ESI, 2CPI | **Corrigé du contrôle Intermédiare** | **Avril 2022**

Analyse mathématique 4 | **Durée : 2h**

Exercice 1 (3,5 points) : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction $f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 4axy$.

1) Déterminer les points critiques de f.

2) En utilisant la Hessienne, donner la nature de ces points critiques.

Corrigé

1) $\boxed{\textbf{1,25 pt}}$ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition car c'est un polynome. Ainsi, $p \doteq (x,y)$ est un point critique de f alors il est solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4ay = 0, \\ 4y - 4ax = 0, \end{cases}$$

Donc, f admet 3 points critiques $M_1 = (0,0)$, $M_2 = (a,a^2)$ et $M_3 = (-a,-a^2)$.

2) $\boxed{\textbf{2,25 pt}}$ Nature des points critiques : Posons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4a \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

Utilisons la méthode de la Hessienne. On a :

$$Hess(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4a \\ -4a & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Hess(f)(M_1) = \begin{pmatrix} 0 & -4a \\ -4a & 4 \end{pmatrix},\ Hess(f)(M_2) = \begin{pmatrix} 12a^2 & -4a \\ -4a & 4 \end{pmatrix},$$

$$Hess(f)(M_3) = \begin{pmatrix} 12a^2 & -4a \\ -4a & 4 \end{pmatrix} = Hess(f)(M_2).$$

Point	La matrice $Hess(f)(M_i)$ est	Conclusion
M_1	$\Delta_1 < 0$ (inversible et indéfinie).	$(M_1, f(M_1))$ n'est pas un extréma.
M_2	$\Delta_2 > 0,\ tr_2 > 0$ (définie positive).	$(M_2, f(M_2))$ est un min local.
M_3	Même résultat que M_2.	$(M_3, f(M_3))$ estunminlocal.

Remarque : Accepter la méthode du discriminant.

Exercice 2 (4 points) : Soient

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z \quad \text{et} \quad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\}..$$

1) Soit $M = (1,-2,2)$, en utilisant la définition montrer que $(M,f(M))$ est un maximum lié pour f sur A.

2) En utilisant le lagrangien, determiner la valeur minimum de f sur A.

Corrigé : Tout d'abord posons $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9.$ On a $f,\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ car ce sont des polynômes.

1) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Il s'agira de voir le signe de $f(x,y,z) - f(1,-2,2)$ tel que $(x,y,z) \in A.$,
Pour revenir à l'origine faisons le changement $h_1 = x - 1,\ h_2 = y + 2,\ h_3 = z - 2$
et voyons alors le signe de

$$f(1 + h_1, -2 + h_2, 2 + h_3) - f(1,-2,2).$$

On a $f(1 + h_1, -2 + h_2, 2 + h_3) - f(1,-2,2) = h_1 - 2h_2 + 2h_3.$
Sans oublier que $(1 + h_1, -2 + h_2, 2 + h_3) \in A \Leftrightarrow (1 + h_1)^2 + (-2 + h_2)^2 + (2 + h_3)^2 = 9.$
Ce qui donne :$-2(h_1 - 2h_2 + 2h_3) = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2).$
Donc $f(M + H) - f(M) = \dfrac{-1}{2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \leq 0$ pour tout $H \in \mathbb{R}^3$ on en conclut que $(M,f(M))$ est un maximum lié pour f sur A.

2) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ L'ensemble A est un fermé borné et f est une fonction continue donc elle atteint ses bornes (ie f admet une valeur maximum et une valeur minimum)..
⇝ Recherche des points douteux, ce sont les $(x,y,z) \in A$ tq $\nabla\varphi(x,y,z) = (0,0,0).$

On résout le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$

$(0,0,0)$ est la seule solution, mais ce point ne vérifie pas la contrainte, en effet $\varphi(0,0,0) = -9 \neq 0$
⇝ A présent procédons par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.
Le lagrangien: $F(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$
Recherche des points critiques, ce sont les points (x,y,z) qui interviennent dans la résolution du système

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x + 1 = 0 \\ 2\lambda y - 2 = 0 \\ 2\lambda z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

On remarque que $\lambda \neq 0,$ donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ 4\lambda^2 = 1 \end{cases}$$

Pour $\lambda = \frac{-1}{2}$, on trouve le point $M = (1,-2,2)$ et pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on trouve le point $M' = (-1,2,-2)$.
Puisque f atteint ses bornes, elle admet donc une valeur maximum qui est $f(M)$ et une valeur minimum qui est $f(M')$ alors la valeur minimum demandée est
$f(M') = -1 - 4 - 4 = -9.$

Exercice 3 (4,5 points) : Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\exp(-t^2)}{t}\,dt & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Donner le domaine de définition de F, puis montrer que F est paire.

