
- Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation.
- Documents et calculatrice interdits.
- Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1: (4,5 points)

Chercher la fonction y developpable en série entière au $v(0)$ solution de l'équation différentielle suivante:

$$y"(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0 \ / \ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Exercice 2: (5 points)

Soit f une fonction impaire, $2\pi-$périodique telle que $f(x) = \begin{cases} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$

1. Représenter le graphe de f sur $]-\pi, \pi]$.
2. Calculer $\mathcal{F}f$.
3. En déduire la relation $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 3: (5,5 points)

Pour α un paramétre réel positif ou nul, on définit la fonction f par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{(|x| + |y|)^\alpha} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Discuter selon les valeurs du paramètre réel α la continuité de f en $(0, 0)$.
2. On pose $\alpha = \dfrac{1}{2}$:
   (a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
   (b) Etudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$.