Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (2, 3)

$\beta : (\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \rightarrow \exists x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow Q(y))$

1. Donner une formule – que l'on la désignera par β_P - sous forme normale prenexe telle que $\beta_P \equiv \beta$.
2. Montrer que β_P est valide.

Exercice 2 (2, 1, 1, 1, 1, 2)

On considère les formules suivantes :

$\alpha_1 : \exists x\, \forall y\, (P(x) \wedge \neg P(y))$ $\alpha_2 : \forall x\, \exists y\, (P(x) \rightarrow P(y))$ $\alpha_3 : \forall x (P(x) \rightarrow P(f(x)))$

1. Mettre α_1 sous forme clausale. On désignera par S l'ensemble obtenu.
2. Donner le domaine de Herbrand de S.
3. Donner l'ensemble des clauses de base de S.
4. Vérifier à l'aide d'un arbre sémantique que S est non satisfiable.
5. En déduire que α_2 est valide.
6. α_3 est-elle valide ? Si la réponse est non, donner un modèle de $\neg\alpha_3$.

Exercice 3 (4, 2)

$\Gamma_1 : \{ P(a),\ P(a) \vee Q(b),\ \neg P(a) \vee R(b),\ S(a) \}$

$\Gamma_2 : \{ R(b), S(a)\}$

$\Gamma_3 : \{ B(a),\ B(a) \vee S(a),\ \neg B(a) \vee \neg S(a)\}$

1. Montrer que :

$$P(a),\ P(a) \vee Q(b),\ \neg P(a) \vee R(b),\ S(a) \models R(b) \wedge S(a)$$

2. En déduire que $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ est non satisfiable.

Exercice 4 (2)

Traduire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

E_1 : Etre bon, c'est penser aux autres.

E_2 : La langue est la meilleure et la pire des choses.

N. B. Remettre, au plus : une seule double feuille et une seule intercalaire.

Bon courage