Cours 9 Calcul des prédicats : Sémantique

9.1 Interprétation

En logique propositionnelle, le sens des formules est uniquement fixé par les valeurs des variables, en logique du premier ordre le sens des formules dépend aussi du sens des fonctions et des relations(prédicats). Le sens des fonctions et des relations est fixé par une interprétation.

Définition 9.1. *(Interprétation) Une interprétation I sur une signature Σ est définie par un domaine D non vide et une application qui à chaque déclaration de symbole $s^{gn} \in \Sigma$ associe sa valeur s_I^{gn} comme suit :*

1. s_I^{f0} *est un élément de D. (une constante dans D.)*
2. s_I^{fn} *où $n \geq 1$ est une fonction de D^n dans D, autrement dit une fonction à n arguments.*
3. s_I^{r0} *vaut 0 ou 1.*
4. s_I^{rn} *où $n \geq 1$ est un sous-ensemble de D^n, autrement dit une relation à n arguments*

Exemple 9.1. *Soit l'interprétation I de domaine $D = \{1, 2, 3\}$ où la relation binaire ami est vraie pour les couples $(1, 2), (1, 3) et (2, 3)$, c'est-à-dire, $ami_I = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$. Donc $ami(2; 3)$ est vraie dans l'interprétation I. En revanche, $ami(2, 1)$ est fausse dans l'interprétation I.*

Remarque 9.1. *Dans toute interprétation I, la valeur du symbole $=$ est l'ensemble $\{(d; d)|d \in D\}$, autrement dit dans toute interprétation le sens de l'égalité est l'identité sur le domaine de l'interprétation.*

Interprétation d'un ensemble de formules

L'interprétation d'un ensemble de formules est une interprétation qui définit seulement le sens de la signature associée à l'ensemble des formules.

État

Un état e est une application de l'ensemble des variables dans le domaine de l'interprétation.

Assignation

Une assignation est un couple (I, e) composé d'une interprétation I et d'un état e.

Exemple 9.2. *Soient le domaine $D = \{1, 2, 3\}$ et l'interprétation I où la relation binaire ami est vraie uniquement pour les couples $(1, 2), (1, 3) et (2, 3)$, c'est-à-dire, $ami_I = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Soit e l'état qui associe 2 à x et 1 à y. L'assignation (I, e) rend la relation $ami(x, y)$ fausse.*

9.2 Sens des formules

Nous allons expliquer comment évaluer une formule à partir dune assignation, cest-à-dire, une interprétation et un état. Il faut noter que dans certains cas, létat de lassignation est inutile pour fixer le sens d'une formule.

Remarque 9.1. *La valeur dune formule ne dépend que de ses variables libres et de ses symboles, aussi pour évaluer une formule sans variable libre, létat des variables est inutile.*

Soient Σ une signature, I une interprétation sur Σ de domaine D et e un état de cette interprétation. La valeur de A dans l'assignation (I, e) sera notée $[A]_{(I,e)}$. Tout d'abord nous définissons le sens de chaque terme t sur Σ dans l'assignation (I, e), noté $[[t]]_{(I,e)}$. Ensuite le sens de chaque formule atomique B sur Σ dans la même assignation, noté $[B]_{(I,e)}$.

9.2.1 Sens des termes sur une signature

Chacun sait intuitivement comment évaluer un terme : nous remplaçons les variables par leurs valeurs, les symboles de fonctions par les fonctions qui leur sont associées et nous appliquons les fonctions. Mais pour raisonner sur le sens des termes ou *écrire un programme dévaluation des termes*, nous devons formaliser cette évaluation.

Définition 9.2. *(Évaluation) Nous donnons la définition inductive de lévaluation dun terme t :*

1. *si t est une variable, alors $[[t]]_{(I,e)} = e(t)$,*
2. *si t est une constante alors $[[t]]_{(I;e)} = t_I^{f0}$.*
3. *si $t = s(t_1, \ldots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $[[t]]_{(I,e)} = s_I^{fn}([[t_1]]_{(I,e)}, \ldots, [[t_n]]_{(I,e)})$.*

Dans les exemples, nous remplaçons les variables par leurs valeurs, nous confondons les symboles et leur sens.

