L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :
Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 : (5 pts) Soit (S) le système linéaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +3z & = & k \\ x & +y & +z & = & 1 \\ 5x & +2y & -z & = & m \\ 3x & +2y & +z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \text{où } k \text{ et } m \text{ sont dans } \mathbb{R}.$$

Résoudre suivant les paramètres m et k le système (S) en utilsant le théorème de Rouché-Fontené.

Solution : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice du système (S). Après échelonnement en colonnes de A, on obtient $rgA = 2$. **(0,5 pt)**

Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ obtenue en supprimant la 1ère colonne et les lignes 1 et 3. Ainsi les inconnues principales sont y et z, les équations principales sont les équations 2 et 4.

On obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} y & +z & +x & = & 1 \\ 2y & +z & +3x & = & 4 \\ 2y & +3z & +x & = & k \\ 2y & -z & +5x & = & m \end{array}\right. \qquad \text{où } k \text{ et } m \text{ sont dans } \mathbb{R}. \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

D'après le théorème de Rouché-Fontené on a :

(S) compatible ssi les deux déterminants bordants le déterminant pricipal Δ_1 et Δ_2 sont nuls

où : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}$. **(0,5 pt)**

On a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = -k$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 8 - m$. **(0,75 pt) + (0,75 pt)**

On en déduit : (S) compatible ssi $k = 0$ et $m = 8$. **(0,5 pt)**

Cas 1 : $(k,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $(k,m) \neq (0,8)$ le système (S) n'admet pas de solutions. **(0,5 pt)**

Cas 2 : $k = 0$ et $m = 8$, on résoud le système de Cramer suivant où les inconnues principales y et z s'expriment en fonction de x :

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} y & +z & = & 1-x \\ 2y & +z & = & 4-3x \end{array} \right.$$

,

Si on retranche l'équation 1 de l'équation 2, on obtient : $y = 3 - 2x$ d'où $z = x - 2$. On en conclut que l'ensemble des solutions est :

$$\{(x, x-2, 3-2x) \ , \ x \in \mathbb{R}\} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

Exercice 2 : (11,5 pts) Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée à la base canonique C est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Calculer les valeurs propres de A. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution : $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$, on note par c_1, c_2 et c_3 les colonnes de ce déterminant puis on remplace c_1 par $c_1 - c_2$ et c_3 par $c_3 + c_2$ on obtient :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 0 \\ -1+X & -X & 1-X \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)^3$$

D'où A admet une seule valeur propre $\lambda = 1$ qui est de multiplicité 3. **(1 pt)**

On a : u est diagonalisable ssi $\dim E_1 = \dim\ker(u - Id_{\mathbb{R}^3}) = 3$. Si on échelonne la matrice $A - I_3$, on trouve :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (même échelonnement appliqué sur le déterminant ci-dessu

i.e. : $rg(A - I_3) = 1$, ainsi :

$$\begin{aligned} \dim\ker(u - Id_{\mathbb{R}^3}) &= 3 - \dim \mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3}) \\ &= 3 - rg(u - Id_{\mathbb{R}^3}) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

On en déduit que u n'est pas diagonalisable. **(1 pt)**

2- Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = nA + (1-n) I_3$.

Solution : $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(0,5 pt)**

Soit $n \in \mathbb{N}$: $A^n = ((A - I_3) + I_3)^n$, comme les matrices $(A - I_3)$ et I_3 commutent, on applique le binôme de Newton :

$$A^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (A - I_3)^k I_3^{n-k}$$

Pour $n \geq 2$: $A^n = C_n^0 (A - I_3)^0 + C_n^1 (A - I_3)^1 = I_3 + n(A - I_3) = nA + (1-n) I_3$, cette formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. **(1 pt)**

Remarque : $A^n = n \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$

3- a/ Dire pourquoi $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ est de dimension 1.

Solution : D'après la question précédente : $\dim \mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3}) = rg(u - Id_{\mathbb{R}^3}) = 1$. **(0,25 pt)**

b/ Montrer que tout générateur de $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ est un vecteur propre de u.

