0. Indução e Recursão

0.1 Defina indutivamente o conjunto:

(a) $\{a^i b^j \in \{a,b\}^* \mid 0 < i < j\}$;

(b) $\{a^i c b^j \in A^* \mid i = j+1, j \in \mathbb{N}_0\}$, sendo $A = \{a,b,c\}$;

(c) $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid w = w^I\}$;

(d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid 00$ é fator de $w\}$;

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid 00$ não é fator de $w\}$;.

0.2 Sejam $A = \{a,b,c\}$ e $L \subseteq A^*$ uma linguagem definida indutivamente por:
i. $c \in L$; ii. se $w \in L$ então $abwb \in L$; iii. se $w \in L$ então $cw \in L$ e $wc \in L$.

(a) Mostre que $2|w|_a = |w|_b$ para todo o $w \in L$.

(b) Verifique que nem todas as palavras que têm a propriedade referida na alínea anterior pertencem a L.

0.3 Sejam $A = \{a,b\}$, $L = \{u \in A^* \mid |u|$ é par$\}$ e K a linguagem definida indutivamente pelas regras seguintes: i. $\varepsilon \in K$; ii. Se $w \in K$ e $a_1, a_2 \in A$, então $a_1 w a_2 \in K$.

(a) Mostre que $aabb \in K$ e $baaaba \in K$.

(b) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para K.

(c) Mostre que $K \subseteq L$.

(d) Prove que $K = L$.

0.4 Em cada uma das alíneas seguintes define-se indutivamente um conjunto L de palavras sobre $A = \{a,b\}$. Em cada caso dê uma definição explícita para L.

(a) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então xa, $xb \in L$.

(b) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então bx, $xb \in L$.

(c) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então ax, $xb \in L$.

(d) (i) $a \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xb, xa, bx \in L$.

(e) (i) $\varepsilon \in L$, $b \in L$, $bb \in L$; (ii) se $x \in L$, então $xa, xab, xabb \in L$.

A linguagem do Cálculo Proposicional

O **alfabeto do Cálculo Proposicional**, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ (com $n \in \mathbb{N}_0$) símbolos designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto numerável $\mathcal{V}^{CP}$;
- os símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ e $\perp$, designados conetivos (proposicionais);
- dois símbolos auxiliares (e).

Alternativamente, poderíamos dizer que:

$$\mathcal{A}^{CP} = \{p_j \mid j \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \perp, (,)\}$$

A **linguagem do Cálculo Proposicional**, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o subconjunto de $(\mathcal{A}^{CP})^*$ definido indutivamente por:

(i) $p_j \in \mathcal{F}^{CP}$ para qualquer $j \in \mathbb{N}_0$;

(ii) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

(iii) se $\varphi,\ \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;

(iv) se $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ designam-se fórmulas proposicionais ou fórmulas do Cálculo Proposicional.

As regras que definem $\mathcal{F}^{CP}$ podem ser representadas pelas seguintes árvores:

(i) $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\,p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;

(ii) $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\,\perp$;

(iii)

$$\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\vee \ ; \qquad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\wedge \ ;$$

$$\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\rightarrow \ ; \qquad \dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\leftrightarrow$$

;

(iv) $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\,f_\neg$.

1. Sintaxe do Cálculo Proposicional

1.1 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

a) $(\neg (p_1 \vee p_2))$. **b)** $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \rightarrow \perp)$.

c) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$. **d)** $(\perp)$.

e) $p_1 \wedge p_2 \vee p_3$. **f)** $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$.

1.2 Defina por recursão estrutural as seguintes funções (na alínea **c)** $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

a) $p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi) =$ número de ocorrências de parêntesis em φ.

b) $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi) =$ número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

c) $b : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $b(\varphi) = \{\square \in BIN : \square \text{ ocorre em } \varphi\}$.

d) $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$, onde $\varphi[\perp /p_7]$ representa o resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$.

1.3 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $p(\varphi) \geq \#b(\varphi)$. **b)** $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp /p_7])$.

c) $b(\varphi) = b(\varphi[\perp /p_7])$. **d)** se $b(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$.