Exemple 9.3. *Soit I l'interprétation de domaine $\mathbb{N}$ qui donne aux déclarations de symboles $1^{f0}, *^{f2}, +^{f2}$ leur sens usuel sur les entiers. Soit e l'état tel que $x = 2, y = 3$. Calculons $[[x * (y + 1)]]_{(I,e)}$.*

$$[[x * (y + 1)]]_{(I,e)} = [[x]]_{(I,e)} * [[(y + 1)]]_{(I,e)} = [[x]]_{(I,e)} * ([[(y)]]_{(I,e)} + [[(1)]]_{(I,e)}) = e(x) * (e(y) + 1) = 2 * (3 + 1) = 8.$$

9.2.2 Sens des formules atomiques sur une signature

Définition 9.3. ***(Sens des formules atomiques)*** *Le sens des formules atomiques est donné par les règles inductives suivantes :*

1. $[\top]_{(I,e)} = 1$; $[\bot]_{(I,e)} = 0$. *Dans les exemples, on autorise à remplacer* $\top$ *par sa valeur* 1 *et* $\bot$ *par sa valeur* 0.
2. *Soit s une variable propositionnelle (prédicat d'arité 0),* $[s]_{(I,e)} = s_I^{r0}$.
3. *Soit $A = s(t_1, \dots, t_n)$ où s est un symbole et $t_1, \dots, t_n$ sont des termes. Si* $([[t_1]]_{(I,e)}, \dots ; [[t_n]]_{(I,e)}) \in s_I^{rn}$ *alors* $[A]_{(I,e)} = 1$ *sinon* $[A]_{(I,e)} = 0$.

Définition 9.4. *(Sens des formules) Le sens des formules est donné par :*

1. *Les connecteurs propositionnels ont le même sens qu'en logique propositionnelle. Soient B et C des formules, rappelons uniquement le sens de limplication :*
   si $[B]_{(I,e)} = 0$ *alors* $[B \Rightarrow C]_{(I,e)} = 1$ *sinon* $[B \Rightarrow C]_{(I,e)} = [C]_{(I,e)}$.
2. *Soient x une variable et B une formule.* $[\forall x B]_{(I,e)} = 1$ *si et seulement si* $[B]_{(I,f)} = 1$ *pour tout état f identique à e, sauf pour x. Soit $d \in D$. Notons $e[x = d]$ l'état identique à l'état e, sauf pour la variable x, auquel l'état $e[x = d]$ associe la valeur d. La définition ci-dessus peut être mise sous la forme suivante :*

   $$\boxed{[\forall x B]_{(I,e)} = \min_{d\in D}[B]_{(I,e[x=d])} = \prod_{d\in D}[B]_{(I,e[x=d])}.}$$

   où le produit est le produit booléen.
3. $[\exists x B]_{(I,e)} = 1$ *si et seulement s'il y a un état f identique à e, sauf pour x, tel que* $[B]_{(I,f)} = 1$. *La définition ci-dessus peut être mise sous la forme suivante :*

   $$\boxed{[\exists x B]_{(I,e)} = \max_{d\in D}[B]_{(I,e[x=d])} = \sum_{d\in D}[B]_{(I,e[x=d])}.}$$

   où la somme est la somme booléenne.

Exemple 9.4. *Soit I l'interprétation suivante.* $D_I = \{0, 1, 2\}$ *et P un prédicat binaire tq* $P_I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$. *Dans cette interprétation, les formules* $F = \forall x \exists y P(x, y)$ *et* $G = \exists y \forall x P(x, y)$ *n'ont pas la même valeur.*
L'évaluation de F vaut

$$\begin{array}{rcl}
[F]_I & = & (\exists y P(0, y) \wedge \exists y P(1, y) \wedge \exists y P(2, y)) \\
& = & (P(0, 0) \vee P(0, 1) \vee P(0, 2)) \wedge (P(1, 0) \vee P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 0) \vee P(2, 1) \vee P(2, 2)) \\
& = & (0 + 1 + 0).(0 + 0 + 1).(0 + 1 + 0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.
\end{array}$$

Par contre en évaluant $[G]_I$ on trouve 0. Donc en intervertissant un quantificateur existentiel et un quantificateur universel, nous ne préservons pas le sens des formules. Remarquons aussi que comme les deux formules sont fermées, nous n'avons pas besoin d'un état, une assignation est simplement une interprétation.