2) a) Montrer que

$$\forall x \in]0,+\infty[: \quad \log 2.\exp(-4x^2) \leq F(x) \leq \log 2.\exp(-x^2).$$

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

3) a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

4) Question bonus (+**0,5**): Tracer la courbe de F.

Corrigé :

1) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ $D_F = \mathbb{R}$. Montrons que $F(-x) = F(x)$ (on a bien sûr que $\forall x \in D_F$, $(-x) \in D_F$), en effet:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{\exp(-t^2)}{t}\,dt, \text{ posons } u = -t, \\ &= \int_x^{2x} \frac{\exp\left(-(-u)^2\right)}{-u}(-du) \\ &= \int_x^{2x} \frac{\exp(-u^2)}{u}\,du = F(x). \end{aligned}$$

2) a) $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ Soit $x \in]0,+\infty[$. Alors, $\forall t \in [x,2x]$:

$$\begin{aligned} &x^2 \leq t^2 \leq (2x)^2 \\ &\Leftrightarrow -4x^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Leftrightarrow \frac{\exp(-4x^2)}{t} \leq \frac{\exp(-t^2)}{t} \leq \frac{\exp(-x^2)}{t}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\int_x^{2x} \frac{\exp(-4x^2)}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\exp(-t^2)}{t}\,dt \leq \int_x^{2x} \frac{\exp(-x^2)}{t}\,dt,$$

on trouve

$$(\log 2).\exp(-4x^2) \leq F(x) \leq (\log 2).\exp(-x^2).$$

b) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Utilisons 2)a), Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(-4x^2) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-x^2) = 0,$$

alors $\lim_{x\to+\infty} (\log 2.\exp(-4x^2)) = \lim_{x\to+\infty} (\log 2.\exp(-x^2)) = 0$, par le théorème de l'encadrement (ou du gendarme), on obtient alors que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

3) **a**) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, posons

$$f(t,x) = \frac{\exp(-t^2)}{t},\ u(x) = x,\ v(x) = 2x \text{ et } \Delta =]0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

Utilisons le théorème de conservation de la dérivabilité des intégrales paramétrées propres

$$\begin{cases} 1)\ f \text{ et de classe } C^1 \text{ sur} \Delta \text{ car c'est la composée et le rapport de fcts } C^1, \\ 2)\ x \to u(x) \text{ et } x \to v(x) \text{ sont 2 applications dérivables sur }]0,+\infty[. \end{cases}$$

Alors la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par :

$F'(x) = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt + v'(x).f(v(x),x) - u'(x).f(u(x),x)$. On trouve:

$$\forall x \in]0,+\infty[\ :\ F'(x) = \frac{\exp(-4x^2) - \exp(-x^2)}{x}.$$

b) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Lorsque $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) \leq 0$, en effet

$$x^2 \leq 4x^2 \Leftrightarrow -4x^2 \leq -x^2 \Leftrightarrow \exp(-4x^2) \leq \exp(-x^2) \Leftrightarrow \exp(-4x^2) - \exp(-x^2) \leq 0.$$

Comme F est paire, on obtient son TV sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	$+$		$-$
F	$0 \nearrow$	$\log 2$	$\searrow 0$

4) Faire le graphe de F.← $\boxed{\text{Bonus } \mathbf{0{,}5\ pt}}$

Exercice 4 (5 points) : Considérons la fonction F défine par l'intégrale

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x + 1} dt$$

1) Montrer que F est bien définie pour $x > 1$ (Ne faites pas l'étude dans $]-\infty, 1]$).
2) Etudier la continuité de F dans $]1,+\infty[$.
3) Etudier la dérivabilité de F dans $]1,+\infty[$.

Corrigé : Posons $f(t,x) = \frac{1}{t^x + 1} \geq 0$ et $\Delta =]1,+\infty[\times]1,+\infty[$, $f \in R_{loc}([1,+\infty[)$ selon t.

F est une intégrale paramétre impropre $\boxed{\textbf{0,25 pt}}$ (elle pose problème au $v(+\infty)$ seulement).

1) $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$Il s'agit de montrer que l'intégrale converge pour $x > 1$:

$|f(t,x)| = \frac{1}{t^x + 1} \leq \frac{1}{t^x}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ est une intégrale de Riemann qui converge puisque $x > 1$.
On en conclut que F est bien définie sur $]1,+\infty[$.

