Exercice 1 (6, 4)

On définit, voir figure ci-dessous, trois ensembles non vides P, Q et R tels que :

- P soit l'ensemble des éléments vérifiant la propriété P, i-e $P = \{x \mid P(x)\}$
- Q l'ensemble des éléments vérifiant la propriété Q.
- R l'ensemble des éléments vérifiant la propriété R.

1. Ecrire dans le langage des prédicats du 1[er] ordre les propositions suivantes :
   - L'intersection de P et de Q n'est pas vide ($P \cap Q \neq \emptyset$)
   - L'intersection de P et de Q est incluse dans R ($P \cap Q \subseteq R$)
   - L'ensemble des éléments de R qui ne vérifient pas P ou qui ne vérifient pas Q n'est pas vide ($R - P \cap Q \neq \emptyset$)
   - Les éléments de R vérifient la propriété P et la propriété Q.

2. Montrer à l'aide d'un arbre sémantique que l'ensemble des énoncés de la question 1 est non satisfiable.

Exercice 2 (4)

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que l'ensemble de clauses *S* ci-dessous est non satisfiable. Ne pas utiliser de termes de base.

$S : \{ \neg P(f(x)) \vee \neg Q(y),\ \neg P(x) \vee \neg R(x),\ Q(x) \vee R(f(x)),\ P(f(x)) \vee P(x) \}$

Exercice 3 (6)

Vérifier la satisfiabilité et/ou la validité des formules suivantes :

$\beta_1 : \exists x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x P(x,x)$

$\beta_2 : \exists x P(x,x) \rightarrow \exists x \exists y P(x,y)$

N.B. Remettre au plus une double feuille et une feuille intercalaire.