

Un corrigé type du CI d'ANA3-Novembre 2019

Exercice 1:

1. Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n(x) = a_n x^n$ **0,5**
avec $(a_n)_n$ une suite numérique réelle indépendante de x . **0,25**

La définition du rayon **0,25**

2. Posons $u_n = \exp\left(n \log\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$, utilisons les DL :

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \exp\left(n \log\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \end{aligned} \right\} \dots \text{ **0,5**}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ **0,5** et la série numérique diverge par la condition nécessaire. **0,5**

3. Posons $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$

La convergence absolue: On a $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum |u_n|$ est une série de Riemann **0,25** qui est convergente **si et seulement si** $\alpha > 1$ **0,25**.

La convergence simple: On a pour $\alpha > 1$ la série converge absolument donc simplement, il reste à étudier le cas $\alpha \in]0, 1]$ pour cela utilisons la règle d'Abel **0,25**: posons $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $w_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

D'une part: $(v_n)_n$ est décroissante **0,25** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ **0,25**,

D'autre part $|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n w_k \right| = \left| -1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 \dots + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right| \leq$

2 **0,75**.

Ce qui nous donne sa convergence.

La semi-convergence: Elle est semi-convergente pour $\alpha \in]0, 1]$ **0,5**

Exercice 2 :

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ telle que $f_n(x) = ne^{-n^2 x^2} \geq 0$.

1. La convergence simple sur \mathbb{R} : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n^2 x^2}$.

1er cas : $x \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. **0,5**

2ème cas : $x = 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. 0,25

On en conclut que la suite de fonction est convergente sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers la fonction nulle 0,25 (elle diverge en $x_0 = 0$).

2. La convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ où $a > 0$. On pose $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$, on a :

$$g_n(x) \leq ne^{-n^2 a^2} = M_n \quad \forall x \in [a, +\infty[\quad \text{où } a > 0 \quad \text{ 0,5 } \quad \text{ 0,25 }$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ 0,5, ce qui implique la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ sur tout $[a, +\infty[$ 0,25 où $a > 0$.

3. La convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. Choisissons $x_n = \frac{1}{n}$, la suite $(x_n)_n \subset]0, +\infty[$ 0,25, on a

$$\sup_{]0, +\infty[} g_n(x) \geq g_n(x_n) = \frac{n}{e} = m_n \quad \text{ 0,5 }$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty \neq 0$ 0,5, ce qui implique que $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ 0,25.

Exercice 3 : Posons $u_n(x) = \frac{1}{n(1+e^x)} > 0$.

1. La série proposée est une série de Riemann donc elle converge puisque $(1+e^x) > 1$ 0,5.

Ceci donne $D =]-\infty, +\infty[$ 0,5.

2. **a) Continuité de F :**

Appliquons le théorème de conservation de la continuité pour les séries de fonctions.

★ Etude de la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$:

u_n est décroissante selon x , on obtient :

$$u_n(x) \leq \frac{1}{n(1+e^a)} = c_n \quad \text{ 0,5 } \quad \forall x \in [a, +\infty[\quad \text{ 0,25 }, \quad \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} c_n$$

converge car c'est une série de Riemann ($1+e^a > 1$) 0,25.

On obtient la convergence normale par majoration (la convergence dominée), d'où la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ sur tout $[a, +\infty[$ 0,25.

$] -\infty, +\infty[$ 0,25.

★ Toutes les u_n sont continues sur $] -\infty, +\infty[$ comme somme, produit et

composée de fonctions continues 0,25.

Donc F est continue sur tout $[a, +\infty[\subset]-\infty, +\infty[$ 0,25. Conclusion:

F est continue sur $] - \infty, +\infty[$ 0,25.

b) Dérivabilité de F :

Appliquons le théorème de conservation de la dérivabilité pour les séries de fonctions.

★ Toutes les u_n sont dérivables sur $] - \infty, +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables 0,25.

★ Etude de la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u'_n(x)$:

On a $u'_n(x) = (\exp[-(1+e^x)\log n])' = -\log n \cdot e^x \exp[(1+e^x)\log n]$ 0,5

On constate que $|u'_n(x)| = \frac{\log n}{n(1+e^x)} e^x \leq \frac{\log n}{n(1+e^a)} e^b = t_n$, 0,75 $\forall x \in$

$[a, b]$ 0,25, $(a < b) \quad \forall n \geq 1$ et $\sum_{n \geq 1} t_n$ converge car c'est une série de

Bertrand 0,25 $((1+e^a) > 1)$.

On obtient la convergence normale par majoration (la convergence dominée), d'où la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} u'_n(x)$ sur tout $[a, b] \subset$

$] - \infty, +\infty[$ 0,25.

★ On a déjà montré que la série converge sur \mathbb{R} 0,25 donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\sum u_n(x_0)$ converge.

Donc F est dérivable sur tout $[a, b] \subset]-\infty, +\infty[$ 0,25. Conclusion: F est dérivable sur $] - \infty, +\infty[$ 0,25.