臺北市立大學資訊科學系

機率報告

報告題目:
二項式隨機變數

學生姓名：

資科系二 張鈺亭 U10816007

資科系二 金宣妘 U10816014

資科系二 馮珮筠 U10816016

資科系二 詹雅年 U10816021

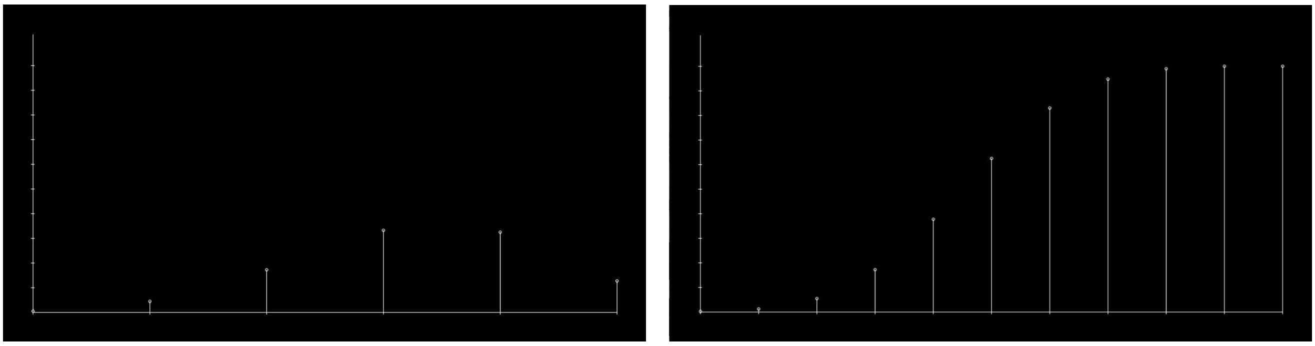
中　華　民　國　１１０　年　５　月　２８　日

一、用途

許多隨機試驗都有一些共同的特性，像丟一個銅板，只丟出正面與反面兩種結果;抽一支籤，會出現中獎與不中獎兩種結果;候選人支持率的調查中，只有支持與不支持兩種結果。只有兩種結果(通常將這兩種結果稱為「成功」及「失敗」)的隨機試驗，稱為伯努利試驗(Bernoulli Trial)。在伯努利試驗中，如果成功的機率為 p，則失敗的機率為 $1-p$。若重複 n 次伯努利試驗，每次試驗結果都是獨立的，而且每次成功的機率都是 p，令 X 表示成功的次數，則隨機變數 X 的分布稱為參數是(n,p)的二項分布，以符號 X~B(n,p)表示。

