INI. Math2. 2I.

EMD 3. Mai 2001

Exercice 1: (2 points)

Soit $\sum_n u_n$ une série numérique à termes positifs, montrer l'équivalence :

$$\sum_n \log(1+u_n) \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_n u_n \text{ converge}$$

Exercice 2: (5,5 points)

Soit la fonction F définie dans $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ où :

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}$$

1) Montrer que F est bien définie dans $\mathbb{R}_+$.

2) Etudier la continuité puis la dérivabilité de F.

Exercice 3: (6 points)

I-Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha+1}.3^{n-1}}$.

1) Déterminer son rayon de convergence.

2) Déterminer son domaine de convergence ,selon les valeurs de α

II-Développer la fonction suivante en série entière : $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{3-t}$, où $0 < |x| < 3$.

En déduire la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n.3^{n-1}}$.

Exercice 4: (6,5 points)

1) Développer en série de Fourier la fonction f $2\pi-$périodique définie par :

$$f(x) = \cos(\alpha x)\ ,\ x \in [-\pi, \pi] \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

2) Déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.

3) Déduire que: $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\cot g\,(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$,où $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Bonne chance.

INI.2I. Math2

Un corrigé de L'EMD3 2000/2001

Exercice 1:

$\Rightarrow$) Supposons que la série $\sum_n \log(1+u_n)$ converge, donc la condition nécéssaire va être vérifiée ie :

$$\lim_{n\to+\infty} \log(1+u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{\log(1+u_n)} = e^0$$

car la fonction éxponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (1+u_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Ce qui permet d'avoir l'equivalence :$\log(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

Donc la série $\sum_n u_n$ converge par le critère d'équivalence.

$\Leftarrow$) Supposons à présent que la série$\sum_n u_n$ converge,donc la condition nécéssaire donne:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \log(1+u_n).$$

Et la série $\sum_n \log(1+u_n)$ converge.

Exercice 2:

1) Il s'agit de montrer la convergence simple de la série de fonction : $\sum f_n$.

$$\text{Or } |f_n(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \ \forall x \in \mathbb{R}_+$$

et la série numérique à termes positifs :$\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge d'aprés Riemann $\alpha = 2 > 1$.

Donc on a obtenu la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\sum f_n$, ie on a également la convergence simple.

Remarque : On aurait pu utiliser Leibnitz ou le reste.

2) a)Pour montrer la continuité de F on utilise le théorème :

$$\left\{\begin{array}{l} i) \text{ Toutes les } f_n \text{ sont continues sur } [0,+\infty[. \\ ii) \ \sum f_n \text{ converge normalement sur } [0,+\infty[. \end{array}\right. \Rightarrow F \text{ est continue.}$$

Les conditions étant réunies on a bien F est continue.

b) Pour montrer la dérivabilité de F on utilise le théorème :

$$\left\{\begin{array}{l} i) \ \exists x_0 \ / \ \sum f_n(x_0) \text{ converge.} \\ ii) \text{ Toutes les } f_n \text{ sont dérivables sur } [0,+\infty[. \\ iii) \ \sum f_n' \text{ converge normalement sur } [0,+\infty[. \end{array}\right. \Rightarrow F \text{ est dérivable.}$$

$i)$ Cette condition est déja vérifiée car on a la convergence de la série sur $[0,+\infty[$.

$ii)$ Chaque f_n est dérivables sur $[0,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$iii)$ On a $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\left(-2nxe^{-nx^2}\right)$. Posons $g_n(x) = |f_n'(x)| = \dfrac{2n}{n^2+1}xe^{-nx^2}$.
$g_n'(x) = \dfrac{2n}{n^2+1}e^{-nx^2}\left(1-2nx^2\right)$. On a alors le tableau suivant :

Alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n'(x)| = f_n'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \dfrac{2n}{n^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}}$.Et la série $\sum \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}e^{-\frac{1}{2}}$ converge d'aprés Riemann. D'où la convergence normale de $\sum f_n'$.
Les conditions du théorème étant réunies on a alors F dérivable.

