Solution Partie Logique: 19/06/2017: 20h55

Exercice **1**. *Soient α, β et γ trois formules telles que:*

$\alpha : \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x) \wedge R(y))$

$\beta : \forall x R(x) \rightarrow \exists x \neg Q(x)$

$\gamma : \exists x \exists y \neg P(x,y)$

1. *Montrer en utilisant la méthode de résolution que $\alpha, \beta \vDash \gamma$.*
2. *Retrouver le résultat à l'aide d'un arbre sémantique.*

1. $\alpha, \beta \vDash \gamma$ ssi $\{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$ est inconsistant si et seulement si de l'ensemble de clauses issu de Γ on peut déduire la clause vide.

   Etape 1: On renomme les variables: 0.25 point

$$\begin{aligned} \alpha &: \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x) \wedge R(y)) \\ \beta &: \forall u R(u) \rightarrow \exists v \neg Q(v) \\ \neg\gamma &: \forall w \forall z P(w,z) \end{aligned}$$

   Etape 2: Mise sous forme prenexe de α, β et $\neg\gamma$: 0.25 point

$$\begin{aligned} \alpha_p &: \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x) \wedge R(y)) \\ \beta_p &: \exists u \exists v (R(u) \rightarrow \neg Q(v)) \\ (\neg\gamma)_p &: \forall w \forall z P(w,z) \end{aligned}$$

   Etape 3: Mise sous forme de Skolem : 0.5 point

$$\begin{aligned} \alpha_{ps} &: \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x) \wedge R(y)) \\ \beta_{ps} &: (R(a) \rightarrow \neg Q(b)) \\ (\neg\gamma)_{ps} &: \forall w \forall z P(w,z) \end{aligned}$$

   Etape 4: Mise sous forme clausale : 0.5 point

$$S = \{\neg P(x,y) \vee Q(x), \neg P(u,v) \vee R(v), \neg R(a) \vee \neg Q(b), P(w,z)\}$$

   Etape 5:Déduction de la clause vide à partir de S : 1.25 point

$$\begin{aligned} C_1 &: \neg P(x,y) \vee Q(x) \\ C_2 &: \neg P(u,v) \vee R(v) \\ C_3 &: \neg R(a) \vee \neg Q(b) \\ C_4 &: P(w,z) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr} C_5 : \neg P(b,a) \vee Q(b) & C_1[b/x, a/y] \\ C_6 : \neg P(b,a) \vee R(a) & C_2[b/u, a/v] \\ C_7 : P(b,a) & C_4[b/w, a/z] \\ C_8 : Q(b) & \text{Résolvante}(C_5, C_7) \\ C_9 : R(a) & \text{Résolvante}(C_6, C_7) \\ C_{10} : \neg Q(b) & \text{Résolvante}(C_9, C_3) \\ C_{11} : \quad \square & \text{Résolvante}(C_8, C_{10}) \end{array}$$

   $S \vdash \quad \square$ donc par le théorème de correction $\Gamma = \{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$ inconsistant donc $\alpha, \beta \vDash \gamma$.

Etape 5:Déduction de la clause vide à partir de S : 1.25 point Deuxième solution.

$C_1 : \neg P(x,y) \vee Q(x)$	
$C_2 : \neg P(u,v) \vee R(v)$	
$C_3 : \neg R(a) \vee \neg Q(b)$	
$C_4 : P(w,z)$	
$C_5 : Q(x)$	Res$(C_1, C4)$ $\quad MGU = \{w \leftarrow x, z \leftarrow y\}$
$C_6 : R(v)$	Res$(C_2, C4) MGU = \{w \leftarrow u, z \leftarrow v\}$
$C_7 : \neg R(a)$	Res$(C_3, C5) MGU = \{x \leftarrow b\}$
$C_8 : \perp$	Res$(C_6, C_7) MGU = \{v \leftarrow a\}$

2. **Arbre sémantique** 1.25 pts