9.3 Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en logique propositionnelle. Mais alors qu'en logique propositionnelle, une assignation est une application des variables propositionnelles dans $0, 1$, en logique du premier ordre *une assignation est un couple constitué d'une interprétation des symboles d'une part et de l'état des variables d'autre part.* **Rappel :** $A \models B$ veut dire : toute assignation (I, e) qui rend vraie la formule A (modèle de A) est aussi modèle de B.

9.4 Instanciation

Définition 9.5. *Soit x une variable, t un terme et A une formule.*

1. $A <x := t>$ *est la formule obtenue en remplaçant dans la formule A toute occurrence libre de x par t.*
   Par exemple, soit A la formule $(\forall x P(x)) \vee Q(\underline{x})$.
   $A < x := b >$ *est la formule* $(\forall x P(x)) \vee Q(b)$ *car seule loccurrence soulignée de x est libre.*
2. *Le terme t est libre pour x dans A si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.*
   Par exemple le terme z est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$. Par contre le terme y, comme tout terme comportant la variable y nest pas libre pour x dans cette formule.

Lemme 9.1. *Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A. Soient I une interprétation et e un état de l'interprétation. Nous avons* $[A < x := t >]_{(I;e)} = [A]_{(I;e[x=d])}$, *où* $d = [[t]]_{(I;e)}$.

Autrement dit, la valeur de $A < x := t >$ dans une assignation est la même que celle de A dans une assignation identique, sauf qu'elle donne à x la valeur du terme t.

Ce théorème, dont le résultat est évident, peut être prouvé par une récurrence sur la taille des formules. Montrons que la condition sur t est indispensable en observant un exemple où cette condition n'est pas respectée.

Exemple 9.5. *Soient I l'interprétation de domaine* $\{0, 1\}$ *avec* $P_I = \{(0, 1)\}$ *et e un état où* $y = 0$.

— *Soient A la formule $\exists y P(x,y)$ et t le terme y. Ce terme n'est pas libre pour x dans A. Nous avons :* $A <x:t>= \exists y P(y,y)$ *et* $[A <x:t>]_{(I,e)} = [\exists y P(y,y)]_{(I,e)} = \max\{[P(0,0)]_{(I,e)}, [P(1,1)]_{(I,e)}\} = \max(0,0) = 0.$
— *Soit* $d = [[t]]_{(I,e)} = [[y]]_{(I,e)} = 0$. *Dans l'assignation* $(I, e[x=d])$, *nous avons* $x = 0$. *Donc nous obtenons :* $[A]_{(I,e[x=d])} = [\exists y P(x,y)]_{(I,e[x=d])} = \max\{[P(0,0)]_{(I,e)}[P(0,1)]_{(I,e)}\} = \max\{0,1\} = 1.$
Ainsi, $[A <x:t>]_{(I,e)} \neq [A]_{(I,e[x=d])}$.

Théorème 9.1. *Soient A une formule et t un terme libre pour x dans A.*

Les formules $\forall x A \Rightarrow A < x := t >$ ***et*** $A < x := t > \Rightarrow \exists x A$ ***sont valides.***

Ce résultat est une conséquence immédiate du lemme précédent.

9.5 Interprétation finie : Expansion d'une formule

Dans certains cas il est suffisant de regarder les expansions de taille finie afin de trouver un modèle ou un contre- modèle pour une formule donnée.

Définition 9.6. *Soient A une formule et n un entier. La n-expansion de A est la formule qui consiste à remplacer toute sous-formule de A de la forme $\forall x B$ par la conjonction ($\prod_{i<n} B < x := i >$) et toute sous-formule de A de la forme $\exists x B$ par la disjonction ($\sum_{i<n} B < x := i >$) où i est la représentation décimale de l'entier i.*

Exemple 9.6. *La 2-expansion de la formule $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$ est la formule* $(P(0) + P(1)) \Rightarrow P(0) \cdot P(1)$.

