Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica, A.A. 2022-23
Elementi di calcolo delle probabilità e statistica (Docente: Bertini)
Esame del 13.2.2023

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni esclusivamente su questo foglio giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1.(6 punti) Si dispone di una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito che si vuole determinare.
Si lancia la moneta n volte ottenendo testa k volte. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.

Esercizio 2.(8 punti) Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) si sfidano in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo incontro si affrontano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo incontro è proclamato vincitore; se invece vince C, costui gioca contro il perdente dell'incontro precedente e così di seguito. Il primo giocatore che vince due incontri consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A, B e C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni incontro è vinto da uno dei due contendenti con probabilità 1/2.

i) Qualche giocatore è avvantaggiato dalle regole?

ii) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo n incontri, $n \geq 2$.

iii) Calcolare le probabilità di vittoria per A, B e C.

iv) Il torneo potrebbe non avere mai termine?

Esercizio 3.(8 PUNTI) Il giuoco della *roulette* consiste nella scelta casuale di un numero tra $0, 1, \ldots, 36$. Il numero 0 non è né pari né dispari.

i) Calcolare la probabilità che il numero estratto sia dispari e maggiore di 24.

ii) Sapendo che il numero estratto è dispari, calcolare la probabilità che questo sia maggiore di 24.

iii) Si gioca alla roulette consecutivamente per 1000 turni, puntando sempre sul numero 0. Calcolare la probabilità di vincere almeno 10 volte.

Esercizio 4.(8 PUNTI) Sia X la variabile aleatoria uniforme in $\{-2, -1, 1, 2\}$, ovvero

$$\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Sia inoltre Y la variabile aleatoria definita da $Y = X^2$.

i) Determinare la distribuzione congiunta di X e Y.

ii) Dire, giustificando la risposta, se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

iii) Calcolare la distribuzione di X condizionata a $Y = 1$.