Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2017-2018
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen 1

Exercice 1. ⟦ *4 pts* ⟧ *Soit la formule à priorité*

$$\mathbf{F} = \neg((\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{z} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z}) \wedge (\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{z})).$$

1. *Rappelons que* $\models \neg(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow ((x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y))$.
   Déduire que pour toutes formules A et B on a : $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.
2. *Donner l'arbre de structure de F.*
3. *Transformer la formule F en une somme de monômes(FND).*
4. *La formule F est-elle satisfaisable ? La formule F est-elle valide? Justifier.*

Réponse.

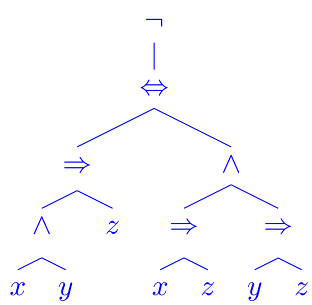
1. En substituant x par A et y par B on obtient :

$$\models \neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)).$$

De la propriété ($F \equiv G$ ssi $\models F \Leftrightarrow G$) on déduit que

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).$$ **0.5 pt**

2.



1 pt

3.

$$\begin{aligned} F &\equiv \overline{(xy \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)(y \Rightarrow z)} \\ &\equiv (xy \Rightarrow z)\overline{(x \Rightarrow z)(y \Rightarrow z)} + \overline{(xy \Rightarrow z)}(x \Rightarrow z)(y \Rightarrow z) \\ &\equiv (\bar{x} + \bar{y} + z)\big(x\bar{z} + y\bar{z}\big) + (xy\bar{z})(\bar{x} + z)(\bar{y} + z) \\ &\equiv \bar{x}y\bar{z} + \bar{y}x\bar{z} \end{aligned}$$ **1.5 pt**

4. Oui F est satisfaisable. Elle a exactement deux modèles. $x = 0, y = 1, z = 0$ et $x = 1, y = 0, z = 0$.
Elle n'est pas valide. Car $\neg F$ est satisfaisble. En effet:

$$\neg F \equiv (x + \bar{y} + z)(y + \bar{x} + z) \equiv xy + xz + \bar{y}\bar{x} + \bar{y}z + zy + z\bar{x} + z \equiv z + xy + \bar{y}\bar{x}.$$ **1 pt**

★ **Exercice** **2**. ⟦ *3 pts* ⟧

1. *Soient F et G deux formules. Montrer que :*

$$\models F \wedge G \text{ si et seulement si} \models F \text{ et } \models G.$$

R 2. *Soient F et G deux formules qui n'ont aucune variable commune. Montrer que*

$$\models F \vee G \text{ si et seulement si} \models F \text{ ou } \models G.$$

Réponse.

1. **Sens $\Rightarrow$.**

Supposons $\models (F \wedge G)$. Donc pour toute assignation v on a $[F \wedge G]_v = 1$ donc $min([F]_v, [G]_v) = 1$. Alors pour toute assignation v on a $[F]_v = [G]_v = 1$. Donc F et G sont valides. **0.5 pt**

Sens $\Leftarrow$.

Réciproquement supposons que $\models F$ et $\models G$. Soit v une assignation arbitraire. On a $[F]_v = 1$ et $[G]_v = 1$. Il vient alors que $[F \wedge G]_v = 1$. Donc $F \wedge G$ est valide. **0.5 pt**

2.

Sens $\Leftarrow$.

Par contraposée. Supposons que $\not\models F \vee G$. Donc il existe une assignation v telle que $[F \vee G]_v = 0$. On déduit $max([F]_v, [G]_v) = 0$. Donc $[F]_v = 0$ et $[G]_v = 0$. Alors F n'est pas valide et G n'est pas valide. **1 pt**

Sens $\Rightarrow$.

Par contraposée. Supposons que F n'est pas valide et G n'est pas valiide. Alors il existe v_1 telle que $[F]_{v1} = 0$ et il existe v_2 telle que $[G]_{v2} = 0$.
On construit alors l'assignation w définie par

$$\begin{cases} w(x) = v_1(x) & \text{si} \quad x \in \mathcal{V}(F) \\ w(x) = v_2(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque w et v_1 coïncident sur les variables de F. Donc $[F]_w = [F]_{v1} = 0$.
En même temps on a w et v_2 coïncident sur les variables de G. En effet, si $x \in \mathcal{V}(G)$ alors $x \notin \mathcal{V}(F)$ (car $\mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(G) = \emptyset$), Alors : si $x \in \mathcal{G}$ on a $w(x) = v_2(x)$. On déduit $[G]_w = [G]_{v2} = 0$. Alors $[F \vee G]_w = 0$. Donc $F \vee G$ n'est pas valide. **1 pt**

★ **Exercice** **3**. ⟦ *3 pts* ⟧

1. *Transformer $\neg F$ en forme normale conjonctive où*

$$\mathbf{F = (s \wedge q \Rightarrow r) \wedge (s \wedge p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow t) \Rightarrow (p \Rightarrow s) \Rightarrow p \Rightarrow t \wedge p}$$

Attention: Vous n'avez pas le droit de distribuer le produit par rapport à la somme.

