E.S.I. 17 Janvier 2016 **Examen Semestriel** **ALG3** 2CPI **Durée : 2H**

L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.
1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
2- Les réponses doivent être justifiées.
3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (8 pts)

Soit la matrice définie par : $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 4m & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- Calculer le polynôme caractéristique de A_m.

2- Déduire le déterminant de A_m.

3- Calculer de deux façons différentes la trace de A_m.

4- Préciser la ou les valeurs de m pour que 0 soit une valeur propre de A_m.

5- Préciser la ou les valeurs de m pour que A_m admette au moins une valeur propre multiple.

6- Déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A_m soit diagonalisable.

7- On pose $m = -2$ et considérons la matrice $A = A_{-2} = M_B(f)$ où $f \in End(\mathbb{R}^3)$ et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a- Déterminer une base B' formée des vecteurs propres de f.

b- En déduire la matrice $A' = M_{B'}(f)$.

c- Vérifier par un calcul matriciel que A et A' sont semblabes.

Exercice 2 : (5 pts)

Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = \alpha \\ 4x - y + 7z = \beta \end{cases}$$

où α et β sont dans $\mathbb{R}$.

1- Déterminer le rang du système (S).

2- Déterminer la matrice principale, les équations principales et les inconnues principales du système (S).

3- Appliquer le théorème de Rouché-Fontené pour donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que le système (S) soit compatible (Préciser le(s) déterminant(s) bordant(s) le déterminant principal).

4- Résoudre le système (S) dans le cas où il est compatible.

Exercice 3 : (7 pts)

On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices colonnes $E = M_{n,1}(\mathbb{C})$, où $n \in N^*$. Si $U = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix}$ est une matrice de E, on désigne par $\overline{U}$ la matrice colonne ${}^t\begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \overline{x_n} \end{pmatrix} \in E$ où $\overline{x_i}$ est le conjugué de x_i pour $i \in [[1, n]]$.

Soit l'application définie par :

$$\varphi : \quad E \times E \quad \to \quad \mathbb{C}$$

$$U = \left({}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix}, V = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}\right) \mapsto \varphi(U, V) = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{x_i} y_i$$

Partie A : Montrer que :

1- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (U, V) \in E \times E : \varphi(\lambda U, V) = \overline{\lambda}\varphi(U, V)$.

2- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (U, V) \in E \times E : \varphi(U, \lambda V) = \lambda\varphi(U, V)$.

3- $\forall U \in E, \forall V \in E : \varphi(V, U) = \overline{\varphi(U, V)}$.

4- $\forall U \in E : \varphi(U, U) \in \mathbb{R}^+$.

5- $\forall U \in E : [\varphi(U, U) = 0 \text{ ssi } U = 0_E]$.

Partie B :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.

1- Peut-on préciser le nombre de valeurs propres de A.

2- Si on désigne par $\overline{A}$ la matrice définie par $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{1 \leq i,j \leq n}$, montrer que : $\overline{A \cdot U} = \overline{A} \cdot \overline{U}$.

3- Dans cette question, on écrit : $\varphi(U, V) = {}^t\,\overline{U} \cdot V$ et on suppose que ${}^t\left(\overline{A}\right) = A$.

a/ Soit $\alpha \in Spec(A)$ et $U \in E$ un vecteur propre non nul associé à α. Montrer que $\varphi(AU, U) = \alpha\varphi(U, U)$.

b/ Montrer que $\alpha \in \mathbb{R}$.

4 - Soit S une matrice réelle symétrique d'ordre n. Préciser le nombre de valeurs propres réelles (comptées avec leurs ordres de multiplicité) de S.

Bon courage