1.4 Para cada uma das seguintes fórmulas φ do Cálculo Proposicional:

i) p_{2023}. **ii)** $\neg \perp \vee \perp$. **iii)** $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$:

a) Calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2024}/p_{2023}]$.

b) Indique o conjunto das suas subfórmulas (sub-objetos).

1.5 Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. O *tamanho* de φ, denotado por $|\varphi|$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $|p| = 1$, para cada variável proposicional p; (ii) $| \perp | = 1$; (iii) $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$;

(iv) $|\varphi\square\psi| = 1 + |\varphi| + |\psi|$, para cada conetivo binário $\square$.

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho?

b) Dê exemplo de fórmulas φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $|\varphi| = 3$ e $|\psi| > 3$.

c) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $|\varphi| \geq \#subf(\varphi)$.

1.6 Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. A *complexidade lógica* de φ, denotada por $cl(\varphi)$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $cl(p) = 0$, para cada variável proposicional p; (ii) $cl(\perp) = 0$; (iii) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$; (iv) $cl(\varphi\square\psi) = 1 + max(cl(\varphi), cl(\psi))$, para cada conetivo binário $\square$.

a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior complexidade lógica?

b) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $cl(\varphi) < |\varphi|$.

2. Semântica do Cálculo Proposicional

2.1 Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in \{p_0, p_1\} \\ \\ 1 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_1, p_3\} \\ \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Calcule os valores lógicos das fórmulas seguintes para as valorações v_1 e v_2:

$$\varphi_1 = (p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3)), \quad \varphi_2 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0), \quad \varphi_3 = (p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \bot)).$$

2.2 Considere as fórmulas,

$$\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2), \quad \varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2), \quad \varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_2).$$

a) Para cada um dos conjuntos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $\{\varphi_2, \varphi_3\}$, dê exemplo de uma valoração que atribua o valor lógico 1 a todos os seus elementos.

b) Mostre que não existem valorações que, em simultâneo, atribuam o valor lógico 1 a φ_1 e φ_3.

2.3 De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

a) $(p_1 \to \bot) \vee p_1$.

b) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$.

d) $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$.

2.4 Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

2.5 Seja $\varphi = (\neg p_2 \to \bot) \wedge p_1$.

a) Dê exemplo de uma valoração v tal que:

i) $v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$;

ii) $v(\varphi) \neq v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$.

b) Seja ψ uma fórmula. Indique uma condição suficiente para que uma valoração v satisfaça $v(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_2])$. A condição que indicou é necessária?

2.6 Considere o conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ das fórmulas cujos conetivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$.

a) Enuncie o teorema de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

b) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

c) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$? Justifique.

2.7 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

a) $(p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_3$.

b) $p_1 \vee (p_2 \rightarrow \perp)$.

c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$.

d) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow \neg(p_1 \wedge \perp)$.

2.8 Defina, por recursão estrutural em fórmulas, uma função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ que a cada fórmula φ faça corresponder uma fórmula $f(\varphi)$ logicamente equivalente a φ.

2.9 Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

2.10 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

a) $\neg p_0$.

b) $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$.

c) $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.

d) $(p_1 \rightarrow \perp)$.

e) $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$.

f) $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$.

2.11 Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

2.12 Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário $\diamond$ é determinado pela sua função de verdade $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

a) Quantos conetivos binários existem?

b) Para cada $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva $v_\diamond$ como uma tabela de verdade e traduza essa tabela de verdade como uma FND.

c) Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

2.13 De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \to \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.

b) $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \wedge \perp)\}$.

c) $\mathcal{F}^{CP}$.

d) $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

2.14 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.

b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

2.15 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.

b) $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.

c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$.

d) para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\neg\psi,\ \psi \to \sigma \models \sigma \vee \varphi$.

2.16 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

a) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$.

b) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.

d) Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

2.17 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

a) Os três depoimentos são consistentes?

b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

3.1 **a)** Indique uma derivação em DNP com conclusão $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

b) Indique uma derivação em DNP com conclusão $(p_0 \wedge p_1) \to p_1$ e sem hipóteses por cancelar.

c) Indique uma derivação em DNP com conclusão $p_0 \to p_2$ e cujas hipóteses não canceladas sejam $p_0 \to p_1$ e $p_1 \to p_2$.

d) Indique duas derivações distintas em DNP com conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

e) Indique as subderivações de cada uma das derivações apresentadas nas alíneas anteriores.

