ESI
2011/2012

Section A

ANA4
Interrogation écrite2

Sujet1

Exercice1

Soit $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+xt)} dt, \quad x \geq 0$

1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2) Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^+_*$.

Exercice2

1) Etant donnée $f \in OE$ telle que: $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \succ 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

En justifiant votre réponse, dites laquelle des deux égalités est vraie:

a) $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - 1$.
b) $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s)$.

2)
a) Montrer que: $\forall f \in OE,\ \mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = F(s-a) \quad \forall s \succ a + \gamma_f$.

b) Soit Q un polynome de degré n tq:
$Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_n)$ où: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ avec $\alpha_i \neq \alpha_j \ \forall i \neq j$.
Montrer que $Q'(\alpha_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\alpha_i - \alpha_j)$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}[s]$ tq $d^\circ P \prec n$: déduire de a) et b) que:
$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P}{Q}(s)\right)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}$ (Formule de developpement d'Heaviside)

d) En déduire $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right)(t)$.

3) $\mathcal{L}^{-1}(Arctgt)$ n'existe pas, pourquoi ?

Corrigé de l'interro 2 ANA4 section A

Exercice1

Soit $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+xt)} dt, \quad x \geq 0$

1) Continuité de F sur $\mathbb{R}^+$:

Posons $f(t,x) = \frac{1}{t^2(1+xt)}$, on a :

★ f est continue sur $[1,+\infty[\times \mathbb{R}^+$. $\leftarrow \boxed{0.5point}$

★ Convergence uniforme de f sur $\mathbb{R}^+$: $\leftarrow \boxed{1point}$

$$|f(t,x)| = f(t,x) = \frac{1}{t^2(1+xt)} \leq \frac{1}{t^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+xt)} dt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) La dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^+_*$.

★ f et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{t(1+xt)^2}$ sont continues sur $[1,+\infty[\times \mathbb{R}^+ \leftarrow \boxed{0.25point}$.

★ $\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ donc simplement sur $\mathbb{R}^+$. $\leftarrow \boxed{0.25point}$

★ Cv unif de $\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ sur $\mathbb{R}^+_*$ si possible sinon sur des intervalles: $\leftarrow \boxed{1point}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \left|\frac{-1}{t(1+xt)^2}\right| = \frac{1}{t(1+xt)^2} \leq \frac{1}{t(xt)^2} = \frac{1}{xt^3} \leq \frac{1}{At^3} \quad \forall x \in [A,+\infty[\text{ avec } A \succ 0.$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{At^3} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ converge uniformément sur $[A,+\infty[\ \ \forall A \succ 0$.

d'où F est dérivable sur $[A,+\infty[\ \forall A \succ 0 \leftarrow \boxed{0.5point}$ donc F est dérivable sur

$\bigcup_{A\in\mathbb{R}^+_*} [A,+\infty[= \mathbb{R}^+_*. \leftarrow \boxed{0.5point}$

Exercice2

1) $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \succ 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ On a:

★ $f \in OE.$

★ f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et non dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas continue en ce point. $\leftarrow \boxed{0.5point}$

★ $f'(t) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}^+_*$ donc f' est continue par morceaux sur $[\varepsilon, a]\ \forall \varepsilon \succ 0.$

donc f vérifie les hypothèses de la deuxième version du théorème sur la dérivabilité.

par conséquent:

$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0^+)$ or $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} t = 0$