## Examen Semestriel

**L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.**

**N.B.**
**1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.**
**2- Les réponses doivent être justifiées.**

**Exercice 1 : (9 pts)**
Dans toute la suite, si $x \in \mathbb{C}$ alors $\overline{x}$ désigne le conjugué de $x$ dans $\mathbb{C}$.
**I/**
**1-** Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ et $v = (x_k)_{1 \leq k \leq m}$ un vecteur de $\mathbb{C}^m$. On note par :

$$\overline{M} = (\overline{a_{ij}})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \text{ et } \overline{v} = (\overline{x_k})_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{C}^m .$$

Montrer que : $\overline{M.v} = \overline{M}.\overline{v}$.
**2-** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Supposons que $M$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et que $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de $M$ associé $\lambda$.
Montrer que $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de $M$ de vecteur propre associé $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$.
**II-** Soit la matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1-** Calculer le polynôme caractéristique de $A$.
**2-** Est ce que $A$ est inversible?. Justifier.
**3-** Dire pourquoi $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
**4-** Dire pourquoi $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
**5-** On note les valeurs propres de $A$ sur $\mathbb{C}$ par : $\alpha, \beta$ et $\delta$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de partie imaginaire positive.
**a-** Déterminer un vecteur propre non nul $v$ associé à la valeur propre $\beta$.
**b-** En déduire un vecteur propre non nul $w$ associé à la valeur propre $\delta$.
**c-** Déterminer une matrice inversible $P$ telle que :

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 : (9 pts)**
Soit la matrice :
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

**1-** Déterminer le déterminant de $A_m$.

**2-** Soient $a, b$ et $c \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $(S)$ suivant : $A_m.X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

**a-** Pour quelles valeurs de $a, b$, $c$ et $m$ le système $(S)$ est-il de Cramer.

**b-** Pour quelles valeurs de $a, b$, $c$ et $m$ le système $(S)$ est-il incompatible.

**c-** Pour quelles valeurs de $a, b$, $c$ et $m$ le système $(S)$ admet-il une infinité de solutions. Résoudre le système $(S)$ dans ce cas.

**3-** Déterminer les valeurs propres de $A_m$.

**4-** Discuter, suivant les valeurs de $m$, la diagonalisation de $A_m$.

**Exercice 3 : (2 pts)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $n$ est impair et $M$ est antisymétrique.
Déterminer $\det M$ .