# Logique Mathématique
## Contrôle Intermédiaire– Durée2h-
### Tout document interdit

**Exercice 1** (3- (4-2) points)

**Partie A**

Vérifier à l'aide d'un arbre sémantique la proposition suivante :

$$\models (P \to R \vee Q) \to ((P \to R) \vee (\neg Q \to \neg P))$$

**Solution :**

$\models (P \to R\vee Q) \to ((P \to R) \vee (\neg Q \to \neg P))$ ssi

$\neg((P \to R\vee Q) \to ((P \to R) \vee (\neg Q \to \neg P)))$ **non satisfiable**ssi(0.5)

$(P \to R\vee Q) \wedge \neg ((P \to R) \vee (\neg Q \to \neg P)))$ non satisfiable ssi

$(P \to R\vee Q) \wedge \neg (P \to R) \wedge \neg (\neg Q \to \neg P)$ non satisfiable ssi

$(\neg P\vee R\vee Q) \wedge \neg (P \to R) \wedge \neg (\neg Q \to \neg P)$ non satisfiable

$(\neg P\vee R\vee Q) \wedge (P \wedge \neg R) \wedge (\neg Q \wedge P)$ non satisfiable

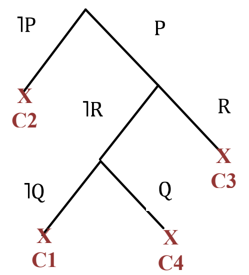
$Sc= \{\neg P\vee R\vee Q, P, \neg R, \neg Q\}$ non satisfiable (**l'ensemble de clauses**1)

C1 : $\neg P\vee R\vee Q$

C2 : $P$

C3 : $\neg R$

C4 : $\neg Q$




(AS : 1)

On a **un arbre sémantique clos** => Sc est non satisfiable =>(0.5)

$\neg((P \to R\vee Q) \to ((P \to R) \vee (\neg Q \to \neg P)))$ non satisfiable =>

$\models (P \to R\vee Q) \to ((P \to R) \vee (\neg Q \to \neg P))$

RQ :

- Un arbre sémantique avec des formules qui ne sont pas des clauses **0**
- Un arbre sémantique sans mentionner les clauses qui falsifie les branches **0**
- Si plus d'une clause est mal placée sur l'arbre alors **0**

**Partie B**

1. Montrer en utilisant la résolution que :

$$P\wedge Q \to R \wedge S,\ \neg Q \leftrightarrow R \wedge S,\ P \vee R \models R\wedge (S\to \neg Q)$$

**Solution :**

$P\wedge Q \to R \wedge S,\ \neg Q \leftrightarrow R \wedge S,\ P \vee R \models R\wedge (S\to \neg Q)$ssi

$S= \{ P\wedge Q \to R \wedge S, \neg Q \leftrightarrow R \wedge S, P \vee R ,\neg( R\wedge (S\to \neg Q)) \}$ non satisfiable (0.5)

$S=\{P\wedge Q \to R \wedge S, \neg Q \leftrightarrow R \wedge S, P \vee R ,\neg R\vee \neg(S\to \neg Q))\}$ non satisfiable

$S_c= \{ \neg P\vee \neg Q \vee R , \neg P\vee \neg Q \vee S, Q\vee R, Q\vee S, \neg Q\vee \neg S\vee \neg R, P \vee R, S\vee \neg R, Q\vee \neg R \}$ (1.5)

| | |
|---|---|
| C1: $\neg P\vee \neg Q \vee R$ | C9: $\neg R \vee \neg Q$ res (C7,C5) |
| C2: $\neg P\vee \neg Q \vee S$ | C10 : $\neg R$ res (C8,C9) |
| C3: , $Q\vee R$ | C11 : $\neg Q \vee R$ res(C1,C6) |
| C4:$Q\vee S$ | C12 : R res(C11,C3) |
| C5:$\neg Q\vee \neg S\vee \neg R$ | C13 :□ res (C12,C10) |
| C6:$P \vee R$ | |
| C7: $S\vee \neg R$ | |
| C8: $Q\vee \neg R$ | |

La resolution(1)

$S_c \vdash □$ =>$S_c$inconsistent (0.25)

=> S inconsistent (0.25)

=> S non statisfiablepar la propriété de consistance (0.5)
D'où $P\wedge Q \to R \wedge S, \rceil Q \leftrightarrow R \wedge S, P \vee R \models R\wedge (S\to \rceil Q)$

2. Peut-on déduire de la question 1 que l'ensemble Γ ci-dessous est non satisfiable pour toutes formules α et β ?

$$\Gamma= \{P\wedge \rceil\beta\to\alpha \wedge S, \beta\leftrightarrow \alpha\wedge S, P \vee\alpha, \rceil\alpha \vee (S\wedge\rceil\beta)\}$$

**Solution:**

$P\wedge Q \to R \wedge S, \rceil Q \leftrightarrow R \wedge S, P \vee R \models R\wedge (S\to\rceil Q)$ alors

