Examen 2: Corrigé

Exercice 1. ⟦ ***5 pts*** ⟧

Soient les formules A, B, C *et* F *où*

- $F = \exists x\Big(\forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y Q(y,x)\Big).$

- $A = \exists x \forall y (P(x,y) \Rightarrow R(y, f(x)))$
- $B = \forall y \exists x (R(x,y) \Rightarrow P(y,a))$
- $C = \exists x \forall y \forall z \exists w (\neg R(x,y) \vee Q(z,w,y) \wedge P(z,y))$

1. *Donner une forme prénexe de la formule* F.
2. *Donner la signature associée à la formule* $A \wedge B \wedge C$.
3. *Donner la forme clausale de l'ensemble* $\{A, B, C\}$.

Réponse.

1.

$$\begin{aligned}
F &\equiv \exists x\Big((\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y Q(y,x)) \wedge (\forall y Q(y,x) \Rightarrow \forall y P(x,y))\Big)\\
&\equiv \exists x\Big((\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall z Q(z,x)) \wedge (\forall w Q(w,x) \Rightarrow \forall s P(x,s))\Big)\\
&\equiv \exists x\Big(\exists y \forall z\Big(P(x,y) \Rightarrow Q(z,x)\Big) \wedge \exists w \forall s\Big(Q(w,x) \Rightarrow P(x,s)\Big)\Big)\\
&\equiv \exists x \exists y \exists w \forall s \forall z\Big(\Big(P(x,y) \Rightarrow Q(z,x)\Big) \wedge \Big(Q(w,x) \Rightarrow P(x,s)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

1,5 pt

2

$$\Sigma = \Big\{a^{f_0}, f^{f_1}, P^{r_2}, Q^{r_3}, R^{r_2}\Big\}.$$

1 pt

3 Les clauses

$$\begin{aligned}
C_1 &= \neg P(b,y) \vee R(y, f(b))\\
C_2 &= \neg R(g(y),y) \vee P(y,a)\\
C_3 &= \neg R(c,y) \vee Q(z, h(z,y), y)\\
C_4 &= \neg R(c,y) \vee P(z,y)
\end{aligned}$$

2,5 pt

Exercice **2**. ⟦ *4 pts* ⟧

Soient les formules suivantes

$\alpha = \exists z P(z)$

$\beta = \exists x P(x) \Rightarrow \forall y R(y,b)$

$\gamma = \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

$\delta = \exists x R(x,a)$

Montrer par résolution que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \models \delta$

Réponse.

1.

$\{\alpha, \beta, \gamma\} \models \delta$ ssi l'ensemble des clauses obtenu à partir de $\{\alpha, \beta, \gamma, \neg\delta\}$ est inconsistant.

Mise sous forme prénexe

$\alpha_p = \exists z P(z)$

$\beta_p = \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow R(y,b))$

$\gamma_p = \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

$(\neg\delta)_p = \forall x \neg R(x,a)$

Mise sous forme de Skolem

$\alpha_s = P(c)$

$\beta_s = \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow R(y,b))$

$\gamma_s = \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

$(\neg\delta)_s = \forall x \neg R(x,a)$

Mise sous forme clausale **2 pt**

$C_1 :\ P(c)$

$C_2 :\ \neg P(x) \vee R(y,b)$

$C_3 :\ \neg R(x,y) \vee R(y,x))$

$C_4 :\ \neg R(x,a)$

Renommer les variables

$C_1 :\ P(c)$

$C_2 :\ \neg P(x_2) \vee R(y_2,b)$

$C_3 :\ \neg R(x_3,y_3) \vee R(y_3,x_3))$

$C_4 :\ \neg R(x_4,a)$

Résolution **2 pt**

$C_1 : P(c)$		
$C_2 : \neg P(x_2) \vee R(y_2,b)$		
$C_3 : \neg R(x_3,y_3) \vee R(y_3,x_3))$		
$C_4 : \neg R(x_4,a)$		
$C_5 : R(y_2,b)$	Res(C_1,C_2)	MGU $= [c/x_2]$
$C_6 : R(b,y_2)$	Res(C_5,C_3)	MGU $= [y_2/x_3, b/y_3]$
$C_7 : \perp$	Res(C_4,C_6)	MGU $= [b/x_4, a/y_2]$

Exercice 3. ⟦ ***5 pts*** ⟧

Étudier la satisfaisabilité, en utilisant la résolution, des ensembles de clauses suivants.

