Durée 2 heures

Tout document interdit

Exercice 1 (2)

Trouvez le MGU et la plus générale instance des expressions suivantes :

$t_1 = f(u, v, g(a,u))$ $\quad$ $t_2 = f(v, g(u,v), u)$

Exercice 2 (2, 2, 4)

On considère les formules suivantes :

$\beta : (\forall x\, \exists y\, P(x, y)) \wedge (\forall u\, \exists v\, \neg P(u, v))$

$\beta_{S1} : (\forall x\, P(x, f(x))) \wedge (\forall u\, \neg P(u, g(u)))$

$\beta_{S2} : \forall x \forall u\, (P(x, f(x)) \wedge \neg P(u, h(x,u)))$

Questions :

1. β est-elle satisfiable ?
2. β_{S1} et β_{S2} sont-elles logiquement équivalentes ?
3. Montrer que β_{S1} est satisfiable si et seulement si β_{S2} est satisfiable.

Exercice 3 (3, 2, 3)

Montrer la proposition suivante :

$\forall x(\exists y\, R(x, y) \rightarrow R(x,f(x))), \forall x\, \exists y\, R(x, y), \exists x\, R(f(f(x)), x) \models \exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x))$

1. A l'aide d'un arbre sémantique clos. Indiquer clairement les clauses correspondant à chaque nœud d'échec et à chaque nœud d'inférence.
2. En utilisant la résolution appliquée à des instances de base des clauses obtenues.
3. En utilisant le principe de la résolution.

Exercice 4 (1, 1, 1)

Traduire les énoncés suivants dans le langage du premier ordre :

1. Qui vole un œuf, vole un bœuf.
2. La langue est la meilleure et la pire des choses.
3. La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

N. B. Remettre, au plus, une seule double feuille et une seule intercalaire.

Bon courage

Correction

Exercice 1 (1.5, 1.5, 1.5)

Trouvez le MGU et la plus générale instance des expressions suivantes :

$t_1 = f(u, v, g(a, u))$ $\qquad$ $t_2 = f(v, g(u, v), u)$

On renomme les variables de $t_2 = f(y, g(x, y), x)$

Etape 1.

$\theta_0 = \varepsilon$ (ε : substitution vide).

$E = \{ f(\underline{u}, v, g(a, u)) \,;\, f(\underline{y}, g(u, y), x) \}$

Etape 2.

$\theta_1 = \theta_0 \circ [y/u] = \{ y/u \}$

$E_1 = E_{0\theta 1} = \{ f(u, \underline{v}, g(a, u)) \,;\, f(y, \underline{g(x, y)}, x)\}_{\theta 1} = \{ f(y, v, g(a, y)) \,;\, f(y, g(x, y), x)\}$

Etape 3.

$\theta_2 = \theta_1 \circ [g(x, y)/v] = \{ y_{[g(x,\, y)/v]}/u \} \cup \{ g(x, y)/v\} = \{ y/u, g(x, y)/v\}$

$E_2 = E_{1\theta 2} = \{ f(y, v, g(a, y)) \,;\, f(y, g(x, y), x)\}_{\theta 2} = \{ f(y, g(x, y), \underline{g(a, y)}) \,;\, f(y, g(x, y), \underline{x})\}$

Etape 4.

$\theta_3 = \theta_2 \circ [g(a, y)/x] = \{y_{[g(a,\, y)/x]}/u, g(x,y)_{[g(a,\, y)/x]}/v\} \cup \{ g(a, y)/x\} = \{y/u, g(g(a, y),y)/v, g(a, y)/x\}$

$E_3 = E_{2\theta 3} = \{ f(y, g(x, y), \underline{g(a, y)}) \,;\, f(y, g(x, y), \underline{x})\}_{\theta 3}$

$= \{ f(y, g(g(a, y), y), g(a, y)) \,;\, f(y, g(g(a, y), y), g(a, y))\} =$

Le MGU : $\{y/u, g(g(a, y),y)/v, g(a, y)/x\}$

La plus générale instance : $f(y, g(g(a, y), y), g(a, y))$

Exercice 2 (2, 2, 4)

On considère les formules suivantes :

$\beta : (\forall x\, \exists y\, P(x, y)) \wedge (\forall u\, \exists v\, \neg P(u, v))$

$\beta_{S1} : (\forall x\, P(x, f(x))) \wedge (\forall u\, \neg P(u, g(u)))$

$\beta_{S2} : \forall x \forall u\, (P(x, f(x)) \wedge \neg P(u, h(x,u)))$

1. β est satisfiable si et seulement si, il existe au moins une interprétation telle que :

$$I \models (\forall x\, \exists y\, P(x, y)) \wedge (\forall u\, \exists v\, \neg P(u, v))$$

$$\text{ssi } I \models (\forall x\, \exists y\, P(x, y) \text{ et } I \models \forall u\, \exists v\, \neg P(u, v)$$