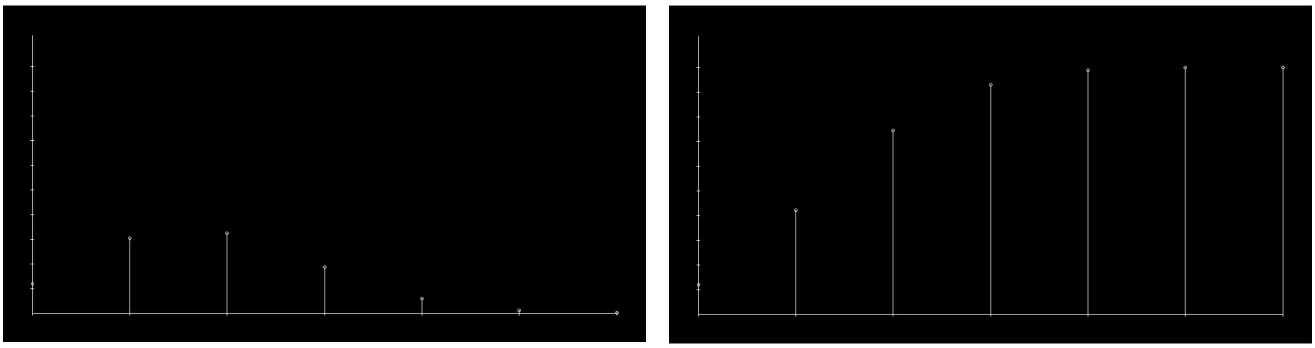
二、範例

a. 已知一個不均勻銅板，出現正面的機率為0.66 ，出現反面的機率為0.34，令丟此銅板 5 次，令 X 代表出現正面的次數。



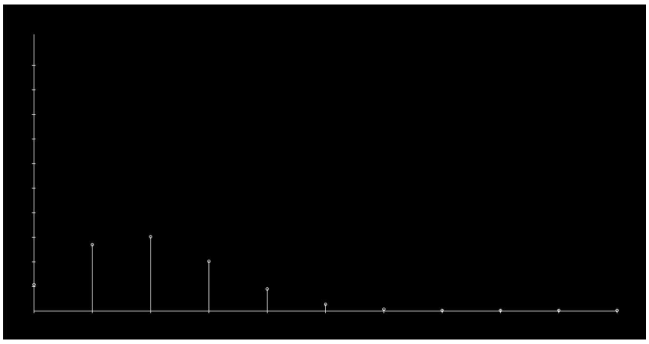
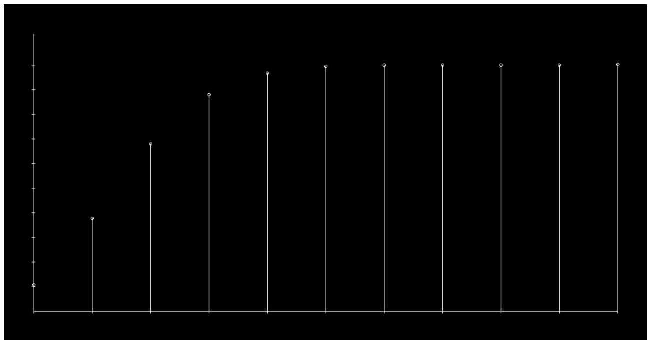
（左）PDF （右）CDF

b. 袋中有 3 紅球、7白球，從中每次任取一球，取後放回，共取 6 次，令 X 代表出現紅球的次數。



（左）PDF （右）CDF

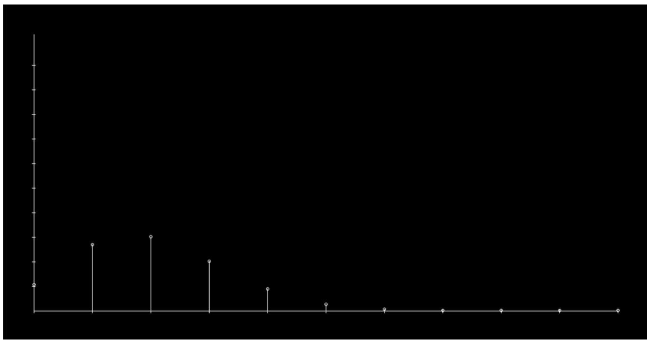
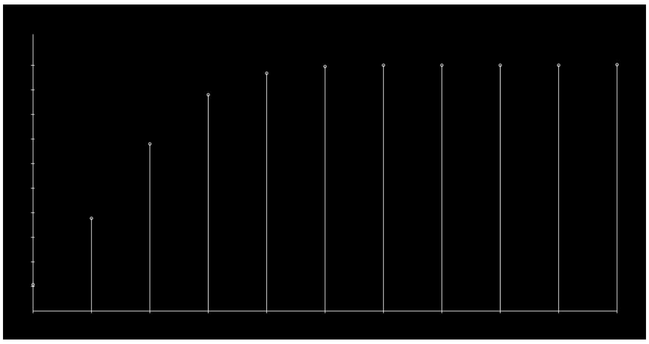
c. 投擲一均勻骰子 10 次，令 X 代表出現偶數點的次數。

