Un corrigé type du CF-ANA4-2018/2019

Exercice 1 : On a $D_f = \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\boxed{0{,}25}$ car c'est un polynôme.

Extrema Locaux : 1) CN: Recherche des points critiques.

Résolution du système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0, \ldots (1) & \boxed{0{,}25} \\ 3y^2 - 12 = 0 \ldots (2) & \boxed{0{,}25} \end{cases}$

→ (1) donne $x^2 = 1$ ie $x = 1$ ou $x = -1$... $\boxed{0{,}25}$

→ (2) donne $y^2 = 4$ ie $y = 2$ ou $y = -2$... $\boxed{0{,}25}$

Alors on a quatre points critiques :.$M_1 = (1,2)$, $M_2 = (1,-2)$, $M_3 = (-1,2)$, et $M_4 = (-1,-2)$. $\boxed{0{,}25}$

2) CS: Test.. Calculons les dérivées secondes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.\ \boxed{0{,}25}\text{x3}$$

Méthode 1 : Utilisons la méthode du discriminant.

Point	r	s	t	$\Delta = rt - s^2$	Conlusion	
M_1	$6 > 0$	0	12	> 0.. $\boxed{0{,}25}$	$(M_1, f(M_1))$ est un min local $\boxed{0{,}25}$	
M_4	$-6 < 0$	0	-12	> 0. $\boxed{0{,}25}$	$(M_4, f(M_4))$ est un max local $\boxed{0{,}25}$	
M_2	6	0	-12	< 0. $\boxed{0{,}25}$	$(M_2, f(M_2))$ n'est pas un extrémum	$\boxed{0{,}25}$
M_3	-6	0	12		$(M_3, f(M_3))$ n'est pas un extrémum	

Méthode 2 : Utilisons la méthode de la Hessienne. On a $Hess(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$.

Ainsi, $Hess(f)(M_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $Hess(f)(M_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$, $Hess(f)(M_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $Hess(f)(M_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.

Point	Les valeurs propres de la $Hess(f)(M_i)$	Conlusion	
∗ M_1	sont toutes positifs.... $\boxed{0{,}25}$	$(M_1, f(M_1))$ est un min local $\boxed{0{,}25}$	
∗ M_4	sont de signes négatifs.... $\boxed{0{,}25}$	$(M_4, f(M_4))$ est un max local $\boxed{0{,}25}$	
∗ M_2 M_3	sont de signes différents.... $\boxed{0{,}25}$	$(M_2, f(M_2))$ n'est pas un extrémum $(M_3, f(M_3))$ n'est pas un extrémum	$\boxed{0{,}25}$

Extrema globaux : On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$, donc f n'a pas d'extrema globaux. $\boxed{0{,}5}$.

Exercice 2 : On a $D_f = \mathbb{R}^2,\ f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ $\boxed{0{,}25}$ car c'est un polynôme.

Il s'agit de déterminer les extrémums liés de f sous la contrainte φ où $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 8$.

A) Recherche des (x,y) tel que $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right.$

$\iff (x,y) = (0,0)$, mais ce point ne vérifie pas la contraite. $\boxed{0{,}5}$

B) Utilisons les multiplicateurs de Lagrange. Soit la fonction auxiliaire :

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 8\right). \boxed{0{,}25}$$

D'abord résolvons le systéme (S) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x + 2\lambda x - 4y = 0.....(1) \\ 2y + 2\lambda y - 4x = 0.....(2) \\ x^2 + y^2 = 8.......(3) \end{array}\right.$ $\boxed{0{,}5}$

(1)+(2) : $2(x+y) + 2\lambda(x+y) - 4(x+y) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(x+y) = 0 \iff (\lambda = 1 \vee\ y = -x)$.

1er cas $\lambda = 1$: $(S) \iff \left\{\begin{array}{l} 4x - 4y = 0.....(1) \\ 4y - 4x = 0.....(2) \\ x^2 + y^2 = 8.......(3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = x.....(*) \\ x^2 + y^2 = 8.....(3) \end{array}\right.$ $\boxed{0{,}25}$

$(*)$ dans (3) : $y^2 = 4 \iff y = 2 \vee y = -2$.
Donc $(2,2,1)$ et $(-2,-2,1)$ sont des solutions de (S).

