T4. Tópicos sobre Algoritmos de Ordenação

Algoritmo de ordenação Quicksort

Trata-se de um algoritmo de *divisão e conquista*, tal como o merge sort.

1. **Divisão:** *partição* do vector A[p..r] em dois sub-vectores
   - **A[p..q-1]** e
   - **A[q+1..r]**

   tais que todos os elementos do primeiro (resp. segundo) são $\leq$ **A[q]** (resp. $\geq$ **A[q]**).
   Uma função auxiliar de partição recebe a sequência **A[p..r]**, executa a sua partição "in place" usando o último elemento do vector como *pivot,* e devolve o índice **q**. Note-se que um dos sub-vectores pode ser vazio.

2. **Conquista**: ordenação recursiva dos dois vectores

3. **Combinação:** nada a fazer!

Enquanto no *merge sort* o trabalho era feito na fase de combinação (fusão ordenada), aqui é feito na fase de divisão (partição), que claramente executa em tempo $\Theta(N)$. Vejamos uma implementação possível:

```
int partition (int A[], int p, int r)
{
  x = A[r];
  i = p-1;
  for (j=p ; j<r ; j++)
    if (A[j] <= x) {
      i++;
      swap(A, i, j);
    }
  swap(A, i+1, r);
  return i+1;
}
```

EXERCÍCIO: Identifique um invariante apropriado para o ciclo desta função de partição.

Tal como no merge sort, depois de definida a função auxiliar, o algoritmo de ordenação é facilmente implementado. A seguinte função ordena o array entre os índices p e r.

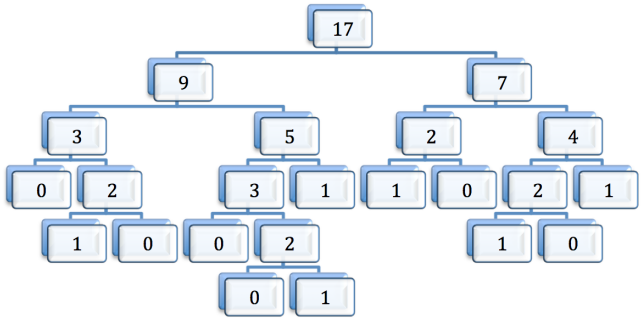
```
void quicksort(int A[], int p, int r)
{
  if (p < r) {
    q = partition(A, p, r);
    quicksort(A, p, q-1);
    quicksort(A, q+1, r);
  }
}
```

Vejamos uma simulação de execução do algoritmo. Mostra-se:

- a azul os elementos usados como pivots
- a verde, elementos que já foram pivot e foram colocados na posição final
- a vermelho, elementos que são casos de paragem (função chamada com um só elemento)

7	6	12	3	11	8	2	1	15	13	17	5	16	14	9	4	10
7	6	3	8	2	1	5	9	4	10	17	11	16	14	12	15	13
3	2	1	4	6	7	5	9	8	10	11	12	13	14	17	15	16
1	2	3	4	6	7	5	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2	3	4	5	7	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Ao contrário do algoritmo merge sort, a árvore de recursividade do quicksort não tem a mesma forma para todos os arrays de entrada, dependendo completamente destes. Para o exemplo anterior teremos a seguinte árvore (os nós estão etiquetados com o **comprimento** do vector em cada invocação):



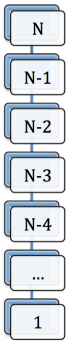
Análise intuitiva
Intuitivamente, o comportamento de pior caso do algoritmo ocorre quando a operação de partição produz o resultado *mais desequilibrado* possível, i.e. quando um dos vectores resultantes é vazio, e o outro contém N-1 elementos (todos excepto o pivot). Quando isto acontece em todas as invocações da função de partição, a execução é caracterizada pela seguinte recorrência, em que o termo $\Theta(N)$ corresponde ao tempo de execução da função de partição:

$$T_p(N) = \Theta(1), \text{ se } N \leq 1$$

$$T_p(N) = T_p(N-1) + \Theta(N), \text{ se } N > 1$$

que tem como solução $T_p(N) = \Theta(N^2)$. Isto ocorre por exemplo quando o array se encontra à partida ordenado de forma crescente (ou decrescente)!

