Institut National d'Informatique — Dimanche 17 Mars 1996.

2ème Année Ingenieur.

EMD 2 de logiquemathématique.

Durée 2 heures

Exercice 1 (2, 6).

On se donne une théorie T' du premier ordre telle que:

- les connecteurs de T' sont: $\neg$, $\rightarrow$ et le quantifieur $\forall$;
- les axiomes de T' sont les axiomes A1, A2, A3, A4, et A5 de la théorie T vue en cours;
- les règles d'inférences de T' sont le modus ponens et la généralisation.

On considère que les axiomes (A6 et A7) de l'égalité s'appliquent **aux formules atomiques** de T'; i-e:

- $\forall x\,(x = x)$; **A6**
- $x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$. **A7** (P est un symbole de prédicat).

1. Donner les expressions de T'.
2. Montrer que T' est une théorie du premier ordre avec égalité.

Exercice 2 (3, 3)

Faire la déduction suivante:

$$\forall x\,(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \vdash \alpha$$

En déduire:

$$\vdash \forall x\,(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\forall x\neg\alpha$$

Exercice3 (3, 3)

On se donne la formule $\alpha 1$ telle que:

$\alpha 1$: $\forall x\,(y = f(z) \rightarrow z = x) \rightarrow (y = f(z) \rightarrow \forall x\,(z = x))$

1. Donner une formule $\alpha 2$ sous forme prenexe logiquement équivalente à $\alpha 1$.
2. Montrer que $\alpha 2$ est valide.

Nota

Est autorisée l'utilisation:

- du théorème de déduction;
- de la transitivité de l'implication, i-e $\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$;
- des théorèmes vus en cours.

Bon courage.

Institut National d'Informatique
Oued-Smar.

Mardi 21 Mars 1995.

EDM2 de Logique Mathématique.
Durée 2 heures.

Problème I ((2,2,2),2,2)

1) Montrer que les formules α, β et γ ne sont pas universellement valides:

α: $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y P(y,y)$

β: $\exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x P(x,x)$

γ: $\exists y P(x,y) \rightarrow P(x,x)$

2) Montrer que la formule δ est universellement valide:

δ: $\forall x P(x,y) \rightarrow P(y,y)$

3) t étant un terme et α une formule quelconque, en déduire à quelle condition, la formule

$$\forall x \alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$$

est universellement valide.

Problème II (1,3,3,3)

Soit L un langage du premier ordre contenant:

- les connecteurs $\rightarrow$ et $\rceil$ et le quantificateur universel $\forall$;
- deux symboles de prédicats monaires: P et Q;
- un symbole de constante: a;

On définit pour L l'interprétation S telle que:

- Domaine: l'ensemble des entiers naturels;
- S(P)(x): "x est impair";
- S(Q)(x): "x est la différence de deux carrés";
- S(a): 7.

1) Ecrire dans le langage L la phrase suivante:
Tout nombre naturel impair est la différence de deux carrés.
On supposera sans le démontrer que l'interprétation S est un modèle de la formule obtenue.

2) Utiliser le symbole $\models$ pour traduire la phrase suivante:
Tout nombre naturel impair est la différence de deux carrés, 7 est un nombre impair, donc 7 est la différence de deux carrés.

3) Soit Γ un ensemble de formules, et ψ une formule du premier ordre tels que: $\Gamma \models \psi$.
L'ensemble $\{\Gamma \cup \rceil\psi\}$ admet-il un modèle?

4) En déduire que si un nombre n'est pas égal à la différence de 2 carrés, il ne peut pas être impair.

Durée 2heures

Tout document interdit

Problème 1 (1, 3, 3, 3)

On considère le langage $L(\rceil, \wedge, \vee)$. A toute formule α de L, on fait correspondre la formule duale α^* définie comme suit :

$$P^* = P \qquad \text{(pour toute variable propositionnelle P)}$$
$$(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$$
$$(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$$
$$(\rceil\alpha)^* = \rceil\alpha^*$$

1. Donner l'ensemble des formules de L.
2. Montrer que : $\models \alpha$ *si et seulement si* $\models \rceil\alpha^*$.
3. Montrer que : $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ *si et seulement si* $\models \alpha^* \leftrightarrow \beta^*$.
4. Nous considérons ici, que $P^* = \rceil P$. Montrer dans ce cas que : $\models \alpha^* \leftrightarrow \rceil\alpha$.

