Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (2, 3)

$\beta : (\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow Q(y))$

1. Donner une formule – que l'on la désignera par β_P - sous forme normale prenexe telle que $\beta_P \equiv \beta$.
2. Montrer que β_P est valide.

Exercice 2 (2, 1, 1, 1, 1, 2)

On considère les formules suivantes :

$\alpha_1 : \exists x\, \forall y\, (P(x) \wedge \rceil P(y))$ $\alpha_2 : \forall x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow P(y))$ $\alpha_3 : \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x)))$

1. Mettre α_1 sous forme clausale. On désignera par S l'ensemble obtenu.
2. Donner le domaine de Herbrand de S.
3. Donner l'ensemble des clauses de base de S.
4. Vérifier à l'aide d'un arbre sémantique que S est non satisfiable.
5. En déduire que α_2 est valide.
6. α_3 est-elle valide ? Si la réponse est non, donner un modèle de $\rceil \alpha_3$..

Exercice 3 (4, 2)

$\Gamma_1 : \{ P(a),\ P(a) \vee Q(b),\ \rceil P(a) \vee R(b),\ S(a) \}$

$\Gamma_2 : \{ R(b),\ S(a) \}$

$\Gamma_3 : \{ B(a),\ B(a) \vee S(a),\ \rceil B(a) \vee \rceil S(a) \}$

1. Montrer que :

$$P(a),\ P(a) \vee Q(b),\ \rceil P(a) \vee R(b),\ S(a) \models R(b) \wedge S(a)$$

2. En déduire que $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ est non satisfiable.

Exercice 4 (2)

Traduire l'énoncé suivant dans le langage des prédicats du premier ordre :

E : Etre bon, c'est penser aux autres.

N. B. Remettre, au plus : une seule double feuille et une seule intercalaire.

Bon courage

Correction

Exercice 1 (2, 3)

$\beta : (\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))$

Question 1.

Etape 1. On renomme les variables :

$(\forall u\, P(u) \rightarrow \exists v Q(v)) \rightarrow \exists x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))$

Etape 2. $(\forall u P(u) \rightarrow \exists v Q(v)) \rightarrow \exists x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow Q(y))$

$\equiv (\exists u \exists v\, (P(u) \rightarrow Q(v))) \rightarrow \exists x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow Q(y))$

$\equiv \forall u \forall v\, \big((P(u) \rightarrow Q(v)) \rightarrow \exists x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow Q(y))\big)$

$\equiv \forall u \forall v\, \exists x\, \exists y\, \big((P(u) \rightarrow Q(v)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(y))\big)$

$\beta_P : \forall u \forall v\, \exists x\, \exists y\, \big((P(u) \rightarrow Q(v)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(y))\big)$

Question 2. Montrer que β_P est valide.

Etape1.

$\neg\beta_P : \exists u\, \exists v\, \forall x \forall y\, \big((P(u) \rightarrow Q(v)) \wedge P(x) \wedge \neg Q(y)\big)$

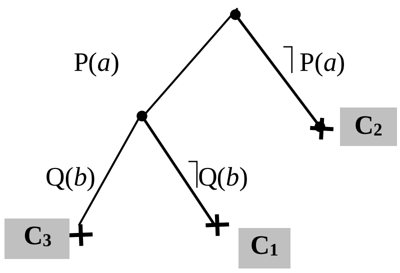
Etape2. Forme de Skolem de $\neg\beta_P$

$(\neg\beta_P)_S : \forall x \forall y\, \big((P(a) \rightarrow Q(b)) \wedge P(x) \wedge \neg Q(y)\big)$

Etape3. Mise sous forme clausale :

$S : \{ \neg P(a) \vee Q(b),\ P(x),\ \neg Q(y)\}$

Etape4. Arbre sémantique clos.



Toutes les branches sont fermées. S est donc non satisfiable. On en déduit que $(\neg\beta_P)_S$ est non satisfiable. $\neg\beta_P$ est donc non satisfiable et par conséquent $\models \beta_P$

Exercice 2 (2, 1, 1, 1, 1, 2)

On considère les formules suivantes :

$\alpha_1 : \exists x\, \forall y\, (P(x) \wedge \neg P(y))$ $\alpha_2 : \forall x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow P(y))$ $\alpha_3 : \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x)))$

1. Mise de α_1 sous forme clausale.

$(\alpha_1)_S : \forall y\, (P(a) \wedge \neg P(y))$ <u>(1point)</u>

L'ensemble S des clauses est :

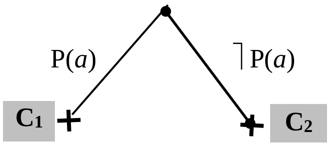
$S : \{ P(a), \neg P(y)\}$ <u>(1point)</u>

2. Domaine de Herbrand de S : H={a} <u>(1point)</u>

3. Ensemble des clauses de base de S :

$C : \{ P(a), \neg P(a)\}$ <u>(1point)</u>

4. Vérifier à l'aide d'un arbre sémantique que S est non satisfiable.



5. S non satisfiable $\Rightarrow$ α_1 non satisfiable donc $\neg\alpha_1$ valide. Par ailleurs, on constate que : $\neg\alpha_1 \equiv \alpha_2$. **(1point)**

6. α_3 n'est pas valide. $\neg\alpha_3 = \exists x(P(x)\wedge\neg P(f(x)))$. **2points**

Modèle de $\neg\alpha_3$: Interprétation M telle que :

D_M : N M(P) : 'pair' M(*f*) : la fonction successeur

<u>Exercice 3</u> (4, 2)

$\Gamma_1 : \{ P(a),\ P(a) \vee Q(b),\ \neg P(a) \vee R(b),\ S(a) \}$

$\Gamma_2 : \{ R(b), S(a)\}$

$\Gamma_3 : \{ B(a),\ B(a) \vee S(a),\ \neg B(a) \vee \neg S(a)\}$

1. Γ_2 est obtenu à partir de Γ_1 :

   i. en supprimant la clause unitaire P(*a*) et toutes les clauses contenant P(*a*).

   ii. en supprimant $\neg P(a)$ dans toutes les clauses où il apparaît.

On peut en déduire que toute H-interprétation qui satisfait Γ_1, satisfait R(*b*) et S(*a*). Par conséquent : $\Gamma_1 \models R(b)\wedge S(a)$ **(1)**

A l'aide d'un arbre sémantique :

$P(a),\ P(a) \vee Q(b),\ \neg P(a) \vee R(b),\ S(a) \models R(b)\wedge S(a)$ si et seulement si $\{P(a),\ P(a)\vee Q(b),\ \neg P(a)\vee R(b),\ S(a)\} \cup \{\neg R(b)\vee\neg S(a)\}$ non satisfiable.

2. $B(a),\ B(a) \vee S(a),\ \neg B(a) \vee \neg S(a) \models \neg S(a)$

   On remarquera que toute H-interprétation qui satisfait Γ_3, satisfait B(*a*), donc $\neg S(a)$. Par conséquent :

   $\Gamma_3 \models \neg S(a)$ **(2)**

   De (1) nous déduisons $\Gamma_1, \Gamma_3 \models R(b)\wedge S(a)$ donc $\Gamma_1, \Gamma_3 \models R(b)$ et $\Gamma_1, \Gamma_3 \models S(a)$ **(3)**

   De (2) nous déduisons $\Gamma_1, \Gamma_3 \models \neg S(a)$ **(4)**

De (3) et (4) : $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ est non satisfiable.