Examen 1 de Logique mathématique: Corrigé

Exercice 1 **2,5 pts**

1. Définition par induction **1 pt**

• Si $F \in \mathcal{F}_0$ alors $n[F] = 0$. • Si $F = \neg G$ alors $n[F] = n[G] + 1$. • Si $F = (G\alpha H)$ alors $n[F] = n[G] + n[H] + 1$.

2. Démonstration par induction. **1.5pts**

• Soit $F \in \mathcal{F}_0$. Nous avons $n[F] = 0$ et $s[F] = 1$. Donc $1 = s[F] \leq 2n[F] + 1 = 1$.
• Soit $F = \neg G$ avec $s[G] \leq 2n[G] + 1$. Nous avons alors

$$s[F] = 1 + s[G] \leq 2n[G] + 2 \leq 2n[F] \leq 2n[F] + 1.$$

• Soit $F = (G\alpha H)$, où α un connecteur binaire et $s[G] \leq 2n[G] + 1$ et $s[H] \leq 2n[H] + 1$. Il vient alors:

$$\begin{aligned} s[F] &\leq s[G] + s[H] + 1 \leq 2n[G] + 1 + 2n[H] + 1 + 1 \\ &\leq 2(n[G] + n[H] + 1) + 1 \leq 2n[F] + 1. \end{aligned}$$

Je vous rappelle que card$(A \cup B) \leq$ card(A) + card(B).

Exercice 2 **3,5 pts**

1. Formule complètement parenthésée **0.5pts** $F = \Big(\big((a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)\big) \Rightarrow \big(a \Rightarrow (b \vee c)\big) \Big)$

2. Transformation en FND. **1.5pts**

$$\begin{aligned} F = \Big(\big((a \Rightarrow b) + (a \Rightarrow c)\big) \Rightarrow \big(a \Rightarrow (b + c)\big) \Big) &\equiv \overline{\big((a \Rightarrow b) + (a \Rightarrow c)\big)} + \big(a \Rightarrow (b + c)\big) \\ \equiv \overline{(a \Rightarrow b)}\ \overline{(a \Rightarrow c)} + \big(\bar{a} + b + c\big) &\equiv a\bar{b}a\bar{c} + \bar{a} + b + c \equiv a\bar{b}\bar{c} + \bar{a} + b + c \end{aligned}$$

3. Satisfaisabilité et validité de F **0,5 + 1 pts**

Oui F est satisfaisable car elle admet au moins un modèle. Par exemple, du premier monôme on obtient que $a = 1, b = 0, c = 0$ est un modèle de F. F est valide car en appliquant la simplification $x + \bar{x}y \equiv x + y$ on obtient:

$$F \equiv \bar{b}\bar{c} + \bar{a} + b + c \equiv \bar{c} + \bar{a} + b + c \equiv \top.$$

Exercice 3 **2 pts**

Supposons que $\boxed{\text{(a)}}$ $A, B \vDash C$: Tout modèle de $\{A, B\}$ est modèle de C et $\boxed{\text{(b)}}$ $A, \neg B \vDash C$: Tout modèle de $\{A, \neg B\}$ est modèle de C. Montrons que $A \vDash C$.

Soit v un modèle de A. Donc $[A]_v = 1$. Nous distinguons deux cas possibles: $[B]_v = 1$ et $[B_v] = 0$.

• Si $[B]_v = 1$ Alors v est un modèle de A et B, donc il est modèle de l'ensemble $\{A, B.\}$ De (a) on déduit que v est modèle de C.
• Si $[B]_v = 0$ Alors $[\neg B]_v = 1$. On déduit que v est modèle de A et $\neg B$. Donc v est modèle de l'ensemble $\{A, \neg B\}$. Par (b) on conclut que v est modèle de C. Dans les deux cas v est alors modèle de C. CQFD.

Exercice 4 **3 pts**

1. FND de IF **0.5pts** Il vient de la définition qu'on peut exprimer IF comme: $IF(x, y, z) \equiv xy + \bar{x}z$.

2. IF n'est pas complet **0.5pts** Remarquons que $IF(1, 1, 1) = 1$. Donc pour l'assignation constante valant 1 pour toute variable, la valeur de toute formule exprimée seulement avec IF et des variables sera 1. (On peut le montrer par induction, ce n'est pas demandé par l'exercice). Donc il est impossible d'exprimer la formule $\perp$ qui vaut 0 pour cette assignation. On conclut que IF n'est pas complet.

3. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ complet **0.5pts** $x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$. $x \Leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$.

