ESI. 2CPI.

Examen final d'ANA4. Mai 2016
Durée 2h

Documents et calculatrices interdits

Questions (4,5 points):

A] Pour une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Répondre par vrai ou faux

1) La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I.
2) La convergence absolue sur I implique la convergence uniforme sur I.

B] Pour une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que

1) Si $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur I et si f est bornée sur I, alors chaque f_n est bornée sur I.
2) Si $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I, alors $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ uniformément sur I.

C] Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$.

Exercice 1 (6 points) : Soit $I =]1, +\infty[$, pour $x \in I$, on pose $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+x^n}$.

1) Montrer que F est bien définie sur I.
2) Montrer que F est continue sur I.
3) Montrer que F est de classe C^1 sur I.
4) Montrer que $\lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} F(x) = +\infty$ (Indication : Minorer F à l'aide d'une série géométrique).

Exercice 2 (4 points) : On considère la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 0} 2^n \left(n^2 - 1\right) x^n.$$

1) Déterminer le rayon de convergence.
2) Déterminer le domaine de convergence.
3) Calculer sa somme.

Exercice 3 (5,5 points) :

Soient $\alpha \in [0, \pi]$ et f la fonction paire 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x + \alpha \text{ si } x \in [0, \alpha], \\ 0 \text{ si } x \in]\alpha, \pi]. \end{cases}$$

1) Trouver la série de Fourier associée à f.
2) Déterminer la somme de la série de Fourier associé à f.
3) Déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(1-\cos(n\alpha))^2}{n^4}.$$

Un corrigé:
Questions :

A] 1) La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I. Vraie.
2) La convergence absolue sur I implique la convergence uniforme sur I. Fausse.
B] 1) Supposons $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur I ie:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

et comme f est bornée sur I alors:

$$\exists M > 0 \text{ tq } |f(x)| \leq M,\ \forall x \in I$$

Donc on a: pour chaque $n : |f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.
On obtient: $|f_n(x)| \leq \varepsilon + M \ldots \forall x \in I$ (choisir par exemple $\varepsilon = 1$), ce qui donne la bornitude.
2) Supposons $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I ie:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $|f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = \max(N_1, N_2) > 0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| < \varepsilon$$

Alors $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ uniformément sur I.
C] Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R ie elle a pour intervalle de convergence $]-R, R[$ ie les x tq $|x| < R$. On a que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^{2n} = \sum\limits_{n\geq 0} a_n \left(x^2\right)^n$, c'est un cas particulier de la 1ère série entière, il suffira de poser x^2 à la place du x donc $x^2 < R$ ce qui donne $|x| < \sqrt{R}$, son intervalle de convergance est donc $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$ donc son rayon est $\sqrt{R}$.

<u>Exercice 1:</u>
1) Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^n} > 0$, on a que $f_n(x) \leq \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ $\forall x \in I$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ est une série géométrique de raison $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ donc convergente, il en résulte que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge $\forall x \in I$ ce qui donne que F est bien définie sur I.
2) Montrons que F est continue sur I. Utilisons le théorème de conservation de la continuité:

On a $f_n(x) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $\forall x \in [a, +\infty[\subset I$ et $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ est une série géométrique de raison $0 < \frac{1}{a} < 1$ donc convergente, il en résulte que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[\subset I$.
D'autre part toutes les f_n sont continues sur tout $[a, +\infty[\subset I$ car elles sont rapport de polynômes.
On obtient que F est continue sur tout $[a, +\infty[\subset I$ donc sur I.
3) Montrons que F est de classe C^1 sur I. Utilisons le théorème de conservation de la dérivabilité:
D'abord $f_n'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$
ie $|f_n'(x)| = \dfrac{nx^{n-1}}{1+2x^n+x^{2n}} \leq \dfrac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = \dfrac{n}{x^{n+1}} \leq \dfrac{n}{a^{n+1}}$ $\forall x \in [a, +\infty[\subset I$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{a^{n+1}}$ est une série convergente (utiliser par exemple la régle de D'Alembert) ce qui donne la convergence normale donc uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n'$ sur tout $[a, +\infty[\subset I$.
D'autre part toutes les f_n sont C^1 sur tout $[a, +\infty[\subset I$ car elles sont rapport de polynômes (on sait également que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge sur I 1ère question).
On obtient que F est C^1 sur tout $[a, +\infty[\subset I$ donc sur I.
4) On a $F(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{1+x^n} \geq \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{x^n+x^n} = \dfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
Comme $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 1 \\ >}} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = +\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 1 \\ >}} F(x) = +\infty$.

Exercice 2:

1) On pose $a_n = 2^n\left(n^2-1\right) \geq 0$ et $u_n(x) = a_n x^n$.
1) Utilisons le théorème de Hadamard: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{2^{n+1}\left((n+1)^2-1\right)}{2^n\left(n^2-1\right)} = 2 = \rho$.
Donc $R = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{2}$.
2) Etude aux bornes:
$\rightsquigarrow$ En $x = \frac{1}{2}$: $u_n\left(\frac{1}{2}\right) = n^2-1$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n\left(\frac{1}{2}\right)$ diverge car la condition nécessaire n'est pas vérifiée.
$\rightsquigarrow$ En $x = -\frac{1}{2}$: $u_n\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^n\left(n^2-1\right)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left|u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = +\infty \neq$

