Ecole supérieure en informatique
2ème Année CPI

Année 2016-2017
Logique mathématique
Durée: 02 h

Examen 1

Exercice 1. ⟦ ***2,5 pts*** ⟧

Soit $nv[F]$ *le nombre de variables propositionnelles distinctes dans* F. *Soit* $nc[F]$ *le nombre d'occurrences de connecteurs binaires dans* F. *Montrer par récurrence structurelle que pour toute formule* F *on a :*

$$\mathbf{nv[F] \leq nc[F] + 1}.$$

Exercice 2. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *Soit la formule à priorité*

$$\mathbf{F = x \wedge (y \vee z \Rightarrow \neg x) \Rightarrow y \Rightarrow \neg z}.$$

1. *Donner la forme complètement parenthésée de* F.
2. *Transformer la formule* F *en une somme de monômes(FND).*
3. *La formule* F *est-elle satisfaisable? La formule* F *est-elle valide ? Justifier.*
4. *Déduire que* $\{\mathbf{A}, \mathbf{B} \vee \mathbf{C} \Rightarrow \neg \mathbf{A}\} \models \mathbf{B} \Rightarrow \neg \mathbf{C}$ *pour toutes formules* A, B *et* C.

Exercice 3. ⟦ ***3 pts*** ⟧

1. *Soient* Γ *un ensemble de formules et* A *et* B *des formules. Montrer que*

$$\textbf{\textit{si}}\ \mathbf{\Gamma, A \models B}\ \textbf{\textit{et}}\ \mathbf{\Gamma, B \models A}\ \textbf{\textit{alors}}\ \mathbf{\Gamma \models A \Leftrightarrow B}.$$

2. *Soient* F *et* G *deux formules et* x *une variable qui ne figure pas dans* G. *Montrer que* $(\mathbf{F} \vee \neg \mathbf{x}) \wedge \mathbf{G}$ *est satisfaisable ssi* $\mathbf{G}$ *est satisfaisable.*

Exercice 4. ⟦ ***2,5 pts*** ⟧

1. *Transformer* $\neg F$ *en forme normale conjonctive où*

$$\mathbf{F = p \wedge (q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow s) \Rightarrow s \Rightarrow q}.$$

2. *En utilisant l'arbre sémantique, étudier la validité de* F.

Exercice 5. ⟦ ***3 pts*** ⟧

En utilisant la méthode de résolution, montrer que

$$\{\mathbf{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, a \vee \neg c}\} \models (\mathbf{a \wedge b \wedge c}) \vee (\neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{b} \wedge \neg \mathbf{c}).$$

⭐ **Exercice 6**. ⟦ ***4 pts*** ⟧ *Rappelons les résultats vus dans le cours: le système* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *est un système complet et le système* $\{0, 1, \Leftrightarrow, \neg\}$ *est incomplet.*

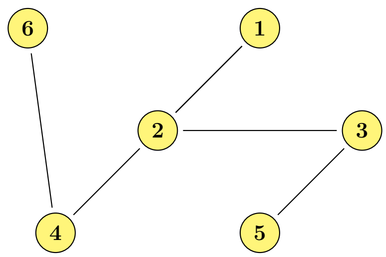
Le connecteur binaire ***ou exclusif*** *est défini par* $x \oplus y \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$.

1. *Que vaut* $0 \oplus 0$? *Déduire que le système* $\{\oplus\}$ *est incomplet.*

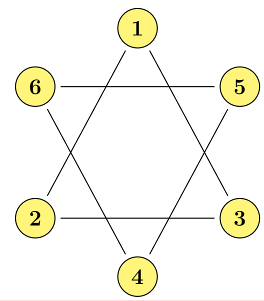
2. *Exprimer* $\neg x$ *et* $x \vee y$ *dans le système* $\{1, \wedge, \oplus\}$. *Que peut-on déduire?*

3. *Le système* $\{1, \wedge, \oplus\}$ *est-il minimal ? Justifier.*

⭐ **Exercice 7**. ⟦ ***3 pts*** ⟧ *Formalisez le problème de déterminer si un graphe non orienté avec n sommets est* ***connexe ou non*** *avec la logique propositionnelle.*



Graphe non orienté connexe



Graphe non orienté non connexe

PS.

- *Un graphe non orienté est caractérisé par l'ensemble de ses sommets et l'ensemble de ses arrêtes. Par exemple le graphe de gauche est donné par:* $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(6, 4), (2, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 5)\}\}$.

- *Un graphe non orienté est connexe si pour touts sommets a et b il existe une chaîne(chemin) entre a et b. (voir figures).*

Bon courage —— **Le barème est donné à titre indicatif**