Exercice 1 : Soit la matrice :

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\lambda & \lambda-2 & \lambda \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Discuter, suivant le paramètre λ, la diagonalisation de N_λ.
2- On pose : $\lambda = 0$.
a/ Sans effectuer de calculs, dire si N_0 est inversible. Justifier.
b/ Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}.N_0.P.$$

c/ En déduire l'expression de la matrice N_0^n où $n \in \mathbb{N}^*$en fonction des matrices D et P.

Solution de l'exercice 1 :

1- On commence par calculer le polynôme caractéristique de la matrice N_λ :

$$\begin{aligned}
\det(N_\lambda - XI_3) &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-\lambda & \lambda-2 & \lambda-X \end{vmatrix} \end{array}, \text{ on remplace } C_2 \text{ par } C_2 + C_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 1-X & 1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-X \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}, \text{ on remplace } L_2 \text{ par } L_2 - L_1 \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ -2+X & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)(\lambda-X).
\end{aligned}$$

Cas 1 : Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$, alors N_λ est diagonalisable car dans ce cas N_λ admet **trois** valeurs propres **simples**.

Cas 2 : Si $\lambda = 1$, N_1 admet une valeur propre double, et il suffit donc de calculer le rang de $N_1 - I_3$. On a :

$$N_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$ On trouve : $rg(N_1 - I_3) = 2$ ainsi N_1 n'est pas diagonalisable.

Cas 3 : Si $\lambda = 2$, N_2 admet une valeur propre double, et il suffit donc de calculer le rang de $N_2 - 2I_3$. On a :

$$N_2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } rg\,(N_2 - 2I_3) = 1 \text{ ainsi } N_2 \text{ est diagonalisable.}$$

Conclusion : A_α est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \neq 1$.

2- On pose : $\lambda = 0$.

a/ La valeur 0 étant l'une des valeurs propres de N_0, alors N_0 n'est pas inversible.

b/ D'après la question **1/,** la matrice N_0 est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}.N_0.P.$$

La matrice D, est une matrice diagonale telle que les éléments diagonaux sont les valeurs propres de N_0, par exemple on peut choisir :

$$\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 1,\ \ \alpha_3 = 2 \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer P, on commence par considérer que N_0 est une matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base canonique. Il suffira donc de trouver pour chaque valeur propre de N_0 un vecteur propre non nul associé.

Pour la valeur propre $\alpha_1 = 0$, on suppose que $v_1 = (x, y, z)$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre α_1, (x, y, z) est alors solution du système :

$$\begin{aligned} N_0.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & & & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

De la 1ère équation, on trouve : $z = -x$ et de la 3ème équation, on trouve : $y = x$, puis en remplaçant dans la 2ème équation on trouve $0 = 0$.

On choisit $v_1 = (1, 1, -1)$.

Pour la valeur propre $\alpha_2 = 1$, on suppose que $v_2 = (x, y, z)$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre α_2, (x, y, z) est alors solution du système :

$$\begin{aligned} (N_0 - I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On remplace $z = 0$ dans 2ème et 3ème équations, on trouve : $y = x$.

On choisit $v_2 = (1,1,0)$.

Pour la valeur propre $\alpha_3 = 2$, on suppose que $v_3 = (x,y,z)$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre α_3, (x,y,z) est alors solution du système :

$$\begin{aligned}(N_0 - 2I_3) . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x & & + & z & = 0 \\ -x & & + & z & = 0 \\ 2x & - 2y & - & 2z & = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

De la 1ère équation et 2ème équation , on trouve : $z = x$ et en remplaçant dans la 3ème équation, on trouve : $y = 0$.

On choisit $v_3 = (1,0,1)$.

Enfin :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c/ On a :

$$D = P^{-1}.N_0.P. \Leftrightarrow N_0 = P.D.P^{-1}.$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$N_0^n = P.D^n.P^{-1}.$$

Exercice 2 : Soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$, et soit A la matrice associée à f relativement à la base canonique notée $C = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable?.

