I– Quelques exercices donnés aux examens , avec corrigé.

Exercice 1:.(Rattrapage2, 2000/2001)

Soit la fonction numérique définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^y-1}{\log(1+x)} & \text{si} \quad x\neq 0.\\ \quad y \quad \text{si} & x=0.\end{cases}$$

1) Trouver le domaine de définition D de f puis étudier sa continuité sur D.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles de premier ordre sur la droite $\{x=0\}$.
3) Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Corrigé:
1) $f(x,y)$ est défini ssi $1+x>0$,i.e. $Df=\left]-\infty,1\right[\times\mathbb{R}$.
Concernant la Continuité: notons par Δ la droite $\{x=0\}$; ie $\Delta=\{(0,b)\ /\ b\in\mathbb{R}\}$.
* Sur $Df\setminus\Delta$: la fonction f est rapport, composée, somme de fonctions de classe C^∞, elle est donc C^∞ aussi.
* Sur Δ : Soit $M=(0,b)$ un point de Δ, $f(M)=b$, a-t-on $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}f(x,y)=b$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)}f(x,y)=\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)_{x\neq 0}}\dfrac{\exp(y\log(1+x))-1}{\log(1+x)}\text{............ (1)}\\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,b)_{x=0}}y=b=f(M)\text{.................... (2)}\end{cases}.$$

Calculons la limite (1) et voyons si elle est égale à $f(M)$:
$\rightsquigarrow$ Si $b\neq 0$: $(1)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}y\dfrac{\exp(y\log(1+x))-1}{y\log(1+x)}=b$ car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)}y\log(1+x)=0$, on rapelle que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$ ie que $(1)=f(M)$,
on en conclut la continuité de f sur $\Delta\setminus\{(0,0)\}$.
$\rightsquigarrow$ Si $b=0$: $(1)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y\log(1+x)+o(y\log(1+x))}{\log(1+x)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y+yo(1)=0=f(0,0)$,
on en conclut la continuité de f en $(0,0)$.
Conclusion : f est continue sur son Df.

2) Existence des dérivées partielles sur Δ: Soit $M=(0,b)$ un point de Δ,

$$\rightsquigarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}(M):\lim_{x\to 0(x\neq 0)}\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\exp(b\log(1+x))-1}{\log(1+x)}-b}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(b\log(1+x))-1-b\log(1+x)}{x\log(1+x)}$$

<u>Si $b=0$</u>, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)=0$

Si $b \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) : \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[b\log(1+x)]^2 + o\left([b\log(1+x)]^2\right)}{2x\log(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b^2\log(1+x) + b^2 o(\log(1+x))}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} b^2 \dfrac{\log(1+x)}{2x}(1+o(1)) = \dfrac{b^2}{2}$.

$$\text{On en déduit que } \frac{\partial f}{\partial x}(0,b) \text{ existe sur } \Delta \text{ et vaut } \frac{b^2}{2}$$

$\rightsquigarrow \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M) : \lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(0,y)-f(0,b)}{y-b} = \lim\limits_{y\to b} \dfrac{y-b}{y-b} = 1$

$$\text{On en déduit que } \frac{\partial f}{\partial y}(0,b) \text{ existe sur } \Delta \text{ et vaut } 1$$

3) Différentiabilité de f en $(0,0)$:
Utilisons la définition : f est différentiable ssi :
$f(h_1,h_2)-f(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0).h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 + \|(h_1,h_2)\|\,\varepsilon(h_1,h_2)$, avec $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$.
On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, ie $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{f(h_1,h_2)-h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$
Donc f sera différentiable en $(0,0)$ ssi $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f(h_1,h_2)-h_2}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$

On a : $f(h_1,h_2) - h_2 = \begin{cases} \dfrac{(1+h_1)^{h_2}-1}{\log(1+h_1)} - h_2 \text{ si } h_1 \neq 0. \\ 0 \quad \text{si} \quad h_1 = 0. \end{cases}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f(h_1,h_2)-h_2}{\|(h_1,h_2)\|} = \begin{cases} \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{\exp(h_2\log(1+h_1)) - 1 - h_2\log(1+h_1)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\log(1+h_1)} \text{ si } h_1 \neq 0. \\ \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0 = 0 \quad \text{si} \quad h_1 = 0. \end{cases}$

