Ecole nationale Supérieure d'Informatique

Juin 2016

2CPI

Concours 15/16
Partie Analyse

Exercice 1 : (3,5 pts)

On pose

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$$

Trouver les extrémums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : (3,5 pts)

Soit P un polynôme non nul.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

2. On prend $P(n) = 1 + n + n^2$.

   - Trouver le domaine de convergence D de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n$.
   - Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n$ sur D.

Corrigé

Exercice 1

f étant C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, calculons ses points critiques:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 3(x-y)^2 .... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 3(x-y)^2 ..... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x^3 - 3(x-y)^2 = 0 ... (1) \\ 4y^3 + 3(x-y)^2 = 0 ... (2) \end{array} \right.$$

$(1) + (2)$ donne $4\left(x^3 + y^3\right) = 0 \Longleftrightarrow y^3 = -x^3 \Longleftrightarrow y = -x ... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,5}}$
On remplace dans (1) : $4x^3 - 3(2x)^2 = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x-3) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = 3$ on otient alors $M_1 = (0,0) ... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$ et $M_2 = (3,-3) ... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$ sont des points critiques de f.

La nature des points:
Le point M_1: utilisons la définition:
comme $f(0,0) = 0$, voyons le signe de : $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3 ... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$
On a $f(x,0) = x^4 - x^3$ du signe de $\left(-x^3\right)$ qui change de signe ... $\leftarrow \boxed{\mathbf{0,5}}$, ce seul chemin suffit (on peut également choisir deux chemins qui donnent des signes différents $\boxed{\mathbf{0,25}}$ pour chaque chemin)
alors f n'admet pas en $(M_1, f(M_1))$ un extrémum local.... $\leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$

Le point M_2: utilisons la méthode du discriminant
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 6(x-y) .... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6(x-y) .... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 6(x-y) .... \leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$..
$r = 72;\ s = 36;\ t = 72$ donc $\Delta = rt - s^2 = 72^2 - 36^2 > 0$
et comme $r > 0$ alors f admet en $(M_2, f(M_2))$ un minimum local.... $\leftarrow \boxed{\mathbf{0,25}}$

Exercice 2

P étant un polynôme non nul alors $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que le degré de P est égal à r;

Posons

$$P(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + ... + a_0 \quad \text{où } a_r, a_{r-1}, ..., a_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a_r \neq 0.$$

1. (a) Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n$:

On a:

$$P(n) = a_r n^r + a_{r-1}n^{r-1} + ... + a_0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_r (n+1)^r + a_{r-1}(n+1)^{r-1} + ... + a_0}{a_r n^r + a_{r-1}n^{r-1} + ... + a_0} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^r \left(a_r + a_{r-1}(n+1)^{-1} + ... + a_0 (n+1)^{-r}\right)}{n^r \left(a_r + a_{r-1}n^{-1} + ... + a_0 n^{-r}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^r}{n^r} \left(\frac{a_r + a_{r-1}(n+1)^{-1} + ... + a_0 (n+1)^{-r}}{a_r + a_{r-1}n^{-1} + ... + a_0 n^{-r}} \right)
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^r}{n^r} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^r = 1$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_r + a_{r-1}(n+1)^{-1} + ... + a_0 (n+1)^{-r}}{a_r + a_{r-1}n^{-1} + ... + a_0 n^{-r}} = \frac{a_r}{a_r} = 1$ car $a_r \neq 0$

donc . $\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{P(n+1)}{P(n)}\right| = 1 \Longrightarrow R_1 = 1.$

<u>Autre méthode</u>:

Comme tout polynome est équivalent à son monôme de plus haut degré au voisinge de $+\infty$ alors

$$P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_r n^r \quad \text{et} \quad P(n+1) \underset{+\infty}{\sim} a_r (n+1)^r$$

donc

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_r (n+1)^r}{a_r n^r} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^r}{n^r} = 1$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{P(n+1)}{P(n)} \right| = 1 \Longrightarrow R_1 = 1.$$

(b) Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\frac{1}{n}\right) x^n$:

On a:

$$P\left(\frac{1}{n}\right) = a_r \frac{1}{n^r} + a_{r-1} \frac{1}{n^{r-1}} + ... + a_0.$$

Notons par " s " la valuation du polynome P.

On rappelle que:

$$s = Min \{i \in \{0, 1, ..., r\} / a_i \neq 0\}$$

Et on écrit

$$P(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + ... + a_s x^s, \quad a_s \neq 0$$

On a:
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{P\left(\frac{1}{n+1}\right)}{P\left(\frac{1}{n}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_r (n+1)^{-r} + a_{r-1} (n+1)^{-r+1} + ... + a_s (n+1)^{-s}}{a_r n^{-r} + a_{r-1} n^{-r+1} + ... + a_s (n)^{-s}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{-s} \left(a_s + a_{s-1} (n+1)^{-1} + ... + a_s (n+1)^{-r+s}\right)}{n^{-s} \left(a_s + a_{s-1} n^{-1} + ... + a_s n^{-r+s}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} \left(\frac{a_s + a_{s-1} (n+1)^{-1} + ... + a_s (n+1)^{-r+s}}{a_s + a_{s-1} n^{-1} + ... + a_s n^{-r+s}} \right)
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-s} = 1$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_s + a_{s-1} (n+1)^{-1} + ... + a_s (n+1)^{-r+s}}{a_s + a_{s-1} n^{-1} + ... + a_s n^{-r+s}} = \frac{a_s}{a_s} = 1 \quad \text{car} \quad a_s \neq 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P\left(\frac{1}{n+1}\right)}{P\left(\frac{1}{n}\right)}=1\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{P\left(\frac{1}{n+1}\right)}{P\left(\frac{1}{n}\right)}\right|=1\Longrightarrow R_2=1.$$

<u>Autre méthode</u>:

Comme tout polynome est équivalent à son monôme de plus bas degré au voisinge de 0 alors

$$P\left(\frac{1}{n}\right)\underset{0}{\sim}a_sn^{-s}\ \text{ et }\ P\left(\frac{1}{n+1}\right)\underset{0}{\sim}a_s\left(n+1\right)^{-s}.$$

donc

$$\frac{P\left(\frac{1}{n+1}\right)}{P\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s$$

or

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=1\ \text{ d'où }\ \lim_{n\to+\infty}\frac{P\left(\frac{1}{n+1}\right)}{P\left(\frac{1}{n}\right)}=1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{P\left(\frac{1}{n+1}\right)}{P\left(\frac{1}{n}\right)}\right|=1\Longrightarrow R_2=1.$$

2. On prend $P\left(n\right)=1+n+n^2$.

- Le domaine de convergence D de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(n\right)x^n$:
  P étant un polynome non nul alors d'après la question précedente le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}P\left(n\right)x^n$ est égal à 1 donc

$$\left]-1,1\right[\subset D\subset\left[-1,1\right]$$

- Nature de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n$ en $x = 1$:

  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)$ or $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + n + n^2\right) = +\infty \neq 0$

  donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) 1^n$ diverge.

- Nature de $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n$ en $x = -1$:

  $\lim_{n\to+\infty} |P(n)(-1)^n| = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + n + n^2\right) = +\infty \neq 0$

  donc $\lim_{n\to+\infty} P(n)(-1)^n \neq 0$ d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)(-1)^n$ diverge

  Conclusion:

$$D =]-1, 1[\,.$$

- Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n$ sur D :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + n + n^2\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \quad \forall x \in]-1, 1[
\end{aligned}$$

car les trois séries sont convergentes sur $]-1, 1[$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' \\
&= x \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= \frac{x}{(x-1)^2} . \forall x \in]-1, 1[\,.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n\right)' \\
&= x\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)' \\
&= x\left(\frac{x-1+1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= x\left(\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{(x-1)^3}\right) \quad \forall x\in\,]-1,1[\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)\, x^n &= \frac{1}{1-x}+\frac{x}{(x-1)^2}+x\left(\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{(x-1)^3}\right) \\
&= \frac{1}{1-x}+\frac{-2x}{(x-1)^3} \qquad \forall x\in\,]-1,1[\,.
\end{aligned}
$$