1. Najděte intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 8x + 12\ln x - 5.$$

[*Funkce f je rostoucí na $(0,2\rangle$ a $\langle 6,+\infty)$ a klesající na $\langle 2,6\rangle$. V bodě 2 nastává ostré lokální maximum a v bodě 6 nastává ostré lokální minimum.*]

2. Najděte asymptotu v $+\infty$ funkce

$$f(x) = 2 - x + \frac{4}{x}.$$

[*Asymptota v $+\infty$ má rovnici $y = -x + 2$.*]

3. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^{2020} - x^{2019} - 1}{\ln x}.$$

[*Hledaná limita je 2021.*]

4. Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce f se středem v bodě x_0, je-li

$$f(x) = 5 - x - x^2 - 4\cos x, \quad x_0 = 0.$$

[*Taylorův polynom má tvar $T_2(x) = 1 - x + x^2$.*]

5. Vypočtěte

$$\int (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

[*Výsledek integrálu je $(x^2 - x + 2)\mathrm{e}^x$.*]

6. Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x.$$

[*Výsledek integrálu je $\frac{2}{15}$.*]

7. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá/nepravdivá.[1]

   (a) Posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$ je nerostoucí.

   (b) Je-li $T(x) = 1 + 2x + 3x^2$ Taylorův polynom 2. řádu funkce f se středem v bodě 0, pak $f''(0) = 3$.

   (c) Splňuje-li kubická funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nerovnosti $f(-1) < 0 < f(1)$, pak existuje bod $p \in (-1,1)$ takový, že $f(p) = 0$.

   (d) Na intervalu $(0,+\infty)$ platí $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x}{2019}\right)$.

   (e) Platí $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$.

[*Tvrzení a), c), d) jsou pravdivá a tvrzení b), e) jsou nepravdivá.*]

1. Najděte intervaly ryzí monotonie a lokální extrémy funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 8x + 12\ln x - 5.$$

2. Najděte asymptotu v $+\infty$ funkce

$$f(x) = 2 - x + \frac{4}{x}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{f(x)}{x} = \frac{2 - x + \frac{4}{x}}{x} = / \cdot \frac{x}{x} \quad \frac{2x - x^2 + 4}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}\left(-1 + \cancel{\frac{2}{x}} + \frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to \infty} = -1 \quad \Rightarrow a$$

$$\lim 2 - x + \frac{4}{x} - (-1)x = \lim = 2 \quad \Rightarrow b$$

$$y = ax + b = -x + 2$$

Asymptoty

Svislé: $x = x_0$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

se směrnicí: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$:

$A_{\pm\infty}$: $y = ax + b$

3. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^{2020} - x^{2019} - 1}{\ln x}.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{4040x^{2019} - 2019x^{2018}}{\frac{1}{x}} = 4040 - 2019 = 2021$$

4. Určete Taylorův polynom 2. řádu funkce f se středem v bodě x_0, je-li

$$f(x) = 5 - x - x^2 - 4\cos x, \quad x_0 = 0.$$

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$$T_n(x) = 1 + \frac{-1}{1!}(x - 0) + \frac{2}{2!} \cdot (x - 0)^2$$

$$f' = -1 - 2x + 4\sin x$$

$$f'' = -2 + 4\cos x$$

$$T_2 = 1 - x + x^2$$

5. Vypočtěte

$$\int (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

[*Výsledek integrálu je* $(x^2 - x + 2)\mathrm{e}^x$.]

$$\int y \cdot z'\,dx = y \cdot z - \int y' \cdot z$$

$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
$tg\,x$	$1/\cos^2 x$
$cotg\,x$	$-1/\sin^2 x$
$\ln$	$\frac{1}{x}$

Použijeme vzorec

5.

$$\int \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{y}\underbrace{e^x}_{z'} = (x^2+x+1)\cdot e^x - \left(\int (2x+1)\cdot e^x\right) =$$

$$= (x^2+x+1)\cdot e^x - \left(2\int \underbrace{x}_{y}\underbrace{e^x}_{z'} + \int e^x\right)$$

$y = (x^2 + x + 1)$ $\quad z' = e^x$

$y' = (2x + 1)$ $\quad z = e^x$

$y = x$ $\quad z' = e^x$

$y' = 1$ $\quad z = e^x$

před integrací se násobí

f	$\int f$
1	x
$-\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$-\cos x$	$-\sin x$

f	f'
x	1
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$cotg\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$1/x$

$x \cdot e^x - \left(\int 1 \cdot e^x\right)$

$x \cdot e^x - \left(\int e^x\right)$

$xe^x - e^x$

$$= (x^2 + x + 1)\cdot e^x - [2\cdot(xe^x - e^x) + e^x)$$

$$x^2e^x + xe^x + e^x - 2xe^x + 2e^x - e^x$$

$$x^2e^x - xe^x + 2e^x$$

$$(x^2 - x + 2)e^x$$

6. Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x.$$

[*Výsledek integrálu je* $\frac{2}{15}$.]

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C \qquad \boxed{\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array}}$$

$$dx = \frac{1}{t'} \cdot dt \qquad \begin{array}{l} t = \sin x \\ t' = \cos x \end{array}$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot \frac{1}{\cos x} dt$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^{\cancel{3}\,2} x \cdot \frac{1}{\cancel{\cos}\, x} dt$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\int t^2 \cdot (1 - \sin^2 x) dt$$

$$\int t^2 \cdot (1 - t^2) dt = \int t^2 - t^4 dt$$

$$\int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^5\frac{\pi}{2}}{5} - \frac{\sin^3 0}{3} - \frac{\sin^5 0}{5}$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} - 0$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$$