2- On note les valeurs propres de A par λ_1 et λ_2 tels que : $\lambda_1 < \lambda_2$, et par v, w des vecteurs propres associés, respectivement, à λ_1 et λ_2.

Montrer qu'il existe un vecteur v' tel que : $f(v') = v - v'$.

3- On pose $B = (v, v', w)$.

a/ Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

b/ Déterminer la matrice $A' = M_B(f)$.

Solution de l'exercice 2 :

1- On commence par calculer le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\begin{aligned}\det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 \\ 2 & -1-X & 4 \\ 1 & 0 & 3-X \end{vmatrix}, \text{ on développe par rapport à la 1ère ligne :} \\ &= (-1-X)(-1-X)(3-X) \\ &= (1+X)^2(3-X).\end{aligned}$$

Comme A admet une valeur propre double $\lambda_1 = -1$ et une valeur simple $\lambda_2 = 3$, alors pour que A soit diagonalisable il faut et il suffit que le rang de la matrice $A + I_3$ soit égal à 1. On a :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ On trouve : } rg\,(A + I_3) = 2 \text{ ainsi } A \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

2- a/ On a déjà noté $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$. Déterminons $v = (x, y, z)$ et $w = \left(x', y', z'\right)$, des vecteurs propres associés, respectivement, à λ_1 et λ_2.

Le triplet (x, y, z) est solution du système :

$$\begin{aligned} (A + I_3) . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} & & 0 & = 0 \\ 2x & + & 4z & = 0 \\ x & + & 4z & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si on retranche la 2ème équation de la 3ème équation, on trouve : $x = 0$, ainsi $z = 0$ et y est quelconque.

On choisit $v = (0, 1, 0)$.

Le triplet $\left(x', y', z'\right)$ est solution du système :

$$\begin{aligned} (A - 3I_3) . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x' & & & & & = 0 \\ 2x' & - & 4y' & + & 4z' & = 0 \\ x' & & & & & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la 1ère et 3ème équations, on trouve $x' = 0$, et de la 2ème équation on déduit : $z' = y'$.

On choisit $w = (0, 1, 1)$.

b/ Montrons qu'il existe un vecteur v' tel que : $f\left(v'\right) = v - v'$.

On remarque que : $f\left(v'\right) = v - v' \Leftrightarrow (f + Id_{\mathbb{R}^3})\left(v'\right) = v$, et si on pose $v' = (x_1, y_1, z_1)$, alors on obtient le système :

$$\begin{aligned} (A + I_3) . \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} & & 0 & = 0 \\ 2x_1 & + & 4z_1 & = 1 \\ x_1 & + & 4z_1 & = 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

De la 3ème équation, on tire : $x_1 = -4z_1$, puis en remplaçant dans la 2ème équation on trouve : $-4z_1 = 1$, i.e. $z_1 = -1/4$ et $x_1 = 1$. Ainsi les solutions sont tous les triplets $(1, y_1, -1/4)$ avec $y_1 \in \mathbb{R}$. On choisit $v' = (1, 0, -1/4)$.

3- On pose $B = \left(v = (0,1,0), v' = (1,0,-1/4), w = (0,1,1)\right)$.

a/ Comme $CardB = \dim \mathbb{R}^3$, pour montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \alpha v + \beta v' + \delta w &= 0 \Leftrightarrow \alpha (0,1,0) + \beta (1,0,-1/4) + \delta (0,1,1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} & \beta & & = & 0 \\ \alpha & & + \ \delta & = & 0 \\ & -\frac{1}{4}\beta & + \ \delta & = & 0 \end{array} \right., \text{ on trouve } \alpha = \beta = \delta = 0. \qquad \text{C.Q..F.D.} \end{aligned}$$

b/ Déterminons la matrice $A' = M_B(f)$. Il suffit d'écrire les vecteurs $f(v), f(v')$ et $f(w)$ dans la base B. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} f(v) &= -v \ (v \text{ vecteur propre associé à } \lambda_1 = -1) \\ f(v) &= v - v' (\text{d'après le question 2/b/), et} \\ f(w) &= 3w \ (w \text{ vecteur propre associé à } \lambda_2 = 3) \end{aligned}$$

D'où :

$$A' = M_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v) & f(v') & f(w) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ v \\ v' \\ w \end{array}$$

Exercice 3 : I- Soit la matrice :

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Est ce que la matrice A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? dans $M_3(\mathbb{C})$? Justifier.

