ESI	**Novembre 2023**

2CPI	**Contrôle intermédiaire en ANA3**	**Durée : 2 heures**

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Le sujet comporte 2 pages (3 exercices et 1 questionnaire).
Le barème est approximatif.
Vous devez répondre à chaque exercice sur une double feuille séparément.

Quelques DL au $v(0)$	**Quelques comparaisons**
• $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.	• $\lvert\sin x\rvert \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
• $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$.	• $\lvert\sin x\rvert \leq \lvert x\rvert,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
• $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.	• $\log(1+x) \leq x,\ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 1 (6 points): Les questions sont indépendantes.

1) Etudier la nature de la série numériqe suivante: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n . n^4 . \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

2) Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) de la série numérique suivante: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\log(\sqrt{n}+1)}$.

3) Soient $u_n = \frac{1}{n} + \log n - \log(n+1)$ et $v_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - 1$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

b) Etudier la nature de $\sum_{n\geq 1} v_n$.

Exercice 2 (4 points): Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n},\ x \in [0,1].$$

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.

2) Calculer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 x.f_n(x)\, dx$.

Exercice 3 (5 points): Soit F la fonction définie par $F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n . \sin(nx)}{n}$.

1) Montrer que F est bien définie sur $]-1,1[$.
Indication: Montrer la convergence uniforme de la série sur tout $[-a,a]$, $0 < a < 1$.
2) Montrer que F est continue sur $]-1,1[$.
3) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

ESI. 2023/2024. CI- ANA3.

Veuillez répondre au questionnaire sur le sujet.

Nom	Prénom	Groupe

Questionnaire (5 points):

I- Dans ce qui suit, $(u_n)_n$ désigne une suite numérique réelle.

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies $\boxed{\text{V}}$, lesquelles sont fausses $\boxed{\text{F}}$, justifier brièvement.

____ **A1 :** Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$.

____ **A2 :** Si $\sum u_n$ converge alors $\sum \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$ converge.

____ **A3 :** La série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ est convergente.

____ **A4 :** Si $(u_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

II- Completer: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergente sur I vers une fonction f.
On dira que $(f_n)_n$ est convergente uniformément sur I vers f si et seulement si :

Un corrigé.

Exercice 1 : (1,5+2,25+2,25)

1) Nature de la série numériqe $\sum_{n\geq 1} u_n \ / \ u_n = \dfrac{(-1)^n .n^4. \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n!}$.

On a $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^4. \left(\dfrac{1}{n}\right)}{n!} = \dfrac{n^3}{n!} = v_n$ et $\sum v_n$ converge par la règle de d'Alembert, en effet:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{(n+1)}. \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 0 < 1.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente absolument par le critère d'équivalence ce qui donnera sa convergence.

2) Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\log(\sqrt{n}+1)}$.

a) Convergence simple: Utilisons la règle de Leibniz (la série numérique est altérnée), posons $v_n = \dfrac{1}{\log(\sqrt{n}+1)}$, on a:

$\rightsquigarrow$ $v_n > 0$.

$\rightsquigarrow$ $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$.

$\rightsquigarrow$ $(v_n)_n$ est décroissante, en effet on pose $f(t) = \log\left(\sqrt{t}+1\right)$, $t \geq 1$, on a

$$f\,'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}+1} = \frac{1}{2\sqrt{t}\left(\sqrt{t}+1\right)} > 0,$$

il vient que f est croissante donc $\dfrac{1}{f}$ est décroissante.

On en conclut la convergence de la série .

b) Convergence absolue:

$$|u_n| = \frac{1}{\log\left[(\sqrt{n})\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log(n) + \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\log(n)} = v_n,$$

En fait on a : $|u_n| = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\log(n)} \left(\dfrac{1}{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2}\log(n)}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\log(n)}$,

de plus $\sum v_n$ diverge (série de Bertrand).

Remarque: On peut utiliser

$$\log\left(\sqrt{n}+1\right) \leq \sqrt{n} \leq n \Longrightarrow |u_n| \geq \frac{1}{n} \cdots$$

c) Semi convergence: $\sum u_n$ est semi convergente.

3) a) $u_n = \frac{1}{n} + \log n - \log(n+1) = \frac{1}{n} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, on a

$$u_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geq 0,$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente par le critère d'équivalence .

b) On a $v_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or

- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, série de Leibniz.
- $\sum u_n$ est convergente (déjà fait).

On en conclut que $\sum v_n$ est convergente par linéarité.

<u>Exercice 2 :</u> (2+2)

1) a) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x),\ \forall x \in [0,1]$.

$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{ne^x}{n} = e^x.$

Donc $f_n \overset{\text{simple}}{\longrightarrow} f$ sur E / $f(x) = e^x$.

b) Convergence uniforme: A t'on $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\| = 0$?

Posons $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$,

$$g_n(x) = \left|\frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n} - e^x\right| = \left|\frac{xe^{-x} - xe^x}{x+n}\right| = x.\frac{|e^{-x} - e^x|}{x+n},$$

on a

$$g_n(x) \leq \frac{e^{-x} + e^x}{n} \leq \frac{1+e}{n} = M_n,\ \forall x \in [0,1],$$

et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} M_n = 0$.

