Exercice 2 : (5 pt)
Soit, dans $\mathbb{R}$, le système (S_α) d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + z - t = \alpha \\ x + 2y - z - t = 1 \\ 3x + z - 3t = \alpha \end{cases} \qquad (S_\alpha)\ .$$

1- Déterminer la matrice principale, les équations principales et les inconnues principales du système (S_α).

Solution : On a :

$$(S_\alpha) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcul du rang de (S_α) : On échelonne la matrice du système (S_α).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(On a remplacé, u_2 par $u_1 + u_2$, u_3 par $u_3 - u_1$ et u_4 par $u_1 + u_4$.

On en déduit que $rg\,(S_\alpha) = 2$. **(1 pt)**

Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ le déterminant d'ordre 2 extrait de la matrice du système (S_α) en supprimant la dernière ligne et les deux dernières colonnes. On a $\Delta = 3 \neq 0$, on prend donc:

a/ $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme matrice principale du système (S_α). **(0.5 pt)**

b/ Les deux premières équations comme équations principales. **(0.25 pt)**

c/ Les inconnues x, y comme inconnues principales. **(0.25 pt)**

2- En déduire par le théorème de Rouché-Fontené une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le système (S_α) soit compatible (Préciser le(s) déterminant(s) bordant(s) le déterminant principal).

Solution : Il y a un déterminant bordant le déterminant principal donné par :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & \alpha \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

D'après le théorème de Rouché-Fontené, le système (S_α) est compatible si et seulement si $\Delta_3 = 0$. On a :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1-\alpha \\ 3 & 3 & -2\alpha \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 1 & -2\alpha \end{vmatrix} = -3\left(\alpha+1\right). \qquad \textbf{(0.75 pt)}$$

D'où : le système (S_α) est compatible si et seulement $\alpha = -1$. **(0.5 pt)**

3- Résoudre le système (S_α) dans le cas où il est compatible.
Solution : Il suffit de résoudre les équations principales, on a :

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+z-t=-1 \\ x+2y-z-t=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y=-1-z+t \\ x+2y=1+z+t \end{array}\right., \text{(On retranche la 1ère équation de la 2ème équation)}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y=-1-z+t \\ 3y=2+2z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}z+t \\ y=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}z \end{array}\right. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

On en déduit que l'ensemble des solution du système (S_α) est $\left\{\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}z+t, \frac{2}{3}+\frac{2}{3}z, z, t\right),\ z,t\in\mathbb{R}\right\}$. **(0.25 pt)**

Exercice 3 : (15 pt) Les deux parties suivantes sont indépendantes
Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique $C = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ -1 & \alpha+1 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

On admet que : $P_u(X) = (1-X)(\alpha-X)^2$.
Partie 1 :
1- En utilisant le polynôme caractéristique de u, donner $\det A$.

Solution : On a

$$P_u(X) = (1-X)(\alpha-X)^2 = -X^3 + (2\alpha+1)X^2 - \left(\alpha^2+2\alpha\right)X + \alpha^2$$

et $\det A$ est égal au coefficient constant de $P_u(X)$, donc $\det A = \alpha^2$ (ou bien, $\det A = P_u(0) = \alpha^2$). **(0.5 pt)**
2- En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Solution : On a : A est inversible ssi $\det A \neq 0$ ssi $\alpha \neq 0$. **(0.5 pt)**

3- Dans le cas où la matrice A est inversible, utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour exprimer A^{-1} en fonction de A (il n'est pas demandé de calculer A^{-1}).

Solution : D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$P_A(A) = 0 \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

avec

$$P_A(X) = -X^3 + (2\alpha+1)X^2 - \left(\alpha^2+2\alpha\right)X + \alpha^2,$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}
P_A(A) = 0 &\Longleftrightarrow -A^3 + (2\alpha+1)A^2 - \left(\alpha^2+2\alpha\right)A + \alpha^2 I_3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow -A^3 + (2\alpha+1)A^2 - \left(\alpha^2+2\alpha\right)A = -\alpha^2 I_3 \\
&\Longleftrightarrow A\left[\frac{1}{\alpha^2}A^2 - \frac{(2\alpha+1)}{\alpha^2}A + \frac{(\alpha+2)}{\alpha}I_3\right] = I_3.
\end{aligned}$$

D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2}A^2 - \frac{(2\alpha+1)}{\alpha^2}A + \frac{(\alpha+2)}{\alpha}I_3. \qquad \textbf{(1.5 pt)}$$

Partie 2 :

1- Montrer que l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable pour tout $\alpha \neq 1$.

