Cours 6

Système complet de connecteurs

On rappelle que l'ensemble des connecteurs de la logique propositionnelle défini en cours est

$$C = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}.$$

Système complet de connecteurs

Définition 1.

On appelle système complet de connecteurs tout ensemble C' de connecteurs tel que pour toute formule F il existe une formule F' équivalente à F n'utilisant que les connecteurs de C'.

Voici un petit résultat intéressant :

Lemme

Si C' est un système de connecteur complet et si C'' est un système de connecteur tel que pour toute formule F' n'utilisant que les connecteurs de C' il est possible de trouver une formule F'' équivalente à F' n'utilisant que les connecteurs de C'' alors le système de connecteur C'' est complet.

Exemple Le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet. Ceux sont les connecteurs utilisés dans les formes normales disjonctives et les formes normales conjonctives.

Il suffit d'exprimer l'implication $\Rightarrow$:

$$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b,$$

et d'exprimer l'équivalence $\Leftrightarrow$:

$$a \Leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b).$$

Pour toute formule logique il existe une formule normale disjonctive équivalente.

Pour toute formule logique il existe une formule normale conjonctive équivalente.

Maintenant pour montrer qu'un système D est complet, on peut se limiter à exprimer les trois connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee\}$ en fonction des connecteurs de l'ensemble D.

6.1 Formules équivalentes à une et à deux variables

Exercice 1. ***(Equivalence à une variable)*** *Combien y-a-il de colonnes distinctes dans une table de vérité à une variable ? En déduire que toute formule propositionnelle avec la seule variable p, est équivalente à l'une des formules $\bot, \top, p, \neg p$.*

Exercice 2. ***(Equivalence à deux variables)*** *Combien y-a-il de colonnes distinctes dans une table de vérité à deux variables ?*

En déduire que toute formule propositionnelle avec deux variables, notées p et q, est équivalente à l'une des formules $\bot$, $\top$, p, $\neg p$, q, $\neg q$, $p \wedge q$, $\neg(p \wedge q)$, $p \vee q$, $\neg(p \vee q)$,
$p \Rightarrow q$, $\neg(p \Rightarrow q)$, $q \Rightarrow p$, $\neg(q \Rightarrow p)$, $p \Leftrightarrow q$, $\neg(p \Leftrightarrow q)$.

Exercice 3. *Indiquez en fonction de k combien il y a de fonctions booléennes à k arguments. Autrement dit : Combien y-a-il de colonnes distinctes dans une table de vérité à k variables ?*

6.2 Systèmes complets de connecteurs

Exercice 4. *Montrer que les ensembles $\{\neg, \Rightarrow\}, \{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont des ensembles complets de connecteurs.*

Exercice 5. *Montrer que les ensembles $\{|\}$, et $\{\downarrow\}$ sont des ensembles complets de connecteurs. NB : $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$ et $p|q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$*

Remarque 1. *En logique matérielle(combinatoire), avec la seule porte (nor) $p \downarrow q$ on peut construire tous les circuits logiques.*

Exercice 6. *1. Montrer que les systèmes suivants sont complets : $\{0, \Rightarrow\}; \{0, \Leftrightarrow, \vee\}; \{0, \Leftrightarrow, \wedge\};$*

6.3 Systèmes incomplets de connecteurs

Exercice 7.
Montrer que les systèmes suivants ne sont pas complets : $\{1, \Rightarrow, \wedge, \vee\}, \{0, 1, \wedge, \vee\}, \{0, 1, \neg, \Leftrightarrow\}$.

Exercice 8. *Montrer que parmi les seize connecteurs (ont peut associer à chaque classe d'équivalence de formules de deux variables un connecteur), il y en a que deux qui sont à eux seuls un système complet : $\{|\}$, et $\{\downarrow\}$.*

6.4 Système complet minimal de connecteurs

Un système complet de connecteurs est dit minimal si aucun de ses sous-ensembles stricts n'est complet.
Exemple : $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est complet non minimal car $\{\wedge, \neg\}$ est complet.
$\{\wedge, \neg\}$ est complet et minimal car ni $\{\neg\}$ ni $\{\wedge\}$ n'est complet.

