Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2016-2017
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen 2

Exercice **1**. ⟦ ***5 pts*** ⟧

Soit

$$F = \exists x\Big(\exists x P(x,x) \Rightarrow \exists y Q(y, f(x))\Big).$$

1. *Donner la signature associée à la formule F.*
2. *Donner l'arbre de structure syntaxique de F. F est-elle fermée? Justifier*
3. *Soit*

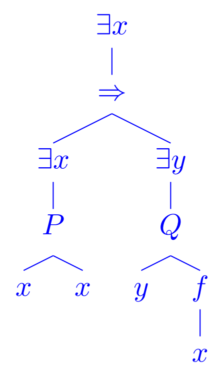
$$G = \forall x\Big(\exists y P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(z,x) \vee Q(f(x),a)\Big)$$

Donner la forme clausale de l'ensemble $\{F, G\}$.

Réponse.

1. $\Sigma = P^{r2}, Q^{r2}, f^{f1}$. **0.5 pt**

2. **Arbre de structure:** **0.5 pt**



La formule n'a pas de variables libres, donc elle est fermée. **0.5 pt**

3.

Etape 1.

Forme prénexe

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists x\Big(\exists z P(z,z) \Rightarrow \exists y Q(y, f(x))\Big) && \textbf{0.5 pt} \\ &\equiv \exists x \exists y \forall z\Big(P(z,z) \Rightarrow Q(y, f(x))\Big) && \textbf{0.5 pt} \end{aligned}$$

Skolémisation On ne peut pas utiliser la constante a présente dans G.

$$F_s = \forall z\Big(P(z,z) \Rightarrow Q(c, f(b))\Big) \quad \textbf{0.5pt}$$

Clauses

$$C_1 = \neg P(z,z) \vee Q(c, f(b)).\ \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

Etape 2

Forme prénexe

$$\begin{aligned} G &\equiv \forall x\Big(\Big(\exists y P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(z,x)\Big) \vee Q(f(x),a)\Big) \\ &\equiv \forall x \exists y \forall z \Big(\Big(P(x,y) \wedge \neg Q(z,x)\Big) \vee Q(f(x),a)\Big) \boxed{\textbf{0.5 pt}} \end{aligned}$$

Skolémisation On ne peut pas utiliser le symbole f présent dans la forme clausale de G.

$$G_s = \forall x \forall z \Big(\Big(P(x, g(x)) \wedge \neg Q(z,x)\Big) \vee Q(f(x),a)\Big) \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

Clauses

$$\begin{aligned} C_2 &= P(x, g(x)) \vee Q(f(x),a) \\ C_3 &= \neg Q(z,x) \vee Q(f(x),a) \boxed{\textbf{0.5 pt}} \end{aligned}$$

Exercice 2. ⟦ *4 pts* ⟧

On se situe dans un langage de calcul des prédicats où le domaine est un ensemble d'ordinateurs. En plus du prédicat égalité, on dispose des prédicats suivants:
$L(x)$: x est un client. $S(x)$: x est un serveur. $C(x,y)$: x est connecté à y. $I(x)$: x est isolé.
b est une constante.

Formaliser les énoncés suivants en langage de calcul des prédicats.

1. *Il existe un ordinateur qui est connecté avec tous les ordinateurs.*
2. *Certains ordinateurs sont clients et serveurs.*
3. *Tout serveur est connecté avec au moins deux autres ordinateurs clients.*
4. *Un ordinateur qui n'est connecté avec aucun serveur est isolé.*
5. *Deux ordinateurs sont connectés* **ssi** *ils sont connectés à des serveurs connectés entre eux.*
6. *b est un serveur connecté à exactement n clients. ($n \geq 1$ est fixé)*

Réponse.

1. $\exists x \forall y C(x,y)$. **1pt**

2. $\exists x (L(x) \wedge S(x))$. **1pt**

3. $\forall x \Big(S(x) \Rightarrow \Big(\exists y \exists z \Big(L(y) \wedge L(z) \wedge y \neq z \wedge x \neq y \wedge x \neq z\Big)\Big)\Big)$. **0.5 pt**

4. $\forall x \Big(\neg \exists y \Big(S(y) \wedge C(x,y)\Big) \Rightarrow I(x)\Big)$. **0.5 pt**

5. $\forall x \forall y \Big(C(x,y) \Leftrightarrow \Big(\exists z \exists w \Big(S(z) \wedge S(w) \wedge C(x,z) \wedge C(y,w) \wedge C(z,w)\Big)\Big)\Big)$. **0.5pt**

