2CPI. 2018 / 2019. ANA3.

Un corrigé du CI:

Exercice 1 :(3 points)

1) $u_n = \dfrac{2^n}{n!} > 0$. $\boxed{0{,}25}$. Utilisons la régle de D'Alembert:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}.n!}{(n+1)!2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0 < 1.$ $\boxed{0{,}5}$ donc $\sum u_n$ converge. $\boxed{0{,}25}$.

2) $u_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)\dfrac{\log(n)}{\sqrt{n}}$. Utilisons la régle d'Abel.

Posons $v_n = \dfrac{\log(n)}{\sqrt{n}}$ et $w_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$, on a :

$\rightsquigarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$ $\boxed{0{,}25}$.

$\rightsquigarrow$ $(v_n)_{n\geq N}$ est décroissante , en effet posons $f(t) = \dfrac{\log(t)}{\sqrt{t}}$, $t \geq 1.$ $\boxed{0{,}25}$.

$f\,'(t) = \dfrac{\frac{1}{t}.\sqrt{t} - \frac{\log t}{2\sqrt{t}}}{t} = \dfrac{2-\log t}{2t\sqrt{t}}$ $\boxed{0{,}5}$ < 0 ssi $\log t > 2$ ie ssi $t > e^2$, donc pour $n >>$ $f\,'(t) < 0$ $\boxed{0{,}25}$ (il suffit de choisir $N = E\left(e^2\right) + 1$).

$\rightsquigarrow$ $|S_n| = |w_0 + ... + w_n|$ $\boxed{0{,}25}$ $\leq \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right|}$ par référence $\boxed{0{,}25}$.

Donc donc $\sum u_n$ converge $\boxed{0{,}25}$.

Exercice 2 :(5,5 points)

Partie A : Soit la suite de fonctions suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3}.$$

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+n^3x^3}$

1er cas : $x = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ $\boxed{0{,}25}$.

2ème cas : $x \in]0,1]$; $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n^3x^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2x^2} = 0$ $\boxed{0{,}25}$.

$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) En fait pour $x_n = \dfrac{1}{n}$ $\boxed{0{,}25}$, $x_n \in [0,1]$ $\forall n \geq 1$, on a $\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - 0| \geq |f_n(x_n) - 0| = m_n$ $\boxed{0{,}25}$

$m_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n \neq 0$ $\boxed{0{,}25}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - 0|\right) \neq 0$, donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$ $\boxed{0{,}25}$.

3) a) Convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ sur $[0,1]$

1er cas : $x=0$; $f_n(0)=0$ et la série nulle est convergente $\boxed{0{,}25}$.
2ème cas : $x\in]0,1]$; $\left|\dfrac{nx}{1+n^3x^3}\right|\leq\dfrac{1}{n^2x^2}$ $\boxed{0{,}25}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2x^2}$ converge $\boxed{0{,}25}$ car c'est une série de Riemann, donc $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ converge simplement sur $[0,1]$. $\boxed{0{,}25}$
b) Convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ sur $[0,1]$.
D'après la question 2) $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$, donc la condition nécéssaire (CN) de convergence uniforme n'est pas réalisée $\boxed{0{,}25}$, on en conclut que $\sum\limits_{n\geq 0}f_n$ ne converge pas uniformémént sur $[0,1]$ $\boxed{0{,}25}$.

Partie B : Pour calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$, étudions la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0,1]$
3) a) Convergence simple :
$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^x}{n+x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^x}{n}=e^x$ $\boxed{0{,}25}$.
$(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f tq $f(x)=e^x$.
b) Convergence uniforme, voyons si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=0$,
posons $g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=\left|\dfrac{ne^x}{n+x}-e^x\right|=\dfrac{xe^x}{n+x}\leq\dfrac{e}{n}$ $\boxed{0{,}5}$ $=M_n$ $\forall x\in[0,1]$ $\boxed{0{,}25}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}M_n=0$ $\boxed{0{,}25}$,
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=0$, d'où la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ $\boxed{0{,}25}$.
Appliquons le théorème d'intégrabilité:
$\rightsquigarrow$ Toutes les f_n sont intégrables sur $[0,1]$ car c'est le rapport de fonctions continues $\boxed{0{,}25}$. $\rightsquigarrow$ $f_n\overset{\text{uniforme}}{\longrightarrow}f$ sur $[0,1]$ $\boxed{0{,}25}$.Alors f est intégrable sur $[0,1]$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^1\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}f_n(t)\right)dt=\int\limits_0^1 f(t)dt$ $\boxed{0{,}25}$.
Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_0^1\dfrac{ne^x}{n+x}dx=\int\limits_0^1 e^xdt=e-1.$ $\boxed{0{,}25}$

