E.S.I. 11 Décembre 2010 **Devoir Surveillé** **2CPA** Durée : 2H

Exercice 1 : (4.5pts)
Soit j la racine de $X^2 + X + 1 = 0$. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

1/ Calculer $\det(P)$, puis déduire que P est inversible.
2/ Déterminer P^{-1} par la méthode des déterminants.
(On rappelle que j est de partie imaginaire positive et vérifie : $j^3 = 1, \bar{j} = j^2$).

Exercice 2 : (3pts + 3pts+1.5pt)
1/ Montrer que : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

2/ Soient A, B deux matrices semblables d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
a- $\det(A) = \det(B)$.
b- $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et I la matrice identité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
3/ Soit B une base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\det_B(B) = 1$.

Exercice 3 : (8pts)
Soit la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Pour quelles valeurs de m et n le système :

$$A_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ n \end{pmatrix}, \ m, n \in \mathbb{R},$$

i- admet une unique solution. Résoudre dans ce cas.
ii- admet une infinité de solutions. Résoudre dans ce cas.
iii- n'admet pas de solutions.