Problemas de Relatividade

Ricardo Mendes Ribeiro

20 de Abril de 2021

Problemas sobre o Espaço-tempo e Referenciais

Conversão de unidades

1. Compare as velocidades de um automóvel, um avião a jato, um satélite em torno da Terra, a Terra em órbita do Sol e um pulso de luz.

   Faça isto por comparação com a distância que viaja num intervalo fixo de tempo.

   Um carro a 105 km/h avança 1 metro em cerca de 35 ms (35×10^{-3}s).

   (a) Quanto anda um avião a jato nesse intervalo de tempo (velocidade: 1046 km/h)?

   (b) Quanto se desloca um satélite da Terra nesse tempo (velocidade: 27350 km/h)?

   (c) Quanto se desloca a Terra na sua órbita em torno do Sol (velocidade: 30 km/s)?

   (d) Quanto se desloca um pulso de luz (velocidade: 3×10^8 m/s)? Quantas vezes maior é esta distância do que a de Boston a Lisboa (5132 km)?

   R: [1]

2. No dia 24 de Agosto de 1989, a nave *Voyager II* passou pelo planeta Neptuno.

   As imagens do planeta foram codificadas e transmitidas para a Terra por um retransmissor de microondas.

   Este sinal de microondas demorou 4 horas e 6 minutos a viajar de Neptuno até à Terra.

   As microondas viajam à velocidade da luz, ou seja um metro de distância em um metro de tempo de viagem da luz, ou 299792458 m/s.

   Ignore os movimentos relativos da Terra e Neptuno.

   Calcule a distância entre a Terra e Neptuno em unidades de minutos, segundos, anos, metros e kilómetros.

   R:[2]

3. A luz move-se a uma velocidade de 3×10^8 m/s.

   Uma milha é aproximadamente 1610 metros.

   (a) Quantos metros tem um dia?

   (b) Quantos segundos de distância tem uma milha?

(c) Quantas semanas de distância tem um ano luz?

R:[3]

4. Num segundo, um computador de secretária pode executar um milhão de milhões de operações em sequência.

Uma instrução pode ser, por exemplo, multiplicar dois números.

Em linguagem técnica, esse computador dir-se-ía que opera a um "teraflop".

Assuma que efectuar uma operação requer a transmissão de dados da memória (onde os dados são armazenados) para o processador (onde são efectuadas as computações) e de volta do processador para a memória, para armazenamento.

(a) Estime o tamanho máximo de uma máquina "teraflop", ou seja, capaz de efectuar 10^{12} operações por segundo.

Essa distância máxima aumenta ou diminui se o sinal viaja através de condutores eléctricos, que funcionam a metade da velocidade da luz no vácuo?

(b) Quando os computadores funcionavam a um "gigaflop", ou seja, efectuavam 10^{9} instruções sequenciais por segundo, qual era a distância máxima média entre a memória e o processador?

(c) **Discussão:** A maioria dos computadores pessoais normais têm vários processadores (ou cores) que desempenham juntos uma dada tarefa (processamento paralelo).

Pode-se pensar que uma máquina com 10000 processadores poderia desempenhar uma dada tarefa em 1/10000 do tempo.

No entanto, muitos problemas computacionais não podem ser divididos desta maneira e, em todo o caso, uma fracção da capacidade de computação tem de ser gasta em coordenar os processadores.

Quais são os limites que a física impõe à capacidade de processamento paralelo?

5. O Sol emite tremendas quantidades de partículas que viajam em direcção à Terra.

Um astrónomo na Terra vê a emissão através de um telescópio solar e lança o aviso.

O Astrónomo sabe que, quando as partículas chegarem, vão provocar graves perturbações nos sistemas de telecomunicações.

Os sistemas de comunicações demoram três minutos a passar de transmissão via rádio a transmissão via cabo.

Qual é a velocidade máxima das partículas para que a passagem para a transmissão por cabo seja a tempo, entre o aviso e a chegada das partículas?

Assuma o Sol a 500 segundos-luz da Terra.

R: [4]

Intervalo de Espaço-tempo

6. Um foguete entra pela porta da frente e vai a toda a velocidade na direcção da porta de trás, ao longo do corredor. De cada vez que o relógio do foguete faz um *tic*, salta uma faísca.

Quando passa junto do João, que está junto à porta do seu laboratório, a faísca emitida nesse instante salta para a caneta que tem no bolso da camisa.

O segundo flash dá-se quando o foguete atinge a porta de trás, ao fazer uma faísca com o puxador da porta.

A porta está a 4 metros do João, que mede um tempo entre faíscas de 16.6782048 ns.

(a) Qual é o tempo entre faíscas, medido em metros pelo João, que é o observador do laboratório?

(b) Qual é o valor do intervalo de espaço-tempo entre os dois eventos, calculado a partir das medidas do João?

(c) Qual é o valor do intervalo calculado a partir de medidas feitas no referencial do foguete?

(d) Qual é a distância entre flashes medida no referencial do foguete?

(e) Qual é o tempo (em metros) entre faíscas medido no referencial do foguete? Compare com o tempo entre as mesmas faíscas medidas no referencial do João.

(f) Qual é a velocidade do foguete medida no referencial do João?

R: [5]

7. Um protão movendo-se a 3/4 da velocidade da luz (em relação ao laboratório) passa por dois detectores separados por 2 metros. Os eventos 1 e 2 são os trânsitos pelos detectores.

   Quais são as separações de espaço e de tempo no laboratório entre os dois eventos, em metros?

   Quais são as separações de espaço e de tempo no referencial do protão entre os dois eventos?

   R: [6]

8. Uma pedra em alta velocidade atravessa a alta atmosfera da Terra, criando uma curta cauda luminosa (evento 1) e continua o seu caminho até se estampar no Sol (evento 2) 10 minutos mais tarde, observado da Terra.

