T1. Tempo de Execução de Algoritmos Iterativos

Contabilização de operações primitivas

Iremos:
1. identificar as operações primitivas que executam em *tempo constante*, i.e. tempo que não depende do tamanho do input
2. atribuir *custos (tempos) abstractos* c1, c2, ... a estas operações primitivas, de forma independente de qualquer mecanismo de execução concreto
3. calcular o custo abstracto total do algoritmo em função do *tamanho do input* – T(N)

Exemplo: contagem de ocorrências num *array*

```
int conta (int k, int v[], int N) {
    int i = 0, r = 0;                   c1      1
    while (i<N) {                       c2      N+1
      if (v[i] == k) r++;               c3      N
      i++;                              c4      N
    }
    return r;                           c5      1
}
```

Note-se que
- c1 corresponde ao custo das duas operações de inicialização;
- a condição do ciclo é uma operação primitiva, avaliada N+1 vezes (falso na última vez), com custo c2

Temos: $T(N) = c_1 + c_2(N+1) + c_3N + c_4N + c_5$ ou simplificando:

> $T(N) = (c_2 + c_3 + c_4)N + c_1 + c_2 + c_5$
> *Polinómio de primeiro grau em N: crescimento linear*

Exemplo: identificação de duplicados num *array*

```
void dup (int *v, int a, int b) {
    int i, j;
    for (i=a ; i<=b ; i++)                  c1      N+1
      for (j=a ; j<=b ; j++)                c2      N*(N+1)
        if (i!=j && v[i]==v[j])             c3      N*N
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

- A função procura elementos repetidos entre os índices a e b. Sendo assim, o tamanho do input será dado por $N = b - a + 1$.
- c1 é o custo agregado da condição i<b (testada N+1 vezes) e do incremento i++ (feito N vezes)
- O ciclo exterior executa N iterações, e *em cada iteração, o ciclo interior executa N iterações.* Sendo assim:

> *O condicional (custo c3) é executado no total N^2vezes*

Logo:

$T(N) = c_1(N+1) + c_2N(N+1) + c_3N^2$ ou simplificando:

> $T(N) = (c_2 + c_3)N^2 + (c_1 + c_2)N + c_1$
> *Polinómio de segundo grau em N: crescimento quadrático*

Exemplo: identificação de duplicados num *array*

A versão anterior imprime cada par duas vezes! Pode ser optimizada. Por simplicidade admitamos a=0 e b=N-1, recebendo a função apenas o comprimento N do array.

```
void dup2 (int v[], int N) {
    int i, j;
    for (i=0 ; i<N-1 ; i++)                 c1      N
      for (j=i+1 ; j<N ; j++)               c2      Soma S1
        if (v[i]==v[j])                     c3      Soma S2
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

$T(N) = c_1N + c_2S_1 + c_3S_2$

Sendo mais eficiente, esta versão é mais difícil de analisar, uma vez que, *para cada valor de i fixado pelo ciclo exterior, o ciclo interior executará um número diferente de vezes,* o que significa que S_1 e S_2 serão calculados como somatórios.

A tabela seguinte detalha os valores tomados por j e o número de iterações do ciclo interior, para cada valor de i:

i=0	j = 1 … N-1	N-1 iterações
i=1	j = 2 … N-1	N-2 iterações
…	…	…
i (arbitrário)	j = i+1 … N-1	N-1 - (i+1) + 1 = N - i + 1
…	…	…
i=N-2	j = N-1	1 iteração

Somando todas estas iterações, obtemos $S_2 = \sum_{i=0}^{N-2}(N-i+1)$.

Calculando, obtemos um polinómio de segundo grau:

$$S_2 = \sum_{i=0}^{N-2}(N-i+1) = \sum_{i=0}^{N-2}(N+1) - \sum_{i=0}^{N-2} i = (N-1)(N+1) - \frac{(N-2)(N-1)}{2} = \dots$$

Também S1 é um polinómio de segundo grau:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{N-2}(N-i+2) = S_2 + \sum_{i=0}^{N-2} 1 = S_2 + N - 1$$

logo:

$$T(N) \ = \ c_1 N + c_2 S_1 + c_3 S_2 \ = \ k_2 N^2 + k_1 N + k_0$$

> *Polinómio de segundo grau em N: crescimento quadrático*
> *(veremos que não é muito importante calcular os coeficientes k_0 a k_2)*

Análise Assimptótica

Numa função polinomial como $T(N) = k_2 N^2 + k_1 N + k_0$, para *inputs de tamanho elevado* o efeito dos termos de menor grau é anulado face ao crescimento do termo de maior grau.

E de facto, o interesse da constante multiplicativa k_2 é também pequeno: na *análise assimptótica* interessamo-nos apenas pela *ordem de crescimento* do tempo de execução dos algoritmos.

Escreveremos:

> $T(N) = \Theta(N^2)$

Se o algoritmo A1 é *assimptoticamente melhor* do que A2, será melhor escolha do que A2 *excepto para inputs muito pequenos*.

