Laminovich

# Exercices donnés à des épreuves de l'INI
# Chapitre 1: Fonctions de plusieurs variables

## A) Continuité, Dérivabilité, Différentiabilité classe $C^1$

**Exercice 1:** EMD3 98/ 99

Les parties I et II sont indépendantes.

**I-** Répondre par vrai ou faux (+0.5 pt ou -0.5 pt pour chaque réponse)

1) D'une distance $d$ on peut toujours construire une norme.
2) Soit f une fonction numérique de n variables réelles, soit $a \in \mathbb{R}$
   *i)* ($f$ définie en $a$) $\Rightarrow$ ( $f$ définie au voisinage de $a$)
   *ii)* ($f$ continue en $a$) $\Rightarrow$ ( $f$ définie au voisinage de $a$)
   *iii)* ($f$ admet des dérivées partielles en $a$) $\Rightarrow$ ( $f$ continue en $a$)
   *iv)* ($f$ définie en $a$) $\Rightarrow$ ( $f$ différentiable en $a$)

**II-** Soit $f$ une fonction numérique de deux variables réelles symetrique (i.e. $f(x,y) = f(y,x)$), soit $(a,b) \in Df$.
Montrer que si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ existe alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(b,a)$ existe et on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(b,a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

**Exercice 2:** EMD3 00/01

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_a(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - x\cos y + ay^2 \sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0).. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

1) Montrer que $f_a$ est continue dans $\mathbb{R}^2$pour tout $a$ dans.$\mathbb{R}$.
2) Calculer $\dfrac{\partial f_a}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f_a}{\partial y}(0,0)$, si elles existent, puis étudier la différentiabilité de $f_a$ en $(0,0)$
3) Pour quelles valeurs de $a$, $f_a$est-elle différentielle dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 3:**Rattrapage Juin 2000

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x|y|$$

1) Etudier la continuité de $f$ sur $R^2$.
2) Calculer les dérivées partielles premières de $f$.
3) Trouver le domaine $D$ tel que $f \in C^1(D)$.
4) Etudier la différentiabilité de $f$ et donner l'expression de la différentielle dans le cas de son existence.

**Exercice 4:** EMD 1. 00/01

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^3 y}{x^2 + y^4} & \text{si } \; x \neq 0. \\ 0 & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$$

**1)** Montrer que $f$ est continue dans $\mathbb{R}^2$.

**2)** Etudier l'existence des dérivées partielles premières de $f$.

**3)** Etudier la différentiabilité de $f$.

**Exercice 5:** Rattrapage Septembre 01.

Soit la fonction numérique définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^y - 1}{\log(1+x)} & \text{si } \; x \neq 0. \\ y & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$$

1) Trouver le domaine de définition $D$ de $f$ puis étudier sa continuité sur $D$.

2) Etudier l'existence des dérivées partielles de premier ordre sur la droite $\{x = 0\}$.

2) Etudier la différentiabilité de $f$ sur $D$.

**Exercice 6:** EMD 1. 01/02

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & \text{si } \; x^2 + y^2 < 1. \\ 0 & \text{si } \; x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de $f$ sur $R^2$.

2) Etudier l'existence des dérivées partielles et donner leurs expressions.

3) Etudier la différentiabilité de $f$ et donner l'expression de la différentielle aux points où elle existe.

**Exercice 7:** Rattrapage Juin. 02.

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x-y}{x+y}\right) & \text{si } \; x + y \neq 0. \\ 0 & \text{si } \; x + y = 0.. \end{cases}$$

Notons par $D$ la deuxième bissectrice , *i.e.* $D = \{(x,y)/x + y = 0.\}$

1) Trouver le domaine de continuité de $f$.

2) Etudier la différentiabilité de $f$ sur ce domaine.

**Exercice 8:** Rattrapage Septembre. 02.

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2} & \text{si } \; y^2 \neq x^2. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 9:** EMD 1. 02/03

Soit $\alpha$ un paramètre réel strictement positif, et soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier selon $\alpha$ la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier la différentiabilité de $f$ au point $(0,0)$
3) $f$ est-elle de classe $C^1$ dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 10:** Rattrapage Juin 03

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier la différentiabilité de $f$ au point $(0,0)$.

**Exercice 11:** Rattrapage Septembre 03

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{si } y \neq x^2. \\ -2x & \text{si } y = x^2 \end{cases}$$

1) Etudier la continuitéde $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles et donner leurs expressions.
3) Etudier la différentiabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 12:**Emd1. 03/04

Soit la fonction $f$ donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^2)}{(e^x-1)(e^y-1)} & \text{si } xy \neq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de la fonction $f$ sur son domaine de définition.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles.
3) Etudier la différentiabilité de $f$.

