TD Transformée de Fourier

Exercice 1

1. Trouver la transformée de $\mathcal{F}$ourier de la fonction $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

2. Écrire la formule inverse. En déduire la valeur des intégrales : $A = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$,, $B = \int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\, dt$, $k \in \mathbb{R}$, $C = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$

3. Écrire l'égalité de Parseval, puis en déduire la valeur de l'intégrale :

$$D = \int_0^\infty \frac{x^2 - x\sin(2x) + \sin^2 x}{x^4}\, dx$$

Solution:

1. **Transformée de Fourier de la fonction** :

$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

On remarque que : f est discontinue en -1. En effet :

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x) = 2$$

,

$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} f(x) = 0$$

Calcul de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt}\, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (1-t) e^{-ixt}\, dt. \end{aligned}$$

Intégrons par partie, on pose

$$u(t) = 1 - t \quad \Rightarrow \quad u'(t) = -1,$$

$$v'(t) = e^{-ixt} \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{e^{-ixt}}{ix}.$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-(1-t)\frac{e^{-ixt}}{ix}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{ix}\int_{-1}^{1} e^{-ixt}\,dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{ix}e^{ix} - \frac{1}{ix}\left[\frac{e^{-ixt}}{-ix}\right]_{-1}^{1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2i}{x}e^{ix} - \frac{1}{x^2}(e^{-ix}-e^{ix})\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2i}{x}(\cos x + i\sin x) + \frac{1}{x^2}(2i\sin x)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x} + i\frac{sinx - x\cos x}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

2 Formule inverse:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{itx}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x} + i\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\right)(\cos(tx) + i\sin(tx))\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{\sin x}{x}\cos(tx) - \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\sin(tx)\right]}_{\text{fonction paire}}\,dx\\
&+ \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{\sin x}{x}\sin(tx) + \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\cos(tx)\right]}_{\text{fonction impaire}}\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\cos(tx) - \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\sin(tx)\right]\,dx\\
&= \begin{cases} 1-t & \text{si } \ -1 < t < 1\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[\\ 1 & \text{si } t = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Calcul de** $A = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$:

  On pose $t = 0$:

$$
1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}
$$

- **Calcul de** $B = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\,dt$:

  Si $k > 0$:

  On pose $x = kt \quad \Rightarrow \quad dx = k\,dt.$

$$
B = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x/k}\frac{dx}{k} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}
$$

- B est une fonction impaire de k, alors on a :

$$B=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } k>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } k<0\\ 0 & \text{si } k=0\end{cases}$$

- Calcul de C : on pose $t=-1$

$$1=\hat{f}(-1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin x\cos x}{x}+\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{\sin x\cos x}{x}\right]dx$$

On aura

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}$$

3. Égalité de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x}+i\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\right)\right|^2dx&=\int_{-1}^{1}(1-t)^2dt\\ \Leftrightarrow\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\right)^2dx&=\int_{-1}^{1}(1-2t+t^2)dt\\ \Leftrightarrow\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sin^2 x-2x\cos x\sin x+x^2\cos^2 x}{x^4}\right)}_{\text{fonction paire}}dx&=\left[t-t^2+\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}\\ \Leftrightarrow\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin^2 x+\sin^2 x-x\sin 2x+x^2\cos x}{x^4}&=\frac{8}{3}\\ \Leftrightarrow D=\int_0^{+\infty}\frac{x^2+\sin^2 x-x\sin 2x}{x^4}dx&=\frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Trouver la transformée de $\mathcal{F}$ourier de la fonction $f(x)=|x|e^{-|x|}$.
2. En déduire la transformée de $\mathcal{F}$ourier de la fonction $h(x)=|x|e^{-\gamma|x|}$, où $\gamma>0$.
3. En déduire la transformée de $\mathcal{F}$ourier de la fonction $g(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Solution:

1.
$$\begin{aligned}f(x)&=|x|e^{-|x|}\\ &=\begin{cases}xe^{-x} & x\geq 0\\ -xe^{x} & x\leq 0\end{cases}\end{aligned}$$

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ en effet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = \int_{-\infty}^{0} -xe^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$$
$$= \left[-xe^{-x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \left[-xe^{-x}\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$$
$$= [e]_{-\infty}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} = 1 + 1 = 2$$

