Logique Mathématique
Epreuve de moyenne durée
Durée 1h 30
Tout document interdit

<u>Exercice 1</u> ((1-1), 2)

Soit L un langage du premier ordre dont l'alphabet est formé :

- des symboles de variables x, y, z, …, avec éventuellement des indices, ...
- des connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et du quantifieur $\exists$
- du symbole de prédicat binaire P et du symbole de prédicat monaire Q
- du symbole de fonction unaire : f
- des parenthèses "(" et ")"

a) Définir l'ensemble des termes et l'ensemble des formules bien formées de L.

b) Lesquelles de expressions suivantes sont des formules bien formées de L ?

e1 : $\exists x \mathrm{R}(x) \rightarrow \mathrm{R}(x)$

e2 : $\mathrm{Q}(x) \vee \mathrm{P}(x,y) \wedge \mathrm{P}(f(x), y)$

e3 : $\mathrm{P}(x,y) \vee \neg \mathrm{P}(f(y)\ , f(x))$

e4 : $\models \mathrm{P}(x,y) \vee \neg \mathrm{P}(x,y)$

e5 : $\mathrm{P}(x, y) \rightarrow \mathrm{P}(f(x), f(y))$

e6 : $\mathrm{Q}(f(x))$

e7 : $\mathrm{Q}(f(x), y) \wedge \mathrm{P}(x, f(y))$

e8 : $f(\mathrm{Q}(x))$

<u>Exercice 2</u> (0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1)

Soit la formule β : $\exists x \mathrm{P}(x,y) \rightarrow \exists y \mathrm{P}(x,y)$

1. Donner un terme libre à la fois pour x et y dans β.
2. Donner un terme qui n'est ni libre pour x ni libre pour y dans β.
3. β est-elle valide ?
4. β est-elle satisfiable ?
5. La négation de β est-elle valide ?
6. La négation de β est-elle satisfiable ?

<u>Exercice 3</u> (2, **2**)

Question 1. Montrer à l'aide d'un arbre sémantique que l'ensemble S de clauses tel que :
S : { $\mathrm{R}(u,v) \vee \neg \mathrm{P}(f(v), w)$, $\neg \mathrm{R}(f(u), v) \vee \neg \mathrm{P}(s, w)$, $\mathrm{P}(f(v), f(w))$ } est non satisfiable.

Question 2. Déduire de la question 1 que :

$$\forall u \forall v \forall w(\mathrm{R}(u,v) \vee \neg \mathrm{P}(f(v), w)),\ \forall u \forall v \forall w(\neg \mathrm{R}(f(u), v) \vee \neg \mathrm{P}(u, f(w)) \models \exists v \exists w \neg \mathrm{P}(f(v), f(w))$$

<u>Exercice 4</u> **(**(2, 2, 1), 2**)**

Question 1. Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

E_1 : S'il est vrai qu'ils ont tous des amis, alors il est faux que certains n'ont pas d'ennemis.
E_2 : Si certains ont des ennemis alors certains n'ont pas d'amis.
E_3 : Certains ne sont pas amis.

Question 2. Vérifier à l'aide d'un arbre sémantique que l'énoncé E_3 est conséquence logique de { E_1, E_2 }

N.B. *Il ne vous sera remis qu'un seul cahier d'examen. Prenez en soin.*

Corrigé

<u>Exercice 1</u> (2,2)

Question a. **1 point**

Ensemble T des termes du langage L :

r1) Tout symbole de variable appartenant à l'alphabet de L est un terme de L.
r2) Si t_i est un terme de L, alors $f(t_i)$ est aussi un terme de L.
r3) Aucune autre expression n'est un terme de L.

Ensemble T des formules de L : **1 point**

r1) Si t_i et t_j sont des termes de L, alors $\mathrm{P}(t_i, t_j)$ est une formule de L.
r2) Si t_i est un terme de L, alors $\mathrm{Q}(t_i)$ est une formule de L.
r3) Si α est une formule de L, $\neg\alpha$ est une formule de L.
r4) Si α et β sont des formules de L, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, sont des formules de L.
r5) Si α est une formule de L et x un symbole de variable, alors $\exists x\alpha$ est une formule de L.
r6) Aucune autre expression n'est une formule de L.