9.5.1 Recherche dun modèle fini dune formule fermée

Soit A la formule $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$. Il est clair que cette formule na pas de modèle à un élément car cet élément devrait vérifier à la fois la propriété P et sa négation. La 2-expansion de A est :

$$(p(0)+p(1)) \cdot (\overline{p(0)} + \overline{p(1)})(p(0)p(0) \Rightarrow 0 = 0) \cdot (p(0)p(1) \Rightarrow 0 = 1) \cdot (p(1)p(0) \Rightarrow 1 = 0) \cdot (p(1)p(1) \Rightarrow 1 = 1).$$

En remplaçant les égalités par leurs valeurs, nous obtenons :

$$(p(0)+p(1)) \cdot (\overline{p(0)} + \overline{p(1)})(p(0)p(0) \Rightarrow 1) \cdot (p(0)p(1) \Rightarrow 0) \cdot (p(1)p(0) \Rightarrow 0) \cdot (p(1)p(1) \Rightarrow 1).$$

Ce qui se simplifie en : $(p(0)+p(1)) \cdot (\overline{p(0)} + \overline{p(1)})$.

L'assignation $p(0) = 1, p(1) = 0$, est un des modèles propositionnels de la formue ci-dessus, donc l'interprétation I de domaine $D = \{0,1\}$ où $P_I = \{0\}$ est modèle de A.

9.5.2 Formule fermée avec symbole de fonction

Soit A une formule fermée pouvant comporter des représentations dentiers inférieurs à n. Comme dans le cas précédent, nous remplaçons A par son expansion, nous supprimons les égalités. Puis, nous énumérons les choix des valeurs des symboles comme dans lalgorithme DPLL, en propageant le plus possible chacun des choix effectués.

Exemple 9.7. *Soit A la formule $\exists y P(y) \Rightarrow P(a)$, dont nous cherchons un contre-modèle à 2 éléments (cela revient au même que de trouver un modèle de la négation de A). Nous remplaçons A par son expansion $P(0) + P(1) \Rightarrow P(a)$. Comme dans l'algorithme DP, nous devons trouver les valeurs de $P(0), P(1)$ et a. On choisit (arbitrairement) de poser $a = 0$. Donc l'expansion de A devient $P(0)+P(0) \Rightarrow P(0)$. Cette dernière formule propositionnelle a un contre modèle : $P(0) = 0, P(1) = 1$ que nous traduisons en une interprétation : $D_I = \{0,1\}, P_I = \{1\}, a = 0$.*

Exemple 9.8. *Nous cherchons un modèle à 2 éléments des formules $P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow P(f(x))), \neg P(f(b))$. Nous remplaçons les formules par leurs expansions $P(a), (P(0) \Rightarrow P(f(0))) \cdot (P(1) \Rightarrow P(f(1))), \neg P(f(b))$. Soit Γ l'ensemble obtenu. Il faut trouver les valeurs de $P(0), P(1), a, b$ et f, qui donnent un modèle de F. Nous avons donc : $P(a) = 1, (P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1, (P(1) \Rightarrow P(f(1))) = 1, P(f(b)) = 0$. Nous choisisons(arbitrairement) de poser $a = 0$. Nous obtenons que :*

- *De $P(a) = 1$ et $a = 0$ nous déduisons $P(0) = 1$.*
- *De $P(0) = 1$ et de $(P(0) \Rightarrow P(f(0))) = 1$ on déduit que $P(f(0)) = 1$*
- *De $P(f(b)) = 0$ et de $P(f(0)) = 1$, nous déduisons $f(0) \neq f(b)$ et donc $b \neq 0$ donc $b = 1$.*
- *De $P(f(b)) = 0$ et $P(0) = 1$ et $b = 1$, nous déduisons que $f(b) = f(1) \neq 0$. Donc $f(1) = 1$ et $P(1) = 0$.*
- *De $P(f(0)) = 1$ et $P(1) = 0$ nous déduisons $f(0) \neq 1$ donc $f(0) = 0$.*

Avec un seul choix propagé, nous avons trouvé l'interprétation modèle suivante : $a = 0, b = 1, P = \{0\}, f(0) = 0, f(1) = 1$.

