ESI. 2018/2019. CP2. $\boxed{\textbf{Note: } \frac{\quad}{7}}$

Interro n°2 en ANA3. Sujet 3.
Durée 1h.

Soit la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $2\pi-$périodique impaire définie par :

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$

1) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f puis donner sa série de Fourier.

3) En déduire la somme des séries numériques suivantes:

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3};\ S_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6};\ S_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$$

Un corrigé:

1) Le graphe $\boxed{\text{0,5 point}}$

2) On remarque que la fonction est continue donc $\mathfrak{F}(f)$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ existe (on peut aussi dire qu'elle est localement intégrable).

2.1) Calcul des coefficients, comme f est impaire $a_n = 0\ \forall n \geq 0$ $\boxed{\text{0.25 point}}$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)\,dx \ \boxed{\text{0.25 point}}$$

On fait une 1ère IPP: $u = x(\pi - x)$; $du = (\pi - 2x)\,dx$ et $dv = \sin(nx)\,dx$; $v = \dfrac{-\cos(nx)}{n}$. $\boxed{\text{0.25 point}}$

$$b_n = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[x(\pi - x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx \ \boxed{\text{0.5 point}}$$

On fait une 2ème IPP: $u = (\pi - 2x)$; $du = -2dx$ et $dv = \cos(nx)\,dx$; $v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$. $\boxed{\text{0.25 point}}$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(\underbrace{\left[(\pi - 2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx \ \boxed{\text{0.25 point}}$$

$$b_n = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3\pi} \ \boxed{\text{0.25 point}}$$

2.2) La série de Fourier associée à f est :

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^3}\sin(nx) \ \boxed{\text{0.25 point}}$$

En fait $\dfrac{(1-(-1)^n)}{n^3} = \begin{cases} \dfrac{2}{(2k+1)^3} & \text{si } n = 2k+1,\ k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$, donc

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin((2k+1)x)$$

3) Calcul des sommes des séries.

Appliquons le corrollaire de Dirichlet $\boxed{0.25 \text{ point}}$ sur $[0, \pi]$, car elle est $2\pi-$périodique et impaire (le point $\dfrac{\pi}{2}$ suffit pour trouver S_1)

$\rightsquigarrow$ $f_{/]0,\pi[}(x) = x(\pi - x)$ est de classe C^1; $\lim\limits_{x \to 0^+} f'_{/]0,\pi[}(x) = \pi \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to \pi^-} f'_{/]0,\pi[}(x) = -\pi \in \mathbb{R}$ $\boxed{0.75 \text{ point}}$

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ et donc sur $[0, \pi]$ (et donc en $\dfrac{\pi}{2}$).

La série de Fourier $\mathfrak{F}(f)$ associée à f est égale à f sur $\mathbb{R}$ en particulier $\mathfrak{F}(f)(x) = \dfrac{8}{\pi} \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{(2k+1)^3} \sin((2k+1)x) = f(x);\ \forall x \in [0, \pi]$

$\underline{S_1}$: On a $\mathfrak{F}(f)(\dfrac{\pi}{2}) = f(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi^2}{4}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ ie

$$\frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \boxed{0.25 \text{ point}} \text{ ie } \frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^2}{4} \boxed{0.25 \text{ point}}$$

$$\Longrightarrow S_1 = \frac{\pi^3}{32} \boxed{0.25 \text{ point}}$$

$\underline{S_2}$: On utilise l'égalité de Parseval: $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) = \dfrac{1}{1} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

On remplace sachant que $a_n = 0$ et on obtient:

$$\frac{8^2}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 (\pi - x)^2 \, dx = 2 \int_0^{\pi} \left(\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4\right) dx = 2\pi^5 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \boxed{0.5 \text{ point}}$$

On aboutit: $S_2 = \dfrac{2\pi^7}{8^2} \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}\right)$. $\boxed{0.25 \text{ point}}$

$\underline{S_3}$: On a : $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^6} = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{(2k)^6} + \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{(2k+1)^6}$. $\boxed{0.5 \text{ point}}$ ie $S_3 = \dfrac{1}{2^6} S_3 + S_2$

On obtient: $S_3 = \left(\dfrac{2^6}{2^6 - 1}\right) S_2$. $\boxed{0.25 \text{ point}} = \dfrac{2\pi^7}{8^2} \left(\dfrac{2^6}{2^6 - 1}\right) \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}\right)$