Question b. **2 points**

Lesquelles de expressions suivantes sont des formules bien formées de L ? 0.25 point par bonne réponse.

e1 : $\exists x\mathrm{R}(x) \rightarrow \mathrm{R}(x)$
e2 : $\mathbf{Q(x) \vee P(x,y) \wedge P(f(x), y)}$
e3 : $\mathbf{P(x,y) \vee \neg P(f(y), f(x))}$
e4 : $\models \mathrm{P}(x,y) \vee \neg\mathrm{P}(x,y)$
e5 : $\mathrm{P}(x, y) \rightarrow \mathrm{P}(f(x),f(y))$
e6 : $\mathbf{Q(f(x))}$
e7 : $\mathrm{Q}(f(x), y) \wedge \mathrm{P}(x, f(y))$
e8 : $f(\mathrm{Q}(x))$

<u>Exercice 2</u> (0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1)

Soit la formule β : $\exists x\mathrm{P}(x,y) \rightarrow \exists y\mathrm{P}(x,y)$

1. Donner un terme libre à la fois pour x et y dans β. **0.5 point**
   $t = a$
2. Donner un terme qui n'est ni libre pour x ni libre pour y dans β. **0.5 point**
   $t = f(x,y)$
3. β est-elle valide ? **1 point**
   Réponse : Non
   L'interprétation I de domaine N telle que : I(P) : " > " falsifie β pour la valuation $v(x) = 0$ et $v(y) = 0$.
   $I \models (\exists x\mathrm{P}(x,y) \rightarrow \exists y\mathrm{P}(x,y))_v$
   Si $I \models \exists x\mathrm{P}(x,y)_v$ *alors* $I \models \exists y\mathrm{P}(x,y))_v$
   Si $I \models \mathrm{P}(x,y)_{v(x=d,\, y=0)}$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$ *alors* $I \models \mathrm{P}(x,y)_{v(y=d,\, x=0)}$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$
   Si $I(\mathrm{P})(d,0)$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$ *alors* $I(\mathrm{P})(0,d)$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$
   Si $d > 0$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$ *alors* $0 > d$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$
   La proposition $d > 0$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$ a pour valeur de vérité V
   La proposition $0 > d$ pour au moins un élément $d \in \mathrm{N}$ a pour valeur de vérité F

4. β est-elle satisfiable ? **Oui** **1 point**

β est satisfiable ssi il existe I et v telles que : $I \models \beta_v$

$I \models \exists y P(x,y)_v$

$I \models P(x,y))_{v(y=d,\, x=0)}$ pour au moins un élément $d \in \mathbb{N}$

$0 < d$ pour au moins un élément $d \in \mathbb{N}$ est une proposition dont la valeur de vérité est V

$I \models \beta_v$ indépendamment de $v(x)$.

5. $\models \neg\beta$? **Non** **1 point**

   $I \models \beta_v \Rightarrow I \not\models \neg\beta_v$

   $\neg\beta$ n'est donc pas valide (question 3)

6. $\neg\beta$ est-elle satisfiable ? **Oui** **1 point**

   $\not\models\beta$ (question 3) $\Rightarrow$ il existe I et v telles que $I(\beta)_v = F \Rightarrow I(\neg\beta)_v = V$

<u>Exercice 3</u> (2, **2**)

Question 1. Montrer à l'aide d'un arbre sémantique que l'ensemble S de clauses tel que :

S : { $R(u,v) \vee \neg P(f(v), w)$, $\neg R(f(u), v) \vee \neg P(s, w)$, $P(f(v), f(w))$ } est non satisfiable.

