Durée : 01h45

L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (10 pt) Soient $m \in \mathbb{R}$ et f_m une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice associée relativement aux bases canoniques, respectives $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $C = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$, est donnée par :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 2 & 2 & m+1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Dans tout l'exercice, il n'est pas demandé de déterminer f_m.
1/ Calculer suivant les valeurs du paramètre m, $\ker(f_m)$, $\mathrm{Im}(f_m)$ et $rg(f_m)$.
2/ Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A_m est inversible.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $A = A_{-1}$ et $f = f_{-1}$.

3/ En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.
4/ Soit $C' = (P_1 = 1, P_2 = X - 1, P_3 = (X-1)^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et soient $v = (1, -1, 1)$ et $Q = 1 + X + X^2$.
En utilisant la représentation matricielle :

- **a/** Calculer $f(v)$.
- **b/** Déterminer la matrice de passage P de C vers C'.
- **c/** Calculer les coordonnées du vecteur Q dans la base C'.
- **d/** Déterminer la matrice $A' = M_{B,C'}(f)$.
- **e/** Dire pourquoi A' est inversible puis calculer son inverse.
- **f/** Les matrices A et A' sont-elles équivalentes ? Justifier.

Exercice 2 : (02 pt+03 pt) Les parties **(I)** et **(II)** sont indépendantes.

I/ Soit la permutation $\sigma \in S_8$ définie par : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.
1/ Décomposer σ en un produit de transpositions.
2/ Déduire :

- **a/** La signature de σ.
- **b/** La décomposition de σ^{-1} en un produit de transpositions, puis la signature de σ^{-1}.

II/ Soit φ la forme trilinéaire alternée définie de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(e_1, e_2, e_3) = -2$, (e_1, e_2, e_3) étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,1)$ et $v_3 = (-1,1,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1/ Calculer $\varphi(v_1, v_2, v_3)$.
2/ Calculer $\varphi(2v_3, v_1 - v_2, v_1 - v_3)$.

Bon Courage