

算法复杂度 $O(n^2)$.

伪代码:

```
def findLIS(arr):
```

```
    n = len(arr).
```

```
    dp = list, size = n, initialized to 1.
```

```
    prev = list, size = n, initialized to -1.
```

```
    max_length = 1
```

```
    max_index = 0.
```

```
    for i in range(1, n):
```

```
        for j in range(i):
```

```
            if arr[j] < arr[i] and dp[j] + 1 > dp[i]:
```

```
                dp[i] = dp[j] + 1
```

```
                prev[i] = j.
```

```
            if dp[i] > max_length:
```

```
                max_length = dp[i]
```

```
                max_index = i.
```

```
LIS = list
```

```
while max_index != -1:
```

```
    LIS.append(arr[max_index]).
```

```
    max_index = prev[max_index].
```

```
return LIS.
```

在这个函数中, 我使用了一个列表 $dp[i]$ 来存储以 $arr[i]$ 结尾的 LIS 的长度. 用了另一个列表 $prev[i]$ 来存以 $arr[i]$ 结尾的 LIS 的上一个元素的位置, 用来最后重建 LIS.

从头开始遍历数组, 在内层循环中遍历 i 之前的所有元素, 如果 $arr[j] < arr[i]$ 且 $dp[j] + 1 > dp[i]$, 就表示此时是目前的最优情况, 更新 $dp[i]$, $prev[i]$. 在外层循环中, 此时我们已经找到了以 $arr[i]$ 结尾的 LIS 的长度, 如果这个长度大于目前的最大长度的话就更新 max_length 和 max_index .

最后我们通过用 $prev$ 即可建立 LIS.

举例: $arr = [10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60, 80]$.

$dp = [1, 1, \dots, 1]$, $prev = [-1, \dots, -1]$.

对于 $arr[1]$ (22), $dp[1] = 2$, $prev[1] = 0$.

$arr[3]$ (33), $dp[3] = 3$, $prev[3] = 1$.

$arr[5]$ (50), $dp[5] = 4$, $prev[5] = 3$.

$arr[6]$ (41), $dp[6] = 4$, $prev[6] = 3$.

$arr[7]$ (60), $dp[7] = 5$, $prev[7] = 5$.

$arr[8]$ (80), $dp[8] = 6$, $prev[8] = 7$.

$\therefore LIS = [10, 22, 33, 50, 60, 80]$.

算法复杂度 $O(n \log n)$;

伪代码:

```
def fin LIS (arr):
```

```
    n = len(arr)
```

```
    tails = list()
```

```
    prev = list, len(list) = n, initialized to -1.
```

```
    indices = list()
```

```
    for i in range(n):
```

```
        pos = binarySearch(tails, arr[i]).
```

```
        if pos == len(tails):
```

```
            tails.append(arr[i]).
```

```
            indices.append(i).
```

```
        else:
```

```
            tails[pos] = arr[i]
```

```
            indices[pos] = i
```

```
        if pos > 0:
```

```
            prev[i] = indices[pos-1].
```

```
    LIS = list().
```

```
    k = indices[len(tails)-1].
```

```
    while k != 1:
```

```
        LIS.prepend(arr[k])
```

```
        k = prev.
```

```
    return LIS.
```

思路：使用 tails 存最长严格递增子序列的尾部元素。
遍历 arr，对于每个 $arr[i]$ ，使用二分查找找出在 tails
中第一个大于或等于 $arr[i]$ 的元素的位置，并替换，
或者如果 $arr[i]$ 大于所有 tails 中的元素，则将其添
加到 tails 末尾。

通过记录每个元素在 tails 中的位置，我们即可
重建 LIS。