$I \models (\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ ssi :

pour tout $d \in D_I$, il correspond au moins un élément $d' \in D_I$ tel que : $I(P)(d,d')$

et

$I \models \forall u\, \exists v\, \neg P(u, v)$ ssi :

pour tout $d \in D_I$, il correspond au moins un élément $d' \in D_I$ tel que : non$I(P)(d,d')$

L'interprétation I de domaine $D_I = N$ telle que $I(P) =$ ' > ' satisfait β :

Puisque pour tout $d \in N$, il correspond au moins un élément $d' \in D_I$ tel que : $d > d'$

et

pour tout $d \in D_I$, il correspond au moins un élément $d' \in D_I$ tel que : $d \leq d'$

2. L'interprétation J telle que :

$$D_J = N$$
$$J(P) = \text{'}\geq\text{'} \ (\text{non } J(P) = \text{'}<\text{'})$$
$$J(f)(d) = d$$
$$J(g)(d) = d + 1 \ ;$$
$$J(h)(d,d') = d + d'$$

satisfait β_{S1} et falsifie β_{S2}.

Nous avons en effet :

$d \geq d$ pour tout $d \in N$ et $d < d + 1$ pour tout $d \in N$ est une proposition vraie

mais

$d \geq d$ pour tout $d \in N$ et $d < d + d'$ pour tout d pour tout $d' \in D_J$ est une proposition fausse.

3. β_{S1} est satisfiable si et seulement si β_{S2} est satisfiable.

$\Rightarrow$) Si β_{S1} est satisfiable alors β_{S2} est satisfiable.

1. β_{S1} étant satisfiable, il existe au moins une interprétation (appelons là I) telle que :

$I \models (\forall x\, P(x, f(x))) \wedge (\forall u\, \neg P(u, g(u)))$

$I(P)(d, f(d))$ pour tout $d \in D_I$ et non $I(P)(d, I(g)(d))$ pour tout $d \in D_I$.

La même interprétation satisfierait β_{S2} si nous posons $I(h)(d,d') = I(g)(d')$

$\Rightarrow$) Si β_{S2} est satisfiable alors β_{S1} est satisfiable.

1. β_{S2} étant satisfiable, il existe au moins une interprétation (appelons là I) telle que :

$I \models (\forall x\, P(x, f(x))) \wedge (\forall u\, \neg P(u, h(x,u)))$

$I(P)(d, f(d))$ pour tout $d \in D_I$ et non $I(P)(d', I(h)(d,d'))$ pour tout d et pour tout $d' \in D_I$.

La même interprétation satisfierait β_{S1} si nous posons $I(g)(d') = I(h)(d,d')$.

Exercice 3 (3, 2, 3)

La proposition

$\forall x(\exists y\, R(x, y) \rightarrow R(x, f(y))),\ \forall x\, \exists y\, R(x, y),\ \exists x\, R(f(f(x)), x) \models \exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x))$

est valide si et seulement si :

β:$(\forall x(\exists y R(x,y) \rightarrow R(x,f(x)))) \wedge (\forall x \exists y R(x,y)) \wedge (\exists x R(f(f(x)),x)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)))$

est non satisfiable.

Etape 1.

On renomme les variables :

β : $(\forall u \forall v (R(u,v) \rightarrow R(u,f(u)))) \wedge (\forall w \exists s R(w,s)) \wedge (\exists t R(f(f(t)),t)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)))$

β : $(\forall u \forall v (R(u,v) \rightarrow R(u,f(u)))) \wedge (\forall w \exists s R(w,s)) \wedge (\exists t R(f(f(t)),t)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)))$

Etape 2. Forme normale prenexe.

On les quantifieurs.

β_P : $\exists t\, \forall w \exists s \forall u \forall v \forall x \forall y \forall z\, (R(u,v) \rightarrow R(u,f(u))) \wedge R(w,s) \wedge (R(f(f(t)),t)) \wedge ((\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)))$

β_P est logiquement équivalent à β. Par conséquent β est non satisfiable ssi β_P est non satisfiable.

Etape 3. Forme de Skolem.

β_{PS}: $\forall w \forall u \forall v \forall x \forall y \forall z\ (R(u,v) \rightarrow R(u,f(u))) \wedge R(w, g(w)) \wedge (R(f(f(a)),a)) \wedge ((\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)))$

Etape 4. Mise sous forme clausale.

