Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2018-2019
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen 1

Exercice 1. [[*3 pts*]]

1. *Donner la définition par induction du nombre d'occurrences de constantes dans une formule.*
2. *Soit σ une substitution. Donner la définition par induction de $F\sigma$ l'application de la substitution σ sur la formule F.*
3. *Démontrer par induction la propriété de substitution suivante: Soit A une formule, v une assignation et σ une substitution.*
   On a : $[A\sigma]_v = [A]_w$ où pour toute variable $x, w(x) = [\sigma(x)]_v$.

Exercice 2. [[*4 pts*]] *Soit la formule à priorité*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{z} \vee \mathbf{w}) \Rightarrow (\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z}) \vee (\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{w}).$$

1. *Donner la forme complètement parenthésée de F.*
2. *Donner l'arbre de structure de F.*
3. *Transformer la formule F en une somme de monômes(FND).*
4. *La formule F est-elle satisfaisable ? La formule F est-elle valide? Justifier.*

Exercice 3. [[*3 pts*]]

Soient Γ et Δ deux ensembles de formules et A, B et C des formules. Montrer ou infirmer les assertions suivantes :

1. ***Si*** $\mathbf{\Gamma \cup \Delta \models C}$ ***alors*** $\mathbf{\Gamma \models C}$ ***ou*** $\mathbf{\Delta \models C}$.
2. ***Si*** $\Gamma \models A$ ***et*** $\Delta \models B$ ***et*** $\models (A \wedge B) \Rightarrow C$ ***alors*** $\Gamma \cup \Delta \models C$.

Exercice 4. [[*6 pts*]]

1. *Transformer $\neg F$ en forme normale conjonctive où*

$$\mathbf{F} = (\mathbf{x} \Rightarrow \neg(\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})) \wedge (\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{x} \vee \neg \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{w} \wedge \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \wedge \neg \mathbf{y}$$

Attention: Vous n'avez pas le droit de distribuer le produit par rapport à la somme.

2. *En utilisant l'arbre sémantique, étudier la validité de F.*

3. *En utilisant la résolution retrouver le résultat sur la validité de F.*

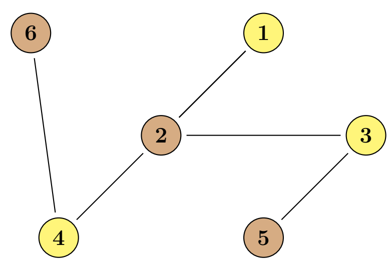
Exercice 5. ⟦ ***3 pts*** ⟧ *On rappelle que le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.*
On définit les connecteurs ternaires $*$ et α par

$$*(x, y, z) \equiv x\bar{y} + \bar{z} \text{ et } \alpha(x, y, z) \equiv x\bar{y} + z.$$

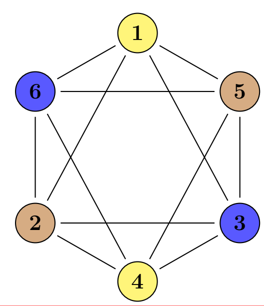
1. *Le système $\{\alpha\}$ est-il complet? Montrer le.*

2. *Le système $\{*\}$ est-il complet? Montrer le.*

Exercice 6. ⟦ ***3 pts*** ⟧ *Considérer le problème de coloriage d'un graphe appelé PCG et décrit comme suit : Instance : un graphe G = (S, A) et un entier k positif. S et A représentent respectivement l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes du graphe. n est le nombre de sommets et m, le nombre d'arêtes. Question : Peut-on colorier les sommets de G avec k couleurs différentes telles que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur ?*



Graphe coloriable avec 2 couleurs



Graphe non coloriable avec 2 couleurs

Formaliser en calcul propositionnel le problème des k couleurs.

Bon courage — **Le barème est donné à titre indicatif**