L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

Exercice 1 : (7.5 pts)
Soit $\varphi \in End(\mathbb{R}_2[X])$ défini par :

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ & P = \alpha + \beta X + \lambda X^2 & \mapsto \varphi(P) = (\alpha - \beta) + (-\alpha + \beta) X + 2\lambda X^2. \end{array}$$

1- Déterminer $M = M_C(\varphi)$ où $C = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2- Soit C' une base de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $C' = (P_1 = 1 + X,\ P_2 = X^2,\ P_3 = -1 + X)$.
Déterminer la matrice de passage P de C vers C'.
3- En Déduire :
  a/ $N = M_{C'}(\varphi)$.
  b/ La matrice M^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : (5 pts)
Soit u l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_2[X]$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, par :

$$u(P) = (2X + 1) P - \left(X^2 - 1\right) P', \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée de } P.$$

et soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et $M = M_B(u)$.
1- Montrer que $u \in End(\mathbb{R}_2[X])$.
2- Déterminer les valeurs propres de M.
3- Déduire que M est diagonalisable. Justifier.
4- Déterminer une matrice S pour que $N = S^{-1}.M.S$ soit diagonale.

Exercice 3 : (7.5 pts)
Soit, dans $\mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha\beta z & = & \alpha \\ \beta x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^2\beta z & = & \alpha^2\beta \end{array} \right. \qquad (S_{\alpha,\beta})$$

où α et β sont des paramètres réels .
1- Calculer le déterminant de la matrice du système $(S_{\alpha,\beta})$.
2- Pour quelles valeurs de α et β le système $(S_{\alpha,\beta})$ est de Cramer. Dans ce cas, résoudre $(S_{\alpha,\beta})$.
3- Résoudre $(S_{\alpha,\beta})$ dans le cas où il n'est pas de Cramer.

Bon Courage