N.B.
1- Les réponses doivent être justifiées.
2- Les réponses doivent être rédigées dans un seul cahier d'examen.
3- Il sera tenu compte de la présentation du cahier d'examen.

Solution de l'exercice 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit le $\mathbb{R}$- e.v. $M_n(\mathbb{R})$.
1- On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle vérifie : $({}^tA).A = I_n$.
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

a/ Donner les valeurs possibles de $\det M$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} \left({}^tM\right).M &= I_n \Rightarrow \det\left(\left({}^tM\right).M\right) = \det I_n \\ &\Rightarrow \det\left({}^tM\right).\det M = 1 \\ &\Rightarrow (\det M)^2 = 1 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $\det M = 1$ ou $\det M = -1$ **(1pt)**.

b/ En déduire que M est inversible puis donner son inverse.

Solution : D'après la question **a/,** $\det M \neq 0$ donc la matrice M est inversible **(1pt)**. De plus:

Comme M est orthogonale par hypothèse, elle vérifie $({}^tM).M = I_n$, ce qui veut dire que M est inversible à gauche et donc inversible d'après le cours, et $M^{-1} = {}^tM$.**(1pt)**

2- Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $({}^tN).N$ est une matrice symétrique et que son déterminant est positif ou nul.

Solution : On a :

$${}^t\left(\left({}^tN\right).N\right) = \left({}^tN\right).{}^t\left({}^tN\right) = \left({}^tN\right).N$$

Ce qui veut dire que la matrice $({}^tN).N$ est une matrice symétrique.**(0.5pt)** De plus :

$$\det\left(\left({}^tN\right).N\right) = \det\left({}^tN\right).\det N = (\det N)^2$$

Ainsi $\det(({}^tN).N) \geq 0$.**(1pt)**

3- Supposons que n est impair et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A est antisymétrique.
Déterminer $\det A$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} {}^tA &= -A \Rightarrow \det\left({}^tA\right) = \det(-A) \\ &\Rightarrow \det\left({}^tA\right) = (-1)^n \det(A) \\ &\Rightarrow \det(A) = -\det(A) \\ &\Rightarrow 2\det(A) = 0 \end{aligned}$$

D'où : $\det(A) = 0$.**(2.5pts)**

Solution de l'exercice 2 :
Soit la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- a/- Déterminer $\det A_\alpha$.
Solution : On a

$$\begin{aligned} \det A_\alpha &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{vmatrix}, \text{ on remplace la colonne 3 par (la colonne 3 - la colonne 1)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & 2\alpha-2 \end{vmatrix}, \text{ on développe par rapport à la 1ère ligne} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \alpha-2 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha-2 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} = 2\alpha. \textbf{(2pts)} \end{aligned}$$

b/- Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle inversible ?
Solution : On a le résultat suivant :

$$A_\alpha \text{ inversible si et seulement si } \det A_\alpha \neq 0$$

D'où A_α inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$.**(1pt)**

2- On pose $\alpha = 0$ et soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A_0 = M_B(f)$.

a/- Déterminer l'endomorphisme f.
Solution : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\left(x', y', z'\right) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \left(x', y', z'\right) \Leftrightarrow A_0.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ 2y-x+z \\ 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $f(x, y, z) = (x + z, 2y - x + z, 2x - 2y)$.**(1.5pt)**

b/- Sans effectuer de calculs dire si $rg(f) = 3$. Justifier.
Solution : On a : $rg(f) = rg(A_0) < 3$ car d'après la question **1-b/**, la matrice A_0 n'est pas inversible.**(1pt)**

c/- Soit $C = (v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0) \quad, v_3 = (-1, -1, 1))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice P de passage de B vers C.

Solution : La matrice de passage de B vers C, est :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}.\textbf{(1pt)}$$

d/- En déduire $A_0^{'}=M_C\left(f\right)$.

Solution : On a : $A_0^{'}=P^{-1}.A_0.P$. On commence d'abord par calculer P^{-1} qui représente la matrice de passage de C vers B, pour cela il suffit d'exprimer les vecteurs de la base canonique dans la base C.

On a :

$$v_1=e_1+e_3,\ v_2=e_1+e_2 \text{ et } v_3=-e_1-e_2+e_3.$$

On obtient, après résolution :

$$e_1=v_1-v_2-v_3,\ \ e_2=-v_1+2v_2+v_3,\ \ e_3=v_2+v_3.$$

D'où :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.\textbf{(2pts)}$$

Enfin :

$$A_0^{'}=P^{-1}.A_0.P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \textbf{(1pt)}$$

e/- En déduire A_0^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Solution : D'après la question précedente $A_0^{'}=P^{-1}.A_0.P$, doù $A_0=P.A_0^{'}.P^{-1}$, ainsi pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}A_0^n&=\left(P.A_0^{'}.P^{-1}\right)^n\\&=\left(P.A_0^{'}.P^{-1}\right).\left(P.A_0^{'}.P^{-1}\right).....\left(P.A_0^{'}.P^{-1}\right)\ \ (n\text{ fois})\end{aligned}$$

En utilisant l'associativité du produit des matrices et la relation $P^{-1}.P=I_n$, on obtient :

$$A_0^n=P.\left(A_0^{'}\right)^n.P^{-1}\ \ \textbf{(1.5pt)}$$

Mais :$\left(A_0^{'}\right)^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, d'où :

$$A_0^n=P.\left(A_0^{'}\right)^n.P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n-1&2-2^n&1\\-1&2&1\\2^n&-2^n&0\end{pmatrix}.\textbf{(2pts)}$$