Examen 2

☆ **Exercice** **1**. ⟦ ***5 pts*** ⟧

Soit

$$F = \exists x\Big(\exists x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y, f(x,a)) \Rightarrow \exists x Q(x,y)\Big).$$

1. *Donner la signature associée à la formule F.*
2. *Donner l'arbre de structure syntaxique de F. F est-elle fermée? Justifier*
3. *Soit*

$$G = \exists x\Big(\exists y P(y) \vee \forall z R(g(z), x) \wedge \forall y Q(f(x,y), b)\Big)$$

Donner la forme clausale de l'ensemble $\{F, G\}$.

Réponse: **1.** $\Sigma = a^{f_0}, f^{f_2}, P^{r_1}, Q^{r_2}$.

2. La formule n'est pas fermée. La dernière occurance de y est libre.

3.

Pour la formule F

$$F \equiv \exists x\Big(\exists z P(z) \Rightarrow \exists w Q(w, f(x,a)) \Rightarrow \exists t Q(t,y)\Big)$$
$$\equiv \exists x \exists t \forall z \forall w\Big(P(z) \Rightarrow \Big(Q(w, f(x,a)) \Rightarrow Q(t,y)\Big)\Big)$$

Skolémisation

$$F_s = \forall z \forall w\Big(P(z) \Rightarrow \Big(Q(w, f(h_1(y),a)) \Rightarrow Q(h_2(y),y)\Big)\Big)$$

Les clauses de F :

$$C_1 = \neg P(z) \vee \neg Q(w, f(h_1(y),a)) \vee Q(h_2(y),y)$$

Pour la formule G

$$G \equiv \exists x\Big(\exists y P(y) \vee \forall z R(g(z), x) \wedge \forall w Q(f(x,w), b)\Big)$$
$$\equiv \exists x \exists y \forall z \forall w\Big(P(y) \vee \Big(R(g(z), x) \wedge Q(f(x,w), b)\Big)\Big)$$

Skolémisation

$$G_s = \Big(P(d) \vee \Big(R(g(z), c) \wedge Q(f(c, w), b)\Big)\Big)$$

Clauses de la formule G

$$C_2 = P(d) \vee R(g(z), c)$$

$$C_3 = P(d) \vee Q(f(c, w), b)$$

☆ **Exercice** **2**. ⟦ ***2 pts*** ⟧
Traduire dans le langage du calcul des prédicats les énoncés suivants.

1. *Les livres et les articles sont des documents.*
2. *Tout document est soit un livre soit un article.*
3. *Certains articles ne citent pas des livres.*
4. *Un document cité par deux articles ou plus est important.*

N.B *Utilisez en plus de l'égalité , les prédicats suivants:*
$A(x)$: *x est un article.* $L(x)$: *x est un livre.* $D(x)$: *x est un document.* $I(x)$: *x est important.* $C(x, y)$: *x est cité dans y.*

Réponse:

Solution

1. Les livres et les articles sont des documents.

$$\forall x\Big(L(x) \vee A(x) \Rightarrow D(x)\Big).$$

$$\forall x\Big(L(x) \Rightarrow D(x) \wedge A(x) \Rightarrow D(x)\Big).$$

2. Tout document est soit un livre soit un article.

$$\forall x\Big(D(x) \Rightarrow \big((L(x) \wedge \neg A(x)) \vee (\neg L(x) \wedge A(x))\big)\Big).$$

3. Certains articles ne citent pas des livres.

$$\exists x\Big(A(x) \wedge \neg\exists y(L(y) \wedge C(y, x))\Big)$$

4. Un document cité par deux articles ou plus est important.

$$\forall x\Big(D(x) \wedge \exists y\exists z(y \neq z \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge C(x, y) \wedge C(x, z)) \Rightarrow I(x)\Big)$$

☆ **Exercice** **3**. ⟦ ***3 pts*** ⟧ *En utilisant la résolution en calcul des prédicats, affirmer ou infirmer les énoncés suivants:*

1. $\exists x \forall y P(x,y) \vDash \forall y \exists x P(x,y)$.

2. $\forall y \exists x P(x,y) \vDash \exists x \forall y P(x,y)$.

Réponse:

1. On doit étudier la satisfaisabilité de $\{\exists x \forall y P(x,y), \neg \forall y \exists x P(x,y)\}$ La forme clausale est :

$C_1 :\ P(a,y)$

$C_2 :\ \neg P(x,b)$

$C_3 :\ \perp$ `Résolution` (C_1, C_2) `MGU`$\{x \to a; y \to b\}$.

Par le théorème de correction de la résolution, l'ensemble est contradictoire. L'énoncé 1 est confirmé.

2. On doit étudier la satisfaisabilité de $\{\forall y \exists x P(x,y), \neg \exists x \forall y P(x,y)\}$ La forme clausale est :

$C_1 :\ P(f(y),y)$

$C_2 :\ \neg P(x,g(x))$

La seule résolution qu'on peut faire est entre C_1 et C_2. L'algorithme d'unification retourne un echec. $(f(y),x);(y,g(x))$ Donc on doit poser $\{x \to f(y)\}$ Le problème maintenant est d'unifier $(y,g(f(y)))$. C'est impossible. Echec.

Par le théorème de complétude de la résolution, l'ensemble est satisfaisable. L'énoncé 1 est infirmé.