   Assuma que o Sol está a 1.4960×10^{11} metros da Terra.

   No referencial da Terra, quais são as separações de espaço e tempo entre os eventos 1 e 2 em minutos?

   Quais são as separações de espaço e tempo entre os eventos 1 e 2 no referencial da pedra?

   R: [7]

9. No século XXIII, uma nave espacial sai da Terra (evento 1) e viaja a 95% da velocidade da luz, chegando a Proxima Centauri (evento 2), que fica a 4.3 anos-luz da Terra.

   Quais são as separações de espaço e de tempo entre os eventos 1 e 2, medidos no referencial da Terra, em anos?

	Foguetão Tempo (s)	Laboratório Tempo (s)	Laboratório Distância (s-luz)
Exemplo	20	29	21
a	?	10.72	5.95
b	20	?	99
c	66.8	72.9	?
d	?	8.34	6.58
e	21	22	?

Tabela 1: Separação de Espaço e Tempo

Quais são as separações de espaço e de tempo entre esses eventos, no referencial da nave espacial?

R: [8]

10. O relógio de um foguetão emite dois flashes de luz e o observador no foguetão toma nota do tempo (em segundos) entre os dois flashes.

    O observador no laboratório toma nota do tempo (em segundos) e da separação espacial entre os flashes (em segundos-luz).

    Os resultados obtidos estão na primeira linha da tabela 1.

    Outros foguetões (a, b, ..., e) fazem o mesmo. Complete a tabela 1.

11. Dois foguetes explodem no mesmo lugar no laboratório, separados por um intervalo de tempo de 3 anos, medidos no relógio do laboratório.

    (a) Qual é a distância espacial entre estes dois eventos medidos por um foguetão no qual os eventos estão separados por um intervalo de tempo de 5 anos?

    (b) Qual é a velocidade relativa do foguetão em relação ao laboratório?

    R: [9]

12. A tabela 2 mostra distâncias entre cidades.

    As unidades são kilómetros.

    Assuma que todas as cidades se encontram no mesmo plano.

    (a) Use uma régua e um compasso para construir o mapa destas cidades. Escolha uma escala adequada, por exemplo 1 cm no mapa corresponde a 10 km na Terra.

    Discussão: Como começar? Com três escolhas arbitrárias:

    i. Escolha uma cidade para ser o centro do mapa.

    ii. Escolha outra cidade para estar orientada para 'norte', isto é, uma direcção arbitrária.

    iii. Mesmo com esta escolha ainda há dois sítios one se pode pôr a terceira cidade; escolha um deles arbitrariamente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	20.0	28.3	28.3	28.3	20.0	28.3	44.7
B		0	20.0	20.0	44.7	40.0	44.7	40.0
C			0	40.0	40.0	44.7	56.6	60.0
D				0	56.6	44.7	40.0	20.0
E					0	20.0	40.0	72.1
F						0	20.0	56.6
G							0	44.7
H								0

Tabela 2: Distâncias entre cidades

(b) Se rodar o mapa completo no seu próprio plano - por exemplo, mantendo-o plano sobre a mesa - o mapa resultante também satisfaz as distâncias da tabela?

(c) Levante o mapa entre si e uma lâmpada, com as marcas do papel voltadas para a luz. O mapa visto de costas também satisfaz as distâncias da tabela?

13. A galáxia Andrómeda está a aproximadamente a dois milhões de anos-luz da Terra, medido no referencial da Terra.

    É possível viajar da Terra a Andrómeda numa vida?

    Prepare a resposta considerando uma série de viagens da Terra a Andrómeda.

    Por simplicidade, considere a distância exactamente dois milhões de anos-luz, trate a Terra e Andrómeda como se fossem pontos, e despreze qualquer movimento relativo entre as duas.

    (a) Viagem 1: a sua viagem demora 2.01×10^6 anos (medido no referencial da Terra) a percorrer a distância de 2.00×10^6 anos-luz. Quanto tempo demora a viagem no referencial do foguetão?

    (b) Qual é a velocidade do foguetão da viagem da alínea anterior, medida no referencial da Terra?

    Exprima esse valor como uma fracção da velocidade da luz.

    Chame a esta fracção $v = v_{conv}/c$ em que v_{conv} é a velocidade em unidades convencionais (m/s).

    Discussão: Se o foguetão se mover a metade da velocidade da luz, demora 4×10^6 anos a cobrir a distância de 2×10^6 anos-luz. Nesse caso,

    $$v = \frac{2 \times 10^6 \text{anos-luz}}{4 \times 10^6 \text{anos}} = \frac{1}{2}$$

    Logo...

    (c) Viagem 2: A viagem demora 2.001×10^6 anos (medido no referencial da Terra).

    Quanto tempo demora medido no referencial do foguetão?

    Qual é a velocidade do foguetão nesta viagem, exprimido como uma fracção da velocidade da luz?

(d) Viagem 3: Agora marque a viagem de modo a durar 20 anos, que é o tempo que quer gastar para chegar a Andrómeda. Neste caso, qual é a velocidade do fogetão em termos de fracção da velocidade da luz?

Discussão: As soluções de muitos dos exercícios é facilitada pela aproximação que se obtém tomando os dois primeiros termos de uma expansão binomial:

$$(1+z)^n \approx 1 + n\,z$$

se

$$|\, z \,| \ll 1$$

Aqui n pode ser positivo ou negativo, uma fracção ou um inteiro; z pode ser positivo ou negativo, desde que o seu módulo seja muito menor do que a unidade.

R: [10]

14. A altitudes entre 10 e 60 km da superfície da Terra há raios cósmicos a chocar continuamente com os átomos de oxigénio e de azoto da atmosfera, produzindo muões (os muões são partículas elementares de massa igual a 207 vezes a massa do electrão, e é produzido em algumas reacções nucleares).

