ESI. Math2. 2I

Durée:2H

EMD1. 03 Janvier 2010

DOCUMENTS ET CALCULATRICE INTERDITS.

Exercice 1: (5,75 points:3+2,75)

<u>Pour la partiel</u>, il est inutile de recopier les propositions sur la copie , il suffit d'écrire le numéro de la proposition accompagné par la réponse qui lui correspond.

I- Répondre par vrai ou faux, sans justifier, aux propositions suivantes:

Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et pour tout point $(a,b) \in \mathbb{R}$ on a:

1) $\exists l \in \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est continue en (a,b).

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4) f n'admet pas en (a,b) un extrémum.$\Rightarrow$ (a,b) n'est pas un point critique de f.

5) $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ / $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \Rightarrow f$ n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

6) f admet en (a,b) un extréma libre vérifiant une contrainte $g \Rightarrow f$ admet en (a,b) un extréma lié à la contrainte g.

II- Compléter les propositions suivantes:

1) Par définition, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow$ ....

Soit $D = \left(]0,1[\cap \mathbb{Q}\right) \times \left(]0,1[\cap \mathbb{Q}\right)$, D est il un ouvert de $\mathbb{R}^2$? Justifier.

2) Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$; considérons une fonction h définie par $h(x,y) = f(xy, e^x)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ existent sur } \mathbb{R}^2 \\ \text{et} \\ f \text{ est } \ldots \end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(.,.), \frac{\partial f}{\partial y}(.,.)\right)\begin{pmatrix} . & . \\ . & . \end{pmatrix}$$

Exercice 2: (7,5 points: 2,5+5)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5 y^6}{x^2 + y^4}$. b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^8 y}{x+y} \log(1+xy)$.

2)Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{xy}\right)}{y} & \text{si} \quad xy > 0. \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si} \quad xy \leq 0. \end{cases}$$

Posons $\Delta =$la droite d'équation: $y = 0$.
Etudier la différentiabilité de f sur Δ.

Exercice 3: (3,5 points)
Déterminer les extémas libres de la fonction f définie par :
$f(x,y) = (x+y)^2 - (x^4+y^4)$.

Exercice 4: (4 points: 2,5+1,5)
Les questions suivantes sont indépendantes:

1) Déterminer la valeur maximale de la fonction f définie par : $f(x,y) = xy$. sur le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$.

2) La figure suivante représente le graphe de la fonction :$f(x,y) = \dfrac{e^{-y^2(x^2+1)}}{x^2+1}$.

$$z = \frac{e^{-y^2(x^2+1)}}{x^2+1}$$

Compléter les phrases suivantes:
f admet en $B(\frac{1}{2},0,0)$ un maximum lié à la contrainte **...**
f admet en $A(1,0,0)$ un maximum lié à la contrainte **...**

Bon courage.

Un corrigé de l'EMD 1.

Exercice1:

PartieI

1) Fausse, 2) Fausse, 3) Vraie, 4) Fausse, 5) Vrai, 6) Vraie.

PartieII

1) U est un ouvert de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \forall X \in U, \exists r > 0$ telle que $B(X,r) \subset U$.

Ou bien: U est un ouvert de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow U$ est un voisinage de chacun de ses points.

2) g définie par $h(x,y) = f(xy, e^x) = f \circ \varphi(x,y)$ où $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (xy, e^x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{existent sur } \mathbb{R}^2 \\ f \text{ est différentiable ou bien } f \in C^1(\mathbb{R}^2) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u,v), \frac{\partial f}{\partial y}(\right.$$

Exercice2:

a) Calculons : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ / $f(x,y) = \dfrac{x^5y^6}{x^2+y^4}$, on a $x^2 \le x^2+y^4$ donc $\dfrac{x^2}{x^2+y^4}$ est bornée, de plus $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^6 = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

b) Soit $g(x,y) = \dfrac{x^8y}{x+y}\log(1+xy)$. Utilisons les chemins pour montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ n'$\nexists$:

posons: $y = -x + x^m$ avec $m \in \mathbb{N}$ / $m \ge 2$ à choisir ultérieurement.

On a

$$\lim_{x\to 0} g(x, -x+x^m) = \lim_{x\to 0} \frac{x^8(-x+x^m)}{x^m}\log[1+x(-x+x^m)] = \lim_{x\to 0} \frac{x^8(-x+x^m)}{x^m}[x(-x+x^m)]$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{11}}{x^m}$, il suffit de choisir $m = 11$ pour trouver la limite 1, puis $m = 0$ pour trouver la limite 0.

Conclusion : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ n'$\nexists$

2)$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{xy}\right)}{y} & \text{si } \quad xy > 0. \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si } \quad xy \le 0. \end{cases}$, $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\right\}$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

Etudions la différentiabilité de f sur $\Delta = \left\{(a,0) / a \in \mathbb{R}\right\}$: soit $(a,0) \in \Delta$.

a) Calcul des dérivées partielles premières:

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0)$:$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,0)-f(a,0)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}a}{x-a} = \dfrac{1}{2}$ ie $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \dfrac{1}{2}}$

$\rightsquigarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0)$:$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0}$

<u>1er cas:</u> $a = 0$:

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:$\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$ie $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.

