2014/2015. CP2. ANA3

**CI en ANA3.**
Durée 2H

**DOCUMENTS, TELEPHONE ET CALCULATRICE INTERDITS.**

**Exercice1:(4 points)**
Les questions sont indépendantes:

1) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t . \log t}{\sqrt{t^3+1}} dt$

2) Soit $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in ]0,1[ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, calculer $\mathcal{L}(f(t))$.

3) Etant donné $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $r > 0$
Pour $X$ et $Y$ dans la boule $B(a,r)$. Montrer que:
$\forall \lambda \in [0,1] \ : \ \lambda X + (1-\lambda) Y \in B(a,r)$.

**Exercice 2:(5 points)**

Pour $0 < x < 1$ on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t} dt$.
1) Montrer que $F$ est bien définie sur $]0,1[$.
2) Etudier la continuité de $F$ sur $]0,1[$.
3) Calculer explicitement $F(x)$.

**Exercice 3: (4 points)**

1) Décomposer en éléments simples: $\frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}$
2) En utilisant les TL, résoudre l'équation différentielle:
$y"(t) - \frac{5}{2} y'(t) + y(t) = -\frac{5}{2} \sin t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

**Exercice 4: (7points)**

1) Donner -sans calculer- la TF de $f \ / \ f(t) = e^{-kt^2} \ (k > 0)$.
Montrer que sa TF vérifie l'équation différentielle: $y' + \frac{x}{2k} y = 0$, (on admettra que sa solution est $y = Ce^{-\frac{x^2}{4k}}$ / $C$ une constante réelle).
2) Montrer que $C \geq 0$ puis en utilisant le TIF, trouver $C$.
(on rappelle l'intégrale de Gauss: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).
3) Résoudre l'équation intégrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(u) . e^{-k(t-u)^2} du = e^{-t^2}, \ k > 1, \text{ où } y \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

**Un corrigé:**

**Exercice1:**

1) Soit $f(t) = \dfrac{\sin t . \log t}{\sqrt{t^3+1}}$, $f \in R_{loc}[1,+\infty[$.

On a: $|f(t)| \leq \dfrac{\log t}{t^{\frac{3}{2}}}$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ converge car c'est une intégrale de Bertrand $\left(\alpha = \dfrac{3}{2} > 1\right)$; donc l'intégrale proposée converge absolument donc simplement.

2) $\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f\left(t\right) dt = \int_0^1 e^{-xt} dt = \frac{-1}{x}\left[e^{-xt}\right]_0^1 = \frac{1}{x}\left(1 - e^{-t}\right) \ \forall x > 0.$

3) Etant donné $\left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right)$, soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $r > 0$

$X$ et $Y$ dans$B\left(a,r\right)$ ie: $\|X - a\| < r$ et $\|Y - a\| < r$, soit $Z = \lambda X + \left(1-\lambda\right) Y$

Or $\|Z - a\| = \|\lambda X + \left(1-\lambda\right) Y - a\| = \|\lambda\left(X - a\right) + \left(1-\lambda\right)\left(Y - a\right)\| \leq \lambda \|X - a\| +$ $\left(1-\lambda\right)\|Y - a\|$

donc $\|Z - a\| \leq \lambda r + \left(1-\lambda\right) r$ ie $\|Z - a\| \leq r$, on en conclut que $Z \in B\left(a,r\right)$.

**Exercice 2:**

1) Soit $f(t,x) = \dfrac{x^t}{1+x^t} \geq 0$, on a que $f \in R_{loc}[0,+\infty[$ $\left(x^t = e^{t\log x}\right)$.

$f(t,x) \leq x^t = e^{t\log x}$ et $\int\limits_0^{+\infty} e^{t\log x} dt$ converge (Intégrale expo) donc par comparaison $\int\limits_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge absolument donc converge.

2) a) La continuité :

$\rightsquigarrow$ $|f(t,x)| \leq x^t = e^{t\log x} \leq e^{t\log b} = \varphi(t)$ $\forall t \in [0,+\infty[,\ \forall x \in ]0,b],\ 0 < b < 1$ et $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge (Intégrale expo) donc il ya CD sur tout $]0,b] \subset ]0,1[$, de plus :

$\rightsquigarrow$ $f$ est continue selon $t$ car composée, somme et rapport de fonctions continues sur $[0,+\infty[$.

$\rightsquigarrow$ $f$ est continue selon $x$ car composée, somme et rapport de fonctions continues sur tout $]0,b] \subset ]0,1[$.

Donc $F$ est continue sur tout $]0,b] \subset ]0,1[$, alors $F$ est continue sur$]0,1[$

3) Pour le calcul, posons $u = x^t = e^{t\log x}$, $du = \left(\log x\right).x^t dx$ donc :

$F(x) = \dfrac{-1}{\log x}\int\limits_0^1 \dfrac{du}{1+u} = \dfrac{-\log 2}{\log x}$.

