Cálculo Proposicional

O Cálculo Proposicional (CP – também conhecido como Lógica Proposicional) é um dos mais simples formalismos lógicos existentes. Este cálculo lida apenas com enunciados declarativos, chamados de *proposições*. As sentenças exclamativas, imperativas e interrogativas são, pois, excluídas.

Proposição

É uma sentença que pode ser avaliada em FALSO ou VERDADEIRO. É uma frase declarativa (com sujeito e predicado) que representa uma idéia completa. Proposições são representadas por letras maiúsculas: A, B, ...

Exemplos de proposições atômicas (*átomos*):

Napoleão morreu.

A Lua é o satélite natural da Terra.

Dez é menor do que sete.

3 + 4 = 7

O Japão fica na África.

Não são proposições:

Onde você está?	→ Sentença interrogativa
Não vá embora.	→ Sentença imperativa
Que lindo!	→ Sentença exclamativa
3 + 4	→ Não possui predicado
foi à praia	→ Não possui sujeito

Valor-verdade ou valor lógico:

VERDADEIRO (**V**) ou FALSO (**F**).

Princípios Fundamentais da Lógica

- **Princípio de identidade** - enunciados do princípio de identidade:
    - I- Uma coisa é o que é.
    - II- O que é, é; o que não é, não é.
    - III- A é A (“A” designando qualquer objeto do pensamento).
    - IV- Em termos de proposições: uma proposição é equivalente a si mesma.

- **Princípio da Não-Contradição**: Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

- **Princípio do Terceiro Excluído**: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

Proposições Compostas

É possível construir proposições compostas através do uso de conectivos, usados para construir proposições a partir de outras.

Os conectivos são:

precedência

Conectivos (operadores lógicos) :				
Nome:	Símbolo:	Utilização:	Leitura:	Variações:
negação	$\sim$	$\sim A$	"não A"	A', $\neg A$
conjunção	$\wedge$	$A \wedge B$	"A e B"	&, &&
disjunção	$\vee$	$A \vee B$	"A ou B"	||
implicação	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$	"A implica B" ("se A então B; "B é conseqüência de A")	$\supset$
bicondicional	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$	A se e somente se B	

Os primeiros elementos da tabela possuem maior precedência que os últimos. O conectivo **¬** é o que possui a maior precedência, isto é, deve ser avaliado primeiro que os outros.

Exemplos:

1) Napoleão não morreu.

Considerando que a proposição **A** é: "Napoleão morreu.", a frase acima é representada por **¬ A** (Não é verdade que Napoleão morreu).

2) Dois é primo e três é par.

Considerando as proposições:

B : Dois é primo.
C : Três é par.

A frase é representada por: (**B ∧ C**)

3) A resposta é dois ou três.

D : A resposta é dois.
E : A resposta é três.

Fórmula: (**D ∨ E**)

(Observe que neste caso, uma parte da proposição E está implícita na frase.)

4) Se a chuva continuar, o rio vai transbordar.

F : A chuva continua.
G : O rio vai transbordar.

Fórmula: (**F → G**) (A palavra "então" está implícita)

5) Os abacates estão maduros se e somente se estão escuros.

H : Os abacates estão maduros.
I : Os abacates estão escuros.

Fórmula: (**H ↔ I**) (Uma parte da proposição I está oculta na frase.)

Variáveis proposicionais:

Podem assumir como valor qualquer proposição e portanto não possuem valor-verdade definido. São representadas por letras minúsculas: **p**, **q**, ...

Fórmulas proposicionais:

São representadas por letras maiúsculas de caligrafia: **A** , **B** , **C** , ...

1) Qualquer variável proposicional é uma fórmula proposicional
2) Se **A** e **B** são fórmulas proposicionais, então: **¬ A** , (**A ∧ B**), (**A ∨ B**), (**A → B**) e (**A ↔ B**) também são.
3) Nada mais é uma fórmula proposicional.

Este é um exemplo de definição indutiva.

