

Examen final en ANA3.

Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.

Exercice 1: (4,5 points)

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+xt} \cdot \exp(-t^2) dt$.

- 1) Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 2: (7,5 points)

Soit la fonction vectorielle $f = (f_1, f_2)$ où:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^3 y}{x^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^4 - y^2)^2}{x^6} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f_1 .
- 3) Etudier la différentiabilité de f_1 en $(0, 0)$.
- 4) f est-elle différentiable en $(0, 0)$? Justifier.

Exercice 3: (3,5 points)

Soit $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Représenter le graphe de f .
- 2) Calculer $\mathcal{F}f$.

- 3) Utiliser le TIF sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ puis donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \sin(xt) \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right) dx$.

Exercice 4: (4,5 points)

On pose $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$.

- 1) Trouver les extrémums de f sur \mathbb{R}^2 .
- 2) Choisir l'un des points critiques et lui faire une deuxième méthode pour le test.
- 3) Sachant que f admet une valeur maximale sur le disque ouvert de centre $(0, 0)$ et de rayon 3 trouver cette valeur.

Bon courage.