L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :
Le barème est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1: (4,5 pts)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et soit $B = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Soit $C = (P_1 = 1 - X + X^2, P_2 = X - X^2, P_3 = X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
1/ Déterminer la matrice de passage P de B vers C.
2/ Calculer P^{-1}.
3/ En déduire les coordonnées du vecteur $A = a + bX + cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base C.

Exercice 2: (5,5 pts)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ et on note par B sa base canonique. Soient :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 2 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} = \det_B(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Pour tout $1 \leq i \leq 5$, le vecteur x_i de $\mathbb{R}^5$ désigne la ième colonne de Δ relativement à la base B.

1/ Décomposer σ en un produit de transpositions puis déduire la signature de σ.
2/ Soit $\Delta' = \det_B(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)})$. Calculer Δ' (Remarquer que Δ' est déterminant triangulaire par blocs).
3/ En déduire Δ.

Bon courage.