Ecole nationale Supérieure d'Informatique

Novembre 2017

2CPI

Contrôle intermédiaire

Analyse mathématique 3

Durée : 2 heures

Documents, Calculatrices et Téléphones portables interdits.

Exercice 1 (5 points)

Etudier la nature des séries numériques suivantes:

1. $\sum_{n\geq 1} \left(\sin(\frac{a}{n}) - \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)$, a étant un paramètre réel.
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Exercice 2 (6 points)

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^n f_n$ où $f_n(x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$

1. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. La convergence de cette série est elle normale sur $\mathbb{R}$?
4. On pose $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (6 points)

On considére la série entière suivante: $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{(2n)!} + n5^n\right)x^n$.

1. Calculer son rayon et son domaine de convergence.
2. Calculer sa somme.

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction 2π périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,\pi] \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\pi,0[\end{cases}.$$

1. Tracer la courbe de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Déduire la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ pour $x \in [-\pi,\pi[$.

On rappelle que:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad shx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad chx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$

$\forall x \in]-1,1], \quad Log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$

$\forall x \in [-1,1], \quad Arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

$\forall x \in]-1,1[, \quad Argth(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$

Bonne chance à Tous