Cours 4

Calcul propositionnel : Sémantique

Nous allons maintenant définir la sémantique d'une formule propositionnelle, c'est- à-dire le sens qu'on lui donne.

4.1 Le sens des connectives

Le sens des connectives logiques est donné par la table suivante :

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

La table indique les valeurs des formules de la 1ère ligne suivant les valeurs assignées aux variables x et y.

4.2 Valeur d'une formule

Chacun sait évaluer une formule : on associe à chaque variable de la formule une valeur de l'ensemble $\{0, 1\}$ et la valeur de la formule est obtenue en remplaçant les variables par leur valeurs et en effectuant les opérations suivant la table ci-dessus. Néanmoins, pour raisonner sur les formules, on définit formellement la valeur d'une formule.

Une assignation est une application de l'ensemble des variables dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

Exemple 1. *Par exemple, si l'ensemble des variables* $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.
La fonction $v : \mathcal{V} \longrightarrow \{0, 1\}$ *définie par* $v(x) = 1, v(y) = 0, v(z) = 1$ *est une assignation.*

Exemple 2. *Soit* $\mathcal{V} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. *La fonction* $v(x_i) = 1$ *si* i *est pair et* $v(x_i) = 0$ *si* i *est impair est une assignation.*

Soit A une formule et v une assignation. $[A]_v$ est la valeur de la formule A dans l'assignation v et cette valeur est définie ci-dessous *par récurrence* sur l'ensemble des formules.

Valeur d'une formule

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1, [\bot]_v = 0.$
- $[\neg A]_v = 1 - [A]_v$
- $[(A \vee B)]_v = \max\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \wedge B)]_v = \min\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$ Si $[A]_v = 0$ alors 1 sinon $[B]_v$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$ si $[A]_v = [B]_v$ alors 1 sinon 0

Le fait que cette extension de v aux formules est une application des formules dans $\{0, 1\}$ résulte du théorème de lecture unique.

Exemple 3.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

4.3 Équivalence

Définition 1. *Deux formules A et B sont équivalentes si, pour toute assignation, elles ont la même valeur.*

Exemple 4. *Les colonnes des deux formules $x \Rightarrow y$ et $\neg x \vee y$ sont identiques. Elles sont donc équivalentes.*
On note le fait que A et B sont équivalentes par $A \equiv B$.

Remarque 1. *Il est important de bien comprendre que $\equiv$ est un symbole que l'on utilise pour écrire une relation entre deux formules, mais que $F \equiv G$ n'est pas une formule propositionnelle.*

Exercice. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur les formules.

4.4 Valide (tautologie)

Définition 2 (Valide)**.** *Une formule est valide si elle a la valeur 1 pour toute assignation.*

Exemple 5. *La colonne de la formule $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$ n'a que des 1. Cette formule est donc valide.*
On note le fait que A est valide par $\models A$. Par exemple $\models x \vee \neg x$.
Comme sur l'exemple , on a : $\models (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$

Propriété 1. *Les formules A et B sont équivalentes si et seulement si (en bref ssi) la formule $A \Leftrightarrow B$ est valide. La propriété est triviale (mais utile).*

4.5 Modèle, Satisfaisable

Définition 3 (Modèle)**.** *Une assignation qui donne la valeur 1 à une formule, est un modèle de la formule, on dit aussi qu'elle satisfait la formule ou qu'elle la rend vraie.*

Exemple 6. *L'assignation $x = 1; y = 1$ est modèle de $x \Rightarrow y$.*

Cette notion de modèle s'étend aux ensembles de formules.

Définition 4 (Modèle d'un ensemble de formules)**.** *Une assignation est modèle d'un ensemble de formules ssi elle est modèle de chaque formule de l'ensemble.*

Exemple 7. *L'assignation $a = 0; b = 0; c = 1$ est modèle de l'ensemble suivant $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c\}$*

Proposition 1. *Une assignation est modèle d'un ensemble* fini *de formules, ssi elle est modèle de la conjonction des formules de l'ensemble.*

Preuve. Soit $\Gamma = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$. $F = (F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n)$. On montre que v est modèle de Γ ssi $[F]_v = 1$.