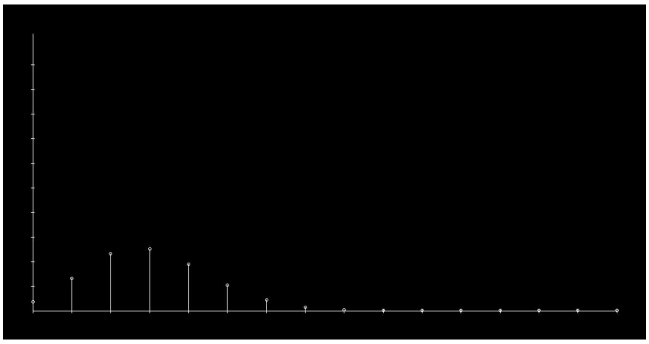
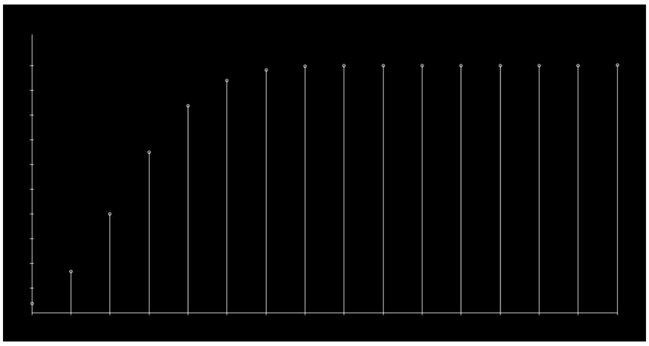
（左）PDF （右）CDF

三、分布說明

當p = 0.2 時， n=10 和 n=15分布如下

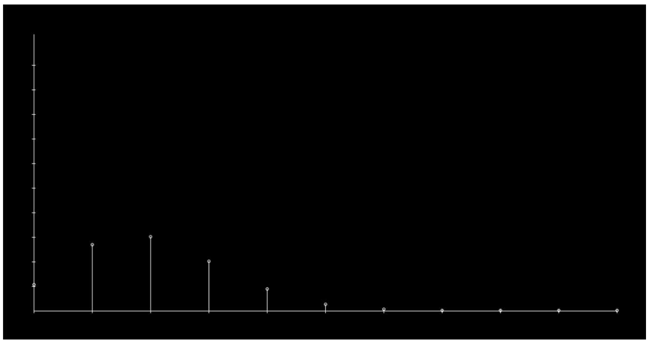
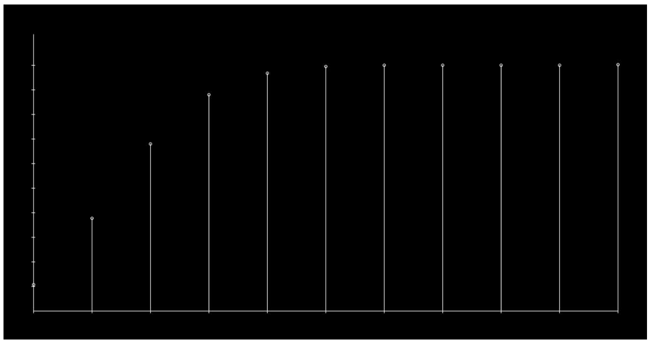
n=10（左）PDF （右）CDF

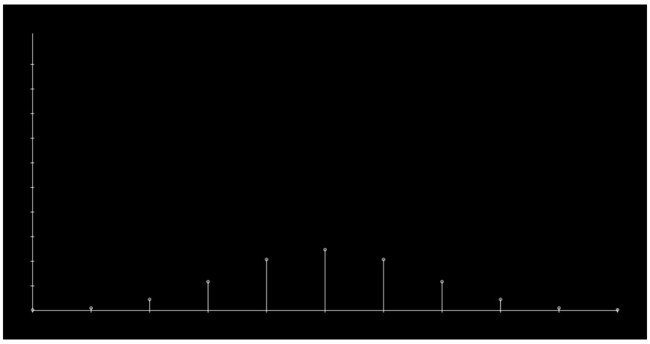
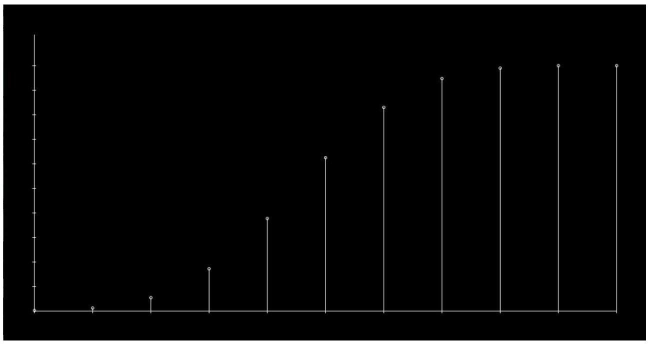
n=15（左）PDF （右）CDF

