Partie Algèbre

Exercice (7 points) :
Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
2. En déduire que A est diagonalisable. Justifier.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.
4. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de A^n en fonction de D et P. (Il n'est pas demandé de calculer la matrice A^n)

Partie Analyse

Exercice (8 points) : Soit f la fonction paire 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par

$$f(x) = \begin{cases} -x + \alpha & \text{si } x \in [0, \alpha], \\ 0 & \text{si } x \in]\alpha, \pi] \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \in]0, \pi]$$

1) Faire la repésentation graphique de la fonction f sur 2 périodes.
2) Déterminer la série de Fourier $\mathcal{F}(f)$ associée à f.
3) Développer f en série de Fourier (appliquer le théorème ou le corollaire de Dirichlet).
4) Pour $\alpha = \pi$, trouver la valeur de la série numérique $S = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Partie Logique

Exercice 1 (2,5 points)
Montrer, à l'aide d'un arbre sémantique, que l'ensemble Γ tel que :

$$\Gamma : \{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)),\ \exists x \forall y \neg (P(g(x)) \to Q(y))\}$$

est non satisfiable.

Exercice 2 (2,5 points)
Montrer, sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble

$$\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)),\ \exists x \forall y \neg (P(g(x)) \to Q(y))\}$$

est inconsistant.