Notação $\mathcal{O}$ ("big oh")

Para uma função g não-negativa de domínio $\mathbf{N}$,
define-se $\mathcal{O}(g)$ como o seguinte *conjunto de funções*:

$$\mathcal{O}(g) = \{f \mid \text{ existem } c, n_0 > 0 \text{ tais que } \forall n \geq n_0.\ 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

> *Para $n \geq n_0$, g é um limite superior de f a menos de um factor constante*

Exemplos:

- $3n^2 + 7n \in \mathcal{O}(n^2)$
- $4n - 5 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $7n^3 - 2n \notin \mathcal{O}(n^2)$

Notação Ω (Omega)

Para uma função g não-negativa de domínio $\mathbf{N}$,
define-se $\Omega(g)$ como o seguinte *conjunto de funções*:

$$\Omega(g) = \{f \mid \text{ existem } c, n_0 > 0 \text{ tais que } \forall n \geq n_0.\ 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

> *Para $n \geq n_0$, g é um limite inferior de f a menos de um factor constante*

Exemplos:

- $3n^2 + 7n \in \Omega(n^2)$
- $4n - 5 \notin \Omega(n^2)$
- $7n^3 - 2n \in \Omega(n^2)$

Notação Θ (Theta)

Para uma função g não-negativa de domínio $\mathbf{N}$,
$\Theta(g) = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$

> *Se $f \in \Theta(g)$, então para $n \geq n_0$ f tem um comportamento "igual" ao de g, a menos de factores constantes*

Exemplos:

- $3n^2 + 7n \in \Theta(n^2)$
- $4n - 5 \notin \Theta(n^2)$
- $7n^3 - 2n \notin \Theta(n^2)$

Para os exemplos acima podemos escrever:

- Contagem de ocorrências num *array:* $T(N) = \Theta(N)$
- Identificação de duplicados num *array:* $T(N) = \Theta(N^2)$

Funções Úteis em Análise de Algoritmos

As funções tipicamente utilizadas são as *logarítmicas*, *polinomiais*, e *exponenciais*.
Alguns factos envolvendo estas funções:

A base das funções logarítmicas é irrelevante assimptoticamente (desde que > 1) :

> $\log_b n = \mathcal{O}(\log_a n) \quad \text{se } a, b > 1$

Já no caso das funções polinomiais, qualquer polinómio é limitado superiormente por qualquer outro polinómio de maior grau:

> $n^b = \mathcal{O}(n^a) \quad \text{se } b \leq a$

O mesmo acontece com as funções exponenciais relativamente à base:

> $b^n = \mathcal{O}(a^n) \quad \text{se } b \leq a$

Por outro lado, qualquer função logarítmica é limitada superiormente por qualquer função polinomial:

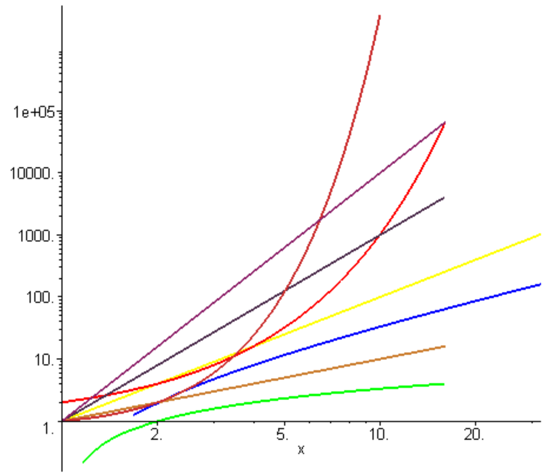
> $\log_b n = \mathcal{O}(n^a)$

e qualquer função polinomial é limitada superiormente por qualquer função exponencial de base > 1:

> $n^b = \mathcal{O}(a^n) \quad \text{se } a > 1$

Crescimento de Algumas Funções Típicas

Tempo (μs)		$33n$	$46n \lg n$	$13n^2$	$3.4n^3$	
Tempo assimp.		n	$n \lg n$	n^2	n^3	2^n
Tempo de	n=10	$.00033s$	$.0015s$	$.0013s$	$.0034s$	$.001s$
execução por	n=100	$.003s$	$.03s$	$.13s$	$3.4s$	$4.10^{14}s$
tamanho do	n=1000	$.033s$	$.45s$	$13s$	$.94h$	séculos
input	n=10000	$.33s$	$6.1s$	$22m$	39 dias	$\cdots$
	n=100000	$3.3s$	$1.3m$	1.5 dias	108 anos	$\cdots$
Tamanho máx.	$1s$	3.10^4	2000	280	67	20
do input para	$1m$	18.10^5	82000	2200	260	26



$\log x$, funções polinomiais de diversos graus (rectas, incluindo $n \lg n$), 2^x, e $x!$

Identificação de Operações Relevantes

- Na prática, para analisar assimptoticamente um algoritmo não é necessário considerar custos abstractos associados às operações primitivas: basta contar o número de vezes que as operações são executadas.

