INI. Math2. 2I.

Emd1. Janvier 2004.
Durée: 2H

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération.
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1:(8 points)
Soit la fonction f donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^2)}{(e^x-1)(e^y-1)} & \text{si } xy \neq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $\Delta = \{(x,y)/x = 0 \text{ ou } y = 0\}$
1) Etudier la continuité de la fonction f sur Δ.
2) Calculer les dérivées partielles sur Δ, lorsqu'elles existent.
3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2: (2.5 points)
Soit la relation donnée par $Arctg(xy) - e^{x+y} + 1 = 0$.
Montrer que celle-ci définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0,0)$ et former le DL1 de la fonction implicite au voisinage de 0.

Exercice 3: (5.5 points)
~~Soit la fonction f définie par :~~

$$f(x,y) = x^2y^3(x+2y-2)$$

Etudier les extrema de f

Exercice 4:(4 points)
Soit dans $\mathbb{R}^2$ le domaine D limité par les courbes d'équations:

$$y = -1; \; x = 1; \; y^2 = 2x+1; \; xy + y + x = 1.$$

1) Représenter géométriquement le domaine D.
2) Intervertir l'ordre d'intégration dans $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ où f est une fonction quelconque intégrable sur D.

Bon courage

emd/Math/ ...

Exo. 1 : 8 pts

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 y^2}{(e^x-1)(e^y-1)} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Posons $\Delta = \{(x,y) / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$

1) Continuité de f sur Δ : Soit $M \in \Delta$ $M = (a,0)$ ou $M = (0,a)$ / $a \in \mathbb{R}$

• Comme f est symétrique il suffira d'étudier la continuité en $(a,0)$

• $f(M) = 0$ a-t-on $\lim_{(x,y)\to M} f(x,y) = 0$?

Pour $(x,y) \neq M$, on a $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2y^2}{(e^x-1)(e^y-1)} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\lim_{\substack{(x,y)\to M \\ xy = 0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to M} 0 = 0$, il reste donc à voir si $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0) \\ xy\neq 0}} f(x,y) = 0$.

On a $\sin U \underset{0}{\sim} U$ et $e^U - 1 \underset{0}{\sim} U$ donc pour $(x,y) \in V(a,0)$ on a

$\sin x^2y^2 \underset{(a,0)}{\sim} x^2y^2$ et $e^y - 1 \underset{(a,0)}{\sim} y$

Cela donne $\dfrac{\sin x^2y^2}{(e^x-1)(e^y-1)} \underset{(a,0)}{\sim} \dfrac{x^2y^2}{(e^x-1)(y)} = \dfrac{x^2 y}{e^x - 1}$

1er cas : si $a = 0$ on aura $\dfrac{x^2 y}{e^x-1} \sim \dfrac{x^2 y}{x} = xy$

or $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x^2y^2}{(e^x-1)(e^y-1)} = 0$

2ème cas : si $a \neq 0$ dans ce cas $\lim_{(x,y)\to(a,0)} \dfrac{x^2y}{e^x-1} = \dfrac{a^2 \cdot 0}{e^a - 1} = 0$

i.e. $\lim_{(x,y)\to(a,0)} \dfrac{\sin x^2y^2}{(e^x-1)(e^y-1)} = 0$

ccl : $\forall a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$, i.e. f ct en $(a,0)$ $\forall a \in \mathbb{R}$

D'où f continue sur Δ.

Soit $M \in \Delta$, $M = (a,0)$ ou $M = (0,a)$ / $a \in \mathbb{R}$

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = ?$ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x,0) - f(a,0)}{x-a} = \lim_{x\to a} \dfrac{0-0}{x-a} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$ (0,5)

• $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = ?$ $\lim_{y\to 0} \dfrac{f(a,y) - f(a,0)}{y} = ?$

* si $a = 0$ $\lim_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (0,5)

* si $a \neq 0$ $\lim_{y\to 0} \dfrac{f(a,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \dfrac{\sin a^2 y^2}{y(e^a-1)(e^y-1)}$ (0,5)

$= \dfrac{a^2}{e^a-1} \lim_{y\to 0} \dfrac{y^2}{y^2} = \dfrac{a^2}{e^a-1}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \dfrac{a^2}{e^a-1}$