Alguns dos muões deslocam-se verticalmente em direcção à superfície da Terra a velocidades próximas da velocidade da luz.

Num dado conjunto de muões, ao fim de 1.5 microsegundos (1.5×10^{-6} s) medido no referencial no qual estão em repouso (referencial próprio), metade deles decai noutras partículas elementares.

Metade do restante decai nos 1.5 microsegundos seguintes, e assim por diante.

Analise os resultados deste decaímento observado por dois referenciais diferentes.

Idealize uma experiência algo complicada de realizar na prática, assumindo o seguinte: todos os muões são produzidos à mesma altitude de 60 km; todos viajam em linha recta na vertical; nenhum se perde em colisões com as moléculas de ar no percurso.

(a) Aproximadamente quanto tempo demoram esses muões a chegar à Terra, medido no referencial da Terra?

(b) Se o tempo de decaimento fosse o mesmo para observadores na Terra e a viajar com os muões, quantos tempos de vida teriam passado? Logo, qual a fracção de muões criados a 60 km de altitude que permanece quando chegam ao nível da água do mar? Pode exprimir o resultado como uma potência da fracção 1/2.

(c) Uma experiência determina que a fracção de muões que chega ao nível do mar é de 1/8. No referencial dos muões, quantos tempos médios passaram entre a sua criação e a sua chegada ao nível do mar?

(d) *No referencial dos muões*, qual é a separação espacial entre o nascimento de um muão e a sua chegada à superfície da Terra? (Cuidado!)

(e) A partir do intervalo de tempo e de espaço medidos no referencial dos muões, determine o intervalo de espaço-tempo entre o nascimento e a chegada de um muão à superfície da Terra.

R: [11]

15. As experiências em laboratório são mais convenientemente efectuadas com mesões-π^+ do que com muões μ.

    Numa dada amostra de mesões-π^+, metade decai em 18 nanosegundos (18×10^{-9} s), medidos no referencial em que os mesões-π^+ estão em repouso.

    Metade do que sobra decai nos 18 nanosegundos seguintes, e assim por diante.

    (a) Num acelerador de partículas, os mesões-π^+ são produzidos quando um feixe de protões atinge um alvo de alumínio dentro do acelerador. Os mesões deixam o alvo com velocidades próximas da da luz.

    Se não houvesse dilatação do tempo e se nenhum mesão fosse retirado do feixe por colisões, qual seria a distância máxima do alvo para a qual metade dos mesões permaneceria?

    (b) Os mesões-π^+ com interesse para uma determinada experiência têm uma velocidade de 0.9978 da velocidade da luz.

    Por que factor a distância para o decaimento de metade das partículas aumenta devido à dilatação do tempo, em relação à previsão da alínea anterior? Ou seja, por que factor o efeito de dilatação do tempo obriga a aumentar a distância entre o equipamento detector e o alvo?

R: [12]

Referenciais inerciais

16. Uma pessoa sobe para um elevador fechado que é disparado por um canhão na vertical.

    Suponha o elevador como movendo-se livremente no campo gravitacional, depois de ser disparado.

    Despreze a resistência do ar.

    (a) Enquanto o elevador está a dirigir-se para cima, a pessoa salta dentro do elevador. A pessoa irá (1) cair de volta ao chão do elevador? (2) atingirá o tecto do elevador? (3) ou outra coisa: o quê?

    (b) A pessoa espera até o elevador atingir o topo da sua trajectória e começar a cair de volta à Terra. A sua resposta na alínea anterior mantém-se?

    (c) Como pode uma pessoa dentro do elevador dizer quando atingiu o topo da trajectória?

R: [13]

17. Teste a sua habilidade como acrobata e contorcionista! Amarre uma balança de casa de banho debaixo dos pés e salte num trampolim, enquanto vai lendo a escala.

    Descreva as leituras da escala em diversos momentos durante os saltos.

    Durante que parte do salto a escala marca zero?

Desprezando a resistência do ar, qual o período do ciclo em que pode considerar estar num referencial em queda livre?

18. Considere duas esferas próximas da superfície da Terra e originalmente separadas de 20 m.

    Demonstre que, quando libertadas da posição de repouso (em relação à Terra), as esferas aproximam-se um milímetro quando caem 315 metros, usando o método dos triângulos semelhantes ou outro método.

    O raio da Terra é 6371 km.

19. Solte duas esferas (a partir do repouso) distanciadas de 20 m na horizontal, na superfície da Lua.

    Quanto é que a distância entre elas diminui quando descem 315 metros?

    Quantos segundos passam durante a queda?

    O raio da Lua é de 1738 km e a aceleração da gravidade na Lua é de 1.62 m/s^2.

    R: [14]

20. Estime a deflexão da luz de uma estrela pelo Sol usando uma análise elementar.

    Discussão: Considere primeiro um exemplo simples de um fenómeno parecido.

    Um elevador the dimensão L é libertado do repouso perto da superfície da Terra.

    No momento em que se liberta, é disparado um flash de luz horizontalmente de uma das paredes do elevador em direcção à parede oposta.

    Depois de solto, o elevador é um referencial inercial.

    Logo, o flash de luz atravessa o elevador em linha recta, no referencial do elevador.

    Em relação à Terra, no entanto, a flash de luz está a cair - porque o elevador está a cair.

    Logo, o flash de luz é deflectido no campo gravitacional, como Newton diria. (Como é que Einstein diria?)

    Outro exemplo: um raio de luz de uma estrela, ao passar tangencialmente à superfície da Terra é deflectido pela gravidade da Terra (além de qualquer refracção que haja pela atmosfera da Terra).

    No entanto, o tempo necessário para a luz atravessar a Terra é tão curto, e a consequência da deflexão é tão pequena, que este efeito ainda não foi detectado na Terra.

    À superfície do Sol, no entanto, a aceleração da gravidade é muito maior (275 m/s^2).

