№4: 2, 4, 6, 8, 10, 16, 18, 19, 25, 31

№4.4

Пусть L – мн-во всех ф-й, непрерыв на [a; b]. Докажем линейность

Выберем $f(x)$, $g(x) \in L$.

нулевой эл-т $O(x) = 0$
единич эл-т = $E(x) = 1$

Сумма ф-й, непрерыв на [a; b] остаётся непрерывной ф-ей на [a; b]

№4.6

Пусть L – мн-во всех векторов, коллин прямой a.

Пусть векторы $\overline{a}, b \in L$ коллин, тогда если

$a(a_1; a_2)$ $b(b_1, b_2)$, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Докажем, что $\frac{a_1 + b_1}{a_1} = \frac{a_2 + b_2}{a_2}$

$$\frac{(a_1 + b_1)a_2 - (a_2 + b_2)a_1}{a_1 a_2} = \cancel{a_1 a_2} + b_1 a_2 - \cancel{a_1 a_2} - b_2 b_1 =$$

$$= \frac{b_1 a_2 - b_2 b_1}{a_1 a_2} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} = 0$$

Сумма получается

Очевидно, что всё остальное так же верно

L – линейно

№ 4.8

Пусть L – мн-во векторов, длины которых $> a$, где a фиксирован. константа

Из 2й аксиомы

$\forall \bar{x} \in L$ и $\forall \alpha \in R \Rightarrow \bar{x} \cdot \alpha = y \in L$.

Пусть $\alpha = 0$, тогда $\bar{x} \cdot 0 = 0 < a$.

мн-во не линейное

№ 4.10

Пусть L-мн-во всех расход. послед.

$\{x_n\}, \{y_n\} \in L$

$x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{1}{-n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} \{x_n\} + \lim\limits_{n \to \infty} \{y_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} \{x_n\} + \{y_n\} = 0$

$\{x_n\} + \{y_n\} \notin L$.

мн-во L – не лин.

№4.16

$$B = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \qquad B' = (-\bar{i}, -\bar{j}, -\bar{k})$$

$$B \cdot U_{B \to B'} = B'.$$

$$U_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-i+0+0, 0-j-0, 0-0-k)$$

№4.19

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} = A'$$

$$rg A' = rg A = 2.$$

базис вектора $e_1 = -i + 2j$
$e_2 = 2i - j$

№ 25

$\bar{e}_1 = t^2 + 1$
$\bar{e}_2 = -t^2 + 2t$
$\bar{e}_3 = t^2 - t.$

$-2t^2 + t - 1 =$
$= a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = -1 \Rightarrow$ векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис.

$X = (a, b, c)$

$XA = B$

$X = BA^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$-t^2 - 1 - t^2 + t = -t^2 + t - 1$

Отв: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

№ 1

$$E_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ -5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

= сами считайте