ESI 2011/2012

Classe préparatoire2 ANA3

Examen Final S1. Durée 2h.

Documents et Calculatrice interdits.

Exercice1 (3 points)

On pose: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur D_f.
2) Etudier la différentiabilité de f sur D_f.

Exercice 2 (3,5 points)

En posant $u = x$, $v = y - x$, $w = z - x$, trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ qui sont solutions de l'EDP suivante: $\dfrac{\delta f}{\delta x} + \dfrac{\delta f}{\delta y} + \dfrac{\delta f}{\delta z} = 0$.

Exercice 3 (8,5 points)

Soient f et g deux applications de $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que:

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$.

1) Vérifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que $f \in C^\infty(U)$.
2) On pose: pour $(x,y) \in U$, $h(x,y) = f(x,y) - \dfrac{7}{6}g(x,y)$.
Trouver les points critiques de h sur U puis étudier leur nature.

3) On pose $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 0\}$. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, montrer qu'il existe 4 points où $f_{|\Gamma}$ peut présenter des extréma (ne pas faire le test).
4) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de $f_{|\Gamma}$.

5) On pouvait déduire, de la question 2, deux des extréma de $f_{|\Gamma}$. Expliquez comment.
6) Trouver les extréma de h en tant que fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (5 points)

Pour $a > 0$, On pose: $F_a = [0,a] \times [0,a]$.
$D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$.

1) Dans le même repère représenter D_a et F_a.
2) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$.

3) Montrer que $\iint_{F_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_0^a e^{-t^2}\,dt\right)^2$. (On ne demande pas le calcul de $\int_0^a e^{-t^2}\,dt$).

4) Montrer que $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \iint_{F_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \iint_{D_{2a}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$.

5) On pose $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-t^2}\,dt = l \in \mathbb{R}$. Déduire de ce qui précède que $l = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Bon Courage

ANA3 Corrigé Examen Final S1
2011/2012

Exercice1

1) La continuité de f sur $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (0,25)

★ **Sur** $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

f est composée et quotient de fcts cts donc continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. (0,25)

★ Continuité de f en $(0,0)$:

On a: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{Log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}$.

Au voisinage de 0, on a $Log(1+z) = z + z\varepsilon(z)$. et comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 = 0$ alors

$f(x,y) = \dfrac{(xy)^2 + (xy)^2\varepsilon(x^2y^2)}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2y^2(1+\varepsilon(x^2y^2))}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}(1+\varepsilon(x^2y^2))$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$.

(0,5) (0,25)

or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2} = 0$ car $2+2 = 4 \succ 2$. et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+\varepsilon(x^2y^2)) = 0$

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$.

(0,25)

2) Différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$:

★ **Sur** $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$: f est composée et quotient de fonctions différentiables donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. (0,25)

★ **Différentiabilité de f en (0,0)** :

$\dfrac{\delta f}{\delta x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0.$ (0,25)

Comme f est symétrique alors $\dfrac{\delta f}{\delta y}(0,0) = \dfrac{\delta f}{\delta x}(0,0) = 0.$ (0,25)

Posons $\delta(h,k) = \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\delta f}{\delta x}(0,0) - k\frac{\delta f}{\delta y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$= \dfrac{Log(1+h^2k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{h^2k^2 + h^2k^2\varepsilon(h^2k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}^3} = \dfrac{h^2k^2(1+\varepsilon(h^2k^2))}{\sqrt{h^2+k^2}^3}$ (0,25)

Or $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2k^2}{\sqrt{h^2+k^2}^3} = 0$ car $2+2 = 4 \succ 3$ et $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (1+\varepsilon(h^2k^2)) = 0$ (0,25) (0,5)

D'où: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \delta(h,k) = 0$ donc f est différ en $(0,0)$, donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On pose: $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \\ w = z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u + v \\ z = w + u \end{cases}$

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \ (u,v,w) \to \varphi(u,v,w) = (u, u+v, u+w) = (x,y,z)$.

(0,25) ★ φ est bijective par construction, de plus $\varphi^{-1}(x,y,z) = (x, y-x, z-x) = (u,v,w)$.

(0,5) ★ φ, $\varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ car leurs composantes sont C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

donc φ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^3$.

(0,25) (0,25)

Posons: $F = f \circ \varphi \Leftrightarrow F \circ \varphi^{-1} = f$.

