Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Janvier 2019**

2CPI **Contrôle final** **Durée : 2 heures**

Analyse mathématique 3

$\ast$ Les documents et les téléphones portables sont interdits.
$\ast$ Il sera tenu compte de la présentation et la clarté des réponses.

Séries de fonctions, séries entières et séries de Fourier

Exercice 1 (12 points) : Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 1 : Déterminer le domaine de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n.$$

Partie 2 : Montrer que la somme de la série de Fourier ayant comme coefficients

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^n}, \ \forall n \geq 0, \\ b_n = 0, \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique et continue (à déterminer).

Application : Déduire la valeur de $\int_0^\pi \frac{1}{5 - 4\cos x} dx$

Partie 3 : Soit la fonction $2\pi-$périodique donnée par

$$f(x) = \cos(ax) \ \text{ si } \quad x \in [-\pi,\pi] \ \ (\text{ avec } 0 < a < 1).$$

1) Développer f en série de Fourier.

2) Déduire la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$.

On rappelle que :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Les fonctions de plusieurs variables

Exercice 2 (8 points) : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Calculer les imites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{x\cos(y)}{|x|+|y|}.$$

Partie 2 : Soient les fonctions f et g données par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(y)+y^2\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } g(x,y) = \frac{x^2(x-y)\log(1+y)}{y}.$$

1) Déterminer les domaines de définition D_f et D_g.
2) Déduire le domaine de définition D_h où $h(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$.
3) Dire si $(0,0)$ est un point d'accumulation de D_h ou non.
4) Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} h(x,y)$ si elle existe.
5) Est-ce que f est continue en $(0,0)$? Justifier.
6) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Bon courage

Un corrigé:

Exercice 1:
Partie 1 : (3 points)

a) Déterminons le rayon: Soit $a_n = \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $u_n(x) = a_n x^n$.

Réponse1: On a $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$

Donc d'après le théorème de Hadamard $R_b = \frac{1}{1} = 1$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$
On en conclut que $R_a = 1$

Réponse2: On a $|a_n| \leq 1 = b_n$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ donc $R_a \geq 1$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$,

de plus $\sum\limits_{n\geq1} u_n(1) = \sum\limits_{n\geq1} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ diverge $\boxed{0.25 \text{ point}}$ puisque :

$\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ $\boxed{0.5 \text{ point}}$

sachant que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge $\boxed{0.25 \text{ point}}$ (c'est une série de Riemann)
On en conclut que $R_a = 1$

b) Etude aux bornes: Si on a utilisé la solution2, il suffit d'étudier en $x = -1$ (la borne 1 étant déjà faite et notée)

En $x = 1$: On a $u_n(1) = \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ $\boxed{0.5 \text{ point}}$

sachant que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge $\boxed{0.25 \text{ point}}$ (c'est une série de Riemann)

Donc $\sum\limits_{n\geq1} u_n(1)$ diverge (critère d'équivalence). $\boxed{0.25 \text{ point}}$

En $x = -1$: On a $u_n(-1) = \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})(-1)^n$ et $\sum\limits_{n\geq1} u_n(1)$ est une série altérnée $\boxed{0.25 \text{ point}}$ car $\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$.

Donc utilisons la règle de Leibnitz, en effet ;

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$

$\rightsquigarrow$ Posons $f(t) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ avec $t \geq 1$; $f'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq 0.$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$

Donc $\left(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)_n$ est décroissante $\boxed{0.25 \text{ point}}$, on obtient que $\sum\limits_{n\geq1} u_n(-1)$ converge.

b) Le domaine de convergence est donc $D = [-1, 1[$. $\boxed{0.25 \text{ point}}$

Partie 2 : (4 points)

a) On a $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n\geq1} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ $\boxed{0.5 \text{ point}}$ (Il s'agit de chercher f tq $f(x) =$

$\mathcal{F}f(x)$),

b) Utilisons le théorème de conservation de la continuité pour les séries de fonctions;

$\rightsquigarrow$ Convergence uniforme de cette série; on a $\left|\dfrac{\cos(nx)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente $\boxed{0.25 \text{ point}}$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{2^n}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$;

$\rightsquigarrow$ Posons $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{2^n}$, toutes les u_n sont continues car c'est la composée et le rapport de fonctions continues $\boxed{0.25 \text{ point}}$.

On en conclut la continuité de $\mathcal{F}f$.

c) Calculons la somme de cette série:

$\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{2^n} = \dfrac{1}{2} + 1 + \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\cos(nx)}{2^n}$; pour cela calculons $S_n = \sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{\cos(kx)}{2^k}$

On a $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\operatorname{Re}\left(e^{ikx}\right)}{2^k} = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\left(e^{ikx}\right)}{2^k}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{e^{ix}}{2}\right)^k\right)$ $\boxed{0.5 \text{ point}}$

ie $S_n = \operatorname{Re}\left(\dfrac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{ix}}{2}}\right) = \dfrac{1}{2^n} \operatorname{Re}\left(\dfrac{2^{n+1} - e^{i(n+1)x}}{2 - e^{ix}}\right)$

ie $S_n = \dfrac{1}{2^n} \operatorname{Re}\left(\dfrac{2^{n+1} - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{2 - \cos x - i\sin x}\right)$

ie $S_n = \dfrac{1}{2^n} \operatorname{Re}\left[\dfrac{(2 - \cos x + i\sin x)\left(2^{n+1} - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x\right)}{(2 - \cos x)^2 + \sin^2 x}\right]$

ie $S_n = \dfrac{1}{2^n}\left[\dfrac{(2 - \cos x)\left(2^{n+1} - \cos(n+1)x\right) + \sin x \sin(n+1)x}{5 - 4\cos x}\right]$

ie $S_n = \left[\dfrac{(2 - \cos x)\left(2 - \frac{1}{2^n}\cos(n+1)x\right) + \frac{1}{2^n}\sin x \sin(n+1)x}{5 - 4\cos x}\right]$

et on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \dfrac{2(2 - \cos x)}{5 - 4\cos x}$ donc:

$\mathcal{F}f(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{2^n} = \dfrac{1}{2} - 1 + S_n = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{2(2 - \cos x)}{5 - 4\cos x} = \dfrac{-5 + 4\cos x + 8 - 4\cos x}{2(5 - 4\cos x)}$.