D'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \dfrac{a^2}{e^a-1}$, et par symétrie on a (0,5)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \dfrac{a^2}{e^a-1}$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$

3) Différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$:

• Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$: f est rapport de deux fcts de classe C^1, elle est donc de classe C^1 d'où f différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ (0,5)

• Sur Δ : Soit $M \in \Delta$, $M = (a,0)$ ou $M = (0,a)$

(0,5) Grâce à la symétrie, il suffira d'étudier le cas où $M = (a,0)$

* si f différentiable en $(a,0)$, on aura nécessairement $d_M f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)\,dy$

i.e. $d_M f(h) = \dfrac{a^2}{e^a-1} h_2$ (en posant $h = (h_1,h_2)$)

f différentiable en M ssi $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$ / $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{f(M+h) - f(M) - d_M f(h)}{\|h\|}$

On prendra $\|h\| = \|h\|_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ par exemple.

(1) 1er cas : $a = 0$ $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \begin{cases} \dfrac{\sin h_1^2 h_2^2}{(e^{h_1}-1)(e^{h_2}-1)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{si } h_1h_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } h_1 h_2 = 0 \end{cases}$

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}$$
$(h_1,h_2)\to(0,0)$, $h_1 h_2 = 0$

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1 h_2\neq 0}} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{\sin h_1^2 h_2^2}{(e^{h_1}-1)(e^{h_2}-1)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1 h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \quad \text{(par equivalence)} \quad 0{,}75$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta \quad (h_1 = r\cos\theta,\ h_2 = r\sin\theta)$$

$$= 0$$

d'où $\lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$, i.e. $\underline{f \text{ est différentiable en } (0,0)}$

cas : $a \neq 0$ (2)

$$\frac{f(a+h_1,h_1) - \frac{a^2}{e^a-1}h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \begin{cases} \dfrac{\frac{\sin(a+h_1)^2 h_2^2}{(e^{a+h_1}-1)(e^{h_2}-1)} - \frac{a^2}{e^a-1}h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{si } (a+h_1).h_2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } (a+h_1)h_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}\\ (a+h_1).h_2=0}} \varepsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} 0 = 0 \quad 0{,}25$$

$(a+h_1).h_2 \neq 0$, $\varepsilon(h_1,h_2) \underset{(0,0)}{\sim} \dfrac{(e^a-1)\sin((a+h_1)^2h_2^2) - a^2 h_2(e^{a+h_1}-1)(e^{h_2}-1)}{h_2.(e^a-1)^2.\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

$(a+h_1)^2 h_2^2 = (a+h_1)^2 h_2^2 + o((a+h_1)^2 h_2^2) = (a+h_1)^2 h_2^2 + o(h_2^2)$ (car $a+h_1 \xrightarrow[h\to 0]{} a$).

$(e^{a+h_1}-1)(e^{h_2}-1) = a^2 h_2 (h_2+o(h_2))(e^{a+h_1}-1) = a^2 h_2^2 (e^{a+h_1}-1) + o(h_2^2)$

$$\varepsilon(h_1,h_2) \sim \frac{h_2\left((e^a-1)(a+h_1)^2 - a^2(e^{a+h_1}-1)\right) + o(h_2)}{(e^a-1)^2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \quad 1{,}75$$

$\lim \dfrac{o(h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$ car $\dfrac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ bornée et $o(1) = 0$

$\lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \dfrac{h_2\left((a+h_1)^2(e^a-1) - a^2(e^{a+h_1}-1)\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$ car $\dfrac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^2}]{} 0$,

et $\lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} (e^a-1)(a+h_1)^2 - (e^{a+h_1}-1) = 0$.

d'où $\lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

différentiable en tout point et donc dans $\mathbb{R}^2$

- Soit la relation $f(x,y) = 0$ / $f(x,y) = \operatorname{Arctg} xy - e^{x+y} + 1$

1) Vérifions les conditions du thm des f^{ts} implicites au $v(0,0)$.

$\bullet$ $f(0,0) = 0$. $\bullet$ $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ donc $f \in C^1(V(0_{\mathbb{R}^2}))$ $\bullet$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2y^2} - e^{x+y}$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$

(1) D'après le thm on conclut qu'il existe un voisinage V de $0_{\mathbb{R}}$ et une fonction $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y$ telle que :

$\bullet$ $\varphi \in C^1(V)$ $\bullet$ $\varphi(0) = 0$ $\bullet$ $f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in V$. $\underline{\text{CQFD}}$

2) $\underline{DL_1 \text{ de } \varphi \text{ au } v(0)}$?

