ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

	Corrigé du CI	**Avril 2024**
2CPI	**Analyse mathématique 4**	**Durée : 2 heures**

Exercice 1 (3,5 points: 2,5+1) :

1) On a $D_f = \mathbb{R}^3$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ car c'est un polynôme. $\boxed{\text{0,25pt}}$

a) Recherche des points critiques : On a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y+z+1 \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$p = (x,y,z) \text{ est un point critque} \Leftrightarrow \nabla f(x,y,z) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z+1 = 0, \dots (1) \\ x+2y+z = 0, \dots (2) \\ x+y+2z = 0, \dots (3) \end{cases} \quad \boxed{\text{0,5pt}}$$

On a

- $(2)-(3)$ donne $y-z=0 \Leftrightarrow y=z$,
- en remplacant z par y dans (2), il vient $x+3y=0 \Leftrightarrow x=-3y$,
- en remplacant z par y et x par $-3y$ dans (1), il vient $-4y+1=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}$.

On en déduit que f admet un seul point critique $p = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ $\boxed{\text{0,5pt}}$.

b) Nature du point critque : La hessienne de f est

$$\nabla^2 f(x,y,z) = Hess(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\text{0,25pt}}$$

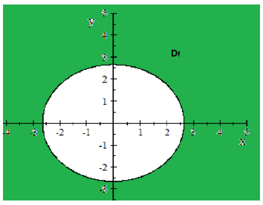
Puisque, $\det\Delta_1 = 2 > 0,\ \det\Delta_1 = 3 > 0,\ \det\Delta_1 = 4 > 0$ $\boxed{\text{0,5pt}}$, $\nabla^2 f(x,y,z)$ est définie positive pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on en déduit en particuler que $\nabla^2 f(p)$ est définie positive. $\boxed{\text{0,25pt}}$

Ainsi, f admet un seul extremum local qui est un minimum local $\boxed{\text{0,25pt}}$: $(p, f(p))$.

2) Puisque $\nabla^2 f(x,y,z)$ est définie positive pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, donc f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^3$ $\boxed{\text{0,5pt}}$. Cette convexité implique que le seul point extremum local est un extremum global. Donc, $(p, f(p))$ est un minimum global $\boxed{\text{0,5pt}}$ de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (**5,5 points**: **0,5**+**0,5**+**3,25**+**1,25**) :

1) • $\boxed{\text{0,25pt}}$ $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 > 7\right\}$ et



• On a $A \subset D_f$, , car : $(x,y) \in A \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 > 7 \Leftrightarrow (x,y) \in D_f$ $\boxed{\text{0,25pt}}$.

2) Oui, en effet, puisque A est un fermé borné et f est continue sur A $\boxed{\text{0,5pt}}$ alors f atteint ses bornes, c-à-d elle admet une valeur maximum (donnée par un max lié) et une valeur minimum (donnée par un min lié).

3) Recherche des points douteux : $\boxed{\text{0,5pt}}$ On recherche les (x,y) tq le vecteur $\nabla\varphi(x,y)$ est linéairement dépendant, donc on recherche les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant la contrainte tel que $\nabla\varphi(x,y) = (0,0)$. On résout en fait le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0. \end{cases}$$

$(0,0)$ est le seul point douteux mais il ne vérifie pas la contrainte ($\varphi(0,0) \neq 0$), donc ce point est rejeté.

