INI. Math2. 2I.

Laminovich

EMD1. Janvier 2005.
Durée: 2H

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération.
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1:(6.5 points)
Soit la fonction f donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de la fonction f en $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles en $(0,0)$ puis étudier la différentiabilité en $(0,0)$.
3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2: (3 points)
Résoudre dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ l'équation

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

où f est une fonction inconnue des deux variables (x,y), en utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y \end{cases}$

Exercice 3: (4 points)
Etudier les extrema de la fonction f définie par : $f(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$

Exercice 4:(6.5 points)
Soit dans $\mathbb{R}^2$ le domaine $D = D_1 \cup D_2$ tels que:
D_1 est dans le demi plan $x \leqslant 1$ et est compris entre les courbes d'équations:

$$y = x^2 \text{ et } y = \sqrt{-x^2+2x}$$

D_2 est dans le demi-plan $x \geqslant 1$ et est compris entre les courbes d'équations:

$$y = x^2,\ y = \sqrt{-x^2+2x},\ y = 0 \text{ et } y = -4x + 12$$

1) Représenter géométriquement le domaine D. Est-il régulier par rapport à x ? à y ?
2) Intervertir l'ordre d'intégration dans $\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$ où f est une fonction quelconque intégrable sur D.
3) Trouver le transformé de $\overset{\circ}{D}_1$ ($\overset{\circ}{D}_1$ étant l'interieur de D_1) par les coordonnées polaires.

Bon courage

Un corrigé de l'EMD 1 2004/2005

Ex 1 (4,5 pts)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}^2$$

1) Continuité de f en $(0,0)$

On a $f(0,0) = 0$, calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + x^4\varepsilon(x) - y^4 - y^4\psi(y)}{x^2+y^2} \quad \Big/ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x) = 0,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \psi(y) = 0$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4 - y^4}{x^2+y^2} + \frac{x^4}{x^2+y^2}\varepsilon(x) + \frac{y^4}{x^2+y^2}\psi(y) \right)$$

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2} = 0$ en utilisant les C.P $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

on a $\lim\limits_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta - \sin^4\theta) = 0$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} = 0$ C.P $\lim\limits_{r\to 0} r^2\cos^4\theta = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}\varepsilon(x) = 0$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} = 0$ C.P $\lim\limits_{r\to 0} r^2\sin^4\theta = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^2}\psi(y) = 0$

ie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Conclusion f est continue en $(0,0)$.

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^4} - 1}{x^2} \Big/ x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + o(x^4)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} (x + o(x)) = 0$

ie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, et f est antisymétrique

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Étude de la différentiabilité de f en $(0,0)$.

$f(h,k) - f(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k + \|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)$

ie $\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = \dfrac{e^{h^4} - e^{k^4}}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$

Nous calculons $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)$ $\left(\begin{matrix} \text{si } = 0 & \text{diff} \\ \neq 0 & \text{non diff} \end{matrix} \right)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{e^{h^4} - e^{k^4}}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Utilisons la même méthode que la 1ère question

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{h^4 - k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} + \frac{h^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}\varepsilon(h) + \frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}\psi(k) \right)$$

et $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^4 - k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$; $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$; $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$

par les C.P

ie $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ Donc f diff en $(0,0)$

3) Comme f est antisymétrique, il s'agira d'étudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ seulement, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3 e^{x^4}(x^2+y^2) - 2x(e^{x^4} - e^{y^4})}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \left(= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$

- En $(0,0)$ Calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(4\frac{x^3 \cdot e^{x^4}}{(x^2+y^2)} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}(e^{x^4} - e^{y^4}) \right)$$

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} e^{x^4} = 0$ par les C.P

② On utilisera la même méthode que la 1ère question :

Et ... i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 0$ CP $\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta - \ldots) = 0$

ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{(x^2+y^2)^2} = 0$ CP $\lim_{r\to 0} r\cos^5\theta = 0$

iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$ CP $\lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^4\theta = 0$

i.e. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

D'où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont en $(0,0)$.

Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue comme produit, somme, comp et rapp de f^{ts} cont

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est cont sur $\mathbb{R}^2$ et par analogie $\frac{\partial f}{\partial y}$ également

Conclusion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

5

Ex 2 (3pt)

Résoudre $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On a le chgt de variables $\begin{cases} u = x+y & (1) \\ v = x+2y & (2) \end{cases}$

(2) − (1) : $y = v - u$ de (1) $x = u - y = u - v + u = 2u - v$

$f(x,y) = f(2u-v, v-u) = (f\circ\varphi)(u,v)$

Posons $F = f\circ\varphi$ et $F(u,v) = (f\circ\varphi)(u,v)$

où $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\quad (u,v) \mapsto (\underbrace{2u-v}_{\varphi_1(u,v)}, \underbrace{v-u}_{\varphi_2(u,v)})$

i.e. $\mathcal{J}F(u,v) = \mathcal{J}f(x,y) \cdot \mathcal{J}\varphi(u,v)$

i.e. $\left(\frac{\partial F}{\partial u} \;\; \frac{\partial F}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;\; \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cela nous donne le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = 2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

1

i.e. on veut $\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \Rightarrow F$ est constante en u
i.e. $F(u,v) = h(v)$

Comme $(f\circ\varphi)(u,v) = F(u,v) = h(v)$

i.e. $f(x,y) = h(v) = h(x+2y)$

1

Les solutions de $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sont les fonctions f / $f(x,y) = h(x+2y)$

Ex 3 (4,5)

$f(x,y) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$ $\quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

