2- Si on désigne par $\overline{A}$ la matrice définie par $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$, montrer que : $\overline{A \cdot U} = \overline{A} \cdot \overline{U}$.

Solution : $\overline{A \cdot U}$ est la matrice colonne dont la *ième* ligne pour $i \in [[1,n]]$ est égale à $\overline{\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_i}$, en utilisant les propriétes du conjugué d'un nombre complexe, on aura :

$$\overline{\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_i} = \sum_{j=1}^{j=n} \overline{a_{ij}x_i} = \sum_{j=1}^{j=n} \overline{a_{ij}}\ \overline{x_i}$$

$\sum_{j=1}^{j=n} \overline{a_{ij}}\ \overline{x_i}$ est l'élément de la *ième* ligne, pour $i \in [[1,n]]$, de la matrice colonne $\overline{A} \cdot \overline{U}$.**(0.75 pt)**

3- Dans cette question, on écrit : $\varphi(U,V) = {}^t\overline{U} \cdot V$ et on suppose que ${}^t\overline{A} = A$ (A est dite **matrice hermitienne**).

a/ Soit $\alpha \in Spec(A)$ et $U \in E$ un vecteur propre non nul associé à α. Montrer que $\varphi(AU,U) = \alpha\varphi(U,U)$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(AU,U) &= {}^t\overline{(AU)} \cdot U \\
&= {}^t\overline{U} \cdot {}^t\overline{A} \cdot U \text{ en utilisant la question 2 et les propriétés de la transposée} \\
&= {}^t\overline{U} \cdot A \cdot U \text{ puisque } {}^t\overline{A} = A \\
&= {}^t\overline{U} \cdot \alpha U \text{ puisque } U \text{ est un vecteur propre associé à } \alpha \ (AU = \alpha U) \\
&= \alpha {}^t\overline{U} \cdot U = \alpha\varphi(U,U) \qquad \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

b/- Montrer que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution : On a d'après la question 1 de la partie A :

$$\varphi(AU,U) = \varphi(\alpha U,U) = \overline{\alpha}\varphi(U,U).$$

On en déduit : $\alpha\varphi(U,U) = \overline{\alpha}\varphi(U,U)$, or $\varphi(U,U) \neq 0$ puisque $U \neq 0$ d'après la ,question 5 de la partie A, donc $\alpha = \overline{\alpha}$. **(1 pt)**

4 - Soit S une matrice réelle symétrique d'ordre n. Préciser le nombre de valeurs propres réelles (comptées avec leurs ordres de multiplicité) de S.

Solution : La matrice S vérifie la condition ${}^t\overline{S} = S$ et admet n valeurs propres complexes comptées avec leurs ordres de multiplicité. Or d'après la question 3, toute valeur de S est réelle, donc S admet n valeurs propres réelles comptées avec leurs ordres de multiplicité. **(1 pt)**

Exercice 3 : (7 pts)

Remarque : L'objectif de cet exercice est démonter que toute matrice symétrique réelle d'ordre n admet n valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité.

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices colonnes $E = M_{n,1}(\mathbb{C})$ où $n \in N^*$. Si $U = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{pmatrix}$ est une matrice de E, on désigne par $\overline{U}$ la matrice colonne ${}^t\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & . & . & . & \overline{x_n} \end{pmatrix} \in E$ où $\overline{x_i}$ est le conjugué de x_i pour $i \in [[1, n]]$.

Soit l'application définie par :

$$\varphi : \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$U = \left({}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{pmatrix}, V = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & . & . & . & y_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \varphi(U, V) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i} y_i$$

Partie A : Montrer que :

1- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (U, V) \in E \times E : \varphi(\lambda U, V) = \overline{\lambda}\varphi(U, V)$.

Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $(U, V) \in E \times E$: on a

$$\varphi(\lambda U, V) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\lambda x_i} y_i = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i} y_i = \overline{\lambda}\varphi(U, V) \qquad \textbf{(0.5 pt).}$$

2- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (U, V) \in E \times E : \varphi(U, \lambda V) = \lambda\varphi(U, V)$.

Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $(U, V) \in E \times E$: on a

$$\varphi(U, \lambda V) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i}(\lambda y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i} y_i = \overline{\lambda}\varphi(U, V) \qquad \textbf{(0.5 pt).}$$

3- $\forall U \in E, \forall V \in E : \varphi(V, U) = \overline{\varphi(U, V)}$.

Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $(U, V) \in E \times E$: on a

$$\varphi(V, U) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{y_i} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{y_i \overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\overline{x_i} y_i} = \overline{\sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i} y_i} = \overline{\varphi(U, V)} \qquad \textbf{(0.5 pt).}$$

4- $\forall U \in E : \varphi(U, U) \in \mathbb{R}^+$.

Solution : Soit $U \in E$: on a $\varphi(U, U) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^2 \geq 0$ **(0.5 pt).**

5- $\forall U \in E : [\varphi(U, U) = 0 \text{ ssi } U = 0_E]$.

Solution : **(0,75 pt)**

Partie B :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.

