# الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية République Algérienne Démocratique et Populaire وزارة التعليم العالي و البحث الطعي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours National d'accès au second cycle des écoles supérieures Année universitaire 2018/2019

SUJET

Domaine : MI Durée : 2h Matière : Mathématiques

Coefficient:1

Calculatrice Autorisée : NON

#### Partie 1 : Analyse

#### Exercice 1 (3,5 points)

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . On considere la fonction  $f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 4axy$ .

- Déterminer les points critiques de f.
- 2. Donner la nature de ces points critiques.

#### Exercice 2 (3,5 points)

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\exp(-x(1+t^2))}{(1+t^2)} dt, \ x > 0.$$

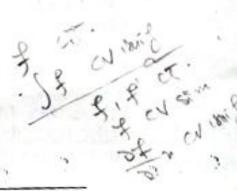
## Partie 2 : Algèbre

#### Exercice (7 points)

Soit a un paramètre réel et soit  $f_a$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  donné dans la base canonique B de  $\mathbb{R}^3$  par la matrice

$$M_{\sigma} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -a & 2a \\ -a & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a \end{array}\right).$$

- Calculer les valeurs propres de la matrice Ma.
- Montrer que ∀a ∈ R, la matrice M₀ est diagonalisable.
- Supposons que a ≠ 0 :
- i) Trouver une matrice inversible P indépendante du paramètre a et une matrice diagonale  $D_a$  telles que  $D_a = P^{-1}M_aP$ .
- ii) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a  $(M_a)^{2n+1} = a^{2n+1}M_1$ .



enlare 1

## Partie 3 : Logique mathématique

### Exercice 1 (2 points)

Formalisez dans le langage du calcul des prédicats les énoncés suivants :

- Un réseau est non sécurisé ssi il contient un sous-réseau non sécurisé.
- 2. Deux réseaux sont connectés ssi tous leurs sous-réseaux sont connectés.

Utiliser seulement les symboles de prédicats suivants:

S(x): x est un réseau sécurisé.

C(x,y) : x est un sous-réseau du réseau y.

T(x,y): x et y sont connectés.

## Exercice 2 (4 points)

Utiliser la résolution pour prouver que l'ensemble  $\{\alpha,\beta,\gamma\}$  est contradictoire.

 $\alpha = \forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$ 

 $\beta = \forall x (R(x) \Rightarrow \{(\forall y Q(x,y)) \lor \exists z Q(x,z)\})$ 

 $\gamma = \neg \exists x \forall y \exists z (P(y) \Rightarrow Q(z,x))$ 

NB. Vous pouvez utiliser indifféremment les symboles ⇒ et → pour désigner implication.