Exercice : (7pts)

Soit la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- Déterminer suivant le paramètre m le rang de la matrice A_m.

Solution : Après échelonnement de la matrice A_m, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ m & 1-m & m^2+m-2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ m & 1-m & (m-1)(m+2) \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Trois cas se présentent :

Cas 1 : $m \notin \{-2, 1\}$, $rg\,(A_m) = 3$. **(0.5 pt)**

Cas 2 : $m = 1$, on obtient donc la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i.e. $rg\,(A_1) = 1$. **(0.5 pt)**

Cas 3 : $m = -2$, on obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ i.e. $rg\,(A_{-2}) = 2$. **(0.5 pt)**

2- En déduire pour quelles valeurs de m la matrice est-elle inversible.

Solution : On a le résultat suivant : A_m inversible si et seulement si $rg\,(A_m) = 3$ i.e. : $m \notin \{-2, 1\}$. **(0.5 pt)**

3- Soit $g \in End\,(\mathbb{R}^3)$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A_m = M_B\,(g)$.

a- Déterminer l'endomorphisme g.

Solution : Soit $(x, y, z)\,, (x', y', z')$, on a :

$$\begin{aligned} g\,(x, y, z) &= (x', y', z') \Leftrightarrow A_m . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y+mz \\ x+my+z \\ mx+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $g\,(x, y, z) = (x + y + mz, x + my + z, mx + y + z)$. **(1 pt)**

b- Soit $C = (v_1 = (2, 0, 1)\,, \quad v_2 = (0, -1, 1) \quad, v_3 = (1, 1, 0))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de B vers C.

Solution : $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(0.5 pt)**

c- Déterminer P^{-1}.

Solution : Il suffira d'exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction de v_1, v_2 et v_3. On obtient après calculs : $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **(1.5 pt)**

d- En déduire $A'_m = M_C(g)$.
Solution : On a : $A'_m = P^{-1}.A_m.P$, i.e. :

$$A'_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m-2 & 2m-2 & -2m \\ 3m+3 & 2-2m & 3m+1 \\ 3m+6 & 3-3m & 4m+2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Problème : (13 pts)

On considère dans $M_2(\mathbb{R})$ les matrices suivantes : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I- Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq I_2$ et $A \neq N$.

1/- Soit l'application f définie comme suit : $\begin{array}{rcl} f : M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) = (A \times M) - (M \times A) \end{array}$

Montrer que f est un endomorphisme d'espaces vectoriels.
Solution : Soient $M_1, M_2 \in M_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha M_1 + M_2) &= [A \times (\alpha M_1 + M_2)] - [(\alpha M_1 + M_2) \times A] \\ &= [(A \times (\alpha M_1)) + (A \times M_2)] - [((\alpha M_1) \times A) + (M_2 \times A)] \\ &= [(A \times (\alpha M_1)) - ((\alpha M_1) \times A)] + [(A \times M_2) - (M_2 \times A)] \\ &= \alpha [(A \times M_1) - (M_1 \times A)] + [(A \times M_2) - (M_2 \times A)] \\ &= \alpha f(M_1) + f(M_2). \qquad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

2/ Déterminer $\ker f$.
Solution : On a :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ f(M) = 0\} \\ &= \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ (A \times M) - (M \times A)\} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ A \times M = M \times A\} \ \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

Remarque : $\ker f$ est l'ensemble de toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

3/ Montrer que $(\ker f, +, \times)$ est un anneau unitaire ($+$ et $\times$ désignent, respectivement, la somme et le produit des matrices).