- f admet une transformée de Fourier.

$$\hat{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} (-t)e^{t}e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} te^{-t}e^{-itx}dt\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} (-t)e^{(1-ix)t}dt + \int_{0}^{+\infty} te^{(-1-ix)t}dt\right]$$

Intégrons par partie , on pose:

$$\begin{cases} u = -t \Rightarrow u' = -1 \\ v' = e^{(1-ix)t} \Rightarrow v = \dfrac{e^{(1-ix)t}}{1-ix} \end{cases} \qquad \begin{cases} u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{(-1-ix)t} \Rightarrow v = \dfrac{e^{-t(1+ix)}}{-(1+ix)} \end{cases}$$

$$\hat{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-te^{(1-ix)t}}{1-ix} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{1-ix}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ix)t}dt\ .\right.$$
$$\left. + \frac{te^{(-1-ix)t}}{-1-ix}\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{-1-ix}e^{(-1-ix)t}dt\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(1-ix)^2}\left(e^{(1-ix)t}\right)_{-\infty}^{0} - \frac{1}{(1+ix)^2}\left(e^{(-1-ix)t}\right)_{0}^{+\infty}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1+ix)^2 + (1-ix)^2}{[(1-ix)(1+ix)]^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

2 Transformée de Fourier de $h(x)$

$$h(x) = |x|e^{-\gamma|x|}, \quad \gamma > 0$$
$$= \frac{1}{\gamma}\gamma|x|e^{-\gamma|x|}$$
$$= \frac{1}{\gamma}|\gamma x|e^{-|\gamma x|}$$
$$= \frac{1}{\gamma}f(\gamma x)$$

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(x) = \mathcal{F}(h)(x) &= \frac{1}{\gamma}\mathcal{F}(f(\gamma x) \\
&= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\mathcal{F}(f)\,(x/\gamma)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma^2}\frac{1-\dfrac{x^2}{\gamma^2}}{\left(1+\dfrac{x^2}{\gamma^2}\right)^2} \\
&= \frac{\gamma^2 - x^2}{(\gamma^2+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

3 transformé de Fourier de $g(x)$:

$$
g(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{\sqrt{2x}}{2}\hat{f}(x)
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\hat{f}(x)e^{-itx}dt
\end{aligned}
$$

On pose $y = -t \Rightarrow dy = -dt$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\hat{f}(-y)e^{iyx}(-dy) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{iyx}dy \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}f(x).
\end{aligned}
$$

Exercice 3

Trouver la transformée de $\mathcal{F}$ourier de la fonction $f(x) = 1+|x|$ si $|x|<1$ et $f(x)=0$ ailleurs.

En déduire la valeur des intégrales : $I = \int_0^\infty \dfrac{2\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2}\cos(p\alpha)\,d\alpha$,

$J = \int_0^\infty \dfrac{2\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2}\cos(p\alpha)\,d\alpha$, , $K = \int_0^\infty \left(\dfrac{2\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2}\right)^2 d\alpha.$

Solution:

$$
f(x) = \begin{cases} 1+|x| & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}
$$

1

$$
= \begin{cases} 1+x & \text{si } 0\le x<1 \\ 1-x & \text{si } -1<x\le 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}
$$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} f(x) = 0$

f **est continue sur** $\mathbb{R}$

- f est absolument intégrable :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx &= \int_{-1}^{0}(1-x)dx + \int_{0}^{1}(1+x)dx \\ &= \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\ &= -\left(-1-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3\end{aligned}$$

- Transformée de Fourier de f:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

f est une fonction paire, alors sa transformée de Fourier coincide avec sa transformé en cosinus :

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(tx)dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} (1+t)\cos(tx)dt\end{aligned}$$

Intégrons par partie , on pose :

$$u(t) = 1+t \Longrightarrow u'(t) = 1$$

$$v'(t) = \cos(tx) \Longrightarrow v(t) = \frac{\sin(tx)}{x}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[(1+t)\frac{\sin(tx)}{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 \sin(tx)\,dt\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\sin(x)}{x} - \frac{1}{x}\left[-\frac{\cos(tx)}{x}\right]_0^1\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\sin x}{x} + \frac{1}{x^2}(\cos x - 1)\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{2x\sin x + \cos x - 1}{x^2}\end{aligned}$$