[recorde que o algoritmo *insertion sort*, que executa também em tempo quadrático no pior caso, executa em tempo $\Theta(N)$ quando o array de entrada está já ordenado de forma crescente.]

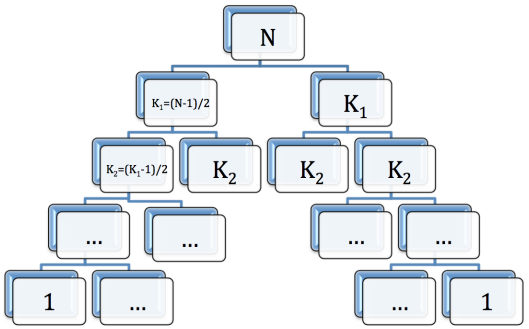


Árvore de recursividade correspondente ao pior caso de quicksort

Quanto ao melhor caso, ele ocorre quando, em todas as execuções da função de partição, ela produz o resultado *mais equilibrado* possível, i.e. quando ambos os vectores resultantes têm comprimento aproximado $\frac{N-1}{2}$. Em termos mais rigorosos a execução do algoritmo será então caracterizada pela seguinte recorrência:

$$T_m(n) = \Theta(n) + T_m(\lfloor n/2 \rfloor) + T_m(\lceil n/2 \rceil - 1)$$

Trata-se de uma recorrência muito semelhante à do algoritmo merge sort, com a mesma solução
$T_m(N) = \Theta(N \log N)$.



Árvore de recursividade correspondente ao melhor caso de quicksort

Análise de pior caso
Como poderemos obter uma *prova* de que as nossas intuições acima estão de facto correctas? Ou seja, de que de facto o comportamento de *quicksort* é caracterizado por $T(N) = \Omega(N \log N), \mathcal{O}(N^2)$?

Concentremo-nos na análise de pior caso. Observemos antes de mais que podemos descrever o tempo de execução no pior caso de uma forma rigorosa, utilizando para isso um operador de *maximização* sobre a soma do tempo das duas invocações recursivas, em ordem ao comprimento k de um dos vectores resultantes da partição (note-se que o outro vector terá comprimento N-k-1).

$$T_p(N) \ = \ \Theta(N) + \max_{k=0}^{N-1} \left(T_p(k) + T_p(N-k-1)\right)$$

Para mostrarmos que esta recorrência tem a mesma solução que a que escrevemos acima de forma intuitiva, utilizaremos o **método da substituição.**

Admitamos então que $T_p(N) \leq cN^2$ para uma determinada constante c.
Então podemos aplicar as seguintes hipóteses de indução:

- $T_p(k) \leq ck^2$
- $T_p(N-k-1) \leq c(N-k-1)^2$

e logo,

$$T_p(N) \leq \Theta(N) + \max\left(ck^2 + c(N-k-1)^2\right)$$
$$T_p(N) \leq \Theta(N) + c\max\left(P(k)\right)$$

com $P(k) = k^2 + (N-k-1)^2 = 2k^2 + (2-2N)k + (N-1)^2$

Ora, por análise de $P(k)$ conclui-se que os seus máximos no intervalo $0 \leq k \leq N-1$ se encontram nas extremidades, para $k = 0$ (primeiro vector é vazio) e $k = N-1$ (segundo vector é vazio).

Para estes valores de k temos $P(0) = P(N-1) = (N-1)^2$, logo $T_p(N) \leq \Theta(N) + c(N-1)^2$

E temos então que $T_p(N) = \Theta(N^2)$, o que conclui a prova pelo método de substituição.

Análise de Caso Médio
O caso médio do tempo de execução pode ser estimado através do valor esperado do número de comparações efectuadas entre elementos do vector:

$$T_{avg}(n) \ = \ \sum_{i=0}^{n-2} \ \sum_{j=i+1}^{n-1} \ P_{comp}(i,j)$$

Admitamos para simplificar que lidamos com sequências que não contêm elementos repetidos.

