ESI. MATH2. 2I. 2009/2010.

EMD2 14mars 2010.

DOCUMENTS INTERDITS.

Exercice1: (5 points)

1) Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1\right\}$.

a) Représenter graphiquement le domaine D.

b) Est il régulier selon x? Est il régulier selon y ?

2) Soient $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}$ et $D_2 = [-1,1] \times [0,1]$.

a) Calculer $I_1 = \iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2 - 1)\, dxdy$ et $I_2 = \iint\limits_{D_2} (x^2 + y^2 - 1)\, dxdy$.

b) En déduire (en justifiant) la valeur de $I = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2 - 1)\, dxdy$.

3) Calculer $I_3 = \iint\limits_{D_2} |x^2 + y^2 - 1|\, dxdy$.

Exercice2: (5,5 points)

1) Soit $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1,\ z^2 \leq 4(x^2 + y^2)\right\}$.

Représenter géométriquement Ω puis calculer $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$.

2) Soit $\Omega' = \left\{(x,y,z) \in \Omega \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$.

Déterminer le transformé en coordonnées sphériques de Ω', sans recalculer I.

On posera $\alpha_0 = arctg\frac{1}{2}$.

Exercice3: (5,5 points)

Les questions sont indépendantes:

1) Etudier la convergence absolue et la semi-convergence de l'intégrale généralisée :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t + \log t}\, dt.$$

2) Soit $\alpha > 0$, discuter selon les valeurs de α la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + e^{\alpha t}}$.

Exercice4: (4 points)

Soit la fonction donnée par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ où $f(t,x) = \dfrac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$.

1) Montrer que $D_F = \mathbb{R}$, où D_F est le domaine de définition de F.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $F'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)}\, dt$.

Un corrigé de l'EMD2 2009/2010.

Exercice1:

1) Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; -1 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1,\; x^2+y^2 \geq 1\right\}$.

a) Graphe de D , $x^2+y^2 \geq 1$ est l'extérieur du cercle $C\big((0,0),\ 1\big)$

b) D est régulier selon x car toute droite // à (oy)
et passant par un point intérieur de D coupe sa frontière en au plus 2 points.

D n'est pas régulier selon y car il existe des droites // à (oy) et passant
par des points intérieurs de D mais qui coupent sa frontière en 4 points.

2) a) ★ Soit $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \leq 1,\; y \geq 0\right\}$, soit D_1' le transformé de D_1 par les CP, on rapelle que $\varphi \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $\begin{cases} \det J\varphi = r \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$, d'après le graphe on a : $D_1' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\;/\; 0 < \theta < \pi,\; 0 < r < 1\right\}$.

Donc $I_1 = \int_0^{\pi}\int_0^1 r(r^2-1)\, drd\theta$ à variables séparées sur un pavé,

ie $I_1 = \left(\int_0^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r(r^2-1)\, dr\right) = \pi\left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{\pi}{4}$

★ $D_2 = [-1,1] \times [0,1]$ est un pavé. On applique Fubini2 :

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^2+y^2-1)\, dxdy = \int_0^1\int_{-1}^1 (x^2+y^2-1)\, dxdy = 2\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2-1)\, dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + (y^2-1)x\right]_{x=0}^{x=1} dy = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - 1\right) dy = 2\int_0^1 \left(\frac{-2}{3} + y^2\right) dy$$

$$= 2\left[\frac{-2}{3}y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$$

b) $I = I_2 - I_1$ car $D_2 = D \cup D_1$ et $\overset{o}{D} \cap \overset{o}{D_1} = \varnothing$. d'où $I = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.

3) On a que

$$I_3 = \iint_{D_3} |x^2+y^2-1|\, dxdy = -\iint_{D_1} (x^2+y^2-1)\, dxdy + \iint_{D} (x^2+y^2-1)\, dxdy$$

$$= -I_1 + I = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

On obtient donc $I_3 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice2:

1) Calculons $I = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$ où :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 \leq 1,\; z^2 \leq 4(x^2+y^2)\right\}$$

ESI. MATH2. 2I. 2009/2010.