II- Soit, dans $\mathbb{R}$, le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & - & y & + & z & = & \beta \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array} \right. \qquad (S_{\alpha,\beta})$$

où α et β sont des paramètres réels .

1- Calculer le déterminant de la matrice du système $(S_{\alpha,\beta})$.

2- Pour quelles valeurs de α et β le système $(S_{\alpha,\beta})$ est de Cramer. Dans ce cas, résoudre $(S_{\alpha,\beta})$.

3- Résoudre $(S_{\alpha,\beta})$ dans le cas où il n'est pas de Cramer.

Solution de l'exercice 3 :

I- On commence par calculer le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix}, \text{ on ajoute à la 3ème colonne la 1ère colonne :}$$

$$\begin{aligned} \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} -X & 1 & -X \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} \\ &= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ on retranche de la 3ème ligne la 1ère ligne :} \\ \det(A - XI_3) &= -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & -X & 0 \\ X & -2 & 0 \end{vmatrix}, \text{ on développe par rapport à la 3ème colonne :} \\ &= -X\left(X^2 + 2\right). \end{aligned}$$

On déduit que la matrice A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ puisque son polynôme caractéristique ne se décompose pas en produit de polynôme de degré1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Par contre la matrice A admet trois valeurs propres complexes simples, donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

II- 1- Soit, $A_{\alpha,\beta}$ la matrice du système $(S_{\alpha,\beta})$:

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant de la matrice du système $(S_{\alpha,\beta})$.

$$\begin{aligned} & \quad\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \det(A_{\alpha,\beta}) &= \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ on remplace } C_3 \text{ par } C_3 + C_2 : \\ \det(A_{\alpha,\beta}) &= \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \text{ on développe par rapport à la 3ème colonne :} \\ \det(A_{\alpha,\beta}) &= 3(\alpha + 2) \end{aligned}$$

2- Le système $(S_{\alpha,\beta})$ est de Cramer si et seulement si $\det(A_{\alpha,\beta}) \neq 0$, i.e. : $\alpha \neq -2$.

Dans ce cas, on calcule la solution unique du système $(S_{\alpha,\beta})$ en utilisant les formules de Cramer. On aura donc :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\beta & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{3\left(\alpha+2\right)}=\frac{3\beta-3}{3\left(\alpha+2\right)}=\frac{\beta-1}{\alpha+2},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & \beta & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{3\left(\alpha+2\right)}=\frac{3-3\beta}{3\left(\alpha+2\right)}=\frac{1-\beta}{\alpha+2},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & -1 & \beta\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{3\left(\alpha+2\right)}=\frac{3\alpha+3\beta+3}{3\left(\alpha+2\right)}=\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+2}$$

Enfin la solution unique du système est :

$$(x,y,z)=\left(\frac{\beta-1}{\alpha+2},\frac{1-\beta}{\alpha+2},\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+2}\right).$$

3- Si $\alpha=-2$, le système $(S_{-2,\beta})$ n'est pa de Cramer. Dans ce cas le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & y & + & z & = & \beta\\ 2x & + & y & - & z & = & -1\\ x & + & 2y & + & z & = & 1\end{array}\right. \qquad (S_{-2,\beta})$$

En sommant les deux premières équations du système $(S_{-2,\beta})$, on trouve :

$$0=\beta-1.$$

D'où deux cas se présentent :

cas 1 : $\beta\neq 1$, le système $(S_{-2,\beta})$ n'admet pas de solutions.

cas 2 : $\beta=1$, les deux premières équations du système $(S_{-2,1})$ sont équivalentes, on obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & y & + & z & = & 1\\ x & + & 2y & + & z & = & 1\end{array}\right.$$

On retranche la 1ére équation de la 2ème équation, on trouve : $y=-x$, d'où : $z=1+x$ ainsi le système $(S_{-2,1})$ admet une infinité de solutions :

$$\left\{\left(x,-x,1+x\right),x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 4 : Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}\in M_3\left(\mathbb{R}\right).$$

1- Calculer $(A - 4I_3) . V$ où $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3).