Comecemos por observar que, dados quaisquer dois elementos x e y, eles começam por ser mantidos no mesmo sub-vector, enquanto os pivots forem superiores ou inferiores a ambos.

Até que ocorrerá um de dois cenários:

1. Um dos elementos é usado como *pivot* na partição de um sub-array que contém o outro elemento. É o caso de (2,4) ou (4,7) no exemplo de execução. Neste caso os elementos **são comparados**.

1. Os elementos são *separados* por uma qualquer partição em que é usado um terceiro elemento z como pivot. É o caso do par (2,7) no exemplo. Neste caso **não são comparados**. Note-se que o pivot z terá de ser um elemento do vector tal que $x < z < y$.

Conhecendo o conjunto de elementos contidos no array, é possível calcular a probabilidade de qualquer par de elementos (x, y) ser ou não comparado durante a execução do algoritmo: sendo n o número de elementos z tais que $x < z < y$, a probabilidade de x e y serem comparados é $\frac{2}{2+n}$.

No exemplo, a probabilidade de 2 e 7 serem comparados é igual a $2/6 = 1/3$.

Ora, uma forma de conhecermos este número n de elementos contidos entre um par de elementos do array, consiste em observar o array final, ordenado. Se no array ordenado x e y se encontram nas posições i e j, então $n = j - i - 1$, e a probabilidade de terem sido comparados é dada por $\frac{2}{j-i-1+2} = \frac{2}{j-i+1}$.

Basta agora calcular a soma destas probabilidades para todos os pares de elementos:

$$T_{avg}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{2}{j-i+1}$$

Fazendo uma mudança de variável:

$$T_{avg}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-i} \frac{2}{k}$$

$$T_{avg}(n) \leq \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} = 2(n-1)(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1)$$

Podemos agora utilizar o resultado seguinte:

> $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$

Para obter

$$T_{avg}(n) = \mathcal{O}(n \lg n)$$

Nesta análise assumimos, naturalmente, que todas as permutações dos elementos da sequência podem ocorrer com igual probabilidade (ou, o que é equivalente, que estamos a analisar uma versão *aleatorizada* do algoritmo).

Algoritmos de ordenação baseados em comparações

Todos os algoritmos estudados até aqui são baseados em **comparações**: dados dois elementos A[i] e A[j], é efectuado um teste (e.g. A[i] $\leq$ A[j]) que determina a ordem relativa desses elementos, não sendo usado qualquer outro método para obter informação sobre o valor dos elementos a ordenar.

Admitamos que a sequência não contém elementos repetidos. O **conjunto de execuções** de um algoritmo baseado em comparações (sobre sequências de uma determinada dimensão) pode ser visto de forma abstracta como constituindo uma *Árvore de Decisão:* uma árvore binária cujos **caminhos descendentes**, desde a raíz até às folhas, correspondem às diferentes execuções do algoritmo, como se segue:

- cada nó contém uma *condição*, correspondente a uma **comparação** entre dois elementos, A[i] $\leq$ A[j]
- os **caminhos descendentes que chegam** a este nó correspondem às execuções que efectuam esta comparação A[i] $\leq$ A[j]

- os caminhos que continuam para a **sub-árvore esquerda** deste nó correspondem às execuções em que o teste A[i] $\leq$ A[j] teve resposta **verdadeira**
- os caminhos que continuam para a **sub-árvore direita** deste nó correspondem às execuções em que o teste A[i] $\leq$ A[j] teve resposta **falsa**
- assim, cada caminho da raíz até uma folha contém **a sequência de comparações efectuadas numa execução** concreta do algoritmo

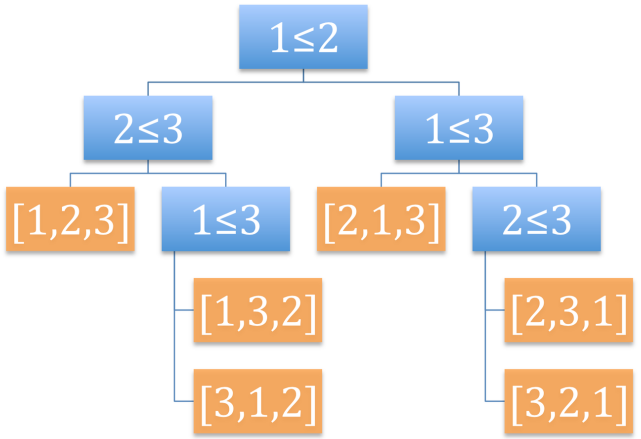
Note-se ainda que:

