Institut National d'Informatique
2ième Année Ingénieur.

Mercredi 25 Mars 1998.

EMD 2 de logique mathématique.

Durée 2 heures

Exercice 1 (3, 2).

Soit L un langage du premier ordre dont l'alphabet est formé :

- de symboles de variables ($x, y, \ldots$)
- des connecteurs $\rceil, \to$ et du quantifieur $\forall$;
- des symboles de prédicats binaires : P, Q, = ;
- du symbole de fonction unaire : f.

a) Donner les termes et les formules bien formées de L.

b) Lesquelles de expressions suivantes sont des formules bien formées de L ?

f1 : $\forall x\, Q(x,y) \vdash Q(x,y)$

f2 : $P(x,y) \to (f(x) \to f(y))$

f3 : $P(x,y) \to (f(x) = f(y))$

f4 : $\models P(x,y) \to P(x,y)$

f5 : $x = y \to f(x) = f(y)$

f6 : $f(x,y) = f(y,x)$

f7 : $Q(f(x), y) \to P(x, f(y))$

f8 : $P(x,y) = P(x,y)$

Exercice 2 (1)

On considère dans cet exercice la théorie T (vue en cours). Lesquelles des propositions suivantes sont valides ?

P1 : $\vdash \forall x \forall y\, Q(x,y) \to \forall y\, Q(y,y)$

P2 : $\vdash \forall x(y = z \to Q(x,y)) \to (y = z \to \forall x\, Q(x,y))$

P3 : $\vdash \forall x(Q(y) \to P(x,y)) \to (Q(y) \to \forall x\, P(x,y))$

P4 : $\vdash \forall x \forall y\, \exists z Q(x,y,z) \to \forall y \exists z\, Q(f(x,y), y, z)$ f(x,y) non libre dans φ.

Exercice 3 (2, 3)

Montrer sans utiliser les propriétés de complétude et de consistance :

① que l'ensemble Γ : $\{\forall x(P(y) \to Q(x)),\ P(y),\ \rceil Q(z)\}$ est inconsistant ;

② $\vdash \exists x(P(x) \to P(a))$

Exercice 4 (3, 3, 3)

On considère l'ensemble Γ : $\{\exists x\, \varphi(x,y), \exists y\, \varphi(x,y)\}$.

① Donner un modèle de l'ensemble Γ ;

② Donner une interprétation qui falsifie les deux formules de Γ ;

③ Vérifier la validité de la proposition suivante : $\exists x\, \varphi(x,y) \models \exists y\, \varphi(x,y)$.

Correction

Exercice 1

Les termes de L :

- Toute symbole de variable est un terme ;
- Si t_i est un terme de L, alors $f(t_i)$ est un terme de L.

Les formules de L :

- Si t_1 et t_2 sont des termes de L, alors : $P(t_1, t_2)$, $Q(t_1, t_2)$, $t_1 = t_2$ sont des formules de L;
- Si α et β sont des formules de L, alors $\neg\alpha$ et $\alpha \rightarrow \beta$ sont aussi des formules de L ;
- Si α est une formule de L et x un symbole de variable, alors $\forall x\alpha$ est une formule de L.

b)

$f1 : \forall x\, Q(x,y) \vdash Q(x,y)$ Non

$f2 : P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$ Oui

$f3 : P(x,y) \rightarrow (f(x,y) = f(y,x))$ Non

$f4 : \models P(x,y) \rightarrow P(x,y)$ Non

$f1 : x = y \rightarrow f(x,y) = f(y,x)$ Non

$f2 : f(x,y) = f(y,x)$ Non

$f3 : Q(f(x), y) \rightarrow P(x, f(y))$ Oui

$f4 : P(x,y) = P(x,y)$ Non

Exercice 2 (1)

P1 : $\vdash \forall x \forall y\, Q(x,y) \rightarrow \forall y\, Q(y,y)$ ~~Non~~ valide (y n'est pas libre pour x dans $\forall x \forall y\, Q(x,y)$)

P2 : $\vdash \forall x(y = z \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow (y = z \rightarrow \forall x\, Q(x,y))$ valide (x n'apparaît pas libre dans $y = z$)

P3 : $\vdash \forall x(Q(y) \rightarrow P(x,y)) \rightarrow (Q(y) \rightarrow \forall x\, P(x,y))$ valide (x n'apparaît pas libre dans $Q(y)$)

P4 : $\vdash \forall x \forall y \exists z Q(x,y,z) \rightarrow \forall y \exists z\, Q(f(x,y), y, z)$ ~~Non~~ valide ($f(x,y)$ n'est pas libre pour x dans $\forall y \exists z Q(x,y,z)$)

Exercice 3 (2, 3)

Montrer sans utiliser les propriétés de complétude et de consistance :