2- Calculer la trace de A et le déterminant de A.

3- En déduire :

a/ Les valeurs propres de A.

b/ Que la matrice A est diagonalisable.

4- Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}.A.P.$$

5- Déterminer la matrice A^n où $n \in \mathbb{N}^*$

Solution de l'exercice 4 :

1- On a : $(A - 4I) . \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

2- $tr(A) = 4$ et $\det A = -16$.

3- a/ On note par λ_1, λ_2 et λ_3 les trois valeurs propres (complexes) de A, celles la vérifient :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A) \text{ et } \lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 = \det A.$$

De la 1ère question précédente, on déduit $\lambda_1 = 4$, et de la 2ème question on déduit que $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 2$.

b/ Comme A admet trois valeurs propres simples alors A est diagonalisable.

4- Les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres de A.

On a déjà, d'après la 1ère question que $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 4$.

Après calculs, on trouve :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -2, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 2$$

Enfin :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5- De la relation $D = P^{-1}.A.P$ on déduit $A = P.D.P^{-1}$ d'où $A^n = P.D^n.P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Après calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} A^n &= P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}(-2)^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}(-2)^n \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}4^n \\ \frac{1}{2}4^n - \frac{1}{2}(-2)^n & \frac{1}{2}(-2)^n - \frac{1}{2}4^n & \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 5 : Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \beta\\ \beta & \alpha & \beta\\ \beta & \beta & \alpha\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C}) \text{ tel que } \beta\neq 0.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que sa matrice associée relativement à la base canonique est égale à A.

On note par B la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1- Calculer les valeurs propres de f.

2- Montrer que $\ker(f-(\alpha+2\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 1. En donner une base.

3- Montrer que $\ker(f-(\alpha-\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 2. En donner une base.

4- Montrer que f est diagonalisable et donner une base C des valeurs propres de f.

5- En déduire une matrice inversible $P\in M_3(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D=P^{-1}.A.P$ soit diagonale. Ecrire D.

Solution de l'exercice 5 :

Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \beta\\ \beta & \alpha & \beta\\ \beta & \beta & \alpha\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C}) \text{ tel que } \beta\neq 0.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que sa matrice associée relativement à la base canonique est égale à A.

On note par B la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

1- Calculer les valeurs propres de f.

Le calcul du polynôme caractéristique de A donne (on rajoute à une colonne la somme des autres) :

$$P_A(X)=-(X-(\alpha+2\beta))(X-(\alpha-\beta))^2$$

2- Montrer que $\ker(f-(\alpha+2\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 1. En donner une base.

On échelonne la matrice $A-(\alpha+2\beta)\,I_3$, on aura :

$$A-(\alpha+2\beta)\,I_3=\begin{pmatrix}-2\beta & \beta & \beta\\ \beta & -2\beta & \beta\\ \beta & \beta & -2\beta\end{pmatrix} \text{ qui est de rang 2, puisque } \beta\neq 0.$$

Ce qui veut dire que $\dim\ker(f-(\alpha+2\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})=1$.

A partir de l'échelonnement on déduit : $\ker(f-(\alpha+2\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})=\langle v_1=(1,1,1)\rangle$.

3- Montrer que $\ker(f-(\alpha-\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})$ est de dimension 2. En donner une base.

