ESI **Novembre 20**

$2^{\text{ième}}$ année CPI **Contrôle intermédiaire** **ANA 3**

- Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation.
- Documents et calculatrice interdits.
- Durée de l'épreuve : 2 heures.

Partie 1:

Exercice 1 (4 points) :

En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'EDO suivante :

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 6\sin(t), \\ y(0) = 6, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 (5 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } t \in]0, \pi[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer la transformée de Fourier de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2) En utilisant le TIF en 0 trouver la valeur de l'intégrale: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi x) + 1}{1 - x^2} dx$.

Exercice 3 (6 points) :

Soit F la fonction suivante :

$$F(x) = \int\limits_0^1 \ln(1 + t^x) dt.$$

1) Pour $x \geq 0$ montrer que F est bien définie.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : F(-x) = F(x) + x$, en déduire le domaine de définition de F.
3) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$, en déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Bon courage

Nom:
Prénom:
Groupe:

Partie 2: Répondre ici sur la feuille

Exercice1: (2,5 points)

I- Soient D un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$.
Répondre par vrai ou faux sans justifier:
a) $Int\,(Int\,(D)) = Int\,(D)$.
b) $Ext\,(D) = Fr\,(Int\,(D))$.
c) **Si** X_0 est un point d'accumulation de D
alors c'est un point intérieur à D.

II- Soient $X_1 = (0,0)$ et Ω le domaine de $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y < x\right\}.$$

1) Représenter Ω.

2) **Répondre par vrai ou faux sans justifier:**
a) Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
b) Ω est un fermé.
c) X_1 est un point d'accumulation.
d) X_1 est un point intérieur.
e) X_1 un point frontière de D.

Exercice2: (2,5 points)

Résoudre dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: $y * y = y$

Un corrigé:

Partie1:

Exercice1: En utilisant la TL: $\mathcal{L}\left(y''(t)\right)+4\mathcal{L}\left(y(t)\right)=6\mathcal{L}\left(\sin t\right);y(0)=6$, $y'(0)=0$. sachant que:
$\mathcal{L}\left(y''(t)\right)=x^2Y\left(x\right)-xy(0)-y'(0)$ et $\mathcal{L}\left(\sin t\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$ donc:
$x^2Y\left(x\right)-6x+4Y(x)=\dfrac{6}{x^2+1}\Longleftrightarrow\left(x^2+4\right)Y\left(x\right)=\dfrac{6}{x^2+1}+6x=$
$Y\left(x\right)=\dfrac{6}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}+\dfrac{6x}{\left(x^2+4\right)}$ on décompose d'abord:
$\dfrac{1}{\left(u+1\right)\left(u+4\right)}=\dfrac{a}{\left(u+1\right)}+\dfrac{b}{\left(u+4\right)}=\dfrac{\left(a+b\right)u+4a+b}{\left(u+1\right)\left(u+4\right)}$ on trouve $a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$
ie: $Y\left(x\right)=\dfrac{2}{\left(x^2+1\right)}-\dfrac{2}{\left(x^2+4\right)}+\dfrac{6x}{\left(x^2+4\right)}$ on passe alors à la TL inverse:
$y\left(t\right)=2\sin t-\sin\left(2t\right)+6\cos\left(2t\right).$

Exercice2:
1) ★ Montrons que $f\in\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}\right)$:
⇝ f est continue sur $\mathbb{R}$ (faire un graphe ou les limites en 0)
⇝ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_0^{\pi}\sin t dt$ intégrale propre ie convergente. Donc $f\in\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}\right)$.

