PARTIE 1 : ALGEBRE (5 pts)

Exercice : (5 pts)
Soit la matrice :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\alpha \\ 0 & 2 & \alpha-2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Discuter, suivant le paramètre α, la diagonalisation de M_α.
2- On pose : $\alpha = 0$.
a/ Sans effectuer de calculs, dire si M_0 est inversible. Justifier.
b/ Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}.M_0.P.$$

c/ En déduire l'expression de la matrice M_0^n où $n \in \mathbb{N}^*$en fonction des matrices D et P.

PARTIE 2 : ANALYSE (6 pts)

Exercice :

Soit $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t^2} - e^{-t^2x^2}}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

2) Montrer que $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ existe et est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

3) i) Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} f(t,x)dt$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) On pose : $\varphi_1(x) = \int\limits_0^1 f(t,x)dt$, $\varphi_2(x) = \int\limits_1^{+\infty} f(t,x)dt$,
et $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues sur $\mathbb{R}$.
iii) Calculer $\varphi(1)$.

4) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\varphi'(x)$. (On admettra que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2}ds = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

5) Calculer $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En déduire la valeur de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t^2} - 1}{t^2} dt$.

PARTIE 3 : PROBABILITES ET STATISTIQUES (5 pts)

Exercice : (5 pts)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, ($p \in]0, 1[$).

Soient : $U = X + Y$ et $V = X - Y$

Déterminer :

a) La loi du couple (U, V).

b) La covariance de (U, V).

c) U et V sont-elles indépendantes ? Justifier et conclure ?

PARTIE 4 : LOGIQUE MATHEMATIQUE (4 pts)

Exercice 1 : (2 pts)
La formule ci-dessous est-elle valide ? Est-elle satisfiable ?

$$\alpha : \exists x P(x, y) \rightarrow (\exists x P(z, x) \rightarrow P(z, y))$$

(Justifiez vos réponses)

Exercice 2 : (2 pts)
Traduire la définition simplifiée ci-dessous dans le langage des prédicats du premier ordre.
"Le PPCM de deux nombres est le plus petit multiple commun à ces deux nombres."