6. **0.5 pt**

$$S(b) \wedge \Big(\exists x_1 \ldots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \Big(L(x_i) \wedge C(b,x_i)\Big) \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j\Big)\Big) \wedge \neg \Big(\exists x_1 \ldots \exists x_{n+1} \Big(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \Big(L(x_i) \wedge C(b,x_i)\Big) \wedge \bigwedge_{i \neq j}^{n+1} x_i \neq x_j\Big)\Big)$$

Exercice 3. ⟦ ***3 pts*** ⟧

1. *Donner un contre modèle par la méthode des expansions finis pour le raisonnement suivant:*

$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \vDash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

2. *Soient A et B deux formules du calcul des prédicats. Soit x une variable qui n'a pas d'occurrences libres dans A. (Donc la valeur de A pour toute assignation ne dépend pas de l'état de la variable x).*

a. *Montrer que pour toute assignation (I, e) on a*

$$[\exists x (A \wedge B)]_{(I,e)} = [(A \wedge \exists x B)]_{(I,e)}.$$

b . *En utilisant les équivalences remarquables générales, déduire que $\forall x (A \vee B) \equiv (A \vee \forall x B)$.*

Réponse.

1. $D_I = \{0, 1\}$. $P_I = \{0\}$ et $Q_I = \{1\}$. **1pt**

2. **a.** **1pt**

$$\begin{aligned}
[\exists x (A \wedge B)]_{(I,e)} &= \sum_{d \in D} [(A \wedge B)]_{(I,e<x:=d>)} \\
&= \sum_{d \in D} \left([A]_{(I,e<x:=d>)} * [B]_{(I,e<x:=d>)} \right) \\
&= \sum_{d \in D} \left([A]_{(I,e)} * [B]_{(I,e<x:=d>)} \right) \\
&= [A]_{(I,e)} \sum_{d \in D} \left([B]_{(I,e<x:=d>)} \right) \\
&= [A]_{(I,e)} * [\exists x B]_{(I,e)} \\
&= [(A \wedge \exists x B)]_{(I,e)}.
\end{aligned}$$

Donc on a $\exists x (A \wedge B) \equiv (A \wedge \exists x B)$.

2 **b**. **1pt**

$$\begin{aligned}
\forall x (A \vee B) &\equiv \neg\neg\forall x (A \vee B) \equiv \neg\exists x \Big(\neg(A \vee B) \Big) \\
&\equiv \neg\exists x \Big(\neg A \wedge \neg B \Big) \equiv \neg \Big(\neg A \wedge \exists x \neg B \Big) \\
&\equiv (A \vee \forall x B)
\end{aligned}$$

☆ **Exercice 4**. ⟦ *4 pts* ⟧ *Soit*

$$S = \{P(x, f(x)), \quad \neg P(x, x), \quad P(x, a) \vee \neg Q(f(a)), \quad \neg P(a, y) \vee Q(y)\}.$$

1. *Décrire l'univers de Herbrand de l'ensemble de clauses S.*

2. *Donner les instances de bases déployées sur H_1. ($H_1(S)$).*

3. *Étudier la satisfaisabilité de $H_1(S)$) par l'algorithme de Davis-Putnam. Que peut-on déduire sur l'ensemble de clauses S.*

4. *Retrouver le résultat en utilisant l'arbre sémantique.*

Réponse.

1. $H = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$. **0.5 pt**

2. $H_1 = \{a, f(a)\}$.

$$H_1(S) = \Big\{ P(a, f(a)), \quad P(f(a), f(f(a))), \quad \neg P(a, a), \quad \neg P(f(a), f(a)),$$
$$P(a, a) \vee \neg Q(f(a)), \quad P(f(a), a) \vee \neg Q(f(a)), \quad \neg P(a, a) \vee Q(a), \quad \neg P(a, f(a)) \vee Q(f(a)) \Big\}$$ **1pt**

