selon les valeurs de α.

Exercice3: (6,5 points)

Soit la série de fonction de terme général $f_n(x)$ telle que:

$f_n(x) = e^{-\pi n^2 x} \qquad n \geq 0.$

1) Déterminer le domaine de convergence D de la série.

Pour $x \in D$ posons $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$.
2) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
3) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4) Montrer que $F \in C^\infty\left(]0, +\infty[\right)$.

Exercice4: (4,5 points)

Considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+3)} x^n$.
1) Déterminer son rayon R ainsi que son domaine de convergence D.
2) Calculer sa somme S.

Un corrigé.

Exercice1: Soit $D = D_1 \cup D_2$ où
$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq x \leq y\right\}$
$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1, \ y \leq x \leq 0\right\}$
1) Représentation graphique de D.

2) D est il régulier selon x et selon y car toute droite (passant par un point intérieur de D) // à (ox) ou à (oy) coupe sa frontière en au plus 2 points.

3) Calculons $I_1 = \iint\limits_{D_1} y \ dxdy$, pour cela utilisons Fubini1:

On a l'$\cap$ des deux courbes : $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x \end{cases}$ donne les points $M_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $M_2 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et donc $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} y \ dydx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\left(1-x^2\right)-x^2\right] dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

4) On remarque que D est symétrique par rapport à l'origine ie qu'il présente la symétrie suivante : $(x,y) \longleftrightarrow (-x,-y)$, or $f(-x,-y) = -f(x,y)$ où $f(x,y) = y$ ceci implique que $I = 0$.

Exercice2: Etude de la convergence des intégrales généralisées:

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{(t^2+1)\sqrt{1-t^2}}dt$. Soit $f(t) = \dfrac{t^4}{(t^2+1)\sqrt{1-t^2}}, \ f \in R_{loc}\left(]-1,1[\right)$

<u>Au $v(-1)$:</u> $f(t) = \dfrac{t^4}{(t^2+1)\sqrt{(1-t)(1+t)}} \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}$ or $\displaystyle\int_{-1}^{c<1} \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt$ converge (Riemann)

<u>Au $v(1)$:</u> $f(t) = \dfrac{t^4}{(t^2+1)\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{1<}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ or $\displaystyle\int_{c>-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ converge (Riemann)

On en conclut que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^t}{(1+e^t)^\alpha} \ dt$, soit $f(t) = \dfrac{t^\alpha e^t}{(1+e^t)^\alpha}, \ f \in R_{loc}]0,+\infty[$.

$\underline{\text{Au } v\,(+\infty):}$ $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^\alpha e^t}{e^{t\alpha}}$, en effet : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t).\dfrac{e^{t\alpha}}{t^\alpha e^t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t\alpha}}{(1+e^t)^\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{(e^{-t}+1)^\alpha} = 1.$

$g(t) = \dfrac{t^\alpha e^t}{e^{t\alpha}} = t^\alpha e^{t(1-\alpha)}$

1er cas : $\alpha = 1,\ f(t) \underset{+\infty}{\sim} t$ ie $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

2ème cas : $\alpha \neq 1$, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge ssi $1-\alpha < 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha > 1$

$\underline{\text{Au } v\,(0^+):}$ $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{e^{\alpha\log t + t}}{e^{\alpha\log(1+e^t)}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

1er cas : $\alpha \geq 0,\ 0$ est un faux problème.

2ème cas : $\alpha < 0$, inutile de traiter ce cas puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge

Conclusion: $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exercice3: Soit la série de terme général $f_n(x)$ telle que $f_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$ $n \geq 0$.

1) Déterminons $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \displaystyle\sum_{n\geq0} f_n(x) \text{ converge} \right\}$.

$\underline{\text{1er cas:}}$ $x \leq 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \neq 0 \implies \sum f_n(x)$ diverge (CN).

$\underline{\text{2ème cas:}}$ $x > 0$, utilisons la régle de Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n(x))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\pi n x} = 0 < 1$$

Donc la série converge.

Conclusion: $D =]0,+\infty[$.

