**L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.**

**N.B :**

Le barême est approximatif.

Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

Toute réponse doit être justifiée.

Traiter les exercices 1 et 3 dans deux doubles feuilles différentes et l'exercice 2 dans un cahier.

**Exercice 1 : (6 pt)**

Soient $\alpha$ un paramètre réel et $(S_\alpha)$ le système linéaire défini par :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \end{cases}$$

**1-** Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ le système $(S_\alpha)$ est de Cramer ? Dans ce cas, résoudre le système avec les formules de Cramer.

**2-** Supposons que $(S_\alpha)$ n'est pas de Cramer. En utilisant le théorème de Rouché-Fontené, dire pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ le système $(S_\alpha)$ est compatible. Résoudre le système dans ce cas.

**Exercice 2 : (10 pt)**

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1-** Calculer $(A - 2I_3)(A - 7I_3)$.

**2-** En déduire :

**i/** que la matrice $A$ est inversible puis déterminer la matrice $A^{-1}$.

**ii/** la matrice $A^n$ pour tout entier $n \geq 2$.

**iii/** que le polynôme caractéristique de $A$ est égal à : $P_A(X) = (2 - X)^2 (7 - X)$.

**3-** Montrer que $A$ est diagonalisable.

**4-** Déterminer une matrice inversible $P$ de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

**5-** En déduire la matrice $A^n$ pour tout entier $n \geq 2$.

**Exercice 3 : (4 pt)**

Soit $n \geq 3$ et considérons une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.

**1-** Montrer que 0 est une valeur propre de $A$ puis donner la dimension de l'espace propre $E_0$.

**2-** Déterminer la multiplicité de 0.

**3-** La matrice $A$ est-elle diagonalisable?

**Bon courage**