On obtient :$f(x) = \dfrac{3}{2(5 - 4\cos x)}$ $\boxed{1.5 \text{ point}}$, on a bien f $2\pi-$périodique et continue et paire.

Si on calcule f il est inutile de faire l'étape b) et on rajoute le point.

Application : On a $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ $= \dfrac{3}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{(5 - 4\cos x)}$.

Donc $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{1}{5 - 4\cos x}dx = \dfrac{\pi a_0}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$

Partie 3 : (5 points)

1) Calculons d'abord $\mathcal{F}f$

La fonction est continue donc $\mathcal{F}(f)$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ existe (on peut aussi dire qu'elle est localement intégrable).

$\rightsquigarrow$ Calcul des coefficients, comme f est paire $b_n = 0\ \forall n \geq 1$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(ax)dx = \frac{2}{a\pi}\left[\sin(ax)\right]_0^\pi = \frac{2\sin(a\pi)}{a\pi}. \ \boxed{0.5 \text{ point}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(ax)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((a+n)x) + \cos(a-n)x)\,dx \ \boxed{0.25 \text{ point}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((a+n)x)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)x)}{a-n}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a\pi+n\pi)}{a+n} + \frac{\sin(a\pi-n\pi)}{a-n}\right) \boxed{0.5 \text{ point}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{a+n} + \frac{(-1)^n\sin(a\pi)}{a-n}\right) = \frac{2a(-1)^n\sin(a\pi)}{\pi(a^2-n^2)} \boxed{0.5 \text{ point}}$$

$\rightsquigarrow$ La série de Fourier associée à f est :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(a^2-n^2)}\cos(nx) \boxed{0.5 \text{ point}}$$

$\rightsquigarrow$ Appliquons le corrollaire de Dirichlet sur $[0,\pi]$, car elle est $2\pi-$périodique et paire.

$\rightsquigarrow$ $f'_{/]0,\pi[}(x) = -a\sin(ax)$; $f_{/]0,\pi[}$ est de classe C^1 $\boxed{0.25 \text{ point}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f'_{/]0,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$

et $\lim\limits_{x\to\pi^-} f'_{/]0,\pi[}(x) = -a\sin(a\pi) \in \mathbb{R}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ f est donc C^1 par morceaux sur $[0,\pi]$.

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier $\mathcal{F}(f)$ associée à f est égale à f sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0,\pi]$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(a^2-n^2)}\cos(nx) = \cos(ax);\ \forall x \in [0,\pi]$$

$\boxed{0.25 \text{ point}}$

2) Calcul de $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2-n^2}$.

<u>S_1</u>: Pour $x = \pi$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$, on a $\mathcal{F}(f)(\pi) = f(\pi) = \cos(a\pi)$ ie

$$\frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(a^2-n^2)} = \cos(a\pi) \boxed{0.25 \text{ point}}$$

ie $S = \dfrac{\pi}{2a\sin(a\pi)}\left(\cos(a\pi) - \dfrac{\sin(a\pi)}{a\pi}\right)$. $\boxed{0.5 \text{ point}}$

<u>Exercice 2 :</u>

Partie 1 : (2,5 points)

1) Utilisons les chemins

$\rightsquigarrow y=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty=l_1.$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\rightsquigarrow y=-x$: $\lim\limits_{x\to 0} 0=0=l_2$ $\boxed{\text{0.5 point}}$; $l_1\neq l_2$ alors la $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$ n'existe pas. $\boxed{\text{0.25 point}}$

2) Utilisons les chemins

$\rightsquigarrow y=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ et on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}=1=l_1$ $\boxed{\text{0.5 point}}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}=-1=l_2$ $\boxed{\text{0.5 point}}$ (ce chemin suffit).

$\rightsquigarrow l_1\neq l_2$ alors la $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{x\cos(y)}{|x|+|y|}$ n'existe pas. $\boxed{\text{0.25 point}}$

Partie 2 : (5,5 points)

1) $D_f=\mathbb{R}^2$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ et $D_g=\mathbb{R}\times(]-1,+\infty[-\{0\})$ $\boxed{\text{0.75 point}}$.

2) $D_h=D_f\cap D_g=D_g=\mathbb{R}\times(]-1,+\infty[-\{0\})$. $\boxed{\text{0.25 point}}$

3) Oui. $\boxed{\text{0.5 point}}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}\dfrac{x^2\sin(y)+y^2\sin(x)}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0;0)}\left(\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{borné}}\underbrace{\sin(y)}_{\text{tend vers 0}}+\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{borné}}\underbrace{\sin(x)}_{\text{tend vers 0}}\right)=0 \ \boxed{\text{1 point}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0;0)}\frac{x^2(x-y)\log(1+y)}{y}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0;0)} x^2(x-y)\underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\text{tend vers 1}}=0 \ \boxed{\text{0,75 point}}$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} h(x,y)=\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y),\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} g(x,y)\right)=(0,0).$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

5) Oui f est continue en $(0,0)$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ car $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y)=0=f(0,0).$ $\boxed{\text{0.25 point}}$

6) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$ ie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\ \exists$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

Comme f est symétrique alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\ \exists.$ $\boxed{\text{0.5 point}}$