- Transformée inverse :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{f}_c(x)\cos(tx)\,dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{2x\sin x + \cos x - 1}{x^2}\cos(tx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{2x\sin x + \cos x - 1}{x^2}\cos(tx)\,dx \\ &= \begin{cases} 1+|t| & \text{si } |t|<1 \\ 1 & \text{si } t=\pm 1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

2

- Calcul de I, on pose $t=0$:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2x\sin x + \cos x - 1}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

- Calcul de J, on pose $t = p$
$J = \int_0^{+\infty} \dfrac{2x\sin x + \cos x - 1}{x^2} \cos(px)\, dx = \frac{\pi}{2} f(p)$
- Calcul de K:
Égalité de Parseval :

$$\int_0^{+\infty} |\hat{f_c(x)}|^2 dx = \int_0^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x\sin x+\cos x-1}{x^2}\right)^2 dx &= \int_0^1 (1+x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (1+2x+x^2)dx \\ &= \left[x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

alors $K = \dfrac{7\pi}{6}$

Exercice 4

Trouver la transformée sinus de $\mathcal{F}$ourier de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\alpha & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Solution:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

1. Transformée sinus de Fourier

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_s(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\sin(tx)\,dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos t \sin(tx)\,dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} (\sin(t+tx) - \sin(t-tx)]\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-\cos(t+tx)}{1+x}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(t-tx)}{1-x}\Big|_0^{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos(\pi+\pi x)}{1+x} + \frac{1}{1+x} + \frac{\cos(\pi-\pi x)}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{cos(\pi x)}{1+x} + \frac{1}{1+x} - \frac{\cos(\pi x)}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-2x\cos(\pi x) - 2x}{1-x^2} \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x(\cos(\pi x)+1)}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

2. Tronsformé inverse:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(x)\sin(tx)\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x(\cos(\pi x)+1)}{1-x^2} \sin(tx)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x\,(\cos(\pi x)+1)}{1-x^2} \cdot \sin(tx)\,dx
\end{aligned}
$$

Exercice 5

Résoudre l'équation intégrale :

$$
\int_0^{+\infty} f(x)\cos(tx)\,dx = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \le t \le \pi \\ 0 & \text{si } t > \pi \end{cases}
$$

Solution:

- Résolution de l'équation intégrale :
- Soit $\hat{f}_c(x)$ la transformée cosinus de Fourier de la fonction f:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_c(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(tx)\,dt \\
&= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

La formule inverse donne :

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(x)\cos(tx)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin x \cos(tx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(x+tx) + \sin(x-tx)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(x+tx)}{1+t} + \frac{\cos(x-tx)}{1-t}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(\pi+\pi t)}{1+t} + \frac{\cos(\pi-\pi t)}{1-t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(\pi t)}{1+t} + \frac{-\cos(\pi t)}{1-t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{-2\cos(\pi t) - 2}{1-t^2} \\
\\
&= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(\pi t) + 1}{t^2 - 1}
\end{aligned}
$$

Exercice 6

Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$,

1. Montrer que f admet une transformée de Fourier F.
2. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y' + xy = 0$.
3. On donne : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Déduire que $F(\alpha) = \mathcal{F}(f(x))(\alpha) = e^{-\alpha^2/2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $g(x) = e^{-ax^2}$, où $a > 0$.
5. Peut-on trouver une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-u)h(u)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$?

Solution:

1. $f(x) = e^{-x^2/2}$ f est une fonction positive et paire

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \\
&= 2\int_0^{1} e^{-x^2/2}\,dx + 2\int_1^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \\
&= I + J
\end{aligned}
$$

- I converge car f est dfinie et continue sur un segment.
- J converge car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0$ alors J et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ sont de même nature.

  f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et localement intégrable alors elle admet une transforéé de Fourier.

2. Montrons que F est une solution de l'équation :$y' + xy = 0$:

$$F=\mathcal{F}(f)(x)=\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

$$\begin{aligned}F' &= \mathcal{F}'(f)(x)\\ &= (\hat{f}(x))'\\ &= -i\mathbb{F}(f(t))\\ &= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-itx}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'+xF &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-it)e^{-t^2/2-itx}dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-i)(ix+t)e^{-t^2/2-itx}dt\\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-t^2/2-itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}\\ &= 0\end{aligned}$$

Alors F est une solution de l'équation $y'+xy=0$.