★ $\displaystyle\mathcal{F}\left(f\right)\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}f(t)dt=\int_0^{\pi}e^{-ixt}\sin t dt=\int_0^{\pi}\cos\left(xt\right)\sin t dt-i\int_0^{\pi}\sin\left(xt\right)\sin t dt$

⇝ $\displaystyle I_1=\int_0^{\pi}\cos\left(xt\right)\sin t dt\overset{\text{IPP}}{=}\left[-\cos\left(xt\right)\cos t\right]_0^{\pi}-x\int_0^{\pi}\sin\left(xt\right)\cos t dt$

$\displaystyle I_1=\cos\left(x\pi\right)+1-x\left(\left[\sin\left(xt\right)\sin t\right]_0^{\pi}-x\int_0^{\pi}\cos\left(xt\right)\sin t dt\right)$

ie $I_1=\cos\left(x\pi\right)+1+x^2I_1\Longleftrightarrow I_1=\dfrac{\cos\left(x\pi\right)+1}{\left(1-x^2\right)},\ x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-1,1\right\}$

⇝ $\displaystyle I_2=\int_0^{\pi}\sin\left(xt\right)\sin t dt\overset{\text{IPP}}{=}\left[-\sin\left(xt\right)\cos t\right]_0^{\pi}+x\int_0^{\pi}\cos\left(xt\right)\cos t dt$

$\displaystyle I_2=\sin\left(x\pi\right)+x\left(\left[\cos\left(xt\right)\sin t\right]_0^{\pi}+x\int_0^{\pi}\sin\left(xt\right)\sin t dt\right)$

ie $I_2=\sin\left(x\pi\right)+x^2I_2\Longleftrightarrow I_2=\dfrac{\sin\left(x\pi\right)}{\left(1-x^2\right)},\ x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-1,1\right\}$

On aurait pu aussi faire deux IPP à $\int\limits_0^\pi e^{-ixt}\sin t dt$.

Conclusion: $\mathcal{F}(f)(x) = I_1 - iI_2 = \dfrac{\cos(x\pi)+1}{(1-x^2)} - i\dfrac{\sin(x\pi)}{(1-x^2)},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

2) Comme f est continue en 0 et admet une dérivée à droite et à gauche de ce point, en effet:

$\rightsquigarrow \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin t}{t} = 1\in\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow \lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{0}{t} = 0\in\mathbb{R}$.

Donc on peut appliquer le TIF en 0:

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} e^{i0t}\mathcal{F}(f)(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_{-A}^{A}\underbrace{\frac{\cos(x\pi)+1}{(1-x^2)}}_{\text{paire}}dx - i\int\limits_{-A}^{A}\underbrace{\frac{\sin(x\pi)}{(1-x^2)}}_{\text{impaire}}dx\right)$$

On obtient: $0 = f(0) = \dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\dfrac{\cos(x\pi)+1}{(1-x^2)}dx = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos(x\pi)+1}{(1-x^2)}dx$.

Donc $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos(x\pi)+1}{(1-x^2)}dx = 0$.

Exercice3:

1) Soit $f(t,x) = \ln(1+t^x) = \ln(1+e^{x\log t})$ donc $f\in R_{loc}]0,1]$ selon t et $f>0$.
Pour $x\geq0$, On sait que $\log(1+u)\leq u\ \forall u>0$ (on peut utiliser d'autres comparaisons) donc $f(t,x)\leq t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}$, or $\int\limits_0^1\dfrac{1}{t^{-x}}dt$ converge pour $-x<1$ ie $x>-1$

donc d'aprés le critère de comparaison $\int\limits_0^1 f(t,x)dt$ converge (on a préparé la CD pour la question3).

