Exercice 1 :

Dans toute la suite, si $x \in \mathbb{C}$ alors $\overline{x}$ désigne le conjugué de x dans $\mathbb{C}$.

I/

1- Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ et $v = (x_k)_{1\leq k\leq m}$ un vecteur de $\mathbb{C}^m$. On note par :

$$\overline{M} = (\overline{a_{ij}})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \text{ et } \overline{v} = (\overline{x_k})_{1\leq k\leq m} \in \mathbb{C}^m .$$

Montrer que : $\overline{M.v} = \overline{M}.\overline{v}$.

2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Supposons que M admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et que $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de M associé λ.

Montrer que $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de M de vecteur propre associé $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$.

II- Soit la matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A.

Réponse : $P_A(X) = X^3 + 4X = X(X^2+4)$. **(1 pt)**

2- Est ce que A est inversible?. Justifier.

Réponse : Non, 0 est une valeur propre de A. **(0.5 pt)**

3- Dire pourquoi A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Réponse : A n'admet pas 3 valeurs propres dans $\mathbb{R}$. **(0.5 pt)**

4- Dire pourquoi A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Réponse : A admets 3 valeurs propres simples. **(0.5 pt)**

5- On note les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$ par : α, β et δ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de partie imaginaire positive.

a- Déterminer un vecteur propre non nul v associé à la valeur propre β.

Réponse : $\beta = 2i$, on résoud $(A - 2iI_3)X = 0$, on obtient : $v = (-1, i, 1)$. **(1 pt)**

b- En déduire un vecteur propre non nul w associé à la valeur propre δ.

Réponse : $\delta = \overline{\beta}$, et d'après la question I-2 $w = \overline{v} = (-1, -i, 1)$.**(1 pt)**

c- Déterminer une matrice inversible P telle que :

Réponse : Il reste à déterminer un vecteur propre z non nul associé à $\alpha = 0$. On Résoud $AX = 0$, on trouve $z = (1, 0, 1)$. **(0.5 pt)**

Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 2 :

Soit la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Déterminer le déterminant de A_m.

Réponse : $\det A_m = 2m$. **(1 pt)**

2- Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire (S) suivant : $A_m.X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

a- Pour quelles valeurs de a, b, c et m le système (S) est-il de Cramer.

Réponse : (S) est de Cramer si et seulement si $\det A_m \neq 0$ si et seulement si $m \neq 0$. **(1 pt)**

b- Pour quelles valeurs de a, b, c et m le système (S) est-il incompatible.

Réponse :

c- Pour quelles valeurs de a, b, c et m le système (S) admet-il une infinité de solutions. Résoudre le système (S) dans ce cas.

3- Déterminer les valeurs propres de A_m.

Réponse : Les valeurs propres de A_m sont : $1, 2, m$. **(1 pt)**

4- Discuter, suivant les valeurs de m, la diagonalisation de A_m.

Réponse :

Cas1 : $m \notin \{1, 2\}$, A_m admet trois valeurs propres simples donc A_m est diagonalisable. **(0.5 pt)**

Cas2 : $m = 1$, donc la valeur 1 est une valeur propre double, d'où :

$$A_1 \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow rg(A_1 - I) = 1$$

mais : $A_1 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, d'où A_1 n'est pas diagonalisable. **(1 pt)**

Cas3 : $m = 2$, donc la valeur 2 est une valeur propre double, d'où :

$$A_2 \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow rg(A_1 - 2I) = 1$$

et : $A_2 - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, d'où A_2 est diagonalisable. **(1 pt)**

Conclusion : A_m est diagonalisable si et seulement si $m \neq 1$. **(0.5 pt)**

Exercice 3 : (2 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que n est impair et M est antisymétrique.

Déterminer $\det M$.

Réponse : On a :

$$\begin{aligned} {}^tM &= -M \Rightarrow \det\left({}^tM\right) = \det(-M) \\ &\Rightarrow \det\left({}^tM\right) = (-1)^n \det(M) \\ &\Rightarrow \det(M) = -\det(M) \\ &\Rightarrow 2\det(M) = 0 \end{aligned}$$

D'où : $\det(M) = 0$.