Ecole nationale Supérieure d'Informatique — **Février 2022**

2CPI — **Contrôle final** — **Durée : 2 heures**

Analyse mathématique 3

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Le sujet comporte 3 pages.

Veuillez répondre aux exercices sur le cahier.

Exercice 1 (4 points) :

Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{7^n.(n+1)}$.

1) Déterminer son rayon de convergence.

2) Déterminer son domaine de convergence.

3) a- Développer la fonction suivante en série entière :

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{7-t}, \text{ avec } 0 < |x| < 7.$$

b- En déduire la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{7^n.(n+1)}$.

Exercice 2 (5,5 points) :

Soit la fonction $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, 2π –périodique définie par :

$$f(x) = \cos(\alpha x)\ ,\ x \in [-\pi,\pi] \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.$$

1) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$. // meme istroire

2) Calculer les coefficients de Fourier de f puis donner sa série de Fourier.

3) Développer f en série de Fourier.

4) Déduire la valeur de la série numérique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$.

5) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\cot g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$, où $\pi\mathbb{Z} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

cotg = cos(x) / sin(x)

Rappel:

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)).$$
$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).$$
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b)).$$

Exercice 3 (5 points) :

Soient

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^3 . y . \exp(x+y)}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y . \cos(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f et g au point $(0,0)$.

2) Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f en $(0,0)$.

3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

4) On pose $\Phi = (f,g)$.

Φ est elle différentiable au point $(0,0)$? Justifier la réponse.

Exercice 4 (3 points) :

1) Soit la fonction Ψ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par: $\Psi(x,y) = (3x+y, 2x+y)$.

Montrer que Ψ est un C^1 –difféomorphisme.

2) En posant:

$$\begin{cases} u = 3x+y, \\ v = 2x+y. \end{cases}$$

$\Rightarrow x = u - v$

$2u - 3v = 6x - 6x$

Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ où } f \in C^1(\mathbb{R}^2).$$