$= \begin{cases} \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{h_2^2\log^2(1+h_1) + o\left(h_2^2\log^2(1+h_1)\right)}{2\sqrt{h_1^2+h_2^2}\log(1+h_1)} \text{ si } h_1 \neq 0. \\ 0 \quad \text{si} \quad h_1 = 0. \end{cases}$

$= \begin{cases} \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{h_2^2\log(1+h_1)}{2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}(1+o(1)) \text{ si } h_1 \neq 0.......(*) \\ 0 \quad \text{si} \quad h_1 = 0. \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{h_2\log(1+h_1)}{2}(1+o(1)) = 0$ et $\dfrac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ bornée (car $|h_2| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2}$) donc $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$.

Conclusion : f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2: (EMD1 2001/2002)
Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{si} \quad x^2+y^2 < 1. \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles et donner leurs expressions.
3) Etudier la différentiabilité de f et donner l'expression de la différentielle aux points où elle existe.

Un corrigé.
On a tout d'abord $D_f = \mathbb{R}^2$ et soit $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2=1\right\} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a^2+b^2=1\right\}$.
1) Continuité:
* Dans $\mathbb{R}^2 - \Delta$, f est plynomiale (nulle ou égale à $1-x^2-y^2$) elle est donc de classe C^∞.
* Sur Δ : Soit $M=(a,b)$ un point de Δ, $f(M)=0$, a-t-on $\lim\limits_{(x,y)\to M} f(x,y) = f(M)=0$?
Pour $(x,y) \neq M$, on a $f(x,y) = \begin{cases} 1-x^2-y^2 & \text{si} \quad x^2+y^2<1. \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$
-1er cas: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to M \\ x^2+y^2<1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to M} 1-x^2-y^2 = 1-a^2-b^2 = 0$ car $a^2+b^2=1$.
-2er cas:; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to M \\ x^2+y^2\geq 1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to M} 0 = 0$.
on en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to M} f(x,y) = 0 = f(M)$.
Conclusion : f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$.
2) Dérivées partielles:
On remarque que f est symetrique et donc là où les dérivées partielles existent on a
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.
- Dans $\mathbb{R}^2-\Delta$, les deux dérivées existent et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -2x \text{ si } & x^2+y^2<1. \\ 0 \text{ si } & x^2+y^2>1. \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -2y \text{ si } & x^2+y^2<1. \\ 0 \text{ si } & x^2+y^2>1. \end{cases}$$

- Sur Δ : Soit $M=(a,b) \in \Delta$, ie $a^2+b^2=1$ (donc $1-b^2=a^2$). On a :

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \begin{cases} \dfrac{1-x^2-b^2}{x-a} & \text{si } \ x^2+b^2<1. \\ 0 & \text{si } \ x^2+b^2 \geq 1. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{a^2-x^2}{x-a} & \text{si } \ x^2+b^2<1. \\ 0 & \text{si } \ x^2+b^2 \geq 1. \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^2-x^2}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \left(-(a+x)\right) = -2a & \text{si } \ x^2+b^2<1. \\ \lim\limits_{x\to a} 0 = 0 & \text{si } \ x^2+b^2 \geq 1. \end{cases}$
On en conclut que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$ existe ssi $-2a=0$; i.e. S $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe seulement aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$ et elle y est nulle.
Conclusion: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -2x \quad \text{si } x^2+y^2<1. \\ 0 \text{ si } x^2+y^2>1 \text{ et aux points } \ (0,1) \ \text{ et } \ (0,-1). \end{cases}$,
et par symetrie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -2y \quad \text{si } x^2+y^2<1. \\ 0 \text{ si } x^2+y^2>1 \text{ et aux points } \ (1,0) \ \text{ et } \ (-1,0) \end{cases}$
3) Différentiabilité:

*Sur $\mathbb{R}^2 - \Delta,\ f$ est différentiable et on a

$$d_{(x,y)}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \begin{cases} -2xdx - 2ydy & \text{si } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2>1 \end{cases}$$

*Sur Δ : f ne peut y être différentiable puisque les dérivées partielles n'existent pas simultanément en tout point.

Exercice 3: (EMD 2002/2003)
Soit α un paramétre réel strictement positif, et soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha}{|x|+|y|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier selon α la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier la différentiabilité de f au point $(0,0)$.
Un corrigé.
1) Continuité:
* Dans $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f est la composée,somme et rapport de fonctions continues, elle est donc continue.
* Au point $(0,0)$: a-t-on $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$?