2. *En utilisant l'arbre sémantique, étudier la validité de F.*

Réponse.

1. En utilisant l'équivalence remarquable $\overline{(A \Rightarrow B)} \equiv A\bar{B}$ on obtient:

$$\begin{aligned} \neg F &\equiv (sq \Rightarrow r)(sp \Rightarrow q)(q \Rightarrow t)(p \Rightarrow s)p\overline{(tp)} \\ &\equiv (\bar{s} + \bar{q} + r)(\bar{s} + \bar{p} + q)(\bar{q} + t)(\bar{p} + s)p(\bar{t} + \bar{p}) \end{aligned}$$ **1.5 pt**

2 **Arbre sémantique** Soit Γ l'ensemble des clauses équivalent à $\neg F$:

$$\Gamma = \{\bar{s} + \bar{q} + r, \bar{s} + \bar{p} + q, \bar{q} + t, \bar{p} + s, p, \bar{t} + \bar{p}\}$$

Faisons le selon l'énumération p, t, s, q.

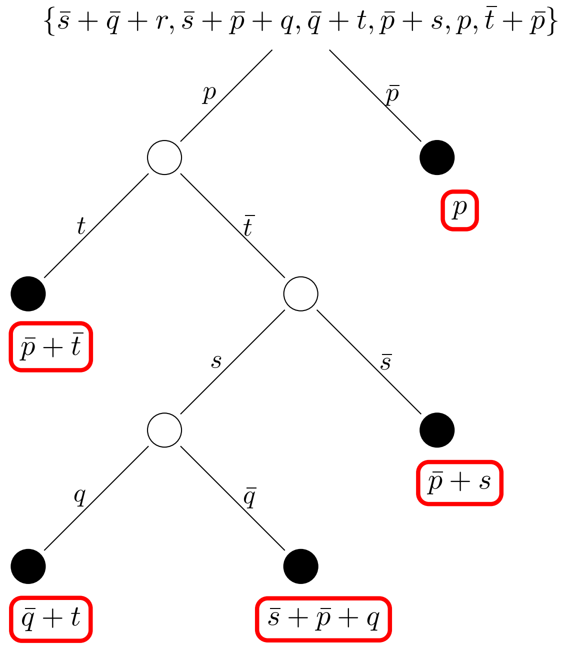


Figure 1: Arbre sémantique selon l'énumération: p, t, s, q.

L'arbre est fermé. Donc l'ensemble Γ est contradictoire. Alors F est valide. **1.5 pt**.

Exercice **4**. ⟦ ***3 pts*** ⟧

*Utiliser la méthode de résolution(**Stratégie positive**) pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.*

~~1.~~

$$\{\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{d}, \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{e}, \mathbf{f} \vee \neg\mathbf{c}\} \vDash (\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{d} \vee \mathbf{e} \vee \mathbf{f}).$$

~~2.~~

$$\{\mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c}), \mathbf{b} \Rightarrow (\neg\mathbf{a} \vee \mathbf{c})\} \vDash \mathbf{b} \wedge \neg\mathbf{c}.$$

Réponse.

1. On a

$$\{a \Rightarrow d, b \Rightarrow e, f \vee \neg c\} \vDash (a \vee b \vee c) \Rightarrow (d \vee e \vee f)$$

si et seulement si

$$\Big\{a \Rightarrow d, b \Rightarrow e, f \vee \neg c, \neg\big((a \vee b \vee c) \Rightarrow (d \vee e \vee f)\big)\Big\} \vDash \perp$$

si et seulement si

$$\Big\{\bar{a} + d, \bar{b} + e, f + \bar{c}, a + b + c, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\Big\} \vDash \perp \quad \textbf{1 pt}$$

Résolution positive.

(1)	$\bar{a}+d$	Hyp
(2)	$\bar{b}+e$	Hyp
(3)	$\bar{c}+f$	Hyp
(4)	$a+b+c$	Hyp
(5)	$\bar{d}$	Hyp
(6)	$\bar{e}$	Hyp
(7)	$\bar{f}$	Hyp
(8)	$a+c+e$	Res (2,4)
(9)	$a+c$	Res (6,8)
(10)	$a+f$	Res (9,3)
(11)	a	Res (7,10)
(12)	d	Res (11,1)
(13)	$\perp$	Res (12,5)

On a montré

$$\{\bar{a}+d, \bar{b}+e, f+\bar{c}, a+b+c, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\} \vdash_{\text{pos}} \perp$$

Par le théorème de correction de la stratégie positive on a le résultat demandé. **2 pts**

2.

$$\{a \Rightarrow (b \wedge \neg c), b \Rightarrow (\neg a \vee c)\} \models b \wedge \neg c \quad \text{ssi} \quad \bar{a}+b, \bar{a}+\bar{c}, \bar{b}+\bar{a}+c, \bar{b}+c\} \models \perp$$

Résolution positive.

