Corrigé de l'examen final **Analyse mathématique 3** **Janvier 2018**

Exercice 1 **(1,5+1,5+1)**

1. $U_n = Log\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$,

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}=0$, appliquons les DL:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2+\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2\varepsilon\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^2\right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}}_{v_n}\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}\varepsilon\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}_{w_n}. \end{aligned}$$

   On a $\sum\limits_{n\geq 1}v_n$ est cv car: $|v_n|$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=0$.

   $w_n \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n(n+1)}\sim\dfrac{1}{2n^2}>0$ et comme $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ est cv car série de riemann $2>1$ alors $\sum\limits_{n\geq 1}w_n$ est cv.

   $\sum\limits_{n\geq 1}v_n$ cv et $\sum\limits_{n\geq 1}w_n$ cv donc $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge.

2. Posons $f_1(x)=x^2y^4$ et $f_2(x)=e^x+y$ et $f_3(x)=2$.

   Les trois fonctions ci dessus admettent des dérivées partielles premières en tout point de $Df=\mathbb{R}^2$ alors

   $$Jac_{(x,y)}f=\begin{pmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ e^x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calcul de $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

   Méthode 1:

   $\lim\limits_{(x,y)\underset{y=\lambda x}{\longrightarrow}(0,0)}\dfrac{\lambda x^2}{x^2-\lambda^2x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\lambda x^2}{(1-\lambda^2)x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\lambda}{1-\lambda^2}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda^2}$ dépend de λ donc la fonction n'admet pas de limite en $(0,0)$.

   Méthode 2:

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2-y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ x=0}} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ y=2x}} \frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{2}{-3}$$

$\frac{2}{-3} \neq 0$ donc la fonction n'admet pas de limite en $(0,0)$.

<u>**Exercice 2**</u> **(0,5+0,5+2,25+1,25)**

$f(x) = \log\left(x^2-3x+2\right)$

1. $Df = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2-3x+2>0\right\}$
   $x^2-3x+2>0 \iff (x-1)(x-2)>0 \iff x>1$ ou $x>2$
   donc $Df =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$.
2. $f\,'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} \quad \forall x \in Df.$
3. $f\,'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \quad \forall x \in Df.$

   on a $\frac{1}{x-1} \quad = \quad -\frac{1}{1-x} \quad = -\sum_{n\geq 0} x^n \quad \forall x \in]-1,1[.$

   $$\frac{1}{x-2} \quad = \quad \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}} \quad = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \forall x \in]-2,2[.$$

   donc $\forall x \in]-1,1[\cap]-2,2[\cap Df =]-1,1[$

   $$f\,'(x) = -\sum_{n\geq 0} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

   $$f\,'(x) = \sum_{n\geq 0}\left(-x^n - \frac{1}{2^{n+1}}x^n\right) = \sum_{n\geq 0} -\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n \quad \forall x \in]-1,1[.$$

   Le rayon de cv R' de cette série:

   $1+\frac{1}{2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et le rayon de la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ est 1 donc $R'=1$.
4. $\int_0^x f\,'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x) - Log2$

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f'(t)\,dt &= \int_0^x \sum_{n\geq 0} -\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)t^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\int_0^x -\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)t^n dt \qquad \forall x\in\left]-1,1\right[. \\
&= \sum_{n\geq 0} -\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\int_0^x t^n dt \\
&= \sum_{n\geq 0} -\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{1}{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1} -\left(1+\frac{1}{2^{n}}\right)\frac{1}{n}x^{n} \qquad \forall x\in\left]-1,1\right[. \\
f(x)-Log2 &= \sum_{n\geq 1} -\left(1+\frac{1}{2^{n}}\right)\frac{1}{n}x^{n} \\
&= Log2+\sum_{n\geq 1} -\left(1+\frac{1}{2^{n}}\right)\frac{1}{n}x^{n} \quad \forall x\in\left]-1,1\right[
\end{aligned}
$$

$\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ donc $R=1$.

Exercice 3

1. Déterminer la série de Fourier associée à f. (2+0,5+1,5+0,5+1)

   (a) Calcul des coéfficients de Fourier:
   Comme f est continue sur $[-\pi,\pi]$ alors f est intégrable sur $[-\pi,\pi]$
   f étant paire alors $b_n = 0 \ \ \forall n$

$$
\begin{aligned}
\text{et } a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha-n)t+\cos(\alpha+n)\,tdt \\
&= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}+\frac{(-1)^n\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right) = \frac{2\alpha(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}
\end{aligned}
$$

   (b) La série de fourier associée à f :
   $$\mathcal{F}f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}a_n\cos(nx) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}+\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(\alpha^2-n^2)}\cos(nx).$$

   (c) Calculons la valeur de $\mathcal{F}f(x)$; pour cela appliquons Dirichlet:

Montrons que f est C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$:

- Sur $]-\pi,\pi[$: $f(x) = \cos(\alpha x)$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\pi,\pi[$.