♠**Exercice 1**

p	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- $F_0 \equiv \bot \equiv (p \wedge \neg p) \equiv (p \Leftrightarrow \neg p) \equiv \neg(p \Rightarrow p) \equiv \cdots$
- $F_1 \equiv \mathbf{p} \equiv (p \wedge p) \equiv (p \vee p) \equiv \cdots$
- $F_2 \equiv \neg\mathbf{p} \equiv (p \Rightarrow \bot) \equiv (p \Rightarrow \neg p) \equiv \cdots$
- $F_3 \equiv \top \equiv (p \vee \neg p) \equiv (p \Rightarrow p) \equiv (p \Leftrightarrow p) \equiv ((p \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg p). \equiv \cdots$

♠**Exercice 2**

p	q	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- $F_0 \equiv \bot \equiv (p \wedge \neg p) \equiv (p \Leftrightarrow \neg q) \wedge (p \Leftrightarrow q) \equiv \cdots$
- $F_1 \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \equiv p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \cdots$
- $F_2 \equiv \neg(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \equiv p \wedge \neg q \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv \cdots$
- $F_3 \equiv \mathbf{p} \equiv p \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv (q \vee \neg q) \Rightarrow p \equiv \cdots$
- $F_4 \equiv \neg(\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}) \equiv \neg p \wedge q \equiv \cdots$
- $F_5 \equiv \mathbf{q} \equiv q \vee (p \wedge q) \equiv q \wedge (p \vee q) \equiv \top \Rightarrow q \equiv \cdots$
- $F_6 \equiv \neg(\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv \cdots$

- $F_7 \equiv \mathbf{(p \vee q)} \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv p \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv \cdots$
- $F_8 \equiv \neg\mathbf{(p \vee q)} \equiv \neg p \wedge \neg q \equiv \cdots$
- $F_9 \equiv \mathbf{(p \Leftrightarrow q)} \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg p) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg p) \cdots$
- $F_{10} \equiv \neg\mathbf{q} \equiv q \Rightarrow \perp \equiv \cdots$
- $F_{11} \equiv \mathbf{(q \Rightarrow p)} \equiv \cdots$
- $F_{12} \equiv \neg\mathbf{p} \equiv (p \Rightarrow \perp) \equiv (p \Rightarrow \neg p) \equiv \cdots$
- $F_{13} \equiv \mathbf{(p \Rightarrow q)} \equiv (\neg p \vee q) \equiv \cdots$
- $F_{14} \equiv \neg\mathbf{(p \wedge q)} \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \vee \neg q \equiv \cdots$
- $F_{15} \equiv \top \equiv (p \vee \neg p) \equiv (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \cdots$

♠**Exercice 3.** Il existe bien sur une infinité de formules différentes syntaxiquement, mais il existe exactement $2^{(2^k)}$ formules différentes sémantiquement. Pour $k = 0$ deux formules $\top, \perp$. Pour $k = 1$, on a 4 comme c'est vu dans l'exercice 1. Pour $k = 2$ on a 16(exercice 2.) Pour $k = 3$ on aura $2^8 = 256$ formules.

♠**Exercice 4.** Rappelons qu'on peut utiliser le fait que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.

