Problème : (15 pt = 1+0,75+1,25+0,5+2,5+2,5+3+0,5+1+2)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- Montrer que la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_a. En déduire une valeur propre de A_a.

Solution : On a : $A_a \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On déduit que X est un vecteur propre de A_a. **(0,5 pt)** et que $\lambda = a$ est une valeur propre de A_a associée à X. **(0,5 pt)**

2- Calculer la trace et le déterminant de A_a.

Solution : On a : $Tr(A_a) = a$ **(0,25 pt)** et par développement par rapport à la 1ère colonne :

$$\det A_a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -a-1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a. \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

3- En déduire les deux autres valeurs propres de A_a.

Solution : Si on note par λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres qui existent quitte à considérer que la matrice est à coefficients complexes. Elles vérifient :

$$\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A_a) \ \text{ et } \ \lambda \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A_a) \qquad \textbf{(0,75 pt)}$$

On en déduit : $a + \lambda_1 + \lambda_2 = a$ et $a \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -a$.

D'où : $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ (car $a \neq 0$)

On en conclut que les deux autres valeurs propres sont 1 et -1. **(0,5 pt)**

4- En déduire que : $P_{A_a}(X) = -X^3 + aX^2 + X - a$.

Solution : On en déduit que :

$$P_{A_a}(X) = (a - X)(1 - X)(-1 - X) = -X^3 + aX^2 + X - a. \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

5- Montrer que la matrice $\mathbf{A}_a$ est diagonalisable quel que soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Solution :

Cas1 : Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1, -1\}$, la matrice A_a admet trois valeurs propres simples donc A_a est diagonalisable. **(0,5 pt)**

Cas2 : Si $a = 1$, donc 1 est une valeur propre double, par conséquent :

$$A_1 \text{ est diagonalisable ssi } rg(A_1 - I_3) = 1. \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

On a : $(A_1 - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc A_1 est diagonalisable. **(0,5 pt)**

Cas3 : Si $a=-1$, donc -1 est une valeur propre double, par conséquent :

$$A_{-1} \text{ est diagonalisable ssi } rg\left(A_{-1}+I_3\right)=1. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

On a : $(A_{-1}+I_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc A_{-1} est diagonalisable. **(0,5 pt)**

On conclut que A_a est diagonalisable quel que soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Supposons pour toute la suite que : $a \in R^* \setminus \{-1,1\}$.

6- Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D_a telles que : $D_a = P^{-1} \cdot A_a \cdot P$.

Solution : Cherchons, pour chacune des trois valeurs propres simples, un vecteur propre non nul.

On a déjà d'après ce qui précède que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecetur propre associé à la valeur propre $\lambda = a$. **(0,5 pt)**

On pose : $\lambda_1 = 1$ et résolvons le système linéaire : $(A_a - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +y & -(a+1)\,z & = & 0 \\ x & -y & +(a+1)\,z & = & 0 \\ & & (a-1)\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme $a \neq 1$, on déduit en déduit que $z=0$ et par conséquent on obtient $x=y$, d'où : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$. **(0,5 pt)**

Enfin, si on pose : $\lambda_2 = -1$ et on résoud le système linéaire : $(A_a + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & -(a+1)\,z & = & 0 \\ x & +y & +(a+1)\,z & = & 0 \\ & & (a+1)\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Comme $a \neq -1$, on en déduit que $z=0$ et par conséquent on obtient $x=-y$, d'où : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_2 = -1$. **(0,5 pt)**

Ainsi : $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt)** et $D_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt)**

7- Calculer A_a^n pour tout entier $n \geq 1$.

Solution : De la relation $D_a = P^{-1} \cdot A_a . P$ on déduit : $A_a^n = P \cdot D_a^n \cdot P^{-1}$. **(0,5 pt)**

La calcul de P^{-1} donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. **(1,5 pt)**

Enfin :

$$\begin{aligned} A_a^n &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & (-1)^n - a^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & a^n - (-1)^n \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

8- Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est-elle inversible ?

Solution : On a A_a est inversible ssi $\det A_a \neq 0$ ssi $a \neq 0$. **(0,5 pt)**

9- Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton à la matrice A_a, puis en déduire l'écriture de A_a^{-1} comme expression polynômiale de A_a (il n'est pas demandé de calculer A_a^{-1}).

Solution : On a : $P_{A_a}(A_a) = 0$ ssi $-A_a^3 + aA_a^2 + A_a - aI_3 = 0$. **(0,5 pt)**

On déduit : $A_a \cdot \left[-\frac{1}{a}\left(A_a^2 - aA_a - I_3\right)\right] = I_3$, d'où : $A_a^{-1} = -\frac{1}{a}A_a^2 + A_a + \frac{1}{a}I_3$. **(0,5 pt)**

10-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème de Cayley Hamilton, montrer que calculer la matrice A_a^n revient à résoudre un système de Cramer de trois équations à trois inconnues.