- en -π : $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} -\alpha \sin(\alpha x) = -\alpha \sin(\alpha\pi) \in \mathbb{R}$.
- en π : $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} -\alpha \sin(\alpha x) = \alpha \sin(\alpha\pi) \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$.

  Conclusion: f est de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et donc d'après le corollaire de Dirichlet:

  $\mathcal{F}f(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  f étant continue sur $[-\pi, \pi]$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{F}f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2. Calcul de S_1

   on pose $x = 0$ dans $\mathcal{F}f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   on obtient $\mathcal{F}f(0) = f(0) \Longleftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \dfrac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^n}{(\alpha^2 - n^2)} \cos(n0) = 1 \Longleftrightarrow S_1 = \left(1 - \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha}\right) \dfrac{\pi}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}$.

3. Calcul de S_2

   on utilise l'égalité de parceval

   $S_2 = \dfrac{\pi^2}{4\alpha^2 \sin^2(\alpha\pi)} \left[1 + \dfrac{\sin(2\alpha\pi)}{2\alpha\pi} - \dfrac{2\sin^2(2\alpha\pi)}{\alpha^2\pi^2}\right]$.

Exercice 4 **(0,5+0,5+1+2+2)**

1. $Df = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 - xy \neq 0 \text{ et } (x, y) \neq (0, 0)\right\} \cup \{(0, 0)\}$

   $x^2 + y^2 - xy = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}y\right)^2 - \dfrac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = 0 \Longleftrightarrow x - \dfrac{1}{2}y = 0$ et $y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

   donc $Df = \left(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}\right) \cup \{(0, 0)\} = \mathbb{R}^2$.

2. $|xy| \leq \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2|xy| \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2|xy| \geq 0 \Longleftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0$ qui est vraie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. $|f(x, y)| = \left|\dfrac{x^p y^p}{x^2 + y^2 - xy}\right| = \dfrac{|x|^p |y|^p}{x^2 + y^2 - xy} = \dfrac{|xy|^p}{x^2 + y^2 - xy}$

   or $|xy| \leq \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \Longrightarrow |xy|^p \leq \dfrac{1}{2^p}\left(x^2 + y^2\right)^P \qquad (1)$

$$
\begin{aligned}
xy \leq |xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) &\implies \quad xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \\
&\implies -xy \geq \frac{-1}{2}\left(x^2+y^2\right) \\
&\implies x^2+y^2-xy \geq x^2+y^2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \\
&\implies x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \\
&\implies \frac{1}{x^2+y^2-xy} \leq \frac{2}{x^2+y^2} \text{.......} (2)
\end{aligned}
$$

de (1) et (2) on a

$\dfrac{|xy|^p}{x^2+y^2-xy} \leq \left(\dfrac{2}{x^2+y^2}\right)\left(\dfrac{1}{2^p}\left(x^2+y^2\right)^P\right) = \dfrac{1}{2^{p-1}}\left(x^2+y^2\right)^{P-1} = \dfrac{1}{2^{p-1}}\sqrt{x^2+y^2}^{2(p-1)}.$

4. $f(0,0)=0$

   (a) Si $p \geq 2$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{2^{p-1}}\sqrt{x^2+y^2}^{2(p-1)} = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$ par la technique de l'encadrement.
   donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$
   par conséquent f est continue en $(0,0)$.

   (b) $p \leq 1$
   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{x^{2p}}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^{2p-2} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p=1 \\ +\infty & \text{si} \quad p=0 \end{cases}$$
   donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$ donc pas de continuité en $(0,0)$.

5. Ia différentiabiIité en $(0,0)$

   (a) $p \leq 1$
   f n'est pas continue en $(0,0)$ donc f n'est pas différentiabIe en $(0,0)$.

   (b) Si $p \geq 2$
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ car f est symétrique.
   Si f était différentiable en $(0,0)$ alors $(h,k) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   on pose $\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$
   $|\varepsilon(h,k)| \leq \dfrac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \dfrac{1}{2^{p-1}}\sqrt{h^2+k^2}^{2(p-1)-1} = \dfrac{1}{2^{p-1}}\sqrt{h^2+k^2}^{2p-3}$

Comme $p \geq 2$ ars $2p - 3 \geq 1$ donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{1}{2^{p-1}} \sqrt{h^2 + k^2}^{2p-3} = 0$

donc $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} |\varepsilon\,(h,k)| = 0$

donc f est différentiable en $(0,0)$.