1. Pour $\{\neg, \wedge\}$ il suffit d'exprimer le $\vee$ en fonction de $\neg$ et $\wedge$.
$$(a \vee b) \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b).$$
2. Pour $\{\neg, \vee\}$ il suffit d'exprimer le $\wedge$ en fonction de $\neg$ et $\vee$.
$$(a \wedge b) \equiv \neg(\neg a \vee \neg b).$$
3. Pour $\{\neg, \Rightarrow\}$ il suffit d'exprimer le $\vee$ (et/ou) le $\wedge$ en fonction de $\neg$ et $\Rightarrow$.
$$(a \vee b) \equiv (\neg a \Rightarrow b). \quad (a \wedge b) \equiv \neg(a \Rightarrow \neg b).$$

♠**Exercice 5.** On va exprimer $\vee, \wedge$ et $\neg$.

1. Pour le système $\{|\}$.
$$\neg a \equiv (a|a), \quad (a{\wedge}b) \equiv (a|b)|(a|b), \quad (a{\vee}b) \equiv (a|a)|(b|b).$$
2. Pour le système $\{\downarrow\}$.
$$\neg a \equiv (a \downarrow a), \quad (a{\vee}b) \equiv (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b), \quad (a{\wedge}b) \equiv (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b).$$

♠**Exercice 6.**

1. Pour le système $\{0, \Rightarrow\}$.
$$\neg a \equiv (a \Rightarrow 0), \quad (a \vee b) \equiv (a \Rightarrow 0) \Rightarrow b, \quad (a \wedge b) \equiv (a \Rightarrow (b \Rightarrow 0)) \Rightarrow 0.$$
2. Pour le système $\{0, \Leftrightarrow, \vee\}$;
$$\neg a \equiv (a \Leftrightarrow 0); \vee \in \{0, \Leftrightarrow, \vee\}; (a \wedge b) \equiv ((a \Leftrightarrow 0) \vee (b \Leftrightarrow 0)) \Leftrightarrow 0$$
3. Pour le système $\{0, \Leftrightarrow, \wedge\}$;
$$\neg a \equiv (a \Leftrightarrow 0); \wedge \in \{0, \Leftrightarrow, \wedge\}; (a \vee b) \equiv ((a \Leftrightarrow 0) \wedge (b \Leftrightarrow 0)) \Leftrightarrow 0$$

♠**Exercice 7**[Système incomplet]

1. Pour le système $\{1, \Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$.
On peut montrer par induction (du même type de celles vues dans le cours 3), que pour l'assignation v qui donne à toutes les variables propositionnelles la valeur 1, toute formule composée des variables et des connecteurs $\{1, \Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow\}$ aura la valeur 1. Donc on ne pourra jamais exprimer (par exemple) la formule $0 = \perp$ ou $\neg p$ qui donnent zéro pour l'assignation v.
A fortiori les sous systèmes de ce système sont incomplets :$\{\Leftrightarrow\}$, $\{\wedge\}$, $\{1, \wedge, \vee\}, \cdots$

2. Pour le système $\{0,1,\wedge,\vee\}$. Avec ce système, avec une seule variable p on peut exprimer directement 3 formules $0,1,p$ En combinant les 3 formules de base avec les connecteurs $\wedge,\vee$ (9+9 possibilité) on reste toujours sur le même ensemble. Par exemple $0\wedge 0\equiv 0, 0\wedge 1\equiv 0, 0\wedge p\equiv 0,\cdots, p\vee p\equiv p, p\wedge p\equiv p$. Mais on a vu avec une variable il y a une quatrième formule possible $\neg p$ et qui donc n'est pas exprimable avec ce système.
3. Pour le système $\{0,1,\neg,\Leftrightarrow\}$.
   Avec ce système, avec deux variables p et q, on peut exprimer directement 8 formules : $0,1,p,q,\neg p,\neg q,(p\Leftrightarrow q),\neg(p\Leftrightarrow q)$.
   En combinant avec $\neg$ et $\Leftrightarrow$, on montre que toutes les combinaisons(8+64) donnent une de ces 8 formules. A titre d'exemple
   $$(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\equiv(pq+\bar{p}\bar{q})p+(p\bar{q}+\bar{p}q)\bar{p}\equiv pq+\bar{p}q\equiv q$$
   Mais, comme vu dans l'exercice 2, avec 2 variables on a 16 formules possibles. Donc le système n'est pas complet.