1

R

$$S_1 = \{\neg P(b, f(y)) \ , \ R(x) \vee P(x, f(y)) \vee Q(y) \ , \ \neg R(x) \vee P(x, f(a)) \ , \ \neg Q(a) \vee P(x, f(x))\}$$

2 R

$$S_2 = \{Q(x, f(x)), \neg Q(f(x), x) \vee P(x), \neg P(b) \vee \neg Q(y, z)\}$$

3 R

$$S_3 = \{\neg P(x) \vee P(f(x)), P(y)\}$$

Réponse.

1.

Renommer les variables

$C_1 : \neg P(b, f(y_1))$

$C_2 : R(x_2) \vee P(x_2, f(y_2)) \vee Q(y_2)$

$C_3 : \neg R(x_3) \vee P(x_3, f(a))$

$C_4 : \neg Q(a) \vee P(x_4, f(x_4))$

Résolution **3 pt**

$C_5 : \neg Q(a)$	$\mathbf{RES}(C_1, C_4)$	$\mathbf{MGU}[b/x_4, b/y_1]$
$C_6 : \neg R(b)$	$\mathbf{RES}(C_1, C_3)$	$\mathbf{MGU}[b/x_3, a/y_1]$
$C_7 : P(b, f(y_2)) \vee Q(y_2)$	$\mathbf{RES}(C_2, C_6)$	$\mathbf{MGU}[b/x_2]$
$C_8 : Q(y_1)$	$\mathbf{RES}(C_1, C_7)$	$\mathbf{MGU}[y_1/y_2]$
$C_9 : \perp$	$\mathbf{RES}(C_8, C_5)$	$\mathbf{MGU}[a/y_1]$

2

$C_1 : Q(x_1, f(x_1))$

$C_2 : \neg Q(f(x_2), x_2) \vee P(x_2)$

$C_3 : \neg P(b) \vee \neg Q(y_3, z_3)$

$C_4 : \neg P(b)\mathbf{RES}(C_1, C_3)$ $\mathbf{MGU}[x_1/y_3, x_1/z_3]$

$C_5 : \neg Q(f(b), b) \vee \neg Q(y_3, z_3)\mathbf{RES}(C_2, C_3)$ $\mathbf{MGU}[b/x_2]$

$C_6 : \neg Q(f(b), b)\mathbf{RES}(C_1, C_5)$ $\mathbf{MGU}[x_1/y_3, f(x_1)/z_3]$

Par le théorème de complétude de la méthode de résolution (Résolution+Factorisation+ Renommage+Unification) on conclut que l'ensemble S_2 est satisfaisable.

3.

$C_1 : \neg P(x) \vee P(f(x))$		
$C_2 : P(y)$		
$C_3 : P(f(y))$	$\mathbf{RES}(C_1, C_2)$	$\mathbf{MGU}[y/x]$
$C_4 : P(f(f(y)))$	$\mathbf{RES}(C_1, C_3)$	$\mathbf{MGU}[f(y)/x]$
$C_5 : P(f(f(f(y))))$	$\mathbf{RES}(C_1, C_4)$	$\mathbf{MGU}[f(f(y))/x]$
$C_6 : \ldots$		

La méthode de résolution échoue dans cet exemple pour nous donner la réponse. On voit que la résolution ne s'arrêtera jamais. Voir le cours 12.

Exercice **4**. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *Soit l'ensemble des clauses suivant :*

$$S = \{\neg P(b, f(y)), R(x) \vee P(x, f(y)) \vee Q(y), \neg R(x) \vee P(x, f(a)), \neg Q(a) \vee P(x, f(x))\}$$

1. *Donner* H_0 *et* H_1.
2. *Définir par induction* H_∞ *de* S.
3. *Vérifier avec un arbre sémantique que* S *est insatisfaisable.*
4. *Donner un sous-ensemble non satisfiable d'instances de base de* S.

Réponse.

