ESI **ANA3**

2011/2012

Contrôle intermédiaire

Durée 2h

Documents interdits.

Exercice1 4 points

Soit une application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ telle que: $N(x,y) = |x+y| + |x|$

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Représenter $B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

Exercice 2 4points

1) Dans $\mathbb{R}^2$, Donner un ensemble D et un point X_0 tels que:
X_0 soit un point adhérent à D sans être un point d'accumulation de D.

2) Dans $\mathbb{R}^2$, Donner un ensemble, autre que $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$, qui ne soit ni ouvert ni fermé.

3) Montrer que: $D' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ telsque } x^3 + y^3 \prec 1\right\}$ n'est pas borné dans $\mathbb{R}^2$.

4) Soient f une fonction à deux variables réelles et (a,b) un point d'accumulation de Df; montrer que:
si $\exists l \succ 0 \ / \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$ alors $f \succ 0$ au voisinage de (a,b).

Exercice 3 5points

Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^5}{x^4+x^2y^2+y^4}$,

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2}$, 4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{Log(x+y)}{x^2+2xy+y^2-1}$.

Exercice4 7points

I/ Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{t\to 0} \frac{Log(1+t)}{t}, \quad \lim_{t\to 0} \frac{Log(1+t)-t}{t^2}.$$

II/ Considérons une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\left(\dfrac{Log(1+x)}{x} - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer Df.

2) Etudier la continuité de f en $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$.

3) Caculer les dérivées partielles premières de f au point $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$.

4) f est-elle de classe C^1 sur Df?

On rappelle que:

Au voisinage de 0, $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 +..+ \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n + o(t^n)$.

Un corrigé.

Exercice1 :

Soit une application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que:

$$N(x,y) = |x+y| + |x|$$

1) Vérifions les trois conditions pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Soient (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

0,5 ★ Supposons que $N(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x+y| + |x| = 0 \Leftrightarrow x+y = 0 \wedge x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

0,5 ★ $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x| = |\lambda|(|x+y| + |x|) = |\lambda| N(x,y)$.

1 ★ $N(x+x', y+y') = |(x+x') + (y+y')| + |(x+x')| = |(x+y) + (x'+y')| + |x+x'|$

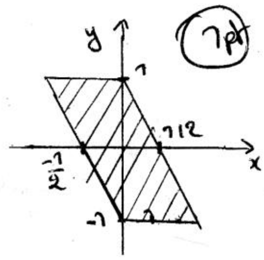
ie

$N(x+x', y+y') \leq |x+y| + |x'+y'| + |x| + |x'| = (|x+y| + |x|) + (|x'+y'| + |x'|) = N(x,y) + N(x',y$

2) Représentation de

$B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / N(x,y) < 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x+y| + |x| < 1\right\}$.

4 cas se présentent alors:



0,25 ⇝ 1er cas: $x+y \geq 0 \wedge x \geq 0$ ie $y \geq -x \wedge x \geq 0$. On aura: $y < 1-2x$.

0,25 ⇝ 2ème cas: $x+y \geq 0 \wedge x \leq 0$ ie $y \geq -x \wedge x \leq 0$. On aura: $y < 1$.

0,25 ⇝ 3ème cas: $x+y \leq 0 \wedge x \geq 0$ ie $y \leq -x \wedge x \geq 0$. On aura: $y > -1$.

0,25 ⇝ 4ème cas: $x+y \leq 0 \wedge x \leq 0$ ie $y \leq -x \wedge x \leq 0$. On aura: $y > -1-2x$.

Exercice 2 :

0,5 + 0,5 1) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0\right\} \cup \{(-1,0)\}$ et $A = (-1,0)$.

1 2) Dans $\mathbb{R}^2$, Donner un ensemble $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 < 9\right\}$.

3) Il suffit de considérer les points $(x,0)$ de D qui vérifient $x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$ ie

1 + 0,5 → $(]-\infty,1[\times\{0\}) \subset D$ or $]-\infty,1[$ n'est pas borné, (ou bien considérons les points $(x,-x)$ de D qui vérifient $0 < 1\ \forall x$ ie la droite d'équation $y = -x \subset D$ or elle n'est pas bornée aussi!).

0,5 → 4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / 0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / 0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \eta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x,y) < l + \varepsilon$

1 → En particulier pour $\varepsilon = l/2 > 0$.

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, utilisons les chemins:

0,5 ⇝ $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = l_1$.

0,5 ⇝ $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2 = l_2$.

$l_1 \neq l_2$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ n'$\nexists$.

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^5}{x^4+x^2y^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\frac{y^4}{y^4+x^4+x^2y^2}\right)}_{\text{bornée}} \underbrace{x^2y}_{\text{tend vers } 0} = 0.$$

0,5 0,5

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(\sin y - y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\left(\dfrac{y^3}{6}+o(y^3)\right)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)}_{\text{bornée}} \underbrace{\left(\dfrac{xy}{6}+xo(y)\right)}_{\text{tend vers 0}} = 0.$ 0,5 0,5 0,5

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{Log(x+y)}{x^2+2xy+y^2-1} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{Log(x+y)}{(x+y)^2-1}$, or

0,5 $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{Logt}{t^2-1} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{1}{2}.$

Exercice4 :

0,5 I) ★ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{Log(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t+o(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} (1+o(1)) = 1$

★ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{Log(1+t)-t}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left(t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)-t}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \left(-\dfrac{1}{2}+o(1)\right) = -\dfrac{1}{2}.$ 0,5

II)

0,5 1) On a $Df = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1+x>0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=0\} =]-1,+\infty[\times\mathbb{R}.$

2) Etudions la continuité de f en $(0,b)$ / $b\in\mathbb{R}$.

Soit $M=(0,b)$, a t'on $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = f(0,b) = 0$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) : \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} \left[y^2\left(\dfrac{Log(1+x)}{x}-1\right)\right] = 0 \text{ (voir question I)} \\[2ex] \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x=0}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} 0 = 0 = f(0,b) \end{cases}$$

0,25 0,75

On en conclut que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 0 = f(0,b).$ 0,25

Donc f est continue en tout point $(0,b)$ / $b\in\mathbb{R}$.

3) Cacul des dérivées partielles d'ordre1 de f au point $(0,b)$, $b\in\mathbb{R}$.

★ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b)$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b^2\left(\dfrac{Log(1+x)}{x}-1\right)}{x}$ 0,5

$\lim\limits_{x\to 0} b^2\dfrac{Log(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}b^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b) = -\dfrac{1}{2}b^2\ \exists.$

★ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b)$: $\lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(0,y)-f(0,b)}{y-b} = \lim\limits_{y\to b} \dfrac{0-0}{y-b} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b) = 0\ \exists.$ 0,5

4) Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: On a que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y^2\left(\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-Log(1+x)}{x^2}\right) = y^2\left(\dfrac{x-(1+x)Log(1+x)}{x^2(1+x)}\right) & \text{si } x\neq 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2}b^2 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

0,5

0,25 ★ Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue car c'est le produit, la composée et le quotient de fonctions continues.

★Sur Δ :

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) : \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} y^2\left(\dfrac{x - Log(1+x) - xLog(1+x)}{x^2(1+x)}\right) - - - - -(1) \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x=0}} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} -\dfrac{1}{2}b^2 = -\dfrac{1}{2}b^2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,b) \leftarrow 0{,}25 \end{cases}$$

Calculons (1) : $\dfrac{x - Log(1+x) - xLog(1+x)}{x^2(1+x)} = \dfrac{x - Log(1+x)}{x^2(1+x)} - \dfrac{xLog(1+x)}{x^2(1+x)}$

$= \left(\dfrac{1}{1+x}\right)\dfrac{x - Log(1+x)}{x^2} - \left(\dfrac{1}{1+x}\right)\dfrac{Log(1+x)}{x}$.

Donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{2}b^2 \leftarrow$ 0,75

Ccl1: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur Δ, elle est donc continue sur Df.

0,75

Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$: On a que: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\left(\dfrac{Log(1+x)}{x} - 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

0,25 → ★ Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue car c'est le produit, la composée et le quotient de fonctions continues.

★Sur Δ :

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) : \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b) \leftarrow 0{,}25 \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x=0}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} 0 = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,b) \leftarrow 0{,}25 \end{cases}$$

Ccl2: $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur Δ, elle est donc continue sur Df.

Conclusion : f est de classe C^1 sur Df.