Понятие первообразной. Неопред интеграл

$\boxed{О}$ Ф-я $F(x)$ назыв первообразной ф-и $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ диф-ма на $(a;b)$ и $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$

$*$ - интервал может быть любым

Прим. $f(x)=x^3$ $F(x)=\frac{x^4}{4}$, т.к $F'(x)=x^3$
$F_1(x)=\frac{x^4}{4}-89$ $F_1'(x)=x^3$

1 Теорема:

Если $F(x)$ первообразная ф-и $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x)+C$, $C=const$ тоже первообразная ф-и $f(x)$

Док-во:

$F(x)$ - первообразная $f(x)$ на $(a;b)\Rightarrow$ $\forall x\in(a;b)$ $F'(x)=f(x)$. Найдём $(F(x)+C)'=$ $=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$

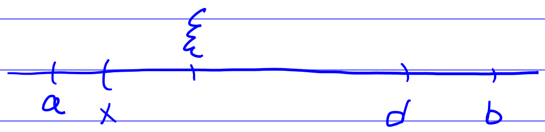
2 Теорема:

Если ф-я $\Phi(x)$ диф-ма на $(a;b)$ и $\Phi'(x)=0$, $\forall x\in(a;b)$, то $\Phi=const$ на $(a;b)$

Док-во:

возьмём произвольное $d\in(a;b)$. Тогда $\forall x, d\in(a;b)$ справедливо т Лагранжа

$$\Phi(x)-\Phi(d)=\Phi'(\xi)(x-d),\ \text{где}\ \xi\in(x;d)$$



$\Phi'(\xi)=0$, т.к по усл $\Phi(x)=0$ $\forall x\in(a;b)$, а $\xi\in(a;b)$

Сл-но: $\Phi(x)-\Phi(d)=0\Rightarrow\Phi(x)=\Phi(d)$ $\forall x\in(a;b)$
$\Phi(x)=const$

3

Теорема: (основная т. о первообразн.)

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - $\forall$ первообраз $f(x)$ на $(a;b)$, то $\forall x \in (a;b)$ $F_1(x) - F_2(x) = C$, C - const

Док-во:

$\phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ диф-мы на $(a;b)$ сл-но $F_1(X) - F_2(X)$ диф-ма на $(a;b)$

$\phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$
$\phi'(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = const$ на $(a;b)$ т.е
$F_1(x) - F_2(x) = C$

Следствие

Если $F(x)$ - одна из первообразных $f(x)$, то любая первообраз $\phi(x)$ ф-и $f(x)$ на $(a\, b)$ имеет вид $\phi(x) = F(x) + C$, C - const

4

Теорема:

Если $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ то она на этом интервале имеет первообразную

Неопред интеграл и его св-ва

$\boxed{О}$ мн-во всех первообразных ф-и $f(x)$ на $(a;b)$ назыв неопред интегралом от ф-и $f(x)$ на $(a;b)$

Обозначение:

$$\int f(x)\,dx - F(x) + C$$

Утв:

Если $F(x)$ - любая первообразная на $(a;b)$, то $f(x)\,dx = dF(x)$

Док-во:

$F(x)$ - любая первообразная $f(x)$ на $(a;b)$ (поусл) $\Rightarrow \forall x \in (a;b)$ $F'(x) = f(x) \Rightarrow$

$f(x)dx = F'(x)dx \Rightarrow$

$f(x)\,dx = dF(x)$

Основные свойства неопред интеграла

Теорема 1

Производная от неопред интеграла равна подынтегральной ф-и

$$\left(\int f(x)\,d(x)\right)' = f(x)$$

Док-во:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$

$\left(\int f(x)\,dx\right)' = F'(x) = f(x)$

Теорема 2:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

Док-во

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx$$

Теорема 3:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Док-во:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Прим: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2} \end{matrix} \right| = \int d\operatorname{arctg} x =$

$= \operatorname{arctg} x + C$

Теорема 4 (об интеграле алг суммы)

$$\int f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ldots + C$$

Док-во:

$$\left(\int f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\,dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x) \ldots$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ldots + C\right)' = f_1(x) \pm f_2(x) \ldots$$

По осн. теореме о первообраз они отличаются друг от друга на const

Теорема 5:

$$\int \overbrace{A f(x)\,dx}^{1} = \overbrace{A\int f(x)\,dx + C}^{2}$$

где A - произвол const

Док-во:

Аналогично Теореме 4

$$\left(\int A f(x)\,dx\right)' = A f(x)$$

$$A\left(\int f(x)\,dx\right)' = A f(x)$$

Ф-и (1) и (2) - первообраз для одной и той же ф-и $A f(x) \Longrightarrow$ (1) и (2) отличаются на константу

Теорема 6 (об инвариантности интеграла)

$$\begin{cases} \int f(x)\,dx = F(x) + C \\ u = \varphi(x) \text{ производная диф-ма на } (a;b) \end{cases}$$

$$\int f(u)\,du = Fu + C$$

Док-во:

По усл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$

$dF(u) = f(u)\,du$ (по св-ву инвар. формы первого предела)

Тогда $\int f(u)\,du = \int dF(u) = F(u) + C$