Durée 2H

DOCUMENTS ET CALCULATRICES INTERDITS.

Exercice 1 (5pts)

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$, où $f(t,x) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$, $x \geq 0$.

1) Montrer que $D_F = \mathbb{R}^+$.

2) On pose : $F_1(x) = \int_0^1 f(t,x)dt$ et $F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(t,x)dt$.

a) Montrer que $1 + u - e^u \leq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que F_1 et F_2 sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

3) Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^+_*$.

4) En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi x} \quad \forall x \geq 0$.

On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2 (5pts)

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $e^{-|t|}$, puis en déduire la valeur de l'integrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(st)}{1+s^2}ds$.

2) Trouver une solution de l'equation suivante dans $L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$:

$$y(t) + 3\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u)e^{-|u|}du = e^{-|t|}.$$

Exercice 3 (5pts)

1) Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^4}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xe^x - ye^y}{x-y}$.

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{si } (x,y) \cancel{\neq} (0,0) \end{cases}$$

Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 4 (5pts)

Trouver les extrémums de la fonction suivante:

$f(x,y) = (x-y)^2(1-x^2-y^2)$.

Bon courage