<u>Exercice 3 :</u> (6,5 points)
1) Soit $u_n=n^\alpha e^{\beta n}>0$ $\boxed{0{,}25}$ utilisons la régle de l'ordre.
$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}n^\gamma u_n$ $\boxed{0{,}25}$ $=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}n^\gamma n^\alpha e^{\beta n}=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}e^{(\gamma+\alpha)\log n+\beta n}=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}e^{n\left[\frac{(\gamma+\alpha)\log n}{n}+\beta\right]}$ $\boxed{0{,}25}$
$=\begin{cases}0 \text{ si } \beta<0\\ +\infty \text{ si } \beta>0\end{cases}$ $\boxed{0{,}25}$
1er cas : Si $\beta<0$, il suffit de choisir $\gamma>1$ (par exemple 2) donc $\sum u_n$ converge

$\boxed{0{,}25}$.

2ème cas : Si $\beta > 0$, il suffit de choisir $\gamma \leq 1$ (par exemple 1) donc $\sum u_n$ diverge $\boxed{0{,}25}$.

2) Posons $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}\sin(n)}{e^{2nx}+1}, \;\; x > 0$.

a) Etude de la convergence de cette série sur $]0, +\infty[$.

$|f_n(x)| \leq \dfrac{e^{nx}}{e^{2nx}} = e^{-nx}$ $\boxed{0{,}5}$ et $\sum e^{-nx}$ converge (question 1 ou ref) $\boxed{0{,}25}$ donc la série converge absolument (par comparaison) donc converge $\boxed{0{,}25}$.

b) Montrons que F est continue sur $]0, +\infty[$.

$\rightsquigarrow$ Etude de la convergence uniforme de $\sum f_n$; utilisons pour cela la convergence normale (par la convergence dominée) : $|f_n(x)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$ $\boxed{0{,}25}$ $\forall x \in [a, +\infty[, \; a > 0$ et $\sum e^{-na}$ converge $\boxed{0{,}25}$. Donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[, \; a > 0$ $\boxed{0{,}25}$.

$\rightsquigarrow$ Toutes les f_n sont continues car c'est le rapport, composé et somme de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

D'après le théorème de conservation de la continuité on obtient que F est continue sur tout $[a, +\infty[, \; a > 0$ $\boxed{0{,}25}$, on en conclut la contnuité de F sur $]0, +\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

c) Montrons que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\rightsquigarrow$ Etude de la convergence uniforme de $\sum f_n'$;

$$f_n'(x) = \sin n \frac{ne^{nx}\left(e^{2nx}+1\right) - 2ne^{2nx}e^{nx}}{\left(e^{2nx}+1\right)^2} = \boxed{0{,}25} \sin n \left[\frac{ne^{nx}}{(e^{2nx}+1)} - \frac{2ne^{3nx}}{\left(e^{2nx}+1\right)^2}\right]$$

$|f_n'(x)| \leq ne^{-nx} + 2ne^{-nx}$ $\boxed{0{,}25}$ ie $|f_n'(x)| \leq 3ne^{-nx} \leq 3ne^{-na}$ $\boxed{0{,}5}$ $\forall x \in [a, +\infty[, \; a > 0$ $\boxed{0{,}25}$ et $\sum ne^{-na}$ converge $\boxed{0{,}25}$. Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[, \; a > 0$ $\boxed{0{,}25}$.

$\rightsquigarrow$ Toutes les f_n sont dérivables car c'est le rapport, composé et somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

$\rightsquigarrow$ Comme F est définie sur $]0, +\infty[$ (ie $\exists x_0 \in]0, +\infty[$ tq $\sum f_n(x_0)$ converge). $\boxed{0{,}25}$

D'après le théorème de conservation de la dérivabilité on obtient que F est dérivable sur tout $[a, +\infty[, \; a > 0$ $\boxed{0{,}25}$, on en conclut la dérivabilité de F sur $]0, +\infty[$ $\boxed{0{,}25}$.