Donc F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrons que: pour tout $x\in D$, $F(-x) = F(x)+x$:

$$F(-x) = \int\limits_0^1\ln(1+t^{-x})dt = \int\limits_0^1\ln(\frac{t^x+1}{t^x})dt = \int\limits_0^1(\ln(1+t^x) - x\log t)\,dt$$

Comme $\int\limits_0^1\log t dt$ converge (intégrale de Bertrand) alors:

$$F(-x) = \int\limits_0^1(\ln(1+t^x)dt - x\log t)\,dt$$

or $\int\limits_0^1 \log t dt = [t \log t]_0^1 - \int\limits_0^1 dt = -\lim\limits_{t\to 0} (t \log t) - 1 = -1$
Donc: $F(-x) = F(x) - x\,(-1) = F(x) + x$.
Déduction: Pour $x \leq 0$ on a $F(x) = F(-x) - x$ et $(-x) \geq 0$ donc $F(x)$ est définie.
Conclusion: $D_F = \mathbb{R}$.
3) Utilisons le théorème de conservation de la continuité sur $[0, +\infty[\times]0, 1]$:
$\rightsquigarrow$ Montrons la convergence dominée:
On a que $f(t,x) \leq t^x$ et elle est décroissante en x, en effet:
$\dfrac{\partial t^x}{\partial x} = \dfrac{\partial e^{x \log t}}{\partial x} = (\log t)\,.t^x \leq 0$, et donc:
$f(t,x) \leq 1 = \varphi(t)\ \ \forall x \in [0, +\infty[$ avec $\int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge (Intégrale de Riemann, propre).
On en conclut que $\int\limits_0^1 f(t,x)dt$ vérifie la convergence dominée sur tout $[0, +\infty[$.
$\rightsquigarrow$ La fonction f est continue par morceaux selon t car c'est la composée, somme et le produit de fonctions continues (expo et log).
$\rightsquigarrow$ La fonction f est continue selon x car c'est la composée, somme et le produit de fonctions continues (expo et polynôme).
Donc F est continue sur tout $[0, +\infty[$, et pour tout $x \in]-\infty, 0]$ $F(x) = F(-x) - x$:
on en déduit qu'elle est continue comme somme de fonctions continues
Conclusion: F est continue sur $\mathbb{R}$.
4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\log t . t^x}{(1 + t^x)}$
Utilisons le théorème de conservation de la continuité sur $[0, +\infty[\times]0, 1]$:
$\rightsquigarrow$ Montrons la convergence dominée:
On a que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \dfrac{|\log t|\,.t^x}{(1 + t^x)} \leq |\log t| = \psi(t)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ avec $\int\limits_0^1 \psi(t)\,dt$ converge (Intégrale de Bertrand, $\alpha = 0$).
On en conclut que $\int\limits_0^1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie la convergence dominée sur tout $\mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow$ La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par morceaux selon t car c'est la composée, somme et le produit de fonctions continues (expo et log).
$\rightsquigarrow$ La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue selon x car c'est la composée, somme et le produit de fonctions continues (expo et polynôme).
Conclusion: F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

———————————————————————————————

Partie2:

Exercice1: 0,25 pts pour chaque réponse et 0,5 pour le graphe.

Exercice2: $y * y = y$ donne $\mathcal{F}(y) . \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(y) \Longleftrightarrow \mathcal{F}(y)(\mathcal{F}(y) - 1)$

Remarque: Comme $\mathcal{F}(y)$ est continue alors on ne peut pas avoir un x telle que $\mathcal{F}(y)(x) = 0$ et $\mathcal{F}(y)(x) = 1$ en même temps.

<u>1er cas:</u> supposons $\mathcal{F}(y) = 0$ (paire), appliquons ensuite le TIF puisque $y \in C^1(\mathbb{R})$:

$y(a) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(ax) . \mathcal{F}(y)(x)\, dx = 0$ donc $y \equiv 0$ est une solution de l'quation proposée.

<u>1ème cas:</u> supposons $\mathcal{F}(y) = 1$ (paire), appliquons encore le TIF puisque $y \in C^1(\mathbb{R})$:

pour $a \neq 0 : y(a) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(ax) . \mathcal{F}(y)(x)\, dx = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(ax)\, dx = \lim_{A \to +\infty} \dfrac{1}{a\pi} [\sin(ax)]_0^A$ n'existe pas

Cette solution est donc rejetée (inutile de voir le cas $a = 0$).