Regras para manipulação e substituição

São princípios que permitem a obtenção de fórmulas proposicionais equivalentes a uma fórmula dada, através da substituição de suas subfórmulas.

1. Seja A uma fórmula que contém as variáveis p_1 , p_2 , ... , p_n. Se A é uma tautologia, então a fórmula B, obtida pela substituição de p_1, ... , p_n por fórmulas A_1 , ... , A_n, é uma tautologia.
Exemplo:* Fazer a tabela-verdade de $(p \to p)$. Substituindo a variável p pela fórmula $(q \vee r)$, obtém-se a fórmula $((q \vee r) \to (q \vee r))$. Fazer a tabela-verdade.

2. Se B_1 é uma fórmula obtida a partir de A_1 pela substituição por B de uma ou mais ocorrências de A em A_1 e se B é logicamente equivalente a A então B_1 é logicamente equivalente a A_1.
Exemplo: $A_1 = (\neg p \to (q \to r))$; $A = (q \to r)$; $B = (\neg q \vee r)$; $B_1 = (\neg p \to (\neg q \vee r))$

Leis de De Morgan

Verifique que a fórmula $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $(\neg p \vee \neg q)$, e $\neg(p \vee q)$ é equivalente a $(\neg p \wedge \neg q)$. Isso é estendido pelas leis de De Morgan:
Sejam A_1, A_2, ... , A_n, fórmulas proposicionais.
i) $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n)$ é equivalente a $(\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee ... \vee \neg A_n)$
ii) $\neg(A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n)$ é equivalente a $(\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge ... \wedge \neg A_n)$

Princípio da Dualidade

Dual: Seja A uma fórmula que contém apenas os conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$. A fórmula A^* que resulta de A através da substituição de cada $\wedge$ por $\vee$ e de cada $\vee$ por $\wedge$ é denominada DUAL de A.
Exemplo: A fórmula dual de $\neg((p \wedge q) \vee \neg r)$ é $\neg((p \vee q) \wedge \neg r)$

Princípio da Dualidade: Se A e B são fórmulas equivalentes que contêm no máximo os conectivos $\{\wedge, \vee, \neg\}$, então as duais respectivas A^* e B^* também são equivalentes.

Exemplos:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
b) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Equivalências entre os conectivos:

1) $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$
2) $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
3) $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
4) $(A \veebar B) \equiv \neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
5) $(A \uparrow B) \equiv \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
6) $(A \downarrow B) \equiv \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
7) $\neg A \equiv (A \uparrow A) \equiv (A \downarrow A)$
8) $(A \wedge B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
9) $(A \vee B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

Propriedades dos Conectivos:		
1. Comutativa:	$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$	$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
2. Associativa:	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
3. Distributiva:	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4.Identidade (elemento neutro):	$(A \vee F) \equiv A$	$(A \wedge V) \equiv A$
5. Complementativas (elem. absorvente):	$(A \vee V) \equiv V$	$(A \wedge F) \equiv F$
6. De Morgan:	$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$	$\neg (A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
7. Idempotentes:	$(A \vee A) \equiv A$	$(A \wedge A) \equiv A$
8. Dupla Negação:	$A \equiv \neg \neg A$	
9. Absorção:	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
10. Contraposição:	$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$	
11. Prova Condicional:	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$	
12. Tautologia:	$(A \vee \neg A) \equiv V$	
13. Contradição:	$(A \wedge \neg A) \equiv F$	

Conjuntos Adequados de Conectivos

Um conjunto adequado de conectivos é aquele tal que qualquer proposição pode ser representada por uma fórmula que contém apenas os conectivos do conjunto.

Exemplos:

$\{ \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow \}$
$\{ \neg , \wedge , \vee \}$
$\{ \neg , \wedge \}$
$\{ \neg , \vee \}$
$\{ \neg , \rightarrow \}$
Mas será que não pode existir um conjunto adequado de conectivos unitário?
Para que isso fosse possível, foram criados dois outros conectivos: a negação conjunta e a negação disjunta. Com estes dois conectivos, é possível formar os conjuntos adequados: $\{ \uparrow \}$ e $\{ \downarrow \}$.
Suas relações com os outros operadores são:
$\neg A \equiv (A \uparrow A) \equiv (A \downarrow A)$
$(A \wedge B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
$(A \vee B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

Exemplo:

Representar a fórmula $(p \rightarrow q)$ utilizando os conjuntos $\{ \uparrow \}$ e $\{ \downarrow \}$:

$\neg p \vee q \equiv \neg p \vee \neg \neg q \equiv \neg (p \wedge \neg q) \equiv p \uparrow \neg q \equiv p \uparrow (q \uparrow q)$

$\neg p \vee q \equiv \neg \neg (\neg p \vee q) \equiv \neg(\neg p \downarrow q) \equiv \neg ((p \downarrow p) \downarrow q) \equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$