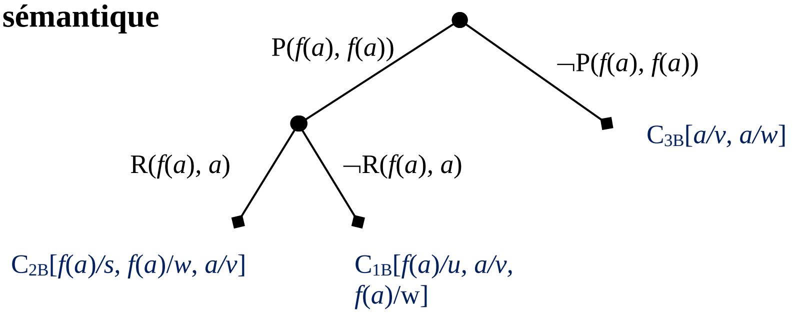
Renommer les variables

S : { $R(u,v) \vee \neg P(f(v), w)$, $\neg R(f(x), y) \vee \neg P(z, t)$, $P(f(s), f(t))$ }

Domaine de Herbrand

$H_S = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}$

Arbre sémantique



Question 2. Déduire de la question 1 que :

$$\forall u\forall v\forall w(R(u,v) \vee \neg P(f(v), w)),\ \forall u\forall v\forall w(\neg R(f(u), v) \vee \neg P(u, f(w)) \models \exists v\exists w \neg P(f(v), f(w))$$

Réponse question 2.

S : { $\forall u\forall v\forall w\, (R(u,v) \vee \neg P(f(v), w))$, $\forall x\forall y\forall z\forall t(\neg R(f(x), y) \vee \neg P(z, t))$, $\forall s\forall t P(f(s), f(t))$ }

non satisfiable

ssi

$$\forall u\forall v\forall w\, (R(u,v) \vee \neg P(f(v), w)),\ \forall x\forall y\forall z\forall t(\neg R(f(x), y) \vee \neg P(z, t)) \models \neg\forall s\forall t P(f(s), f(t))$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u\forall v\forall w\, (R(u,v) \vee \neg P(f(v), w)),\ \forall x\forall y\forall z\forall t(\neg R(f(x), y) \vee \neg P(z, t)) \models \exists s\exists t \neg P(f(s), f(t))$$

Car $\neg\forall s\forall t P(f(s), f(t)) \equiv \exists s\exists t \neg P(f(s), f(t))$

Exercice 4 ((2, 2, 1), 3)

Question 1. Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

E_1 : S'il est vrai qu'ils ont tous des amis, alors il est faux que certains n'ont pas d'ennemis.

E_2 : Si certains ont des ennemis alors certains n'ont pas d'amis.

E_3 : Certains ne sont pas amis.

Question 2. Vérifier à l'aide d'un arbre sémantique que l'énoncé E_3 est conséquence logique de { E_1, E_2 }

Réponses question 1.

$\alpha_1 : \forall x\exists y A(y, x) \to \neg\exists x\forall y\neg E(y, x)$

$\alpha_2 : \exists x\exists y E(y, x) \to \exists x\forall y\neg A(y, x)$

$\alpha_3 : \exists x\exists y\neg A(y,x)$

Réponse question 1.

$\alpha_1, \alpha_2 \models \alpha_3$ ssi { $\alpha_1, \alpha_2, \neg\alpha_3$ } non satisfiable

Etape 1. On renomme les variables

Etape 2. Mise sous forme prenexe des formules α_1, α_2 et $\neg\alpha_3$:

$\alpha_1 \equiv \forall x\exists y A(y, x) \to \forall x\exists y E(y, x)$

$\alpha_1 \equiv \forall u\exists v A(v, u) \to \forall x\exists y E(y, x)$

$\alpha_{1P} \equiv \exists u\forall x\exists y\forall v(A(v, u) \to E(y, x))$

$\alpha_2 : \exists w\exists s E(s, w) \to \exists x\forall y\neg A(y, x)$

$\alpha_{2P} : \exists x\forall y\forall w\forall s(E(s, w) \to \neg A(y, x))$

$\neg\alpha_3 : \forall x\forall y A(y,x)$

Etape 3. Mise sous forme de Skolem

$\alpha_{1S} \equiv \forall x\forall v(A(v, a) \to E(f(x), x))$

$\alpha_{2S} : \forall y\forall w\forall s(E(s, w) \to \neg A(y, b))$

Etape 4. Mise sous forme clausale

$S : \{ \neg A(v, a) \vee E(f(x), x), \neg E(s, w) \vee \neg A(y,b), A(y,x) \}$

Etape 5. L'arbre sémantique est clos. Il existe par conséquent un sous-ensemble non satisfiable d'instances de base des clauses de S. S est donc non satisfiable (théorème de Herbrand)