2012

Analyse :

Exercice :

1- si $t \neq 0$: $f(t,x)$ st continue (rapport de deux fonctions continues). (α)

si $t=0$: $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x)} f(t,x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{-t^2} - e^{-t^2x^2}}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-2te^{-t^2} + 2tx^2 e^{-t^2x^2}}{2t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} x^2 e^{-t^2x^2} - e^{-t^2} = x^2 - 1 = f(0,x).$

alors f st continue si $t=0$ (β)

(α).(β) $\Rightarrow$ f est continue sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

2- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \begin{cases} \dfrac{2t^2x\, e^{-t^2x^2}}{t^2} & \text{si } t\neq 0 \\ 2x & \text{si } t=0 \end{cases} = \begin{cases} 2x\, e^{-t^2x^2} & \text{si } t\neq 0 \\ 2x & \text{si } t=0 \end{cases}$

l'existence ✓

La continuité : si $t\neq 0$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue (produit des fct continues)

si $t=0$: $\lim\limits_{(t,x)\to(0,x)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x = f(0,x)$ (continue si $t=0$)

alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

3) i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2} - e^{-t^2x^2}}{t^2}\,dt$

$\left|\dfrac{e^{-t^2} - e^{-t^2x^2}}{t^2}\right| < \dfrac{e^{-t^2} + e^{-t^2}}{t^2} < \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^2} < \dfrac{2}{t^2}$ (CV)

alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt$ C. Unifor $\Rightarrow$ C. simplement pour tous $x\in\mathbb{R}$

ii) φ_2 st continue : 1) f st continue
2) $\int_1^{+\infty} f(t,x)\,dt$ Converge uniformément

Donc φ_2 st continue sur $\mathbb{R}$

φ_1 st continue : 1) f st continue
2) l'intervale $[0,1]$ st borné

Donc $\varphi_1 = \int_0^1 f(t,x)\,dt$ st continu sur $\mathbb{R}$

$$f(t,1) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t^2} - e^{-t^2}}{t^2} & t \neq 0 \\ 1 - 1 = 0 & t = 0 \end{cases}$$

$\boxed{f(t,1) = 0}$

iii) $\varphi(1) = \varphi_1(1) + \varphi_2(1) = \int_0^1 f(t,1)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t,1)\,dt$

$\boxed{\varphi(1) = 0}$

4) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \begin{cases} 2x\, e^{-t^2x^2} & t \neq 0 \\ 2x & t = 0 \end{cases}$

st définie, continue en x et continue par morceaux en t

soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, sur $[0,+\infty[\times [a,b]$

$\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant 2a\, e^{-t^2a^2} = g(t)$

avec g intégrable sur $[0,+\infty[$

Par domination sur tout segment, φ st de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$\int_0^{+\infty} 2a\, e^{-(ta)^2}\,dt = 2a \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-s^2}}{a}\,ds = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$

$s = at$, $t = \dfrac{s}{a}$
$dt = \dfrac{ds}{a}$

$g(t)$ intégrable

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} 2x\, e^{-t^2x^2}\,dt = 2x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s^2}\,ds}{x} = \sqrt{\pi}$$

5) $\varphi(x) = \sqrt{\pi}\, x + C$; $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\pi} + C = 0 \Rightarrow C = -\sqrt{\pi}$

$$\varphi(x) = \sqrt{\pi}\, x - \sqrt{\pi}$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = -\sqrt{\pi} \\ \varphi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} - 1}{t^2}\,dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} - 1}{t^2}\,dt = -\sqrt{\pi}$$

Scanned by CamScanner