    Além disso, o tempo de passagem é muito maior porque o Sol tem um diâmetro maior, 1.4×10^9 m.

    Assuma no sucessivo que a luz passa tangencialmente à superfície do Sol.

    (a) Determine o "tempo efectivo de queda" a partir da velocidade da luz e do diâmetro do Sol, ou seja, o tempo que a luz demora a percorrer o diâmetro do Sol.

A partir deste tempo efectivo de queda, deduza a velocidade em direcção ao Sol no fim do período de interacção gravitacional, assumindo que a luz "cai" com a aceleração da gravidade na superfície do Sol.

(b) Comparando a velocidade lateral da luz com a sua velocidade em frente, deduza o ângulo de deflexão.

Uma análise apurada usando a Relatividade Restrita dá o mesmo resultado.

No entanto, a Relatividade Geral de Einstein (1915) previa outros efeitos, associados com alterações no comprimento do campo gravitacional, que produz algo como que uma refracção suplementar do raio de luz, e que duplica a deflexão prevista.

(Deflexão observada no eclipse solar de 1947: $(9.8 \pm 1.3) \times 10^{-6}$ rad; no de 1952: $(8.2 \pm 0.5) \times 10^{-6}$ rad).

R: [15]

Problemas envolvendo o princípio da relatividade

21. Dois referenciais inerciais que se sobrepõem estão em movimento uniforme relativo.

De acordo com o Princípio da Relatividade, quais das quantidades da lista seguinte devem *necessariamente* ser as mesmas quando medidas nos dois referenciais?

(a) O valor numérico da velocidade da luz no vácuo

(b) A velocidade de um electrão

(c) O valor da carga do electrão

(d) A energia cinética de um protão

(e) O valor do campo eléctrico num dado ponto

(f) O tempo entre dois eventos

(g) A ordem dos elementos na tabela periódica

(h) A primeira lei de Newton (um corpo em repouso permanece em repouso ...)

R: [16]

22. Quando Albert Einstein tinha 16 anos, pôs-se a pensar no seguinte problema: uma corredora olha para si própria através de um espelho que segura na mão, com o braço esticado. Se ela correr com uma velocidade próxima da velocidade da luz, será capaz de se ver no espelho? Analize a questão usando o Princípio da Relatividade.

23. No referencial do laboratório, o evento 1 ocorre em $x = 0$ anos, $t = 0$ anos. O evento 2 ocorre em $x = 6$ anos e $t = 10$ anos. Em todos os referenciais, o evento 1 ocorre também em $x = 0$ anos, $t = 0$ anos. As coordenadas z e y de ambos os eventos são zero em todos os referenciais.

(a) No referencial do foguete A, o evento 2 ocorre no tempo $t' = 14$ anos. Em que posição x' ocorrerá o evento 2 neste referencial?

(b) No referencial do foguete B, o evento 2 ocorre na posição $x'' = 5$ anos. Em que instante de tempo t'' ocorre o evento 2 neste referencial?

(c) A que velocidade em relação ao laboratório deve ir o foguete C se os eventos 1 e 2 ocorrerem no mesmo lugar neste referencial?

(d) Qual é o tempo entre os eventos 1 e 2 no referencial do foguete C da alínea anterior?

R: [17]

24. Considere a velocidade $v_{crit} = 1/7$ como o limite aproximado a partir do qual a mecânica de Newton deixa de ser válida, e se tem de usar a relatividade.

Determine se a mecânica de Newton é ou não adequada para analizar o movimento nos seguintes casos.

(a) Satélite a orbitar a Terra a uma velocidade de 30000 km/h.

(b) A Terra a circular em torno do Sol com uma velocidade orbital de 30 km/s.

(c) O electrão a circular em torno do núcleo do átomo de hidrogénio (assumindo um modelo clássico).

Nota: A velocidade clássica do electrão na orbital mais interior de um átomo de número atómico Z é dada por $v = Z/137$. Para o átomo de hidrogénio, $Z = 1$.

(d) O electrão na orbital mais interior de um átomo de ouro ($Z = 79$).

(e) O electrão após ser acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial de 5000 V, numa televisão a preto e branco.

Nota: Diz-se que o electrão nestas circunstâncias tem uma energia de 5000 electrões-volt, ou 5 keV. 1 eV$= 1.6\times10^{-19}$ J; tente usar a expressão clássica para a energia cinética para obter a velocidade.

(f) O electrão após ser acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial de 25000 V, numa televisão a cores.

(g) Um protão movendo-se com uma energia cinética de 15 MeV num núcleo atómico.

R: [18]

25. Uma partícula move-se dentro de um foguetão com uma velocidade $v'_y = \Delta y'/\Delta t'$ em relação ao foguetão, ao longo do eixo dos y' do referencial do foguetão. O foguetão move-se com uma velocidade v_{rel} (na direcção x) em relação ao referencial do laboratório.

Transforme os deslocamentos $\Delta y'$ e $\Delta t'$ em deslocamentos no laboratório Δx, Δy e Δt, usando as transformações de Lorentz.

Mostre que as componentes x e y da velocidade da partícula no referencial do laboratório são dadas por:

$$v_x = v_{rel}$$

$$v_y = v'_y\,(1 - v_{rel}^2)^{1/2}$$

26. Em 2200 AD (*Anno Domini*), o foguetão interestelar mais rápido que existe viaja com uma velocidade $v = 0.75$.

O João é enviado neste foguetão a toda a velocidade para Sirius, a estrela mais brilhante vista da Terra, que fica a uma distância de $D = 8.7$ anos-luz, medido do referencial da Terra.

O João fica lá durante um tempo $T = 7$ anos, medido no seu relógio, e depois volta, com a mesma velocidade $v = 0.75$. Assuma que Sirius está em repouso em relação à Terra.

