ESI
Classe préparatoire2

2011/2012
ANA3

Examen Final S1. Durée 2h.

Documents et Calculatrice interdits.

Exercice1 (3 points)

On pose: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur D_f.
2) Etudier la différentiabilité de f sur D_f.

Exercice 2 (3,5 points)

En posant $u = x$, $v = y - x$, $w = z - x$, trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ qui sont solutions de l'EDP suivante: $\dfrac{\delta f}{\delta x} + \dfrac{\delta f}{\delta y} + \dfrac{\delta f}{\delta z} = 0$.

Exercice 3 (8,5 points)

Soient f et g deux applications de $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que:
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$.

1) Vérifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que $f \in C^\infty(U)$.
2) On pose: pour $(x,y) \in U$, $h(x,y) = f(x,y) - \frac{7}{6}g(x,y)$.
Trouver les points critiques de h sur U puis étudier leur nature.

3) On pose $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ g(x,y) = 0\right\}$. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, montrer qu'il existe 4 points où $f_{|\Gamma}$ peut présenter des extréma (ne pas faire le test).
4) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de $f_{|\Gamma}$.

5) On pouvait déduire, de la question 2, deux des extréma de $f_{|\Gamma}$. Expliquez comment.
6) Trouver les extréma de h en tant que fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (5 points)

Pour $a > 0$, On pose: $F_a = [0,a] \times [0,a]$.
$D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ , } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\right\}$.

1) Dans le même repère représenter D_a et F_a.
2) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy$.
3) Montrer que $\iint_{F_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2$. (On ne demande pas le calcul de $\int_0^a e^{-t^2}dt$).
4) Montrer que $\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{F_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{D_{2a}} e^{-x^2-y^2}dxdy$.
5) On pose $\lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-t^2}dt = l \in \mathbb{R}$. Déduire de ce qui précède que $l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Bon Courage