$\models P\wedge Q \to R \wedge S \;\to\; ((\rceil Q \leftrightarrow R \wedge S \;\to (P \vee R \to (R\wedge (S\to\rceil Q)))$ (0.25)

On substitute α à R et ˥β à Q. Le résultat est une tautologie d'après le théorème de substitution :

$\models P\wedge\rceil\beta\to\alpha\wedge S \;\to\; ((\rceil\rceil\beta\leftrightarrow\alpha\wedge S \;\to (P \vee\alpha\to (\alpha\wedge (S\to\rceil\rceil\beta)))$ (0.75)

On remplace ˥˥β par β (théorème de remplacement)

$\models P\wedge\rceil\beta\to\alpha\wedge S \;\to\; ((\beta\leftrightarrow\alpha\wedge S \;\to (P \vee\alpha\to (\alpha\wedge (S\to\beta)))$

$\rceil( P\wedge\rceil\beta \to \alpha \wedge S \;\to\; ((\beta \leftrightarrow\alpha \wedge S \;\to (P \vee \alpha \to (\alpha \wedge (S\to\beta))))$ non satisfiable (0.5)

$(P\wedge\rceil\beta \to \alpha \wedge S) \;\wedge\; (\beta \leftrightarrow\alpha \wedge S) \wedge (P \vee \alpha) \wedge\rceil(\alpha \wedge (S\to\beta)$

$(P\wedge\rceil\beta \to \alpha \wedge S) \;\wedge\; (\beta \leftrightarrow\alpha \wedge S) \wedge (P \vee \alpha) \wedge (\rceil\alpha \vee (S\wedge\rceil\beta)$ (0.25)

Alors S= $\{(P\wedge\rceil\beta \to \alpha \wedge S)\;,\; (\beta \leftrightarrow\alpha \wedge S), (P \vee \alpha) , (\rceil\alpha \vee (S\wedge\rceil\beta)\}$ non satisfiable (0.25)

## Exercice 2 (2 points)

Soit S = $\{c_1, c_2 , c_3 \ldots\ldots, c_n\}$ un ensemble de clausescontenant une clause $c_i$et une clause $c_j$telles que : $c_i$ est une sous clause de $c_j$ (tous les littéraux de $c_i$ apparaissent dans $c_j$).

**Question.** Montrer que S et S' =S –$\{c_j\}$sont équisatisfiables (S satsifiablessi S' est satisfiable).

**Solution :**

=>) Si S est satisfiable alors S' est satisfiable car S'⊆ S et tout sous ensemble d'un ensemble satisfiable est satisfiable

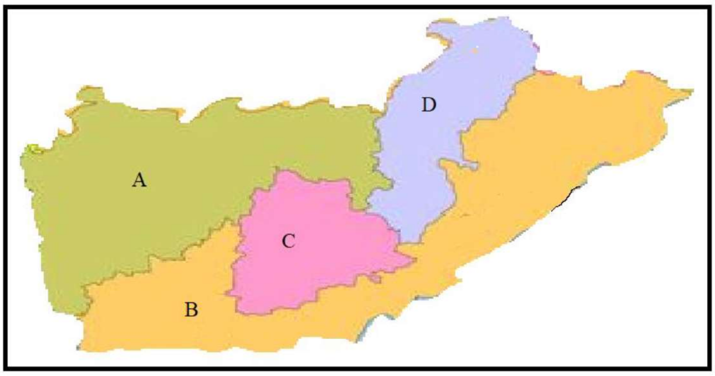
<=) Si S'est satisfiable alors S est satisfiable

Si S'est satisfiable alors il existe une valuation $v_0$ qui satisfait toutes les clauses de S'. Donc $v_0\models c_i$, donc $v_0\models c_j$ puisque $c_j = c_i\vee c'$.Par conséquent $v_0\models$S. S est donc satisfiable.

## Exercice 3 : (4 points)

Nous voulons vérifier la possibilité d'utiliser **3 couleurs** pour colorier la carte ci-dessous toute en garantissant les deux contraintessuivantes :

C1. Chaque région est coloriée avec une et une seule couleur.
C2. Deux régions adjacentes (i-e qui ont une frontière commune) ne peuvent pas être coloriées avec la même couleur.



**Question.** Ecrire les contraintes C1 et C2 dans le langage des propositions.

**N.B.** Ne pas mettre les formules obtenues sous forme clausale.

**<u>Solution:</u>**

On définit les variables propositionnelles:

$A_i$ : la région A est coloriée par la couleur i $i \in \{1, 2, 3\}$

$B_i$ : la région B est coloriée par la couleur i $i \in \{1, 2, 3\}$

$C_i$ : la région C est coloriée par la couleur i $i \in \{1, 2, 3\}$

$D_i$ : la région D est coloriée par la couleur i $i \in \{1, 2, 3\}$

<u>La contrainte 1</u> :

Chaque région est coloriée avec une et une seule couleur.

