2013/2014. CP2. ANA4

Examen final en ANA4.
Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.

<u>Exercice 1</u> (5pts)
Les deux parties **I** et **II** sont indépendantes.
I- Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) des séries numériques suivantes:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{3^{n-2}},\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

II- Pour $n\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$ on pose $f_n(x)=n^2x\,(1-x)^n$.
a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)|$, en déduire le domaine de convergence simple D de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ vers une fonction f à déterminer.
b) Calculer $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$, en déduire que la suite $\{f_n\}_n$ ne converge pas uniformément sur D.

<u>Exercice 2</u> (4pts)
Soit la série de fonctions: $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}$

1) Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}_+^*$, on posera $F(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}$.
2) Etudier la convergence uniforme de la série sur $[a,+\infty[$, $a>0$.
3) Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Exercice 3</u> (5pts)
Soit la série entière: $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n\left(n^2+1\right)}{(n+1)}x^n$.
1) Déterminer son rayon ainsi que son domaine de convergence.
2) Calculer sa somme.

<u>Exercice 4</u> (6pts)
Soit f une fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x)=e^{|x|+1}$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.
1) Developper f en série de Fourier.
2) En déduire les valeurs des séries numériques:

$$S_1=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)},\ S_2=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n^2+1)}$$

Un corrigé:

Exercice 1

I- 1) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n}{3^{n-2}}$ série numérique à termes positifs, donc la convergence absolue=convergence et pas de semi-convergence, on a que: $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n}{3^{n-2}} = 9\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ c'est donc une série géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, elle est donc convergente.

2) $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, posons $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

a) Convergence: $u_n = \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{n}}_{v_n} + \underbrace{o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{w_n}$, on a,

$\rightsquigarrow \sum v_n$ est convergente (série de Leibnitz).

$\rightsquigarrow \sum w_n$ est convergente absolument par la régle de l'ordre, en effet:

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2.\left|o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right| = 0$

Par linéarité, $\sum u_n$ converge.

b) Convergence absolue: $|u_n| \sim \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann), on en conclut -par le critére d'équivalence- que $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

c) $\sum u_n$ est semi convergente.

II- Pour $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = n^2 x\,(1-x)^n$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty}|x|\,e^{2\log n + n\log|1-x|} = \lim\limits_{n\to+\infty}|x|\,e^{n\left(2\frac{\log n}{n}+\log|1-x|\right)}$,

$\rightsquigarrow$ 1er cas: $\log|1-x| < 0$ ie $|1-x| < 1$ie $x \in]0,2[$ et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)| = 0$.

$\rightsquigarrow$ 2ème cas: $\log|1-x| > 0$ ie $|1-x| > 1$ ie $x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)| = +\infty$.

$\rightsquigarrow$ 3ème cas: $x = 0$ $|f_n(0)| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(0)| = 0$

$\rightsquigarrow$ 4ème cas: $x = 2$ $|f_n(2)| = 2n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(2)| = +\infty$.

On en déduit que la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ converge simplement sur $D = [0,2[$ vers f telle que $f(x) = 0$.

b) On a $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = n^2\int\limits_0^1 x\,(1-x)^n\,dx$, faisons une IPP: $\begin{cases} u = x \to u' = 1 \\ v' = (1-x)^n \to v = \dfrac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1} \end{cases}$

ie $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = n^2 \underbrace{\left[\frac{-x}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{n^2}{n+1}\int\limits_0^1 (1-x)^{n+1}\,dx = \frac{-n^2}{(n+1)(n+2)}\left[(1-x)^{n+2}\right]_0^1 =$
$\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$, d'autre part: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(0) = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$, on en déduit que la suite $\{f_n\}_n$ ne converge pas uniformément sur D.

<u>Exercice 2</u>

Soit la série de fonctions: $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}$, posons $u_n(x) = \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}$

