Exercice 1 : (9.5 pts)
Soit la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 2 & \alpha^2 - 7\alpha \\ 2 & 3 & \alpha - 7 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Discuter, suivant le paramètre α, la diagonalisation de A_α.
On calcule le polynôme caractéristique de A_α, on trouve : $P_{A_\alpha}(X) = (2 - X)(7 - X)(\alpha - X)$. **(0.75 pt)**

Cas 1 : Si $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq 7$, alors A_α est diagonalisable car dans ce cas A_α admet **trois** valeurs propres **simples**. **(0.25 pt)**

Cas 2 : Si $\alpha = 7$, A_7 admet une valeur propre double, et il suffit donc de calculer le rang de $A_7 - 7I$. On a :

$$A_7 - 7I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, d'où : $rg(A_7 - 7I) = 1$ ainsi A_7 et diagonalisable. **(1 pt)**

Cas 3 : Si $\alpha = 2$, A_2 admet une valeur propre double, et il suffit donc de calculer le rang de $A_2 - 2I$. On a :

$$A_2 - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, d'où : $rg(A_2 - 2I) = 1$ ainsi A_2 et diagonalisable. **(0.75 pt)**

Conclusion : A_α est diagonalisable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2- On pose : $\alpha = 2$.

a/ Vérifier que A_2 est diagonalisable.

D'après la question 1, A_2 est diagonalisable. **(0.25 pt)**

b/ Trouver une matrice P telle que $P^{-1}.A_2.P$ soit diagonale.

Il suffit de déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A_2. Pour cela, on commence par supposer que $A_2 = M_C(f)$ où $f \in End(\mathbb{R}^3)$ et $C = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On échelonne alors les matrices $A_2 - 2I$ et $A_2 - 7I$, on trouve :

$$E_2 = \langle v_1 = (-1, 2, 0), (0, 5, 1) \rangle \ \textbf{(0.5 pt)} \text{ et } E_7 = \langle v_3 = (2, 1, 0) \rangle \ \textbf{(0.5 pt)}$$

où E_2 et E_7 désignent, respectivement, les sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres 2 et 7. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \textbf{(0.5 pt)} \text{ et } P^{-1}.A_2.P = A_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

c/ En déduire la matrice A_2^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $A_2 = P.A_2'.P^{-1}$, d'où : $A_2^n = P.A_2'^n.P^{-1}$ et après calcul on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{pmatrix} \textbf{ (1.5 pt) et } A_2^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}2^n + \frac{4}{5}7^n & \frac{2}{5}7^n - \frac{2}{5}2^n & 2\times 2^n - 2\times 7^n \\ \\ \frac{2}{5}7^n - \frac{2}{5}2^n & \frac{4}{5}2^n + \frac{1}{5}7^n & 2^n - 7^n \\ \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \textbf{ (1 pt)}.$$

Pour le calcul de P^{-1}, ou pourra exprimer les e_i en fonction des v_i.

d/ Exprimer, en utilisant le théorème de Cayley Hamilton, A_2^n comme polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en A_2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 3$.

Eu utilisant le théorème de Cayley Hamilton, on a :

$$P_{A_2}(A_2) = 0 \text{ où } P_{A_2}(X) = -X^3 + 11X^2 - 32X + 28.$$

D'autre part, la division euclidienne de X^n par $P_{A_2}(X)$ donne un couple unique (Q, R) de polynômes tel que :

$$X^n = P_{A_2}(X)\, Q + R \text{ et } d^\circ R \leq 2.$$

Ainsi :

$$A_2^n = P_{A_2}(A_2)\, Q(A_2) + R(A_2) = R(A_2)$$

Si on écrit : $R(X) = aX^2 + bX + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ alors :

$$A_2^n = R(A_2) = aA_2^2 + bA_2 + cI_3. \textbf{ (1 pt) } \text{CQFD}$$

e/ Montrer que calculer A_2^n revient à résoudre un système linéaire carré que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de résoudre le système obtenu).

Pour calculer A_2^n, il faudra déterminer les valeurs de a, b et c. Pour cela, on utlisera la relation :

$$X^n = P_{A_2}(X)\, Q + R = P_{A_2}(X)\, Q + aX^2 + bX + c$$

en remplaçant par les valeurs propres de A_2, et dans ce cas il faudra utiliser le fait que la valeur propre 2 est une racine double de $P_{A_2}(X)$, donc racine de $P_{A_2}(X)$ et de sa dérivée $P'_{A_2}(X)$. On obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 7^n & = & a7^2 & + & b7 & + & c \\ 2^n & = & a2^2 & + & b2 & + & c \\ n2^{n-1} & = & a4 & + & b & & \end{array} \right.$$

La dernière équation a été obtenue en dérivant $X^n = P_{A_2}(X)\, Q + aX^2 + bX + c$, ainsi :

$$nX^{n-1} = P'_{A_2}(X)\, Q + P'_{A_2}(X)\, Q' + 2aX + b$$

puis on remplace par la valeur propre 2.