3.2 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$. **b)** $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.
c) $\varphi \to \varphi$. **d)** $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.
e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. **f)** $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.
g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$. **h)** $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

3.3 Mostre que:

a) $p_0 \leftrightarrow p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

3.4 Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

b) $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$.

c) $\Gamma \vdash \perp$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$.

d) Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

3.5 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

3.6 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

a) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

b) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

d) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é semanticamente inconsistente.

e) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)

4. Sintaxe do Cálculo de Predicados

4.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a) Explicite a definição indutiva do conjunto dos termos de tipo L.

b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem termos de tipo L:

i) 0. **ii)** $f(0)$. **iii)** $f(1)$.

iv) $g(f(x_1, x_0), x_0)$. **v)** $g(x_0, f(x_1))$. **vi)** $R(x_0, x_1)$.

c) Explicite a definição por recursão estrutural em termos de tipo L da função VAR (que a cada termo de tipo L faz corresponder o conjunto de váriáveis que nele ocorrem).

d) Para cada um dos termos t que se seguem, calcule VAR(t).

i) 0. **ii)** $g(x_1, f(x_1))$.

iii) $g(x_1, x_2)$. **iv)** $g(x_1, g(x_2, x_3))$.

e) Para cada um dos termos t da alínea anterior, calcule $subt(t)$.

f) Para cada um dos termos t da alínea **d)**, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

g) Dê exemplos de termos t, t_1 e t_2 de tipo L tais que:

i) $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] = (t[t_2/x_2])[t_1/x_1]$. **ii)** $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] \neq (t[t_2/x_2])[t_1/x_1])$.

h) Sejam t_1 e t_2 termos de tipo L tais que $x_1 \notin$ VAR(t_2) e $x_2 \notin$ VAR(t_1). Mostre que, para todo o termo t de tipo L , $(t[t_1/x_1])[t_2/x_2] = (t[t_2/x_2])[t_1/x_1]$.

4.2 Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

a) Dê exemplos de termos de tipo L. Justifique.

b) Dê exemplos de fórmulas atómicas de tipo L. Justifique.

c) Justifique que cada uma das seguintes palavras é uma fórmula de tipo L.

i) $x_2 - 0 < x_1$.

ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.

iii) $\forall x_1 \exists x_0 (x_1 < x_0) \wedge \mathsf{P}(x_1)$.

iv) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$.

d) Para cada fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.

e) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).

f) A proposição "Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, LIV$(\varphi) \cap$ LIG$(\varphi) = \emptyset$" é verdadeira?

4.3 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 4.2 c), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

4.4 Considere o tipo de linguagem L do exercício 4.2. Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

a) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $x_1 < x_2$.

b) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

c) A variável x_1 está livre para o termo 0 na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

d) A variável x_1 está livre para o termo x_2 na fórmula $\forall x_1 \exists x_2(x_1 < x_2)$.

e) A variável x_2 está livre para qualquer termo de tipo L na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

f) A variável x_1 está livre para qualquer termo de tipo L na fórmula $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

g) A variável x_2 está livre para o termo x_1 em $\exists x_2(x_1 < x_2) \vee \exists x_1(x_1 < x_2)$.

h) Toda a variável está livre para o termo $x_1 - x_3$ em $\exists x_2(x_1 < x_2)$.

4.5 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.

b) Quem quer vai, quem não quer manda.

c) Nem todos os pássaros voam.

d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.

e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.

f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.

g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.

h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.

i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

5. Semântica do Cálculo de Predicados

5.1 Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e a estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$ (a estrutura usual de tipo L). Sejam a_1 e a_2 atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$ e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada um dos termos t de tipo L que se seguem, determine $t[a_1]$ e $t[a_2]$.

i) 0. **ii)** x_5.

iii) $s(0) + x_5$. **iv)** $(s(0) + x_5) \times s(x_1 + x_2)$.

b) Para cada uma das fórmulas φ de tipo L que se seguem, calcule $\varphi[a_1]$ e $\varphi[a_2]$.

i) $x_1 = x_2$. **ii)** $\neg(x_1 = x_2)$.

iii) $s(x_1) < (x_1 + 0)$. **iv)** $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, determine

$(\forall x_1 \varphi)[a_1]$ e $(\exists x_1 \varphi)[a_1]$.

d) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é válida na estrutura E_{Arit}.