Comme F, f, φ^{-1} sont C^1 sur $\mathbb{R}^3$ alors $Jac_X f = Jac_{\varphi^{-1}(X)} F * Jac_X \varphi^{-1}$ (★) où $X = (x,y,z)$

0,25

$$(\bigstar) \Leftrightarrow \left(\frac{\delta f}{\delta x}(X), \frac{\delta f}{\delta y}(X), \frac{\delta f}{\delta z}(X)\right) = \left(\frac{\delta F}{\delta u}\varphi^{-1}(X), \frac{\delta F}{\delta v}\varphi^{-1}(X), \frac{\delta F}{\delta w}\varphi^{-1}(X)\right) * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}(X) = \frac{\delta F}{\delta u}(\varphi^{-1}(X)) - \frac{\delta F}{\delta v}(\varphi^{-1}(X)) - \frac{\delta F}{\delta w}(\varphi^{-1}(X)) & \leftarrow 0{,}25 \\ \frac{\delta f}{\delta y}(X) = \frac{\delta F}{\delta v}(\varphi^{-1}(X)) & \leftarrow 0{,}25 \\ \frac{\delta F}{\delta w}\varphi^{-1}(X) = \frac{\delta F}{\delta w}(\varphi^{-1}(X)) & \leftarrow 0{,}25 \end{cases}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta u}(\varphi^{-1}(x,y,z)) = 0 \ \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

0,5

$$\Leftrightarrow \frac{\delta F}{\delta u}(u,v,w) = 0, \ \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow F(u,v,w) = G(v,w), \ \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x,y,z) = G(y-x, z-x) \ \text{ où } G \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

0,5 0,5

Exercice 3

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1 \ \text{ et } \ g(x,y) = x^2 + y^2 - 9.$$

1) U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car $\forall (x,y) \in U \, \exists r \succ 0$ tel que $B((x,y),r) \subset U$. ← 0,25

$f \in C^\infty(U)$ car f est composée et somme de fonctions C^∞ sur U. ← 0,25

2)Comme $h \in C^1(U)$ calculons les points critiques:

$$\begin{cases} \frac{\delta h}{\delta x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{3}x = 0 \\ \frac{\delta h}{\delta y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y - \frac{7}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{3}\right) = 0 \quad (1) & \leftarrow 0{,}25 \\ y\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad (2) & \leftarrow 0{,}25 \end{cases}$$

<u>1er cas</u>: Si $x = 0$ on remplace dans (2) : $y(\frac{1}{|y|} - \frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (rejetée car $(0,0) \notin U$) ou $y = 3$ ou $y = -3$ 0,25 ×2 .

<u>2ème cas</u>: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{7}{3}$ (3),

On remplace dans (2) : $y\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Remplaçons $y = 0$ dans (3) : $\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} - \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ ou $x = -\frac{3}{7}$.

<u>Conclusion</u>: les points critiques de h sont: $A = (0,3)$, $B = (0,-3)$, $C = \left(\frac{3}{7},0\right)$, 0,25
$D = \left(-\frac{3}{7},0\right)$. 0,25

<u>L'étude de la nature</u>:

h étant C^2 sur U, calculons les dérivées secondes:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 h}{\delta x^2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{7}{3} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \leftarrow 0{,}25 \\ \frac{\delta^2 h}{\delta y^2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{3} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \leftarrow 0{,}25 \\ \frac{\delta^2 h}{\delta x \delta y}(x,y) = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \leftarrow 0{,}25 \end{cases}$$

0,25

Comme $h(-x,-y) = h(x,y)\ \forall (x,y) \in U$ alors les points A, B sont de même nature, de même pour les points C, D. ← 0,25

Nature de A: $r = -2$, $t = -\frac{1}{3}$, $s = 0$ donc $\Delta = \frac{2}{3} \succ 0$ alors f admet en A un extrémum, $r \prec 0$ il s'agira d'un max local ← 0,25 0,25

Nature de C: $r = -\frac{7}{3}$, $t = 2$, $s = 0$ donc $\Delta = -\frac{14}{3} \prec 0$ alors f n'admet pas en C un extrémum ← 0,25 0,25

3) On pose $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ g(x,y) = 0\}$.

Il s'agit de calculer les extréma de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Calculons les points critiques de la contrainte:

$$\begin{cases} \frac{\delta g}{\delta x}(x,y) = 2x = 0 \\ \frac{\delta g}{\delta y}(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0). \quad 0{,}5$$

Le seul point critique de g est $(0,0)$; et comme $g(0,0) \neq 0$ alors $f_{|\Gamma}$ n'admet pas en un point un extréma.