2ème cas $y = -x$: $(S) \iff \left\{\begin{array}{l} 6x + 2\lambda x = 0 = 0.....(1) \\ -6x - 2\lambda x = 0.....(2) \\ x^2 = 4.......(3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (3+\lambda)x = 0 \\ x^2 = 4. \end{array}\right.$ $\boxed{0{,}25}$

Donc $(2,-2,-3)$ et $(-2,2,-3)$ sont des solutions de (S).
Les seuls points susceptibles de donner les extrema liés sous la contraintes φ sont donc

$$M_1 = (2,2)\,, M_2 = (-2,-2)\,, M_3 = (2,-2) \quad et \quad M_4 = (-2,2) \quad \boxed{0{,}25}x4$$

Conclusion : ici il s'agit de détrminer les extrema de f sur le cercle $C\left((0,0)\,, \sqrt{8}\right)$ qui est un férmé borné, donc f atteint ses bornes. $\boxed{0{,}25}$
Puisque, $f(M_1) = -8,\ f(M_2) = -8,\ f(M_3) = 24$ et $f(M_4) = 24, ...$ $\boxed{0{,}25}$ alors $(M_1, f(M_1))$ et $(M_2, f(M_2))$ sont des minimums pour f.. $\boxed{0{,}25}$, d'autre part $(M_3, f(M_3))$ et $(M_4, f(M_4))$ sont des maximums $\boxed{0{,}25}$ pour f sur le cercle d'equation $x^2 + y^2 = 8$.

Exercice 3 : Utilisons les coordonnées cylindriques:

$$\varphi : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = y \end{cases} \boxed{0{,}25} \qquad \text{avec} \begin{cases} r = \sqrt{x^2+z^2} \\ \det J_\varphi = r. \boxed{0{,}25} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \quad \in \quad \overset{0}{\Omega} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x^2+y^2 < z^2 \\ 1 < z < 2 \end{cases} .. \boxed{0{,}25} \\
&\overset{CC}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \cos\theta > 0 \\ \sin\theta > 0 \\ r^2 < z^2 \\ 1 < z < 2 \end{cases} .. \boxed{0{,}25} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \ \boxed{0{,}25} \\ 0 < r < z \ \boxed{0{,}25} \\ 1 < z < 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, le transformé par les CC est donné par:

$$\Omega' = \left\{ (r,\theta,y) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\times \mathbb{R} \ / \ 0 < r < z, \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \ 1 < z < 2 \right\}. \boxed{0{,}25}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
Vol(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} dxdydz \boxed{0{,}25} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \int_0^z r dr dz d\theta \boxed{0{,}5} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left[r^2\right]_0^z dz d\theta \boxed{0{,}25} \\
&= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[z^3\right]_1^2 d\theta = \frac{7\pi}{12}. \boxed{0{,}25}
\end{aligned}$$

Exercice 4 : 1) Posons $f(t,x)=\dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}$. La fonction $F(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{xt}-1}dt$.
est une intégrale paramétrée impropre .. $\boxed{0{,}25}$.
On a :

$\rightsquigarrow$ f est continue comme rapport, somme et composée de fonctions continues sur $[1,+\infty[\times]0,+\infty[.\boxed{0{,}25}$

$\rightsquigarrow$ Pour tout $(t,x)\in[1,+\infty[\times]0,+\infty[,\quad |f(t,x)|\le\dfrac{1}{e^{xt}-1}$.

Or $e^{\alpha t}\le e^{xt}$ pour tout $(t,x)\in[1,+\infty[\times[\alpha,+\infty[$ (avec $\alpha>0$), il vient

$$|f(t,x)|\le\frac{1}{e^{at}-1}=\varphi(t)\boxed{0{,}5},\ \forall t\in[1,+\infty[\boxed{0{,}25},\ \forall x\in[a,+\infty[,\ a>0\boxed{0{,}25}.$$

Voyons la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt,\ \varphi\in R_{loc}[1,+\infty[$:

Au $v(+\infty)$: $\varphi(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{e^{at}}.\boxed{0{,}25}$ 0r: $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-at}dt$ converge (intégrale de référence)$\boxed{0{,}25}$

