ESI, 2CPI | Contrôle Intermédiare
Analyse mathématique 4 | Juin 2021
Durée : 1h30

- Les documents, les calculatrices et les téléphones sont interdits.

EXERCICE 1 (5 points) : Déterminer les solutions $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ de l'EDP suivante :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \cdot f^2(x,y) = \frac{1}{3}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

à l'aide du changement de variables $(u,v) = \varphi(x,y)$ avec $\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y),\ \frac{1}{2}(x-y)\right)$.

Indication : Considérer la fonction F définie par $F(u,v) = (f \circ \varphi^{-1})(u,v)$.

EXERCICE 2 (10 points) : Soient les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad g(x,y) = xy - 9.$$

1) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) Etudier les extrema locaux de f.
4) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver les extrema locaux de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

EXERCICE 3 (5 points) : Considérons la fonction suivante :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{(1+t^2)} dt.$$

1) Etudier la continuité de F sur $[0,+\infty[$.
2) Etudier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$.

Bon courage