Ecole nationale Supérieure d'Informatique — **Décembre 2021**

2CPI — **Contrôle intermédiaire** **Analyse mathématique 3** — **Durée : 2 heures**

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Veuillez répondre aux exercices sur le cahier.

Exercice 1 (6 points): Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{(\log n)^2}\right)^{n^2}$.
2. Etudier la nature (convergence absolue et semi-convergence) de la série numérique de terme général $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n!}$.
4. Rappeler la régle d'Abel pour la convergence des séries numériques.

Exercice 2 (3 points):

Montrer que la série de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx).x}{n^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (5,5 points):

I- Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ où

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}.$$

II- On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.

1) Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On pose $F(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question bonus: (1point):

Soit $(a_n)_n$ une suite numérique bornée telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

ESI. 2021/2022. CI- ANA3.

Veuillez répondre au questionnaire sur le sujet.

Nom:
Prénom:
Groupe:

Questionnaire (5,5 points): Pour chaque affirmation répondre (sans justifier) par $\boxed{\text{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\text{F}}$ sinon.

____ **A1 :** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1+u_n}{5+u_n}$ converge et a pour somme $\frac{1}{5}$.

____ **A2 :** La série numérique $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

____ **A3 :** Si la série numérique $\sum u_n$ diverge alors la suite numérique (u_n) diverge.

____ **A4 :** Si $\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{3}}\,|u_n| = 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.

____ **A5 :** Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge,

$$\text{alors } \sum u_n.v_n \text{ diverge.}$$

____ **A6 :** Si $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente

$$\text{alors} \sum \sin(u_n) \text{ converge.}$$

____ **A7 :** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{(4)^n}$ converge et a pour somme 4.

____ **A8 :** Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I, alors $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ uniformément sur I.

____ **A9 :** La convergence absolue d'une série de fonctions sur tout $[\alpha, +\infty[\subset]0, +\infty[$ implique sa convergence absolue sur $]0, +\infty[$.

____ **A10 :** Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

____ **A11 :** Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière ayant $]-1, 1]$ comme domaine de convergence et de somme S. Alors

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} S(x).$$

Un corrigé.

Exercice 1 :

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{(\log n)^2}\right)^{n^2} \geq 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ $\boxed{0{,}5}$ alors la série $\sum u_n$ diverge $\boxed{0{,}5}$ car la condition nécéssaire n'est pas vérifiée.

2. a) Convergence absolue: $|u_n| = \left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right| \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ $\boxed{0{,}5}$, et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\boxed{0{,}25}$ (série de Riemann, $\alpha = 1$) donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument par le crière d'équivalence $\boxed{0{,}25}$.
   b) convergence simple: Utilisons la méthode des DL

   $$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \quad \boxed{0{,}5}$$

   On a:
   $\rightsquigarrow$ $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge $\boxed{0{,}5}$ (car c'est une série de Leibnitz).
   $\rightsquigarrow$ $\sum o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ converge $\boxed{0{,}5}$ (car $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge absolument)
   On conclut la convergence de $\sum u_n$ par la linéarité. $\boxed{0{,}25}$
   c) Finalement on obtient la semi convergence de la série. $\boxed{0{,}25}$

3. Pour calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n!}$, voyons la nature de la série $\sum \frac{n^3}{n!}$, utilisons la régle de D'Alembert $\boxed{0{,}25}$:
   $u_n = \frac{n^3}{n!} \geq 0$ $\boxed{0{,}25}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = 0 < 1$ $\boxed{0{,}25}$ $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ converge, on applique alors la condition nécessaire qui nous donnera $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n!} = 0$ $\boxed{0{,}25}$.

4. La régle d'Abel. $\boxed{\text{1point}}$
   Soit $u_n = v_n.w_n$, où $(v_n)_n$ et (w_n) vérifient les conditions suivantes:
   1) $(v_n)_n$ décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   2) $\exists M > 0$ (cte indépendante de n) tq $|S_n| \leq M$ où $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$.
   Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 2 :

On a $|f_n(x)| \leq \dfrac{|x|}{n^3}\boxed{0{,}5} \leq \dfrac{a}{n^3},\ \boxed{0{,}5}\ \forall x \in [-a,a],\ \boxed{0{,}5}\ a > 0$, ce qui donnera la convergence normale $\boxed{0{,}25}$ donc uniforme de la série.

Appliquons le théorème de conservation de la continuité: $\boxed{0{,}25}$

$\rightsquigarrow$ Toutes les fonctions f_n sont continues sur tout $[-a,a]$ $\boxed{0{,}25}$ car c'est le produit, rapport et composée de fonctions continues.

$\rightsquigarrow$ $\sum u_n$ converge uniformément sur tout $[-a,a]$.$\boxed{0{,}25}$

Alors la série continue sur tout $[-a,a]$ $\boxed{0{,}25}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.

Exercice 3 :

I- (2,5 points)

a) Convergence simple: Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x),\ \forall x \in E = \mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n} = 0\ \boxed{0{,}5}$.

