ESI — ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

2CPI

Contrôle Final

Analyse mathématique 4

Juin 2023

Durée : 2h

- **Les documents et les téléphones sont interdits.**
- **Traiter chaque exercice sur une double feuille séparée.**

Exercice 1 (6 points): Résoudre, par la TL, le système d'équations differentielles suivant :

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) - z(t) = e^t, & \forall t \geq 0, \\ z'(t) - y(t) + z(t) = e^t, & \forall t \geq 0, \\ y(0) = z(0) = 1, \end{cases}$$

avec $y,\ z \in C^2(\mathbb{R}^+)$, et $y,\ z$ sont d'ordre exponentiel.

Transformée de Laplace de quelques fonctions élémentaires

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
1)	$t^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{x^{n+1}} \quad x > 0$
2)	e^{at}	$\frac{1}{x-a} \quad x > a$
3)	$\sin(at)$	$\frac{a}{x^2+a^2} \quad x > 0$

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
4)	$\cos(at)$	$\frac{x}{x^2+a^2} \quad x > 0$
5)	$sh(at)$	$\frac{a}{x^2-a^2} \quad x > \lvert a\rvert$
6)	$ch(at)$	$\frac{x}{x^2-a^2} \quad x > \lvert a\rvert$

Exercice 2 (6,5 pts) : On s'intéresse à l'étude de la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\, dt.$$

1) Déterminer le domaine de définition de F.

2) a) Montrer que $\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x) - x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (F(x) + x)$.

3) a) Montrer que F est C^1 sur son domainde de définition.

b) Donner le tableau de variations de F et tracer son graphe.

Exercice 3 (7.5 pts) :

Partie I : Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est paire alors $f * f$ est aussi paire.

Partie II : Soient $f(t) = e^{-|t|}$, $g(t) \doteq \frac{1}{t^2+1}$, $h(t) \doteq \frac{t}{(t^2+1)^2}$, $k(t) \doteq \frac{1}{(t^2+1)^2}$.

1) Justifier pourquoi $f,\ h,\ g,\ k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2) a) Calculer la transformée de Fourier de f.

b) En utilisant le théorème d'inversion de Fourier déterminer la TF de g.

c) En déduire la TF de h.

3) a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ (f * f)(t) = e^{-|t|} + |t|e^{-|t|}$ (Indic : montrer le d'abord pour $t \geq 0$).

b) En déduire la TF de $k(t) \doteq \frac{1}{(t^2+1)^2}$.