Solution : Si on effectue la division euclidienne du polynôme X^n par $P_{A_a}(X)$, on aura l'existence d'un couple unique de polynômes (Q, R) vérifiant :

$$X^n = P_{A_a}(X) \cdot Q(X) + R(X) \text{ où } d^{\circ}(R) < 3$$

Si on écrit : $R(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on aura alors :

$$X^n = P_{A_a}(X) \cdot Q(X) + \alpha + \beta X + \gamma X^2 .... (*)$$

puis en remplaçant par la matrice A_a et en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient :

$$A_a^n = \alpha I + \beta A_a + \gamma A_a^2. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

Ainsi pour calculer A_a^n, il suffira de trouver les valeurs de α, β et γ. Pour résoudre ce problème, on utilise la relation $(*)$ en remplaçant par les trois valeurs propres simples de A_a, on obtient ainsi le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha & +a\beta & +a^2\gamma & = & a^n \\ \alpha & +\beta & +\gamma & = & 1 \\ \alpha & -\beta & +\gamma & = & (-1)^n \end{array} \right. . \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

Ce système est un système de Cramer, en effet si on calcule le déterminant de sa matrice on obtient : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a^2) \neq 0$. **(1 pt)**

Exercice : (1pt pour chaque question)

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

1- Montrer que : 0 est une valeur propre de A ssi A n'est pas inversible.

Solution : On a la relation suivante : λ valeur propre de A ssi $\det(A - \lambda I) = 0$, si on remplace par $\lambda = 0$ on aura le résultat voulu.

2- Supposons que A est une une matrice inversible. Montrer que :

Si λ est une valeur propre de A associée à un vecteur propre non nul X alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} associée au vecteur propre X.

Solution : Si λ est une valeur propre de A associée à un vecteur propre X alors on a :

$$\begin{aligned} A\cdot X &= \lambda\cdot X, \text{ on multiplie à gauche par } A^{-1}, \text{ on obtient :} \\ X &= \lambda\cdot A^{-1}\cdot X, \text{ et comme } \lambda\neq 0 \text{ d'après la question précédente, alors :} \end{aligned}$$

$A^{-1}\cdot X=\lambda^{-1}\cdot X$, cela veut dire que λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} associé au vecteur propre non nul X.

3- Les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractériqtique.

Solution : On a : $P_{{}^tA}(X)=\det\left({}^tA-XI_n\right)=\det{}^t(A-XI)=\det(A-XI)=P_A(X)$.

4- Montrer que si le système $A\cdot X=0$, où X désigne la matrice colonne inconnue à n lignes, admet une solution non nulle alors $\det A=0$.

Solution : Comme le système admet au moins deux solutions : la solution nulle et une autre solution non nulle, alors il n'est pas de Cramer, et par conséquent $\det A=0$.

5- Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. Montrer que la matrice $N=\begin{pmatrix}\alpha&1&1&1\\0&\alpha&1&1\\0&0&\alpha&1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Solution : On a $P_N(X)=(\alpha-X)^4$, ainsi : N est diagonalisable ssi $rg\,(N-\alpha I_4)=0$ ssi $N-\alpha I_4=0$ ce qui est absurde.

Les deux questions suivantes sont facultatives (1,5 pt +1,5 pt) :

On suppose : $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

6- Soit $P(X)\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Montrer que :

Si $P(A)=0$ alors les valeurs propres de A sont racines de $P(X)$.

Solution : On pose : $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_mX^m$ où $m\in\mathbb{N}$, et soit λ une valeur propre de A. Il existe donc une matrice colonne **non nulle** N : $A\cdot N=\lambda\cdot N$.

On en déduit que pour tout entier $k\geq 1$, on a : $A^k\cdot N=\lambda^k\cdot N$.

D'autre part : $P(A)=a_0I_n+a_1A+\cdots+a_mA^m$, si on multiplie à gauche par N, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A)\cdot N &= (a_0I_n+a_1A+\cdots+a_mA^m)\cdot N \\ &= a_0N+a_1A\cdot N+\cdots+a_mA^m\cdot N \\ &= a_0N+a_1\lambda\cdot N+\cdots+a_m\lambda^k\cdot N=P(\lambda)\cdot N \end{aligned}$$

Or $P(A)=0$, donc $P(\lambda)\cdot N=0$, i.e. $P(\lambda)=0$ puisque $N\neq 0$. **CQFD**

7- Soient, dans $M_4(\mathbb{C})$, les matrices suivantes :

$$M_1=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Montrer que les matrices M_1 et M_2 sont semblables.

Solution : Si on suppose, canoniquement, que $M_1=M_B(f)$ où $f\in End(\mathbb{R}^4)$ et $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, alors $M_2=M_{B'}(f)$ où $B'=(e_2,e_4,e_1,e_3)$, ce qui veut dire que M_1 et M_2 sont semblables puisque associées à un même endomorphiqme.