$\boxed{\Rightarrow)}$ Soit v un modèle de Γ. Donc pour tout $i \leq n$ $[F_i]_v = 1$. Alors il vient par définition de la conjonction que : $[(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n)]_i = \min_{i \leq n}[F_i]_v = 1$. Donc v est modèle de F.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Soit v modèle de F, c'est-à-dire $[F]_v = 1$. Donc $[(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n)]_i = \min_{i \leq n}[F_i]_v = 1$. Comme le minimum est 1, donc pour tout $i \leq n$ $[F_i]_v = 1$. Enfin v est pour tout $i \leq n$ modèle de F_i. Donc v est modèle de Γ.

Exemple 8. *L'ensemble de formules $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c\}$ et la formule $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$ ont les même modèles. Un de ces modèles est $a = 0; b = 0; c = 1$.*

Définition 5 (Contre-Modèle)**.** *Une assignation qui donne la valeur 0 à une formule, est un contre-modèle de la formule, on dit aussi qu'elle ne satisfait pas la formule ou qu'elle la rend fausse.*

Par exemple l'assignation $x = 1; y = 0$ est un contre-modèle de $x \Rightarrow y$.

Définition 6 (Satisfaisable)**.** *Une formule (resp un ensemble de formules) est satisfaisable s'il y a une assignation qui en est modèle.*

Exemple 9. *Par exemple la formule $x \Rightarrow y$ est satisfaisable. La formule $x \wedge \neg x$ est insatisfaisable : la colonne de sa table de vérité ne contient que des 0.*

Les logiciens utilisent le mot consistant comme synonyme de satisfaisable et contradictoire comme synonyme d'insatisfaisable. Aussi on appelle une formule satisfaisable et non valide : formule contingente.

Proposition 2. *Une formule F est valide ssi $\neg F$ est insatisfaisable.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Si F est valide alors $\neg F$ est insatisfaisable.
Supposons que $\neg F$ est satisfaisable. Donc il existe une assignation v telle que $[\neg F]_v = 1$. Donc $[F]_v = 1 - [\neg F]_v = 0$. Ce qui est en contradiction avec le fait que F soit valide (toute assignation est modèle).

$\Leftarrow$) Si $\neg F$ est insatisfaisable alors F est valide.
Supposons que F n'est pas valide. Il existe alors une assignation v telle que $[F]_v = 0$. Donc $[\neg F]_v = 1$. Ce qui est contradictoire avec $\neg F$ est insatisfaisable.

4.6 Conséquence

Définition 7. *Soit Γ un ensemble de formules et A une formule : A est une conséquence de l'ensemble Γ d'hypothèses si tout modèle de Γ est modèle de A.*
Le fait que A est une conséquence de Γ est notée par $\Gamma \models A$.

Par exemple $a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \models a \Rightarrow c$.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$	$((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \wedge \neg(a \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Conséquence et validité sont liées, comme le montre la table et cette propriété.

Proposition 3. *Soient $n+1$ formules $A_1, \cdots A_n$ et soit H_n la conjonction des formules $A_1, \cdots, A_n$. Les trois formulations sont équivalentes :*

1. *$A_1, \ldots, A_n \models B$ c'est-à-dire B est conséquence des hypothèses $A_, \ldots A_n$*

2. *La formule $H_n \Rightarrow B$ est valide.*

3. *$H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable*

Preuve. Exercice. La propriété est triviale et constamment utilisée dans les exercices.

Proposition 4. *Toute formule F est une conséquence d'un ensemble Γ de formules ssi $\Gamma \cup \{\neg F\}$ est insatisfaisable.*

Proposition 5. *La relation* "conséquence logique" *est transitive.*

$$Si\ \Gamma \models A\ et\ si\ \Gamma, A \models B\ alors\ \Gamma \models B.$$

Remarque 2 (Validité et conséquence)**.** *Il n'est pas étonnant que l'on note A valide par $\models A$. En effet A est valide si et seulement si A est conséquence de l'ensemble vide.*
Proposition 6. *Si $\Delta \subset \Gamma$ et $\Delta \models B$ alors $\Gamma \models B$.* ***Preuve.*** *Exercice.*

4.7 Remarques

1. Si Δ est satisfaisable et $\Gamma \subset \Delta$, alors Γ est satisfaisable.
2. L'ensemble vide est satisfaisable.
3. L'ensemble de toutes les formules est contradictoire.
4. Si Δ est satisfaisable alors Δ est finiment satisfaisable.
5. Si Γ est contradictoire et $\Gamma \subset \Delta$, alors Δ est contradictoire.
6. Toute formule est conséquence logique d'un ensemble insatisfaisable de formules.