1) Etude de la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}_+^*$:
$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}\right| \leq \frac{e^{-nx}}{\log(n+1)} = v_n(x)$, utilisons la régle de l'ordre pour montrer la convergence de $\sum v_n(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 v_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{2\log n - nx - \log[\log(n+1)]} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\left(2\frac{\log n}{n} - x - \frac{\log(n+1)}{n}\cdot\frac{\log[\log(n+1)]}{\log(n+1)}\right)} = 0$ ie $\sum v_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On en conclut que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge absolument donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ par le critére de comparaison.
2) Etude de la convergence uniforme de la série sur $[a, +\infty[$, $a > 0$:
$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\log(n+1)}\right| \leq \frac{e^{-nx}}{\log(n+1)} \leq \frac{e^{-na}}{\log(n+1)} = v_n(a)$ $\forall x \in [a, +\infty[$, $a > 0$ et $\forall n \geqslant 1$ or:
$\sum v_n(a)$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, déjà fait en 1). Donc d'aprés le critére de Weirestrass la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$.
3) Etude de la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Utilisons le théorème de conservation de la continuité:
$\rightsquigarrow$ Toutes les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée, rapport et produit de fonctions continues.
$\rightsquigarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$.
Alors F est continue sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Exercice 3</u>

Posons $a_n = \dfrac{2^n\left(n^2+1\right)}{(n+1)} \geq 0$ et $u_n(x) = a_n x^n$.

1) a) Calcul du rayon:

$\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}\left((n+1)^2+1\right)}{(n+2)} \dfrac{(n+1)}{2^n\left(n^2+1\right)} = 2$, donc d'après le théorème de Hadamard $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{2}$

b) Domaine de convergence D. Pour cela faisons l'étude aux bornes:

$\rightsquigarrow u_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\left(n^2+1\right)}{(n+1)} \sim n$ et $\sum n$ diverge (CN non vérifiée) donc $\sum u_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ diverge.

$\rightsquigarrow u_n\left(-\dfrac{1}{2}\right) = a_n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{(-1)^n\left(n^2+1\right)}{(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|u_n\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| = +\infty \neq 0$ et $\sum u_n\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ diverge (CN non vérifiée).

Donc $D =]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$.

2) Calculons sa somme S, $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n\left(n^2+1\right)}{(n+1)} x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\left(n^2+1\right)}{(n+1)} (2x)^n$

ie $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\left((n+1)^2 - 2(n+1) + 2\right)}{(n+1)} (2x)^n = \sum\limits_{n\geqslant 0} \left[n - 1 + \dfrac{2}{(n+1)}\right] (2x)^n$

$\rightsquigarrow T_1(y) = \sum\limits_{n\geqslant 0} n y^n = \sum\limits_{n\geqslant 1} n y^n = y \sum\limits_{n\geqslant 1} n y^{n-1} = y\left(\dfrac{1}{1-y}\right)' = \dfrac{y}{(1-y)^2}$ $\forall y \in]-1,1[$;

en particulier pour $y = 2x$ on a: $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(2x)^n = \dfrac{2x}{(1-2x)^2}$ $\forall x \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$.

$\rightsquigarrow T_2(y) = -\sum\limits_{n\geqslant 0} y^n = \dfrac{-1}{1-y}$ $\forall y \in]-1,1[$;

en particulier pour $y = 2x$ on a: $\sum\limits_{n\geqslant 0} -(2x)^n = \dfrac{-1}{1-2x}$ $\forall x \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$.

$\rightsquigarrow T_3(y) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2}{(n+1)} y^n = \begin{cases} \dfrac{2}{y} \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{y^{n+1}}{(n+1)} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 2 \quad \text{si} \quad y = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{y} \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{y^n}{n} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 2 \quad \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

donc $T_3(y) = \begin{cases} \dfrac{-2}{y} \log(1-y) & \text{si} \quad y \in]-1,1[-\{0\} \\ 2 \quad \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

en particulier pour $y = 2x$ on a: $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2}{(n+1)} (2x)^n = \begin{cases} \dfrac{-1}{x} \log(1-2x) & \text{si} \quad x \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[-\{0\} \\ 2 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

.

On conclut que: $S(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x}{(1-2x)^2}-\dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{1}{x}\log(1-2x) \quad \text{si} \quad x\in]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}[-\{0\}\\ 1 \quad \text{si} \quad x=0\end{array}\right.$

Exercice 4

Soit f une fonction $2\pi-$périodique telle que $f(x)=e^{|x|+1}$ pour $x\in[-\pi,\pi]$.

1) Developper f en série de Fourier.

$\rightsquigarrow$ f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle l'est sur $[-\pi,\pi]$ et elle est $2\pi-$périodique, donc sa $\mathcal{F}f$ existe

$\rightsquigarrow$ $e^{|x|+1}$ est paire sur $[-\pi,\pi]$ qui est centré et comme f est $2\pi-$périodique alors elle est paire, donc $b_n=0$ $\forall n\geq 1$, $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x+1}dx=$ $\dfrac{2}{\pi}\left[e^{x+1}\right]_0^\pi=\dfrac{2}{\pi}\left(e^{\pi+1}-e\right)$.

