《秘密袭击》试题讲评

猫

吐槽环节 + 梗

- Access Globe
- “你并不想帮他解决这个问题”
- 2666（后来被某 z 姓总负责人强行改成 1666）
- 2017011328（后来因为某些原因改为 64123）
- ↑ 这两个梗属于某 plus 比赛

题意简述

- 给一棵 n 个点的树，每个点的点权在 1 到 W 之间
- 求所有连通块的权值第 k 大的和模 64123

- ~~$k \leq n \leq 2666, W \leq 2666$~~
- $k \leq n \leq 1666, W \leq 1666$
- 时间限制 5s，空间限制很大

送分测试点

- 链的数据连通块都是区间
- 直接枚举区间维护第 k 大
- 用两个堆或平衡树或线段树维护即可

暴力

- 可以转化为 $\sum_{i=1}^{W}$ 第 k 大不小于 i 的连通块个数
  - 这样第 k 大是 i 的刚好被算了 i 次
- 再转成“连通块中权值不小于 i 的点不少于 k 个”的连通块个数
  - 枚举 i 之后，直接背包，$f(p,j)$
  - $O(n^3)$

学傻了的优化

- 直接用点分治 FFT 优化这个背包
- $O(Wn\log^3 n)$
- 写不出来，常数超大，T 到飞起

好一些的优化

- 将点按权值排序依次加入树中
- 单点修改，维护背包数组的 DP 值
- 使用动态 DP 理论（链分治）瞎 ** 维护一下
- 最好可以做到 $O(nW\log^2 n)$

- 难写，我专门卡了（卡法同《即时战略》卡随机剖分）

合并状态

- 首先我们需要把这个 DP 写成一个好优化的形式
- 外面枚举一个 i，这样看起来只能动态 DP
- 把 i 记录到状态里去！
  - $f(p,i,j)$：p 子树中不小于 i 的点有 j 个的连通块个数

转移

- 初始化 p
  - 给 $f(p,[1,d_p],*)$ 这个区间添加物品
- 添加一个孩子的时候
  - i 这一维对应位置合并背包
- 区间修改 → 线段树
- 还要对应位置相乘 → 线段树合并！

求答案

- 最后求所有 $f(*,[1,W],[k+1,n])$ 的和，不能每次遍历数组
- 对状态进行修改，$g(p,i,j)$ 表示 p 子树中的 f 和
- g 从孩子的转移也是对应位置相加
- g 从 f 的转移可以用矩阵表示
  - 从而只需把线段树标记换成矩阵
  - 每次做完一个点后，整个区间（第二维）乘矩阵更新 g

优化

- 合并背包数组是 $O(k^2)$ 的，复杂度为 $O(nk^2 \log W)$
  - 根据实现可以获得很多分
- 背包合并的本质是多项式卷积
  - $ax^2 * bx^3 = abx^5$
- 卷积 $f(x)$ 和 $g(x)$ 复杂度为 k^2 （k 为最高次项即背包容量）

优化

- 如果存了 $[f(1), f(2), \dots, f(k)]$ 和 $[g(1), g(2), \dots, g(k)]$
- 那么
  - $[(fg)(1), (fg)(2), \dots, (fg)(k)] = [f(1)g(1), f(2)g(2), f(k)g(k)]$
  - 加法同样成立
- 并且有了 $[f(1), f(2), \dots, f(k)]$ 后也可以还原出 f 的系数
  - 高斯消元或（拉格朗日）插值
  - 从而还原背包

优化

- 在计算过程中 $[f(1), f(2), \ldots, f(n)]$ 代替背包
  - 注意这里必须到 n
  - 所有的加减乘都是 $O(n)$
- 最后花 $O(n^2)$ 还原背包
- 这个算法就是 FFT 的本质，但模数不支持 NTT
- 结合前面的线段树合并，我们获得 $O(n^2 \log W)$ 的算法通过本题！

这题是不是很水啊

- 思路较为灵活，实现不是很困难
- 是一道难度中上的 DP 题，考察了线段树的 简单数学

- 而你笑道正解无用 暴力把分送 AK 都轻松 松松松松松

- 祝大家 Day2 顺利
- EOF