Recherche des points critiques en utilisant les multiplicateurs de Lagrange :

Considérons la fonction auxiliaire (le lagrangien) :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 7) + \lambda(x^2 + y^2 - 8). \quad \boxed{\text{0,25pt}}$$

Si f admet en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un extrema lié de f sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, alors il existera $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ $\boxed{\text{0,5pt}}$. Résolvons ainsi, le système suivant :

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 7} + 2\lambda x = 0, & (1) \\ 1 - \dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 7} + 2\lambda y = 0, & (2) \\ x^2 + y^2 - 8 = 0, & (3) \end{cases} \quad \boxed{\text{0,25pt}}$$

1er cas si $x = 0$: L'équation (1) est toujours vérifiée, (3) donne $y = \pm\sqrt{8}$, dans (2) :

• $y = \sqrt{8}$: $1 - \dfrac{2\sqrt{8}}{8 - 7} + 2\lambda\sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{8} + 2\lambda\sqrt{8} \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{2\sqrt{8} - 1}{2\sqrt{8}} = 1 - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$,

• $y = -\sqrt{8}$: $1 + \dfrac{2\sqrt{8}}{8 - 7} - 2\lambda\sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{8} - 2\lambda\sqrt{8} \Leftrightarrow \lambda_2 = \dfrac{2\sqrt{8} + 1}{2\sqrt{8}} = 1 + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$,

donc on a deux points critiques candidats: $M_1 = \left(0, \sqrt{8}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ avec $\lambda = 1 - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, et $M_2 = \left(0, -\sqrt{8}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ avec $\lambda = 1 + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$. ($\boxed{\text{0,25pt}}$ pour la résolution).

2ème cas si $y = 0$: on remplace dans (2) : $1 = 0$ impossible, ce cas est donc rejeté.
3ème cas si $x \neq 0$ et $y \neq 0$: On peut multiplier (1) par y et (2) par x,

le système devient
$$\begin{cases} 2xy - \dfrac{2xy}{x^2+y^2-7} + 2\lambda xy = 0, & (1)' \\ x - \dfrac{2xy}{x^2+y^2-7} + 2\lambda xy = 0, & (2)' \\ x^2+y^2-8 = 0, & (3) \end{cases}$$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ pour la résolution.
$(1)' - (2)'$: $2xy - x = 0 \Leftrightarrow x(2y-1) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$, on remplace dans (3), on obtient
$$x^2 - \frac{31}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}.$$
Mais, puisque $x = \pm\frac{\sqrt{31}}{2} \neq 0$, on a
$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^2+y^2-7} + 2\lambda = 0,$$
d'où (en remplacant dans cette dernière équation)
$$\left(y = \frac{1}{2} \wedge x = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}\right) \Rightarrow 2 - \frac{2}{\left(\pm\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7} + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$
ainsi, on a deux points critiques candidats: $M_3 = \left(\frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ avec $\lambda = 0$, et $M_4 = \left(-\frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ avec $\lambda = 0$.

4) Nature des points :

- $f(M_1) = f\left(0, \sqrt{8}\right) = \sqrt{8}, \quad f(M_2) = f\left(0, -\sqrt{8}\right) = -\sqrt{8},$ $\boxed{\text{0,25pt}}$
- $f(M_3) = f\left(\frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{33}{4}, \quad f(M_4) = f\left(-\frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{33}{4}.$ $\boxed{\text{0,25pt}}$

On en conclut que
• Le point $\left(0, -\sqrt{8}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ donne un minimum lié pour f sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, le minimum lié est $(M_2, f(M_2))$.
• Les points $\left(\frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ et $\left(-\frac{\sqrt{31}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{0,25pt}}$ donnent des maximums liés pour f sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$ et ce sont $(M_3, f(M_3))$ et $(M_4, f(M_4))$.

Exercice 3 (4,5 points:1+0,75+0,5+1,25+1) :

1) φ représente un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$:

$\boxed{\text{0,5pt}}$On a

$$\begin{cases} u = \dfrac{2x-y}{5}, \\ v = \dfrac{-x+3y}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3u+v, \\ y = u+2v. \end{cases}$$

Solution unique donc φ est bijective et $\varphi^{-1}(x,y) = (\frac{2x-y}{5}, \frac{-x+3y}{5})$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ On en déduit que φ c'est un C^1 –difféomorphisme dans $\mathbb{R}^2$, car φ et son inverse sont C^1 vu qu'elles sont des applications liénaires.