Passons alors au **Système de Lagrange**: $f, g \in C^1(U)$

Posons $F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{matrix} 0{,}25 \rightarrow \\ 0{,}25 \rightarrow \\ \ \end{matrix} \begin{cases} \frac{\delta F}{\delta x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\delta h}{\delta y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{1}{3} + 2\lambda\right) = 0 \quad (1) \\ y\left(\frac{1}{3} + 2(1+\lambda)\right) = 0 \quad (2) \\ x^2+y^2-9 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{6}$

1er cas: Si $x = 0$

On remplace dans (3) : $y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ ou $y = -3$

Dans les deux cas, on remplace dans (2) : $\frac{1}{3} + 2(1+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{6}$. } 0,25 + 0,25

2ième cas: $\lambda = -\frac{1}{6}$

On remplace dans (2) : $2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

On remplace dans (3) : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

0,25 0,25

Conclusion: $(\lambda, x, y) \in \left\{\left(-\frac{7}{6}, 0, 3\right), \left(-\frac{7}{6}, 0, -3\right), \left(-\frac{1}{6}, 3, 0\right), \left(-\frac{1}{6}, -3, 0\right)\right\}$

et donc les 4 points où f peut admettre des extréma sont $(0,3), (0,-3), (3,0), (-3,0)$.

4) Comme Γ est un fermé borné et que f est continue sur Γ alors f est bornée et elle ← 0,5

atteint ses bornes. de plus ces bornes sont atteintes en deux des points calculés dans la question 3.

On a $f(0,3) = f(0,-3) = 11 = \underset{(x,y)\in\Gamma}{Max}\ f$; et $f(3,0) = f(-3,0) = 2 = \underset{(x,y)\in\Gamma}{Min}\ f$. 0,25 0,25

5) On a $h_{|\Gamma} = f_{|\Gamma}$ et comme h admet en $(0,3),(0,-3) \in \Gamma$ un max local alors $f_{|\Gamma}$ admet en ces mêmes points des max locaux. 0,5 + 0,5

6) Sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, h admet en A et B des extréma locaux. et comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors h en tant que fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ admet en A et B des extréma locaux. il reste à étudier la nature de $(0,0)$. 0,5

$$h(h,k) - h(0,0) = \sqrt{h^2+k^2} - \frac{1}{6}k^2 - \frac{7}{6}h^2 = \sqrt{h^2+k^2}\left(1 - \frac{k^2}{6\sqrt{h^2+k^2}} - 7\frac{h^2}{6\sqrt{h^2+k^2}}\right);$$ 0,25 0,25

posons $u(h,k) = 1 - \frac{k^2}{6\sqrt{h^2+k^2}} - 7\frac{h^2}{6\sqrt{h^2+k^2}}$

Comme $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} u(h,k) = 1$ alors $u(h,k) \geq 0$ au voisinage de $(0,0)$. 0,25 0,25

d'où $h(h,k) - h(0,0) \geq 0$ au voisinage de $(0,0)$, et donc f admet en $(0,0)$ un min local.

Exercice 4

1) représenter D_a et F_a.

2) Posons: $\begin{cases} x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \\ r \succ 0, \theta \in \left]0,2\pi\right[\end{cases}$ et calculons Δ_a, le transformé de $\overset{o}{D}_a$ par les coordonnées polaires:

$$(x,y) \in \overset{o}{D}_a \iff \begin{cases} x \succ 0 \text{ et } y \succ 0 \\ x^2+y^2 \prec a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} r\sin\theta \succ 0 \text{ et } r\cos\theta \succ 0 \\ r^2 \prec a^2; r \succ 0, \theta \in \left]0,2\pi\right[\end{cases} \iff \begin{cases} 0 \prec r \prec a \\ \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

donc $\Delta_a = \left]0,a\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ 0,5

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\Delta_a} re^{-r^2}drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^a re^{-r^2}dr\right)d\theta = \left.\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a * \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$ 0,5

3) Comme on intègre sur un pavé une fonction à variables séparables alors 0,5 0,5

$$\iint_{F_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{F_a}(e^{-x^2} * e^{-y^2})dxdy = \int_0^a e^{-x^2}dx * \int_0^a e^{-y^2}dy = \int_0^a e^{-t^2}dt * \int_0^a e^{-t^2}dt = \left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2.$$

4) En représentant $D_a,\ F_a,\ D_{2a}$ dans un même repère on remarque que : $D_a \subset F_a \subset D_{2a}$ 0,5

et comme $e^{-x^2-y^2} \geq 0$ alors $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{F_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{D_{2a}} e^{-x^2-y^2}dxdy.(\bigstar)$ 0,5

5) $(\bigstar) \iff \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \leq \left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-4a^2})$.

Or $\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2 = l^2$ et $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) = \lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-4a^2} = \frac{\pi}{4}$. 0,5

donc $l^2 = \frac{\pi}{4}$ et comme $l \geq 0$ car $e^{-t^2} \geq 0$ alors $l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

0,25 0,25