(1)	$\bar{a}+b$	Hyp
(2)	$\bar{a}+\bar{c}$	Hyp
(3)	$\bar{b}+\bar{a}+c$	Hyp
(4)	$\bar{b}+c$	Hyp

Il n'y a pas de clause positive. Donc

$$\{\bar{a}+b, \bar{a}+\bar{c}, \bar{b}+\bar{a}+c, \bar{b}+c\} \not\vdash_{\text{pos}} \perp.$$

Comme la résolution positive est complète pour la réfutation, on déduit

$$\{\bar{a}+b, \bar{a}+\bar{c}, \bar{b}+\bar{a}+c, \bar{b}+c\} \not\models \perp.$$ **1 pt**

Exercice 5. ⟦ *4 pts* ⟧ *On rappelle que le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet. On définit le connecteur binaire $*$ par*

$$x * y \equiv \neg(x \Rightarrow y).$$

1. *Que vaut $0 * 0$? Déduire que le système $\{0, *\}$ est incomplet.*
2. *Montrer que le système $\{1, *\}$ est complet.*
3. *Déduire que les systèmes $\{\Leftrightarrow, *\}, \{\Rightarrow, *\}, \{\neg, *\}$ sont complets.*

Réponse.

1. $0 * 0 \equiv 0$. Donc pour l'assignation constante donnant 0 à toutes les variables, toute formule écrite avec $\{0, *\}$ aura comme valeur 0. Donc on ne peut pas exprimer 1 par exemple. Donc $\{0, *\}$ est incomplet. **1 pt**

2. On note que $x * y \equiv x \wedge \neg y$.

- $\neg x \equiv 1 * x$ **0.5 pt**
- $x \wedge y \equiv x \wedge \neg\neg y \equiv (x * \neg y) \equiv (x * (1 * y))$. **0.5 pt**
- $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \equiv \neg(\neg x * y) \equiv (1 * ((1 * x) * y))$ **0.5 pt**

3.

- $1 \equiv x \Leftrightarrow x$ Donc $\{\Leftrightarrow, *\}$ est complet. **0.5 pt**
- $1 \equiv x \Rightarrow x$ Donc $\{\Rightarrow, *\}$ est complet. **0.5 pt**
- Comme $\{\Rightarrow, *\}$ est complet et $x \Rightarrow y \equiv \neg(x * y)$ donc $\{\neg, *\}$ est complet. **0.5 pt**

Exercice 6. ⟦ *3 pts* ⟧

Soient les lettres propositionnelles r, p, b, s et h formalisant les propositions suivantes.

r : *" Il est riche"*

p : *" Il est pauvre"*

b : *" Il est en bonne santé"*

s : *" Il fait du sport "*

h : *" Il est heureux"*

Question 1: *Formaliser les propositions suivantes à l'aide de ces lettres propositionnelles et des connecteurs usuels $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.*

1. *"Si il est pauvre alors il n'est pas riche "*
2. *"Faire du sport est une condition nécessaire pour être en bonne santé"*
3. *"Il est heureux si et seulement s'il est en bonne santé ou il est riche"*
4. *"Il est heureux et pauvre implique qu'il fait du sport"*

Question 2: *Le dernier énoncé est-il conséquence logique des 3 premiers? Justifier en utilisant Davis-Putnam.*

Réponse.

Question 1.

$**1**$ $p \Rightarrow \neg r$ **0.5 pt**

$**2**$ $b \Rightarrow s$ **0.5 pt**

$**3**$ $h \Leftrightarrow b \vee r$ **0.5 pt**

$**4**$ $(h \wedge p) \Rightarrow s$ **0.5 pt**

Question 2.

$$\{p \Rightarrow \neg r, b \Rightarrow s, h \Leftrightarrow b \vee r\} \vDash (h \wedge p \Rightarrow s)$$

si et seulement si

$$\{p \Rightarrow \neg r, b \Rightarrow s, h \Leftrightarrow b \vee r, \neg(h \wedge p \Rightarrow s)\} \vDash \bot$$

si et seulement si

$$\{\bar{p} + \bar{r}, \bar{b} + s, \bar{h} + b + r, h + \bar{b}, h + \bar{r}, \bar{b} + s, h, p, \bar{s}\} \models \perp \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

En utilisant l'algorithme de Davis Putnam.

Par résolution unitaire sur $(h, p, \bar{s})$: On obtient $\{\bar{r}, b + r, \bar{b}\}$

Encore par résolution unitaire sur $\bar{b}, \bar{r}$ on obtient la clause vide.

Donc l'ensemble est contradictoire. Conclusion: Oui le dernier énoncé est une conséquence logique des 3 premiers. **1 pt**

Bon courage **Le barème est donné à titre indicatif**