Solution : Soit w un vecteur générateur (non nul) de $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$, il existe un vecteur (non nul) $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $w = (u - Id_{\mathbb{R}^3})(v)$, or $(A - I_3)^2 = 0$ ce qui veut dire $(u - Id_{\mathbb{R}^3})^2 = 0$. Ainsi :

$$(u - Id_{\mathbb{R}^3})^2 (v) = (u - Id_{\mathbb{R}^3})(w) = 0.$$

On en déduit que w est un vecteur propre de u (associé à la seule valeur propre 1). **(0,75 pt)**

c/ Donner une base de $\mathrm{Im}(u - Id_{\mathbb{R}^3})$ qu'on notera (v_2).

Solution : D'après l'échelonnement de la matrice $A - I_3$ (question 1), on choisit $v_2 = (2, -1, 1)$. **(0,5 pt)**

d/ Déterminer un vecteur v_3 tel que $u(v_3) = v_2 + v_3$.

Solution : On pose $v_3 = (x, y, z)$. On a :

$$\begin{aligned} u(v_3) &= v_2 + v_3 \Leftrightarrow (u - Id_{\mathbb{R}^3})(v_3) = v_2 \\ &\Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x + y - z = 1. \end{aligned}$$

On choisit : $v_3 = (0, 0, -1)$. **(0,5 pt)**

e/ Déterminer un vecteur propre v_1 de u non colinéaire à v_2.

Solution : D'après l'échelonnement de la matrice $A - I_3$ (question 1), on peut choisir $v_1 = (0, 1, 1)$ qui correspond à $c_3 + c_2 = 0$. **(0,5 pt)**

f/ Montrer que $C' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de u relativement à cette base qu'on notera par A'.

Solution : On a : $C^{'} = (v_1 = (0,1,1), v_2 = (2,-1,1), v_3 = (0,0,-1))$ est une famille libre, en effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (on permute entre } v_1 \text{ et } v_2\text{)},$$

qui correspond au lemme 1 de l'échelonnement, comme $CardC^{'} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, on en déduit que $C^{'}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0,5 pt)**

Les vecteurs de $C^{'}$ vérifient :

$$\begin{aligned} u(v_1) &= v_1 \text{ puisque } v_1 \text{ est vecteur propre de } u, \\ u(v_2) &= v_2 \text{ d'après la question b/ puisque } v_2 \text{ est aussi vecteur propre de } u, \\ u(v_3) &= v_2 + v_3 \text{ d'après la quesion d/} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$A^{'} = M_{C^{'}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0,75 pt)}$$

g/ Déterminer une matrice inversible P vérifiant : $A^{'} = P^{-1}.A.P$.

Solution : P est la matrice de passage de C vers $C^{'}$, i.e. : $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **(0,25 pt)**

h/ Retrouver A^n.

Solution : On a : $A^n = P.\left(A^{'}\right)^n.P^{-1}$. **(0,25 pt)**

On a : $A^{'n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,75 pt),** $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(1 pt),** et enfin :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} \quad \textbf{(0,5 pt).}$$

4- Soit le polynôme $P(X) = (X-1)^2$ et Q un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

a/ Exprimer le reste de la Division Euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et de $Q\prime(1)$ où $Q\prime$ désigne le polynôme dérivé de Q.

Solution : Il existe un couple unique $(Q_1, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$Q = (X-1)^2 \cdot Q_1 + R \text{ avec } \deg R < 2 \qquad (*)$$

Il existe donc deux réels α et β tels que : $R = \alpha X + \beta$.

On remplace dans l'égalité $(*)$ par 1 on obtient : $Q(1) = \alpha + \beta$. On dérive $(*)$ on obtient:

$$Q^{'} = 2(X-1) \cdot Q_1 + (X-1)^2 \cdot Q_1^{'} + \alpha$$

puis on rempmace par 1, on obtient : $Q\prime(1) = \alpha$. On en déduit : $R = Q\prime(1)\, X + Q(1) - Q\prime(1)$. **(1,25 pt)**

b/ Retrouver A^n en utilisant la question **a/** avec un choix judicieux du polynôme Q (On remarque que $P(A) = 0$).