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é universalmente válida.

5.2 Repita o exercício anterior, considerando a estrutura $E = (D, \overline{})$, de tipo L, com $D = \{d_1, d_2\}$, e as atribuições a_1 e a_2 em E a seguir definidas:

$\overline{0} = d_1$		$\overline{=} \subseteq D^2$	$\overline{=} = \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\}$
$\overline{s} : D \to D$	$\overline{s}(x) = x$	$\overline{<} \subseteq D^2$	$\overline{<} = \{(d_1, d_2)\}$
$\overline{+} : D^2 \to D$	$\overline{+}(x, y) = d_2$	$a_1 : \mathcal{V} \to D$	$a_1(x) = d_2$
$\overline{\times} : D^2 \to D$	$\overline{\times}(x, y) = d_1$ sse $x = y$	$a_2 : \mathcal{V} \to D$	$a_2(x_i) = d_2$ sse i é par.

5.3 Seja $L = L_{Arit}$.

a) Quantas estruturas de tipo L existem com domínio $\{0\}$? E domínio $\{0, 1, 2\}$?

b) Defina uma estrutura de tipo L com domínio $\{0, 1, 2\}$.

5.4 Seja L um tipo de linguagem e sejam x, y variáveis e φ, ψ fórmulas de tipo L. Mostre que:

a) $\models (\forall x \varphi \lor \forall x \psi) \to \forall x(\varphi \lor \psi)$.

b) $\not\models \forall x(\varphi \lor \psi) \to (\forall x \varphi \lor \forall x \psi)$.

c) $\models \exists x(\varphi \land \psi) \to (\exists x \varphi \land \exists x \psi)$.

d) $\not\models (\exists x \varphi \land \exists x \psi) \to \exists x(\varphi \land \psi)$.

e) $\models \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$.

f) $\not\models \forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi$.

5.5 Sejam L um tipo de linguagem, φ, ψ fórmulas de tipo L, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\square \in \{\vee, \wedge\}$. Mostre que: se $x \notin LIV(\psi)$, então $(Qx\varphi)\square\psi \Leftrightarrow Qx(\varphi\square\psi)$.

5.6 Seja L um tipo de linguagem.

a) Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ tais que $x \notin LIV(\psi)$, se tem:

i) $\models \exists x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \to \psi)$.

ii) $\models \forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \to \psi)$.

b) Mostre que, na alínea anterior, a condição $x \notin LIV(\psi)$ é necessária.

c) Conclua que, para toda a fórmula φ de tipo L, $\models \exists x(\varphi \to \forall x\varphi)$.
(Como curiosidade, pense no caso particular de φ representar a condição "x é aprovado a Lógica".)

5.7 Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e considere as seguintes fórmulas de tipo L: $\varphi_1 = (x_1 < x_0)$; $\varphi_2 = \neg(x_1 < x_0)$; $\varphi_3 = \exists x_1 \neg(x_1 < x_0)$; $\varphi_4 = \forall x_1 \neg(x_1 < x_0)$. Indique quais dos seguintes conjuntos são consistentes:

a) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.
b) $\{\varphi_1, \varphi_3\}$.
c) $\{\varphi_1, \varphi_4\}$.
d) $\{\varphi_3, \varphi_4\}$.

5.8 Suponha que L tem um símbolo de relação binário R. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x_0\, R(x_0, x_0) \\
\varphi_2 &= \forall x_0 \forall x_1\, (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0)) \\
\varphi_3 &= \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2\, (\, (R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2)\,)
\end{aligned}$$

a) Seja $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura tal que $\overline{R}$ é uma relação de equivalência em D. Verifique que E é modelo de Γ.

b) Suponha que L tem também duas constantes c_1 e c_2. Mostre que existem modelos quer de $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$, quer de $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.

5.9 Seja L um tipo de linguagem. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras para todos φ, ψ e σ fórmulas de tipo L e todo $x \in \mathcal{V}$.