Calculons l'intersection des 2 surfaces qui constituent

$$\Omega : \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z^2 = 4(x^2+y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = \pm 2 \end{cases}$$

Soit

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

$$I = \iint_D \int_{-\sqrt{4(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4(x^2+y^2)}} (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz = 2\iint_D \int_0^{2\sqrt{(x^2+y^2)}} (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$$

$$= 2\iint_D \left[(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=2\sqrt{(x^2+y^2)}} dxdy = 2\frac{14}{3}\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$$

Utilisons les CP et soit D' le transformé de D par les CP alors:

$$D' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\,/\, 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1\right\}$$

Donc

$$I = \frac{28}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\, drd\theta$$ à variables séparées sur un pavé,

$$= \frac{28}{3} 2\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{56\pi}{15}$$

2) On rapelle les coordonnées sphériques: $\varphi \begin{cases} x = r\sin\alpha\cos\theta \\ y = r\sin\alpha\sin\theta \\ z = r\cos\alpha \end{cases}$, soit Δ le transformé de Ω' par les CS, on a d'après le graphe:

$\rightsquigarrow$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et

$0 < r < \psi(\theta,\alpha) \,/\, \psi(\theta,\alpha) : x^2+y^2 = 1 \overset{CS}{\Leftrightarrow} r^2\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sin\alpha} = \psi(\theta,\alpha).$

$\rightsquigarrow$ Pour l'intervalle du α, choisissons un point $M\begin{pmatrix} x_M = 0 \\ y_M = 1 \\ z_M = 2 \end{pmatrix}$ qui est sur l'intersection du cône et du cylindre, on aura donc $\alpha' < \alpha < \frac{\pi}{2}$ avec $tg(\alpha') = \frac{y_M}{z_M} = \frac{1}{2}$ ie $\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Finalement:

$\Delta = \left\{(r,\theta,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\times]0,\pi[\,/\, 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ \alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < r < \frac{1}{\sin\alpha}\right\}.$

Exercice3:

1) Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t+\log t}dt$, posons $f(t) = \frac{\cos(2t)}{t+\log t}$, $f \in R_{loc}[1,+\infty[$.

a) Convergence: Utilisons la régle d'Abel, posons $f_1(t) = \frac{1}{t+\log t}$ et $f_2(t) = \cos(2t)$.

$\rightsquigarrow$ $\lim\limits_{t\to+\infty} f_1(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t+\log t} = 0.$

$\rightsquigarrow$ Comme $(t+\log t)' = 1+\frac{1}{t} > 0$ alors $f_1 \searrow$.

$\rightsquigarrow$ $\left|\int\limits_1^u \cos(2t)dt\right| \leq 1.$

D'où $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t+\log t}dt$ converge.

b) Convergence absolue:

$|f(t)| = \frac{|\cos(2t)|}{t+\log t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|\cos(2t)|}{t}$ car $\frac{1}{t+\log t} = \frac{1}{t\left(1+\frac{\log t}{t}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ or $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\cos(2t)|}{t}dt$

diverge (référence)

Donc d'après le critére d'équivalence $\int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge absolument.

Conclusion l'intégrale donnée est semi-convergente.

2) Soit $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + e^{\alpha t}}$, $\alpha > 0$, posons $g(t) = \frac{1}{t^\alpha + e^{\alpha t}}$, $g \in R_{loc}]0,+\infty[$.

$\rightsquigarrow$ Au $v(0^+)$: $\lim\limits_{t\to0^+} g(t) = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{1}{t^\alpha + e^{\alpha t}} = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{1}{e^{\alpha\log t} + e^{\alpha t}} = 1$ donc "0" FP.

$\rightsquigarrow$ Au $v(+\infty)$: $\frac{1}{t^\alpha + e^{\alpha t}} \leq \frac{1}{e^{\alpha t}}$ or $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha t}}dt$ converge (référence) puisque $-\alpha < 0$

Donc par le critére de comparaison $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + e^{\alpha t}}$ converge.

Conclusion: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha + e^{\alpha t}}$, $\alpha > 0$ converge.

Exercice4:

Soit $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$, posons $f(t,x) = \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $f \in R_{loc}[0,+\infty[$

1) On a que $|f(t,x)| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$, or $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ converge (Riemann) donc $\int\limits_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge absolument (donc simplement) sur $\mathbb{R}$ d'après les critéres de comparaison et d'équivalence. Donc $D_F = \mathbb{R}$.

2) a) On a f est C^1 sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ car elle est composée et rapport de fonctions C^1.

b) Etudions la convergence uniforme de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$:

On a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \frac{t}{(1+t^2)^2}|\cos(xt)| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge (Riemann)

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après W.

De a) et b) on obtient que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) On a $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\cos(xt)dt$ faisons une IPP:

$$\begin{cases} u' = \frac{t}{(1+t^2)^2} \to u = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^2)} \\ v = \cos(xt) \to v' = -x\sin(xt) \end{cases}$$

ie $F'(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+t^2)}\cos(xt)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}x\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)}dt.$

On obtient alors $F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)}dt.$