① que l'ensemble $\Gamma : \{\forall x(P(y) \rightarrow Q(x)),\ P(y),\ \neg Q(z)\}$ est inconsistant ;

b_0 $\forall x(P(y) \rightarrow Q(x))$ H1

b_1 [illegible] H2

b_2 $\neg Q(z)$ H3

b_3 $\forall x(P(y) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(y) \rightarrow Q(z))$ A4

b_4 $P(y) \rightarrow Q(z)$ MP(b_0,b_3)

b_5 $Q(z)$ MP(b_1,b_4)

② $\exists x(P(x) \rightarrow P(u)) =_{def} \neg\forall x \neg(P(x) \rightarrow P(u))$

b_0 $\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow \forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u))$ *(Théorème)*

b_1 $\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow \neg(P(u) \rightarrow P(u))$ A4

b_2 $\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow \neg(P(u) \rightarrow P(u))$

Transitivité

b_3 $(\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow \neg(P(u) \rightarrow P(u)) \rightarrow ((\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow (P(u) \rightarrow P(u)) \rightarrow \neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)))$

b_4 $(\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow (P(u) \rightarrow P(u)) \rightarrow \neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u))$ MP(b_2,b_3)

b_5 $(P(u) \rightarrow P(u)) \rightarrow (\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow (P(u) \rightarrow P(u)))$ A1

b_6 $P(u) \rightarrow P(u)$ *Théorème*

b_7 $(\neg\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u)) \rightarrow (P(u) \rightarrow P(u))$ MP(b_5,b_6)

b_8 $\cancel{\neg}\neg\forall x\neg(P(x) \rightarrow P(u))$ MP(b_4,b_7)

Exercice 4 (3, 3, 3)

On considère l'ensemble Γ : { $\exists x P(x,y)$; $\exists y P(x,y)$}.

① Modèle de l'ensemble Γ : $M(P)$: "=" - D : N.

② **Interprétation qui falsifie toutes les formules de Γ : $I(P)$: "<" ; $D = \{4\}$.**

③ Vérifier la validité de la proposition suivante : $\exists x P(x,y) \models \exists y P(x,y)$.

$\exists x(x > y) \models \exists y\,(x > y)$ **est fausse car $\exists x(x > y)$ est vraie pour tout y.**

$\exists y\,(x > y)$ n'est pas satisfaite par la valuation $V(x) = 0$.

Il existe donc au moins une fonction de valuation qui satisfait la première formules et qui ne satisfait pas la deuxième. Exemple : V $\boxed{}$

Montrer l'existence d'une interprétation et d'une valuation telles que :

$I \models \exists x P(x,y)_V$ et $I \models \forall y \neg P(x,y)_V$ on alors :

$I \models P(x,y)_{V(x=d)}$ pour au moins un d $\in$ D et $I \models \neg P(x,y)_{V(y=d')}$ pour tout d' $\in$ D

$I(P)(d, d_1)$ pour au moins un d $\in$ D et $\neg P(d', d_1')$ pour tout $d_1' \in$ D

Si l'on considère l'interprétation I de domaine N telle que :I(P) : >, nous avons effectivement $d > d_1$ pour au moins un d et non $(d' > d'_1)$ pour tout d'_1, autrement dit $d' \leq d'_1$ pour tout d'_1.

$(d' = 0)$.

Montrer que l'ensemble $\{\forall x \neg(P(x) \to P(u))\}$ est inconsistant.

Démonstration

b_0 $\forall x \neg(P(x) \to P(u))$ Hyp

b_1 $\forall x \neg(P(x) \to P(u)) \to \neg(P(u) \to P(u))$ A4

b_2 $\neg(P(u) \to P(u))$ MP(b_0, b_1)

b_3 $(\neg P(u) \to \neg(P(u) \to P(u))) \to ((\neg P(u) \to (P(u) \to P(u))) \to P(u)))$ A3

b_4 $\neg(P(u) \to P(u)) \to (\neg(P(u) \to \neg(P(u) \to P(u)))$ A1

b_5 $(\neg(P(u) \to \neg(P(u) \to P(u)))$ MP(b_2, b_4)

b_6 $((\neg P(u) \to (P(u) \to P(u))) \to P(u)))$ MP(b_3, b_5)

b_7 $(P(u) \to P(u)) \to ((\neg P(u) \to (P(u) \to P(u)))$ A3

b_8 $P(u) \to P(u)$ théorème

b_9 $\neg P(u) \to (P(u) \to P(u))$ MP(b_7, b_8)

b_{10} $P(u)$)) MP(b_6, b_9)

$\neg P(u)$

On démontre $\neg P(u)$ on posant $\neg\neg P(u)$ à la place de $\neg P(u)$ dans la ligne b_3.

7