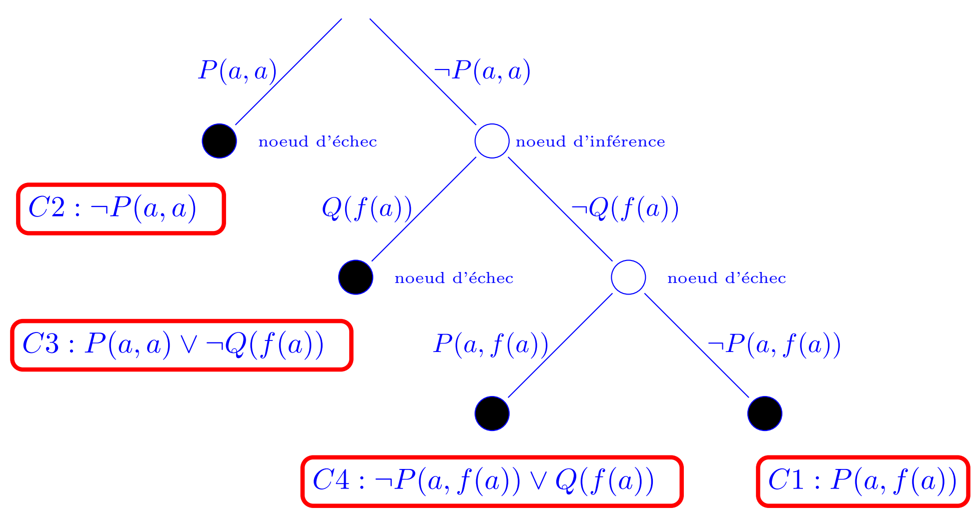
3. **1.5 pt** En éliminant les clauses qui contiennent un littéral isolé (RI) on obtient

$$\Big\{ P(a, f(a)), \quad \neg P(a, a), \quad P(a, a) \vee \neg Q(f(a)), \quad \neg P(a, f(a)) \vee Q(f(a)) \Big\}$$

En appliquant la résolution unitaire (RU), on obtient $\Big\{ \neg Q(f(a)), Q(f(a)) \Big\}$

Par (RU) on obtient la clause vide. Donc $H1(S)$ est contradictoire. Comme $H1(S) \subset H(S)$, alors $H(S)$ est contradictoire. Par le théorème de Herbrand, l'ensemble de clauses S est contradictoire.

4. **1.5 pt** **Arbre sémantique**.



Exercice 5. ⟦ *3 pts* ⟧

En utilisant la résolution du calcul des prédicats par unification(Renommage+Factorisation+Résolution) montrer que l'ensemble de ces clauses est contradictoire.

C_1 : $Q(x, y) \vee Q(x, f(x)) \vee \neg P(x)$.

C_2 : $P(x)$.

C_3 : $\neg Q(g(y), x)$.

Réponse.

$C_1 : Q(x, y) \vee Q(x, f(x)) \vee \neg P(x)$.
$C_2 : P(x)$.
$C_3 : \neg Q(g(y), x)$.
$C_4 : Q(x, f(x)) \vee \neg P(x)$. Factorisation de C_1.; $MGU : \{y \leftarrow f(x)\}$ **1 pt**
$C_5 : Q(x, f(x))$ Résolution(C_2, C_4); $MGU : \{\}$ **0.5 pt**
$C_6 : \neg Q(g(y), z)$. Renommage$\{x \leftarrow z; y \leftarrow y\}$ **0.5 pt**
$C_7 : \perp$ Résolution(C_5, C_6); $MGU : \{x \leftarrow g(y), z \leftarrow f(g(y))\}$ **1pt**.

Nous avons montré que $\{C_1, C_2, C_3\} \vdash_{\text{res}} \perp$. Par le théorème de correction de la résolution on déduit que $\{C_1, C_2, C_3\} \models \perp$. Donc l'ensemble est contradictoire. **0.5 pt**

Exercice 6. ⟦ *3 pts* ⟧

1. *Donner les équations récursives qui définissent une fonction* `NQ` *qui étant donné une formule du calcul des prédicats F renvoie* `Vrai` *si F ne contient pas de quantificateur et* `Faux` *sinon.*
2. *Utiliser cette fonction pour définir une fonction* `IP` *qui étant donné une formule du calcul des prédicats F renvoie* `Vrai` *si F est sous forme prénexe et* `Faux` *sinon.*

Réponse.

1. **1.5 pt**

- $\texttt{NQ}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \texttt{Vrai}$.
- $\texttt{NQ}(\neg F) = \texttt{NQ}(F)$.
- $\texttt{NQ}(F \alpha G) = \texttt{NQ}(F)$ **ET** $\texttt{NQ}(G)$
- $\texttt{NQ}(\exists x F) = \texttt{NQ}(\forall x F) = \texttt{Faux}$.

2. **1.5 pt**

- $\texttt{IP}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \texttt{Vrai}$.
- $\texttt{IP}(\neg F) = \texttt{NQ}(F)$.
- $\texttt{IP}(F \alpha G) = \texttt{NQ}(F)$ **ET** $\texttt{NQ}(G)$
- $\texttt{IP}(\exists x F) = \texttt{IP}(\forall x F) = \texttt{IP}(F)$

Bon courage — **Le barème est donné à titre indicatif**