Enfin le système voulu est :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 7^n & = & 49a & + & 7b & + & c \\ 2^n & = & 4a & + & 2b & + & c \\ n2^{n-1} & = & 4a & + & b & & \end{array} \right. \qquad \textbf{(1.5 pt)}$$

Exercice 2 : (6.5 pts)
Soit, dans $\mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha\beta z & = & \alpha \\ \beta x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^2\beta z & = & \alpha^2\beta \end{array}\right. \qquad (S_{\alpha,\beta})$$

où α et β sont des paramètres réels .
1- Calculer le déterminant de la matrice du système $(S_{\alpha,\beta})$.
Il faut calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha\beta \\ \beta & \alpha^2 & \alpha^2\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ \beta & \alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = \alpha^4 - 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 = \alpha^2(\alpha-\beta)^2. \ \textbf{(1 pt)}$$

2- Pour quelles valeurs de α et β le système $(S_{\alpha,\beta})$ est de Cramer. Dans ce cas, résoudre $(S_{\alpha,\beta})$.
$(S_{\alpha,\beta})$ est de Cramer si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$ **(0.5 pt)**. Dans ce cas :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha\beta \\ \alpha^2\beta & \alpha^2 & \alpha^2\beta \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{-\alpha^5\beta + \alpha^5 + \alpha^4\beta^2 - \alpha^4\beta}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{-\alpha^4(\beta-1)(\alpha-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^2(1-\beta)}{\alpha-\beta}. \textbf{(1 pt)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha\beta \\ \beta & \alpha^2\beta & \alpha^2\beta \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^4\beta - \alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{\beta(\alpha^2-1)}{\alpha(\alpha-\beta)}. \textbf{(1 pt)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha^2 & \alpha^2\beta \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^2 - \alpha^3 - \alpha\beta + \alpha^2\beta}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{-\alpha(\alpha-1)(\alpha-\beta)}{\alpha^2(\alpha-\beta)^2} = \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha-\beta)}. \textbf{(1 pt)}$$

Enfin la solution unique du système est :

$$(x,y,z) = \left(\frac{\alpha^2(1-\beta)}{\alpha-\beta}, \frac{\beta(\alpha^2-1)}{\alpha(\alpha-\beta)}, \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha-\beta)}\right).$$

3- Résoudre $(S_{\alpha,\beta})$ dans le cas où il n'est pas de Cramer.
cas 1 : $\alpha = 0$, on obtient en remplaçant dans le système $x = 0$ et $x = 1$, ce qui est impossible (Pour tout β). **(0.5 pt)**

cas 2 : $\alpha = \beta$, (bien sur avec $\alpha \neq 0$),on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha^2 y & + & \alpha^3 z & = & \alpha^3 \end{array} \right. \qquad (S_\alpha)$$

Si $\alpha \neq 1$, le système n'admet pas de solutions (les équations (1) et (2) sont contradictoires). **(0.5 pt)**

Si $\alpha = 1$, le système est équivalent à l'équation : $x + y + z = 1$, il y a donc une infinité de solutions, **(0.5 pt)** et dans ce cas l'ensemble des solutions est :

$$\{(x, y, 1 - -x - y)\,,\ \text{avec } x, y \in \mathbb{R}\}\,.\textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 3 : (4 pts)

Soit une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique :

$$P_M(X) = -X^3 + X^2 - X + 1.$$

1- Déterminer : $Tr(M)$, $\det(M)$, $rg(M)$. Justifier.

On a :

$$Tr(M) = 1, \det(M) = 1 \neq 0 \text{ donc } rg(M) = 3.\textbf{(0.25 pt)+(0.25 pt)+(0.5 pt)}$$

2- Dire pourquoi M est inversible, puis donner l'expression de M^{-1} en fonction de M.

Comme $\det(M) \neq 0$ donc M est inversible **(0.25 pt)**, et pour exprimer M^{-1} en fonction de M il suffit d'utiliser le théorème de Cayley Hamilton. Ainsi :

$$P_M(M) = -M^3 + M^2 - M + I = 0$$

D'où :

$$M^{-1} = M^2 - M + I.\ \textbf{(0.75 pt)}$$

3- Est ce que M est diagonalisable ?. Justifier.

Il suffit de remarquer que

$$P_M(X) = -(X - 1)\left(X^2 + 1\right),$$

donc M n'admet trois valeurs propres dans $\mathbb{R}$, par conséquent M n'est pasdiagonalisable. **(1 pt)**

4- Est ce que M est diagonalisable si on considère $M \in M_3(\mathbb{C})$?. Justifier.

Dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_M(X) = -(X - 1)(X - i)(X + i),$$

i.e. $P_M(X)$ possède trois valeurs propres simples, donc M est diagonalisable si on considère $M \in M_3(\mathbb{C})$. **(1 pt)**