Solution : Les valeurs propres de u (ou de A) sont 1 de multiplicité 1 (car $\alpha \neq 1$) et α de multiplicité 2, donc :

$$A \text{ est diagonalisable ssi } \dim E_\alpha = 2 \text{ ssi } rg(A - \alpha I_3) = 1. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

On a :

$$\begin{aligned}
A - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{(colonne 1 + colonne 2)} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha-1 & 0 & 1 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(colonne 1 + } \alpha \text{ colonne 3)} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{(permutation de colonnes).}
\end{aligned}$$

Comme $\alpha \neq 1$, on déduit que $rg(A - \alpha I_3) = 2 \neq 1$, donc u n'est pas diagonalisable.**(1 pt)**

Remarque : On peut aussi procéder comme suit :

Comme α est une valeur propre donc $rg(A - \alpha I_3) \leq 2$, or $A - \alpha I_3$ admet un déterminant extrait d'ordre 2 non nul, celui obtenu en supprimant la 1ère colonne et la dernière ligne $\left(\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1 \neq 0\right)$, on en conclut $rg(A - \alpha I_3) = 2$.

2- Déterminer les espaces propres E_1 et E_α.
Solution : D'après l'échelonnement précédent, on a

$$E_\alpha = \langle e_1 + e_2 \rangle = \langle (1,1,0) \rangle . \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Pour la deuxième valeur propre, on échelonne la matrice $A - I_3$. On a :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 1-\alpha & \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 1-\alpha & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ colonne 1 + colonne 3.}$$

Comme 1 est une valeur propre simple, on déduit que

$$E_1 = \langle e_1 + e_3 \rangle = \langle (1,0,1) \rangle . \qquad \textbf{(1 pt)}$$

3- Déterminer v_1 et v_2, deux vecteurs propres associés, respectivement, aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \alpha$ ayant chacun d'eux le nombre 1 à la première composante.

Solution : D'après la question précédente, on a :

$$v_1 = (1,0,1) \text{ et } v_2 = (1,1,0). \qquad \textbf{(0.25 pt) + (0.25 pt)}$$

4- Déterminer un vecteur v_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que $u(v_3) = v_2 + \alpha v_3$ (choisir v_3 celui ayant le nombre 1 à la première composante).
Solution : Posons $v_3 = (x, y, z)$, on a :

$$\begin{aligned} u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 &\Longleftrightarrow \left(u - \alpha id_{\mathbb{R}^3}\right)(v_3) = v_2 \\ &\Longleftrightarrow (A - \alpha I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ (1-\alpha)\, x + (\alpha - 1)\, y = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}, \end{aligned}$$

D'où, on choisit $v_3 = (1,1,1)$. **(1 pt)**

5- Montrer que $C' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Solution : Puisque $Card(C') = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors il suffit de montrer que la famille C' est libre. On a :

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 - v_1 & v_3 - v_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}.$$

On en déduit que $C' = (v_1, v_2, v_3)$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**

6- Déterminer la matrice $A^{'}$ associée à u relativement à la base $C^{'}$.

Solution : On a par définition :

$$A' = M_{C'}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(v_1) & u(v_2) & u(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

7- Déterminer une matrice inversible P vérifiant : $A^{'} = P^{-1}AP$.
Solution : La matrice P est la matrice de passage de la base C à la base C'. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

8- Ecrire la matrice $A^{'}$ comme somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N.

Solution : On a : $A' = D + N$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \ \textbf{(0.25 pt)} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.25 pt)}.$$

La matrice N est bien nilpotente puisque $N^2 = 0$. **(0.5 pt)**

9- En déduire $\left(A^{'}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : On a :

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

et

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(0.25 pt)}$$

on en déduit que $DN = ND$, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
(A')^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} N^k \quad \textbf{(0.5 pt)} \\
&= D^n I_3 + n D^{n-1} N \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$

10- En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les implications suivantes :

$$A' = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PA'P^{-1} \Longrightarrow A^n = P\,(A')^n\,P^{-1}. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Calcul de P^{-1} : on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 = e_1 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 \\ v_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e_2 = v_3 - v_1 \\ e_3 = v_3 - v_2 \\ e_1 = v_1 + v_2 - v_3 \end{array} \right.$$

d'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

et

$$\begin{aligned}
A^n &= P\,(A')^n\,P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - n\alpha^{n-1} & n\alpha^{n-1} + \alpha^n - 1 & n\alpha^{n-1} \\ -n\alpha^{n-1} & n\alpha^{n-1} + \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 1 - \alpha^n & \alpha^n - 1 & \alpha^n \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 pt)}
\end{aligned}$$