Exercice **1**.

1. *Ecrire dans le langage des prédicats les énoncés suivants:*

   (a) *On ne peut pas être amis et ennemis.*

   (b) *Les ennemis des amis d'une personne sont ennemis de cette personne.*

   (c) *Il y a une personne qui est amie de tout le monde et il y a une personne qui est ennemie de tout le monde.*

   On supposera que la relation Ami est symétrique.

2. *Montrer à l'aide de la résolution que l'ensemble des énoncés $\{a, b, c\}$ auquel on ajoute la symétrie de la relation "Ami" est insatisfaisable(non satisfiable).*

N.B. *Utilisez uniquement les symboles de prédicat A (ami) et E (ennemi).*

Solution.

1. **Formalisation**

   (a) $\neg\exists x \exists y (A(x, y) \wedge E(x, y))$.

   (b) $\forall x \forall y \forall z (A(y, x) \wedge E(z, y) \Rightarrow E(z, x))$

   (c) $\exists x \forall y A(x, y) \wedge \exists x \forall y E(x, y)$.

   (d) $\forall x \forall y (A(x, y) \Rightarrow A(y, x))$.

2. On va montrer que $\{a, b, c, d\}$ est contradictoire. On trouve l'ensemble des clauses de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ et on montre que $\{a, b, c, d\} \vdash \perp$.

   Première étape: Formes prénexes.

   (a) $\forall x \forall y \neg(A(x, y) \wedge E(x, y))$.

   (b) $\forall x \forall y \forall z (A(y, x) \wedge E(z, y) \Rightarrow E(z, x))$

   (c) $\exists x \exists z \forall y \forall w (A(x, y) \wedge E(z, w))$.

   (d) $\forall x \forall y (A(x, y) \Rightarrow A(y, x))$.

   Deuxième étape: Skolémisation

   (a) $\forall x \forall y \neg(A(x, y) \wedge E(x, y))$.

   (b) $\forall x \forall y \forall z (A(y, x) \wedge E(z, y) \Rightarrow E(z, x))$

   (c) $\forall y \forall w (A(a, y) \wedge E(b, w))$.

   (d) $\forall x \forall y (A(x, y) \Rightarrow A(y, x))$.

Troisième étape: Forme clausale

$C_1 :\ \neg A(x,y) \vee \neg E(x,y))$.

$C_2 :\ \neg A(y,x) \vee \neg E(z,y) \vee E(z,x)$.

$C_3 :\ A(a,y)$.

$C_4 :\ E(b,w)$.

$C_5 :\ \neg A(x,y) \vee A(y,x)$.

Quatrième étape: Renommage

$C_1 :\ \neg A(x_1,y_1) \vee \neg E(x_1,y_1)$.

$C_2 :\ \neg A(y_2,x_2) \vee \neg E(z_2,y_2) \vee E(z_2,x_2)$.

$C_3 :\ A(a,y_3)$.

$C_4 :\ E(b,w_4)$.

$C_5 :\ \neg A(x_5,y_5) \vee A(y_5,x_5)$.

Cinquième étape: Résolution (Instances)

$C_6 :\ \neg A(b,a) \vee \neg E(b,a)$.	$C_1[b/x_1; a/y_1]$
$C_7 :\ A(a,b)$	$C_3[b/y_3]$
$C_8 :\ E(b,a)$	$C_4[b/w_4]$
$C_9 :\ \neg A(a,b) \vee A(b,a)$.	$C_4[b/w_4]$
$C_{10} :\ \neg A(b,a)$	Res (C_6, C_8)
$C_{11} :\ A(b,a)$	Res (C_7, C_9)
$C_{12} :\ \perp$.	Res (C_{10}, C_{11})

Par le théorème de correction de la résolution, on déduit que l'ensemble des clauses est insatisfaisable. Donc l'ensemble des formules $\{a, b, c, d\}$ est contradictoire. **Fin de la solution**

Remarque On peut faire la cinquième étape, en utilisant l'unification.

Cinquième étape: Résolution (Unification)

$C_6 :\ A(y_3,a)$	Res (C_5, C_3) MGU=$\{x_5 \leftarrow a; y_5 \leftarrow y_3\}$
$C_7 :\ \neg E(y_3,a)$	Res (C_6, C_1) MGU=$\{x_1 \leftarrow y_3; y_1 \leftarrow a\}$
$C_8 :\ \perp$.	Res (C_7, C_4) MGU=$\{y_3 \leftarrow b; w_4 \leftarrow a\}$