Exercice 4 : (5 points)

1- **Solution 1:** Considérons la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n!} y^n$, calculons son rayon de convergence : $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$, utilisons le théorème de Hadamard; $\lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $R_b = +\infty$ $\boxed{0{,}5}$, ie $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}y^n$ converge ssi $y\in\mathbb{R}$, en particulier pour $y=x^2$ $\boxed{0{,}25}$ donc $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$ converge ssi $x^2\in[0,+\infty[$ ie converge ssi $x\in\mathbb{R}$, ce qui donne $D_F=\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.

Solution 2: On utilise le fait que c'est une série entière $\sum\limits_{N\geq 0}a_Nx^N$ tq

$a_N=\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & \text{si } N=2n,\ N\geq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ $\boxed{0{,}5}$, cette étape est notée une seule fois, qu'elle soit faite ici ou en question 2)

Ensuite utilisons le théorème de Hadamard:

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[N]{|a_N|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[N]{\left|\frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{\left(\frac{N}{2}\right)!}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left[\left(\frac{N}{2}\right)!\right]^{\frac{1}{N}}}\ \boxed{0{,}25}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left[\sqrt{\pi N}\left(\frac{N}{2e}\right)^{\frac{N}{2}}\right]^{\frac{1}{N}}}$$

ie $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(|a_N|\right)^{\frac{1}{N}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(\pi N)^{\frac{N}{2}}\left(\frac{N}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}}=0$ $\boxed{0{,}5}$

Donc $R_a=+\infty$ donc $D_F=\mathbb{R}$ $\boxed{0{,}25}$.

Solution 3: Considérer F comme une série de fonction et lui appliquer un critère de convergence (par exemple la convergence absolue suivie du critère de D'Alembert...) $\boxed{1\text{pt}}$.

2- Cette série de fonctions est une série entière , en effet $F(x)=\sum\limits_{N\geq 0}a_Nx^N$ où

$a_N=\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{N}{2}}}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & \text{si } N=2n,\ N\geq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ $\boxed{0{,}5}$ donc $F\in C^{+\infty}(\mathbb{R})$ $\boxed{0{,}5}$.

Remarque: Si on a utilisé la solution 2 au niveau de la question1, il suffit de noter $F\in C^{+\infty}(\mathbb{R})$ $\boxed{0{,}5\text{pt}}$.

3- **Solution 1:** $F(x)=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\left(x^2\right)^n=e^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{1\text{pt}}$ (d'après le formulaire).

Solution 2: Ou bien $F(x)=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\left(x^2\right)^n=\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k)!}\left(x^2\right)^{2k}-\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)!}\left(x^2\right)^{2k+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $F(x)=ch\left(x^2\right)-sh\left(x^2\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{1\text{pt}}$ (d'après le formulaire).

4- $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\left(x^2\right)^n dx=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx$ $\boxed{0{,}5}$ $=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}$ $\boxed{0{,}5}$.

5-$|I - S_n| = |R_n| \leq |u_{n+1}|$ $\boxed{0{,}25}$ ie $|I - S_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)!\,(2n+3)}$, on veut

$\dfrac{1}{(n+1)!\,(2n+3)} \leq 10^{-3}$

ce qui donne $(n+1)!\,(2n+3) \geq 10^3$ La suite $(n+1)!\,(2n+3)$ est croissante $\boxed{0{,}25}$, testons les premiers termes:

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 0 : 3 < 10^3 \\ \text{Pour } n = 1 : 10 < 10^3 \\ \text{Pour } n = 2 : 42 < 10^3 \\ \text{Pour } n = 3 : 24.9 < 10^3 \end{cases} \quad \boxed{0{,}25}$$

Pour $n = 4 : 120.11 > 10^3$ donc $N = 4$ $\boxed{0{,}25}$.

On peut aussi prendre la suite $\dfrac{1}{(n+1)!\,(2n+3)}$ qui est décroissante ...

6- Donner une valeur approchée de I telle que l'erreur d'approximation ne dépasse pas 10^{-3}, c'est S_N $\boxed{1\text{pt}}$