E.S.I. **2010/2011**

Section : 2CPA

Module : Algèbre 3.

Durée : 40mns.

Corrigé de l'Interrogation 1 (sur 15 pts)

Exercice : Soit l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], \quad f\left(a + bX + cX^2\right) = a - b + (a+c)X + (b+c)X^2$$

1- Déterminer $M_B(f) = A$, où B est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{............}\textbf{(2pts)}$$

2- Déduire :

a- Une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

$$\ker f = \left\langle 1 + X - X^2 \right\rangle \quad \textbf{(2pts)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \left\langle 1 + X, X + X^2 \right\rangle. \quad \textbf{(2pts)}$$

b- Dire si f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Justifier.

Comme $\ker f \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective, et par conséquent f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. **(2pts)**

3- Soit B' une base de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $B' = (P_1 = 1 + X + X^2,\ P_2 = X - X^2,\ P_3 = 2X^2)$.

a- Trouver la matrice de passage P de B vers B'.

b- Déterminer la matrice P^{-1}.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1pt)} \quad , \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(3pts)}$$

4- Déduire la matrice : $A' = M_{B'}(f)$. Justifier.

$$A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(3pts)}$$

N.B. : La remise des notes est programmée pour le Lundi 06/12/2010 à 11h40 à l'amphi AP2.