Notons que la méthode d'expansion est inutilisable en pratique, car le nombre des interprétations est énorme. Avec une constante, un symbole de fonction à un argument et un symbole de relation à deux arguments sur un domaine à 5 éléments, cette signature à $5 \times 5^5 \times 2^{25} = 524288000000$ interprétations.

9.6 Substitution et remplacement

La propriété de substitution et la propriété de remplacement déjà énoncées en logique propositionnelle s'étendent à la logique du premier ordre. Plus précisément l'application d'une substitution à une formule valide donne une formule valide. Par exemple soit σ la substitution telle que $\sigma(p) = \forall x q(x)$. Puisque la formule $p \vee \neg p$ est valide, il en est de même de la formule $\forall x q(x) \vee \neg(\forall x q(x))$.

Le principe de remplacement s'étend aussi avec le même énoncé de la logique propositionnelle à la logique du premier ordre car il est déduit des propriétés élémentaires suivantes. Pour toutes formules A et B et toute variable x :

— **Si** $\models (A \Leftrightarrow B)$ **alors** $\models (\forall x A \Leftrightarrow \forall x B)$.

— **Si** $\models (A \Leftrightarrow B)$ **alors** $\models (\exists x A \Leftrightarrow \exists x B)$.

9.7 Équivalences remarquables

Relation entre $\forall$ et $\exists$

Soient A une formule et x une variable.

1. $\neg \forall x A \equiv \exists x \neg A$.
2. $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$.
3. $\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$.
4. $\exists x A \equiv \neg \forall x \neg A$.

9.8 Déplacement des quantificateurs

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$.
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$.
3. $\forall x(A \wedge B) \equiv (\forall x A \wedge \forall x B)$.
4. $\exists x(A \vee B) \equiv (\exists x A \vee \exists x B)$.
5. Soient Q un des quantificateurs $\forall; \exists$, et α une des opérations $\wedge, \vee, \Rightarrow$.
Supposons que x ne soit pas une variable libre de A.

(a) $QxA \equiv A$: $\forall x A \equiv A$ et $\exists x A \equiv A$.

(b) $Qx(A \ \alpha \ B) \equiv (A \ \alpha \ QxB)$: ex : $\forall x(A \wedge B) \equiv A \wedge \forall x B$; ex :$\exists x(A \Rightarrow B) \equiv A \Rightarrow \exists x B$;

Exercice : Éliminer de ces deux formules les quantificateurs inutiles : $\forall x \exists x P(x)$ et $\forall x(\exists x P(x) \vee Q(x))$.

Théorème 9.2. *Soit Q un des quantificateurs $\forall, \exists$. Supposons que y soit une variable qui ne figure pas dans QxA alors : $QxA \equiv QyA < x := y >$.*

Exemple 9.9. *La formule $\forall x p(x, z)$ est équivalente à la formule $\forall y p(y, z)$ (d'après le théorème ci-dessus) mais elle n'est pas équivalente à la formule $\forall z p(z, z)$, où le changement de variable ne respecte pas les conditions du théorème.*

Exemple 9.10. *Nous montrons que les formules $\forall x \exists y P(x, y)$ et $\forall y \exists x P(y, x)$ sont égales par changement des variables liées donc sont équivalentes, en effet :*

$$\forall x \exists y P(x, y) \equiv \forall z \exists y P(z, y) \equiv \forall z \exists x P(z, x) \equiv \forall y \exists x P(y, x).$$

Les deux formules sont égales à un changement près de variables liées et sont équivalentes.

Exercice. *Supposons que x ne soit pas une variable libre de A.*
Montrer que $\forall x(B \Rightarrow A) \equiv \exists x B \Rightarrow A$ et $\exists x(B \Rightarrow A) \equiv \forall x B \Rightarrow A$

Remarque

Les formules suivantes sont valides.

1. $\exists x \forall y A \Rightarrow \forall y \exists x A$.
2. $\exists x(A \wedge B) \Rightarrow \exists x A \wedge \exists x B$.
3. $\forall x A \vee \forall x B \Rightarrow \forall x(A \vee B)$.

Attention. Les réciproques ne sont pas valides.