ESI
2016-2017

2CPI
ANA3

Controle intermédiaire
Durée 2H

Documents, Calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 6points

Les questions sont indépendantes

1. Etudier la nature de $\sum_{n\geq 1}\left(nLog\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Etudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2016}}{n!}$.

Exercice 2 5,5points

Soit la fonction $F(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ où $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^x}$ avec $x\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.
3. Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $]0,2]$. (Préciser, éventuellement, les intervalles de convergence uniforme.)
4. En déduire la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 3,5points

Les questions sont indépendantes:

1. Déterminer le rayon et la somme de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^n.$$
2. Déterminer le rayon de la série entière
$$\sum_{n\geq 0}(chn)x^n.$$
On rappelle que $chn=\frac{e^n+e^{-n}}{2}$.