3 Puisque f est paire alors sa transformée de Fourier est identique sa transformée en cosinus, on a: $\mathcal{F}(f)(x)=\hat{f}=\hat{f}_c(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\cos(tx)dt$

- Calculons $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned}y'+xy=0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-xy\\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-x\,dx\\ &\Leftrightarrow \ln|y|=-\frac{x^2}{2}+C\\ &\Leftrightarrow y(x)=ke^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

$$y(0)=k=\hat{f}(0)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt$$

on pose $u=\frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{2}}dt$, On obtient

$$k=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{2}e^{-u^2}\,du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

Alors $\hat{f}(x)=e^{-x^2/2}$.

4 Déterminons la transformée de Fourier de $g(x)=e^{-ax^2}$

Transformée de Fourier de l'homothétie

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, et $\hat{f}(x)$ sa transformée de Fourier.
Soit $k>0$, on note $f_k(t)=f(kt)$.
On a :

$$\hat{f}_k(x)=\frac{1}{k}\hat{f}\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$g(x)=e^{-2a\dfrac{x^2}{2}}=e^{-\left(\dfrac{\sqrt{2a}x}{2}\right)^2}=f(\sqrt{2a}x)$$

Donc :

$$\hat{g}(x)=\hat{g}_c(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\hat{f}_c\left(\frac{x}{\sqrt{2a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2a}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}}$$

Donc : $\boxed{\hat{g}_c(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\dfrac{1}{4a}x^2}}$

5 Calcul de "h" tel que : $\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-u)h(u)\,du=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$

Produit de Convolution

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

$$f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)g(x)\,dx$$

$$\mathcal{F}(f*g)(x)=(\widehat{f*g})(x)=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(x)\,\hat{g}(x)$$

Dans notre cas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-u)h(u)\,du=(h*h)(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow(\widehat{h_c*h_c})(x)=\sqrt{2\pi}\left(\hat{h}_c(x)\right)^2=\mathcal{F}_c\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-x^2}\right)&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{F}_c\left(e^{-x^2}\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{F}_c\left(g(x)\right)\quad\text{pour } a=1\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x^2/4}\end{aligned}$$

$$\left(\hat{h}_c*\hat{h}_c\right)(x)=\sqrt{2\pi}\left(\hat{h}_c(x)\right)^2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x^2/4}$$

on aura

$$\Rightarrow\left(\hat{h}_c(x)\right)^2=\frac{1}{4}e^{-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\hat{h}_c(x)=\pm\frac{1}{2}e^{-x^2/8}$$

d'ou :

$\boxed{h(x)=e^{-2x^2}\quad\text{ou}\quad h(x)=-e^{-2x^2}}$

Exercice 7

Connaissant la transformée de Fourier de f, déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes (on suppose l'existence de toutes ces transformées).

1. $k(x) = e^{-x} f(-5x)$,
2. $\ell(x) = \cos(\lambda x) f(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution:

1. Transformée de Fourier de $k(x) = e^{-x} f(x)$: on pose $f(-5x) = f_{-5}(x)$ et $g(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) \cdot e^{-itx} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_{-5}(t) e^{-itx} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f_{-5})(u) e^{itu} du \right) g(t) e^{-itx} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f_{-5})(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i(x-u)t} dt \quad du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f_{-5})(u) \cdot \mathcal{F}(g)(x-u) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f_{-5})(x) * \mathcal{F}(g)(x)
\end{aligned}$$

2. **Transformée de Fourier de** $\ell(x) = \cos(\lambda x) f(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : $\cos(\lambda x) = \dfrac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2}$, , alors:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\ell(t))(x) &= \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} f(t) \right)(x) \\
&= \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}\left(e^{i\lambda t} f(t)\right)(x) + \mathcal{F}\left(e^{-i\lambda t} f(t)\right)(x) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}(f(t))(x-\lambda) + \mathcal{F}(f(t))(x+\lambda) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\hat{f}(x-\lambda) + \hat{f}(x+\lambda) \right]
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule suivante:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(e^{iax} f(t)\right)(x) = \mathcal{F}(f(t))(x-a), \quad a \in \mathbb{R}}$$