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ et comme $\varphi \in C^1(V)$, on a $a_0 = \varphi(0)$, $a_1 = \varphi'(0)$

1,5 et $\varphi(0) = 0$, et d'après le thm des fonctions implicites $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

pour tout $x \in V$ et en particulier en $x = 0$, on aura

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -1$$

D'où $\underline{\varphi(x) = x + o(x)}$

$\underline{\text{Exo 3}}$: (5.5 pts)

Soit f / $f(x,y) = x^2y^3(x+2y-2)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$\bullet$ $\underline{\text{Points critiques de } f}$: $f(x,y) = x^3y^3 + 2x^2y^4 - 2x^2y^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^3 + 4xy^4 - 4xy^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^3y^2 + 8x^2y^3 - 6x^2y^2$

Soit à résoudre le système S

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy^3(3x+4y-4) = 0 \\ x^2y^2(3x+8y-6) = 0 \end{cases}$$

1,1

$$\iff \begin{cases} x = 0, \text{ ou } y = 0, \text{ ou } 3x+4y-4 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ ou } 3x+8y-6 = 0 \end{cases}$$

$\iff (x=0)$ ou $(y=0)$ ou $(3x+4y-4 = 0$ et $3x+8y-6 = 0)$

$$\begin{cases} 3x+4y-4 = 0 \ (1) \\ 3x+8y-6 = 0 \ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+4y = 4 \ (1) \\ 4y = 2 \ (2)-(1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

Donc les points critiques sont $A = (2/3, 1/2)$, $B_\alpha = (\alpha, 0)$, $C_\beta = (0,\beta)$ / $\alpha,\beta \in$

Exo 4 (4 pts)

Soit D limité par les courbes : $y=-1$, $x=1$, $y^2=2x+1$, $xy+y+x=1$.

1) Représentation graphique :

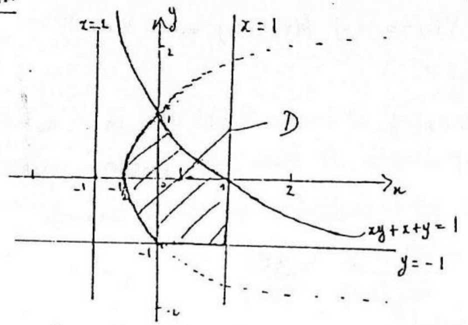
- $y^2=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y^2-1$ (Parabole renversée) ;
- $xy+x+y=1 \Leftrightarrow y(x+1)=1-x \Leftrightarrow y=\frac{1-x}{1+x}=\lambda(x)$ (hyperbole)

Variations de λ : $D_\lambda=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $x=-1$ est une asymptote verticale.

$\lim_{x\to\pm\infty}\lambda(x)=1 \Rightarrow y=1$ est une asymptote horizontale.

$\lambda'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2}<0$, d'où le tableau de variations suivant : (1,5)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\lambda(x)$	1	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1



L'hyperbole et la parabole se rencontrent en $(0,1)$, $(0,-1)$

. L'hyperbole et la droite $x=1$ se rencontrent en $(1,0)$

2) Interversion de l'ordre d'intégration :

•) Par rapport à x : Le domaine est régulier par rapport à x (1)

+ $[-1/2,1]$ est la projection de D sur l'axe des abcisses.

+ Pour $x\in[-1/2,1]$ $\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)$ / $\varphi_1(x)=\begin{cases}-\sqrt{2x+1} & -1/2\leq x\leq 0\\ -1 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$; $\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+1} & -\frac{1}{2}\leq x\leq 0\\ \frac{1-x}{1+x} & 0\leq x\leq 1\end{cases}$

D'où $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-1/2}^{1}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{-1/2}^{0}\left(\int_{-\sqrt{2x+1}}^{\sqrt{2x+1}}f(x,y)\,dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_{-1}^{\frac{1-x}{1+x}}f(x,y)\,dy\right)dx$

•) Par rapport à y : Le domaine est régulier par/à y (1,5)

+ $[-1,1]$ est la projection de D sur l'axe des ordonnées.

