Interrogation écrite

Durée 1 heure

Tout document interdit

**Exercice 1 (3 points)**

Lesquelles des propositions suivantes sont valides et lesquelles ne le sont pas ?

1. (∀*x*α) ∧∀*x*β≡∀*x*(α∧β)
2. (∀*x*α) ∨∀*x*β≡∀*x*(α∨β)
3. (∃*x*α) ∨∃*x*β≡∃*x*(α∨β)
4. ∀*x*∃*y*(P(*x*)→Q(*y*)) ≡∃*u*P(*u*)→∃*z*Q(*z*)
5. ∀*x*∃*y*(P(*x*)→Q(*y*)) ≡∀*x*(P(*x*)→Q(*f*(*x*))

Illustrer toute proposition non valide par un contre-exemple.

**Exercice 2 (2 points)**

Donner un modèle de l’ensemble Γ de formules tel que :

Γ : {∀*x*P(*x*,*f*(*x*)), ∀*y*⎤P(*y*, *y*), ∀*u*∀*v*∀*w*((P(*u*, *v*) ∧ P(*v*,*w*)) → P(*u*, *w*))}

**Exercice 3 (1**, **1.5**, **0.5**, **1**, **0.5**,**0.5)**

On considère β la formule telle que :

β : ∀*y*∃*z*∀*x*((⎤P(*z*, *x*) ∨⎤P(*x*, *z*)) ∧ P(*x*, *y*))

**3.1.** Mettre β sous forme clausale. On désignera par S l’ensemble des clauses issu de β.

**3.2.** Laquelle des propositions suivantes est valide :

1. S est satisfiable ssiβ est satisfiable.
2. La conjonction des clauses de S est satisfiable ssiβ est satisfiable.
3. La conjonction des clauses de S est valide ssiβ est valide.

**3.3.**Quel est le domaine de Herbrand de S ?

**3.4.** Montrer à l’aide d’un arbre sémantique que S est non satisfiable.

**3.5.** Donner un sous-ensemble non satisfiable de clauses de S. On appellera S’ cet ensemble.

**3.6.** Montrer que l’ensemble de clauses obtenu en substituant une variable propositionnelle à chaque littéral de S’ estnon satisfiable.

P(*a*) ⎤P(*a*)

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

S2

S1

S1

**Figure 2.5. 4. Arbre sémantique clos de S3**

**N. B.** Remettre une seule double feuille.

**CORRECTION**

**Exercice 1 (3 points)**

Lesquelles des propositions suivantes sont valides et lesquelles ne le sont pas ?

1. (∀*x*α) ∧∀*x*β≡∀*x*(α∧β) Valide**(0.5)**
2. (∀*x*α) ∨∀*x*β≡∀*x*(α∨β) Non valide **(1pt)**

Contre-exemple : l’interprétation I de domaine D : {2, 3, 4} telle que I(P) : « pair », est un modèle de ∀*x* (P(*x*)∨⎤P(*x*)) mais pas de (∀*x*P(*x*))∨∀*x*⎤P(*x*)

1. (∃*x*α) ∨∃*x*β≡∃*x*(α∨β) Valide**(0.5)**
2. ∀*x*∃*y*(P(*x*)→Q(*y*)) ≡∃*u*P(*u*)→∃*z*Q(*z*) Valide**(0.5)**
3. ∀*x*∃*y*(P(*x*)→Q(*y*)) ≡∀*x*(P(*x*)→Q(*f*(*x*)) Non Valide **(0.5)**

Illustrer toute proposition non valide par un contre-exemple.