Ex. **Fórmulas proposicionais bem-formadas** - **fbf** (ou wff - *well-formed formula*):

P
¬ p
q
(p ∧ q)
(¬ ¬ p ∨ q)

¬ (p ∧ q)
(¬ (p ∧ q) → p)
((p ∧ q) → (¬ (q ∨ r)))

Exercícios

1. Identifique quais das frases abaixo são proposições:
   a) Dez é um número primo.
   b) Como vai você?
   c) O número 16 é um quadrado perfeito.
   d) Existem formas de vida em outros planetas do universo.
   e) 2312 > (45 * 13) + 7

2. Identifique quais das expressões abaixo são fórmulas lógicas:
   a) $(p \wedge (q \vee p))$
   b) $(p \wedge (q \neg p))$
   c) $(\vee p \vee q)$
   d) $(\neg (\neg p \rightarrow \neg (q \vee r)) \wedge \neg q)$

4. Sejam as proposições:
   A : Pedro saiu.
   B : Maria está aqui.

   Forme sentenças na linguagem natural que correspondam às fórmulas:

   a) $\neg A$
   b) $\neg B$
   c) $A \wedge B$
   d) $A \vee B$
   e) $\neg A \vee B$
   f) $\neg (A \wedge B)$
   g) $\neg A \wedge \neg B$
   h) $\neg A \vee \neg B$
   i) $A \rightarrow B$
   j) $\neg B \rightarrow \neg A$
   k) $(A \wedge B) \rightarrow \neg A$
   l) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
   m) $\neg A \leftrightarrow B$

5. Represente as frases abaixo através de fórmulas lógicas:
   a) Se a demanda permaneceu constante e os preços subiram, então a oferta diminuiu.
   b) Nós ganharemos a eleição somente se João for eleito o líder do partido.
   c) Se João não for o líder do partido, então Manoel ou Joaquim deixarão o posto e perderemos a eleição.
   d) Se x é um número racional e y é inteiro, então z não é real.
   e) O assassino já deixou o país ou alguém o está escondendo.
   f) Se o assassino não deixou o país, então alguém o está escondendo.
   g) A soma de dois números é par se e somente se ambos forem pares ou ambos forem ímpares.
   h) Se y é inteiro então z não é real, desde que x seja um número racional.

6. No exercício anterior, existem frases com o mesmo significado?

Tabela-Verdade de Fórmulas Bem-Formadas

Sintaxe de uma fbf: maneira que a fórmula é construída com os conectivos **e**, **não**, **ou**, ...

Semântica de uma fbf: significado da fórmula; é o valor verdade a ela associado.

Para analisar o valor-verdade de uma fórmula proposicional em função dos valores das variáveis proposicionais, utiliza-se a tabela-verdade.

Existe uma tabela para cada conectivo:

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplos:

Neste fim-de-semana, vou estudar Lógica <u>e</u> Cálculo.
Neste fim-de-semana, vou estudar Lógica <u>ou</u> Cálculo.

<u>Se</u> chover, <u>então</u> vou estudar Lógica.
Vou estudar Lógica <u>somente se</u> chover.

O objetivo é analisar o **valor-verdade** de uma fórmula para cada combinação possível de valores-verdade das variáveis que a compõem. Assim, é necessária uma linha para cada combinação de valores-verdade, e o total de linhas da tabela será $\mathbf{2^n}$, onde **n** é o número de variáveis diferentes que aparecem na fórmula.

Uma forma segura de não esquecer nenhuma combinação possível é começar, na primeira variável, colocando **V** na primeira metade das linhas, e **F** na segunda metade. Para a segunda variável, deve-se começar com a metade de valores V utilizados na primeira, e assim por diante.

Exemplos:

$(p \rightarrow (q \vee r))$

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \rightarrow (q \vee r))$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

Observe que a tabela nos mostra que só há um caso em que a fórmula $(p \rightarrow (q \vee r))$ é falsa: quando a variável p é verdadeira e as variáveis q e r são falsas.