1) CN : Recherche des p^t critiques ; on résout le système

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2xz = 0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 2yz = 0 & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 - y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

1^{er} cas : si $x = 0$ (2) évidente

(2) donne $yz = 0$ i.e. $y = 0$ ou $z = 0$

(3) donne $-y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4 = 0$ impossible

i.e. ce cas est rejeté

2^e cas : si $y = 0$ (1) donne $xz = 0$ i.e. $x = 0$ ou $z = 0$

(2) évidente

(3) $x^2 - 4 = 0$ i.e. $x = \pm 2$

i.e. $(2,0,0)$ et $(-2,0,0)$ sont des points critiques

3^e cas : si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

1,5

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z = 0 & (1)' \\ x^2 - z = 0 & (2)' \\ x^2 - y^2 = 4 & (3)' \end{cases}$$

(1)' + (2)' $x^2 + y^2 = 0$ i.e. $x = y = 0$ de (3) impossible

i.e. ce cas est rejeté

C-à-d. Les seuls points critiques sont $(2,0,0)$ et $(-2,0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2z$ ... $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ... $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2x$ ...

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x - 2y$ ... $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2y$ ... $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ ...

$d^2_{(0,0,0)} f(h,k,l) = 8hl - 8kl = k^2 + \frac{1}{2}(l+h)^2 - \frac{1}{2}l^2 ...$

$= k^2 - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}(h-l)^2$ ...

donc $f(h,k,l)$ change de signe au $V(0,0,0)$

en effet : $d^2_{(0,0,0)} f(0,h,0) = 8h^2 \geq 0$

$d^2_{(0,0,0)} f(h,-h,0) = -8h^2 < 0$

donc $(0,0,0)$ ne donne pas d'extremum pour f.

... le pt $(-2,0,0)$ ...

car $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$

f ne possède pas d'extremum.

... on ... utiliser la ... pour C.S

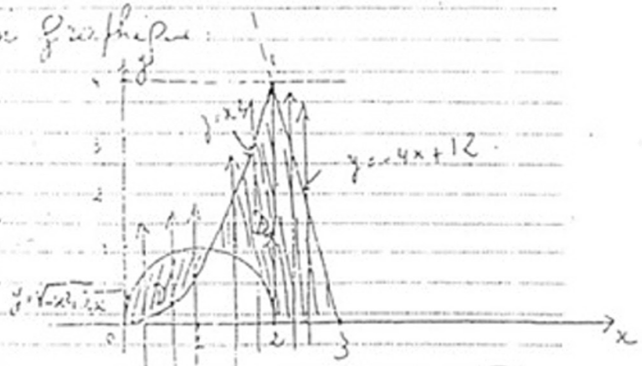
Exo II (6,5 pts)

1) représentation graphique :

On ... $y = \sqrt{-x^2+2x}$

$= \sqrt{1-(x-1)^2}$

représente ... cercle ... de centre $((1,0), 1)$



2) D est régulier selon x car D peut s'écrire

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 3, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

où $\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{-x^2+2x} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$, $\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+2x} & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ -4x+12 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

... n'est pas régulier selon y car ... ne peut pas ... ψ_1 et ψ_2 cont / $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$.

2) D'après le graphe ...

On a que $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq x \leq 2$ et $\sqrt{-x^2+2x} \leq y \leq x^2\}$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq -4x+12\}$

D_2 est régulier selon x et en appliquant Fubini :

$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{\sqrt{-x^2+2x}}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3 \int_0^{-4x+12} f(x,y)\,dy\,dx$

→ Régularité selon y

D'après le graphe on a

$D_2 = D_2' \cup D_2''$ tq

$D_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq 1, \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

avec $\psi_1(y)$: $y = \sqrt{-x^2+2x}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{1-(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{1-y^2}$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{1-y^2}$

et $\psi_2(y)$: $y = -4x+12$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}y + 3$

$D_2'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq y \leq 4, \ \psi_3(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

avec $\psi_3(y)$: $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

i.e. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq 1, \ 1+\sqrt{1-y^2} \leq x \leq -\frac{1}{4}y + 3\}$, D_2 est régulier selon y

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq y \leq 4, \ \sqrt{y} \leq x \leq -\frac{1}{4}y + 3\}$

Fubini 2 donne $\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{-\frac{1}{4}y+3} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^{-\frac{1}{4}y+3} f(x,y)\,dx\,dy$

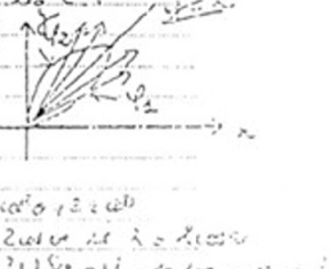
3) Soit D_2' le transformé de D_1 par les C.P

On a d'après le graphe : $0 < \theta < \pi/2$

1er cas : $0 < \theta < \pi/4$ on a $0 < r < \varphi_1(\theta)$

où $\varphi_1(\theta)$: $y = x^2 \Leftrightarrow r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$

$\Leftrightarrow r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$



2e cas : $\pi/4 < \theta < \pi/2$ on a $0 < r < \varphi_2(\theta)$

où $\varphi_2(\theta)$: $y = \sqrt{-x^2+2x} \Leftrightarrow r^2\sin^2\theta = -r^2\cos^2\theta + 2r\cos\theta$

$\Leftrightarrow r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$

i.e. $D_1' = \{(r,\theta) \ / \ 0 < \theta < \pi/4$ et $0 < r < \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\} \cup \{(r,\theta) / \pi/4 < \theta < \pi/2, 0 < r < 2\cos\theta\}$