Durée 2 heures **Tout document interdit**

<u>Exercice I</u> (5.5 points). Soient α et β et φ trois formules fermées telles que : **α et φ** valides et **β** non valide Soient α_S, β_S et φ_S leurs formes de Skolem respectives.

Question. Compléter les deux tableaux ci-dessous avec les symboles suivants :

- **V :** si vous considérez que la proposition est toujours vraie.
- **F :** si vous considérez que la proposition n'est jamais vraie.
- **X :** si vous considérez que la proposition peut être parfois vraie, parfois fausse. **Justifier dans ce cas.**

α satisfiable	β satisfiable	$\alpha \rightarrow \beta$ satisfiable ?	$\alpha_S \rightarrow \beta_S$ satisfiable ?	$(\alpha \rightarrow \beta)_S$ satisfiable ?

Commentaires :

1. α ne peut pas être non satisfiable
2. β n'est pas valide. Il peut être soit satisfiable soit non satisfiable.
3. Si β_S est satisfiable ssi β est satisfiable.

φ satisfiable	$\neg\varphi$ satisfiable ?	φ_S satisfiable ?	$\neg(\varphi_S)$ satisfiable ?	$(\neg\varphi)_S$ satisfiable ?

<u>Exercice II</u> (1-1.5 points). Questions de cours.
Rappeler le théorème de complétude et le théorème de compacité.
<u>Théorème de complétude</u>. Si S est un ensemble non satisfiable alors S est inconsistant.
<u>Théorème de compacité</u>. Un ensemble S (fini ou infini) est satisfiable ssi tous ses sous-ensembles finis sont satisfiables.

<u>Exercice III</u> (1 - 0.5 – 1 – 1 – 1). Soient C1 : $\mathbf{P(f(x), y) \vee \neg Q(y, z)}$ et C2 : $\mathbf{\neg P(u, f(v)) \vee Q(u, f(w))}$ deux clauses.

Questions.

1. Trouver une clause résolvante à C1 et C2 (Indiquer le MGU). On désignera par R cette résolvante.
2. Donner une instance de base R_B de R telle que **$\models R_B$.**
3. Existe-t-il des instances de base de R qui ne sont pas des tautologiques ? Si oui, donner un exemple.
4. L'ensemble $\{ C_1, C_2 \}$ est-il satisfiable ?
5. La formule $C_1 \wedge C_2$ est-elle valide ?

<u>Exercice IV</u>

<u>Question</u> 1 (1.5, 1.5, points). Ecrire les énoncés ci-dessous dans le langage des prédicats du 1^{ier} ordre.

E$_1$. *Un seul parle et tous les autres l'écoutent.*
E$_2$. *Personne n'écoute celui qui parle.*

<u>Question</u> 2. (3 points). L'ensemble { $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$} est-il satisfiable ?

<u>Question</u> 3 (1.5 points). Ecrire l'énoncé ci-dessous dans le langage des prédicats du 1^{ier} ordre.
$\mathbf{E_3}$**.** *Un ensemble non satisfiable contient au moins un ensemble non satisfiable.*

CF 2023 Corrigé

Exercice I (5.5 points)

Soient α et β et φ trois formules fermées telles que : **α et φ** valides et **β** non valide Soient α_S, β_S et φ_S leurs formes de Skolem respectives.

Question. Compléter les deux tableaux ci-dessous avec les symboles suivants :

– **V :** si vous considérez que la proposition est toujours vraie.
– **F :** si vous considérez que la proposition n'est jamais vraie.
– **X :** si vous considérez que la proposition peut être parfois vraie, parfois fausse. **Justifier dans ce cas.**

α satisfiable	β satisfiable	$\alpha \rightarrow \beta$ satisfiable ?	$\alpha_S \rightarrow \beta_S$ satisfiable ?	$(\alpha \rightarrow \beta)_S$ satisfiable ?
V	X	X	X	X
V	X	X	X	X
α ne peut pas être non satisfiable				

Commentaires :

1. α ne peut pas être non satisfiable
2. β n'est pas valide. Il peut être soit satisfiable soit non satisfiable.
3. β_S est satisfiable ssi β est satisfiable.

α satisfiable	β satisfiable	$\alpha \rightarrow \beta$ satisfiable ?	$\alpha_S \rightarrow \beta_S$ satisfiable ?	$(\alpha \rightarrow \beta)_S$ satisfiable ?
V	V	V	V	V
V	F	F	X	F

Tableau II

φ satisfiable	$\neg\varphi$ satisfiable ?	φ_S satisfiable ?	$\neg(\varphi_S)$ satisfiable ?	$(\neg\varphi)_S$ satisfiable ?
V	F	V	X	F
~~F~~				

Colonne 2. $\models \varphi \Rightarrow \neg\varphi$ non satisfiable.
Colonne 3. $\models \varphi \Rightarrow \varphi$ satisfiable $\Rightarrow \varphi_S$ satisfiable
Colonne 4. la réponse est X.

Considérons la formule valide α : $(\exists x \neg P(x)) \vee \exists x P(x)$.
$\alpha_S = \neg P(a) \vee P(b) \Rightarrow \neg(\alpha_S) : P(a) \wedge \neg P(b)$ (satisfiable)

Considérons la formule valide α' : $\forall x(\neg P(x)) \vee P(x))$.
$\alpha'_S = \forall x(\neg P(x)) \vee P(x)) \Rightarrow \neg(\alpha'_S) = \forall x(P(x)) \wedge \neg P(x))$ non satisfiable.