**Exercice 2 (2 points)**

Donner un modèle de l’ensemble Γ de formules tel que :

Γ : {∀*x*P(*x*,*f*(*x*)), ∀*y*⎤P(*y*, *y*), ∀*u*∀*v*∀*w*((P(*u*, *v*) ∧ P(*v*,*w*)) → P(*u*, *w*))}

**I** de domaine N telle que :

I(P) : ‘<’ I(*f*) : ‘successeur’

**Exercice 3 (1**, **1.5**, **0.5**, **1**, **0.5**, **0.5)**

On considère β la formule telle que :

β : ∀*y*∃*z*∀*x* ((⎤P(*z*, *x*) ∨⎤P(*x*, *z*)) ∧ P(*x*, *y*))

**3.1.** Mettre β sous forme clausale. On désignera par S l’ensemble des clauses issu de β.

βS : ∀*y*∀*x* ((⎤P(*f*(*y*), *x*) ∨⎤P(*x*, *f*(*y*)) ∧ P(*x*, *y*)) **0.5 point**

≡

∀*y*∀*x*(⎤P(*f*(*y*), *x*) ∨⎤P(*x*, *f*(*y*)) ∧∀*y*∀*x* P(*x*, *y*)

On renomme les variables :

∀*y*∀*x*(⎤P(*f*(*y*), *x*) ∨⎤P(*x*, *f*(*y*)) ∧∀*u*∀*v* P(*v*, *u*)

**S : {**⎤P(*f*(*y*), *x*) ∨⎤P(*x*, *f*(*y*)), P(*u*, *v*)} **0.5 point**

**3.2.** Laquelle des propositions suivantes est valide **0.5, 0.5, 0.5** :

1. S est satisfiable ssiβ est satisfiable. **Valide**
2. La conjonction des clauses de S est satisfiable ssiβ est satisfiable. **Valide**
3. La conjonction des clauses de S est valide ssiβ est valide. **Non valide**

**3.3.**Quel est le domaine de Herbrand de S ?**0,5 pt**

H : {a, *f*(*a*), ……, *fi*(*a*), ………}

**3.4.** Montrer à l’aide d’un arbre sémantique que S est non satisfiable.**1point**

P(*a*) ⎤P(*a*)

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

S2

S1

S1

**Figure 2.5. 4. Arbre sémantique clos de S3**

P(*a*) ⎤P(*a*)

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

S2

S1

S1

**Figure 2.5. 4. Arbre sémantique clos de S3**

P(*a*) ⎤P(*a*)

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

S2

S1

S1

**Figure 2.5. 4. Arbre sémantique clos de S3**

P(*a*) ⎤P(*a*)

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

S2

S1

S1

**Figure 2.5. 4. Arbre sémantique clos de S3**

P(*a,* f(*a*)) ⎤P(*a,* f(*a*))

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

c1

c1

c2

P(*a*) ⎤P(*a*)

**Figure 2.5.2. Arbre sémantique clos de S. Le symbole + désigne un nœud d’échec.**

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

c1

c1

c2

P(*a*) ⎤P(*a*)

**Figure 2.5.2. Arbre sémantique clos de S. Le symbole + désigne un nœud d’échec.**

P(*f*(*a*)) ⎤ P(*f*(*a*))

c1

c1

c2

P(*a*) ⎤P(*a*)

**Figure 2.5.2. Arbre sémantique clos de S. Le symbole + désigne un nœud d’échec.**

C2

P(*f*(*a*),*a*) ⎤P(*f*(*a*),*a*)

C2

C1

**-0,5 si l**’étudiant ne précise pas les substitutions qu’il fait pour avoir ses instances de base.

**3.5.** Donner un sous-ensemble non satisfiable de clauses de S. On appellera S’ cet ensemble.

S’ : **{**⎤P(*f*(*a*), *a*) ∨⎤P(*a*, *f*(*a)),* P( *f(a),a),* P(*a,f*(*a*))} **0,5 pt**

Ici, on falsifie une instance de C1 et deux instances de C2.

**3.6.** Montrer que l’ensemble de clauses obtenu en substituant une variable propositionnelle à chaque littéral de S’ est non satisfiable.**0,5 point**

Je substitue **R** à P(*f*(*a*), *a*), **Q** à P(*a,f*(*a*)) dans S’

On obtient l’ensemble de clauses : {⎤R ∨⎤Q, R, Q}

⎤R ∨⎤Q

R

Q

⎤Q