Rattrapage

INI 2002-2003. ~~EMD2~~ de logique mathématique (2ième Année Ingénieur)

Durée 2 heures

Tout document interdit

(3, 2, 2) – (2, 3) – ((2, 2, 2, 1), 3)

Exercice 1

On considère la formule $\gamma : (\alpha_{[a/x]} \rightarrow \beta_{[b/y]}) \rightarrow (\exists x\alpha(x) \rightarrow \exists y\beta(y))$, où $\alpha_{[a/x]}$ est obtenue à partir de α en substituant à x en toutes ses occurrences libres la constante a et où $\beta_{[b/y]}$ est obtenue à partir de β en substituant à y en toutes ses occurrences libres la constante b.

1. γ est-elle valide ?

2. On considère l'instance γ_1 de γ telle que : $\gamma_1 : (P(a) \rightarrow Q(b)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists yQ(y))$. Si la réponse à la question 1 est non, γ_1 est-elle satisfiable ?

3. Si la réponse à la question 2 est oui, après en avoir rappelé la définition, donner un modèle de γ_1.

4. Vérifier la consistance de l'ensemble $\Gamma : \{P(a) \rightarrow Q(b), \exists xP(x), \forall y \neg Q(y)\}$.

5. Montrer : $\vdash (\alpha_{[a/x]} \rightarrow \beta_{[b/y]}) \rightarrow \exists x\, \exists y\, (\alpha(x) \rightarrow \beta(y))$

Exercice 2

Montrer sans utiliser la propriété de complétude :

1. $\vdash x = y \rightarrow f(x) = f(y)$

2. $\vdash f(x) = f(y) \rightarrow (P(f(x)) \rightarrow P(f(y)))$

3. En déduire que $\vdash x = y \rightarrow (P(f(x)) \rightarrow P(f(y)))$

Exercice 3.

Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations récursives. Montrer que les relations *non* $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1$ *ou* $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ *et* $\mathcal{R}_2$ sont aussi récursives.

En déduire que si f est récursive, alors $x = y \rightarrow f(x) = f(y)$ est récursive.

NB : Remettre une seule double feuille et une intercalaire au plus.

Corrigé Rattrapage log TI

2002 / 2003

Exercice 1

$\gamma : (\alpha_{[a|x]} \to \beta_{b|y}) \to (\exists x\, \alpha(x) \to \exists y\, \beta(y))$

1) On ne peut ni affirmer que γ est Valide, ni qu'elle est non Valide ; tout dépend de la structure des formules α et β.

Par exemple : si $\alpha : P(x) \vee \neg P(x)$ et $\beta : P(x) \vee \neg P(x)$

on a $I(\gamma)_v = V$ pour tout I et tout v.

si $\alpha : P(x)$ et $\beta : Q(x)$

γ n'est pas Valide.

2) Satisfiabilité de γ_1 :

$D = \mathbb{R}$; IP : "... est positif" (≥ 0) ; IQ : "... est négatif" (< 0)

$I(a) = 20$; $I(b) = 3$

- $I(\exists x\, P(x)) = V$ car $I(P(x))_{\sigma(x=5)} = V$ pour au moins $\sigma(x) = 5$.
- $I(\exists y\, Q(y)) = V$ car $I(Q)(-1) = V$ pour " " $v(y) = -1$.

d'où $I(\exists x\, P(x) \to \exists y\, Q(y)) = V$.

donc $I(\gamma_1) = V$.

3) 1 Modèle de γ_1 :

l'interprétation précédente est un modèle de γ_1.

(car pas d'occurrences libres de Variables).

4) $\Gamma = \{P(a) \to Q(b),\ \exists x\, P(x),\ \forall y \neg Q(y)\}$ est satisfiable

$D = \mathbb{N}$, IP : "... est pair"

IQ : "... est négatif strict" (< 0)

$I(a)=3$, $I(b)=6$

on a : $I(P(a))=F$ et $I(Q(b))=F$

d'où $I(P(a)\to Q(b))=V$.

et $I(\exists x P(x))=V$ car $I(P)(4)=V$.

et $I(\forall y \neg Q(y))=V$ car $I(\neg Q(y))_{v(y=d)}=V$ pour tout $d\in D$

d'où Γ est satisfiable.