Donc $(u_n)_n$ est convergente simplement sur E vers 0 $\boxed{0{,}25}$

b) Convergence uniforme: Calculons le $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} |u_n(x) - 0|$.$\boxed{0{,}25}$

Posons $g_n(x) = |u_n(x)| = \dfrac{x^2}{x^4+n}$, et étudions les variations de g:

$$\begin{aligned} g_n{}'(x) &= \frac{2x\left(x^4+n\right)-4x^5}{\left(x^4+n\right)^2} = \frac{2xn-2x^5}{\left(x^4+n\right)^2} = \frac{2x\left(n-x^4\right)}{\left(x^4+n\right)^2}\boxed{0{,}5} \\ &= \frac{2x\left(\sqrt[4]{n}-x\right)\left(\sqrt[4]{n}+x\right)\left(\sqrt{n}+x^2\right)}{\left(x^4+n\right)^2}, \end{aligned}$$

qui est du signe de $(\sqrt[4]{n}-x)$ $\boxed{0{,}25}$, ce qui donne le TV suivant

x	0	$\sqrt[4]{n}$	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$		$-$
g_n	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{n}}{2n}$	$\searrow$

$n >>$

ie $\sup\limits_{x\in E} g_n(x) = g_n(\sqrt[4]{n}) = \dfrac{\sqrt{n}}{2n}$ $\boxed{0{,}25}$ et :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|u_n\| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\sup_{x>0} g_n(x)\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.\boxed{0{,}25}$$

Conclusion: $u_n \overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow} 0$ sur $]0,+\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

II- (3 points)

1) Etudier la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ sur $]0,+\infty[$.

Utilisons la régle de Leibnitz $\boxed{0{,}25}$: pososns $v_n(x) = \dfrac{x^2}{x^4+n}$, on a

- $v_n(x) \geq 0$ sur $]0,+\infty[$. $\boxed{0{,}25}$
- $(v_n(x))_n$ est décroissante selon n $\boxed{0{,}5}$, en effet posons $f(t) = \dfrac{x^2}{x^4+t},\ t \geq 1$,

$$f'(t) = \frac{-x^2}{(x^4+t)^2} \leq 0,\ t \geq 1,$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x) = 0,\ \forall x \in]0,+\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

On obtient alors la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ sur $]0,+\infty[$.

2) Etudier de la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Utilisons la méthode du reste, en effet, on a:

$$|R_{n-1}(x)| \leq |u_n(x)| \leq \sup_{x>0} g_n(x) = M_n \ \boxed{0{,}5} \text{(d'après I)} \qquad \forall x \in]0,+\infty[,$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$, ce qui donne la convergence uniforme de R_{n-1} (donc de R_n) vers 0 sur $]0,+\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

Finalement $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est uniformément convergente sur $]0,+\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

Appliquons le théorème de conservation de la continuité $\boxed{0{,}25}$:

$\rightsquigarrow$ Toutes les fonctions u_n sont continues sur $]0,+\infty[$ car c'est un rapport de polynômes. $\boxed{0{,}25}$

$\rightsquigarrow$ $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. $\boxed{0{,}25}$

Alors la somme F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question bonus:

Soit $(a_n)_n$ une suite numérique bornée ie $\exists M > 0 \ / \ |a_n| \leq M = b_n$ $\boxed{0{,}25}$, or la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 $\boxed{0{,}25}$(il suffit de le calculer ou d'utiliser la série géométrique), ce qui nous donnera $R_a \geq 1$, de plus $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (1)^n$ diverge alors on obtient $R_a = 1$ $\boxed{0{,}5}$.

ESI. 2021/2022. CI- ANA3.

Questionnaire : $\boxed{0{,}5}$ par bonne réponse.

Pour chaque affirmation répondre (sans justifier) par $\boxed{\text{V}}$ si elle est toujours vraie ou par $\boxed{\text{F}}$ sinon.

$\boxed{\text{F}}$ **A1 :** La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1+u_n}{5+u_n}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{5}$.

$\boxed{\text{V}}$ **A2 :** La série numérique $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

$\boxed{\text{F}}$ **A3 :** Si la série numérique $\sum u_n$ diverge alors la suite numérique (u_n) diverge.

$\boxed{\text{V}}$ **A4 :** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\sqrt{3}}\,|u_n| = 0$ alors la série $\sum u_n$ converge.

$\boxed{\text{F}}$ **A5 :** Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge,

alors $\sum u_n.v_n$ diverge.

$\boxed{\text{V}}$ **A6 :** Si $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente

alors $\sum \sin(u_n)$ converge.

$\boxed{\text{F}}$ **A7 :** La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{3}{(4)^n}$ converge et a pour somme 4.

$\boxed{\text{V}}$ **A8 :** Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ uniformément sur I, alors $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ uniformément sur I.

$\boxed{\text{V}}$ **A9 :** La convergence absolue d'une série de fonctions sur tout $[\alpha, +\infty[\subset]0, +\infty[$ implique sa convergence absolue sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{V}}$ **A10 :** Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

$\boxed{\text{V}}$ **A11 :** Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière ayant $]-1, 1]$ comme domaine de convergence et de somme S. Alors

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} S(x).$$