Remarque : On peut montrer ce dernier point autrement. En effet, si on pose $g = \varphi^{-1}$, on a

$$\varphi(u,v) = (\underbrace{3u+v}_{\varphi_1(u,v)}, \underbrace{u+2v}_{\varphi_2(u,v)}) \quad et \quad g(x,y) = (\underbrace{\frac{2x-y}{5}}_{g_1(x,y)}, \underbrace{\frac{-x+3y}{5}}_{g_2(x,y)}).$$

en utilsant le fait que

- φ est C^1 car φ_1 et φ_2 le sont puisque ce sont des polynomes,
- φ^{-1} est aussi C^1 puisque g_1 et g_2 sont également des polynomes.

2) Détremination du transformé Δ de D par le changement de variables :

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Puisque φ^{-1} est une application linéaire inversible, l'image par φ^{-1} d'un parallélogramme de sommets a, b, c, d, est un parallélogramme de sommets $\varphi^{-1}(a)$, $\varphi^{-1}(b)$, $\varphi^{-1}(c)$, $\varphi^{-1}(d)$, ainsi

$$\varphi^{-1}(0,0) = (0,0),\ \varphi^{-1}(1,2) = (0,1),\ \varphi^{-1}(3,1) = (1,0),\ \varphi^{-1}(4,3) = (1,1).$$

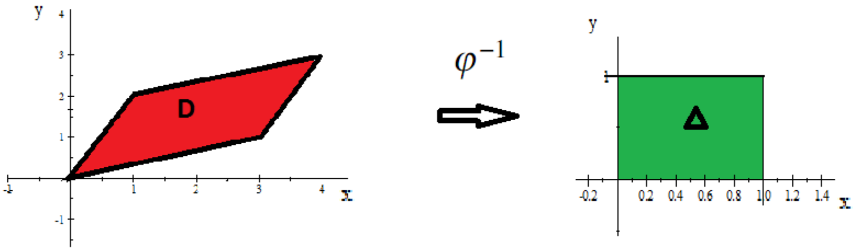
Donc,

$$\boxed{\text{0,25pt}} \rightarrow \Delta = [0,1] \times [0,1].$$

Remarque : On peut montrer que $\Delta = [0,1] \times [0,1]$ autrement, en effet,

- en déterminant les droites délimitant le parallélogramme D : $y = 2x$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = 2x-5$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
- puis en remplaçant x par $3u+v$ et y par $u+2v$, pour déduire les droite délimitant le carré Δ.

3) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Représentation de D et Δ.



4) Calcul de l'aire de D :

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Le jacobien de φ est donné par

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J_\varphi(u,v)) = 5.$$

Ainsi, par le théorème de changement de variables $\boxed{0{,}25\text{pt}}$

$$Air(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_\Delta |\det(J_\phi(u,v))|\, dudv = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} 5\, dudv = 5 \;\boxed{0{,}5\text{pt}}.$$

5) $\boxed{1\text{pt}}$ Calcul de la masse de la plaque : On a

$$Masse = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D (2x-y)^2 e^{-x+3y} dxdy,$$

de même, en utilisant le théorème de changement de variables

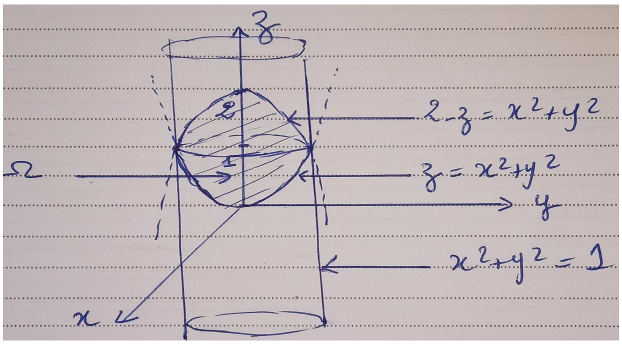
$$Masse = \int\int_\Delta (5u)^2 e^{5v} |\det(J_\phi(u,v))|\, dudv = 125 \int\int_\Delta u^2 e^{5v}\, dudv,$$

