ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

Contrôle Final

Juin 2024

2CPI | **Analyse mathématique 4** | **Durée : 2 heures**

- **Les documents, les calculatrices et les téléphones sont interdits.**
- **Traiter chaque exercice sur une double feuille séparée.**
- **Toute copie sans nom et sans numéro de groupe ne sera pas corrigée.**

Exercice 1 (5,25 points) : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Calculer la transformée de Laplace de la fonction

$$f(t) = t^2 \sin(3t).$$

Partie 2 :

1) Trouver les constantes a et b telles que $\dfrac{2}{x(x^2+4)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx}{x^2+4}, \quad x > 0.$

2) Résoudre, par la TL, l'équation differentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 2, \quad \forall t \geq 0, \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \end{cases}$$

avec $y \in C^2(\mathbb{R}^+)$, y, y' et y'' sont d'ordre exponentiel.

Transformée de Laplace de quelques fonctions élémentaires

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
1)	$t^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{x^{n+1}} \quad x > 0$
2)	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{x^2+a^2} \quad x > 0$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
3)	$\cos(at)$	$\dfrac{x}{x^2+a^2} \quad x > 0$
4)	$sh(at)$	$\dfrac{a}{x^2-a^2} \quad x > \lvert a \rvert$

Exercice 2 (7,5 pts) : Soit la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t} dt.$$

1) Déterminer le domaine de définition D_F de F.

2) Montrer que F est de classe C^1 sur son D_F.

3) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4) Déduire de ce qui précède l'expression explicite de $F(x)$.

Exercice 3 (7,25 pts) : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Montrer que si $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $y, y', y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Indication : Montrer d'abord que $\exists C > 0$ tel que $\forall x \neq 0, \; |\mathcal{F}(y)(x)| \leq \dfrac{1}{x^2} C.$

Partie 2 : Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$, on rappelle que $\mathcal{F}(f_\alpha)(x) = \dfrac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}$.

Etant données $\beta > 0$ et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \text{ telle que} \\ \quad \bullet\ y, y', y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \\ \quad \bullet\ 3y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y''(s) - \dfrac{\beta}{2} y(s) \right) e^{-|t-s|} ds = g(t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

1) Prenons $g(t) = t^2$. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ n'admet pas de solution.

2) Prenons $g(t) = e^{-|t|}$.

a) Montrer que si $\beta \geq 3$ alors $(\mathcal{P})$ n'admet pas de solution.

b) Montrer que si $\beta \in]0, 3[$, alors $(\mathcal{P})$ admet une solution à déterminer.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1 (5,25 points) :

Partie 1 : $\boxed{\textbf{1 pt}}$... Prenons $g(t) = \sin(3t)$ et posons $G = \mathcal{L}(g)$. On a $f(t) = t^2 g(t)$. Mais, par dérivation,

$$\forall x > 0,\ \ G^{(2)}(x) = (-1)^2 \mathcal{L}(t^2 g(t)) = \mathcal{L}(f)(x),$$

or $G(x) = \dfrac{3}{x^2+9} \Rightarrow G'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2+9)^2} \Rightarrow G''(x) = 18\frac{x^2-3}{(x^2+9)^3}$, donc

$$\forall x > 0,\ \ \mathcal{L}(f)(x) = 18\frac{x^2-3}{(x^2+9)^3}.$$

Partie 2 :

1) On trouve

$$\boxed{\textbf{1 pt}}\ldots \frac{2}{x(x^2+4)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+4},\ \text{ie}\ \boxed{a = \frac{1}{2}\ \text{ et }\ b = -\frac{1}{2}.}$$

2) Appliquons la TL à l'edo. Alors,

$$\boxed{\textbf{0,25 pt}}\ldots\mathcal{L}\Big(y''(t) + 4y(t)\Big) = \mathcal{L}(2) \Leftrightarrow \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = 2\mathcal{L}(1)\ \ \text{(par linéarité de la TL)}$$

ainsi

$$\boxed{\textbf{1 pt}}\ldots.(x^2Y - xy(0) - y'(0)) + 4Y = \frac{2}{x},\quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2.Y - 1) + 4Y = \frac{2}{x},\ \ x > 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4)Y = \frac{2}{x} + 1,\ \ x > 0..$$

Donc

$$\boxed{\textbf{0,75 pt}}\ldots Y = \frac{x+2}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+4} + \frac{2}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+4} + \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+4},\ x > 0.$$

Appliquons à présent la TL inverse, alors

$$\boxed{\textbf{1.25 pt}}\ldots.y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{x^2+4}\Big) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{x}{x^2+4}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t),\ \forall t \geq 0.}$$

Exercice 2 (7,5 points) : On pose $f(t,x) = \dfrac{(t-1)t^x}{\ln t} \geq 0,\ (t,x) \in]0,1[\times\mathbb{R}.$

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$..La fonction F est une intégrale paramétrée impropre tq $f \in R_{loc}]0,1[$ selon t qui pose problème en 0 et 1.

1) Détermination du domaine de définition de F : On rappelle que

$$D_F = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \int_0^1 f(t,x)dt \text{ converge} \right\}.$$

Soit $c \in]0,1[$.

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$...**Au** $v(0)$: On a

- $f(t,x) \underset{t\in v(0)}{\sim} -\dfrac{t^x}{\ln t} \geq 0,$
- $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{t^{-x}\ln t}$ converge ssi $x > -1$ (intégrale de Bertrand).

Donc (d'après le critère d'équivalence), $\displaystyle\int_0^c f(t,x)dt$ converge ssi $x > -1$.

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$...**Au** $v(1)$: On fait l'étude pour $x > -1$ seulement. On a

$$\lim_{t\to 1^-} f(t,x) = \lim_{t\to 1^-} \frac{(t-1)e^{x\ln t}}{\ln t} = \lim_{u\to 0^-} \frac{ue^{x\ln(1+u)}}{\ln(1+u)} = 1,$$

donc on a un "faux problème" au $v(1)$, donc $\displaystyle\int_c^1 f(t,x)dt$ converge.

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$..Conclusion : $\boxed{D_F =]-1,+\infty[.}$

2) La preuve que $F \in \mathcal{C}^1(]-1,+\infty[)$: On a pour tout $x \in]-1,+\infty[$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{(t-1)e^{x\ln(t)}}{\ln(t)}\right) = \dfrac{\ln(t)(t-1)e^{x\ln(t)}}{\ln(t)}$ est définie que pour $t \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ a donc deux problèmes en 0 et en 1 et

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}\ldots \forall(t,x) \in]0,1[\times]-1,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = (t-1)t^x > 0.$$

Etudions d'abord la convergence dominée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ sur $[a,+\infty[$ avec $a > -1$. On a

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}..\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = (1-t)t^x \leq (1-t)t^a \doteq \psi(t)\ \forall t \in]0,1[, \forall x \in [a,+\infty[.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \psi(t)dt$ converge, en effet

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$..**Au** $v(0)$: On a $\psi(t) \underset{t\in v(0)}{\sim} t^a = \dfrac{1}{t^{-a}}$, et $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{t^{-a}}$ converge car $-a < 1$ (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int_0^c \psi(t)dt$ converge d'après le critère d'équivalence.

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$.. **Au** $v(1)$: On a $\psi(t) \underset{t\in v(1)}{\sim} 1-t$, et $\int_c^1 (1-t)dt$ converge (intégrale propre).

On en déduit ainsi la convergence dominée de $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ sur tout $[a,+\infty[$ avec $a > -1$.

Appliquons le théoréme de conservation de la dérivabilité : On a

- $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$ $f \in \mathcal{C}^1(]0,1[\times]-1,+\infty[)$ comme produit, rapport et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$,
- $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$... F est définie sur $]-1,+\infty[$ donc $\exists x_0 \in D_F$ / $\int_0^1 f(t,x_0)dt$ est convergente,
- $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$.. $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie la convergence dominée sur tout $[a,+\infty[$, $a > -1$.