Exercice 9. *Montrer par induction que pour toute formule propositionnelle est équivalente à une formule qui est construite uniquement avec les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.*

Preuve. Cela résulte d'une preuve par induction sur la formule. C'est vrai pour les formules qui correspondent à des variables propositionnelles. Supposons la propriété vraie pour les formules G et H, c'est-à-dire supposons que G (respectivement H) est équivalente à une formule G' (respectivement H') construite uniquement avec les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

- Si F est de la forme $\neg G$, alors F est équivalente à $\neg G'$ et l'hypothèse d'induction est préservée.
- Si F est de la forme $(G\wedge H)$, alors F est équivalente à $(F'\wedge H')$ et la propriété d'induction est préservée.
- Si F est de la forme $(G\vee H)$, en utilisant les lois de De Morgan et le fait que $K\equiv\neg\neg K$ pour éliminer les doubles négations, on obtient que $F\equiv\neg(\neg G'\wedge\neg H')$ qui est bien construite en utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.
- Si F est de la forme $(G\Rightarrow H)$, alors F est équivalente à $(\neg G'\vee H')$ qui est équivalente à une formule construite uniquement avec les connecteurs $\neg$ et $\wedge$ par les cas précédents.
- Si F est de la forme $(G\Leftrightarrow H)$, alors F est équivalente à $(G'\Rightarrow H')\wedge(H'\Rightarrow G')$ qui est équivalente à une formule construite uniquement avec les connecteurs $\neg$ et $\wedge$ par les cas précédents. Un ensemble de connecteurs qui a la propriété plus haut pour $\neg,\wedge$ est appelé un système complet de connecteurs.

6.5 Complétude fonctionnelle

Supposons $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ fini. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des assignations (valuations) sur P. Puisqu'une valuation est une fonction de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$, $\mathcal{V}$ contient 2^n éléments. Chaque formule F sur P peut être vue comme une fonction de $\mathcal{V}$ dans $\{0,1\}$, que l'on appelle valeur de vérité de F : cette fonction est la fonction qui à une valuation v associe la valeur de vérité de la formule sur cette valuation. Il y a 2^{2^n} fonctions de $\mathcal{V}$ dans $\{0,1\}$. La question qui se pose est de savoir si toutes les fonctions peuvent s'écrire comme des formules. La réponse est positive :

Exercice 10. *(Complétude fonctionnelle) Supposons $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ fini. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des valuations sur P. Toute fonction f de $\mathcal{V}$ dans $\{0,1\}$ est la valeur de vérité d'une formule F sur P.*

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de variables propositionnelles n. Pour $n=1$, il y a quatre fonctions de $\{0,1\}$ dans $\{0,1\}$, qui se représentent par les formules $p,\neg p,p\vee\neg p,p\wedge\neg p$. Supposons la propriété vraie pour $n-1$ variables propositionnelles. Considérons $P=\{p_1,\cdots,p_n\}$ et soit f une fonction de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$. Chaque valuation v' sur $\{p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}\}$ peut se voir comme la restriction d'une valuation sur $p_1,\cdots,p_n$. Soit f_0 (respectivement f_1) la restriction de f à la valuation v telle que $v(p_n)=0$ (resp. $v(p_n)=1$). Les fonctions f_0 et f_1 sont des fonctions définies des valuations sur $p_1,\cdots,p_{n-1}$ dans $\{0,1\}$ et se représentent par des formules $G(p_1,\cdots,p_{n-1})$ et $H(p_1,\cdots,p_{n-1})$ respectivement par hypothèse de récurrence. La fonction f peut alors se représenter par la formule

$$(\neg p_n\wedge G(p_1,\cdots,p_{n-1}))\vee(p_n\wedge H(p_1,\cdots,p_{n-1}))$$

ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang n.