2) Continuité de F.

(a) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

(b) Etude de la convergence uniforme de $\sum f_n$:

On a sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$: $|f_n(x)| = e^{-\pi n^2 x} \leq e^{-\pi n^2 a}$ or $\sum e^{-\pi n^2 a}$ convrge car $a \in D$.

D'où $\sum f_n$ converge normalement (Weirestrass) donc uniformément sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

De (a) et (b) on obtient que F est continue sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Conclusion: F est continue sur $]0,+\infty[$.

3) Dérivabilité de F.
(c) Etude de la convergence uniforme de $\sum f_n'$:
On a que $F'(x) = \sum_{n\geq 1} -\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$, soit $g_n(x) = \pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$, $h_n'(x) = (-1)^2 \pi^2 n^4 e^{-\pi n^2 x}$
et $\sup_{x\in[a,b]} |g_n'(x)| = |g_n'(a)|$, et $\sum |g_n'(a)|$ converge par la régle de Cauchy: $\lim_{n\to+\infty} |g_n'(a)|^{\frac{1}{n}} = 0 < 1$.:
D'où $\sum f_n'$ converge normalement (Weirestrass) donc uniformément sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
De (a) et (c) on obtient que F est dérivable sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
Conclusion: F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4) Montrons que $F \in C^\infty(]0,+\infty[)$.
Supposons que F est k fois dérivable ie $F^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 1} h_n(x)$ / $h_n(x) = (-1)^k \pi^k n^{2k} e^{-\pi n^2 x}$.
$h_n'(x) = (-1)^{k+1} \pi^{k+1} n^{2(k+1)} e^{-\pi n^2 x}$ et $\sup_{x\in[a,b]} |h_n'(x)| = |h_n'(a)|$, et $\sum |h_n'(a)|$ converge car:
utilisons la régle de Cauchy: $\lim_{n\to+\infty} |h_n'(a)|^{\frac{1}{n}} = 0 < 1$. D'où la série des dérivées converge normalement (Weirestrass) donc uniformément sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
Donc $F^{(k)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $F^{(k+1)} = \sum_{n\geq 1} h_n'(x)$.
Par conséquent F est indéfiniment dérivable.

Exercice4: Soit $u_n(x) = a_n x^n$ / $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.
1) Le rayon : $R = 1$ car a_n est une fraction de polynômes.

Le domaine de convergence: on a $u_n(\pm 1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc la série converge aux bornes 1 et -1, alors $D = [-1,1]$.

2) Calculons sa somme S.
1er cas: $x \in [-1,1[\setminus \{0\}$. Tout d'abord $a_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(n+1)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(n+3)}$.
★ Posons

$$S_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)} x^n = \frac{1}{x} \sum_{N\geq 1} \frac{1}{N} x^N = -\frac{1}{x} \log(1-x) \;\; \forall x \in [-1,1[\setminus \{0\},$$

selon le formulaire.
★ Posons

$$S_2(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+3)} x^n = \frac{1}{x^3} \sum_{N\geq 3} \frac{1}{N} x^N = \frac{1}{x^3}\left(-\log(1-x) - x - \frac{1}{2}x^2\right) \;\; \forall x \in [-1,1[\setminus \{0\},$$

selon le formulaire.
Et on a $S(x) = \dfrac{1}{2} S_1(x) - \dfrac{1}{2} S_2(x) \;\; \forall x \in [-1,1[\setminus \{0\}$.

2ème cas: $x = 0,\ S(0) = \dfrac{1}{3}$.

3ème cas: $x = 1$.Utilisons le second lemme d'Abel.

$$S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{1}{x}\log(1-x) + \frac{1}{x^3}\left(\log(1-x) + x + \frac{1}{2}x^2\right)\right)$$

$$S(1) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-}\left[\left(\frac{1-x^2}{x^3}\right)\log(1-x) + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x}\right] = \frac{3}{4}$$

On en conclut: $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1-x^2}{x^3}\right)\log(1-x) + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x}\right] & \forall x \in [-1, 1[\ \setminus\ \{0\} \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$