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$ + $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$.. Alors F est de classe C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset]-1,+\infty[$ donc (**par recouvrement**) $\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]-1,+\infty[)}$.

3) La preuve que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$:

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$...... La fonction $t \mapsto \frac{(t-1)}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$, on obtient alors

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}\ldots \forall x \in]-1,+\infty[,\ \ |F(x)| \leq \int_0^1 \left|\frac{(t-1)}{\ln t}\right| t^x dt \leq \int_0^1 M t^x dt = \frac{M}{x+1},$$

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$... mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M}{x+1} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$

4) On a d'après le théoréme de conservation de la dérivabilité

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}\ldots F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \int_0^1 (t^{x+1} - t^x)dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}\ldots F(x) = \int F'(x)dx = \ln|x+2| - \ln|x+1| + C \overset{x>-1}{=} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C.$$

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$... Mais, par passage à la limite quand $x \to +\infty$, on trouve (en utilisant la question 3) $C = 0$, ainsi on en déduit

$$\boxed{F(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

Exercice 3 (7,25 pts) : Partie 1

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$... On a $y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}(y)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc, pour montrer que $\mathcal{F}(y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ il faut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(y)(x)| dx$ converge.

On a $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathcal{F}(y'')(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} y''(t) e^{-ixt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |y''(t) e^{-ixt}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y''(t)| dt < \infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(y'')| < \infty,$$

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$.. Or $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $y, y', y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}(y'')$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\textbf{0,5pt}}\ (\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(y'')(x) = -x^2 \mathcal{F}(y)(x)) \Rightarrow \left(\forall x \neq 0,\ |\mathcal{F}(y)(x)| \leq \frac{1}{x^2} |\mathcal{F}(y'')(x)| \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \neq 0,\ |\mathcal{F}(y)(x)| \leq \frac{1}{x^2} \sup_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(y'')| \right).$$

Par ailleurs, soit $c > 0$, alors

- $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ $\int_{-\infty}^{-c} |\mathcal{F}(y)(x)| dx$ et $\int_{c}^{+\infty} |\mathcal{F}(y)(x)| dx$ convergent (majoration par une intégrale de Riemann convergente).
- $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$ $\int_{-c}^{c} |\mathcal{F}(y)(x)| dx$ est une intégrale propre car $\mathcal{F}(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi,

$$\boxed{\textbf{0,25 pt}}..\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(y)(x)| dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-c} |\mathcal{F}(y)(x)| dx}_{converge} + \underbrace{\int_{-c}^{c} |\mathcal{F}(y)(x)| dx}_{converge} + \underbrace{\int_{c}^{+\infty} |\mathcal{F}(y)(x)| dx}_{converge} \quad converge.$$

Partie 2 : On a $3y + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y''(s) - \frac{\beta}{2} y(s) \right) e^{-|t-s|} ds = g$ ce qui équivalent à

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}\ldots 3y + \left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right) * f_1 = g. \qquad (1)$$

1) Prenons $g(t) = t^2$.

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$.. Alors, le problème $(\mathcal{P})$ n'admet pas de solution car le 1^{er} membre de l'égalité (1) $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ par contre le $2^{ème} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. En effet,

- $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$.. $y, y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \overset{f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})}{\Rightarrow} \left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right) * f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
$$\Rightarrow 3y + \left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right) * f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),$$
- $\boxed{\textbf{0.25 pt}}$.. $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = 2 \int_{0}^{+\infty} |g(t)| dt = +\infty \Rightarrow g \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2) **a** $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$. Prenons $g = f_1$. En appliquant la TF aux 2 membres de l'équation (1), il vient

$$\mathcal{F}\left(3y + \left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right) * f_1 \right) = \mathcal{F}(g) \Rightarrow 3\mathcal{F}(y) + \mathcal{F}\left(\left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right) * f_1 \right) = \mathcal{F}(f_1) \text{ (par linéarité de la TF)}$$

$$\Rightarrow 3\mathcal{F}(y)(x) + \mathcal{F}\left(y'' - \frac{\beta}{2} y \right)(x) . \mathcal{F}(f_1)(x) = \mathcal{F}(f_1)(x) \text{ (par le théorème du produit de convolution)}$$

$$\Rightarrow 3\mathcal{F}(y)(x) + \left(\mathcal{F}(y'')(x) - \frac{\beta}{2} \mathcal{F}(y)(x) \right) . \mathcal{F}(f_1)(x) = \mathcal{F}(f_1)(x). \qquad (2)$$