Outra forma de representar esta mesma tabela é:

	$\Downarrow$			
(p	$\rightarrow$	(q	$\vee$	r))
V	V	V	V	V
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	V	F	F	F

Nesta representação, o resultado de cada operação é escrito abaixo do próprio operador. Assim, o resultado de $(q \vee r)$ está abaixo do operador $\vee$, e o resultado da fórmula inteira está abaixo do operador principal, que é $\rightarrow$. Em qualquer fórmula, denomina-se operador principal aquele que deve ser o último a ser resolvido, e o resultado da análise da fórmula sempre estará abaixo dele. Por isso, deve ser marcado de algum modo. Aqui, utilizamos o símbolo $\Downarrow$.

Outro exemplo:

$\sim (p \leftrightarrow (\sim q \ \wedge \sim p))$

$\Downarrow$							
$\sim$	(p	$\leftrightarrow$	($\sim$	q	$\wedge$	$\sim$	p))
V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F

Observe que se deve deixar uma coluna separada para a negação. E também que quando se trata da mesma variável (no caso p), deve-se repetir a coluna dos valores-verdade. Nesta fórmula, o conectivo principal é a negação, na primeira coluna.

				$\Downarrow$			
	(p	$\vee$	q)	$\rightarrow$	(p	$\wedge$	q)
1ª	V	V	V	V	V	V	V
2ª	V	V	F	F	V	F	F
3ª	F	V	V	F	F	F	V
4ª	F	F	F	V	F	F	F

Validade e Inconsistência

O valor-verdade (ou simplesmente *valor*) de uma fórmula diz respeito a uma interpretação particular. Assim, é possível encontrar as seguintes situações:

1. Se uma fórmula ***A*** tem o valor VERDADEIRO numa certa interpretação I, diz-se que "***A*** *é verdadeira na interpretação I*".

   No exemplo anterior, a fórmula $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é VERDADEIRA nas interpretações 1 e 4.

2. Se uma fórmula ***A*** é VERDADEIRA segundo alguma interpretação, diz-se que ***A*** é ***satisfatível*** (ou ***consistente***).

   A fórmula $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é ***consistente*** ou ***satisfatível***.

3. Uma fórmula ***A*** é ***válida*** quando for VERDADEIRA em todas as suas interpretações. São chamadas de **TAUTOLOGIA**.

   <u>Exemplos:</u>

   a) $(p \vee \neg p)$

   b) $(p \rightarrow (q \vee p))$

(p	∨	~	p)
V	V	F	V
F	V	V	F

(p	→	(~	q	∨	p))
V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F

> Observe que na coluna do conectivo principal (∨ para a primeira fórmula e → para a segunda) todas as linhas possuem o valor-verdade V. Isto significa que estas fórmulas nunca serão falsas. Isto pode ser compreendido quando se substitui as variáveis por uma proposição qualquer. A primeira fórmula é um ∨ de uma proposição com sua negação. É como: "Ou isto ocorre ou não ocorre." Esta frase sempre será verdadeira.

4. Se uma fórmula ***A*** tem o valor FALSO numa certa interpretação I, diz-se que "***A*** *é falsa na interpretação I*".

5. Se uma fórmula ***A*** é FALSA segundo alguma interpretação, diz-se que ***A*** é ***inválida***.

   No exemplo anterior, a fórmula $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é FALSA nas interpretações 2 e 3.

6. Uma fórmula ***A*** é ***insatisfatível*** (ou ***inconsistente***) quando for FALSA em todas as suas interpretações. São chamadas de **CONSTRADIÇÕES**.

   <u>Exemplos</u>:

   a) (p ∧ ¬p)

   b) ¬(p → (¬q ∨ p))

(p	∧	~	P)
V	F	F	V
F	F	V	F

~	(p	→	(~	q	∨	p))
F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Observe que na coluna do conectivo principal (∧ para a primeira fórmula e ~ para a segunda) todas as linhas possuem o valor-verdade F. Isto significa que estas fórmulas sempre serão falsas. Um exemplo de proposição deste tipo é: "Três é ímpar e três não é ímpar." Esta frase sempre será falsa. Observe a segunda fórmula: a negação de uma tautologia é sempre uma contradição, e vice-versa.