Solution : On choisit : $Q = X^n$, puis on utilise l'égalité $(*)$ et les résultats obtenues :

$$\begin{aligned} Q(A) &= (A - I_3)^2 \cdot Q_1(A) + Q'(1)A + (Q(1) - Q'(1))\, I_3 \Leftrightarrow \\ A^n &= nA + (1-n)\, I_3 \text{ pour } n \geq 1, \end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour $n = 0$, on retrouve $A^n = nA + (1-n)\, I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **(1,25 pt)**

Exercice 3 : (4,5 pts) les deux parties I/ et II/ sont indépendantes

I/ Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in End(E)$. Soit B une base de E et $A = M_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.

Supposons que la matrice A est inversible. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1}.

Solution : Soit λ est une valeur propre de f, comme A est inversible forcément $\lambda \neq 0$. Il existe alors un vecteur $v \in E$ tel que $v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v$. Comme f est bijective on déduit :

$$\begin{aligned} v &= f^{-1}(\lambda v) \\ &= \lambda f^{-1}(v) \end{aligned}$$

car si f est un automorphisme d'espaces vectoriels alors f^{-1} est aussi un automorphisme d'e.v.

D'où : $f^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$ et λ^{-1} est une valeur propre de f^{-1}. **(1,5 pts)**

II/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & \ldots\,. & .\,. \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ C_{n-2}^0 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & & & & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & & & & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & & & & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(Indication : on rappelle que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$: on a $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Solution : Comme $C_k^0 = 1$ pour tout k, on a :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & C_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & \ldots\,. & .\,. \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & & & & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & & & & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & & & & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Si on remplace pout tout k tel que $2 \leq k \leq n$ la ligne L_k par la ligne $L_k - L_{k-1}$ en commençant par $k = n$, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix}
1 & C_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
0 & C_2^1 - C_1^1 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
0 & C_3^1 - C_2^1 & C_3^2 - C_2^2 & C_3^3 & 0 & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & .\ . & .\ . & .\ . & .\ . & .\ . & ...\ . & .\ . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & C_{n-2}^1 - C_{n-3}^1 & C_{n-2}^2 - C_{n-3}^2 & & & & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\
0 & C_{n-1}^1 - C_{n-2}^1 & C_{n-1}^2 - C_{n-2}^2 & & & & C_{n-1}^{n-2} - C_{n-2}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\
0 & C_n^1 - C_{n-1}^1 & C_n^2 - C_{n-1}^2 & & & & C_n^{n-2} - C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1}
\end{vmatrix}$$

On utilise la relation donnée dans l'indication : $C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix}
1 & C_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
0 & C_1^0 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
0 & C_2^0 & C_2^1 & C_3^3 & 0 & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & .\ . & .\ . & .\ . & .\ . & .\ . & ...\ . & .\ . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & C_{n-3}^0 & C_{n-3}^1 & & & & C_{n-3}^{n-2} & 0 \\
0 & C_{n-2}^0 & C_{n-2}^1 & & & & C_{n-2}^{n-1} & C_{n-1}^{n-1} \\
0 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & & & & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2}
\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la 1ère colonne on ontient :

$$D = \begin{vmatrix}
C_1^0 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_3^3 & 0 & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
.\ . & .\ . & .\ . & .\ . & .\ . & ...\ . & .\ . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
C_{n-3}^0 & C_{n-3}^1 & & & & C_{n-2}^{n-2} & 0 \\
C_{n-2}^0 & C_{n-2}^1 & & & & C_{n-2}^{n-3} & C_{n-1}^{n-1} \\
C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & & & & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2}
\end{vmatrix}$$

On remplace C_k^k par C_{k-1}^{k-1} pour tout k tel que : $2 \leq k \leq n-1$, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix}
C_1^0 & C_1^1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
.\ . & .\ . & .\ . & .\ . & .\ . & ...\ . & .\ . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
C_{n-3}^0 & C_{n-3}^1 & & & & C_{n-3}^{n-3} & 0 \\
C_{n-2}^0 & C_{n-2}^1 & & & & C_{n-2}^{n-3} & C_{n-2}^{n-2} \\
C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & & & & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2}
\end{vmatrix}$$

On en conclut $D_n = D_{n-1}$. D'où $D_n = D_1 = |C_1^0| = 1$. **(3 pts)**