**Exercice 13:**Sept 04.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2} & \text{si } y \neq 0. \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

**1)** Etudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
**2)** Etudier l'existence des dérivées partielles et donner leurs expressions.
**3)** $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
**4)** Etudier la différentiabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 14:** EMD 1. 04/05

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1)Etudier la continuité de $f$ en $(0,0)$.

2) Calculer les dérivées partielles en $(0,0)$ puis étudier la différentiabilité en $(0,0)$.

3) La fonction $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $R^2$.

**Exercice 15:** EMD 1. 04/05

Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin y}{y - \sin x} & \text{si} \quad y \neq \sin x. \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $\Delta = \{(x,y) / \ y = \sin x\}$

1) Etudier la continuité de $f$ sur $\Delta$.

2) Calculer les dérivées partielles de $f$ sur $\Delta$.

3) Etudier la différentiabilité de $f$ dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 16:**EMD1 06/07

Soit la fonction $f$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy) - xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Etudier au point $\underline{(0,0)}$ la continuité, l'existence des dérivées partielles puis la différentiabilité.
2. La fonction $f$ est-elle de classe $C^1$sur $\mathbb{R}^2$?

**B) Fonctions implicites, EDP:**

**Exercice 1:**EMD1-03/04

Soit la relation donnée par $Arctg(xy) - e^{x+y} + 1 = 0$.

Montrer que celle-ci définit implicitement $y$ en fonction de $x$ au voisinage de $(0,0)$ et former le DL1 de la dite fonction implicite au voisinage de 0.

**Exercice 2:** EMD1-03/04

Résoudre dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ l'equation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

où $f$ est une fonction inconnue des deux varaibles $(x,y)$, en utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

**Exercice 3:** EMD1-04/05
Résoudre dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ l'equation

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

où $f$ est une fonction inconnue des deux varaibles $(x, y)$, en utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases}$

**Exercice 4:** EMD1 06/07
1.Soit l'application $\varphi$ définie par

$$\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto (x, y) \end{array} \quad / (x, y) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$$

Montrer que $\varphi$ est une $C^1$-difféomorphisme (i.e.$\varphi$ bijective, $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, $\varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$)
2.. Résoudre, en utilisant un changement de variables adéquat, l'équation suivante dans $C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$

$$2x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y(1 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

**C) Extrema libres ou optimisation:**
**Exercice 1:** Rattrapage Septembre 2000
Etudier les extema libres de la fonction :

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)\ e^{xy}.$$

**Exercice 2:** EMD1.00/01
Etudier les extema libres de la fonction: $f_a$ définie par

$$f_a(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy$$

**Exercice 3:** Rattrappage. Mai 2001
Déterminer les extrémums libres de la fonction :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3.$$

**Exercice 4:** EMD 1.01/02
Etudier les extémas libres de la fonction :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - \frac{1}{4}(x - y)^2.$$

**Exercice 5:** Rattrappage. Septembre 2002.
Trouver les extréma libres de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x - z^2)\exp(y^2 + z^2 + 1)$$

**Exercice 6:** EMD 1. 02/03
Etudier les extéma libres de la fonction :

$$f(x,y) = x\exp(-x-y^4).$$

***Indication:*** Vous pouvez étudier les variations de la fonction $\varphi : t \to t\exp(-t)$.

**Exercice 7:**EMD1 03/04
Soit la fonction $f$ définie par :

$$f(x,y) = x^2y^3(x+2y-2)$$

Etudier les extrema de $f$.

**Exercice 8:** Rattrapage Septembre 04
Etudier les extrema de la fonction $f$ définie par

$$f(x,y) = x^2y + \log(1+y^2)$$

**Exercice 9:** EMD1- 04/05
Etudier les extrema de la fonction $f$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z.$$

**Exercice 10:** EMD1 06/07
Etudier les extrema de la fonction $f$ définie dans $\mathbb{R}^2$par :

$$f(x,y) = (x^2-y^2)(x^2-2y^2)$$

**Exercice 11:** Rattrapage Septembre 07
Etudier les extrema de la fonction $f$ définie dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z$$

**D) Extrema liés ou optimisation sous contraintes :**

**Exercice 1:** EMD 1.01/02
Etudier les extrema de la fonction :
$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, sous la contrainte : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

**Exercice 2:** EMD 1. 02/03
Etudier les extéma de la fonction :
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$, sous la contrainte : $2x - 5y + z = 0$.

**Exercice 3:** EMD3 98/99
Etudier les extema liés de la fonction :

$$f(x,y,z) = x - y + 2z$$

sous la condition

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 2.$$