Ecole nationale Supérieure d'Informatique **Juin 201?**

2CPI

Concours 1?/1?
Partie Analyse

Exercice 1

Soit

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) \quad \text{où} \quad u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$$

1. Montrer que la série converge pour $x \geq 0$.

   On Posera

$$\text{pour} \quad x \geq 0 \quad F(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$$

2. Pour $x \geq 0$;

   (a) Etudier la continuité de F.

   (b) Montrer la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 0} u'_n(x)$, puis étudier la dérivabilité de F.

Exercice 2

Calculer le rayon et le domaine de convergence ainsi que la somme de la série entière suivante:

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) x^n$$

Corrigé

Exercice 1

1. La convergence de la série:

   On a

$$|u_n(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Rieman $2 > 1$
   donc $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et donc simplement sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$.

2.

   (a) Continuité de F :

      i. D'après la question 1, $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

      ii. $\forall n \quad u_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

      Conclusion: $\quad F$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) On a

$$u_n'(x) = (-1)^n(-2nx)\frac{e^{-nx^2}}{1+n^2} = (-1)^{n+1}2nx\frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}.$$

      i. La convergence normale de $\sum_{n\geq 0} u_n'(x)$: Appliquons la définition de la convergence normale;
      $\sum_{n\geq 0} u_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et ssi $\sum_{n\geq 0} \underset{x\in\mathbb{R}^+}{Sup} |u_n'(x)|$ est convergente.
      On a

$$|u_n'(x)| = 2nx\frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$$

      Calculons $\underset{x\in\mathbb{R}^+}{Sup} |u_n'(x)|$:
      On a

$$\underset{x\in\mathbb{R}^+}{Sup} |u_n'(x)| = 2\frac{n}{1+n^2}\underset{x\in\mathbb{R}^+}{Sup}\left|xe^{-nx^2}\right|$$

      Posons $g(x) = xe^{-nx^2}$
      On a

$$g'(x) = e^{-nx^2} + x(-2nx)e^{-nx^2} = e^{-nx^2}\left(1-2nx^2\right)$$

D'après le tableau de variation de g,

$$\underset{x\in\mathbb{R}^{+}}{Sup}\left|g\left(x\right)\right| = \left|g\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}}$$

donc

$$\underset{x\in\mathbb{R}^{+}}{Sup}\left|u_n'\left(x\right)\right| = 2\frac{n}{1+n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2n}}{1+n^2}e^{-\frac{1}{2}}$$

Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{\sqrt{2n}}{1+n^2}$:

On sait que

$$\frac{\sqrt{2n}}{1+n^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2n}}{n^2} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sum\limits_{n\geq 0}\underset{x\in\mathbb{R}^{+}}{Sup}\left|u_n'\left(x\right)\right|$ est convergente par conséquent $\sum\limits_{n\geq 0}u_n'\left(x\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+}$.

ii. Dérivabilité de F :

- $\forall n \ \ u_n$ et u_n' sont continues sur $\mathbb{R}^{+}$.
- $\sum\limits_{n\geq 0}u_n\left(x\right)$ converge sur $\mathbb{R}^{+}$.
- $\sum\limits_{n\geq 0}u_n'\left(x\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}^{+}$.

Conclusion: F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+}$ (en fait F est C^1 sur $\mathbb{R}^{+}$) de plus $F'\left(x\right) = \sum\limits_{n\geq 0}u_n'\left(x\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}^{+}$.

Exercice 2

$\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)x^n$.

1. Calcul du rayon R de la série:

   $a_n = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{+\infty}{\sim} 1 = b_n$, or la série $\sum\limits_{n \geq 0} b_n x^n$ a pour rayon 1 donc $R = 1$.

2. Calcul du domaine D de convergence de la série:

   Si $x = 1$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{n+1}{n+2}$ diverge car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1 \neq 0$.

   Si $x = -1$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{n+1}{n+2}(-1)^n$ diverge car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2}(-1)^n$ n'existe pas, donc $D =]-1, 1[$.

3. Calcul de la somme de la série:

   Remarque:

   Pour calculer la somme d'une série entière dont le coefficient apparait sous forme de fraction rationnelle, il faut toujours effectuer une division euclidienne. Soit vous l'effectuez explicitement, soit vous procédez comme pour cet exemple.

   $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) x^n = \left(\dfrac{n+2-1}{n+2}\right) x^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) x^n = x^n - \dfrac{x^n}{n+2}$;

   $\sum\limits_{n \geq 0} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) x^n = \sum\limits_{n \geq 0} x^n - \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{n+2} x^n \quad \forall x \in D$; car les deux séries ont un rayon de convergence égal à 1.

   (a) On a $\sum\limits_{n \geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1, 1[$.

   (b) On a

   $$\begin{aligned}
   \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2} x^n &= \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} x^{m-2} && \text{(On a posé } m = n+2\text{)} \\
   &= \frac{1}{x^2} \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} x^m && \\
   &= \frac{1}{x^2} \left[\left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} x^m \right) - \frac{1}{1} x \right] && \forall x \in]-1, 1[- \{0\} \\
   &= \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2} x^{n+2} && \forall x \in]-1, 1[- \{0\} \\
   &= \frac{1}{x^2} \left[-\log(1-x) - x \right] && \forall x \in]-1, 1[- \{0\}
   \end{aligned}$$

   .

   Conclusion:

$$S\left(x\right)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^{2}}\left[x+\log\left(1-x\right)\right]\quad\forall x\in\left]-1,1\right[-\left\{0\right\}.$$

$$S(0)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)0^{n}=\frac{1}{2}0^{0}=\frac{1}{2}.$$