Exercice 1 : (8 pts)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in End(E)$. Soit B une base de E et $A = M_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1- Supposons que $\lambda = 0$ est une valeur propre de f. Est ce que f est un automorphisme?

Solution : Si $\lambda = 0$ est une valeur propre de f, alors $f - \lambda Id = f$ n'est pas bijectif (proposition du cours) **(0,5 pt)**

2- Supposons que $P_f(X) = (\alpha - X)^n$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et que f est diagonalisable. Déterminer f (**Ind :** on peut utiliser la matrice A).

Solution : On a par hypothèse $\alpha \in \mathbb{K}$ est la seule valeur propre de A de multiplicité n, et comme f est diagonalisable, donc A est semblable à la matrice diagonale $A' = \alpha I_n$. Ainsi il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$ d'où $A = P(\alpha I_n)P^{-1} = \alpha I_n$, i.e : $f = \alpha Id$. **(1 pts)**

3- Supposons que : $A = (a_{ij})$ tel que $a_{ij} = 1$ pour tout $(i,j) \in [[1,n]] \times [[1,n]]$.

a/- Déterminer les valeurs propres de A.

Solution : On calcule :

$$P_A(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-X & \ldots\ldots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

Si on ajoute à la 1ère colonne les autres colonnes on aura $(n - X)$ en facteur, puis on retranche la 1ère ligne des autres lignes, on obtient : $P_A(X) = (n - X)(-X)^{n-1}$, ainsi les valeurs propres de A sont : n de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n - 1$. **(1,5 pts)**

b/- En déduire le déterminant de A.

Solution :

Cas 1 : $n = 1$, $\det A = 1$ **(0,25 pts)**

Cas 2 : $n \geq 2$, comme 0 est valeur propre de A, d'après la question 1, la matrice A n'est pas inversible donc $\det A = 0$. **(0,25 pt)**

c/- Montrer que A est diagonalisable.

Solution : On a A diagonalisable ssi $rg(A) = 1$ (i.e : la dimension du sous-espace propre de f associé à 0 est égal à $n - 1$).

Or, d'après la définition de A, celle-la est de rang1.**(1 pt)**

4- On dit que f est trigonalisable s'il existe une base C de E telle que la matrice associée à f relativement à la base C soit triangulaire supérieure.

Montrer que si f est trigonalisable alors $P_f(X)$ se décompose dans $\mathbb{K}[X]$ en produit de polynômes de degrés 1.

Solution : Si f est trigonalisable, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure $A^{'}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P_f(X) &= P_A(X) = P_{A'}(X) = \det\left(A^{'} - XI\right) \\ &= \prod_{i=1}^{i=n} (\alpha_{ii} - X) \text{ où les } \alpha_{ii} \text{ sont les éléments diagonaux de } A^{'}. \end{aligned}$$

i.e. :$P_f(X)$ se décompose dans $\mathbb{K}[X]$ en produit de polynômes de degrés 1. **(1 pt)**

5- Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $P_f(X) = 1 - X^n$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donner une matrice diagonale associée.

Qu'en est-il dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Solution : Les racines de $1 - X^n$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples et sont au nombre n, celles-la s'appellent les racines *nièmes* de l'unité. Donc f est diagonalisable. **(1 pt)**

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Cas 1 : Si $n = 1$ ou $n = 2$ $P_f(X)$ admet n racines réelles simples donc f est diagonalisable. **(0,5 pt)**

Cas 2 : Si $n \geq 3$, P admet au moins une racine non réelle, donc f n'est pas diagonalisable. **(1 pt)**

Exercice 2 : (6 pts)

Soit $f \in End(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice associée à la base canonique B de $\mathbb{R}^4$ est donnée par:

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1- Soit le polynôme $T(X) \in \mathbb{R}[X]$ défini par : $T(X) = X^2 - 3X + 2$. Calculer $T(A)$.

Solution :

$T(A) = A^2 - 3A + 2I = 0$. **(1 pt)**

2- En déduire que toute valeur propre de A est une racine de T.

Solution : Soit λ une valeur propre de A; donc $\exists v \neq 0 / Av = \lambda v$, on en déduit $A(Av) = \lambda(Av) \Longrightarrow A^2 v = \lambda^2 v$ d'où :

$$\begin{aligned} \left[A^2 - 3A + 2I_3\right] v &= 0 \Longrightarrow A^2 v - 3Av + 2v = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda^2 v - 3\lambda v + 2v = 0 \\ &\Longrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)v = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \end{aligned}$$

d'où λ est racine du polynôme $T(X) = X^2 - 3X + 2$. **(1 pt)**

3- Utiliser la trace de A pour déterminer le spectre de A.

Solution : Puisque $Tr(A) = 6$, alors le seul cas possible est : $Spec(A) = \{1_{(2)}, 2_{(2)}\}$ **(1 pt)**

4- Montrer que A est diagonalisable.

Solution : Soit $g = f - Id$ et $h = f - 2Id$. On a :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les notations usuelles $E_1 = \ker(g) =< v_1 = (-1, 1, 0, 0), v_2 = (-1, 0, 0, 1) >$.

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les notations usuelles : $E_2 = \ker(h) =< v_3 = (-1, 1, -1, 0), v_4 = (0, 0, -1, 1) >$

Ainsi : $\dim E_1 + \dim E_2 = 4$, alors A est diagonalisable. **(2 pt)**

5- Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale $A^{'}$ telles que : $A^{'} = P^{-1}AP$.

Solution : D'après la question précedente :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{'} = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Exercice 3 : (6 pts)

Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + 2z = 1 \\ \alpha x + (2\beta - 1)\, y + 3z = 1 \\ \alpha x + \beta y + (\beta + 3)\, z = 1 \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont dans } \mathbb{R}.$$

1- Calculer le déterminant de la matrice du système (S) (on note la matrice du système par A).

Solution : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 \\ \alpha & 2\beta - 1 & 3 \\ \alpha & \beta & \beta + 3 \end{pmatrix}$, son déterminant est égal à : $\det A = \alpha\beta^2 - \alpha = \alpha (\beta - 1) (\beta + 1)$. **(1.5 pt)**

2- Pour quelles valeurs de α et β le système (S) est-il de Cramer ? Dans ce cas Résoudre (S) dans $\mathbb{R}^3$.

Solution : (S) est de Cramer ssi $\det A \neq 0$ ssi $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 1$ et $\beta \neq -1$. **(0.5 pt)**

Danc ce cas :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \beta & 2 \\ 1 & 2\beta-1 & 3 \\ 1 & \beta & \beta+3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\beta^2-1}{\alpha\left(\beta-1\right)\left(\beta+1\right)} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 3 \\ \alpha & 1 & \beta+3 \end{vmatrix}}{\det A} = 0 \ \textbf{(0.5 pt)} \quad \text{et}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha & 2\beta-1 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 0 \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Enfin la solution de (S) est $(x, y, z) = \left(\dfrac{\beta^2-1}{\alpha\left(\beta-1\right)\left(\beta+1\right)}, 0, 0\right)$.

3- Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S), suivant les valeurs de α et β dans le cas où (S) n'est pas de Cramer.

Solution :

Cas 1 : $\alpha = 0$

i/ Si $\beta = 1$, le système devient : $\begin{cases} y & +2z & =1 \\ y & +3z & =1 \\ y & +4z & =1 \end{cases}$ et celui-la admet une infinité de solutions :

$$\left\{\left(x, 1, 0\right), x \in \mathbb{R}\right\} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

ii/ Si $\beta = -1$, le système devient : $\begin{cases} - & y & +2z & =1 \\ - & 3y & +3z & =1 \\ - & y & +2z & =1 \end{cases}$ et celui-la admet une infinité de solutions :

$$\left\{\left(x, 1/3, 2/3\right), x \in \mathbb{R}\right\} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

iii/ Si $\beta \neq 1$ et $\beta \neq -1$: pas de solutions. **(0.5 pt)**

Cas 2 : $\alpha \neq 0$

i/ Si $\beta = 1$, le système devient $\begin{cases} \alpha x & + & y & +2z & =1 \\ \alpha x & + & y & +3z & =1 \\ \alpha x & + & y & +4z & =1 \end{cases}$ et celui-la admet une infinité de solutions :

$$\left\{\left(x, 1-\alpha x, 0\right), x \in \mathbb{R}\right\} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

ii/ Si $\beta = -1$, le système devient $\begin{cases} \alpha x & - & y & +2z & =1 \\ \alpha x & - & 3y & +3z & =1 \\ \alpha x & - & y & +2z & =1 \end{cases}$ et celui-la admet une infinité de solutions :

$$\left\{\left(x, \frac{1}{3}\left(1-\alpha x\right), \frac{2}{3}\left(1-\alpha x\right)\right), x \in \mathbb{R}\right\} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$