C : $\{ \neg R(u,v) \vee R(u,f(u)),\ R(w, g(w)),\ R(f(f(a)),a),\ \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)\}$

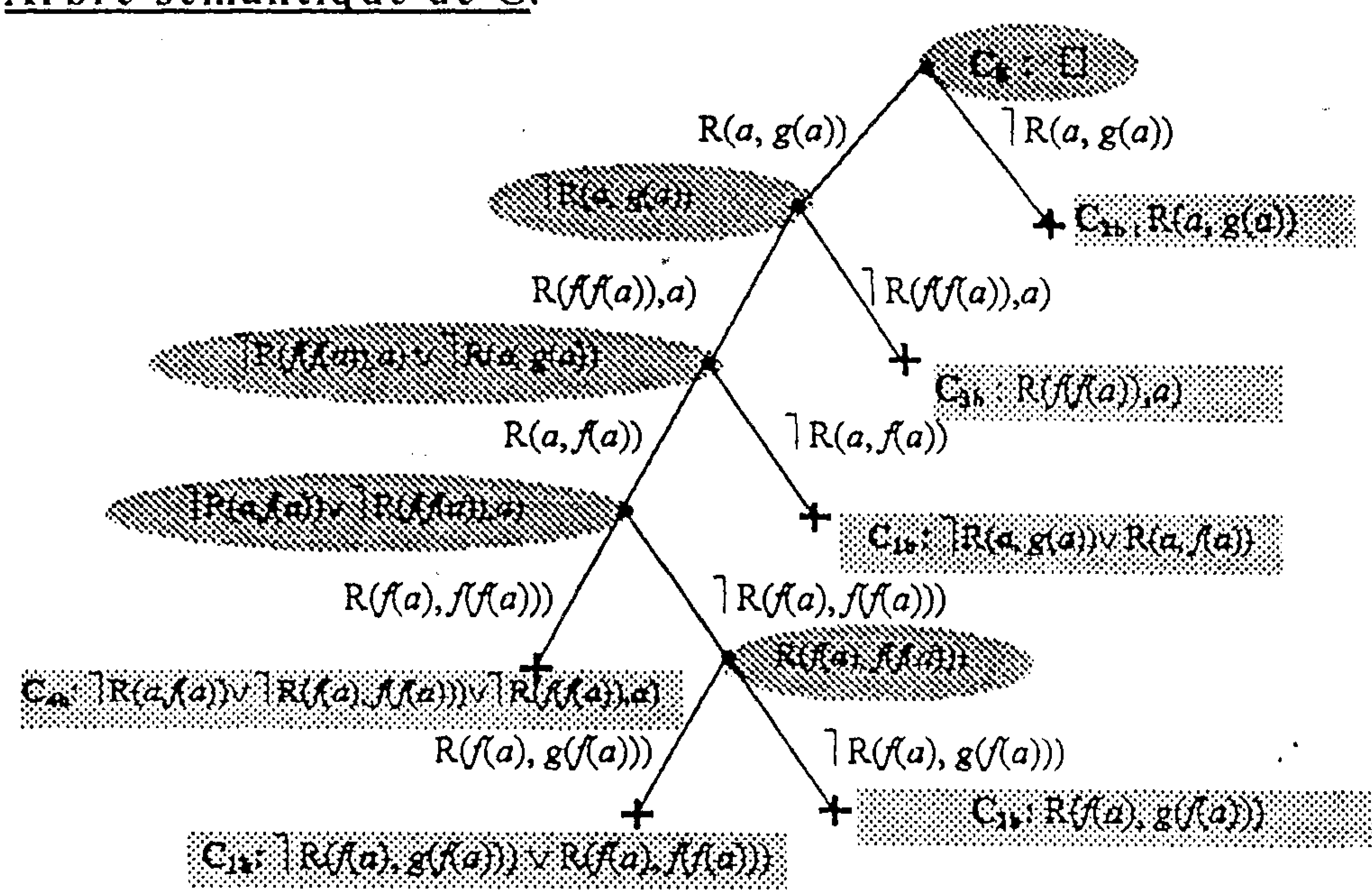
C_1 : $\neg R(u,v) \vee R(u,f(u))$

C_2 : $R(w, g(w))$

C_3 : $R(f(f(a)),a)$

C_4 : $\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee \neg R(z,x)$

Arbre sémantique de C.



Déduction de la clause vide à partir de C

C_1 : $\neg R(u,v) \vee R(u,f(u))$

C_2 : $R(w, g(w))$

C_3 : $R(f(f(a))\ a)$

C_4 : $\neg R(x,y) \vee \neg R(y, z) \vee \neg R(z,x)$

C'_1 : $\neg R(w, g(w)) \vee R(w,f(w))$ $\quad C_{1[w/u,\ g(w)/v]}$

C_5 : $R(w,f(w))$ $\quad$ Res (C'_1, C_2)

C'_4 : $\neg R(w,f(w)) \vee \neg R(f(w), z) \vee \neg R(z,w)$ $\quad C_{4[w/x,\ f(w)/y]}$

C_6 : $R(f(w), z) \vee \neg R(z,w)$ $\quad$ Res (C'_4, C_5)

C'_6 : $R(f(f(a)), a) \vee \neg R(a, f(a))$ $\quad C_{6[f(a)/w,\ a/z]}$

C_7 : $\neg R(a, f(a))$ $\quad$ Res (C_3, C'_6)

C'_5 : $R(a, f(a))$ $\quad C_{5[a/w]}$

C_8 : □ $\quad$ Res (C'_5, C_7)