CONCOURS d'accès à l'ESI

Epreuve : Mathématiques
Code : MATHS

Date : juin 2015
Durée : 2h30mns

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 2 pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation
- Les candidats doivent rendre les copies même vierges.
- Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Les numéros des questions doivent être transcrits clairement sur les copies
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3,4,….)
- La calculatrice n'est pas autorisée.
- Les documents sont interdits.
- Les trois parties du sujet doivent être rédigées sur des copies séparées.

PARTIE 1 : ALGEBRE (10 pts)

Exercice : (10 pts)
Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \text{ tel que } \beta \neq 0.$$

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ tel que sa matrice associée relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est égale à A.

On note par B la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1- Calculer les valeurs propres de f.

2- Montrer que $\ker(f - (\alpha + 2\beta)\, Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 1. En donner une base.

3- Montrer que $\ker(f - (\alpha - \beta)\, Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 2. En donner une base.

4- Montrer que f est diagonalisable et donner une base C des vecteurs propres de f.

5- En déduire une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}.A.P$ soit diagonale. Ecrire D.

PARTIE 2 : PROBABILITES ET STATISTIQUES (6 pts)

Exercice : (6 pts)

Soit X une variable aléatoire log-normale de paramètres μ et σ, c'est-à-dire vérifiant la propriété $\log X \to N(\mu\ ;\ \sigma)$. La densité d'une telle distribution s'écrit :

$$f(x) = \frac{c}{x} \exp\left\{-\frac{[\log(x) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0.$$

1. Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{U}_n$ de μ basé sur $X_1, \ldots, X_n$ sachant que c ne dépend pas de μ.
2. Etudier le biais et la consistance de $\hat{U}_n$. Justifier votre réponse.
3. Calculer $Var\left(\hat{U}_n\right)$ et la borne de Cramer-Rao. Est- ce que $\hat{U}_n$ est un bon estimateur ? justifier votre réponse.

PARTIE 3 : LOGIQUE MATHEMATIQUE (4 pts)

Exercice 1 : (2 pts)

Soit Γ un ensemble de formules tel que $\Gamma : \{\forall x P(x,y), \exists x \rceil P(y,x)\}$.

Question 1. Donner, si elle existe, une interprétation qui satisfait Γ.

Question 2. Donner, s'il existe, un modèle de Γ.

Exercice 2 : (0.5pt * 4)

Ecrire les énoncés suivants dans le langage du premier ordre.

E1 : Il existe au moins une planète habitée.

E2 : Il existe exactement une planète habitée.

E3 : Il existe au plus une planète habitée

E4 : Tout entier naturel différent de 0 est le suivant d'un autre entier naturel.