+ Pour $y\in[-1,1]$: $\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)$ / $\psi_1(y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}$, $\psi_2(y)=\begin{cases}\lambda^{-1}(y) & 0\leq y\leq 1\\ 1 & -1\leq y\leq 0\end{cases}$

λ^{-1} ? $xy+x+y=1 \Leftrightarrow x(y+1)=1-y \Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}=\lambda^{-1}(y)$

D'où $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(\int_{\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}}^{1}f(x,y)\,dx\right)dy+\int_0^1\left(\int_{\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}}^{\frac{1-y}{1+y}}f(x,y)\,dx\right)dy$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6xy^3+4y^4-4y^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=9x^2y^2+16xy^3-12xy^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\ldots$

+ En A : $r=4/9$; $s=4/3$; $t=8/9$

(0,5) $rt-s^2=\frac{1}{9}>0$, $r>0 \Rightarrow (A,f(A))$ n'est pas un minimum

Rmq : en B_α et C_β $rt-s^2=0$, on ne peut donc conclure leur nature.

+ en B_α : $f(B_\alpha)=0$, posons $h=(h_1,h_2)$

$f(B_\alpha+h)-f(B_\alpha)=f(\alpha+h_1,h_2)-f(B_\alpha)$

$=(\alpha+h_1)^2h_2^3(\alpha+h_1+2h_2-2)$

Signe $(f(B_\alpha+h)-f(B_\alpha))=$ Signe $(h_2\cdot(\alpha-2+h_1+2h_2))$ 0,5

$\lim_{(h_1,h_2)\to 0_{\mathbb{R}^2}}(\alpha-2+h_1+2h_2)=\alpha-2$ (1,5)

1er cas $\alpha\neq 2$ dans ce cas signe $(\alpha-2+h_1+2h_2)=$ signe $(\alpha-2)$ (signe constant)

$\therefore$ h_2 change de signe, donc $h_2(\alpha-2+h_1+2h_2)$ change de signe 0,5

D'où $f(B_\alpha+h)-f(B_\alpha))$ ne garde pas de signe cst

$(B_\alpha,f(B_\alpha))$ n'est donc pas un extremum

2ème cas $\alpha=2$ Signe$(f(B_\alpha+h)-f(B_\alpha))=$ Signe$(h_2(h_1+2h_2))=$ Signe$(h_1h_2+2h_2^2)$

en $h_1=0$: $h_1h_2+2h_2^2=2h_2^2>0$

en $(-3h_2,h_2)$: $h_2(h_1+2h_2)=-h_2^2<0$ 0,5

donc $f(B_2+h)-f(B_2)$ ne garde pas de signe cst

D'où $(B_\alpha,f(B_\alpha))$ n'est pas un extremum, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

+ en C_β : $f(C_\beta)=0$, $f(C_\beta+h)-f(C_\beta)=f(h_1,h_2+\beta)-f(C_\beta)=h_1^2(h_2+\beta)^3(h_1+2h_2+2\beta-2)$

$\Rightarrow$ Signe$(f(C_\beta+h)-f(C_\beta))=$ Signe $(h_2+\beta)(h_1+2h_2+2\beta-2)$ 0,5

1er cas : $\beta\neq 0$, $\beta\neq 1$; $h_2+\beta$ est du signe de β, $h_1+2h_2+2\beta-2$ est du signe de $2(\beta-1)$

donc Signe $f(C_\beta+h)-f(C_\beta)=$ Signe $\beta(\beta-1)\Rightarrow(C_\beta,f(C_\beta))$ est $\begin{cases}\text{max. si } \beta(\beta-1)<0\\ \text{min. si } \beta(\beta-1)>0\end{cases}$

rmq : $r=4\beta^3(\beta-1)$, $s=0$, $t=0$ $rt-s^2=0$ RAD

2ème cas : $\beta=0$; h_2 signe de signe h_1+2h_2-2 est du signe de -2

donc $(C_0,f(C_0))$ n'est pas un extremum

3ème cas : $\beta=1$ h_2+1 est de signe cst, h_1+2h_2 change de signe.

donc $(C_1,f(C_1))$ n'est pas un extremum

ccl : $(C_\beta,f(C_\beta))$ est un max. local pour $\beta\in]0,1[$ minimum local pour $\beta\in\ldots$

15