- Cada folha corresponde a uma ordenação possível do input, ou seja uma permutação possível da sequência inicial
- **Todas** as permutações da sequência devem aparecer como folhas, já que a árvore contempla todas as execuções
- Existem $N!$ permutações

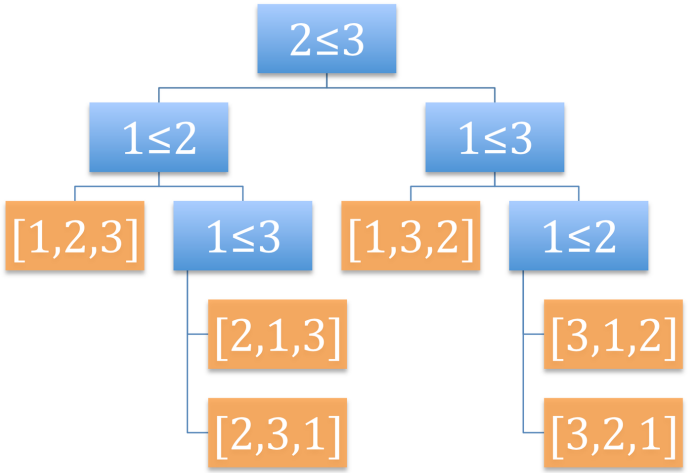
Assim:

> *O **número de folhas** da árvore de decisão de um algoritmo de ordenação de um array de comprimento N é igual a $N!$*

Vejamos dois exemplos: a execução dos algoritmos **insertion sort** e **merge sort**, sobre inputs de comprimento 3 (o tamanho das árvores cresce exponencialmente com o comprimento dos array).



Árvore de Decisão insertion sort, N=3



Árvore de Decisão merge sort, N=3

Observe-se agora que:

- o número de operações de comparação efectuadas numa execução concreta é dado pelo **comprimento do caminho** descendente correspondente a essa execução;

- logo, o número de operações de comparação efectuadas no *pior caso* é dado pela **altura** da árvore de decisão

Teorema
A altura h de uma árvore de decisão tem o seguinte limite mínimo, em que N é o tamanho do input:

$$h \geq \lg(N!)$$

Prova
1. Em geral uma árvore binária de altura h tem **no máximo** 2^h folhas.
2. As árvores que aqui consideramos têm $N!$ folhas, correspondentes a todas as permutações do input
3. Assim, $N! \leq 2^h$
4. Logo, $\lg(N!) \leq h$

Ora, uma vez que num algoritmo de ordenação deste tipo o tempo de execução assimptótico pode ser calculado tomando apenas em conta a operação de comparação, temos o seguinte

Corolário
> *Seja $T_p(N)$ o tempo de execução no pior caso de um qualquer algoritmo de ordenação baseado em comparações. Então $T_p(N) = \Omega(N \lg N)$*

Prova
Basta usar o seguinte facto: $\lg(N!) = \Theta(N \lg N)$

Conclui-se assim que não é possível bater o comportamento de pior caso do algoritmo *merge sort:* pode-se dizer que é um algoritmo **assimptoticamente óptimo** uma vez que o seu tempo de execução no pior caso é $\Theta(N \lg N)$.

Algoritmos *Counting Sort* e *Radix Sort*

Na realidade, é possível ordenar vectores em tempo linear, batendo o limite $N \log N$, se se utilizar um método que não dependa de comparações entre elementos.

O algoritmo *counting sort* pode usado para ordenar sequências de números inteiros, se for conhecida à partida a gama de valores armazenados na sequência. Utiliza para isto um vector auxiliar para armazenar um histograma (uma contagem) dos elementos da sequência a ordenar.

