Documents interdits (la table des TL est au verso)

Exercice1 :(6 points)

Pour $x>0$, on pose $F(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\log t}{t^2+x}dt$, où $f(t,x)=\frac{\log t}{t^2+x}$.

1) Etudier la convergence simple de F dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) Etudier la continuité de F sur $[A,+\infty[$ $A>0$, puis conclure.

3) Etudier la dérivabilité de F dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice2 :(5,5 points)

Calculer:

1) $\mathcal{L}\left((t+2)\,e^t+e^{-t}\cos(2t)\right).$

2) $\int\limits_0^{+\infty} te^{-3t}\sin t dt.$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3x+16}{x^2-x-6}+\frac{1}{x\,(x^2+4)}\right)$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)$

Exercice3 :(5,5 points)

Pour $\alpha>0$, on pose $f(t)=e^{-\alpha|t|}$.

1) Calculer $\mathcal{F}f$

2) A l'aide de la formule d'inversion de Fourier, calculer la valeur de $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{x^2+\alpha^2}dx$.

3) Trouver b et c tels que: $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{b}{(x^2+1)}+\frac{c}{(x^2+4)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation différentielle $-y"+y=e^{-2|t|}$ où y est une fonction telle que:

$*y,\ y',\ y"\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et y continue sur $\mathbb{R}$.

et $*\,y$ est dérivable à droite et à gauche de tout point de $\mathbb{R}$.

<u>**Rappel:**</u> L'opérateur $\mathcal{F}$ est linéaire et $\mathcal{F}g'(x)=ix\mathcal{F}g(x)$ pour $g,\ g'\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice4 :(3 points)

I- Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, justifier vos réponses.

Pour toute partie non vide D de $\mathbb{R}^2$; on a

a) Si $A\notin D$ alors A est un point extérieur à D.

b) Si A est un point intérieur à D alors A est un point d'accumulation de D.

c) Si $A\in fr(D)$ alors A est un point d'accumulation de D.

II- On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|$ définie par : $\|(x,y)\|=\max(|x|,|x-y|)$.

Représenter graphiquement la boule ouverte $B(0_{\mathbb{R}^2},1)$.