$(A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \rightarrow \neg A_2 \wedge \neg A_3) \wedge (A_2 \rightarrow \neg A_1 \wedge \neg A_3) \wedge (A_3 \rightarrow \neg A_1 \wedge \neg A_2)$

$(B_1 \vee B_2 \vee B_3) \wedge (B_1 \rightarrow \neg B_2 \wedge \neg B_3) \wedge (B_2 \rightarrow \neg B_1 \wedge \neg B_3) \wedge (B_3 \rightarrow \neg B_1 \wedge \neg B_2)$

$(C_1 \vee C_2 \vee C_3) \wedge (C_1 \rightarrow \neg C_2 \wedge \neg C_3) \wedge (C_2 \rightarrow \neg C_1 \wedge \neg C_3) \wedge (C_3 \rightarrow \neg C_1 \wedge \neg C_2)$

$(D_1 \vee D_2 \vee D_3) \wedge (D_1 \rightarrow \neg D_2 \wedge \neg D_3) \wedge (D_2 \rightarrow \neg D_1 \wedge \neg D_3) \wedge (D_3 \rightarrow \neg D_1 \wedge \neg D_2)$

<u>La contrainte 2</u> :

Deux régions adjacentes (i-e qui ont une frontière commune) ne peuvent pas être coloriées avec la même couleur.

$(A_1 \rightarrow \neg B_1 \wedge \neg C_1 \wedge \neg D_1) \wedge (A_2 \rightarrow \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge \neg D_2) \wedge (A_3 \rightarrow \neg B_3 \wedge \neg C_3 \wedge \neg D_3)$

$(B_1 \rightarrow \neg A_1 \wedge \neg C_1 \wedge \neg D_1) \wedge (B_2 \rightarrow \neg A_2 \wedge \neg C_2 \wedge \neg D_2) \wedge (B_3 \rightarrow \neg A_3 \wedge \neg C_3 \wedge \neg D_3)$

$(C_1 \rightarrow \neg A_1 \wedge \neg B_1 \wedge \neg D_1) \wedge (C_2 \rightarrow \neg A_2 \wedge \neg B_2 \wedge \neg D_2) \wedge (C_3 \rightarrow \neg A_3 \wedge \neg B_3 \wedge \neg D_3)$

$(D_1 \rightarrow \neg A_1 \wedge \neg B_1 \wedge \neg C_1) \wedge (D_2 \rightarrow \neg A_2 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2) \wedge (D_3 \rightarrow \neg A_3 \wedge \neg B_3 \wedge \neg C_3)$

| **Nom :** | **Prénom :** | **Groupe :** |
|---|---|---|

**Exercice 4 :** (3 points)

Modéliser dans le langage des prédicats les énoncés suivants :

| |
|---|
| **α1 : La somme de deux nombres premiers différents de 2 est un nombre pair.** |
| Prédicats :<br>N(x) : *x* est un nombre<br>P(x) : *x* est premier<br>D(x,y) : *x* est différent de *y*<br>R(x) : *x* est pair<br>Fonction :<br>$f(x,y)= x+y$<br>Constante :<br>$a=2$ |
| α1 : $\forall x\forall y(N(x)\wedge N(y)\wedge P(x) \wedge P(y) \wedge D(x, a)\wedge D(y, a)\rightarrow R(f(x,y)) )$ |
| **α2 : Entre deux réels distincts, il y'a un autre réel.** |
| Prédicats :<br>R(x) : *x* est un réel<br>E(x,y) : *x* est égal à y<br>S (x,y) : $x<y$ |
| α2 : $\forall x\forall y (R(x)\wedge R(y)\wedge S(x,y)\rightarrow \exists z(R(z) \wedge S(x,z)\wedge S(z,y))$ |
| **α3 : Un enfant aime tous les amis de son père.** |
| Prédicats :<br>E(x) : *x* est un enfant<br>F(x,y) : *x* est ami de *y*<br>A(x,y) : *x* aime *y*<br>P(x,y) : *x* est père de *y* |
| α3 : $\forall x\forall y\forall z(E(x)\wedge P(y,x) \wedge F(z,y)\rightarrow A(x,z))$ |

**Exercice 5 :** (2 points)

Soit la formule suivante :

$$\alpha : (\exists x P(x,a)) \wedge (\exists x \urcorner P(f(x),y))$$

1. Donner une interprétation et une valuation, si elles existent,telles que : $I \models \alpha_v$.
2. Donner une interprétation et une valuation, si elles existent, telles que : $I \not\models \alpha_v$.

<table>
<tr><td colspan="2">$I \models \alpha_v$</td></tr>
<tr><td>$D_I$=N<br>I(P) :“>”<br>I(a) =0<br>I(f) = succ (x)</td><td>$V(y)$=10</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I \not\models \alpha_v$.</td></tr>
<tr><td>$D_I$=N<br>I(P) :“<”<br>I(a) =0<br>I(f) = succ (x)</td><td>V(y)=10</td></tr>
</table>