§2. Теория последовательностей

1.Понятие предела последовательности. Говорят, что последовательность x_1, x_2 ,..., x_n, ... имеет своим пределом число a(короче, сходится к a), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

если для любого ε > 0 существует число $N = N(\varepsilon)$ такое,что

$$|x_n - a| < \varepsilon, n > N$$

В частности, x_n называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0.$$

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся.*

2.Признаки существования предела.

1)Если

$$y_n \le x_n \le z_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c,$$

2)Монотонная и ограниченная функция имеет предел.

3)*Критерий Коши.* Для существования предела последовательности x_n необходимо и достаточно чтобы для любого ε > 0 существовало $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon$$

3.Основные теоремы о пределах последовательности. Предполагая ,что существуют

$$\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$$

имеем:

1)если $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$,если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$;

4.Число e. Последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n=1,2,...)$$

имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284...$$

5.Бесконечный предел. Символическая запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

обозначает, что каково бы ни было $E > 0$, существует $N = N(E)$ такое, что

$$|x_n| > E, n > N.$$

6.Предельная точка. Число ξ (или символ ∞) называется *частичным пределом(предельной точкой)* данной последовательности x_n (n = 1,2,...), если существует подпоследовательность

$$x_{p1}, x_{p2}, ..., x_{p2}, ...(1 \le p_1 < p_2 < ...)$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{pn} = \xi$$

Всякая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел *(принцип Больцано-Вейерштрасса)*. Если этот частичный предел единственный, то он же является конечным пределом данной последовательности.

Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности x_n

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ x_n$$

называется *нижним пределом*, а наибольший частичный предел ее

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\ x_n$$

называется *верхним пределом* этой последовательности.

Равенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\ x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}\ x_n$$

является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности x_n.