- De facto não é sequer necessário contar *todas* as operações primitivas. Basta identificar as que são relevantes para a análise assimptótica.

> *Dadas duas operações op1 e op2 de um programa, se o número de execuções de op1 não for assimptoticamente superior ao número de execuções de op2, então op1 pode ser descartada para efeitos de análise (assimptótica) de tempo de execução*

Exemplo:

```
void dup2 (int v[], int N) {
    int i, j;
    for (i=0 ; i<N-1 ; i++)                    N
      for (j=i+1 ; j<N ; j++)                  Soma S1
        if (v[i]==v[j])                        Soma S2
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

Neste algoritmo basta considerar o condicional (corpo do ciclo interior) como única instrução assimptoticamente relevante. O tempo de execução pode ser analisado calculando simplesmente:

$S_2 = \sum_{i=0}^{N-2}(N-i) = \Theta(N^2)$.

Apesar de a condição j<=b ser avaliada mais vezes ($S_1 = S_2 + N - 1$) do que o condicional (S2), é equivalente considerar qualquer uma das duas para efeitos de análise assimptótica.

> *Na prática contamos o* ***número de operações de comparação*** *efectuadas (entre elementos do array), o que é bastante intuitivo: as comparações são as operações fundamentais deste algoritmo.*

EXERCÍCIO: Calcule o tempo de execução da seguinte versão alternativa desta função:

```
void dup3 (int v[], int a, int b) {
    int i, j;
    for (i=a+1 ; i<=b ; i++)
      for (j=a ; j<i ; j++)
        if (v[i]==v[j])
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

$T_{==}(n) = \sum_{i=a+1}^{b} i - 1 - a + 1 = \sum_{i=a+1}^{b} i - a = \sum_{i=a+1}^{b} \sum_{j=a}^{i-1} 1$

$T_{j<i}(n) = \sum_{i=a+1}^{b} \sum_{j=a}^{i} 1$

Sem perda de generalidade, consideramos $a = 0$ e $b = n - 1$

$T_{==}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)*n}{2} = \theta(n^2)$

$T_{j<i}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = \frac{(n-1)*n}{2} + n - 1 = \theta(n^2)$

$T(n) = \theta(n^2)$

Tamanho e Representação

A noção apropriada de tamanho de um número corresponde ao número de caracteres necessários para o escrever: o tamanho de 3500 é 4 em notação decimal.

Um inteiro n em notação decimal ocupa aproximadamente $\log_{10} n$ dígitos; em notação binária (representação em máquina) ocupa $\log_2 n$ dígitos.

EXEMPLO:
Problema: Dado um inteiro positivo n, haverá dois inteiros $j, k > 1$ tais que $x = jk$?
(i.e, será x um número primo ou não?)

Considere-se o seguinte algoritmo de “força bruta”:

```
found = 0;
j = 2;
while ((!found) && j < x) {
  if (x mod j == 0) found = 1;
  else j++;
}
```

Este algoritmo executa em tempo $\mathcal{O}(x)$, no entanto trata-se de um problema famoso pela sua dificuldade (e é por isso relevante em muitos algoritmos criptográficos).

Observe-se:

- se o algoritmo executa em tempo linear $\mathcal{O}(x)$,
- e a representação de x utiliza pelo menos $N = \log_k x + 1$ dígitos (ou bits),
- então $x = \mathcal{O}(k^N)$,
- e o algoritmo executa por isso em tempo $T(N) = \mathcal{O}(k^N)$.

Ou seja: *um algoritmo de tempo aparentemente linear é de facto de tempo exponencial no tamanho da representação do número!*

É importante identificar correctamente a noção adequada de tamanho do input de um problema, uma vez que disso depende a sua classificação como fácil ou difícil!

Exercício

Um dos algoritmos de *ordenação* mais simples é conhecido por *selection sort*. A ideia é, em cada iteração j do ciclo exterior (ciclo for), colocar na posição de índice j do array o j-ésimo menor elemento. O ciclo interior (while) determina o índice do menor elemento ainda não colocado na sua posição final, e a função swap é usada para trocar este elemento com o que se encontra na posição j.

```
void swap(int t[],int i,int j) {
    int tmp = t[i];
    t[i] = t[j];
    t[j] = tmp;
}

void selectionSort(int A[], int n) {
    int i, j, min, k;

    for (j=0; j < n-1; j++) {
        min = j;
        i = j+1;
        while (i < n) {
            if (A[min] > A[i]) min = i;
            i++;
        }
        if (j != min) swap (A, j, min);
    }
}
```

Note que a função swap executa em *tempo constante*, i.e. o seu tempo de execução não depende do tamanho do array. Escreveremos $T_{\text{swap}}(N) = \Theta(1)$.
Tendo isto em conta, identifique uma ou mais operações relevantes e analise assimptoticamente o tempo de execução da função.