Exercice 1 : (3.5 pt)

Soit la matrice suivante : $A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \alpha & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1- $\det A_\alpha = -3\alpha - 12 = -3(\alpha+4)$. **(0.75 pt)**

2- A_α est inversible si et seulement si $\alpha \neq -4$. **(0.25 pt)**

3- Soit (S) le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -2x_1 & - & x_2 & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & +2x_3 & = -\beta \\ \alpha x_1 & - & 2x_2 & +x_3 & = 1 \end{cases} \qquad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

a- Le système (S) est de Cramer si et seulement si $\alpha \neq -4$ et $\beta \in \mathbb{R}$. **(0.25 pt)**

b- Les formules de Cramer qui permettent de calculer les inconnues x_1, x_2 et x_3 sont :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\beta & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-3(\alpha+4)}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -\beta & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3(\alpha+4)}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\beta \\ \alpha & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-3(\alpha+4)} \qquad \textbf{(0.25 pt*3)}$$

et la solution du système est :

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{\beta+2}{3(\alpha+4)}, -\frac{(\beta+2)(\alpha+2)}{3(\alpha+4)}, -\frac{(\beta-1)}{3}\right) \qquad \textbf{(0.5 pt*3)}$$

Exercice 2 : (1 pt=(0.25 pt*4))

Soit, dans $\mathbb{R}$, un système linéaire (S) de 4 équations à 3 inconnues de rang 2.

i- L'ordre d'une matrice principale de (S) est : 2.

ii- Le nombre de déterminants bordants du déterminant principal est égal à : 2.

iii- Le système (S) est compatible ssi les deux déterminants bordants du déterminant principal sont nuls.

Dans ce cas, il y a : deux (2) inconnues principales qui s'expriment en fonction d'une (1) inconnue non-principale.

Exercice 3 : (0.5 pt)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Est ce que le vecteur $(1,1)$ est un vecteur propre de A ? Justifier.

Solution : Non, car : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.