Problème 2 (2.5, 2.5)

On considère Φ un ensemble consistant de formules d'un langage L. On définit l'ensemble Φ_n comme suit:

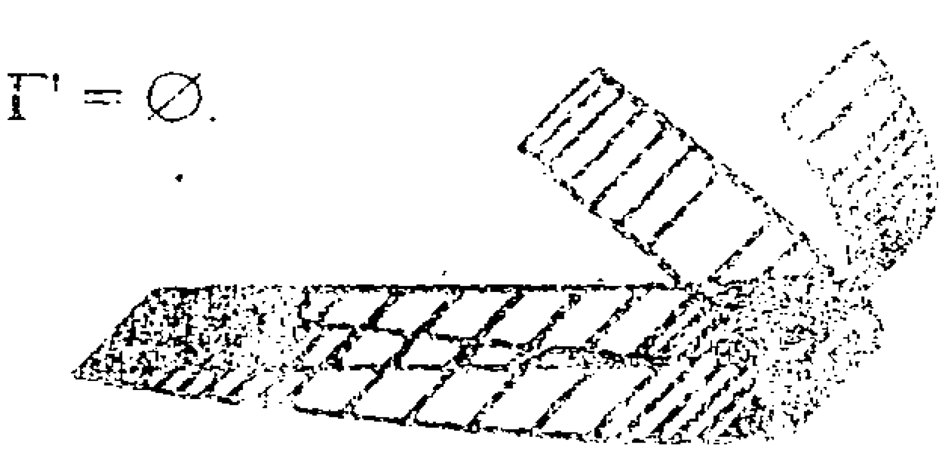
$$\Phi_0 = \Phi \qquad \Phi_{n+1} = \begin{cases} \Phi_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si } \Phi_n \vdash \alpha_n \text{ consistant} \\ \Phi_n & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que chaque ensemble Φ_i est consistant.
2. On pose $\Delta = \cup_{n \geq 0} \Phi_n$. Monter que Δ est consistant.

Problème 3 (2.5, 2.5).

On considère Γ et Γ' deux ensembles consistants de formules d'un langage L. On définit l'ensemble $\Delta = \{\alpha | \Gamma \vdash \alpha\}$ et l'ensemble $\Delta' = \{\alpha | \Gamma' \vdash \alpha\}$.

1. Montrer que $\Delta \cap \Delta'$ est consistant.
2. Montrer que *si* $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$ *alors* $\Gamma \cap \Gamma' = \varnothing$.



☞ Il sera tenu compte de la concision des réponses. Ne remettre qu'une double feuille et une intercalaire au plus.

Mai 1997

Institut National d'Informatique

$2^{\text{ième}}$ année ingénieur

Module de Logique Mathématique

Mercredi 07 Mai 1997.

EMD2 - Durée 2 heures.

Une formule α est sous forme normale prénexe si et seulement si :

- α ne contient pas de quantifieurs ,
- ou bien α est de la forme $Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ \beta$ où :
  - β est une formule ne contenant pas de quantifieurs ;
  - $Q_i \in \{\forall, \exists\}$;
  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent des variables distinctes ;
  - le champ de Q_nx_n est β.

$Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ est appelée le préfixe et β la matrice.

Exemples

$\rceil \forall x P(x,y) \rightarrow \exists x P(y,x)$ n'est pas sous forme prénexe. $\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow \rceil Q(y,x))$ est sous forme prénexe.

Etant donné un langage L du premier ordre, une formule α de L qui n'est pas sous forme prénexe se présente sous l'une des formes suivantes :

a. α est de la forme $\rceil \forall x \beta(x)$ ou $\rceil \exists x \beta(x)$;

b. α est de la forme $(Qx\ \beta_1) \circ \beta_2$ ou $\beta_1 \circ (Qx \beta_2)$

Où o désigne un connecteur binaire de L et β_1 et β_2 des formules quelconques de L.

Pour avoir la forme prénexe d'une formule, on utilisera les formules valides ci-dessous :

- $\models \rceil \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \rceil \alpha$
- $\models \rceil \exists x\ \alpha \leftrightarrow \forall x \rceil \alpha$
- $\models (\forall x\ \alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans β.
- $\models (\exists x\ \alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans β.
- $\models (\alpha \rightarrow \forall x\ \beta) \leftrightarrow \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans α.
- $\models (\alpha \rightarrow \exists x\ \beta)) \leftrightarrow \exists x\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans α.

Partie I. (3, 3, 3, 5, 2)

1) La formule suivante est-elle valide ?

$\not\models \beta_1 (\forall x\ P(x,y) \rightarrow \exists y P(x,y))$ (P est un symbole de prédicat binaire)

2) La formule β_1 est-elle satisfaisable ?

3) En utilisant les deux formules valides ci-dessous, trouver une formule β_2 logiquement équivalente à β_1, telle qu' aucune variable n'apparaîsse libre et liée en même temps dans β_2.

$\models \exists x \alpha(x) \leftrightarrow \exists y \alpha(y)$ $\models \forall x \alpha(x) \leftrightarrow \forall y \alpha(y)$

Conditions :y libre pour x dans α et y n'apparaît pas libre dans α.

4) Donner une formule β_3 sous forme prénexe telle que $\models \beta_3 \leftrightarrow \beta_2$.

5) Peut-on trouver d'autres formules sous forme prénexe logiquement équivalentes à β_2 ?

Partie II. (4 points)

Soit T' la théorie obtenue en enrichissant la théorie T vue en cours du quantifieur $\exists$, de la règle R telle que : $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ et des théorèmes suivants :

$\vdash Q_1x_1 Q_2x_2 \ldots Q_nx_n \rceil \forall x_{n+1} \alpha \rightarrow Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ \exists x_{n+1} \rceil \alpha$

$\vdash Q_1x_1 Q_2x_2 \ldots Q_nx_n \rceil \exists x_{n+1}\ \alpha \rightarrow Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ \forall x_{n+1} \rceil \alpha$

$\vdash Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ (\forall x_{n+1}\ \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow Q_1x_1 \ldots Q_nx_n \exists x_{n+1}\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans β.