A versão apresentada a seguir deste algoritmo:
- assume que os elementos do array A a ordenar estão contidos no conjunto $\{0 \ldots k\}$, sendo o valor de k conhecido
- coloca a sequência ordenada no array B (não é pois um algoritmo de ordenação *in-place*).

```
1  void counting_sort(int A[], int B[], int N, int k) {
2    int C[k+1];
3    for (i=0 ; i<=k ; i++)             /* inicialização de
   C[]          */
4      C[i] = 0;
5
6    for (j=0 ; j<N ; j++)              /* contagem ocorr.
   A[j]          */
7      C[A[j]] = C[A[j]]+1;
8    for (i=1 ; i<=k ; i++)             /* contagem dos <= i
              */
9      C[i] = C[i]+C[i-1];
10
11   for (j=N-1 ; j>=0 ; j--) {         /* construção do vec
   tor ordenado */
12     B[C[A[j]]-1] = A[j];
13     C[A[j]] = C[A[j]]-1;
14   }
15 }
```

EXEMPLO:

```
k = 20
A = [10, 5, 20, 10, 17]
C = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]   // 1o. ciclo
C = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1]   // 2o. ciclo
C = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5]   // 3o. ciclo
B = [--, --, --, --, --]
B = [--, --, --, 17, --]
                // 4o. ciclo, 1 it.
C = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5]
B = [--, --, 10, 17, --]
                // 4o. ciclo, 2 it.
C = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5]
B = [--, --, 10, 17, 20]
                // 4o. ciclo, 3 it.
C = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4]
B = [ 5, --, 10, 17, 20]
                // 4o. ciclo, 4 it.
C = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4]
B = [ 5, 10, 10, 17, 20]
                // 4o. ciclo, 5 it.
C = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4]
```

Esta contagem permite colocar (último ciclo for) os elementos de A directamente nas suas posições finais.

A análise do tempo de execução é imediata: $T(N) = \Theta(N + k)$

Se $k = \mathcal{O}(N)$, então $T(N) = \Theta(N)$

Propriedade de Estabilidade

Note-se que o array C:

- começa por guardar uma contagem do número de ocorrências de cada elemento no array A a ordenar
- depois do terceiro ciclo for, passa a guardar em cada posição i uma contagem do **número de elementos inferiores ou iguais** a i

Imaginemos que A contém duas ocorrências de um elemento x, nas posições a e b, sendo $a < b$, e que existem u elementos inferiores a x em A. Teremos então que $C[x] = u + 2$

O algoritmo preencherá o array B percorrendo A do final para o início, e:

1. ao passar pela posição b de A colocará x na posição $u + 2$ e decrementará $C[x]$ para $C[x] = u + 1$
2. mais tarde, ao passar pela posição a de A colocará x na posição $u + 1$ e decrementará $C[x]$ para $C[x] = u$

Sendo assim, o algoritmo counting sort observa a seguinte propriedade de *estabilidade*:

> A ordem das ocorrências em A é preservada em B

Esta propriedade parece inútil quando se considera a ordenação de sequências de números, mas é de facto útil se estes números forem vistos como parte de estruturas contendo outros campos.

Considere-se por exemplo o problema de ordenação de datas. Os 3 campos presentes numa data devem ter prioridades diferentes na ordenação, tendo o *ano* prioridade mais alta, seguindo-se o *mês,* e só depois o dia. Um método possível para ordenar datas consiste em fazer ordenações

sucessivas usando cada um dos campos, *do menos significativo para o mais significativo.*

Consideremos por exemplo as datas:

- 21/8
- 26/3
- 14/4
- 21/3

Ordenando por dia:

- **14**/4
- **21**/8
- **21**/3
- **26**/3

Ordenando agora por mês:

- 21/**3**
- 26/**3**
- 14/**4**
- 21/**8**

As datas ficam ordenadas, mas é fundamental para isto que ordenação por mês tenha sido estável (foi preservada a ordenação anterior, pelo campo *dia*).

Se acrescentarmos o campo “ano” às datas:

- 21/3/2009
- 26/3/1975
- 14/4/1969
- 21/8/2009

Ordenando por ano é de novo preservada a ordenação anterior:

- 14/4/**1969**