On échelonne la matrice $A-(\alpha-2\beta)\,I_3$, on aura :

$$A-(\alpha-\beta)\,I_3=\begin{pmatrix}\beta & \beta & \beta\\ \beta & \beta & \beta\\ \beta & \beta & \beta\end{pmatrix} \text{ qui est de rang 1, puisque } \beta\neq 0.$$

Ce qui veut dire que $\dim\ker(f-(\alpha-\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})=2$.

A partir de l'échelonnement on déduit : $\ker(f-(\alpha-\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})=\langle v_2=(-1,1,0)\,,v_3=(-1,0,1)\rangle$.

4- Montrer que f est diagonalisable et donner une base C des valeurs propres de f.

Les deux sous-espaces vectoriels $\ker(f-(\alpha+2\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})$ et $\ker(f-(\alpha-\beta)\,Id_{\mathbb{C}^3})$ représentent les sous espaces propores de f associés aux valeurs propres de f dont la somme des dimensions est égale à 3, donc f est diagonalisable.

De plus la famille de vecteurs $C=(v_1=(1,1,1)\,,v_2=(-1,1,0)\,,v_3=(-1,0,1))$ représente une base des valeurs propres de f.

5- En déduire une matrice inversible $P\in M_3(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D=P^{-1}.A.P$ soit diagonale. Ecrire D.

Les matrices P et D sont :

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}\alpha+2\beta&0&0\\0&\alpha-\beta&0\\0&0&\alpha-\beta\end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Soit α un paramètre réel et soit la matrice :

$$A_\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0\\\alpha&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Déterminer le polynôme caractérique de A_α.

2- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre α pour que la matrice A_α soit diagonalisable.

3- On pose : $\alpha=1$.

a/ Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $D=P^{-1}.A_1.P$.

b/ En déduire, sans effectuer de calculs, la matrice A_1^n pour tout pair $n\in\mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 6 :

1- On a **:**

$$P_{A_\alpha}(X)=\det(A_\alpha-XI_3)=-(X+1)(X-1)^2.$$

2- D'après la question précédente A_α admet $\delta=-1$ comme valeur propre simple et $\lambda=1$ comme propre double donc :

A_α diagonalisable ssi $rg(A_\alpha-I_3)=1$ ssi $rg\begin{pmatrix}0&0&0\\\alpha&-2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=1$, ce qui est vérifié pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

On en conclut que A_α diagonalisable pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Remarque : Si on note par f_α l'endomorphiqme de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $A_\alpha=M_C(f_\alpha)$, alors on peut écrire aussi :

A_α diagonalisable ssi $\dim E_1=2$ où E_1est l'espace propre de f_α associée à la valeur propore double $\lambda=1$.

3- On pose : $\alpha=1$.

a/ On a la matrice : $A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ et d'après la question **2/,** la matrice A_1 est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}.A_1.P.$$

La matrice D est une matrice diagonale telle que les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A_1, par exemple on peut choisir :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer P, il suffit donc de trouver un vecteur propre non nul de f_1 associé à la valeur propre simple $\delta = -1$ et deux vecteurs propres linéairement indépendants de f_1 associés à la valeur propre double $\lambda = 1$.

Soit $v_1 = (x, y, z)$ un vecteur propre non nul associé à la valeur propre $\delta = -1$, on aura alors (x, y, z) solution du système :

$$\begin{aligned} (A_1 + I_3) . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ x & + & z & = & 0 \\ & & 2z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On choisit $v_1 = (0, 1, 0)$.

De même, on résoud le système ci-dessous pour déterminer des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$:

$$(A_1 - I_3) . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(2y + 2z, y, z) \, , y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle v_2 = (2, 1, 0) \, , v_3 = (2, 0, 1) \rangle \, . \end{aligned}$$

On abtient ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b/ On déduit de la question précédente que :

$$D = P^{-1}.A_1.P. \Leftrightarrow A_1 = P.D.P^{-1}.$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A_1^n = P.D^n.P^{-1}.$$

Or, si n est pair : $D^n = I_3$

On en conclut que pout entier naturel pair :

$$A_1^n = P.D^n.P^{-1} = P.I_3.P^{-1} = I_3$$