$\boxed{\textbf{0.25 pt}}$.. Par ailleurs, puique $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $y, y', y'' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(y'')(x) = -x^2 \mathcal{F}(y)(x)$,

$\boxed{\textbf{0.5 pt}}$..donc (vu que $\mathcal{F}(f_1)(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$),

$$(2) \Leftrightarrow 3\mathcal{F}(y)(x) - \frac{2}{x^2+1}\left(x^2 + \frac{\beta}{2}\right)\mathcal{F}(y)(x) = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow \left(\frac{x^2+3-\beta}{x^2+1}\right)\mathcal{F}(y)(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(y)(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2+3-\beta}\right)\frac{2}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(y)(x) = \frac{2}{x^2+3-\beta} \qquad (3)$$

$\boxed{\textbf{0.5 pt}}$..Si $\beta \geq 3,$ le problème $(\mathcal{P})$ n'admet pas de solution, sinon

$$\beta > 3 \Rightarrow 3-\beta < 0 \Rightarrow x \mapsto x^2+3-\beta \text{ s'annule en } \pm\sqrt{\beta-3}$$

$$\Rightarrow x \mapsto \frac{2}{x^2+3-\beta} \text{ n'est pas définie en } \pm\sqrt{\beta-3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(y) \text{ n'est pas définie en } \pm\sqrt{\beta-3}$$

ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}(y)(x)$ est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ (vu que $y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) .

b) $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$..Si $\beta \in]0,3[$, on a $3-\beta > 0.$

$$\boxed{\textbf{0,5 pt}}.\ (3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(y)(x) = \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}.\frac{2\sqrt{3-\beta}}{x^2+\left(\sqrt{3-\beta}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(y) = \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}.\mathcal{F}\left(f_{\sqrt{3-\beta}}\right) \Leftrightarrow \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{3-\beta}}f_{\sqrt{3-\beta}}\right).$$

$\boxed{\textbf{0,5 pt}}$.Comme

- $y,\ \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}f_{\sqrt{3-\beta}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),$

$y,\ \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}f_{\sqrt{3-\beta}}$ sont continue sur $\mathbb{R}$,

- $y,\ \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}f_{\sqrt{3-\beta}}$ sont dérivable par morçeaux sur $\mathbb{R}$,

$\boxed{\textbf{0,25 pt}}$.alors (d'après le cours)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}f_{\sqrt{3-\beta}}(t) = \frac{1}{\sqrt{3-\beta}}e^{-\sqrt{3-\beta}|t|}.$$

Remarque : On peut avoir le même résultat autrement. En effet, appliquons le TIF aux deux membres de l'égalité (3), les conditions étant vérifiées et puisque y est continue et paire (car $\mathcal{F}(y)$ est paire) alors

$$y(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(ax).\mathcal{F}(y)(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(ax)\frac{1}{x^2+3-\beta}dx.$$

Mais $\dfrac{1}{x^2+3-\beta} = \dfrac{1}{x^2+\left(\sqrt{3-\beta}\right)^2}$, en prenant $\alpha = \sqrt{3-\beta}$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(ax)\frac{1}{x^2+3-\beta}dx = \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\cos(ax)\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}dx = \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^{+\infty}\cos(ax)\mathcal{F}\left(f_\alpha\right)(x)dx = \frac{1}{\alpha}f_\alpha(t).$$

par application de la le TIF à f_α qui est paire (elle vérifie les conditions). On obtient le résultat.