Matematická analýza 1

Varianta: $\boxed{\textbf{Cvičná písemka}}$

Čas: 100 minut

Hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10 body

---

1. Najděte intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 8x + 12 \ln x - 5.$$
[*Funkce f je rostoucí na $(0, 2\rangle$ a $\langle 6, +\infty)$ a klesající na $\langle 2, 6\rangle$. V bodě 2 nastává ostré lokální maximum a v bodě 6 nastává ostré lokální minimum.*]

2. Najděte asymptotu v $+\infty$ funkce
$$f(x) = 2 - x + \frac{4}{x}.$$
[*Asymptota v $+\infty$ má rovnici $y = -x + 2$.*]

3. Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^{2020} - x^{2019} - 1}{\ln x}.$$
[*Hledaná limita je 2021.*]

4. Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce f se středem v bodě x_0, je-li
$$f(x) = 5 - x - x^2 - 4\cos x, \quad x_0 = 0.$$
[*Taylorův polynom má tvar $T_2(x) = 1 - x + x^2$.*]

5. Vypočtěte
$$\int (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$
[*Výsledek integrálu je $(x^2 - x + 2)\mathrm{e}^x$.*]

6. Vypočtěte
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x.$$
[*Výsledek integrálu je $\frac{2}{15}$.*]

7. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá/nepravdivá.[1]
   (a) Posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$ je nerostoucí.
   (b) Je-li $T(x) = 1 + 2x + 3x^2$ Taylorův polynom 2. řádu funkce f se středem v bodě 0, pak $f''(0) = 3$.
   (c) Splňuje-li kubická funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nerovnosti $f(-1) < 0 < f(1)$, pak existuje bod $p \in (-1, 1)$ takový, že $f(p) = 0$.
   (d) Na intervalu $(0, +\infty)$ platí $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x}{2019}\right)$.
   (e) Platí $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$.

   [*Tvrzení a), c), d) jsou pravdivá a tvrzení b), e) jsou nepravdivá.*]

---

[1] Za správnou odpověď obdržíte 2 body a za špatnou se 2 body odečtou. Nemusíte však odpovídat na všechny otázky. Maximálně můžete získat 10 bodů a minimálně 0 bodů.