ALGEBRE 03 EMD2. CORRIGÉ TYPE.

Exercice 1 (06 pts)

Soit le paramètre $m \in \mathbb{R}$, et soit le système :

$$(S_m) : \quad \begin{cases} x + y + (1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m+2 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le système est-il de Cramer ?
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le système possède-t-il une infinité de solutions ?
3. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le système n'est pas résoluble ?

Exercice 2 (07 pts)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, par

$$\begin{cases} f(e_1) = & e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ f(e_2) = & -e_2 \\ f(e_3) = & 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A de f relativement à la base canonique.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f, et vérifier que A est inversible.
3. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer la matrice A^{-1} en fonction des matrices I_3 et A et A^2 (Justifier votre réponse).
4. Determiner les valeurs propres (en précisant leurs multiplicités) et les sous espaces propres de f.
5. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable, et diagonaliser le en précisant les matrices de passage.

Exercice 3 (07 pts)

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le polynome caractt́eristique de l'endomorphisme g.
2. Montrer que g possède deux valeurs propres (préciser leurs multiplicités).
3. Determiner les sous espaces propres de g.
4. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ? (Justifier votre réponse).
5. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle g est représenté par une matrice triangulaire supérieure T (on demande que la valeur propre simple de g soit en première ligne et en première colonne de T).

Corrigé + barème

Exercice 1 (06 pts)

Soit le système :

$$(S_m) : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x - y + 2z & = & 0 \\ 2x - my + 3z & = & m+2 \end{array} \right.$$

On a

$$det\,(S_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = m(m-2)(m+2)$$

1) (S_m) est de Cramer ssi $m \notin \{-2, 0, 2\}$ .... **2 pt**

2) Pour **m=0**, la matrice augmentée est

$$\widetilde{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

On observe que le mineur $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ et que le determinant de la matrice augmentée bordant de Δ qui est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

D'après **Fonrenay Rouché** le systeme (S_0) posède une infinité de solutions. .... **1 pt**

Pour **m=-2**, la matrice augmentée est

$$\widetilde{A}_{-2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Le systeme (S_{-2}) est homogène, il possède donc au moins une solution, et comme il n'est pas de Cramer, il possède donc une infinité de solutions. .... **1 pt**

3) Pour **m=2**, la matrice augmentée est

$$\widetilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

On observe que le mineur $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ et que le determinant de la matrice augmentée bordant de Δ qui est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'après **Fonrenay Rouché** le systeme (S_2) ne possède pas de solutions. .... **2 pt**

Exercice 2 (07 pts)

1) La matrice de l'endomorphisme f est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

2)

$$P_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)(\lambda-2) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

$$P_A(0) = -2 \neq 0 \quad \Longrightarrow A \text{ est inversible} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

3) On a

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton

$$P_A(A) = 0 \Longleftrightarrow -A^3 + 2A^2 + A - 2I_3 = 0$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left\{I_3 + 2A - A^2\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

4) Les valeurs propres de f sont simples $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$ .... $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$

<u>Les sous espaces prpres de f</u>.
Pour <u>$\lambda = 1$</u>,

$$E_1 = \left\{ \overrightarrow{V} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

E_1 est engendré par le vecteur propre $\overrightarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{\textbf{1 pt}}$

Pour <u>$\lambda = -1$</u>,

$$E_{-1} = \left\{ \overrightarrow{V} = y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}$$

E_{-1} est engendré par le vecteur propre $\overrightarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{\textbf{1 pt}}$

Pour <u>$\lambda = 2$</u>,

$$E_2 = \left\{ \overrightarrow{V} = y.\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}$$

E_2 est engendré par le vecteur propre $\overrightarrow{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{\textbf{1 pt}}$

5) Du moment que les valeurs propres sont simples, alors f est diagonalisable .... $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$
Les matrices de passage sont

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

La matrice diagonale relativement à la base propre $B' = \{V_1, V_2, V_3\}$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$

Exercice 3 (07 pts)

1) Le polynôme caractéristique de g est

$$P_g(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2 \quad .... \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

2) Les valeurs propres de g sont

$$\begin{cases} \lambda &= 1 \quad \text{v.p double} \\ \lambda &= 3 \quad \text{v.p simple} \end{cases} \quad .... \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

3) Sous espaces propres de g.

$$E_1 = \left\{ \overrightarrow{V} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\} \quad ... \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

$$E_3 = \left\{ \overrightarrow{V} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\} \quad ... \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$

4) Comme $dimE_1 \neq 2$, alors g n'est pas diagonalisable .... $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$

5) une base de E_3 est $\overrightarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,Une base de E_1 est $\overrightarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Completons la famille libre $\left\{\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2\right\}$ par le vecteur $\overrightarrow{V}_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{\textbf{0.5 pt}}$

La matrice qui represente g dans la base $\left\{\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3\right\}$ est

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons les coefficients a, b en resolvant le systeme

$$g\left(\overrightarrow{e_3}\right) = a\overrightarrow{V}_1 + b\overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{e}_3 \quad .... \quad \boxed{\textbf{0.5 pt}}$$

La solution de ce systeme donne $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ .... $\boxed{\textbf{1 pt}}$

La matrice triangulaire qui represente g dans la base $\left\{\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V}_3\right\}$ est alors

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .... \quad \boxed{\textbf{1 pt}}$$