☆ Exercice 4. ⟦ *4 pts* ⟧

Soit l'ensemble des clauses suivant :

$$S = \{P(x, f(b)), \quad \neg R(x, a) \vee \neg Q(f(x)), \quad R(b, x) \vee \neg Q(y), \quad \neg P(a, y) \vee Q(y)\}.$$

1. *Donner H_0 et H_1 les univers de Herbrand de niveau 0 et 1.*

2. *Donner une défnition par induction de l'univers de herbrand H.*

3. *Etudier la satisfaisabilité de l'ensemble des clauses en utilisant l'arbre sémantique.*

Réponse:

1. $H_0 = \{a, b\}$. $H_1 = \{a, b, f(a), f(b)\}$.

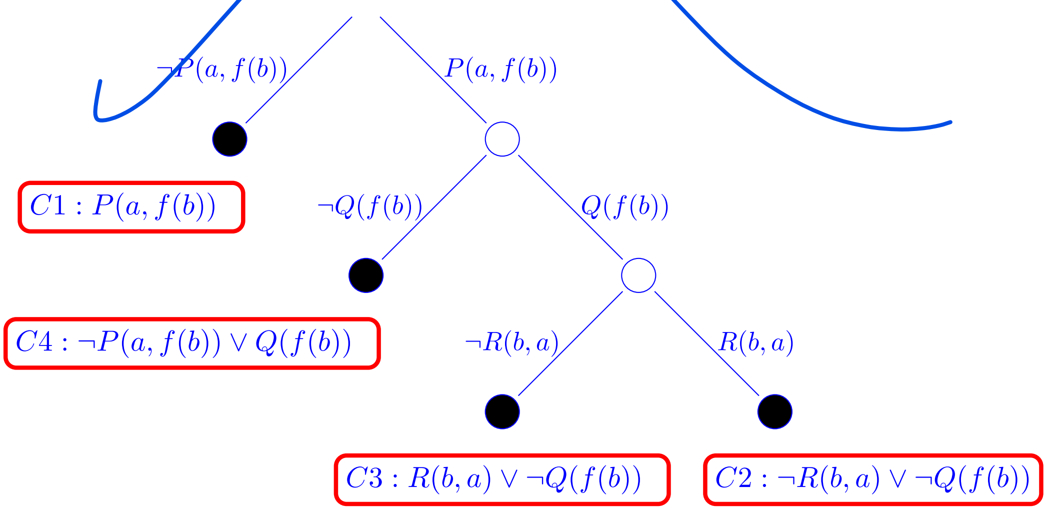
2. Définition par induction de H.

I. $a \in H$; $b \in H$

II. Si $t \in H$ alors $f(t) \in H$.

III. L'ensemble H est le plus petit ensemble vérifiant I et II.

3.



L'arbre sémantique est fermé donc l'ensemble des clauses est insatisfaisable.

☆ Exercice 5. ⟦ *3 pts* ⟧

En utilisant la résolution du calcul des prédicats par unification(Renommage+Factorisation+Résolution) montrer que l'ensemble de ces clauses est contradictoire.

C_1 : $P(a) \vee \neg Q(f(x)) \vee \neg Q(y)$

C_2 : $\neg P(y) \vee R(f(x), a)$

C_3 : $Q(x)$

C_4 : $\neg R(f(a), y) \vee \neg Q(a)$

Réponse:

C_1 :$P(a) \vee \neg Q(f(x)) \vee \neg Q(y)$
C_2 :$\neg P(y) \vee R(f(x), a)$
C_3 :$Q(x)$
C_4 :$\neg R(f(a), y) \vee \neg Q(a)$
C_5 :$P(a) \vee \neg Q(f(x))$:`Factorisation de` C_1 :$MGU = \{y \rightarrow f(x)\}$.
C_6 :$Q(z)$:`Renommage de` C_3 :$\{x \rightarrow z\}$.
C_7 :$P(a)$:`Résolution de` (C_5, C_6) :$MGU = \{z \rightarrow f(x)\}$
C_8 :$R(f(x), a)$:`Résolution de` (C_2, C_7) :$MGU = \{y \rightarrow a\}$
C_9 :$\neg R(f(a), y)$:`Résolution de` (C_3, C_4) :$MGU = \{x \rightarrow a\}$
C_{10} :$\perp$:`Résolution de` (C_8, C_9) :$MGU = \{y \rightarrow a, x \rightarrow a\}$

Exercice 6. ⟦ ***3 pts*** ⟧

1. *Donner les équations récursives qui définissent une fonction* `est-libre` *qui étant donné une formule du calcul des prédicats F, un terme t, une variable x renvoie* `Vrai` *si le terme t est libre pour x dans A et* `Faux` *sinon.*

Rappel.
Le terme t est libre pour x dans A si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x. Par exemple le terme z est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$. Par contre le terme y, comme tout terme comportant la variable y n'est pas libre pour x dans cette formule.

Réponse:
SI F est atomique : `est-libre`$(F, x, t) =$ `Vrai`.
`est-libre`$(F \alpha G, x, t) =$ `est-libre`(F, x, t) `ET` `est-libre`(G, x, t).
`est-libre`$(\neg F, x, t) =$ `est-libre`(F, x, t)
`est-libre`$(Qx\ F, x, t) =$ `Vrai`

$$\texttt{est-libre}(Qy\ F, x, t) = \begin{cases} \texttt{Faux} & \text{SI } y \in \mathcal{V}(t) \text{ ET } x \in \ell(F) \\ \texttt{est-libre}(F, x, t) & \text{Sinon} \end{cases}$$

$\alpha \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \}$. $Q \in \{\exists, \forall\}$. $\ell(F)$: les variables libres de F.

Bon courage — **Le barème est donné à titre indicatif**