ESI. 2018/2019. CP2.

Note: $\frac{\quad}{7}$

Interro n°2 en ANA3. Sujet 2.
Durée 1h.

Soit la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $2-$périodique définie par :

$$f(x) = x - x^3 \text{ si } x \in [-1,1]$$

1) Tracer le graphe de f dans l'intervalle $[-2,2]$.
2) Calculer les coefficients de Fourier de f puis donner sa série de Fourier.

3) En déduire la somme des séries numériques suivantes:

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3};\ S_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$$

Un corrigé:
1) Le graphe $\boxed{\text{0,5 point}}$
2) On remarque que la fonction est continue donc $\mathfrak{F}(f)$ $\boxed{\text{0.25 point}}$ existe (on peut aussi dire qu'elle est localement intégrable).
2.1) Calcul des coefficients, comme f est impaire $a_n = 0\ \forall n \geq 0$ $\boxed{\text{0.25 point}}$.

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \left(x - x^3\right)\sin(n\pi x)\,dx \ \boxed{\text{0.25 point}}$$

On fait une 1ère IPP: $u = \left(x - x^3\right)$; $du = \left(1 - 3x^2\right)dx$ et $dv = \sin(n\pi x)\,dx$; $v = \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}$. $\boxed{\text{0.25 point}}$

$$b_n = 2\underbrace{\left[\left(x - x^3\right)\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \left(1 - 3x^2\right)\cos(n\pi x)\,dx \ \boxed{\text{0.5 point}}$$

On fait une 2ème IPP: $u = \left(1 - 3x^2\right)$; $du = -6x dx$ et $dv = \cos(n\pi x)\,dx$; $v = \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$. $\boxed{\text{0.25 point}}$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(\underbrace{\left[\left(1 - 3x^2\right)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} + \frac{6}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx\right) = \frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx \ \boxed{\text{0.5 point}}$$

On fait une 3ème IPP: $u = x$; $du = dx$ et $dv = \sin(n\pi x)\,dx$; $v = \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}$.
$\boxed{\text{0.25 point}}$

$$b_n = \frac{12}{n^2\pi^2}\left(\left[x\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx}_{=0}\right) = \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\ \boxed{0.25 \text{ point}}$$

2.2) La série de Fourier associée à f est :

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(n\pi x)\ \boxed{0.25 \text{ point}}$$

3) Calcul des sommes des séries.

Appliquons le corrollaire de Dirichlet $\boxed{0.25 \text{ point}}$ sur $[0,1]$, car elle est $2-$périodique et impaire (le point $\frac{1}{2}$ suffit pour trouver S_1)

$\rightsquigarrow$ $f_{/]0,1[}(x) = x - x^3$ est de classe C^1; $\lim_{x\to 0^+} f'_{/]0,1[}(x) = 1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to 1^-} f'_{/]0,1[}(x) = -2 \in \mathbb{R}$ $\boxed{0.75 \text{ point}}$

$\rightsquigarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ et donc sur $[0,1]$ (et donc en $\frac{1}{2}$). La série de Fourier $\mathfrak{F}(f)$ associée à f est égale à f sur $\mathbb{R}$ en particulier $\mathfrak{F}(f)(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin(n\pi x) = f(x);\ \forall x \in [0,1]$

<u>S_1</u>: On a $\mathfrak{F}(f)(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}$ $\boxed{0.25 \text{ point}}$ ie

$$\frac{12}{\pi^3}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}\boxed{0.25 \text{ point}} \text{ or } \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k+1,\ k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ \boxed{0.25 \text{ point}}$$

$$\Longrightarrow \frac{12}{\pi^3}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}\boxed{0.25 \text{ point}} \Longrightarrow S_1 = \frac{\pi^3}{12}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}\right)\boxed{0.25 \text{ point}}$$

<u>S_2</u>: On utilise l'égalité de Parseval: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f^2(x)dx$

On remplace sachant que $a_n = 0$ et on obtient:

$$\frac{12^2}{\pi^6}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6} = 2\int_0^1 (x - x^3)^2\,dx = 2\int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6)\,dx = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)\boxed{0.5 \text{ point}}$$

On aboutit: $S_2 = \frac{2\pi^6}{12^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right).$ $\boxed{0.5 \text{ point}}$