Solution : Pour montrer que $(\ker f, +, \times)$ est un anneau unitaire, on peut montrer que $(\ker f, +, \times)$ est un sous-anneau unitaire de l'anneau unitaire $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$, ainsi :

$$(\ker f, +, \times) \text{ est un anneau unitaire} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{1/} \ (\ker f, +) \text{ est un groupe abélien.} \\ \textbf{2/} \ \times \text{ est stable dans } \ker f. \\ \textbf{3/} \text{ L'unité } I_2 \text{ est dans } \ker f. \end{cases} \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

1/ $(\ker f, +)$ est un groupe abélien, en effet $\ker f$ est s.e.v. de $M_2(\mathbb{R})$. **(0.5 pt)**
2/ Soient $M_1, M_2 \in \ker f$, montrons que $M_1 \times M_2 \in \ker f$.

$$\begin{aligned} f(M_1 \times M_2) &= (A \times M_1 \times M_2) - (M_1 \times M_2 \times A) \\ &= (M_1 \times A \times M_2) - (M_1 \times M_2 \times A) \text{ car } M_1 \in \ker f, \\ &= (M_1 \times M_2 \times A) - (M_1 \times M_2 \times A) \text{ car } M_2 \in \ker f, \\ &= 0 \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

2/ La matrice I_2 commute avec toutes les matrices et en particulier avec la matrice A donc $I_2 \in \ker f$. **(0.5 pt)**

II- Pour toute la suite, on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1/- Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a/ Déterminer c et d en fonction de a et b pour que $f(M) = 0$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} f(M) &= 0 \Leftrightarrow (A \times M) - (M \times A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $c = 0$ et $d = a + b$. **(1 pt)**

b/ En déduire une base de $\ker f$ ainsi que le rang de f.

Solution : En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ f(M) = 0\} \\ &= \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R}\right\}. \quad \textbf{(0.5 pt)} \end{aligned}$$

Mais : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i.e. $\ker f$ est engendré par les deux matrices :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et comme I_2 et A sont linéairement indépendants, alors (I_2, A) forme une base de $\ker f$. **(1 pt)**

Pour déterminer rgf, il suffira d'utiliser le théoème du rang. En effet : $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ et $\dim \ker f = 2$ entrainent $rgf = 2$. **(1 pt)**

c/ Montrer que tout élément K de $\ker f$ s'écrit : $K^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$.

Solution : Soit $K \in \ker f$, donc : $K = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R}$. D'où :

$$K^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)^2 - a^2 \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

d/ Déterminer, par récurrence, K^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : En calculant K^3, on trouve : $K^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^3 \end{pmatrix}$

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^3 - a^3 \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$. **(1 pt)**

2/- On munit $M_2(\mathbb{R})$ de la base :

$$B_C = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a/ Déterminer la matrice $L = M_{B_C}(f)$.

Solution : Les colonnes de $L = M_{B_C}(f)$ sont : $f(E_{11})$, $f(E_{12})$, $f(E_{21})$ et $f(E_{22})$. On commence donc par calculer :

$$f(E_{11}) = (A \times E_{11}) - (E_{11} \times A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{12}) = (A \times E_{12}) - (E_{12} \times A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{21}) = (A \times E_{21}) - (E_{21} \times A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{22}) = (A \times E_{22}) - (E_{22} \times A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, et en écrivant les quatres matrices colonnes $f(E_{11})$, $f(E_{12})$, $f(E_{21})$ et $f(E_{22})$ de L dans la base canonique B_C, on obtient :

$$L = M_{B_C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2.5 pt)}$$

b/ En échelonnant la matrice L, déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Solution : Par exemple, si on remplace $f(E_{11})$ par $f(E_{11}) +\ f(E_{22})$ et $f(E_{12})$ par $f(E_{12}) +\ f(E_{22})$, on obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

D'où : $\left(E_{11} + E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{12} + E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\ker f$. **(0.5 pt)**

Et $\left(f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\operatorname{Im} f$. **(0.5 pt)**

c/ Compléter la base de $\ker f$ en une base de $M_2(\mathbb{R})$.

Solution : La base de $\ker f$ sous présente dans la base canonique B_C comme suit : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour avoir une base de $M_2(\mathbb{R})$, on peut rajouter les deux matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(0.5 pt)**