Exercice 8

1. En considérant la transformée sinus et cosinus de la fonction $f(t) = e^{-kt}$, $k > 0$, évaluer les deux intégrales,

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k^2 + \alpha^2} d\alpha, \qquad B = \int_0^{\infty} \frac{\alpha \sin(k\alpha)}{k^2 + \alpha^2} d\alpha.$$

❷ Utiliser l'égalité de Parseval pour évaluer les deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{k^2+\alpha^2}\right)^2 d\alpha,\qquad J=\int_0^{\infty}\left(\frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}\right)^2 d\alpha.$$

❸ En déduire la transformée sinus et cosinus de la fonction $g(t)=e^{-2t}f(t)$.

Solution:

❶ Calcul de la transformée de Fourier sinus et cosinus:

$$\hat{f}_c(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos(tx)\,dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kt}\cos(tx)\,dt$$

$$\hat{f}_s(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin(tx)\,dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kt}\sin(tx)\,dt$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(x)+i\hat{f}_s(x)&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kt}\left(\cos(tx)+i\sin(tx)\right)\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-kt}e^{itx}\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-(k-ix)t}\,dt.\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{-(k-ix)t}}{-k+ix}\right]_0^{\infty}.\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k-ix}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{k+ix}{k^2+x^2}.\end{aligned}$$

alors:

$$\hat{f}_c(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{k^2+x^2},\qquad \hat{f}_s(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{k^2+x^2}.$$

- **Transformée inverse de Fourier en cosinus:**

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t)=f(t)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(x)\cos(tx)\,dx\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{k^2+x^2}\cos(tx)\,dx\\&=\frac{2k}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(tx)}{k^2+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

- **Transformée inverse de Fourier en sinus:**

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t)=f(t)&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_s(x)\sin(tx)\,dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{k^2+x^2}\sin(tx)\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x\sin(tx)}{k^2+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

- **Calcul de A:** Dans la transformée inverse cosinus, on pose $t = k$.

$$f(t) = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2+x^2}\,dx \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2k}e^{-k^2}.$$

- **Calcul de B:** Dans la transformée inverse sinus, on pose $t = k$.

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x\sin(kx)}{k^2+x^2}\,dx \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{x\sin(kx)}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-k^2}.$$

2. Egalité de Parseval:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}|f(t)|^2dt = \int_0^{+\infty}|\hat{f}_c(x)|^2dx = \int_0^{\infty}|\hat{f}_s(x)|^2dx\\
\Leftrightarrow &\int_0^{+\infty}e^{-2kt}dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{k}{k^2+x^2}\right)^2dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x}{k^2+x^2}\right)^2dx\\
\Leftrightarrow &\left[\frac{e^{-2kt}}{-2k}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2k} = \frac{2k^2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2+x^2}\right)^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(k^2+x^2)^2}dx
\end{aligned}$$

et on a :

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2+x^2}\right)^2dx = \frac{\pi}{4k^3}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(k^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4\sqrt{k}}$$

3. Transformées en sinus et cosinus de $g(t) = e^{-2t}f(t)$:
On remarque que $g(t) = e^{-(2+k)t}$ donc $\hat{g}_c(x) = \hat{f}_c(x)$ et $\hat{g}_s(x) = \hat{f}_s(x)$ en remplaant k par $2+k$ dans les expressions de $\hat{f}_c(x)$ et$\hat{f}_s(x)$. On obtient

$$\hat{g}_c(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{k+2}{(k+2)^2+x^2}$$

et

$$\hat{g}_s(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{(k+2)^2+x^2}$$

Exercice 9

1. Soit $\hat{f}$ la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases}\ln(x+2) & \text{si } -1 < x < e-2\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

2. Que vaut:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(t)\right|^2\,dt$$

Solution:

❶ la transformée de Fourier : $\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$

la tranformée inverse : $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{itx}dx$

$$= \begin{cases} \ln(x+2) & \text{si } -1 < x < e-2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

on pose $t = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)dx = \sqrt{2\pi}\ln 2$$

❷ Egalité de Parseval :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-1}^{+e-2} [\ln(t+2)]^2 \, dt \\ &= e + \frac{4}{2} - 2 \end{aligned}$$