7. Uma fórmula que não é TAUTOLOGIA nem CONTRADIÇÃO é denominada fórmula **CONTINGENTE** ou **CONTINGÊNCIA**.

<u>Exemplos:</u>

a) $p \wedge q$

b) $p \vee q$

c) $p \rightarrow q$

As seguintes observações podem então ser constatadas:

- Uma fórmula é **inconsistente** se, e somente se, sua negação for **válida**.
- Uma fórmula é **inválida** se, e somente se, existe pelo menos uma interpretação na qual ela é FALSA.
- Uma fórmula é **consistente** se, e somente se, existe pelo menos uma interpretação na qual ela é VERDADEIRA.
- Se uma fórmula é **válida** então ela é **consistente**, mas não vice-versa.
- Se uma fórmula é **inconsistente**, então ela é **inválida**, mas ao vice-versa.

Pode ser facilmente verificado através do uso de tabelas-verdade que:

a) $(p \wedge \neg p)$ é inconsistente (contradição), portanto inválida (pelo menos uma interpretação F);

b) $(p \vee \neg p)$ é válida (tautologia), portanto consistente (pelo menos uma interpretação V);

c) $(p \rightarrow \neg p)$ é inválida, ainda que consistente.

Consequência Lógica (ou Implicação Lógica)

Diz-se que uma fórmula ***A*** **implica logicamente** ***B*** (ou ***B*** **é implicada logicamente por** ***A***, ou ainda que ***B*** **é consequência lógica de** ***A***), se e somente se a fórmula **(*A* → *B*)** é uma TAUTOLOGIA.

Se **A implica logicamente B** (ou **B é consequência lógica de A**), isso significa que sempre que ***A*** for VERDADE, ***B*** também será VERDADE.

Exemplo:

(p ∧ q) e (p ∨ q).

⇓

((p	∧	q)	→	(p	∨	q))
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

Logo: **(p ∧ q) ⊨ (p ∨ q)**.

Equivalência Lógica

Diz-se que duas fórmulas ***A*** e ***B*** são **logicamente equivalentes** (**A ≡ B**) se e somente se a fórmula (A ↔ B) é uma tautologia.

Exemplo:

(p → q) e (¬p ∨ q).

⇓

((p	→	q)	↔	(~	p	∨	q))
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F

Logo: **(p → q) ≡ (¬ p ∨ q)**.

Formas Normais

Algumas vezes, pode-se desejar expressar diversas fórmulas em um mesmo formato – um formato único, padronizado. Para isso, existem diversos procedimentos. Um deles consiste em encontrar o equivalente da fórmula na **Forma Normal Disjuntiva** ou na **Forma Normal Conjuntiva**.

Forma Normal Disjuntiva (**FND**):

1. Contém, no máximo, os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
2. Não contém negação sobre $\wedge$ nem sobre $\vee$.
3. Não contém $\wedge$ sobre $\vee$.

Exemplos:

p

$\neg p$

$(p \vee q)$

$(p \vee q) \vee r$

$(p \wedge q) \vee r$

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Não estão na FND:

$(p \rightarrow q)$ (não é FND, pois contém $\rightarrow$)

$\neg (p \vee q)$ (não é FND, pois contém $\neg$ sobre $\vee$)

$r \vee \neg(p \wedge q)$ (não é FND, pois contém $\neg$ sobre $\wedge$)

$(p \vee q) \wedge r$ (não é FND, pois contém $\wedge$ sobre $\vee$)

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (não é FND, pois contém $\wedge$ sobre $\vee$)

Para encontrar a fórmula FND equivalente a uma fórmula dada, partimos de sua tabela-verdade.

Seja, por exemplo, a tabela-verdade a seguir, da qual não se conhece a fórmula. O objetivo é encontrar uma fórmula FND que possua na coluna do resultado os valores abaixo.

p	q	r	Resultado desejado
V	V	V	**V**
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	**V**
F	F	V	F
F	F	F	**V**

Para encontrar a FND, parte-se das linhas em que o valor do resultado é V (verdadeiro). Para esta fórmula, são as linhas 1, 6 e 8. Para cada uma destas linhas será necessário escrever uma componente FND, encontrada com base nos valores das variáveis (p, q e r).