1. $H_0 = \{a, b\}$. $H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$. **0.5 pt.**

2. **1** $a \in H_\infty$. **2** $b \in H_\infty$. **3.** Si $t \in H_\infty$ alors $f(t) \in H_\infty$. **4.** H_∞ est le plus petit ensemble vérifiant 1,2, et 3. **0.5 pt.**

3. Les clauses :

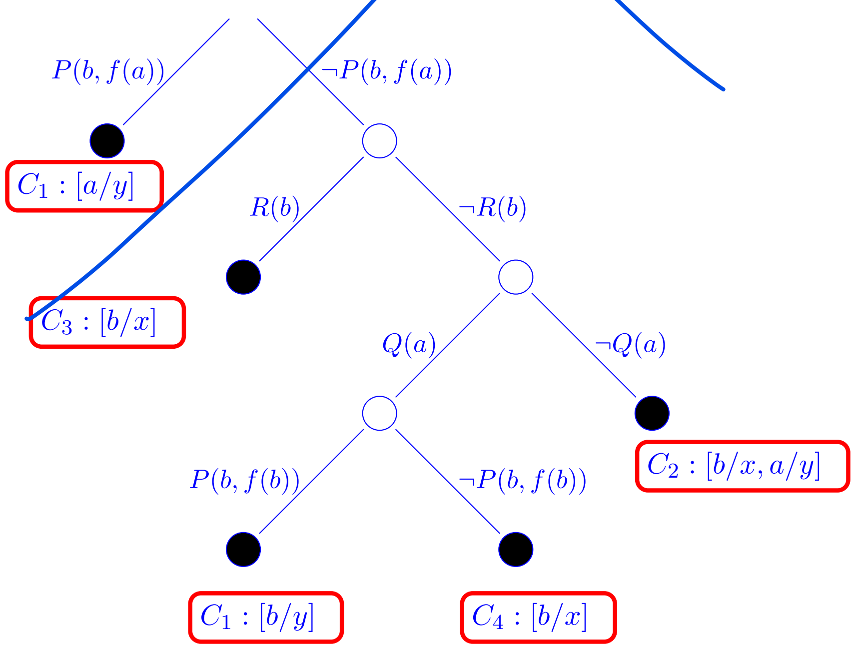
$C_1 :\ \neg P(b, f(y))$

$C_2 :\ R(x) \vee P(x, f(y)) \vee Q(y)$

$C_3 :\ \neg R(x) \vee P(x, f(a))$

$C_4 :\ \neg Q(a) \vee P(x, f(x))$

Arbre sémantique **2 pts**



4.

$S_B = \{\neg P(b, f(a)), \neg P(b, f(b)), R(b) \vee P(b, f(a)) \vee Q(a), \neg R(b) \vee P(b, f(a)), \neg Q(a) \vee P(b, f(b))\}$ **1 pt**

Exercice **5**. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *On se situe dans le domaine des matrices. On définit les prédicats et fonctions suivantes:*

- $I(x)$: *x est inversible.* • $f(x, y)$: *la matrice produit des deux matrice.*
- $g(x)$: *la transposée de la matrice x.* • $O(x)$: *x est orthogonale.*
- *d: La matrice identité.* • $=$: *L'égalité.*

Formalisez ses phrases dans le langage de la logique des prédicats.

1. *Certaines matrices ne sont pas inversibles.*

$$\boxed{\exists x \neg I(x)}\ \boxed{\textit{1 pt}}$$

2. *Une matrice est inversible s'il existe une matrice telles que leur produit est égal à la matrice identité.*

$$\boxed{\forall x\, (\exists y (f(x, y) = d) \Rightarrow I(x))}\ \boxed{\textit{1pt}}$$

3. *La transposée d'une matrice inversible est inversible.*

$$\boxed{\forall x\, (I(x) \Rightarrow I(g(x)))}\ \boxed{\textit{1 pt}}$$

4. *Une matrice est orthogonale ssi le produit avec sa matrice transposée est égal à la matrice identité.*

$$\boxed{\forall x\, (O(x) \Leftrightarrow f(x, g(x)) = d)}\ \boxed{\textit{1 pt}}$$

Bon courage — **Le barème est donné à titre indicatif**