Utilisons le théorème de conservation de la continuité sous $\int$ pour le cas intégrale impropre paramétrée, on en déduit que F est continue sur tout $[a,+\infty[,\ a>0.\boxed{0{,}25}$

<u>Conclusion :</u> Par recouvrement , F est continue sur $]0,+\infty[.\boxed{0{,}5}$

2) Posons $g(t,x)=\dfrac{e^{x(t+1)}}{t+1}$. La fonction $G(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{x(t+1)}}{t+1}dt$. est une intégrale paramétrée de Rieman . $\boxed{0{,}25}$.
On a :

$\rightsquigarrow$ g est continue comme rapport, de fonctions continues sur $[0,1]\times\mathbb{R}$. $\boxed{0{,}25}$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)=e^{x(t+1)}$ qui est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}$.. $\boxed{0{,}25}$

<u>Conclusion :</u> Utilisons le théorème de conservation de la dérivabilité sous $\int$ pour le cas d'intégrale de Rieman, paramétrée , on en déduit que G est dérivable sur $\mathbb{R}.\boxed{0{,}25}$

De plus, on a

$$G'(x)=\int_0^1 g'(t,x)\ dt=\int_0^1 e^{x(t+1)}dt\quad\boxed{0{,}25}=\begin{cases}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}, & si\quad x\neq0\\ 1,, & si\quad x\neq 0.\end{cases}\qquad\boxed{0{,}5}$$

Exercice 5: Appliquons les TL au système donné, $Y=\mathcal{L}(y)$, $Z=\mathcal{L}(z)$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y'')+(\mathcal{L}(z')-\mathcal{L}(y'))=-\frac{3}{4}\mathcal{L}(y) \\ \mathcal{L}(z'')-(\mathcal{L}(z')-\mathcal{L}(y'))=-\frac{3}{4}\mathcal{L}(z) \end{cases} \quad \boxed{0{,}25}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \underbrace{x^2Y-xy(0)-y\,'(0)}_{\boxed{0{,}5}}+\left(\underbrace{xZ-z(0)}_{\boxed{0{,}25}}-xY+y(0)\right)=-\frac{3}{4}Y \\ x^2Z-xz(0)-z\,'(0)-(xZ-z(0)-xY+y(0))=-\frac{3}{4}Z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2Y-1+(xZ-xY)=-\frac{3}{4}Y \\ x^2Z+1-(xZ-xY)=-\frac{3}{4}Z \end{cases} \boxed{0{,}25} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2Y-1+x(Z-Y)=-\frac{3}{4}Y\ldots(1) \\ x^2Z+1-x(Z-Y)=-\frac{3}{4}Z\ldots(2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2(Y+Z)=-\frac{3}{4}(Y+Z)\ldots(1)+(2) \\ x^2(Y-Z)-2+2x(Z-Y)=-\frac{3}{4}(Y-Z)\ldots(1)-(2) \end{cases} \quad \boxed{0{,}5}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (Y+Z)\left(x^2+\frac{3}{4}\right)=0 \\ x^2Z+1-x(Z-Y)=-\frac{3}{4}Z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Y+Z=0 \\ x^2Z+1-x(Z-Y)=-\frac{3}{4}Z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Y=-Z \\ x^2Z+1-x(Z-Y)=-\frac{3}{4}Z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Z=-Y \\ -x^2Y+1+2xY=\frac{3}{4}Y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Z=-Y \\ -4x^2Y+8xY-3Y=-4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Z=-Y \\ -4x^2Y+8xY-3Y=-4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Z=-Y \\ (4x^2-8x+3)Y=4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Z=-Y \\ Y=\dfrac{4}{4x^2-8x+3}. \end{cases} \quad \boxed{0{,}5}$$

Or $4x^2-8x+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ d'où $Y=\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\boxed{0{,}25}$

donc, $Y=-\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\boxed{0{,}5}$ et $y(t)=-\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{x-\frac{3}{2}}\right)\boxed{0{,}5}$

Ainsi, $Y=-e^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{3t}{2}}\boxed{0{,}5}$ et $Z(t)=-Y(t)=e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{3t}{2}}.\boxed{0{,}25}$