الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours National d'accès au second cycle des écoles supérieures

Année universitaire 2019/2020

SUJET

Domaine : MI **Matière : Mathématiques**

Durée : 03 h **Coefficient : 01**

Calculatrice Autorisée : NON

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend **02** pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation.
- **Les candidats doivent rendre les copies même vierges.**
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2,3,4,...).
- Les documents sont interdits, sauf indication contraire sur le sujet.
- Aucun échange n'est autorisé entre les candidats.
- **Les parties** (Analyse, Algèbre, Logique mathématique) **doivent être rédigées sur des copies séparées**.

Les parties sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix

Partie Algèbre

Exercice (7 points)
Soient a, b deux nombres reels, et soit le système

$$S_{a,b} : \begin{cases} -y + az - t &= 3 \\ -x - z + at &= b \\ ax - y - t &= 3 \\ -x + ay - z &= b \end{cases}$$

1) Montrer que $det\,(M_a) = a^2\,(a^2 - 4)$.
2) Pour quelles valeurs de a le système est il de Cramer ?
3) Pour $a = 0$, le système $S_{0,b}$ est il résoluble ?
4) Pour $a = 2$, donner la valeur de b pour que le système $S_{2,b}$ soit résoluble.

Partie Analyse

Exercice 1 (4 points)
Soit a un nombre reel strictement positif fixé, et soit la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right).$$

1) Calculer puis developper la fonction dérivée $f'(x)$ en série entière (préciser le rayon de convergence R.)
2) En déduire le developpement en série entière de la fonction $f(x)$.
3) En prenant $x = \frac{a}{2}$, en déduire la somme de la série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(16)^n(2n+1)}$.

Exercice 2 (4 points)
Soit a un nombre reel fixé.
1) En utilisant la définition calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{\alpha t}$.
2) trouver les constantes reelles a, b, c et A, B, C telles que :

$$\frac{1}{(X-4)(X+4)(X+1)} = \frac{a}{X-4} + \frac{b}{X+4} + \frac{c}{X+1}$$

$$\frac{1}{(X-4)^2(X+1)} = \frac{A}{(X-4)^2} + \frac{B}{X-4} + \frac{C}{X+1}$$

3) En utilisant la transformation de Laplace résoudre l'équation differentielle

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = sh4t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

<u>**Indication :**</u>
On peut se servir du fait que $sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, et $\mathcal{L}(te^{\alpha t})(p) = \frac{1}{(p-\alpha)^2}$

Partie Logique

Exercice 1 (1,5 points)
Trouver la résolvante la plus simple des clauses C_1, C_2 suivantes :
$C_1 : P(u, v) \vee Q(v, u) \vee R(w, t)$
$C_2 : \neg P(x, y) \vee \neg P(z, s) \vee R(y, y)$
NB. Indiquer le MGU à chaque étape. Ne pas utiliser de symbole de constante.

Exercice 2 (3,5 points)
Soient les formules suivantes :

$\alpha = \exists x P(x) \vee \forall z \forall y (Q(y) \vee R(z))$

$\beta = \exists y R(y) \Rightarrow \exists z \forall x (P(x) \Rightarrow \neg Q(z))$

$\gamma = \exists z (\forall x (R(z) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow R(z)))$

$\delta = \exists x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y))$

Montrer par arbre sémantique que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \models \delta$
NB. Vous pouvez utiliser indifféremment les symboles $\Rightarrow$ et $\rightarrow$ pour désigner l'implication.