2CPI

Contrôle final

Analyse mathématique 3

Durée : 2 heures

* Les documents et les téléphones portables sont interdits.
* Il sera tenu compte de la présentation et la clarté des réponses.

Séries de fonctions, séries entières et séries de Fourier

Exercice 1 (12 points) : Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 1 : Déterminer le domaine de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

Partie 2 : Montrer que la somme de la série de Fourier ayant comme coefficients

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2^n}, \ \forall n \geq 0, \\ b_n = 0, \ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π –périodique et continue (à déterminer).

Application : Déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{1}{5 - 4\cos x} dx$

Partie 3 : Soit la fonction 2π –périodique donnée par

$$f(x) = \cos(ax) \text{ si } x \in [-\pi, \pi] \text{ (avec } 0 < a < 1).$$

1) Développer f en série de Fourier.
2) Déduire la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$.

On rappelle que :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Les fonctions de plusieurs variables

Exercice 2 (8 points) : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Calculer les imites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{|x+y|}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0;0)} \frac{x\cos(y)}{|x|+|y|}.$$

Partie 2 : Soient les fonctions f et g données par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(y)+y^2\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } g(x,y) = \frac{x^2(x-y)\log(1+y)}{y}.$$

1) Déterminer les domaines de définition D_f et D_g.
2) Déduire le domaine de définition D_h où $h(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$.
2) Dire si $(0,0)$ est un point d'accumulation de D_h ou non.
3) Calculer $\lim_{(x,y)\to(0;0)} h(x,y)$ si elle existe.
4) Est-ce que f est continue en $(0,0)$? Justifier.
5) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Bon courage