Contrôle Intermédiaire

Durée 1h30 heure

Corrigé

Exercice 1 (2 points)

r1. Toute variable propositionnelle est une formule (atomique).
r2. Si α est une formule, (α) est une formule.
r3. Si α et β sont des formules, les expressions $\alpha \uparrow \beta$ sont des formules.
r4. Aucune autre expression n'est une formule du langage.

Exercice 2 (5 points)

Ecrire les énoncés suivants dans le langage des propositions puis dans le langage des prédicats du premier ordre :

E1 : *Certains savent écouter et certains ne savent pas écouter.* **(1, 1)**

$S(x)$: x sait écouter

$\gamma_1 : (\exists x S(x)) \wedge \exists x \neg S(x)$

E2 : *Tout réel positif possède une racine carrée unique.* **(0.5, 1)**

$\alpha_2 : P$

$R(x)$: x est un réel
$P(x)$: x est positif
$C(x, y)$: x est la racine carrée de y
$E(x, y)$: $x = y$

$\gamma_2 : \forall x(R(x) \wedge P(x) \rightarrow \exists y(C(y, x) \wedge \forall z(C(z, x) \rightarrow E(z, y))$

E3 : *S'il y'a quelqu'un que tous écoutent, alors chacun écoute quelqu'un.* **(0.5, 1)**

T : Il y'a quelqu'un que tous écoutent
Q : Chacun écoute quelqu'un.
$\alpha_3 : T \rightarrow Q$

$E(x, y)$: x écoute y

$\gamma_3 : (\exists x \forall y E(y, x)) \rightarrow \forall x \exists y E(x, y)$

Exercice 3 (1 – 2 - 2 - 2)

Soit S l'ensemble de clauses tel que :

$$S: \{\neg P \vee Q, \neg P \vee R, Q \vee \neg R, Q \vee \neg S, \neg P \vee S, \neg R \vee S, \neg Q \vee R, P \vee \neg S\}$$

1. Donner les valuations qui satisfont S. **(0.5, 0.5)**

   v_1 **:** $\{P, Q, R, S\}$ v_2 **:** $\{\neg P, \neg Q, \neg R, \neg S\}$

2. Donner un minimum de clauses à deux littéraux chacune que l'on pourrait ajouter à S pour obtenir un ensemble S' non satisfiable. **(1, 1)**

   Réponse. *Ajouter une clause avec deux littéraux positifs et une clause avec deux littéraux négatifs. Exemple :*

   $C_8 : P \vee Q$ et $C_9 : \neg P \vee \neg Q$

3. En déduire une condition nécessaire pour qu'un ensemble de clauses soit non satisfiable ? (**2 points**)

   Réponse. *Pour être non satisfiable, un ensemble doit contenir au moins une clause positive et au moins une clause négative.*

4. Montrer en utilisant la résolution que S' est inconsistant. **(2 points)**

$C_0 : \neg P \vee Q$	$C_{10} : \neg \mathbf{P}$	Res (C_0, C_9)
$C_1 : \neg P \vee R$	$C_{11} : \neg S$	Res (C_7, C_{10})
$C_2 : Q \vee \neg R$	$C_{12} : \neg R$	Res (C_5, C_{11})
$C_3 : Q \vee \neg S$	$C_{13} : \neg Q$	Res (C_6, C_{12})
$C_4 : \neg P \vee S$	$C_{14} : P$	Res (C_8, C_{13})
$C_5 : \neg R \vee S$	$C_{15} : \square$	Res (C_{10}, C_{14})
$C_6 : \neg Q \vee R$		
$C_7 : P \vee \neg S$		
$\mathbf{C_8 : P \vee Q}$		
$\mathbf{C_9 : \neg P \vee \neg Q}$		

Exercice 4 (2 – 2 - 2)

Soit S un ensemble de formules du langage propositionnel et S' l'ensemble obtenu en remplaçant dans S toutes les occurrences de la variable propositionnelle P par $\neg$P.

1. Montrer que S et S' sont équisatisfiables.

2. Montrer que : *si* S |= P *alors* S' |= $\neg$P.

3. En déduire que S $\cup$ S' est inconsistant.

<u>Réponse 1. Montrer que S et S' sont équisatisfiables</u>

Montrer que S et S' sont équisatisfiables revient à montrer que S est satisfiable (non satisfiable) ssi S' est satisfiable (non satisfiable).

$\Rightarrow$) Si S est non satisfiable alors S' est non satisfiable. **(1 point)**

Posons S : { $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_n$ } et S' : { $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \ldots, \alpha'_n$ } où α'_i est obtenu en substituant $\neg$P à P en toutes ses occurrences dans α_i.

S est non satisfiable

ssi

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ est non satisfiable

ssi

$\models \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$

$\Downarrow$ (théorème de substitution)

$\models \neg(\alpha'_1 \wedge \alpha'_2 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \alpha'_n)$

ssi

S' est non satisfiable

$\Leftarrow$) Si S' est non satisfiable alors S est non satisfiable **(1 point)**

S' est non satisfiable

ssi

$\alpha'_1 \wedge \alpha'_2 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \alpha'_n$ est non satisfiable

ssi

$\models \neg(\alpha'_1 \wedge \alpha'_2 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \alpha'_n)$

$\Downarrow$ (théorème de substitution $\neg$P à P)

$\alpha'_i = \alpha_{i[\neg P/P]}$. Substituer $\neg P$ à P dans α'_i revient à $\neg\neg P$ à P dans α_i

$$\Downarrow$$

$$\models \neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$$

ssi

S est non satisfiable

<u>Réponse 2. Montrer que : *si* S $\models$ P *alors* S' $\models \neg$P</u> **(2 points)**

On pose S : { α_1, α_2, …, …, α_n } et S' : { α'_1, α'_2, …, …, α'_n } où α'_i est obtenu en substituant $\neg$P à P en toutes ses occurrences dans α_i.

$$\mathbf{S \models P}$$

$\Downarrow$ (Théorème)

$$\models (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots\ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow P))))$$

$\Downarrow$ (Théorème de substitution)

$$\models (\alpha'_1 \rightarrow (\alpha'_2 \rightarrow (\ldots\ldots \rightarrow (\alpha'_n \rightarrow \neg P))))$$

$\Downarrow$ (Théorème)

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \ldots, \alpha'_n \models \neg P$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{S' \models \neg P}$$

<u>Réponse 3. En déduire que S $\cup$ S' est inconsistant</u> **(2 points)**

Si S $\models$ P *alors* S $\vdash$ P (Propriété de complétude de la résolution)

Si S' $\models \neg$P *alors* S $\vdash \neg$P (Propriété de complétude de la résolution)

$$\Downarrow$$

S, S' $\vdash$ P (en utilisant uniquement les clauses de S)

et

S, S' $\vdash \neg$P (en utilisant uniquement les clauses de S)

$$\Downarrow$$

S $\cup$ S' inconsistant