الجــــمهوريـــــة الجزائريـــــة الديمـــــقراطيـــــة الشـــعبيـــة

ⵜⴰⴳⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵣⵣⴰⵢⵔⵉⵜ ⵜⴰⵎⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵖⵔⴼⴰⵏⵜ

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليـــم العـــالي والبـــحث العلمـــي

ⴰⵖⵍⵉⴼ ⵏ ⵓⵙⴻⵍⵎⴻⴷ ⵓⵏⵏⵉⴳ ⴷ ⵓⵏⴰⴷⵉ ⵓⵙⵙⵏⴰⵏ

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

المدرسة الوطنية العليا للإعلام الآلي

ⴰⵖⵔⴰⵙ ⴰⵖⵍⴰⵏⴰⵏ ⵓⵏⵏⵉⴳ ⵏ ⵜⵙⵏⵉⵙⵏⴰⵍⵜ

École nationale Supérieure d'Informatique

Concours national d'accès au second cycle de
L'Ecole nationale Supérieure d'Informatique (ESI-Alger)

Année universitaire 2023/2024

SUJET

Domaine : MI
Durée : 02h00

Matière : Mathématiques
Coefficient : 1

Calculatrice Autorisée : NON

Instructions Générales (à lire avant le début de l'épreuve)

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend **03** pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la présentation.
- **Les candidats doivent rendre les copies même vierges.**
- Le candidat qui pense avoir décelé une erreur dans l'énoncé se doit de continuer à composer. Il est invité à signaler l'erreur sur sa copie et à expliquer les initiatives qu'il pourrait avoir prises.
- Les pages des copies et des feuilles intermédiaires doivent être numérotées (1, 2, 3, 4, …).
- Les documents sont interdits, sauf indication contraire sur le sujet.
- Aucun échange n'est autorisé entre les candidats.
- **Les parties** (Analyse, Algèbre et Logique mathématique) **doivent être rédigées sur des copies séparées**.
- Les parties (Analyse, Algèbre et Logique mathématique) sont indépendantes et le candidat peut les traiter dans l'ordre de son choix.

Partie I : Analyse

Exercice (8 points) : Soient les fonctions f et φ suivantes :

$$f(x,y) = x^2 + y - \ln(x^2 + y^2 - 4), \quad \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 9.$$

On définit l'ensemble A par :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \varphi(x,y) = 0\right\}.$$

1. a- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et déduire que $A \subset D_f$.
   b- Représenter D_f et A dans le même graphe.

2. Sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, montrer que la fonction f admet un minimum global et un maximum global.

3. Montrer qu'il y a exactement 4 points critiques (à déterminer) issus de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On les notera M_i où $1 \leq i \leq 4$.

4. Préciser les points pour lesquels les extrema globaux de la fonction f, sous la contrainte $\varphi(x,y) = 0$, sont atteints.

5. Etudier la nature des autres points.

Partie II : Algèbre

Exercice (7 points) : Soit la matrice $A_\beta \in M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta & 0 \\ 2-\beta & \beta-1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $P_{A_\beta}(X)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_β. Montrer que :
$$P_{A_\beta}(X) = (-1-X)^2(1-X).$$

2. En déduire que la matrice A_β est inversible pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de β la matrice A_β est-elle diagonalisable?

4. Déterminer, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, l'inverse de la matrice A_β, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Partie III. Logique mathématique

Exercice 1 (2 points)

Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

Il y'a au moins un qui est plus grand qu'un autre au moins mais aucun n'est plus grand que deux autres.

(a, b)

Exercice 2 (3 points)

Vérifier la validité de la proposition suivante à l'aide d'un arbre sémantique.

$$\forall x \forall y(\neg P(x, f(y)) \vee \neg P(f(x), y)),\ \forall x \forall y \forall z(P(x,y) \vee P(y,z)) \models \exists x \forall y P(x,y)$$

a