A partida da Terra é o evento de referência (ou seja, aquele em que o evento tem coordenadas zero de tempo e de espaço para todos os observadores).

De acordo com os observadores na Terra:

(a) Em que tempo chega o foguetão a Sirius?

(b) Em que tempo o foguetão deixa Sirius?

(c) Em que tempo o foguetão chega de volta à Terra?

De acordo com as observações do João:

(d) Em que tempo chega o foguetão a Sirius?

(e) Em que tempo o foguetão deixa Sirius?

(f) Em que tempo o foguetão chega de volta à Terra?

(g) Qual é a distância entre a Terra e Sirius medida pelo João?

R:[19]

Problemas de momento-energia

1. A energia e o momento de uma partícula, medidos no laboratório são dados por:

$$E = 6.25 \text{ kg}$$
$$p_x = 1.25 \text{ kg}$$
$$p_y = p_z = 2.50 \text{ kg}$$

   Qual é o valor da sua massa?

   R: [20]

2. Um objecto de 3 kg de massa move-se 8 m ao longo do eixo dos xx em 10 m de tempo, medidos no laboratório.

   (a) Qual é a sua energia e o seu momento, medidos no laboratório?

   (b) Qual a sua energia em repouso?

   (c) Qual a sua energia cinética?

   (d) Qual seria a sua energia cinética segundo a mecânica de Newton?

   R: [21]

3. Para cada um dos casos seguintes, escreva as quatro componentes do quadri-vector momento-energia no referencial pedido, na forma (E, p_x, p_y, p_z). Cada partícula tem massa m.

   (a) A partícula move-se na direcção positiva do eixo dos xx no laboratório, com uma energia cinética igual a três vezes a sua energia em repouso.

   (b) A mesma partícula é observada a partir de um foguete, em cujo referencial a energia cinética da partícula é igual à massa da partícula.

   (c) Outra partícula move-se na direcção yy no referencial do laboratório, com um momento que é duas vezes a sua massa.

   (d) Uma terceira partícula move-se na direcção negativa do eixo dos xx, em relação ao laboratório, com uma energia total que é quatro vezes a sua massa.

   (e) Uma outra partícula move-se com momento igual nas três direcções x, y e z, em relação ao laboratório, e energia cinética igual a quatro vezes a sua energia em repouso.

   R: [22]

Distância no laboratório Δx entre flashes (m)	Momento $mdx/d\tau$ (GeV)	Energia (GeV)	Factor compressão do tempo γ	Tempo do laboratório entre flashes (m)
0				
0.1				
1				
5				
10				
10^3				
10^6				

Tabela 3: Preencher a tabela

4. Dois comboios, cada um com uma massa de 5×10^6 kg viajam em direcções opostas, com uma velocidade de 42 m/s em relação à linha. Eles colidem frontalmente, e param.

   (a) Calcule em miligramas a energia cinética para cada comboio (use a expressão de Newton).

   (b) Qual é a diferença entre a soma das massas dos dois comboios e a massa do sistema depois da colisão?

   R: [23]

5. Um protão emite um flash de luz por cada metro do seu (próprio) tempo $d\tau$. Entre sucessivos flashes, o protão viaja a distância dada na coluna da esquerda da tabela 3.

   Assuma a energia de repouso do protão igual a 1 GeV $= 10^9$ eV, e exprima o momento nas mesmas unidades.

   Sugestão: evite calcular ou usar a velocidade em problemas relativísticos: é demasiado próxima da unidade para distinguir entre protões com energias radicalmente diferentes.

   Dois dígitos significativos deverão ser suficientes.

6. O SLAC (Stanford Linear Accelerator) acelera electrões até uma energia cinética final de 47 GeV. Os electrões de alta energia resultantes são usados para experiências com partículas elementares. Ondas electromagnéticas produzidas em grandes tubos de vácuo aceleram os electrões ao longo de tubos com cerca de 3000 m de comprimento.

   Assuma a energia em repouso do electrão como sendo $m \approx 0.5$ MeV.

   (a) Os electrões aumentam a sua energia por valores aproximadamente iguais por cada metro que viajam no tubo, observado no referencial do laboratório.

   Qual é o ganho de energia em MeV/m?

   Suponha que a expressão de Newton para a energia estava correcta; quantos metros se deslocaria o electrão no tubo até alcançar a velocidade da luz?

(b) Na realidade, mesmo os electrões com 47 GeV de energia não chegam à velocidade da luz. Qual é o valor da diferença $(1 - v)$ entre a velocidade da luz e a velocidade desses electrões medidos no referencial do laboratório?

Sugestão: para v muito próximo de um, $1 - v^2 = (1 + v)(1 - v) \approx 2(1 - v)$.

(c) Suponha que estes electrões são lançados com esta energia, juntamente com um flash de luz, por um tubo que atravessa a Terra (diâmetro 12740 km). Calcule quantos milímetros a luz chega à frente dos electrões.

(d) Qual é o comprimento do tubo de 3000 m do acelerador, visto pelos electrões?

R: [24]

7. Entre 1968 e 1987, o detector de raios cósmicos de Haverah Park (UK) detectou mais de 25000 raios cósmicos com energias maiores do que 4×10^{17} eV, incluindo cinco com uma energia de aproximadamente 10^{20} eV (a energia de repouso do protão é aproximadamente 10^9 eV).

   (a) Suponha que um raio cósmico é um protão com uma energia de 10^{20} eV. Quanto tempo demoraria este protão a cruzar a nossa galáxia, medido pelo seu tempo? O diâmetro da nossa galáxia é aproximadamente 10^5 anos-luz. Quantos séculos demoraria medidos no referencial da Terra?

