Examen d'ANA3.
Durée. 2H.

DOCUMENTS INTERDITS.

Exercice1: (7,5 points)

On pose : $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,x)dt$, où $f(t,x) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que le domaine de définition de F est égale à $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose : $g(t) = e^{-|t|}$.

On rappelle que $(\mathcal{F}g)(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

3) En utilisant la formule d'inversion de Fourier,

déterminer la valeur de: $A(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$.

4) Déduire de 3) la valeur de: $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.

5) Déduire de 2), 3) et 4) la valeur de: $C(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt$.

Exercice2: (6 points)

Soit l'application numérique réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f_a(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - x\cos y + ay^2\sin x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $\dfrac{\partial f_a}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f_a}{\partial y}(0,0)$.
3) Pour quelles valeurs de a, f_a est elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice3: (2 points)

En utilisant le changement de variables suivant: $u = x^2 - y^2$ $(x > 0)$ et $v = y$;
résoudre dans $C^1\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$ l'équation différentielle partielle: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice4: (4,5 points)

Déterminer les extréma libres de la fonction
$f(x,y) = x^4 + y^4 - \dfrac{1}{4}(x-y)^2$.

On rappelle que:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$

Bon courage.

Un corrigé:

Exercice1: (7,5 points)

On pose : $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} f(t,x)dt$, où $f(t,x) = \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) $D_F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \int\limits_0^{+\infty} f(t,x)dt \text{ converge} \right\}$, $f \in R_{loc}[0,+\infty[$ selon t, on a :

$|f(t,x)| \leq \dfrac{t}{(1+t^2)^2} = h(t) \geq 0$, $h \in R_{loc}[0,+\infty[$ or $h(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ et $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^3}$ converge (IR)

et donc $\int\limits_1^{+\infty} h(t)\,dt$ converge par le critère d'équivalence ie $\int\limits_0^{+\infty} h(t)\,dt$ converge

on en déduit que $\int\limits_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge absolument (par le critère de comparaison) donc converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Conclusion: $D_F = \mathbb{R}$.

2) Appliquons le théorème de la conservation de la dérivabilité: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ $x \in \mathbb{R}$.

★ f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues selon t comme composée, produit et rapport de fonctions continues$\cdots(1)$

★ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue selon x comme composée de fonctions continues$\cdots(2)$

★ Etudions la convergence dominée de $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$,

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} = \varphi(t) \geq 0$, $\varphi \in R_{loc}[0,+\infty[$ or $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ converge (IR)

et donc $\int\limits_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge par le critère d'équivalence ie $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge

on en déduit que $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie la convergence dominée sur $\mathbb{R}\cdots(3)$

Conclusion: de $(1)\,;(2)$ et (3) on obtient que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus

$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$

3) Sur $\mathbb{R}^*$ on a que g est dérivable et paire donc d'après la FIF:

$$g(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(ax) (\mathcal{F}g)(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} g(a)$$

Donc: $A(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xa)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$

Pour $a = 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} e^{-|0|}$ on en conclut: $A(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}\ \forall x \in \mathbb{R}.$

4) Utilisons une IPP à $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt.$ $\begin{cases} u = \sin(xt) \longrightarrow u' = x\cos(xt) \\ v' = \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \longrightarrow v = \dfrac{-1}{2(1+t^2)} \end{cases}$

ie $F(x) = \left[\frac{-\sin(xt)}{2(1+t^2)}\right]_0^{+\infty} + \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$, on a $\lim_{t \to +\infty} \frac{-\sin(xt)}{2(1+t^2)} = 0$ car:

$\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{(1+t^2)} = 0$ et $\sin(xt)$ est bornée, on obtient alors:

$F(x) = \frac{x}{2} A(x) = \frac{\pi x}{4} e^{-|x|}\ \forall x \in \mathbb{R}.$

5) $C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\left[(1+t^2) - 1\right] \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt - C(x).$$

$$C(x) = A(x) - F'(x) \text{ or } F(x) = \frac{\pi x}{4} e^{-|x|} = \begin{cases} \frac{\pi x}{4} e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ \frac{\pi x}{4} e^{x} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \frac{\pi}{4} \begin{cases} e^{-x}(1-x) \text{ si } x > 0 \\ e^{x}(1+x) \text{ si } x < 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} = \frac{\pi}{4} e^{-|x|} (1 - |x|).$$

$C(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} - \frac{\pi}{4} (1 - |x|) e^{-|x|} = \frac{\pi}{4} (1 + |x|) e^{-|x|};\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Exercice2:

Soit l'application numérique réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f_a(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - x\cos y + ay^2 \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

1) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f_a est continue car elle est la composée, le produit, la somme

et le rapport de fonctions continues.
En $(0,0)$: A t on $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_a(x,y) = f_a(0,0) = 0?$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_a(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x - x\cos y + ay^2 \sin x}{x^2+y^2}$

D'une part: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} a\underbrace{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{bornée}} \underbrace{\sin x}_{\text{tend vers } 0} = 0$

D'autre part $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x - x\cos y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x - x(1+o(x))}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{bornée}} \underbrace{o(1)}_{\text{tend vers } 0} =$
0

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_a(x,y) = 0 = f_a(0,0)$ ie f_a est continue en $(0,0)$. f_a est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) $\dfrac{\partial f_a}{\partial x}(0,0)$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_a(x,0)-f_a(0,0)}{x-0} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial f_a}{\partial x}(0,0) = 0 \ \exists$.
$\dfrac{\partial f_a}{\partial y}(0,0)$ $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f_a(0,y)-f_a(0,0)}{y-0} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial f_a}{\partial y}(0,0) = 0 \ \exists$.