(Curiosidade: estas afirmações correspondem a alguns silogismos aristotélicos, cujos nomes medievais estão indicados.)

a) Barbara $\quad \forall x(\psi \to \varphi), \forall x(\sigma \to \psi) \models \forall x(\sigma \to \varphi)$.

b) Darii $\quad \forall x(\psi \to \varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\sigma \wedge \varphi)$.

c) Cesare $\quad \forall x(\psi \to \neg\varphi), \forall x(\sigma \to \varphi) \models \forall x(\sigma \to \neg\psi)$.

d) Festino $\quad \forall x(\psi \to \neg\varphi), \exists x(\sigma \wedge \varphi) \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$.

6. Dedução Natural para o Cálculo de Predicados

6.1 Seja $L = (\{c\}, \{P, R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(R) = 2$. Encontre demonstrações em DN das seguintes fórmulas.

a) $P(c) \to \exists x_0 P(x_0)$

b) $\forall x_0 P(x_0) \to P(c)$

c) $\forall x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1) \to \forall x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$

d) $\exists x_0 P(x_0) \to \exists x_1 P(x_1)$

6.2 Seja $L = (\{c\}, \{P, Q\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(Q) = 1$. Mostre que:

a) $P(c), \forall x_0(P(x_0) \to Q(x_0)) \vdash Q(c)$.

b) $\{\forall x_0 P(x_0), \exists x_1 \neg P(x_1)\}$ é sintaticamente inconsistente.

c) $P(x_0) \to \forall x_0 P(x_0)$ não é teorema de DN.

d) $\exists x_0 P(x_0), \exists x_0 Q(x_0) \not\vdash \exists x_0(P(x_0) \wedge Q(x_0))$.

(Caso seja necessário, pode usar o Teorema da Correção ou o Teorema da Completude)

6.3 Sejam x uma variável, φ, ψ L-fórmulas e Γ um conjunto de L-fórmulas. Mostre que:

a) $\forall x(\varphi \to \psi), \forall x \varphi \vdash \forall x \psi$.

b) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to \exists x \varphi$ é teorema de DN.

c) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \forall x \psi)$ é teorema de DN, se $x \notin \mathsf{LIV}(\varphi)$.

d) $\Gamma \models \exists x \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\forall x \neg \varphi\}$ é sintaticamente inconsistente.

(Caso seja necessário, pode usar o Teorema da Correção ou o Teorema da Completude)

6.4 Recorde o tipo de linguagem $L_{soma} = (\{\mathsf{z}, \mathsf{s}\}, \{\mathsf{soma}\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(\mathsf{z}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$ e $\mathcal{N}(\mathsf{soma}) = 3$ e a estrutura $E_{soma} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde $\overline{\mathsf{z}} = 0$, $\overline{\mathsf{s}}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$ e $\overline{\mathsf{soma}} = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}_0^3 : i + j = k\}$. Considere as L_{soma}-fórmulas

- $\varphi_1 = \forall x_0 \, \mathsf{soma}(\mathsf{z}, x_0, x_0)$
- $\varphi_2 = \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (\mathsf{soma}(x_0, x_1, x_2) \to \mathsf{soma}(\mathsf{s}(x_0), x_1, \mathsf{s}(x_2)))$

e o conjunto $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

a) Verifique que E_{soma} é modelo de Γ.

b) Seja $\varphi_3 = \exists x_3 \, \mathsf{soma}(\mathsf{z}, x_3, \mathsf{s}(\mathsf{z}))$. Construa uma derivação em DN que mostre que $\Gamma \vdash \varphi_3$ e conclua que $\Gamma \cup \{\neg \varphi_3\}$ é inconsistente.

c) Seja $\varphi_4 = \exists x_3 \, \mathsf{soma}(x_3, \mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}))$. Construa uma derivação em DN que mostre que $\Gamma \vdash \varphi_4$ e conclua que $\Gamma \cup \{\neg \varphi_4\}$ é inconsistente.

d) Seja $\varphi_5 = \exists x_3 \, \mathsf{soma}(\mathsf{s}(x_3), \mathsf{z}, \mathsf{z})$. Mostre que $\Gamma \not\vdash \varphi_5$ e conclua que $\Gamma \cup \{\neg \varphi_5\}$ é consistente.