Soit

$$I = \int_{-1}^{e-2} [\ln(t+2)]^2 \, dt$$

On pose :

$$y = t+2 \Rightarrow dy = dt, \quad t = -1 \Rightarrow y = 1, \quad t = e-2 \Rightarrow y = e$$

$I = \int_1^e \ln^2(y)dy$: Intégrons par parties :

$$\begin{cases} u = \ln^2(y) \Rightarrow u' == \frac{2}{y}\ln(y) \\ v' = 1 \Rightarrow v = y \end{cases}$$

$$I = y\ln^2(y)|_1^e - 2\int_1^e \frac{1}{y^2}\ln(y)dy$$

intégrons par parties :

$$\begin{cases} u = \ln(y) \Rightarrow u' = \frac{1}{y} \\ v' = \frac{1}{y^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= e\ln^2 e - 2\left[-\frac{\ln(y)}{y}|_1^e + \int_1^e \frac{1}{y^2}dy\right] \\ &= e - 2\left[-\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^e\right] \\ &= e - 2\left[-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1\right] \\ &= e + \frac{4}{e} - 2 \end{aligned}$$

Exercice 10

1. Trouver la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. Écrire la formule inverse. Que vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha - i(1 - \cos \alpha)}{\alpha} \right) (\cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)) \, d\alpha$$

3. Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx \qquad B = \int_0^{\infty} \frac{\sin(kt)}{t} \, dt, \quad k \in \mathbb{R} \qquad C = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du$$

Solution:

1.
- f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx = \int_0^1 1 \, dx = 1$$

Donc f admet une transformée de Fourier.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-itx} dt \\
&= \frac{1}{-ix\sqrt{2\pi}} \left[e^{-itx} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \left(e^{-ix} - 1 \right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}x} (\cos x - i \sin x - 1) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin x}{x} + i \frac{\cos x - 1}{x} \right) \qquad (x \neq 0)
\end{aligned}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x)$ existe , donc pour $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it \cdot 0} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

2 Formule inverse:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)e^{itx}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin x}{x}+i\frac{\cos x-1}{x}\right)\right)e^{itx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{itx}\,dx+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1}{x}e^{itx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\left(\cos(tx)+i\sin(tx)\right)\,dx+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1}{x}\left(\cos(tx)+i\sin(tx)\right)\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\cos(tx)-\frac{\cos x-1}{x}\sin(tx)\right]dx\\
&+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\sin(tx)+\frac{\cos x-1}{x}\cos(tx)\right]dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x\cos(tx)-(\cos x-1)\sin(tx)}{x}\,dx\\
&= \begin{cases}1 & \text{si} \quad 0<t<1\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t=0 \quad ou \quad t=1\\ 0 & ailleurs\end{cases}
\end{aligned}$$

de la formule inverse on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)e^{itx}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin x}{x}+i\frac{\cos x-1}{x}\right)\right](\cos(tx)+i\sin(tx))\,dx
\end{aligned}$$

Alors:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x-i(1-\cos x)}{x}\right)(\cos(tx)+i\sin(tx))\,dx = 2\pi f(t)$

avec

$$= \begin{cases}2\pi & \text{si } 0<t<1\\ \pi & \text{si } t=0 \text{ ou } t=1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

3 $\mathcal{A}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

Pour $t=0$ on a: $\quad 2\pi f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

alors $\quad \mathcal{A}=\frac{\pi}{2}$

4 $\mathcal{B}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(kt)}{t}\,dt, \quad k\in\mathbb{R}$

On a $\mathcal{A}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$

on pose $x = kt$ avec $k > 0$, alors

$$\mathcal{A} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{kt} k\, d(kt) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} = \mathcal{B}$$

Si $k < 0$, alors $-k > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-kt)}{t}\, dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(-kt)}{t}\, dt = -\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

5 Calcul de $C = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 u}{u^2} du$ L'égalité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx$$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^1 1\, dx = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} + i \frac{\cos x - 1}{x} \right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{(\cos x - 1)^2}{x^2}}^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos^2 x + 1 - 2\cos x}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} dx \quad \text{on a} \sin^2 x = \frac{1 - \cos^2(2x)}{2} \quad \text{on pose} x = 2u \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1 - \cos 2u)}{4u^2} 2du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$