   (b) Os investigadores de Haverah Park não encontraram nenhuma evidência de um limite superior para a energia dos raios cósmicos. Qual é a energia que um protão deve ter (em unidades da energia de repouso do protão) para que a nossa galáxia apareça, pela contracção de Lorentz, com o diâmetro do núcleo atómico (o diâmetro do núcleo atómico é da ordem de 1 fm $= 10^{-15}$ m. Quantas toneladas de massa teriam de ser convertidas em energia com uma eficiência de 100%, para acelerar o protão a essa energia?

R: [25]

Massa de um sistema

8. Determine a massa $M_{sistema}$ para cada um dos seguintes sistemas de partículas. As partículas que compõem estes sistemas não interactuam entre si. Exprima a massa do sistema em termos da unidade de massa m. Não utilize momento ou velocidades na resposta.

   (a) Partícula de massa m com uma energia cinética de valor $E_c = 3m$ e uma partícula de massa m em repouso.

   (b) Partícula de massa m com uma energia cinética de valor $E_c = 5m$ e uma partícula de massa m com uma energia cinética de valor $E_c = 5m$, dirigindo-se no sentido oposto.

   (c) Partícula de massa $3m$ com uma energia cinética de valor $E_c = 7m$ e uma partícula de massa m em repouso.

   (d) Partícula de massa m com uma energia cinética de valor $E_c = 6m$ a mover-se perpendicularmente a outra partícula de massa m com uma energia cinética de valor $E_c = 6m$.

R: [26]

9. Um fotão não tem energia de repouso (ou seja, não tem massa). No entanto, um fotão pode contribuir com energia e momento para um sistema de objectos. Logo, a presença de um ou mais fotões pode aumentar a massa de um sistema. Mais ainda: um sistema com apenas fotões (de massa zero) pode ter uma massa diferente de zero.

   Determine a massa $M_{sistema}$ para cada um dos seguintes sistemas. As partículas que compõem estes sistemas não interactuam entre si. Use apenas energia e massa nas suas respostas.

   (a) Um fotão de energia $E = 3m$ e uma partícula de massa m em repouso.

   (b) Um fotão de energia $3E$ e outro fotão, dirigindo-se no mesmo sentido, de energia E.

   (c) Um fotão de energia $3E$ e outro fotão, dirigindo-se em sentido oposto, de energia E.

   (d) Um fotão de energia E e outro fotão, dirigindo-se perpendicularmente ao primeiro, de energia $3E$.

R: [27]

Conversão de energia em massa

10. A energia luminosa do Sol inside na nossa atmosfera a uma taxa de 1372 W/m^2 de área perpendicular à direcção desta radiação.

    Ao número 1372 W/m^2 chama-se *Constante Solar*. O raio da Terra é aproximadamente 6.4×10^6 m e a distância da Terra ao Sol é de 1.5×10^{11} m. A massa do Sol é aproximadamente 2.0×10^{30} kg.

    (a) Quanta massa é convertida em energia em cada segundo pelo Sol, para dar a energia luminosa que chega à Terra?

    (b) Qual é a massa total que o Sol converte em energia luminosa em cada segundo?

    (c) A maior parte da energia do Sol vem de queimar núcleos de hidrogénio (a maior parte protões) em núcleos de hélio (a maior parte tem dois protões e dois neutrões).

    A massa de um protão é igual a 1.67262×10^{-27} kg, enquanto a massa de um núcleo de hélio é 6.64648×10^{-27} kg.

    Quantas toneladas de hidrogénio deve o Sol converter em hélio por segundo para garantir esta produção de energia?

    (d) Estime quantos anos o Sol vai poder continuar a aquecer a Terra, negligenciando outras formas de perdas de energia pelo Sol.

R: [28]

11. Exemplos de conversões

(a) Quanta massa dissipa uma lâmpada de incandescência de 100 W (em calor e luz) durante um ano?

(b) A energia total gerada na Terra durante o ano de 1990 foi provavelmente entre 1 e 2×10^{13} kW-h. Quanta massa equivale a esta energia?

(c) Um ciclista a pedalar uma bicicleta a todo o gás produz 373 W de energia útil. O corpo humano é aproximadamente 25% eficiente, ou seja, 75% da comida que gasta é convertida em calor e só 25% é convertida em trabalho útil. Quanto tempo é que o ciclista tem de pedalar para perder 1 kg de massa, pela conversão de massa em energia?

R: [29]

12. Quando um quilograma de hidrogénio reage químicamente com 8 quilogramas de oxigénio forma água; cerca de 10^8 J de energia são libertados.

    Dez toneladas de hidrogénio são levadas a reagir com oxigénio para produzir água. A água resultante tem mais ou menos massa do que o hidrogénio e o oxigénio originais? Qual é o valor dessa diferença de massa?

    R: [30]

13. Pressão de luz

    (a) Um feixe de luz com 1 W de potência incide na palma da mão. Consegue sentí-lo? Calcule a força total que este feixe exerce na palma da mão? Deveria sentí-lo? Que valor de massa exerce a mesma força quando a segura na palma da mão?

    NOTA: A potência é a energia por unidade de tempo ($P = \dfrac{\Delta E}{\Delta t}$); a variação de momento linear é a força vezes o tempo ($\Delta p = F.\Delta t$).

    (b) A partir da constante solar (1.372 kW/m^2) determine a pressão que a luz do Sol exerce num satélite da Terra. Considere o caso de uma superfície totalmente absorvente e outra totalmente reflectora. Considere também o caso intermédio (mais real). Porque é que a côr não faz diferença?

    (c) Um satélite da Terra esférico tem um raio de 1 m e uma massa $m = 1000$ kg. Assuma que o satélite absorve toda a luz solar incidente. Qual é a aceleração do satélite devido à força da luz do Sol, em unidades de g, a aceleração da gravidade à superfície da Terra?