Ceci montre que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

2) Afin de calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 x.f_n(x)\,dx$, appliquons le théorème de conservation de l'intégrabilité à la suite de fonctions $(h_n)_n$ / $h_n(x) = xf_n(x)$, on a tout d'abord $h_n \longrightarrow h$ sur $[0,1]$ où $h(x) = xe^x$ et comme

$$h_n(x) = xg_n(x) \leq \frac{1+e}{n} = M_n,\ \forall x \in [0,1],$$

donc $h_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} h$ sur $[0,1]$. Utilisons le théorème de conservation de l'intégrabilité

$$\begin{cases} 1)\ \text{Toutes les } h_n \text{ sont continues donc intégrables sur } [0,1]. \\ 2)\ h_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} h \text{ sur } [0,1]. \end{cases}$$

Alors h est intégrable sur $[0,1]$ et on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_0^1 h_n(t)dt\right) = \int_0^1\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} h_n(t)\right)dt = \int_0^1 te^t dt.$$

Après une IPP $\begin{cases} u = t, \ u' = 1 \\ v' = e^t, \ v = e^t \end{cases}$, on trouve

$$\int_0^1 te^t dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e-1) = 1.$$

On en conclut $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 x.f_n(x)\,dx = 1.$

<u>Exercice 3 :</u> (1+1,75+2,25)

$F(x) = \sum\limits_{n\geq1} x^n \dfrac{\sin(nx)}{n}$, on pose $u_n(x) = x^n\dfrac{\sin(nx)}{n}$, $x \in]-1,1[$.

1) On a $|u_n(x)| \leq \dfrac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$, or la série $\sum |x|^n$ est une série géométrique convergente puisque $x \in]-1,1[$, et donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} u_n(x)$ est absolument convergente par le critère de comparaison et en particulier simplement convergente sur $]-1,1[$ ce qui prouve que F est bien définie sur $]-1,1[$.

2) Etudions la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq1} u_n$, on a

$$|u_n(x)| \leq |x|^n \leq a^n \ \forall x \in [-a,a] \ , \ 0 < a < 1,$$

or $\sum a^n$ est une série géométrique convergente ce qui donne $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ est normalement donc uniformément convergente sur tout $[-a,a] \subset]-1,1[$, de plus toutes les u_n sont continues car c'est le produit de fonctions continues, donc d'après le théorème de conservation de la continuité F est continue sur tout $[-a,a] \subset]-1,1[$. Donc F est continue sur $]-1,1[$.

3) Etudions la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq1} u_n'$, $u_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)$.

$$|u_n'(x)| \leq |x|^{n-1} + |x|^n \leq a^{n-1} + a^n = c_n \ \forall x \in [-a,a], \ 0 < a < 1,$$

or $\sum a^{n-1}$ et $\sum a^n$ sont des séries géométriques convergentes ce qui donne $\sum\limits_{n\geq1} u_n'$ est normalement donc uniformément convergente sur tout $[-a,a] \subset]-1,1[$.

A présent appliquons le théorème de conservation de la dérivabilité:

a) Toutes les fonctions u_n sont C^1 sur $[1, +\infty[$ (car c'est le produit de fcts C^1).
b) $\exists x_0 \in [1, +\infty[$ telle que $\sum u_n(x_0)$ converge car on a montré precedemment que $\sum u_n$ est convergente sur $]-1, 1[$.
c) $\sum\limits_{n \geq 0} u_n'$ est convergente uniformément sur tout $[-a, a] \subset]-1, 1[$.
De a), b) et c) La fonction F est C^1 sur tout $[-a, a] \subset]-1, 1[$.
<u>Conclusion:</u> F est C^1 sur $]-1, 1[$ et :

$$F'(x) = \sum_{n \geq 0} \left(x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx) \right), \ \forall x \in]-1, 1[.$$

Questionnaire (1 pt par question):

$\boxed{\text{F}}$ **A1 :** Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$.

Prendre le contre exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{\text{F}}$ **A2 :** Si $\sum u_n$ converge alors $\sum \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$ converge.

Puisque $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1+u_n}{2+u_n} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, ce qui donnera la divergence de $\sum \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$ par la CN. On peut aussi donner un contre exemple, $u_n = 0$...

$\boxed{\text{F}}$ **A3 :** La série $\sum\limits_{n\geq1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ est convergente.

On a $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \geq 1$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \neq 0$, ce qui donnera la divergence de $\sum\limits_{n\geq1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ par la CN. On peut aussi calculer

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\sqrt{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} = 1 \neq 0.$$

$\boxed{\text{V}}$ **A4 :** Si $(u_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

C'est la règle de Leibniz ($\sum u_n$ est une série de Leibniz)

II- Completer: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergente sur I vers une fonction f.
On dira que $(f_n)_n$ est convergente uniformément sur I vers f ssi

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ou bien

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\| = 0 \ \ / \ \ \|f_n - f\| = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\,.$$