5) $\overset{?}{\vdash} (\alpha_{[a|x]}\to \beta_{[b|y]})\to \exists x\,\exists y\,(\alpha(x)\to\beta(y))$

on a : $(\alpha_{[a|x]}\to \beta_{b|y})\to \exists x \exists y(\alpha(x)\to\beta(y))$

$\equiv(\alpha_{[a|x]}\to \beta_{[b|y]})\to \neg(\forall x\forall y\neg(\alpha(x)\to\beta(y)))$

x n'app pas libre ds β et y n'app pas libre ds α

1) $\forall x\forall y\neg(\alpha(x)\to\beta(y))\to\forall y\neg(\alpha_{[a|x]}\to\beta(y))$. A_4 car...

2) $\forall y\neg(\alpha_{[a|x]}\to\beta(y))\to\neg(\alpha_{[a|x]}\to\beta_{[b|y]})$. A_4 car...

3) $\forall x\forall y\neg(\alpha(x)\to\beta(y))\to\neg(\alpha_{[a|x]}\to\beta_{[b|y]})$ trans $(1,2)$

4) $\neg\neg(\alpha_{[a|x]}\to\beta_{[b|y]})\to\neg\forall x\forall y\neg(\alpha(x)\to\beta(y)$ (c.à.d : $\delta\to\eta\vdash\neg\eta\to\neg\delta$)

5) $(\alpha_{[a|x]}\to\beta_{[b|y]})\to\neg\neg(\alpha_{[a|x]}\to\beta_{[b|y]})$ car $\vdash\delta\to\neg\neg\delta$

6) $(\alpha_{[a|x]}\to\beta_{[b|y]})\to\neg\forall x\forall y\neg(\alpha(x)\to\beta(y))$. tran$(5,4)$

d'où le résultat.

Exercice 2

1) $\vdash x=y\to f(x)=f(y)$

α_1 : 1) $x=y\to(\overbrace{f(x)=f(x)}^{\alpha(x)}\to\overbrace{f(x)=f(y)}^{\alpha(y)})$ A_7

2) $\alpha_1\to((x=y\to f(x)=f(x))\to(x=y\to f(x)=f(y)))$ A_2

3) $(x=y \to f(x)=f(x)) \to (x=y \to f(x)=f(y))$ $\pi\rho(1,2)$

4) $\forall x\,(x=x)$ A_6.

5) $\forall x\,(x=x) \to (f(x)=f(x))$ A_4 car $f(x)$ est libre pour x ds $x=x$.

6) $f(x)=f(x)$ $\pi\rho(4,5)$.

7) $(f(x)=f(x)) \to (x=y \to f(x)=f(x))$ A_1

8) $x=y \to f(x)=f(x)$ $\pi\rho(6,7)$.

9) $x=y \to f(x)=f(y)$. $\pi\rho(3,8)$.

d'où le résultat.

2/ $\vdash f(x)=f(y) \to (P(f(x)) \to P(f(y)))$

α_1 1) $x=y \to (P(x) \to P(y))$ A_7.

2) $\forall x\,(x=y \to (P(x) \to P(y)))$ $R_G(1)$ car α_1 est 1 thm.

3) $\forall x\,(x=y \to (P(x) \to P(y))) \to (f(x)=y \to (P(f(x)) \to P(y)))$ A

car, $f(x)$ est libre pour x ds $x=y \to (P(x) \to P(y))$.

α_4: 4) $(f(x)=y) \to (P(f(x)) \to P(y))$ $\pi\rho(2,3)$.

5) $\forall y\, \alpha_4(y)$ $R_G(4)$ car $\vdash \alpha_4$

6) $\forall y\, \alpha_4(y) \to ((f(x)=f(y)) \to (P(f(x)) \to P(f(y))))$ A_4

car $f(y)$ est libre pour y ds α_4.

7) $f(x)=f(y) \to (P(f(x)) \to P(f(y)))$ $\pi\rho(5,6)$

d'où le résultat

3/ on a : 1) $x=y \to f(x)=f(y)$ thm (1/)

2) $f(x)=f(y) \to (P(f(x)) \to P(f(y)))$ thm(2/)

3) $x = y \Rightarrow (F(g(x)) \Rightarrow F(g(y)))$ [illegible] $(1,2)$

d'où le résultat

$sg(Car_{R_1}(x)) \neq 0 \Leftrightarrow Car_{R_1}(x) = 1 \Leftrightarrow$

Exercice 3

1) $$Car_{\text{non } R_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si non } R_1(x) \text{ est V} \Leftrightarrow R_1(x) = F \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= 1 \dot{-} Car_{R_1}(x).$$