**Exercice3:**

1) On trouve: $\dfrac{2x+1}{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)}$

2) Appliqons les TL à l'edo:

On rappelle: $\mathcal{L}\left(y"\right) = x^2 Y - xy\left(0\right) - y'\left(0\right)$ et $\mathcal{L}\left(y'\right) = xY - y\left(0\right)$

Donc $x^2Y - 2 - \frac{5}{2}xY + Y = -\frac{5}{2}\frac{1}{(x^2+1)}$ ie $Y = \frac{2x+1}{(x-2)(x^2+1)}$.
On déduit de 1) que $y(t) = e^{2t} - \cos t$ qui vérifie bien les conditions.

**Exercice4:**

1) $\bigstar$ $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, en effet $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kt^2} dt \overset{\text{paire}}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-kt^2} dt$ converge au $v(+\infty)$ par la RO, on a $\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 e^{-kt^2} = 0$.

$\bigstar$ $\mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.e^{-kt^2} dt = 2\int_0^{+\infty} \cos(xt).e^{-kt^2} dt.$

$\bigstar$ $tf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ,puisque $tf \in C^1(\mathbb{R})$ , $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-kt^2} dt \overset{\text{paire}}{=} 2\int_0^{+\infty} te^{-kt^2} dt$ converge au $v(+\infty)$ par la RO, on a $\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^3 e^{-kt^2} = 0$.

$\bigstar$ $(\mathcal{F}f)'(x) = -i\int_0^{+\infty} e^{-ixt}.te^{-kt^2} dt$ utilisons une IPP: $\begin{array}{l} u = e^{-ist} \to u' = -ise^{-ist} \\ v' = -te^{-kt^2} \to v = \frac{1}{2k}e^{-kt^2} \end{array}$

$$(\mathcal{F}f)'(x) = i\left(\underbrace{\left[\frac{1}{2k}e^{-ixt}.e^{-kt^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0.....\circledast} + \frac{i}{2k}x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}.e^{-kt^2} dt\right) = -\frac{x}{2k}\mathcal{F}f(x).$$

$\circledast$ : En fait $\lim_{t \to \pm\infty} \cos(xt)\, e^{-kt^2} = 0 = \lim_{t \to \pm\infty} \sin(xt)\, e^{-kt^2}$
$\mathcal{F}f$ vérifie donc l'edo : $y' + \frac{x}{2k}y = 0$, ie $\mathcal{F}f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{4k}}$,
Remarque: On peut également trouver ce résultat en utilisant la parité de $f$ :
$\mathcal{F}f(x) = 2\int_0^{+\infty} \cos(xt).e^{-kt^2} dt \Longrightarrow (\mathcal{F}f)'(x) = -2\int_0^{+\infty} \sin(xt).te^{-kt^2} dt$ puis faire une IPP.

2) On a que $C \geq 0$ car: $C = \mathcal{F}f(0) = 2\int_0^{+\infty} e^{-kt^2} dt \geq 0$.
Utilisons à présent le TIF:
Puisque $\bigstar$ $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f$ est paire

alors $f(a) = e^{-ka^2} = \frac{1}{\pi}C\int_0^{+\infty} \cos(xt).e^{\frac{-x^2}{4k}} dx$, en particulier pour $a = 0$ :

$1 = \frac{C}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{4k}} dx$ : on pose $u = \frac{x}{2\sqrt{k}}$ ie $dx = 2\sqrt{k}du$ et on a l'intégrale de

Gauss: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

On a alors$1 = \frac{C}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{4k}} dx = \frac{2\sqrt{k}C}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ ie $1 = \frac{2\sqrt{k}C}{\pi} . \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \Longrightarrow C = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$.

Donc $\mathcal{F}f\left(x\right) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}$.

3) Il s'agit d'une équation de convolution : soit $h(t) = e^{-t^2}$, et $\mathcal{F}h\left(x\right) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$ il suffit de prendre $k = 1$ dans $\mathcal{F}f\left(x\right)$

$h = f * y \Longrightarrow \mathcal{F}\left(h\right) = \mathcal{F}\left(f * y\right) \Longrightarrow \mathcal{F}\left(h\right) = \mathcal{F}\left(f\right) . \mathcal{F}\left(y\right) \Longrightarrow \mathcal{F}\left(y\right) = \frac{\mathcal{F}\left(h\right)}{\mathcal{F}\left(f\right)}$

ie $\mathcal{F}\left(y\right) = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}} = \sqrt{k} e^{-\frac{x^2}{4}\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = \sqrt{k} e^{-\frac{x^2}{4}\left(\frac{k-1}{k}\right)} = \sqrt{k} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$ / $\alpha = \frac{k}{k-1}$, $k > 1$.

On rappelle que $\mathcal{F}\left(e^{-kt^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}} \Longrightarrow e^{-\frac{x^2}{4k}} = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kt^2}\right)$

donc $\sqrt{k} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} = \mathcal{F}\left(\sqrt{k}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}\right)$ la solution est $f\left(x\right) = \sqrt{k}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}$