Examen N°2

Exercice 1. $\boxed{\text{8 points}}$ *Soit m un nombre réel. On considère la matrice suivante dans $\mathbb{R}^3$*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour quelles valeurs du réel m, A est diagonalisable ?*
3. *On pose $m = 2$, calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Réponse :

1. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P_A}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(m-\lambda). \quad \boxed{\text{1 point}} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont $1, 2$ et m et sont dans $\mathbb{R}$, ce qui implique que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, A admet **trois** valeurs propres **distinctes** et par conséquent elle est diagonalisable. $\boxed{\text{1 point}}$

Si $m = 1$, A admet une valeur propre double $\lambda = 1$ et une valeur propre simple $\lambda = 2$. A est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. On a

$$E_{\lambda=1} = Ker(\mathrm{A} - \mathrm{I}) = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ (\mathrm{A} - \mathrm{I})X = 0\}.$$

Rappelons qu'on a $m = 1$, donc

$$(\mathrm{A} - \mathrm{I})X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= x \\ y &= x \\ z &= 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $E_{\lambda=1} = Ker(\mathrm{A} - \mathrm{I})$, l'espace est de dimension $1 \neq 2$. Et par suite A n'est pas diagonalisable. **0.5 point**

Si $m = 2$, A admet une valeur propre double $\lambda = 2$ et une valeur propre simple $\lambda = 1$. Cherchons la dimension de

$$E_{\lambda=2} = Ker(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}) = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ (\mathrm{A} - 2\mathrm{I})X = 0\}.$$

Pour $m = 2$, On a

$$(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})X = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x + z & = & 0 \\ -x + z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & x \end{array} \right.$$ **1 point**

Les vecteurs $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_{\lambda=2} = Ker(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})$ et par conséquent l'espace propre associé à $\lambda = 2$ est de dimension 2, on déduit que A est diagonalisable pour $m = 2$.

0.5 point **Conclusion :** A est diagonalisable pour $m \in \mathbb{R} - \{1\}$.

3. Pour $m = 2$, A est diagonalisable. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1 (attention, on travaille cette fois avec $m = 2$), on a, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(\mathrm{A} - \mathrm{I})X = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & x \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$ **0.5 point**

Le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $E_{\lambda=1} = Ker(\mathrm{A} - \mathrm{I})$. Alors (U, V, W) est une base propre.

0.5 point

Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base (U, V, W). On a donc

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ **0.5 point**

De $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$, on déduit que $\mathrm{A}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$ (même pour k negative car A est inversible).

On a

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\textbf{0.5 point}}$$

et puisque D est diagonale,

$$\mathrm{D}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}. \quad \boxed{\textbf{0.5 point}}$$

Le calcul donne finalement

$$\mathrm{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}. \quad \boxed{\textbf{0.5 point}}$$

Exercice 2. $\boxed{\textbf{6 points}}$ *Soit*

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* M *n'est pas diagonalisable.*

2. *Trouver une matrice* P *inversible telle que* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. *Calculer* $\mathrm{M}^4 - 7\mathrm{M}^3 + 18\mathrm{M}^2 - 20\mathrm{M} + 9\mathrm{I}$.

Réponse :

1. Calculons le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned} \mathrm{P_M}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right] = (1-\lambda)(2-\lambda)^3. \quad \boxed{\textbf{1 point}} \end{aligned}$$

M admet une valeur propre triple $\lambda = 2$ et une valeur propre simple $\lambda = 1$. Cherchons la dimension de l'espace propre

$$E_{\lambda=2} = Ker(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}) = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R});\ (\mathrm{M} - 2\mathrm{I})X = 0\}.$$

On a

$$(\mathrm{M} - 2\mathrm{I})X = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x &=& 0 \\ -x+y-z+t &=& 0 \\ -x+y-z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& y \\ z &=& y \\ t &=& 0 \end{array} \right. \quad \boxed{\textbf{1 point}}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $E_{\lambda=2} = Ker(\mathrm{M} - 2\mathrm{I})$, donc l'espace propre associé à $\lambda = 2$ est de dimension $1 \neq 3$, ce qui montre que M n'est pas diagonalisable. **0.5 point**

2. Trouvons une base (U_1, U_2, U_3, U_4) telle que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M}U_1 &=& U_1 \\ \mathrm{M}U_2 &=& 2U_2 \\ \mathrm{M}U_3 &=& U_2 + 2U_3 \\ \mathrm{M}U_4 &=& U_3 + 2U_4 \end{array}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on a

$$\mathrm{M}X = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ -x+3y-z+t &=& y \\ -x+y+z &=& z \\ 2t &=& t \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& x \\ t &=& 0 \end{array} \right.$$