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^\alpha}{|x|+|y|}$,

-1er cas: si $\alpha > 1$, utilisons l'encadrement : $|x| \leq |x|+|y| \Longrightarrow |f(x,y)| \leq (|x|+|y|)^{\alpha-1}$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ie f est continue en $(0,0)$.

-2er cas: si $0 < \alpha \leq 1$, on change de méthode, utilisons le chemin: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha-1} = +\infty \neq 0\ \forall\ 0 < \alpha \leq 1$, en déduit que f est discontinue en $(0,0)$.

Conclusion: f est continue sur tout $\mathbb{R}^2$ si $\alpha > 1$ et elle est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ si $0 < \alpha \leq 1$.

<u>Remarque</u>: dans le cas $0 < \alpha \leq 1,\ f$ est discontinue en $(0,0)$ donc elle n'est pas différentiable en ce point.

2) Etudions tout d'abord l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$:

* on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{x}$: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-2} = l_1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(-x^{\alpha-2}\right) = l_2 \end{cases}$

-<u>1er cas</u>: si $\alpha > 2$: $l_1 = l_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

-<u>2ème cas</u>: si $0 < \alpha < 2$: les deux limites n'existent pas donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

-<u>3ème cas</u>: si $\alpha = 2$: $l_1 = 1$ et $l_2 = -1$ ie $l_1 \neq l_2$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

* Pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$: $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{y} = 0$ ie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et ceci $\forall \alpha > 0$.

Différentiabilité: on prendra en considération le cas $\alpha > 2$.
on utilisera la définition:

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).h_2 + \|(h_1,h_2)\|.\varepsilon(h_1,h_2)$$

on choisira la norme $\|(h_1,h_2)\| = |h_1| + |h_2|$ (pour faciliter les calculs) et il s'agira de calculer: $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2) = \lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\dfrac{|h_1|^\alpha}{(|h_1|+|h_2|)^2} = 0$ (car $\dfrac{|h_1|^\alpha}{(|h_1|+|h_2|)^2} \leq (|h_1|+|h_2|)^{\alpha-2}$).
En conclusion f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4: (EMD1, 2005/2006)
Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-\sin y}{y-\sin x} & \text{si} \quad y \neq \sin x. \\ -1 & \text{si} \quad y = \sin x. \end{cases}$$

Posons $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ y = \sin x\}$

1) Etudier la continuité de f sur Δ.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles sur Δ.
3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé:
On a tout d'abord $D_f = \mathbb{R}^2$ et soit $\Delta = \{(a,\sin a)\ / \ a\in\mathbb{R}\}$.
1) Continuité de f sur Δ: Soit $M = (a,\sin a)\in\Delta$, a t-on $\lim\limits_{(x,y)\to M} f(x,y) = f(a,\sin a) = -1$?

$$\lim_{(x,y)\to M} f(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(a,\sin a)_{y\neq\sin x}} \dfrac{x-\sin y}{y-\sin x} \text{............................ (1)} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,\sin a)_{y=\sin x}} (-1) = -1 = f(M) \text{.................... (2)} \end{cases}.$$

Calculons la limite (1) et voyons si elle est égale à $f(M)$:
En fait on a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,\sin a)} y - \sin x = 0$, donc il s'agit de trouver les $a \ / \ a - \sin(\sin a) = 0$ (car dans ce cas on aurait une forme indéterminée) : pour cela posons $g(t) = t - \sin(\sin t)$ et étudions les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
On a $g'(t) = 1 - \cos t.\cos(\sin t) \geq 0$ puisque $|\cos t.\cos(\sin t)| \leq 1$, ie $g \nearrow$,
de plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t - \sin(\sin t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t\left(1 - \dfrac{1}{t}\sin(\sin t)\right) = +\infty$ et son tableau de variation est donc comme suit:

t	$-\infty$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

D'où $\exists!\ t\ /\ g(t)=0$, or $t=0$ est une solution évidente, on en déduit que :

$$a-\sin(\sin a)=0 \iff a=0$$

$\rightsquigarrow$<u>1er cas</u> : $a\neq 0$ alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,\sin a)}\frac{x-\sin y}{y-\sin x}=+\infty$, donc f n'est pas continue sur $\Delta\setminus\{(0,0)\}$.