à variables séparée sur un pavé

$$Masse = 125\left(\int_0^1 u^2\, du\right)\left(\int_0^1 e^{5v}\, dv\right) = \frac{25}{3}(e^5 - 1).$$

Exercice 4 (3,5 points) :

I- Le graphe . $\boxed{\text{Bonus1pt}}$



II-

1. En utilisant les CC, il vient

$$\varphi : \boxed{0{,}25} \rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{avec } \boxed{0{,}25} \rightarrow \begin{cases} \det J\varphi = r, \\ r = \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Détermination du transformé Ω' de $\overset{o}{\Omega}$ par les CC : On a

$$(x,y,z) \in \overset{o}{\Omega} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 < 1, \\ x^2+y^2 < z < 2-x^2-y^2, \end{cases} \overset{\text{CC}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r^2 < 1, \\ r^2 < z < 2-r^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < r < 1, \\ r^2 < z < 2-r^2, \\ 0 < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Donc,

$$\Omega' = \left\{(r,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} \,/\, 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < r < 1,\ r^2 < z < 2-r^2\right\}. \leftarrow \boxed{1\text{pt}}.$$

En appliquant alors le théorème de changement de variables, on obtient$\leftarrow$ $\boxed{0{,}25}$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} ddxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4 \int_{r^2}^{2-r^2} dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4(2-2r^2)drd\theta. \leftarrow \boxed{0{,}25}$$

Puisque on a une intégration d'une fonction à variables séparée sur un pavé, il vient$\leftarrow$ $\boxed{0{,}25}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^1 r^4(2-2r^2)dr = 4\pi\int_0^1 (r^4-r^6)dr = 4\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{8\pi}{35}. \leftarrow \boxed{0{,}25}.$$

2. On a

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dz\right)dy\right)dx. \leftarrow \boxed{0{,}5}$$

On a utilisé la méthode de Fubini.$\leftarrow$ $\boxed{0{,}5}$

Questionnaire (3 points) : I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1) Soit f une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}^n$. Completer:

a) On dit que f est coercive sur une partie non bornée $E \subset D_f$ de $\mathbb{R}^n$ ssi

$$\lim_{X \in E,\ \|X\| \to +\infty} f(X) = +\infty \leftarrow \boxed{0{,}5}.$$

b) Si f est une fonction convexe sur un convexe E. Alors,

$\big((a, f(a))$ est un minimum local de f sur $E\big) \Leftrightarrow$

$((a, f(a))$ est un minimum global de f sur $E) \leftarrow \boxed{0{,}5}$

2) Le théorème qui donne la dérivabilité de F.

$$\begin{cases} 1)\ f \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ sont continues sur } [a,b] \times I \text{ (ou } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \supseteq \Delta) \leftarrow \boxed{0{,}25}, \\ 2)\ u \text{ et } v \text{ sont dérivables sur } I \leftarrow \boxed{0{,}25}. \end{cases}$$

Alors F est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt + v'(x).f(v(x),x) - u'(x).f(u(x),x). \leftarrow \boxed{0{,}5}$$

3) Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies $\boxed{\text{V}}$, lesquelles sont fausses $\boxed{\text{F}}$, sans justifier. $\leftarrow \boxed{0{,}5}$ par bonne réponse.

$\boxed{\text{F}}$ **A1** : Si f est continue sur $[a,b] \times [1,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(t,x) \right) dt$.

$\boxed{\text{V}}$ **A2** : Soit la fonction F donnée par : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ où f une fonction numérique réelle sur $[0,+\infty[\times I$, on supposera $f \in R_{loc}[0,+\infty[$ selon la variable t.

Si $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ est convergente sur tout $[\alpha, \beta] \subseteq I$ alors F est bien définie sur I.