LOGIQUE MATHEMATIQUE
CONTROLE INTERMEDIAIRE - DUREE2H-
Tout document interdit

Exercice 1 : (3 -2.5-1.5 -1 points)

a) Soit un ensemble $S_c=\{C_0: P\vee\neg Q \vee S, C_1: R\vee S, C_2: P\vee\neg Q \vee \neg S, C_3: R\vee Q, C_4: P\vee\neg R, C_5: \neg R\vee\neg P, C_6: \neg S\vee\neg P, C_7: \neg P \vee S\}$.

1. Montrer que S_c est un ensemble non satisfiable.
2. Quelle est la résolvante des deux clauses suivantes : $P\vee\neg Q \vee S$ et $\neg S\vee \neg P$?
3. Peut-on obtenir la clause $\neg P \vee S$ en appliquant une résolution sur deux autres clauses de S_c. (Si oui lesquelles ?).

b) Soit l'ensemble $S_c'=\{C_0: P\vee\neg Q \vee S, C_1: R\vee S, C_2: P\vee\neg Q \vee\neg S, C_3: R\vee Q, C_4: P\vee\neg R, C_5: \neg R\vee\neg P, C_6: \neg S\vee\neg P\}$

1. Montrer sans utiliser la propriété de la complétude de la résolution que Sc' est un ensemble inconsistant.
2. Déduisez que Sc' est non satisfiable.

c) Sc et Sc' sont ainsi équisatisfiable.

1. Peut-on généraliser cette propriété pour tout S et S' obtenu comme $S= S' \cup \{ C_r\}$ / C_r étant une clause résolvante de deux clauses de S'. (Justifier votre réponse).

d) Peut-on déduire que :

$\neg S\rightarrow(P\vee \neg Q) \wedge R,\ Q\rightarrow P \vee \neg S,\ R\vee Q,\ P\vee \neg R,\ \neg R\vee \neg P \models S\wedge P$.

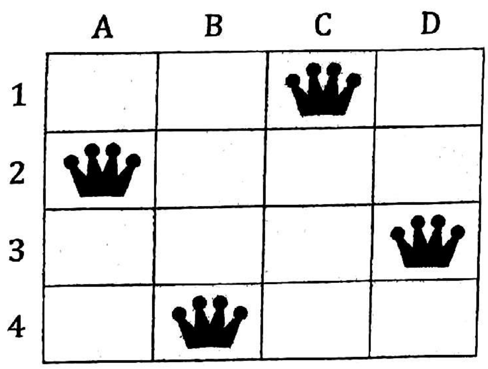
Rappel

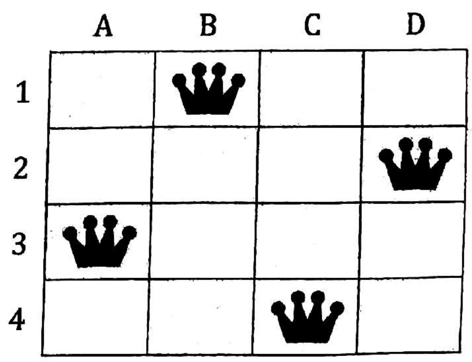
Deux ensembles S et S' sont équisatisfiables ssi (S est satisfiable ssi S' est satisfiable).

Exercice 2 (3.5 points)

Le but du problème des huit dames est de placer huit dames d'un jeu d'échecs sur un échiquier de 8 × 8 cases sans que les dames puissent se menacer mutuellement, conformément aux règles du jeu d'échecs (la couleur des pièces étant ignorée). Par conséquent, deux dames ne doivent jamais partager la même rangée, colonne, ou diagonale.

Afin de simplifier le problème, nous allons nous limiter à l'étude du problème de quatre dames sur un échiquier de 4 × 4. L'image ci-dessous montre deux solutions différentes du problème.





1. Ecrire les contraintes du problème dans le langage propositionnel.

Notons Γ l'ensemble des contraintes modélisés dans (1), et β la modélisation d'une solution au problème. Sachant que la solution du problème n'est pas unique.

2. Peut – on déduire que $\Gamma\models\beta$?

Exercice 3 :(1- 3.5 points)

a) Soit S un ensemble de formules.

1. Existe-t-il toujours un sous ensemble $S' \subseteq S$ satisfiable ? Justifier.
2. Existe-t-il toujours un sous ensemble $S' \subseteq S$ non satisfiable ? Justifier.

b) On dit qu'un sous ensemble satisfiable S' de S est un sous-ensemble ***satisfiable maximal*** si en rajoutant n'importe quelle formule $\alpha \in S$ à S', S' devient non satisfiable.

1. Ecrivez un pseudo algorithme qui retourne un sous ensemble satisfiable maximal de S.
2. L'ensemble obtenu est-il unique ? Justifier votre réponse.
3. Les sous-ensembles maximaux obtenus ont-ils tous le même cardinal ? Donnez un exemple pour justifier votre réponse.
4. Quel peut être le cardinal maximal d'un sous-ensemble satisfiable maximal dans le cas général ?

Exercice 4 : (4 points)

Traduisez dans le langage des prédicats les énoncés suivants :

1. Le carré de tout réel est positif.

2. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.
Rq : Utiliser des prédicats unaires.

3. Si « n » est le carré d'un nombre entier non nul alors « 2n » n'est pas le carré d'un nombre entier
Rq : Utiliser le prédicat binaire C(x,y) : x est le carré de y.

Bon Courage