4. $\{IF, 1, 0\}$ est complet **1.5pts** • $\neg x \equiv IF(x, 0, 1)$. • $(x \wedge y) \equiv IF(x, y, 0)$.
• $(x \vee y) \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \equiv \neg(IF(x, 0, 1) \wedge IF(y, 0, 1)) \equiv \neg IF(IF(x, 0, 1), IF(y, 0, 1), 0) \equiv IF(IF(IF(x, 0, 1), IF(y, 0, 1), 0), 0, 1)$

Exercice 5 **4,5 pts**

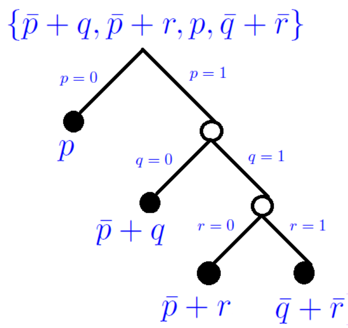
1. FNC **1,5 pts**

$$\begin{aligned} \neg F = \neg\Bigg(\Big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Big) \Rightarrow \Big(p \Rightarrow (q \wedge r) \Big) \Bigg) &\equiv \Big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Big) \overline{\Big(p \Rightarrow (q \wedge r) \Big)} \\ \equiv (\bar{p} + q)(\bar{p} + r)p(\bar{q} + \bar{r}). \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma = \{\bar{p}+q, \bar{p}+r, p, \bar{q}+\bar{r}\}.$$

2. Arbre sémantique **1.5pts**



L'arbre sémantique est fermé donc $\neg F$ est insatisfaisable.

3. Résolution **1.5pts** On a $\models F$ ssi à $\neg F \models \perp$. Comme la résolution est complète pour la réfutation et correcte c'est équivalent à montrer $FNC(\neg F) \vdash \perp$.

(1)	$\bar{p}+q$	Hyp
(2)	$\bar{p}+r$	Hyp
(3)	p	Hyp
(4)	$\bar{q}+\bar{r}$	Hyp
(5)	q	Res (1,3)
(6)	r	Res (2,3)
(7)	$\bar{q}$	Res (6,4)
(8)	$\perp$	Res (7,5)

Conclusion: la formule F est valide.

Exercice 6 **2 pts**

Soit $\Gamma = \{\bar{p}+q, p+r\}$. $C = q+\bar{r}$. $\neg C \equiv \bar{q}r$. Donc on doit montrer: $\{\bar{p}+q, p+r, \bar{q}, r\} \nvdash \perp$. Par le théorème complétude de la résolution (en fait sa contraposée) il suffit de démontrer que $\{\bar{p}+q, p+r, \bar{q}, r\} \nvdash \perp$.

(1)	$\bar{p}+q$	Hyp
(2)	$p+r$	Hyp
(3)	$\bar{q}$	Hyp
(4)	r	Hyp
(5)	$q+r$	Res (1,2)
(6)	$\bar{p}$	Res (1,3)

Les résolutions qu'on peut faire sont entre 5 et 3 mais ça donne r qui n'est pas une nouvelle clause, ou bien entre 6 et 2 mais ça donne aussi r qui n'est pas nouvelle. Donc on n'aura plus de nouvelles clause. Comme $\perp$ n'apparait pas dans les clauses, l'ensemble n'est pas contradictoire. Donc la conclusion n'est pas une conséquence logique des hypothèses.

Exercice 7 **3 pts**

1. **Défintion récusrive de `estClause`.**

- `estClause`$(F) = vrai$ si F est atomique$(F \in \mathcal{F}_0)$
- `estClause`$(\neg F) = vrai$ si F est atomique
- `estClause`$(\neg F) = faux$ si F n'est pas atomique
- `estClause`$(G \vee H) =$ si `estClause`$(G) = vrai$ alors `estCaluse`(H) sinon $faux$
- `estClause`$(G \wedge H) = faux$
- `estClause`$(G \Rightarrow H) = faux$
- `estClause`$(G \Leftrightarrow H) = faux$

2. **Défintion récusrive de `estFNC`.** • `estFNC`$(F) = vrai$ si F est atomique$(F \in \mathcal{F}_0)$.

- `estFNC`$(\neg F) = vrai$ si F est atomique • `estFNC`$(\neg F) = faux$ si F n'est pas atomique
- `estFNC`$(G \vee H) =$ si `estClause`$(G) = vrai$ alors $estCaluse(H)$ sinon $faux$
- **`estFNC`$(G \wedge H) =$ si `estFNC`$(G) = vrai$ alors `estFNC`(H) sinon** $faux$
- `estFNC`$(G \Rightarrow H) = faux$ • `estFNC`$(G \Leftrightarrow H) = faux$