$0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n\left(\frac{1}{2}\right)$ diverge car la condition nécessaire n'est pas vérifiée.
On en conclut que $D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
3) Calcul de la somme $S(x) = \sum_{n\geq 0} 2^n \left(n^2-1\right) x^n = \sum_{n\geq 0} \left(n^2-1\right)(2x)^n$,
pour cela calculons la somme $T(y) = \sum_{n\geq 0} \left(n^2-1\right) y^n$, on sait que :

$\sum_{n\geq 0} y^n = \frac{1}{1-y}$; $\left(\sum_{n\geq 0} y^n\right)' = \sum_{n\geq 1} ny^{n-1} = \frac{1}{(1-y)^2}$; $\left(\sum_{n\geq 0} y^n\right)'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1)y^{n-2} = \frac{2}{(1-y)^3}$,
D'autre part $n^2-1 = n(n-1)+n-1$ donc:
$T(y) = \sum_{n\geq 0} (n(n-1)+n-1)y^n = \sum_{n\geq 0} n(n-1)y^n + \sum_{n\geq 0} ny^n - \sum_{n\geq 0} y^n$ $\forall y \in]-1,1[$ ie:
$T(y) = y^2\sum_{n\geq 2} n(n-1)y^{n-2} + y\sum_{n\geq 1} ny^{n-1} - \sum_{n\geq 0} y^n = \frac{2y^2}{(1-y)^3} + \frac{y}{(1-y)^2} - \frac{1}{1-y}$.

En particulier pour $y = 2x$: $S(x) = \frac{8x^2}{(1-2x)^3} + \frac{2x}{(1-2x)^2} - \frac{1}{1-2x}$ $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Exercice 3:
1) Faire le graphe, f est localement intégrable donc Ff existe.
f étant paire alors $b_n = 0$ $\forall n \geq 1$, calculons les coefficients a_n :
$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha (-x+\alpha)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x^2}{2}+\alpha x\right]_0^\alpha = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\alpha^2}{2}+\alpha^2\right) = \frac{\alpha^2}{\pi}$.
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\alpha (-x+\alpha)\cos(nx)\,dx$, faisons une IPP: $\begin{cases} u = -x+\alpha \longrightarrow u' = -1 \\ v' = \cos(nx) \longrightarrow v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{cases}$
$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{(-x+\alpha)}{n}\sin(nx)\right]_0^\alpha + \frac{1}{n}\int_0^\alpha \sin(nx)\,dx\right) = -\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^\alpha = \frac{2\left(1-\cos(n\alpha)\right)}{\pi n^2}$
On obtient alors: $Ff(x) = \frac{\alpha^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(1-\cos(n\alpha))\cos(nx)}{n^2}$.
2) Utilisons le corrolaire de Dirichlet, puisque f est $2\pi-$périodique et paire, il suffit de restreindre le travail sur $[0,\pi]$, d'après le graphe on a:
$\rightsquigarrow$ f est C^1 par morceaux puisque:

$\bigstar$ $f'_{/]0,\alpha[}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f'_{/]0,\alpha[}(x) = -1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha^-} f'_{/]0,\alpha[}(x) = -1 \in \mathbb{R}$.
$\bigstar$ $f'_{/]\alpha,\pi[}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha^+} f'_{/]\alpha,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi^-} f'_{/]\alpha,\pi[}(x) = 0 \in \mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est développable en série de Fourier et on a
$Ff(x) = \dfrac{\alpha^2}{2\pi} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(1 - \cos(n\alpha)) \cos(nx)}{n^2} = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3) Calculons $S_1 = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$, pour le faire considérons $x = 0$

donc $\dfrac{\alpha^2}{2\pi} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(1 - \cos(n\alpha))}{n^2} = \alpha$, ensuite posons $\alpha = \pi$:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - \cos(n\pi))}{n^2} = \pi \Longleftrightarrow \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Posons $v_n = \dfrac{(1 - (-1)^n)}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k+1)^2} \text{ si } n = 2k+1,\ k \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

donc la relation précedente donne: $\sum\limits_{k \geq 0} \dfrac{2}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{4} \Longleftrightarrow 2S_1 = \dfrac{\pi^2}{4} \Longleftrightarrow S_1 = \dfrac{\pi^2}{8}$

Calculons $S_2 = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(1 - \cos(n\alpha))^2}{n^4}$, pour le faire utilisons l'égalité de Parseval:

$\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{\,2}(x)\, dx = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n \geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$, ce qui donne $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\alpha} f^{\,2}(x)\, dx = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n \geq 1} (a_n)^2$

donc:

$\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\alpha} (-x+\alpha)^2\, dx = \dfrac{\alpha^4}{2\pi^2} + \dfrac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(1 - \cos(n\alpha))^2}{n^4} \Longleftrightarrow \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\alpha} \left(x^2 + \alpha^2 - 2x\alpha\right) dx =$
$\dfrac{\alpha^4}{2\pi^2} + \dfrac{4}{\pi^2} S_2$

$$\frac{4}{\pi^2} S_2 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} + \alpha^2 x - x^2 \alpha\right]_0^{\alpha} - \frac{\alpha^4}{2\pi^2} \Longleftrightarrow S_2 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{2}{\pi} \left[\frac{\alpha^3}{3}\right] - \frac{\alpha^4}{2\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{2\alpha^3}{3\pi} - \frac{\alpha^4}{2\pi^2}\right).$$