    (d) Pode acontecer que partículas mais pequenas do que um determinado valor sejam varridas do sistema solar pela pressão da luz solar. Esse valor seria determinado pela igualdade entre a força de atracção gravítica do Sol e a força que a luz do sol exerce na partícula. Estime a dimensão crítica da partícula, fazendo as assumpções que considere necessárias.

R: [31]

Colisões

14. Um protão de massa m e energia cinética E_c no referencial do laboratório embate noutro protão inicialmente em repouso no mesmo referencial.

Os dois protões sofrem uma colisão elástica simétrica: os protões seguem com direcções que fazem um ângulo de $\theta/2$ com a linha de movimento inicial.

Determine a energia e o momento de cada partícula depois do choque e o ângulo θ.

R: [32]

15. Um positrão de massa m e energia cinética igual à sua massa atinge um electrão em repouso. Eles aniquilam-se, criando dois fotões de alta energia. Um fotão entra num detector colocado a 90° em relação à direcção inicial do positrão. Quais são as energias de cada um dos fotões, em unidades de massa do electrão, e a direcção de movimento do segundo fotão?

    R: [33]

16. Um núcleo radioactivo A inicialmente em repouso em relação ao laboratório decai em duas partículas B e D, que se deslocam em sentidos opostos. Suponha que $m_A = 20$ unidades, $m_D = 2$ unidades e $E_D = 5$ unidades.

    (a) Qual é a energia total E_A da partícula A?
    (b) A partir da conservação da energia determine a energia total E_B (energia de repouso mais cinética) da partícula B.
    (c) Usando a expressão $E^2 - p^2 = m^2$ determine o momento p_D da partícula D.
    (d) A partir da conservação do momento, determine o momento p_B da partícula B
    (e) Qual é a massa m_B da partícula B?
    (f) $m_D + m_B$ depois da colisão é igual à massa m_A antes do decaimento?
    (g) Desenhe os diagramas de momento-energia antes e depois do decaimento.

17. É observada uma colisão inelástica no laboratório: uma partícula A choca com uma outra partícula B, resultando numa terceira partícula D, que fica em repouso em relação ao laboratório.

    Suponha que $m_A = 2$ unidades, $E_A = 6$ unidades e $m_D = 15$ unidades.

    (a) Pela conservação da energia, qual é a energia E_B da partícula B?
    (b) Qual é o momento p_A da partícula A? Logo, qual é o momento p_B da partícula B?
    (c) A partir de $m^2 = E^2 - p^2$, determine a massa m_B da partícula B.
    (d) É a massa da partícula D maior ou menor do que soma das massas A e B? Tente uma resposta antes de fazer as contas.

    R: [34]

18. Um núcleo de massa m inicialmente em repouso absorve um raio gama (fotão) e é excitado para um estado energético tal que a sua massa agora é 1.01 m.

    (a) Determine a energia do fotão, necessária para operar esta excitação.
    (b) Explique porque é que a energia do fotão é maior do que a alteração de massa do núcleo.

    R: [35]

19. Um núcleo radioactivo em movimento de massa conhecida M emite um raio gama (fotão) na direcção e sentido em que se desloca, e decai para um estado não radiativo estável de massa conhecida m. Determine a energia E_A do núcleo antes de emitir o fotão, de tal modo que o núcleo m fique em repouso. Não inclua a energia do fotão na resposta.

    R: [36]

20. Mostre que um fotão isolado não se pode dividir em dois fotões a menos que eles tenham a mesma direcção e sentido.

21. Um raio gama (fotão de alta energia) pode transportar uma energia superior à energia de repouso de um par electrão–positrão (lembre-se de que um positrão tem a mesma massa de um electrão, mas carga oposta). No entanto, o processo

    $$\text{(raio gama)} \longrightarrow \text{(electrão)} + \text{(positrão)}$$

    não pode ocorrer na ausência de matéria ou radiação.

    (a) Mostre que este processo é incompatível com as leis de conservação do momento e da energia, vistas no referencial do laboratório. Analise uma alegada criação de um par em que o electrão e o positrão vão em direcções com um ângulo $\pm\phi$ em relação à direcção de incidência do fotão.

    (b) Repita a demonstração mas agora num referencial em que o momento total das duas partículas é zero.

22. Um positrónio ("átomo" constituído por um electrão e um positrão, um em torno do outro), em movimento e de massa m e energia inicial E decai em dois raios gama (fotões) que se movem em sentidos opostos ao longo da linha inicial do movimento do positrónio.

    Determine a energia de cada um dos raios gama, em termos da massa m e da energia E da partícula inicial. Verifique que as energias dos fotões são iguais no caso em que a partícula inicial está em repouso.

    R: [37]

23. Um positrão e^+ de massa m e energia cinética K é aniquilado num alvo contendo electrões e^- (com a mesma massa m), praticamente em repouso no referencial do laboratório:

    $$e^+(\text{rápido}) + e^-(\text{em repouso}) \longrightarrow \text{radiação}$$

    (a) Considerando a colisão a partir do referencial em que o momento total das duas partículas é zero, mostre que é necessário que haja pelo menos dois raios gama como resultado da aniquilação.

    (b) Voltando ao referencial do laboratório: os fotões resultantes da aniquilação movem-se na linha ao longo da qual o positrão se aproxima. Determine uma expressão para a energia de cada fotão, sem referência à velocidade do positrão.

    (c) Usando aproximações simples, determine expressões para a alínea anterior nos casos limites de muito pequena energia cinética e muito grande energia cinética.

R: [38]

24. Um mesão π^0 (mesão-pi neutro) movendo-se na direcção do eixo dos xx com uma energia cinética igual à sua massa m visto no referencial do laboratório, decai em dois fotões.

    No referencial em que o mesão está em repouso, esses fotões são emitidos na direcção positiva e negativa do eixo dos yy (um para cada lado).

    Determine as energias dos dois fotões no referencial do mesão (em unidades da massa m) e as energias e direcções de propagação dos dois fotões no referencial do laboratório.

