$\mathcal{C}$ycle $\mathcal{P}$réparatoire

$\mathcal{D}$euxième année — Module : Algèbre 3

2016/17

**Examen N$^o$1**

## Questions de cours $\boxed{\textbf{3 points}}$

I. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ une valeur propre de A, montrer que $\lambda^2$ est une valeur propre de $A^2$.

II. Soit $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $P_A(X) = X(X-1)(2-X)$. A est-elle diagonalisable ? inversible ? (Justifier votre réponse).

## Réponse :

I. $\lambda$ est une valeur propre de A, alors il existe $V \neq 0$ tel que $AV = \lambda V$ cependant

$$A^2V = A(AV) = A(\lambda V) = \lambda(AV) = \lambda(\lambda V) = \lambda^2 V. \quad \boxed{\textbf{1 point}}$$

Donc $\lambda^2$ est une valeur propre de $A^2$.

II. — A admet ***3*** valeurs propres ***simples*** $0, 1, 2$, alors A est diagonalisable. $\boxed{\textbf{1 point}}$

— A n'est pas inversible car $\det(A) = 0 \times 1 \times 2 = 0$. $\boxed{\textbf{1 point}}$

**Exercice 1.** $\boxed{\textbf{6 points}}$ *Calculer les déterminants suivants*

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} ; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

## Réponse :

$$D_1 = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \ell_2 - \ell_1 \\ \\ \ell_4 - \ell_3 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On fait ensuite les opérations sur les colonnes pour obtenir une dernière ligne facile à développer

$$D_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a} & C_2+C_1 & C_3-C_4 & \phantom{0} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & b \\ c & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = +c \times \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & -2b & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = bc(bc-4a^2).$$

**2 points**

$$D_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2-C_1 & C_3-C_1 & C_4-C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos c-1 & \cos b-1 \\ 1 & \cos c-1 & 0 & \cos a-1 \\ 1 & \cos b-1 & \cos a-1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos c-1 & \cos b-1 \\ \cos c-1 & 0 & \cos a-1 \\ \cos b-1 & \cos a-1 & 0 \end{vmatrix} = 2(\cos a-1)(\cos b-1)(\cos c-1).$$ **2 points**

$$D_3 = \left|\begin{array}{cc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31)(-6) = 186.$$ **2 points**

**Exercice 2.** **6 points** *Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + 4y + 5z = a \\ 2x + 3y + 3z = b \end{cases}$$

1. *Déterminer le rang du système $(\mathcal{S})$.*
2. *Déterminer les inconnues et les équations principales du système.*
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que le système soit compatible.*
4. *Résoudre le système $(\mathcal{S})$ dans le cas où il est compatible.*

## Réponse :

1. Le rang du système $(\mathcal{S})$.

   Posons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a $rg(\mathcal{S}) = rg(C_1, C_2, C_3)$.

   Il est clair que $C_2 + C_3 = 3C_1$, ce qui implique que la famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est liée.

   Donc $rg(\mathcal{S}) < 3$. **1 point**

   On a le déterminant de la matrice extraite M de la matrice du système $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Et par suite $rg(\mathcal{S}) = 2$. **1 point**

2. Si on prend $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme matrice principale du système, cependant les inconnues principales sont $x$ et $y$ et les équations principales sont la première $(x + y + 2z = 1)$ et la deuxième $(x + 2y + z = 2)$ équation du système. **1 point**

3. Condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

   Le système $(\mathcal{S})$ est compatible si et seulement si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix} = 0$. **1 point**

   On a

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & a-4 \end{vmatrix} = a - 4,$$

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & b-3 \end{vmatrix} = b - 3.$$ **1 point**

   La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit compatible est $a = 4$ et $b = 3$.

4. Si $a = 4$ et $b = 3$, le système $(\mathcal{S})$ est équivalent un système de Cramer d'ordre 2 de matrice M.

   $$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & a \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1-2z \\ x & + & 2y & = & 2-z \end{array} \right.$$ **1 point**

   Les formules de Cramer donnent $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-2z & 1 \\ 2-z & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = -3z$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{|M|} = 1 + z$.

**Exercice 3.** **5 points** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une matrice échelonnée équivalente à $\mathrm{M}_\alpha$ et préciser le rang de $\mathrm{M}_\alpha$*

$$\mathrm{M}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

## Réponse :

$$\mathrm{M}_\alpha = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & \alpha & 3 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\ell_2 \longrightarrow \ell_2 - 2\ell_1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & \alpha & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

**1 point**

$\ell_3 \longrightarrow \ell_3 - \ell_1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha+2 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

**1 point**

$\ell_3 \longrightarrow \ell_3 - (\alpha-1)\ell_2$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{4-(\alpha-1)(\alpha+2)}_{=(3+\alpha)(2-\alpha)} & -(\alpha+3) \end{pmatrix}$$

**1.5 point**

Si $\alpha = -3$, $\mathrm{M}_\alpha$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de $\mathrm{M}_\alpha$=nombre des $\boxed{1}$ directeurs $= 2$. **0.5 point**

Si $\alpha = 2$, $\mathrm{M}_\alpha$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Le rang dans ce cas est égale à 3. **0.5 point**

Si $\alpha \neq -3$ et $\alpha \neq 2$, $\mathrm{M}_\alpha$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{\alpha-2} \end{pmatrix}.$$

$rg(\mathrm{M}_\alpha) = 3.$ **0.5 point**