<u>2ème cas:</u> $a \ne 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) :\lim_{y\to 0} \frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ ay>0}} \dfrac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{ay}\right)}{y} - \dfrac{1}{2}a}{y} \quad (1). \\ \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ ay<0}} \dfrac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a}{y} = 0 \quad (2). \end{cases}$$

Calculons (1) et voyons si elle est égale à la limite $(2) = 0$ pour que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)\ \exists$.

$$(1) = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos\left(\sqrt{ay}\right) - \frac{1}{2}ay}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{ay}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\sqrt{ay}\right)^4 + o\left(\left(\sqrt{ay}\right)^4\right)\right) - \frac{1}{2}ay}{y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{1}{4!}(ay)^2 + o\left((ay)^2\right)}{y^2} = -\frac{1}{4!}a^2.$$ Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)\ \exists$ ssi $-\frac{1}{4!}a^2 = 0$ ie ssi $a = 0$.

On en déduit $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)\ \nexists$ pour tout $a \neq 0$.

Conclusion: f n'est pas différentiable sur $\Delta \setminus \{(0,0)\}$.

b) Etude de la différentiabilité en $(0,0)$:

Pour cela utilisons la définition:

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 + \|(h_1,h_2)\|\varepsilon(h_1,h_2)$$

ie $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{f(h_1,h_2) - \frac{1}{2}h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$, f sera différentable en $(0,0)$ ssi $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1h_2>0}} \dfrac{\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{h_1h_2}\right)}{h_2} - \dfrac{1}{2}h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \quad (1). \\ \lim\limits_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1h_2\leq 0}} \dfrac{\frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0 = 0 \quad (2). \end{cases}$$

$$(1) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(\sqrt{h_1h_2}\right) - \frac{1}{2}h_1h_2}{h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{1}{2}h_1h_2 + o((h_1h_2))\right) - \frac{1}{2}h_1h_2}{h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{o((h_1h_2))}{h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{bornée}} \underbrace{[o(1)]}_{\text{tend vers 0}} = 0$$

On a donc $(1) = (2) = 0$ ie $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$.

On en conclut que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice3:

$f(x,y) = (x+y)^2 - (x^4+y^4)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1) CN: Recherche des points critiques:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y) - 4x^3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y) - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2x^3 = 0 & (1) \\ x+y-2y^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ donne $2x^3 = 2y^3 \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$, on remplace dans (1) :
$2x - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

Les points critiques sont : $M_0 = (0,0)$, $M_1 = (1,1)$ et $M_2 = (-1,-1)$.

2) CS: Nature des points critiques:Calculons d'abord les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2-12x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2-12y^2$$

Le point M_1: utilisons le discriminant $\Delta = r_1t_1 - s_1^2$ où $r_1 = -10 = t_1$ et $s_1 = 2$
$\Rightarrow \Delta = 100-4 > 0$ et comme $r_1 < 0$ alors $(M_1, f(M_1))$ est un maximum pour *f*.

Le point M_2: même travail, on trouve que $(M_2, f(M_2))$ est aussi un maximum pour *f*.

Le point M_0: si on calcul le discriminant on obtient $\Delta = r_0t_0 - s_0^2 = 0$ d'où RAD (où $r_0 = t_0 = s_0 = 2$), alors changeons de méthode, utilisons la définition

Voyons le signe de $f(x,y) - f(0,0) = (x+y)^2 - (x^4+y^4)$:

Si $y = 0$: $f(x,0) - f(0,0) = x^2 - x^4 \sim x^2 > 0$ au $v(\widehat{0,0})$.

Si $y = -x$: $f(x,-x) - f(0,0) = -2x^4 < 0$ au $v(\widehat{0,0})$.

ie $f(x,y) - f(0,0)$ change de signe au $v(0,0)$. Donc $(M_0, f(M_0))$ n'est pas un extrémum pour *f*.

Exercice4:

$f(x,y) = xy$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1) Soit $g(x,y) = x^2+y^2-1$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Remarque:

Calculons les points critiques de g :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \end{cases}$$

ie $x = y = 0$ or $g(0,0) = -1$ donc $(0,0)$ ne vérifie pas la contrainte, par conséquent: Si *f* admet en (x,y) un extrémum lié à la contrainte g alors $\exists \lambda \in$ telle que λ, x, y sont solutions du systéme de Lagrange (S), on posera $F = f + \lambda g$, c'est la méthode indirecte:

$$(S)\begin{cases} \nabla_{(x,y)}(f+\lambda g) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2\lambda x = 0 & (1) \\ x+2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2+y^2-1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow y = -2\lambda x$ on remplace dans (2) : $x+2\lambda(-2\lambda x) = 0 \Leftrightarrow x(1-4\lambda^2) = 0.$

$\rightsquigarrow$ Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$ dans (3) impossible.

$\rightsquigarrow$ Si $\lambda = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -x \Rightarrow 2x^2 = 1$. On obtient $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\rightsquigarrow$ Si $\lambda = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = x \Rightarrow 2x^2 = 1$. On obtient $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Les solutions de (S) sont :

$A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

On a que $f(A) = f(B) = -\dfrac{1}{2}$ et $f(C) = f(D) = \dfrac{1}{2} > -\dfrac{1}{2}$.

Comme f est continue sur $C(0_{\mathbb{R}^2},1)$ et que $C(0_{\mathbb{R}^2},1)$ est un fermé alors f est bornée et atteint ses bornes, donc $Max(f)$ et $Min(f)$ existent. D'où $Max(f) = \dfrac{1}{2}$ et $Min(f) = -\dfrac{1}{2}$.

La valeur maximum de f sur $C(0_{\mathbb{R}^2},1)$ est donc $\dfrac{1}{2}$.

2) B est un maximum lié à la contrainte $x = \dfrac{1}{2}$

A est un maximum lié à la contrainte $x = 1$

✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠✠