# Contrôle final
# Durée 2 heures
# Tout document interdit

## Exercice 1 (2 points)

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble S ci-dessous est inconsistant :

$$S : \{P(f(x)) \vee Q(x),\ P(g(x)) \vee \neg Q(x),\ \neg P(x) \vee Q(y),\ \neg P(y) \vee \neg Q(x)\}$$

**Important :** ne pas utiliser de symboles de constante dans la démonstration. Il sera tenu compte de la longueur des réponses.

## Exercice 2 (8 points)

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux formules fermées et non valides et soient $\alpha_S$ et $\beta_S$ leurs formes de Skolem respectives.

**Question 1.** Représentez trois tableaux de vérité à l'image du tableau ci-dessous en utilisant les connecteurs $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ au lieu et place du symbole **o.**

- **V :** si vous considérez la proposition valide
- **F :** si vous considérez la proposition non valide
- **X :** si vous considérez que la proposition peut être vraie dans certaines situations et fausse dans d'autres.

| $\alpha$ satisfiable | $\beta$ satisfiable | $\alpha$ o $\beta$ satisfiable ? | $\alpha_S$ o $\beta_S$ satisfiable ? | $(\alpha$ o $\beta)_S$ satisfiable ? |
|---|---|---|---|---|
| V | V | | | |
| V | F | | | |
| F | V | | | |
| F | F | | | |

**Question 2.** Complétez le tableau de vérité ci-dessous.

| $\alpha$ satisfiable | $\neg\alpha$ satisfiable ? | $\neg(\alpha)_S$ satisfiable ? | $(\neg\alpha)_S$ satisfiable ? |
|---|---|---|---|
| V | | | |
| F | | | |

## Exercice 3 (2 points)

Montrer à l'aide d'un arbre sémantique la validité de la formule $\gamma$ telle que :

$$\gamma : (\neg P(x) \rightarrow \neg Q(y)) \rightarrow ((\neg P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow P(x))$$

**Indiquez toutes les étapes.**

## Exercice 4 (2 – 1 - 1)

Soit $\beta$ telle que $\beta : \exists x P(x) \wedge \forall x \neg P(f(x))$

**Question 1.** Donner une interprétation I telle que $I \models \beta$ et une interprétation J telle que $J \models \neg\beta$

**Question 2.** Vérifier la satisfiabilité de $\beta$ à l'aide d'un arbre sémantique.

**Question 3.** Donner, si vous jugez $\beta$ satisfiable, un modèle de Herbrand de l'ensemble S de clauses qui en est issu.

## Exercice 4 (1.5 – 1.5 - 1)

Les deux énoncés E1 et E2 ci-dessous sont-ils contradictoires ?

E1 : "Tout nombre pair plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers."

E2 : Il y'a un nombre pair plus grand que 2 qui n'est pas égal à la somme de deux nombres premiers.

# Correction

**Exercice 1** **(2 points)**

a) On renomme les variables **(0.25 point)**

b) Résolution **1.5 point** (noter sur **0.5 point si symbole de constante).**

| | | |
|---|---|---|
| $C_1 : P(f(x)) \vee Q(x)$ | $C_5 : \neg P(g(u)) \vee \neg Q(u)$ $C_4[g(u)/z, u/w]$ | $C_9 : \neg Q(x)$ $C_4[x/u]$ |
| $C_2 : P(g(u)) \vee \neg Q(u)$ | $C_6 : \neg Q(u)$ Res($C_2$, $C_5$) | $C_9 : \square$ Res($C_9$,$C_{10}$) |
| $C_3 : \neg P(v) \vee Q(y)$ | $C_7 : \neg P(f(x)) \vee Q(x)$ $C_3[f(x)/v, x/y]$ | |
| $C_4 : \neg P(z) \vee \neg Q(w)$ | $C_8 : Q(x)$ Res($C_1$, $C_6$) | |

c) $S \vdash \square$ donc S est inconsistant **(0.25 point)**

**-0.5 si la démo dépasse 15 lignes**

**Exercice 2** **(8 points : 2 pts/tableau)**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux formules fermées et non valides et soient $\alpha_S$ et $\beta_S$ leurs formes de Skolem respectives.

**Réponse 1.** Représentez trois tableaux de vérité à l'image du tableau ci-dessous en utilisant les connecteurs $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ au lieu et place du symbole **o.**

- **V :** si vous considérez la proposition valide
- **F :** si vous considérez la proposition non valide
- **X :** si vous considérez que la proposition peut être vraie dans certaines situations et fausse dans d'autres.

| $\alpha$ satisfiable | $\beta$ satisfiable | $\alpha \rightarrow \beta$ satisfiable ? | $\alpha_S \rightarrow \beta_S$ satisfiable ? | $(\alpha \rightarrow \beta)_S$ satisfiable ? |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V |

| $\alpha$ satisfiable | $\beta$ satisfiable | $\alpha \vee \beta$ satisfiable ? | $\alpha_S \vee \beta_S$ satisfiable ? | $(\alpha \vee \beta)_S$ satisfiable ? |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | F | F |

| $\alpha$ satisfiable | $\beta$ satisfiable | $\alpha \wedge \beta$ satisfiable ? | $\alpha_S \wedge \beta_S$ satisfiable ? | $(\alpha \wedge \beta)_S$ satisfiable ? |
|---|---|---|---|---|
| V | V | X | X | X |
| V | F | F | F | F |
| F | V | F | F | F |
| F | F | F | F | F |

**Réponse 2.** Complétez le tableau de vérité ci-dessous.

| $\alpha$ satisfiable | $\neg\alpha$ satisfiable ? | $\alpha_S$ satisfiable ? | $\neg(\alpha_S)$ *satisfiable ? | $(\neg\alpha)_S$ satisfiable ? |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V |

***) Exemple :**

**$\neg(\alpha_S)$ peut-elle être non satisfiable ? La réponse est non**

$\neg(\alpha_S)$ non satisfiable $\Rightarrow$ $|=\alpha_S$

On sait que tout modèle de $\alpha_S$ est aussi modèle de $\alpha$

Par conséquent si $|=\alpha_S$ alors $|=\alpha$ (par hypothèse, ce n'est pas le cas)

Donc $\neg(\alpha_S)$ est satisfiable.

**<u>Exercice 3</u> (**Fermeture existentielle : **(1point)** Arbre sémantique : **1 point.)**

Montrer à l'aide d'un arbre sémantique la validité de la formule $\gamma$ telle que :

$$\boldsymbol{\gamma} : (\neg P(x) \rightarrow \neg Q(y)) \rightarrow ((\neg P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow P(x))$$

$|= \gamma$ ssi $\neg\gamma$ est non satisfiable

$\neg\gamma$ est non satisfiable ssi la fermeture existentielle de $\neg\gamma$ $(\exists x\exists y\neg\gamma)$ est non satisfiable

$(\exists x\exists y\neg\gamma)$ est non satisfiable ssi à l'ensemble S des clauses qui en est issu il correspond un arbre sémantique clos.

$\exists x\exists y\, \neg\gamma : (\neg P(x) \rightarrow \neg Q(y)) \wedge (\neg P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge \neg P(x))$

$(\exists x\exists y\, \neg\gamma)_S = (\neg P(a) \rightarrow \neg Q(b)) \wedge (\neg P(a) \rightarrow Q(b)) \wedge \neg P(a))$

S : $\{P(a) \vee \neg Q(b), P(a) \vee Q(b), \neg P(a)\}$

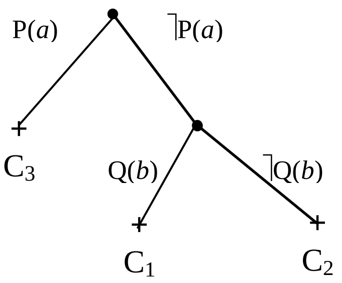



**Figure 2.5.3. Arbre sémantique clos de S**

**<u>Exercice 4</u> (4 points)**

Vérifier la satisfiabilité de la formule $\beta$ telle que $\beta : \exists x P(x) \wedge \forall x \neg P(f(x))$

