ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'INFORMATIQUE

	Contrôle Final	**Juillet 2021**
2CPI	**Analyse mathématique 4**	**Durée : 2 heures**

- Les documents, les calculatrices et les téléphones sont interdits.

EXERCICE 1 (5 points) :

Partie A : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et d'ordre ρ exponentiel à l'infini. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))(x) = \mathcal{L}(f(t))(x-\alpha), \forall x > \rho + \alpha.$$

Partie B :

1) Calculer $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}\right)$.

2) Trouver les constantes a, b, c et d telles que

$$\frac{x-1}{(x^2-2x+2)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

3) Résoudre

$$\begin{cases} y''+y = e^t \cos t, & t \geq 0, \\ y'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Transformée de Laplace de quelques fonctions élémentaires

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(x)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(x)$
1	$t^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{x^{n+1}} \quad x > 0$		$cos(at)$	$\dfrac{x}{x^2+a^2} \quad x > 0$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{x-a} \quad x > a$		$sh(at)$	$\dfrac{a}{x^2-a^2} \quad x > \lvert a\rvert$
3	$sin(at)$	$\dfrac{a}{x^2+a^2} \quad x > 0$		$ch(at)$	$\dfrac{x}{x^2-a^2} \quad x > \lvert a\rvert$

EXERCICE 2 (7.5 points) : Soient $a > 0$, $b > 0$ et les fonctions

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{2a} & \text{si } t \in [-2a, 2a], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-2b, 2b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer $\mathcal{F}(f)$.

2) Sachant que $1-\cos(2ax) = 2\sin^2(ax)$, déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(ax)}{x^4}dx$.

3) Calculer $\mathcal{F}(g * g)$.

4) Prenons $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$. Sachant que $g * g$ est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, déduire une expression explicite de $g * g$ à l'aide de celle de f.

EXERCICE 3 (4.5 points) : Soit dans $\mathbb{R}^2$ le domaine D limité par les courbes d'équations :

$$x = -1; \quad y = -x^2 + 2; \quad y = -2x - 2; \quad y = -2.$$

1) Représenter géométriquement le domaine D.
2) Compléter $D = D_1 \cup D_2$ (avec $Air(D_1 \cap D_2) = 0$), où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \ldots \le x \le \ldots, \; -2x - 2 \le y \le -x^2 + 2\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 2, \; \ldots \le y \le \ldots\right\}.$$

3) Compléter $D = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_3$ (avec $Air(D'_1 \cap D'_2) = 0$ et $Air(D'_2 \cap D'_3) = 0$), où

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \le y \le 0, \; \ldots \le x \le \ldots\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \ldots \le y \le \ldots, \; -1 \le x \le \sqrt{2-y}\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \ldots \le y \le 2, \; -\sqrt{2-y} \le x \le \ldots\right\}.$$

4) Calculer l'aire de D.

EXERCICE 4 (3 points): Soit

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \le z \le 1 - (x^2 + y^2)\right\}.$$

Calculer $I = \iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz.$

Bon courage