E.S.I. 2CP ALG3 Contrôle intermédiaire 23 novembre 2022 Durée : **1h45**

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B : Le barême est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
Toute réponse doit être justifiée.

Rédiger l'exercice 1 sur un cahier d'examen.

Rédiger l'exercice 2 sur une double feuille.

Exercice 1 : (8,5 pt)

Soient $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $f \in End(\mathbb{R}^4)$ défini par:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t) \end{array}$$

I/ 1- Déterminer $A = M_B(f)$ la matrice de f relativement à la base B.

2- Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\ker f$.

3- $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

II/ Soit $C = (v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (1,-1,0,0), v_3 = (0,1,0,-1), v_4 = (-1,0,-1,1))$ une autre base de $\mathbb{R}^4$.

1- Déterminer P la matrice de passage de B vers C.

2- Calculer P^{-1}.

3- Déterminer les coordonnées du vecteurs (x,y,z,t) dans la base C.

4- Déterminer $A' = M_C(f)$ la matrice de f relativement à la base C.

Exercice 2 : (6,5 pt) Les parties I/ et II/ sont indépendantes.

I/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1- Déterminer la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sachant qu'elle est semblable à la matrice λI_n, puis calculer :

- Le rang de A.
- La matrice A^m où $m \in \mathbb{N}^*$.
- L'inverse de la matrice A dans le cas où elle est inversible.
- Le déterminant de la matrice A.

2- Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A^2 et B^2 ne sont pas nulles en même temps alors A et B ne sont pas semblables.

II/ Soient $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in End(\mathbb{R}^4)$ défini par:

$$\begin{array}{llll} u: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & (3x_1+2x_2+\alpha x_3+x_4, x_1+(\alpha-1)x_2+x_4, \alpha x_1+(\alpha+1)x_4, 2x_1) \end{array}$$

1- Quelle est la signature de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

2- Exprimer $\det u$ en fonction de $\det_B(u(e_3), u(e_2), u(e_4), u(e_1))$ puis calculer $\det u$.

3- Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme u est-il bijectif ?

Bon courage.