**Question 1.** Donner une interprétation I telle que $I|=\beta$ et une interprétation J telle que $J|=\neg\beta$ **(2pts)**

**Question 2.** Vérifier la satisfiabilité de $\beta$ à l'aide d'un arbre sémantique. **(1 point)**

**Question 3.** Donner, si vous jugez $\beta$ satisfiable, un modèle de Herbrand de l'ensemble S de clauses qui en est issu. **(1point)**

**Réponse 1. (2 points)**

Interprétation *I* telle que $I|=\beta$ **(1point)**

- Le domaine $D_I$
- I(P)
- I(*f*)

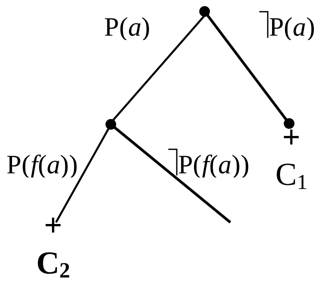
Interprétation *I* telle que $J|=\neg\beta$ **(1point)**

**Réponse 2. (1point)**

$\beta$ est satisfiable ssi l'AS obtenu à partir de l'ensemble S des clauses issu de $\beta_S$ n'est pas clos.

$\beta_S : P(a) \wedge \forall x \neg P(f(x))$ **(0.25 point)**

S : $\{P(a), \neg P(f(x))\}$




Arbre sémantique clos de S **0.75 point**

**Réponse 3. (1point)**

La branche en gras ne peut pas être fermée. L'interprétation qui lui correspond : { P($a$), ⌉P($f(a)$), …….., ⌉P($f^i(a)$), ……..} est un modèle de Herbrand de S.

**<u>Exercice 4</u> (2 points pour la traduction – 2 points pour la démonstration)**

Les deux énoncés E1 et E2 ci-dessous sont-ils contradictoires ?

E1 : "Tout nombre pair plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers."

E2 : Il y'a un nombre pair plus grand que 2 qui n'est pas égal à la somme de deux nombres premiers.

**Réponse 3. (1point - 1point)**

Ecriture de E1 dans le langage des prédicats :

*Tout <u>nombre</u> <u>pair</u> <u>plus grand que</u> 2 est la* ***somme*** *de deux nombres <u>premiers</u>.*

Les propriétés et les relations :

P($x$) : $x$ est pair. R($x$) : $x$ est premier

E($x$,$y$) : $x$ est égal à $y$ G($x$,$y$) : $x > y$

$a$ : une constante

$s(x,y) = x + y$

On occultera la propriété d'être un nombre pour alléger l'écriture.

$\alpha_1 : \forall x\big(P(x) \wedge G(x,a) \rightarrow \exists u \exists v R(u) \wedge R(v) \wedge E(x, s(u,v))\big)$ **1point**

*Il y'a un nombre pair plus grand que 2 qui n'est pas égal à la somme de deux nombres premiers.*

$\alpha_2 : \exists \mathbf{x}\big(\mathbf{P}(x) \wedge G(x,a) \wedge \forall u \forall v\big(R(u) \wedge R(v) \rightarrow \neg E(x, s(u,v))\big)\big)$ **1point**

## <u>Démonstration</u>

$\alpha_1 : \forall x\big(P(x) \wedge G(x,a) \rightarrow \exists u \exists v R(u) \wedge R(v) \wedge E(x, s(u,v))\big)$

$\alpha_2 : \exists \mathbf{x}\big(\mathbf{P}(x) \wedge G(x,a) \wedge \forall u \forall v\big(R(u) \wedge R(v) \rightarrow \neg E(x, s(u,v))\big)\big)$

$\boldsymbol{\alpha_1 \equiv \neg \alpha_2}$