Prenons $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a donc $\mathrm{M}U_1 = U_1$ (U_1 est un vecteur propre associé à $\lambda = 1$). **0.5 point**

Remarquons que

$$U_3 = (\mathrm{M} - 2\mathrm{I})U_4,$$

$$U_2 = (\mathrm{M} - 2\mathrm{I})U_3 = (\mathrm{M} - 2\mathrm{I})^2 U_4, \quad \boxed{\textbf{0.5 point}}$$

$$(\mathrm{M} - 2\mathrm{I})U_2 = (\mathrm{M} - 2\mathrm{I})^3 U_4 = 0.$$

Cherchons un vecteur V telle que $(\mathrm{M}-2\mathrm{I})^3 V = 0$ et $(\mathrm{M}-2\mathrm{I})^2 V \neq 0$. On a

$$(\mathrm{M}-2\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ (\mathrm{M}-2\mathrm{I})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ (\mathrm{M}-2\mathrm{I})^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ **0.5 point**

Si on prend $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $(\mathrm{M}-2\mathrm{I})^3 V = 0$ et $(\mathrm{M}-2\mathrm{I})^2 V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. On déduit que la base cherchée est **0.5 point**

$$\left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = (\mathrm{M}-2\mathrm{I})^2 V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_3 = (\mathrm{M}-2\mathrm{I}) V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_4 = V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **0.5 point**

on a

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On a $\mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = (\mathrm{I}-\mathrm{M})(2\mathrm{I}-\mathrm{M})^3 = \mathrm{M}^4 - 7\mathrm{M}^3 + 18\mathrm{M}^2 - 20\mathrm{M} + 8\mathrm{I} = 0$, donc

$$\mathrm{M}^4 - 7\mathrm{M}^3 + 18\mathrm{M}^2 - 20\mathrm{M} + 9\mathrm{I} = \mathrm{I}$$ **1 point**

Exercice 3. **6 points** *Soit la forme bilinéaire f dans $\mathbb{R}^3$ de matrice associée*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *La forme bilinéaire f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *En partant des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et en utilisant le procédé de SCHMIDT, construire une base $\mathcal{B}_f = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ qui soit f-orthogonale.*

3. *Considérons maintenant le système linéaire* $\mathrm{A}X = b$, *avec* $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

   En exprimant la solution dans la base $\mathcal{B}_f$:

$$X = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3,$$

   calculer la valeur des coefficients a_1, a_2, a_3 *et donner la solution* x *de ce système.*

Réponse :

1. On a

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda) = (2-\lambda)(2-4\lambda+\lambda^2) = (2-\lambda)(2-\sqrt{2}-\lambda)(2+\sqrt{2}-\lambda).$$

   Les valeurs propres de A, $\lambda = 2$, $\lambda = 2-\sqrt{2}$ et $\lambda = 2+\sqrt{2}$ sont strictement positives, donc f est définie positive et définie bien un produit scalaire. **1 point**

2. En utilisant le procédé de SCHMIDT, on a

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{0.5 point}} \\ u_2 &= e_2 - \frac{f(e_2,u_1)}{q(u_1)} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{1 point}} \\ u_3 &= e_3 - \frac{f(e_3,u_1)}{q(u_1)} u_1 - \frac{f(e_3,u_2)}{q(u_2)} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{1.5 point}} \end{aligned}$$

   avec

$$f(e_2,u_1) = f(e_2,e_1) = -1,\ q(u_1) = q(e_1) = 2,$$

$$f(e_3,u_1) = f(e_3,e_1) = 0,\ f(e_3,u_2) = e_3^t \mathrm{A} u_2 = -1,\ q(u_2) = u_2^t \mathrm{A} u_2 = \frac{3}{2}.$$

   La base cherchée est donc

$$\mathcal{B}_f = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

3. On a

$$u_1^t AX = u_1^t A(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3),$$

   et par conséquent

$$u_1^t b = a_1 f(u_1,u_1) + a_2 f(u_1,u_2) + a_3 f(u_1,u_3) = a_1 f(u_1,u_1).$$

Donc $a_1 = \dfrac{u_1^t b}{f(u_1,u_1)} = \dfrac{6}{2} = 3$. De la même manière on trouve $a_2 = \dfrac{u_2^t b}{f(u_2,u_2)} = \dfrac{11 \times 2}{1 \times 3} = \dfrac{22}{3}$ et $a_3 = \dfrac{u_3^t b}{f(u_3,u_3)} = \dfrac{52 \times 9}{3 \times 12} = 13$. **1.5 point**

On a $X = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{22}{3} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 13 \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$. **0.5 point**