4.8 Théorème de compacité

Théorème 1 (1ère version)**.** *Soit Γ un ensemble de formules construites sur un ensemble dénombrable P de variables propositionnelles. Alors Γ est satisfaisable(consistant) ssi toute partie finie de Γ est satisfaisable (consistant).*

Théorème 2 (2ième version)**.** *Soit Γ un ensemble de formules construites sur un ensemble dénombrable P de variables propositionnelles. Alors Γ est insatisfaisable(contradictoire) ssi Γ possède une partie finie insatisfaisable(contradictoire).*

Théorème 3 (3ième version)**.** *Pour tout ensemble Γ de formules propositionnelles, et pour toute formule propositionnelle F construites sur un ensemble dénombrable P de variables propositionnelles, F est une conséquence de Γ ssi F est une conséquence d'une partie finie de Γ.*

4.9 Théorème d'interpolation

Remarque. La valeur de vérité d'une formule ne dépend que des variables propositionnelles présentes dans la formule : lorsque F est une formule, on notera $F(p_1, \cdots, p_n)$ pour dire que la formule F s'écrit avec les variables propositionnelles $p_1, \cdots, p_n$ seulement.

Proposition 7. *Soit $F(p_1, \cdots, p_n)$ une formule. Soit v une assignation(valuation). La valeur de vérité de F sur v ne dépend que de la valeur de v sur $p_1, p_2, \cdots, p_n$.*

La propriété s'établit facilement par induction structurelle.

Théorème 4 (Théorème d'interpolation)**.** *Soient F et G telle que $F \Rightarrow G$ soit une tautologie. Il existe une formule propositionnelle C, dont les variables propositionnelles apparaissent dans F et G , telle que $F \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow G$ soient deux tautologies.*

Dans la preuve on raisonne par récurrence sur le nombre de variables qui ont au moins une occurrence dans F sans en avoir dans G.

4.10 Équivalences remarquables

Raisonner par équivalence c'est utiliser les propriétés de l'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité), et la propriété de remplacement (qu'on va voir dans le cours 5) d'une formule par une autre formule équivalente pour obtenir de nouvelles équivalences à partir des équivalences déjà prouvées ou admises. Ci-dessous, nous listons des équivalences remarquables de la logique.

1. La disjonction est :
   * Associative, c'est à dire, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z : x + (y + z) = (x + y) + z$.
   * Commutative, c'est-à-dire, $x \vee y \equiv y \vee x : x + y = y + x$.
   * 0 est l'élément neutre de la disjonction, c'est-à-dire, $0 \vee x \equiv x$.

2. La conjonction est :
   * Associative, c'est-à-dire, $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$.
   * Commutative, c'est-à-dire, $x \wedge y \equiv y \wedge x$.
   * 1 est l'élément neutre de la conjonction, c'est-à-dire, $1 \wedge x \equiv x$.

3. La conjonction est distributive sur la disjonction : $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

4. La disjonction est distributive sur la conjonction : $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

5. Les lois de la négation :
   * $x \wedge \neg x \equiv 0$.
   * $x \vee \neg x \equiv 1$ (Le tiers-exclus).
   * $\neg\neg x \vee \equiv x$. $\neg 0 \equiv 1$. $\neg 1 \equiv 0$.

6. Les lois de De Morgan : $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$. $\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$.

7. 0 est l'élément absorbant de la conjonction : $0 \wedge x \equiv 0$.

8. 1 est l'élément absorbant de la disjonction : $1 \vee x \equiv 1$.

9. idempotence de la disjonction : $x \vee x \equiv x$.

10. idempotence de la conjonction : $x \wedge x \equiv x$.

Lois de simplification

Pour tout x, y nous avons :
* $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
* $x \wedge (x \vee y) \equiv x$.
* $x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$.

Proposition 8 (Les lois de De Morgan)**.** *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables propositionnelles alors*

$$\neg(x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_n) \equiv (\neg x_1 \vee \neg x_2 \ldots \vee \neg x_n) \text{ et } \neg(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \equiv (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \ldots \wedge \neg x_n).$$

Preuve. Exercice.

Exercice. Proposez un algorithme qui, étant donné une formule F du calcul propositionnel et une assignation(valuation) v, calcule $[F]_v$. Quel type de structure de données utiliser pour coder les formules ? Quel type de structure de données utiliser pour coder les valuations ?