E.S.I. 2CP ALG3 Examen final 27 mars 2021 Durée : 2H

L'usage du Mobile et de la Calculatrice est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1: (12 pts)

Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$est définie par :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1+\alpha & 1 \\ -\alpha & -\alpha & -1 \\ \alpha & \alpha-1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1/ Montrer que $P_{A_\alpha}(X) = -(X-1)^2(X+1)$.

2/ Montrer que : A_α est diagonalisable ssi $\alpha = 0$.

3/ On pose $\alpha = 0$.

a/ Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}A_0P$.

b/ En déduire, sans faire de calculs, A_0^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (Indication: Distinguer $n = 2k$ et $n = 2k+1$).

4/ On pose $\alpha \neq 0$.

a/ Calculer A_α^2.

b/ Dire pourquoi A_α est inversible puis, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer A_α^{-1} en fonction de A_α et I_3.

c/ Calculer A_α^{-1}.

d/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, A_α^n en fonction de A_α et I_3.

e/ Calculer A_α^n. (Indication: Distinguer $n = 2k$ et $n = 2k+1$).

Exercice 2 : (8 pts)

Soit, dans $\mathbb{R}$, le système $(S_{\alpha,\beta})$ d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \alpha x - y + \alpha z = 0 \\ 2x + \phantom{y+{}} z = \beta \\ x + 3y - z = 0 \\ x - y + \alpha z = \beta \end{cases}, \qquad (S_{\alpha,\beta})$$

1/ Déterminer suivant les paramètres réels α et β le rang du système $(S_{\alpha,\beta})$.

2/ Résoudre suivant les paramètres réels α et β le système $(S_{\alpha,\beta})$. (Indication : Utiliser le théorème de Fontené-Rouché).

Bon courage