Линейные пространства

$\boxed{0}$ Пусть L – м-во эл-тов любой природы, которые мы будем назыв. векторами и обозн $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$...

Пусть R - мн-во действ чисел

Пусть на мн-вах L и R опред 2 операции которые мы назыв лин операциями.

1-я операция – сложение 2х эл из L, которая каждой паре эл-тов $\bar{x}, y \in L$ ставит в соответствие $\bar{z} \in L$ ($\bar{z}$ – сумма $\bar{x}$ и $\bar{y}$)

2-я операция – умножение эл-тов из L на число из R, которая каждому $x \in L$ и каждому $\alpha \in R$ ставит в соответств эл-т $\bar{w} \in L$ $(\bar{w} = \alpha \bar{x})$

Пусть для этих лин. операций вып. след. аксиомы:

1) коммутативность сложения
$\forall \bar{x}, \bar{y} \in L \quad \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

2) ассоциативность сложения $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$
$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L \quad \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$

3) $\exists$-е нейтрального эл-та для сложения
$\exists\, \bar{0} \in L : \forall x \in L \quad \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$

4) $\exists$-е противополож эл-та
$\forall \bar{x} \in L \ \exists -\bar{x} \in L, \quad \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$

5) произведение эл-тов из L на 1
$\forall \bar{x} \in L \quad \bar{x} \cdot 1 = \bar{x}$

6)

7) Дистрибутивность по числам

8) Дистрибутивность по векторам

Примеры лин. пр-в

1) V_1, V_2, V_3 – мн-ва свобод векторов прямой, пл-ти, пр-ва

2) $M_{mn}(R)$ – мн-во матриц типа $m \times n$ с эл-тами из R

3) мн-во всех решений $\forall$ однород СЛАУ

4) мн-во всех непр. ф-й на $[a;b]$ (или всех дифф. ф-й на $(a;b)$)

5) мн-во многочленов от одной перемен. степени $\leq n$

$\boxed{O}$ Пусть L – лин. пр-во.
Системой векторов в L называется конкретный неупорядоч набор векторов
Подсистемой системы наз $\forall$ часть (подмн-во) этой системы

$\boxed{O}$ Система векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ из лин пр-ва L называется линейно

зависимой | независимой

если

$\exists$ | $\nexists$

их нетривиал. лин. комб, равн. $\bar{0}$, т.е

Система векторов $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_k \in L$ явл

мин. завис	мин независ
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
хоть 1 из них явл лин комб оставшихся	ни 1 не явл лин комб оставшихся

Следствия

1) Если система содержит $\overline{0}$, или завис. подсистему, то она зависима

2) Если $\{x_1 \dots x_n\}$ независ, то любая подсистема независ

3) Если $\{x_1 \dots x_n\}$ независ и вект $\overline{y} \in L$ не явл лин комб их лин комб, то расширенн. система $\{x_1 \dots x_n\} \cup \{\overline{y}\}$ тоже лин независ

$\boxed{О}$ Базисом лин пр-ва — $\forall$ упорядоченная система векторов такая, что:

1) эта система лин независ

2) $\forall \overline{x} \in L$ можно представить в виде лин комб векторов этой системы

Если $e_1 \dots e_n$ — базис то

1) $e_1 \dots e_n$ — лин независ

2) $\forall \overline{x} \in L$: $\overline{x} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ (1)

(1) — разложение $\overline{x}$ по базису в коорд. форме.

Запишем (1) так:

$\overline{x} = (e_1 \dots e_n) \cdot (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T$ (2)

$\overline{x} = \mathcal{E} X$ (2') — кратко, где $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$, $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ (2')

(2) и (2') — разложение в матрич виде.

$\boxed{О}$ Коорд-ы вектора в базисе лин пр-ва L – коэф-ты разложения этого вектора по базису

Обозн $X\{x_1 \ldots x_n\}$ в базисе $\vec{e_1} \ldots \vec{e_n}$

Теорема (единственность разложения по базису):

Разложение вектора по базису единствен.

следствие:
коорд-ы вектора в базисе опред единств. образом

Теорема (о лин операциях над вект в коорд форме)

1) при + вект их коорд-ы в дан базисе склад.
2) при * – перемножаются коорд-ы

$\boxed{О}$ Размерность лин пр-ва – макс возможн. кол-во лин независ векторов

Если макс кол-во лин независ векторов в лин пр-ве L

равно n	∄
т.е	
1) ∃ система из n лин. независ векторов 2) ∀ система из n+1 будет лин завис	∃ система из n лин независ векторов
то	
n-мерное	бесконечномерное
обозн	
$\dim L = n$	$\dim L = \infty$

Теорема:
1) Если в лин пр-ве L ∃ базис из n векторов, то $\dim L = n$
2) Если $\dim L = n$, то ∀ его базис состоит из n векторов

Матрица ПЕРЕХОДА

Пусть L – n-мерное лин пр-во и
$\mathcal{E} = (e_1 .. e_n)$, $\mathcal{E}' = (e_1' ... e_n')$ – 2 разных базиса L

Пусть $\begin{cases} e_1' = u_{11}\bar{e}_1 + \ldots + u_{n1}\bar{e}_n \\ \vdots \\ e_n' = u_{1n}\bar{e}_1 + \ldots + u_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$ или

в матричном виде $(e_1' \ldots e_n') = (e_1 \ldots e_n)\begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$

или $\mathcal{E}' = \mathcal{E}\, U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$

$\boxed{О}$ Матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$ наз. матрица $U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$, по столбцам которой стоят коорд-ы векторов базиса $\mathcal{E}'$ в базисе $\mathcal{E}$

Св-ва матриц перехода

1) $\det U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} \neq 0 \Rightarrow \exists (U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'})^{-1}$

2) $(U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'})^{-1} = U_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}}$

3) $U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} \cdot U_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}''} = U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}''}$

Формулы преобраз. коорд векторов

Пусть 1) $\bar{x} \in L$ имеет к-ты $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$

и к-ты $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в $\mathcal{E}'(e'_1 \dots e'_n)$

2) $U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ - матрица перехода $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$

Тогда

$$X = U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} X' \qquad X' = U_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}} X$$

Док-во

начал $\Rightarrow$ $\bar{x} = \mathcal{E} X$ (1) и $\mathcal{E}' = \mathcal{E} U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$ (3)

$\bar{x} = \mathcal{E}' X'$ (2)

Подставим (3) в 2

$$\vec{x} = \mathcal{E} U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} X' = \mathcal{E}(U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} X') \ (4)$$

сравним 1 и 4, в силу единств разложения $\bar{x}$ по $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} X = \mathcal{E}(U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} X')$$

$$X = U_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'} X'$$