Na primeira linha, os valores são: p = V, q = V e r = V. Assim, a componente FND fica simplesmente $(p \wedge q \wedge r)$.

Já na linha 6, os valores são: p = F, q = V e r = F. Para esta linha, a componente FND será $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$. Observa-se que quando o valor da variável aparece falso em determinada linha, esta aparecerá negada na componente FND.

Para a linha 8, então, que possui todos os valores falsos, a componente FND = $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

p	q	r	Resultado desejado	**Componente FND**
V	V	V	V	$(p \wedge q \wedge r)$
V	V	F	F	
V	F	V	F	
V	F	F	F	
F	V	V	F	
F	V	F	V	$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
F	F	V	F	
F	F	F	V	$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Componente FND: é uma *conjunção de literais*, ou apenas um único *literal*.

Não é necessário adotar nenhum procedimento com as outras linhas, as de resultado falso. A fórmula FND resultante será: $\mathbf{(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)}$. Esta fórmula, se resolvida, apresentará os valores da tabela na coluna do resultado.

Forma Normal Conjuntiva (**FNC**):

1. Contém, no máximo, os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
2. Não contém negação sobre $\wedge$ nem sobre $\vee$.
3. Não contém $\vee$ sobre $\wedge$.

Exemplos:

p

$\neg p$

$(p \vee q)$

$(p \vee q) \vee r$

$(p \wedge q) \wedge r$

$(p \vee q) \wedge r$

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Não estão na FNC:

$(p \leftrightarrow q)$	(não é FNC, pois contém $\leftrightarrow$)
$\neg (p \vee q)$	(não é FNC, pois contém $\neg$ sobre $\vee$)
$r \vee \neg(p \wedge q)$	(não é FNC, pois contém $\neg$ sobre $\wedge$)
$(p \wedge q) \vee r$	(não é FNC, pois contém $\vee$ sobre $\wedge$)
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(não é FNC, pois contém $\vee$ sobre $\wedge$)

Para encontrar a fórmula FNC equivalente a uma fórmula dada, o procedimento é semelhante ao da FND. Também partimos de sua tabela-verdade.

Para a tabela-verdade a seguir, da qual não se conhece a fórmula, agora as linhas selecionadas são as de resultado falso (F). Elas é que terão uma componente FNC.

p	q	r	Resultado desejado
V	V	V	V
V	V	F	**F**
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	**F**
F	F	V	**F**
F	F	F	V

Para encontrar a FNC, parte-se das linhas em que o valor do resultado é F (falso). Para esta fórmula, são as linhas 2, 6 e 7. Para cada uma destas linhas será necessário escrever uma componente FNC, encontrada com base nos valores das variáveis (p, q e r).

Na linha 2, os valores são: p = V, q = V e r = F. Agora, o procedimento é o contrário do anterior: as variáveis com valor V é que ficam negadas na componente FNC. Assim, a componente FNC será: $(\neg p \vee \neg q \vee r)$. Observe também que agora utiliza-se o conectivo $\vee$ entre as variáveis.

Já na linha 6, os valores são: p = F, q = V e r = F. Para esta linha, a componente FNC será $(p \vee \neg q \vee r)$.

Para a linha 7, então, que possui p e q falsos, a componente FNC = $(p \vee q \vee \neg r)$

p	q	R	Resultado desejado	**Componente FNC**
V	V	V	V	
V	V	F	F	$(\neg p \vee \neg q \vee r)$
V	F	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	V	
F	V	F	F	$(p \vee \neg q \vee r)$
F	F	V	F	$(p \vee q \vee \neg r)$
F	F	F	V	

Componente FNC: é uma *disjução de literais*, ou apenas um único *literal*.

A fórmula FNC resultante será: $\mathbf{(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)}$. Esta fórmula, se resolvida, apresentará os valores da tabela na coluna do resultado.

As fórmulas FNC e FND podem ser maiores ou menores, dependendo da quantidade de valores verdadeiros (FND) e falsos (FNC) na coluna do resultado.

Também é possível calcular as fórmulas FND e FNC para uma dada fórmula qualquer, bastando para isso construir sua tabela-verdade e seguir o procedimento aqui descrito.