$\vdash Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ (\exists x_{n+1}\ \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \forall x_{n+1}\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans β.

$\vdash Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ (\alpha \rightarrow \forall x\ \beta) \rightarrow Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \forall x_{n+1}\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans α.

$\vdash Q_1x_1 \ldots Q_nx_n(\alpha \rightarrow \exists x_{n+1}\ \beta) \rightarrow Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\ \exists x_{n+1}\ (\alpha \rightarrow \beta)$ x n'apparaît pas libre dans α.

Question : Déduire dans T' la forme prénexe de la formule $\gamma = \exists u\ P(u,x) \rightarrow \forall v P(v,y)$.

Durée 2heures

Tout document interdit

Problème 3 (1, 1, 4, 4, 1)

Au lieu de dire $\exists x\, P(x)$, on peut désigner l'objet présentant la propriété P par un symbole de constante a et dire que a possède la propriété P en écrivant plus simplement $P(a)$. Ainsi, dans la formule $\alpha_1 : \exists x(M(x) \wedge C(x, y))$ qui traduit la phrase "*Il existe x tel que x est marié et tel que x est le conjoint de y*", on peut désigner l'individu x qui vérifie $M(x)$ et $C(x, y)$ par un symbole de constante b et écrire :

$$\alpha'_1 : M(b) \wedge C(b, y)$$

Si le quantifieur $\exists$ est précédé de quantifieur(s) universel(s), on introduit un symbole de fonction.
Exemple :

$$\alpha_2 : \forall x\, (M(x) \rightarrow \exists y\, C(y,x)) \qquad \alpha'_2 : \forall x\, (M(x) \rightarrow C(f(x),x))$$

Cette opération s'appelle *Skolemisation*. Les formules α'_1 et α'_2 obtenues à l'issue de cette opération sont dites forme de Skolem de α_1 et α_2 respectivement.

De manière générale, pour obtenir la forme de Skolem d'une formule β, on procède pour chaque quantifieur existentiel qui apparaît dans β de la façon suivante :

Cas 1. Le quantifieur $\exists x$ ne se trouve pas dans le champ d'un quantifieur universel : supprimer $\exists x$ et substituer à chaque occurrence de x qui se trouve dans le champ de $\exists x$ un nouveau symbole de constante. ***Exemple :***

$\exists x \forall y\, (P(x) \rightarrow Q(y,x))$ donne $\forall y\, (P(a) \rightarrow Q(y,a))$ (où a est un symbole de constante).

Cas 2. Le quantifieur $\exists x$ apparaît dans le champ d'un ou de plusieurs quantifieurs universels :
- supprimer $\exists x$ et substituer à toutes les occurrences de x qui se trouvent dans le champ de $\exists x$ un terme formé d'un nouveau symbole de fonction appliqué aux variables quantifiées par les quantifieurs universels qui précèdent $\exists x$. *Exemple :* la forme de Skolem de la formule

$$\forall x \forall y \forall z\, \exists u (P(x,y,u) \rightarrow Q(z,u)) \text{ est}$$

$$\forall x \forall y \forall z\, (P(x,y, \underline{f(x,y,z)}) \rightarrow Q(z, \underline{f(x,y,z)}))$$

(a et f sont respectivement appelées constante *de Skolem* et *fonction de Skolem*).

Questions

1. Pourquoi ne pouvons-nous pas écrire $\forall x\, (M(x) \rightarrow C(b,x))$ dans la formule α'_2 ?
2. Quelle est la valeur retournée par la fonction f dans la formule α'_2 ?
3. Montrer que $\exists x\, P(x)$ n'est pas logiquement équivalente à $P(a)$.
4. Montrer que $\exists x\, P(x)$ est insatisfiable si et seulement si $P(a)$ est insatisfiable.
5. Donner la forme de Skolem de la formule $\forall x \forall y\, \exists u \exists v\, (P(x,u) \rightarrow Q(x, v))$.

Problème 2 (4,1,4)

Question1. Traduire dans le langage des prédicats du premier ordre les phrases suivantes :

p_1 : Pour tout x, y, et z, si x est le père de y alors si y est le père de z alors x est le grand-père de z.

p_2 : Toute personne a un père.

P_3 : Le père du père de z est le grand-père de z.

On désignera par β_1, β_2 et β_3 les formules obtenues.

Question2. Mettre sous forme de Skolem les formules contenant des quantifieurs existentiels. On désignera par β'_1, β'_2 et β'_3 les formules obtenues. (β'_i est la même que β_i si βi ne contient pas de quantifieur existentiel).

Question3. Déduire β'_3 de l'ensemble $\{\beta'_1, \beta'_2\}$.

☞ Il sera tenu compte de la concision des réponses. Ne remettre qu'une double feuille et une intercalaire au plus.