1- Peut-on préciser le nombre de valeurs propres de A.

Solution : Le polynôme caractéristique de A étant de degré $n \in N^*$ et à coefficients complexes, il admet donc n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité dans $\mathbb{C}$, donc A admet n valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité. **(0.5 pt).**

On a : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Le calcul de l'inverse de P donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Enfin : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$ A'. **(2.25 pt)**

Exercice 2 : (5 pts)

Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} x & -y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +3z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & \alpha \\ 4x & -y & +7z & = & \beta \end{cases}$ où α et β sont dans $\mathbb{R}$.

1- Déterminer le rang du système (S).

Solution : On échelonne la matrice du système, on trouve $rg(S) = 2$ **(0.25 pt)**

2- Déterminer la matrice principale, les équations principales et les inconnues principales du système (S).

Solution : Si on supprime la dernière colonne de (S) et les deux dernières lignes, on ontient une matrice extraite carrée d'ordre 2 de déterminant égal à $3 \neq 0$, cette matrice on la note $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi les équations principales sont les deux premières **et** les inconnues principales sont x et y **(0.75 pt).**

3- Appliquer le théorème de Rouché-Fontené pour donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que le système (S) soit compatible (Préciser le(s) déterminant(s) bordant(s) le déterminant principal).

Solution : Les déterminant bordants le déterminant principal sont :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & \beta \end{vmatrix}$$

On a : (S) compatible ssi $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Le calcul des deux déterminants donne : $\Delta_1 = 3\alpha$ et $\Delta_2 = 3\beta - 9$ donc (S) compatible ssi $\alpha = 0$ et $\beta = 3$. **(2 pts)**

4- Résoudre le système (S) dans le cas où il est compatible .

Solution : On pose $\alpha = 0$ et $\beta = 3$, pour résoudre le système associé, il suffira de résoudre le système de Cramer suivant : $\begin{cases} x & -y & = & 1 - 2z \\ 2x & +y & = & 1 - 3z \end{cases}$

La somme des deux équations donne $3x = 2 - 5z$, i.e. : $x = \dfrac{2-5z}{3}$, on obtient alors $y = 1 - 3z - 2\dfrac{2-5z}{3} = \dfrac{z-1}{3}$

Donc l'ensemble des solutions est : $\left\{ \left(\dfrac{2-5z}{3}, \dfrac{z-1}{3}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$ **(2 pts)**

Exercice 1 : (8 pts)

Soit la matrice définie par : $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 4m & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

Solution : $P_{A_m}(X) = (1-X)(1+2m-X)(1-2m-X)$ **(1 pt)**

2- Déduire le déterminant de A_m.

Solution : Le déterminant de A_m est le produit des **trois** valeurs propres de A_m donc $\det A_m = 1(1-2m)(1+2m)$ **(0.5 pt)**

3- Calculer de deux façons différentes la trace de A_m.

Solution : Par définition la trace de A_m est la somme de ses éléments diagonaux, i.e. : $Tr(A_m) = 3$ **(0.25 pt)**

La trace est égale aussi à la somme des **trois** valeurs propores de A_m, i.e. : $1+1-2m+1+2m = 3$ **(0.5 pt)**

4- Préciser la ou les valeurs de m pour que 0 soit une valeur propre de A_m. Conclure.

Solution : 0 valeur propre ssi $m = 1/2$ ou $m = -1/2$ **(0.25 pt)**

5- Préciser la ou les valeurs de m pour que A_m admette au moins une valeur propre multiple.

Solution : A_m admet au moins une valeur propre multiple dans les trois cas suivants : $1+2m = 1$ ou $1-2m = 1$ ou $1-2m = 1+2m$, i.e. $m = 0$ **(0.5 pt)**

6- Déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A_m soit diagonalisable.

Solution : A_m est diagonalisable pour tout $m \neq 0$, puisque dans ce cas A_m admet trois propres simples.

Pour $m = 0$, $A_0 = Id$ donc A_0 est diagonale.

On en conclut que A_m est diagonalisable pour tout réel m. **(0.75 pt)**

7- On pose $m = -2$ et considérons la matrice $A = A_{-2} = M_B(f)$ où $f \in End(\mathbb{R}^3)$ et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a- Déterminer une base B' formée des vecteurs propres de f.

Solution : On cherche pour chaque valeur propre de f qui sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$ et $\lambda = 5$, l'espace propre associé. En échelonnant les matrices $A - I, A + 3I$ et $A - 5I$, on trouve $E_1 = \langle v_1 = (0,1,0)\rangle$, $E_{-3} = \langle v_2 = (1,0,2)\rangle$ et $E_5 = \langle v_3 = (1,0,-2)\rangle$,

Donc $B' = (v_1, v_2, v_3)$ **(1.75 pt)**

b- En déduire la matrice $A' = M_{B'}(f)$.

Solution : $A' = M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **(0.25 pt)**

c- Vérifier par un calcul matriciel que A et A' sont semblabes.

Solution : Il suffit de montrer que $A' = P^{-1}.A.P$ où P est la matrice de passage de B vers B'.