25. **Efeito de Compton**. Analise a dispersão de um fotão por um electrão (massa m) inicialmente em repouso, quando colide com ele.

    O objectivo é determinar qual é a energia com que sai o fotão da colisão, em função da direcção com que sai, dada pelo ângulo ϕ.

    O ângulo ϕ é chamado ângulo de dispersão ou de espalhamento (scattering angle).

    (a) Se o momento do fotão incidente fôr p_A e os momentos do fotão disperso e do electrão são p_B e p_D, respectivamente, temos

    $$p_D^2 = p_A^2 + p_B^2 - 2p_A p_B \cos\phi$$

    Substitua todos os momentos pelas energias, combine com a conservação da energia e derive a fórmula de dispersão de Compton:

    $$E_{dif} = \frac{E_{inc}}{1 + \frac{E_{inc}}{m}(1 - \cos\phi)}$$

    (b) As experiências originais de Compton mostraram que alguns dos fotões não recebiam nenhuma alteração significativa à sua energia. Isso devia-se a que os electrões não chegavam a sair do átomo, ficando na mesma ligados ao núcleo; então, todo o átomo (núcleo inculsivé) recuava, e não apenas o electrão.

    Assumindo que a energia do fotão incidente é cinco vezes a massa do electrão, mostre que a alteração da energia do fotão é desprezável, para fotões difundidos por electrões ligados a núcleos com uma massa média, por exemplo, de $10 \times 2000 \times m$ (cada núcleo teria 10 nucleões, cada um com cerca de 2000 vezes a massa do electrão).

    (c) Um fotão gama, de energia igual a duas vezes a massa do electrão é disperso por um electrão inicialmente em repouso.

    A partir da expressão para a dispersão de Compton (ver problema anterior), determine a energia do fotão dispersado, para ângulos de dispersão de 0, 90 e 180 graus. Dê a resposta em MeV (a massa do electrão é 0.511 MeV).

    Desenhe o gráfico desta energia num computador para valores de 10 em 10 graus, entre 0 e 180 graus. Repita os cálculos para uma energia do fotão incidente igual a cinco vezes a massa do electrão.

Soluções

Notes

[1]10.2 m; 270 m; 10^3 m; 10^4 km
[2]d=246 min=14760 s=4.85×10^{-4} anos=4.428×10^{12} m=4.428×10^{9} km
[3]2.592×10^{13} m; 5.37×10^{-6} s; 52 semanas
[4]0.735 c
[5](pg 8 - Spacetime Physics) 5 m; 3 m; 3 m; 0; 3 m; 4/5
[6](pg 14 - Spacetime Physics) x=2 m, t=2.66667 m; x=0, t=1.764 m
[7](pg 14 - Spacetime Physics) x=8.3169 min, t=10 min; x=0, t=5.6 min
[8](pg 14 - Spacetime Physics) x=4.3 anos, t=4.53 anos; x=0, t=1.42 anos
2.6×10^{13} m; 5.3×10^{-6} s; 52 semanas
[9]4 anos; 4/5 c
[10]2×10^5 anos; 0.995; 6.33×10^4 anos, 0.9995; 0.99999999995
[11]2×10^{-4} s; 133 meias-vidas, $(1/2)^{133} \approx 10^{-40}$; 3 meias-vidas; 1.35 km; 3 meias-vidas=4.5×10^{-6} s
[12]5.4 m; 15 vezes
[13](2); mesma resposta; não pode dizer
[14]3.6 mm; 19.7 s
[15]t=4.67 s, v=1284 m/s; 4.3×10^{-6} rad
[16]a, c, g, h
[17]11.5 anos-luz; 9.43 anos; 0.6; 8 anos
[18]sim; sim; sim; não; sim; não; sim
[19]11.6 anos; 18.6 anos; 30.2 anos; 7.67 anos; 14.67 anos; 22.34 anos; 5.75 anos
[20](pg 197 - Spacetime Physics) 5 kg
[21](pg 202 - Spacetime Physics) E=5 kg,p=4 kg; 3 kg; 2 kg; 0.96 kg
[22](pg 204 - Spacetime Physics) (4m,$\sqrt{15}$m,0,0); (2m,$\sqrt{3}$m,0,0); ($\sqrt{5}$m,0,2m,0); (4m,$-\sqrt{15}$m,0,0);(5m,$\sqrt{8}$m,$\sqrt{8}$m,$\sqrt{8}$m)
[23]0.05 mg; 0.1 mg
[24]15.67 MeV/m; 0.016 m; 5.66×10^{-11}; 0.72 mm; 0.032 m
[25]relógio: 32 s, Terra: 1000 séculos; 1.58×10^6 toneladas
[26](pg 226 - Spacetime Physics) $\sqrt{10}$m; 12m; $\sqrt{30}$m; 10m
[27](pg 232 - Spacetime Physics) $\sqrt{7}$m; 0; $\sqrt{12}$E; $\sqrt{6}$E
[28](pg 242 - Spacetime Physics)
[29]35 μg; 600 kg; 6×10^{13} s
[30]Diminui em 11 mg
[31]3×10^{-9} N; absorve: 5×10^{-6} N/m^2, reflecte: 9×10^{-6} N/m^2; $\times10^{-9}$g; $\times10^{-9}$
[32](pg 240 - Spacetime Physics)
[33](pg 242 - Spacetime Physics)
[34]9 unidades; 5.66 unidades; 7 unidades; maior
[35]0.01005m
[36]$E_A = (M^2 + m^2)/(2m)$
[37]$E = 1/2(E \pm \sqrt{E^2 - m^2})$
[38]$E_1 = \frac{1}{2}(E_c + 2m + \sqrt{E_c^2 + 2mE_c})$; $E_2 = \frac{1}{2}(E_c + 2m - \sqrt{E_c^2 + 2mE_c})$