2011 :

ALGEBRE :

1 _ A n'st pas diagonalisable :

a _ le polynome caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

Dévellopment selon la 1ère ligne

b _ les sous espaces vectorielle propres :

$E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + I_n)$

La solution du systeme :

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 2x + 0y + 4z = 0 \\ x + 0y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_{-1} = \{ y(0,1,0) / \forall y \in \mathbb{R} \}$

le cardinale de $E_{-1} \neq$ multiplicité de -1

alors A n'st pas diagonalisable

2 _ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

$v = (0,1,0)$

cherchons w :

$E_3 = \mathrm{Ker}(f - 3I_n)$

$$\begin{cases} -4x + 0y + 0z = 0 \\ 2x - 4y + 4z = 0 \\ x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow E_3 = \{ y(0,1,1) / \forall y \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow w = (0.1.1)$

$f(v') = v - v'$:

posons $v' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$f(v') = A.v' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x \\ 2x - y + 4z \\ x + 3z \end{pmatrix}$$

$$v - v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$$

v' s'il xiste vérifie :

$$\begin{cases} -x = -x \\ 2x - y + 4z = 1 - y \\ x + 3z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \text{valeur q'q} \\ z = -1/4 \end{cases}$$

alors il xiste $v' = (1, 0, -1/4)$

tq : $f(v') = v - v'$

3- a- $\mathrm{card}\, B = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

et $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$
$\Downarrow$
B est libre

alors B est une Base de $\mathbb{R}^3$

b- $P = \begin{array}{c|ccc} & v & v' & w \\ e_1 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & -1/4 & 1 \end{array}$

$$\begin{cases} v = e_2 \\ v' = e_1 - \frac{1}{4} e_3 \\ w = e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_2 = v \\ e_3 = w - v \\ e_1 = v' + \frac{w}{4} - \frac{v}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{v}{4} + v' + \frac{w}{4} \\ e_2 = v \\ e_3 = -v + w \end{cases}$$

$P^{-1} = \begin{array}{c|ccc} v & -1/4 & 1 & -1 \\ v' & 1 & 0 & 0 \\ w & 1/4 & 0 & 1 \end{array}$

$A' = P^{-1} A P$