2) $\boxed{\textbf{2 pts}}$ Etudions la continuité de F dans $]1,+\infty[$.
Pour cela appliquons le théorème de conservationde la continuité.

$$\begin{cases} i) \ f \text{ est continue sur } \Delta \text{ car c'est la composée de fonctions continues.} \\ ii) \ \text{Vérifions le critère de domination de } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x + 1} dt \text{ sur } [a,+\infty[, \ a > 1. \end{cases}$$

On a $|f(t,x)| \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{t^a} = \varphi(t)$ $\forall t > 1$, $\forall x \in [a,+\infty[$, $a > 1$ et $\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge (intégrale de Riemann).
On obtient alors: F vérifie le critère de convergence dominée sur tout $[a,+\infty[$, $a > 1$,
F est donc continue sur tout $[a,+\infty[$, $a > 1$.
Conclusion : F est continue sur $]1,+\infty[$.

3) $\boxed{\textbf{2,25 pts}}$Etudions la dérivabilité F dans $]1,+\infty[$.
Pour cela appliquons le théorème de conservation de la dérivabilité.

$$\begin{cases} i) \ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Delta \text{ car c'est la composée, somme et rapport de fonctions } C^1 . \\ ii) \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x + 1} dt \text{ converge sur }]1,+\infty[\text{ donc il existe } x_0 \in]1,+\infty[\text{ tq } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x_0} + 1} dt \text{ converge.} \\ iii) \ \text{Vérifions le critère de domination de } \int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt \text{ sur } [a,+\infty[, \ a > 1. \end{cases}$$

On a: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\dfrac{(\log t).\,t^x}{(t^x+1)^2}$.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| = \dfrac{(\log t).\,t^x}{t^{2x}+2t^x+1} \leq \dfrac{(\log t).\,t^x}{t^{2x}} = \dfrac{\log t}{t^x} \leq \dfrac{\log t}{t^a} = \psi(t),\ \forall t > 1,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ a > 1$ et

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^a}$ est une intégrale de Bertrand qui converge puisque $a > 1$.

On obtient alors : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ vérifie le critère de convergence dominée sur tout $[a,+\infty[,\ a > 1$.

De $i)$, $ii)$, $iii)$ on a que F est dérivable sur tout $[a,+\infty[,\ a > 1$.

Conclusion : F est dérivable sur $]1,+\infty[$.

Exercice 5 (3 points) : Les questions **I** et **II** sont indépendantes :

I] Soit la fonction f donnée par : $f(t) = \sqrt{t}$, est elle d'ordre exponentiel au $v(+\infty)$? Justifier votre réponse.

II] 1) Soit $f \in OE$, posons $\mathcal{L}(f(t)) = F(x)$. Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\forall\ x > \gamma_f$ on a :

$$\mathcal{L}(e^{at}.f(t)) = F(x-a)\ \forall x > a + \gamma_f.$$

2) Calculer $\mathcal{L}(e^t - 5t\cos(3t))$. On rappelle que :

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(x)$	Domaine de validité (D_F)
1	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$x > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{x^2 + a^2}$	$x > 0$
$\cos(at)$	$\frac{x}{x^2 + a^2}$	$x > 0$

Corrigé :

I. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ Oui f est exponentiel d'ordre 1 (par exemple), en effet :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t}.\sqrt{t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t+\frac{1}{2}\log t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t\left(\frac{-\log t}{2t}+1\right)}\right) = 0.$$

II. 1) $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$ On revient à la définition:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{at}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)t}f(t)dt = F(x-a),\ \forall (x-a) > \gamma_f,$$

ie $\mathcal{L}(e^{at}.f(t)) = F(x-a),\ \forall x > a + \gamma_f.$

2) $\boxed{\textbf{2 pts}}$ On a

$$\mathcal{L}(e^t - 5t\cos(3t)) = \mathcal{L}(e^t) - 5\mathcal{L}(t\cos(3t)) \text{ (linéarité).}$$

Posons $f(t) = 1,\ \mathcal{L}(e^t.f(t)) = F(x-1)$, $\forall x > 1 + \gamma_f$ (question 1), donc:

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{x-1}\ \forall x > 1.$$

D'autre part, posons $g(t) = \cos(3t),\ \mathcal{L}(t.g(t))(x) = -G'(x)$, $\forall x > \gamma_g$, donc:

$$\mathcal{L}(t\cos(3t)) = -\left(\frac{x}{x^2+9}\right)',\forall x > 0$$

$$= -\left(\frac{x^2+9-2x^2}{(x^2+9)^2}\right)\ \forall x > 0\ .$$

On en conclut: $\mathcal{L}(e^t - 5t\cos(3t)) = \dfrac{1}{x-1} + 5\dfrac{9-x^2}{(x^2+9)^2},\ \forall x > 1.$