$\rightsquigarrow$<u>2ème cas</u> :$a=0$, utilisons les chemins.

$\displaystyle\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{y}=-1=l_1$; $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x,x)=\frac{x-\sin x}{x-\sin x}=1=l_2$ et on a $l_1\neq l_2$

Alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)_{y\neq\sin x}}\frac{x-\sin y}{y-\sin x}$ n'existe pas, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Conclusion : f est discontinue sur Δ.

2) Existence des dérivées partielles sur Δ : Soit $M=(a,\sin a)$ un point de Δ,

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(M):\lim_{x\to a_{(x\neq a)}}\frac{f(x,\sin a)-f(a,\sin a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x-\sin(\sin a)}{\sin a-\sin x}+1}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-\sin(\sin a)+\sin a-\sin x}{(x-a)(\sin a-\sin x)}$

<u>1er cas</u> : $a\neq 0$, c'est une forme déterminée et cette limite est égale à ∞, donc $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ n'$\nexists$.

<u>2ème cas</u> :$a=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0_{(x\neq 0)}}\frac{x-\sin x}{-x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{6}+o(x)}{-1+o(1)}=0$,

donc $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

$\rightsquigarrow$ $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(M):\lim_{y\to\sin a}\frac{f(a,y)-f(a,\sin a)}{y-\sin a}=\lim_{y\to\sin a}\frac{\frac{a-\sin y}{y-\sin a}+1}{y-\sin a}=\lim_{y\to\sin a}\frac{a-\sin(y)+y-\sin a}{(y-\sin a)^2}$

<u>1er cas</u> : $a\neq 0$, c'est une forme déterminée et cette limite est égale à ∞, donc $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(M)$ n'$\nexists$.

<u>2ème cas</u> :$a=0$, $\displaystyle\lim_{y\to 0_{(x\neq 0)}}\frac{y-\sin y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^3}{6}+o(y^3)}{-y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{6}=0$, donc $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

3) Différentiabilité.

* Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$: la fonction f est rapport, composée, somme de fonctions de classe C^1, elle est donc C^1 aussi. On en déduit sa différentiabilité.

* Sur Δ : on remarque que f est discontinue sur ce domaine et donc elle n'est pas différentiable

II– Quelques exercices donnés aux examens (sans correction.

Exercice 1: (EMD1 2000/2001)

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^3 y}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f.
3) Etudier la différentiabilité de f.

Exercice 2: (EMD1 2003/2004)

Soit la fonction f donnée par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2y^2\right)}{\left(e^x-1\right)\left(e^y-1\right)} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Posons $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0 \text{ ou } y = 0\right\}$.
1) Etudier la continuité de la fonction f sur Δ.
2) Calculer les dérivées partielles sur Δ, lorsqu'elles existent.
3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3: (EMD1 2004/2005)

Soit la fonction f donnée par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^4}-e^{y^4}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Etudier la continuité de la fonction f en $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles en $(0,0)$ puis étudier la différentiabilité en $(0,0)$.
3) La fonction f est elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4: (EMD1 2006/2007)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)-xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier au point $(0,0)$ la continuité, l'existence des dérivées partielles puis la différentiabilité.
2) La fonction f est-elle de classeC^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5:(Rattrapage2, 2006/2007)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3+y^2}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Etudier sa continuité sur $\mathbb{R}^2$.2) Etudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$.
3) f est elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 6: (EMD1 2007/2008)

1) Soit f_1 la fonction numérique définie par :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f_1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Soit f_2 la fonction numérique définie par :

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{xy}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 1-y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $f_2 \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.
3) Soit f la fonction vectorielle définie par $f = (f_1, f_2)$. A t on f différentiable dans $\mathbb{R}^2$?
Exercice 7: (Rattrapage2, 2007/2008)
Soit la fonction numérique définie dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 y \sin \dfrac{y}{x} & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3) Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
4) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,b)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,b) \quad \forall b \neq 0$.

Exercice 8: (EMD1 2008/2009)
Soit la fonction f défine dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x} \exp\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Etudier la continuité, l'existence des dérivées partielles et la différentiabilité de f dans son domaine de définition.
<u>*Un petit rappel* :</u> $\lim\limits_{t \to +\infty} t \exp(-t) = 0$