3) Utilisons la définition:

$$f_a(h_1,h_2) - f_a(0,0) = \frac{\partial f_a}{\partial x}(0,0).h_1 + \frac{\partial f_a}{\partial y}(0,0).h_2 + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2)$$

ie $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{f_a(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \dfrac{h_1 - h_1\cos h_2 + ah_2^2 \sin h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 - h_1\left(1-\frac{1}{2}h_2^2 + o\left(h_2^3\right)\right) + ah_2^2\left(h_1 + o\left(h_1^2\right)\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left(a+\frac{1}{2}\right)h_1h_2^2 + h_1 o\left(h_2^3\right) + h_2^2 o\left(h_1^2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)} \\
&= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left[\left(a+\frac{1}{2}\right)\underbrace{\frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}}_{\text{borné}} + \underbrace{\frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}} \underbrace{\left(o\left(h_2\right)+o\left(h_1\right)\right)}_{\text{tend vers } 0}\right]
\end{aligned}$$

1er cas: $a = -\dfrac{1}{2}$: $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0 \Longrightarrow f_{-\frac{1}{2}}$ est différentiable en $(0,0)$ **par unicité**.

2ème cas: $a \neq -\dfrac{1}{2}$: $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) \neq 0$ il suffit d'utiliser le chemin: $h_2 = h_1$:

$\lim\limits_{h_1\to 0} \varepsilon(h_1,h_1) = \left(a+\frac{1}{2}\right)\dfrac{h_1^3}{2\sqrt{2}\,|h_1|^3} \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) \neq 0$

Donc f_a n'est pas différentiable en $(0,0)$ **par l'absurde**.

Conclusion: f_a est différentiable en $(0,0)$ ssi $a = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice3 : Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

★ Le changement de variables : $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = y \end{cases}$ est bijectif, posons alors:

$g : (x,y) \to (u,v) = g(x,y) = (x^2 - y^2, y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$, soit $\varphi = g^{-1}$ sa fonction inverse.

★ On recherche $f \in C^1(\mathbb{U})$ donc différentiable sur U qui vérifie l'e.d.p donnée. On posera $f(x,y) = f\left(g^{-1}(u,v)\right) = \left(f \circ g^{-1}\right)(u,v) = (f \circ \varphi)(u,v)$ et f : $\begin{array}{c} \mathbb{U} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array}$.

★ Considérons la fonction auxiliaire : $F = f \circ \varphi \Longleftrightarrow f = F \circ g$. On est bien dans les conditions du théorème1 puisque g est différentiable sur U et f est différentiable sur U; on a :

$(Jf)(x,y) = (JF)(u,v) \times (Jg)(x,y)$, ceci revient à :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui donne:(S) : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\frac{\partial F}{\partial u} & (1). \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} & (2). \end{cases}$

On remplace l'e.d.p donnée: $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow x\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial v} = 0$

ie F est constante selon la variable v, on a donc :$F(u,v) = h(u)$ où h est une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}$.

On revient à la fonction f : $f(x,y) = F(u,v) = h(u) = h(x^2 - y^2)$ avec $h \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercice4 :

*Points critiques:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - \frac{1}{2}(y-x)$ (f est symetrique).

Résolvons le système:(S) : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - \frac{1}{2}(x-y) = 0 \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4y^3 + \frac{1}{2}(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -4x^3 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x\left(-4x^2 + 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}, \text{ou } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il y a donc 3 points critiques.$A = (0,0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C = -B$.

*Nature de ces points:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - \frac{1}{2}$.
Au point B :
$r = \frac{5}{2}$, $s = \frac{1}{2}$, $5 = \frac{5}{2}$ ie $rt - s^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} > 0$,
et comme $r > 0 \Rightarrow (B, f(B))$ est un minimum.
Au point C:
$r = \frac{5}{2}$, $s = \frac{1}{2}$, $5 = \frac{5}{2}$ ie $rt - s^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} > 0$,
et comme $r > 0 \Rightarrow (C, f(C))$ est un minimum.
Au point A:
$r = -\frac{1}{2,} s = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{2}$ ie $rt - s^2 = 0$, rien à dire.
$d^2 f_A(h_1, h_2) = -\frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 - \frac{1}{2}h_2^2 = -\frac{1}{2}(h_1 - h_2)^2$
$d^2 f_A(h_1, h_2)$ s'annulle une infinité de fois (sur tous les points de la forme (h_1, h_1)), on ne peut donc pas conclure, revenons à la définition :

$$f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

On a d'une part : $f(x,x) - f(0,0) = 2x^4 > 0$
et d'autre part : $f(x,-x) - f(0,0) = 2x^4 - x^2 = x^2\left(2x^2 - 1\right) < 0$ pour $x \in \mathcal{V}(0)$.
Conclusion: $(A, f(A))$ n'est pas un extremum local.