Colonne 5. La réponse est F
$\models \varphi \Rightarrow \neg\varphi$ non satisfiable $\Rightarrow (\neg\varphi)_S$ non satisfiable

Exercice III (1 - 0.5 – 1 – 1 – 1)

Soient C1 : **$P(f(x), y) \vee \neg Q(y, z)$** et C2 : **$\neg P(u, f(v)) \vee Q(u, f(w))$** deux clauses.

Questions.

1. Trouver une clause résolvante à C1 et C2 (Indiquer le MGU). On désignera par R cette résolvante.
2. Donner une instance de base R_B de R telle que $\models R_B$.
3. Existe-t-il des instances de base de R qui ne sont pas des tautologiques ? Si oui, donner un exemple.
4. L'ensemble $\{ C_1, C_2 \}$ est-il satisfiable ?
5. La formule $C_1 \wedge C_2$ est-elle valide ?

Réponses à la question 1

$C_1 : P(f(x), y) \vee \neg Q(y, z)$
$C_2 : \neg P(u, f(v)) \vee Q(u, f(w))$
$C_3 : P(f(x), u) \vee \neg Q(u, f(w))$ $\quad C_1[u/y, f(w)/z]$
$R_1 : \neg P(u, f(v)) \vee P(f(x), u)$ $\quad \text{Res } [C_2, C_3]$

Réponses à la question 2

Instance de base $\models R_{1B}$.

$\neg P(f(x), f(x)) \vee P(f(x), f(x))$ $\quad [f(x)/u, x/v]$
$\neg P(f(a), f(a)) \vee P(f(a), f(a))$ $\quad [a/x, a/v]$

Réponses à la question 3

$R_1 : \neg P(a, f(a)) \vee P(f(a), a)$ $\quad [a/u, a/v, a/x]$

Réponses à la question 4

C1 : **$P(f(x), y) \vee \neg Q(y, z)$** et C2 : **$\neg P(u, f(v)) \vee Q(u, f(w))$**

L'ensemble E : $\{ C_1, C_2 \}$ est satisfiable. A titre d'exemple,

- toute interprétation de Herbrand contenant les instances de base de $P(f(x), y)$ et de $Q(u, f(w))$ est un modèle de E : $\{ P(f(a), a), P(f(a), f(a)), \ldots, Q(a, f(a)), \ldots \}$
- toute interprétation de Herbrand contenant les instances de base de $\neg Q(y, z)$ et de $\neg P(u, f(v))$ est aussi un est un modèle de E.

Réponses à la question 5

La formule $C_1 \wedge C_2$ n'est pas valide. Toute interprétation de Herbrand qui falsifie C_1 ou C_2 donc une instance de base de C_1 ou C_2 falsifie $C_1 \wedge C_2$. Exemple : E : $\{ \neg P(f(a), a), Q(a, a), \neg P(f(a), f(a)), \ldots, \ldots \}$ falsifie C_1.

Exercice IV

Question 1 (1.5, 1.5 points). Ecrire les énoncés ci-dessous dans le langage des prédicats du 1^{ier} ordre.
E_1. *Un seul parle et tous les autres l'écoutent.*
E_2. *Personne n'écoute celui qui parle.*

Réponse à la question 1

$P(x)$: x parle
$E(x, y)$: x écoute y
$D(x, y)$: x est différent de y

β_1 : $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y, x) \rightarrow E(y, x) \wedge \neg P(y))$
β_2 : $\forall x \forall y(P(x) \rightarrow \neg E(y, x))$

Réponse à la question 2

<u>Question</u> 2. (3 points). L'ensemble { **E_1, E_2**} est-il satisfiable ?
{ **E_1, E_2**} est satisfiable ssi { **β_1, β_2**} est satisfiable ssi { **$(\beta_1)_S$, $(\beta_2)_S$** } est satisfiable.
$(\beta_1)_P$: $\exists x \forall y(P(x) \wedge (D(y, x) \rightarrow E(y, x) \wedge \neg P(y))$
$(\beta_2)_P$: $\forall u \forall v(P(u) \rightarrow \neg E(v, u))$

$(\beta_1)_S$:$\forall y(P(a) \wedge (D(y, a) \rightarrow E(y, a) \wedge \neg P(y))$
$(\beta_2)_S$: $\forall u \forall v(P(u) \rightarrow \neg E(v, u))$

Mise sous forme clausale :
S : { $P(a)$, $\neg D(y, a) \vee E(y, a)$, $\neg D(y, a) \vee \neg P(y)$, $\neg P(u) \vee \neg E(v, u)$ }
Le domaine de Herbrand est formé du seul terme a. L'interprétation I_h : **{** $P(a)$, $\neg D(a, a)$, $\neg E(a, a)$ } satisfait chaque instance de base des clauses de S et donc S.

Réponse à la question 3

E_3. *Un ensemble non satisfiable contient au moins un ensemble non satisfiable.*
$E(x)$: x est un ensemble
$S(x)$: x est *satisfiable*
$C(x, y)$: x contient y

β_3 : $\forall x(E(x) \wedge \neg S(x) \rightarrow \exists y(E(y) \wedge C(x, y) \wedge \neg S(y)))$