ESI. 2012/2013
CP2. ANA3.

Interrogation1. 08/11/2012
Sujet1

Exercice:

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t} e^{-xt} dt$ avec $x \geq 0$.

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3) Calculer l'expression de $F'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Un corrigé du sujet1: 1) 1,5pts, 2) 2pts, 3) 1,5pts

1) Soit $f(t,x)=\dfrac{e^{-t}-\cos t}{t}e^{-xt}$, $f\in R_{loc}]0,+\infty[$ selon t,

$\rightsquigarrow$ au $v(0)$:

On a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-t}-\cos t}{t}e^{-xt}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1-t+o(t))-(1+o(t))}{t}.1=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t+o(t)}{t}=-1\in\mathbb{R}$.....**(0,5)**

Donc "0" est un FP.....**(0,25)**

$\rightsquigarrow$ au $v(+\infty)$:

$f(t,x)=\dfrac{e^{-(1+x)t}}{t}-\dfrac{\cos t}{t}e^{-xt}$, posons $g(t,x)=\dfrac{e^{-(1+x)t}}{t}$ et $h(t,x)=\dfrac{\cos t}{t}e^{-xt}$.

♦ $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t,x)dt$ converge (ref, $\beta=-(1+x)<0$).....**(0,25)**

♦ $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t,x)dt$: si $x=0$ converge (ref) .....**(0,25)**

et si $x\neq 0$: $|h(t,x)|\leq\dfrac{e^{-xt}}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t}dt$ converge (ref, $\beta=-x<0$) ie

$\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t,x)dt$ converge absolument donc converge.....**(0,25)**

Par linéarité $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge, on en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge.

2) Pour cela appliquons le thm de conservation de la dérivabilité:.....**(0,5)pour l'énnoncé**

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\dfrac{e^{-t}-\cos t}{t}(-t)e^{-xt}=-(e^{-t}-\cos t)e^{-xt}\ \forall x\in]0,+\infty[$....**(0,25)**

$\rightsquigarrow$ f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues selon t car....

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est dérivable selon x car...

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge $\forall x\in]0,+\infty[$, déja fait

$\rightsquigarrow$ Etudions la convergence dominée de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$:

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|=|(e^{-t}-\cos t)|e^{-xt}\leq 2e^{-xt}\leq 2e^{-at}=g(t)\ \forall x\in[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$, $g\in R_{loc}[0,+\infty[$....**(0,5)**

or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge (ref)..**(0,25)**

On en déduit que F est dérivable sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$... .**(0,5)**.

3) $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \int_0^{+\infty} (\cos t - e^{-t})\, e^{-xt}dt$ **(0,25),**

$\rightsquigarrow$ On a $\int_0^{+\infty} -e^{-t}e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} -e^{-(x+1)t}dt = \frac{1}{x+1}\left[e^{-(x+1)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{x+1}$ **(0,25)**

$\rightsquigarrow \int_0^{+\infty} \cos te^{-xt}dt = -x\left[\sin te^{-xt}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} \sin te^{-xt}dt$, car IPP: $\begin{cases} u' = \cos t \longrightarrow u = \sin t \\ v = e^{-xt} \longrightarrow v' = -xe^{-xt} \end{cases}$ **(0,5)**

ie: $\int_0^{+\infty} \cos te^{-xt}dt = -x\left[\cos te^{-xt}\right]_0^{+\infty} - x^2\int_0^{+\infty} \cos te^{-xt}dt$, car IPP: $\begin{cases} u' = \sin t \longrightarrow u = -\cos t \\ v = e^{-xt} \longrightarrow v' = -xe^{-xt} \end{cases}$ **(0,25)**

ie $\left(1+x^2\right)\int_0^{+\infty} \cos te^{-xt}dt = x \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \cos te^{-xt}dt = \frac{x}{(1+x^2)}$. **(0,25)**

Conclusion: $F'(x) = \frac{x}{(1+x^2)} - \frac{1}{x+1}$

ESI. 2012/2013
CP2. ANA3.

Interrogation1. 08/11/2012
Sujet2

Exercice:

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} - e^{-t^2 x}}{t^2} dt$ avec $x \geq 0$.

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3) Calculer l'expression de $F'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Un corrigé du sujet2: 1) 1,25pts, 2) 2,5pts, 3) 1,25pts

1) Soit $f(t,x) = \dfrac{e^{-t^2} - e^{-t^2 x}}{t^2}$, $f \in R_{loc}]0,+\infty[$ selon t,
$\rightsquigarrow$ au $v(0)$:

On a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{-t^2} - e^{-t^2 x}}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left(1 - t^2 + o\left(t^2\right)\right) - \left(1 - t^2 x + o\left(t\right)\right)}{t^2} = x - 1 \in \mathbb{R}$.....**(0,5)**
Donc "0" est un FP.....**(0,25)**

$\rightsquigarrow$ au $v(+\infty)$:
$|f(t,x)| \leq \dfrac{\left|e^{-t^2}\right| + \left|e^{-t^2 x}\right|}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{2}{t^2} dt$ converge (IR, $\alpha = 2 > 1$) **(0,25),**

ie $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)dt$ converge absolument donc converge.....**(0,25)**

On en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge.

2) Pour cela appliquons le thm de conservation de la dérivabilité:.....**(0,5)pour l'énnoncé**
On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{1}{t^2}\left(t^2 e^{t^2 x}\right) = e^{-t^2 x} \quad \forall x \in]0,+\infty[$....**(0,25)**
$\rightsquigarrow$ f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues selon t car....
$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est dérivable selon x car...
$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge $\forall x \in]0,+\infty[$, déja fait

$\rightsquigarrow$ Etudions la convergence dominée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$:

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = e^{-t^2 x} \leq e^{-at^2} = g(t)\ \forall x \in [a,+\infty[\subset]0,+\infty[$....**(0,5)**

or $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge d'aprés la régle de l'ordre, en effet:

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-at^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{2\log t}.e^{-at^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{2\log t - at^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2\left(2\frac{\log t}{t^2} + a\right)} = 0$ **(0,75)**
On en déduit que F est dérivable sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$... .**(0,5)**.

3) $F'(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$ **(0,25),** puis faisons le changement de variable: $u = t\sqrt{x}$ ie $du = \sqrt{x}dt.$**(0,5),**

donc $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2} dt$ **(0,25)** et donc $F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ **(0,25)**