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x+1}\cos(nx)\,dx$, une IPP: $\left\{\begin{array}{c}u=\cos(nx)\rightarrow u'=-n\sin(nx)\\ v'=e^{x+1}\rightarrow v=e^{x+1}\end{array}\right.$

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\left(\left[e^{x+1}\cos(nx)\right]_0^\pi+n\displaystyle\int_0^\pi e^{x+1}\sin(nx)\,dx\right)$, une IPP: $\left\{\begin{array}{c}u=\sin(nx)\rightarrow u'=n\cos(nx)\\ v'=e^{x+1}\rightarrow v=e^{x+1}\end{array}\right.$

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\left((-1)^n e^{\pi+1}-e+n\left(\underbrace{\left[e^{x+1}\sin(nx)\right]_0^\pi}_{=0}-n\displaystyle\int_0^\pi e^{x+1}\cos(nx)\,dx\right)\right)$

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\left((-1)^n e^{\pi+1}-e\right)-n^2a_n\Longleftrightarrow\left(1+n^2\right)a_n=\dfrac{2}{\pi}\left((-1)^n e^{\pi+1}-e\right)$.

On a alors: $a_n=\dfrac{2\left((-1)^n e^{\pi+1}-e\right)}{\pi\left(1+n^2\right)}$ $\forall n\geq 1$

$\mathcal{F}f(x)=\dfrac{\left(e^{\pi+1}-e\right)}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\left((-1)^n e^{\pi+1}-e\right)}{\left(1+n^2\right)}\cos(nx)$.

$\rightsquigarrow$ Utilisons le corrolaire de Dirichlet:

i) f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $[-\pi,\pi]$ et $f(\pi)=f(-\pi)$,

ii) Comme f est paire et $2\pi-$périodique alors il suffit de se restreindre à $[0,\pi]$,

iii) On a f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, en effet f est C^1 sur $]0,\pi[$ de plus $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x+1}=e\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}e^{x+1}=e^{\pi+1}\in\mathbb{R}$

on obtient alors:$\mathcal{F}f(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad\bigstar$

2) Déductions:

$\rightsquigarrow$ Appliquons $\bigstar$ pour $x=0$: $e=\dfrac{\left(e^{\pi+1}-e\right)}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\left(e^{\pi+1}S_1-eS_2\right)$

$\rightsquigarrow$ Appliquons $\bigstar$ pour $x=\pi$: $e^{\pi+1}=\dfrac{\left(e^{\pi+1}-e\right)}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\left(e^{\pi+1}S_2-eS_1\right)$

On obtient que S_1 et S_2 vérifient le systéme :
$$\left\{\begin{array}{l}e^{\pi+1}S_1-eS_2=\dfrac{\pi}{2}e-\dfrac{\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2}\\ e^{\pi+1}S_2-eS_1=\dfrac{\pi}{2}e^{\pi+1}-\dfrac{\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2}\end{array}\right. \qquad (3)$$

$$\iff \begin{cases} e.e^{\pi+1}S_1 - e^2 S_2 = \dfrac{\pi}{2}e^2 - \dfrac{e\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2} & (1) \\ e^{2(\pi+1)}S_2 - e.e^{\pi+1}S_1 = \dfrac{\pi}{2}e^{2(\pi+1)} - \dfrac{e^{\pi+1}\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2} & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$ donne: $\left(e^{2(\pi+1)} - e^2\right)S_2 = \dfrac{\pi}{2}\left(e^{2(\pi+1)} + e^2\right) - \dfrac{\left(e^{\pi+1}+1\right)\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2}$

Enfin; $S_2 = \dfrac{\pi\left(e^{2(\pi+1)}+e^2\right)}{2\left(e^{2(\pi+1)}-e^2\right)} - \dfrac{\left(e^{\pi+1}+1\right)\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2\left(e^{2(\pi+1)}-e^2\right)}$ ie $S_2 = \dfrac{\pi\left(e^{2(\pi+1)}+e^2\right)}{2\left(e^{2(\pi+1)}-e^2\right)} - \dfrac{\left(e^{\pi+1}+1\right)}{2\left(e^{\pi+1}+e\right)}$

On remplace dans (3) $S_1 = e^{\pi+1}S_2 - \dfrac{\pi}{2}e^{\pi+1} + \dfrac{\left(e^{\pi+1}-e\right)}{2}$