Exercice 3:

I-1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\alpha+1}3^{n-1}}{(n+1)^{\alpha+1}\,3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n}{\left(n\dfrac{2n}{n^2+1}+1\right)}\right)^{\alpha+1} = \dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow R = 3$.
2) On a l'intervalle de convergence est $\Delta =]-3,3[$, on doit faire l'étude aux bornes.
*En $x_0 = 3$: $u_n(x_0) = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge ssi : $\alpha > 0$.
*En $x_1 = -3$: $u_n(x_1) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+1}}$:

$i)$ Si $\alpha \leq -1$ alors la condition nécéssaire n'est pas vérifiée donc divergence.
$ii)$ Si $\alpha > -1$ il suffira d'appliquer Leibnitz et on a convergence.

En conclusion :

$$D = [-3,3],\ \text{si } \alpha > 0 \text{ et } D = [-3,3[,\ \text{si } -1 < \alpha \leq 0 \text{ et } D =]-3,3[,\ si\ \alpha < 0.$$

II-On sait que $\left(\dfrac{1}{3-t}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-\frac{t}{3}}\right) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{t}{3}\right)^n$ série géométrique de rayon de convergence 3.Et donc pour tout $x\ /\ 0 < |x| < 3$ ie $0 < |t| < 1$

$$ie\ f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{3-t}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^x \left(\frac{1}{1-\frac{t}{3}}\right)dt = \frac{1}{3}\int_0^x \sum_{n\geq 0}\left(\frac{t}{3}\right)^n dt$$

$$\Rightarrow\quad f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\int_0^x \left(\frac{t}{3}\right)^n dt = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n \int_0^x t^n dt = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Et donc $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}$, on obtient enfin que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n3^n}$.

$$Deduction : \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}} = \begin{cases} \dfrac{3}{x} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n3^n}, \text{ si } x \neq 0. \\ 1, \text{ si } x = 0. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3}{x} f(x), \text{ si } x \neq 0. \\ 1, \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Finalement : } \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}} = \begin{cases} \dfrac{3}{x} \left[\log 3 - \log(3-x)\right], \text{ si } x \neq 0. \\ 1, \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 4:

1) **-**Calculons d'abord la série de Fourier $\sigma(f)$ associée à f :
*f est intégrable sur tout férmé borné.
* f étant paire $b_n = 0$ et ceci $\forall n \geq 1$.

$$* \; a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x)\, dx = \left. \frac{2}{\alpha\pi} \sin(\alpha x) \right]_0^\pi = \frac{2\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$

$$* \; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\cos((\alpha+n)x) + \cos((\alpha-n)x)\right] dx \text{ ie :}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n} \right] = (-1)^n \cdot \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}.$$

$$\text{Donc } \sigma(f)(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} \cos(nx).$$

-A présent appliquons le théorème de Dirichlet :
* f est $2\pi-$périodique.
* f est C^1 par morceaux car f restreinte à $]-\pi,\pi[$ est dérivable.
Comme de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues alors :

$$\cos(\alpha x) \overset{(*)}{=} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n\geq 1} \cdot \frac{(-1)^n}{(\alpha^2-n^2)} \cos(nx), \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) Pour déduire la somme S donnée il suffit de remplacer dans la relation précédente :

$$\begin{aligned} x &= \pi : \cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \left(\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\right) S \\ &\Rightarrow \quad S = \left(\cos(\alpha\pi) - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}\right) \end{aligned}$$

3) On remplace dans l'égalité $(*)$ $x = \pi$ et on divise par :$\sin(\alpha\pi)$,on obtient:

$$\cot g(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{2\alpha}{(\alpha^2-n^2)\pi}, \; \forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

Finalement il suffit de prendre en particulier $\alpha = \dfrac{x}{\pi}$, $(ie \; x = \alpha\pi)$ on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} : \cot g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$