由上面圖例可以看出來，當我們將x軸以同樣的比例展示，其走勢大致相同，但n越大，每個數值之間會相對密集。

當n = 10 時， p=0.2 和 p=0.5分布如下

p=0.2（左）PDF （右）CDF

p=0.5（左）PDF （右）CDF

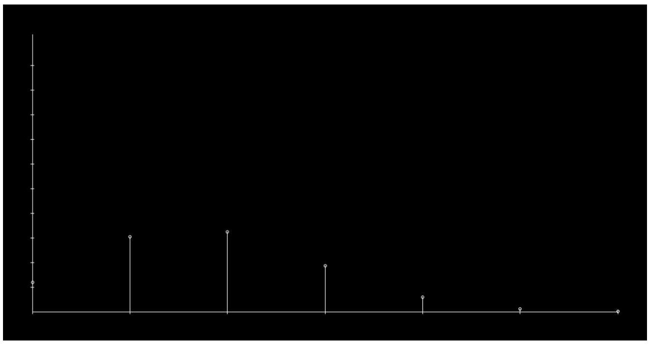
由上面圖例可以看出來，當p變大，其數值較大的區域向右移了，CDF也有類似的效果。

四、PMF

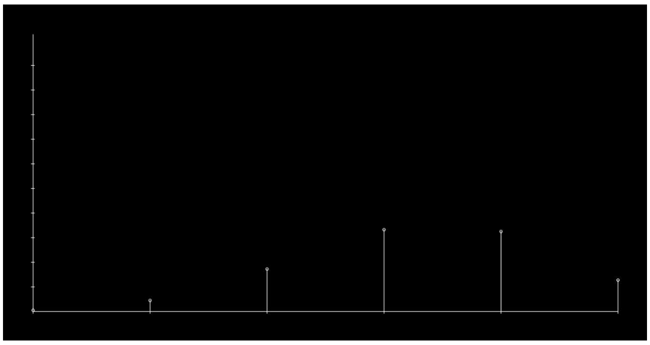
a. 公式證明

因為重複 n 次伯努利試驗，每次試驗結果都是獨立的，故 n 次試驗中恰有 x 次 成功、$(n-x)$次失敗的任一種排列順序之事件機率皆為$p^{x}(1-p)^{n-x}$。n 次試驗中恰有 x 次成功、$(n-x)$次失敗的排列法有種C_{x}^{n}，由加法原理，可得n次試驗恰有x次(0≦x≦n，x為整數)成功的機率為C_{x}^{n} $p^{x}(1-p)^{n-x}$。

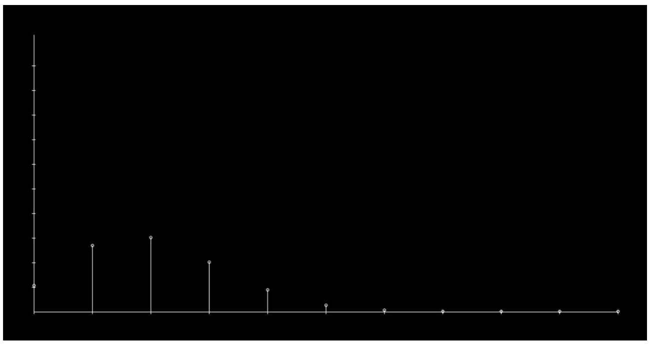
b. 圖例展示



P = 0.3　　　N = 6



P = 0.66　　　N = 5



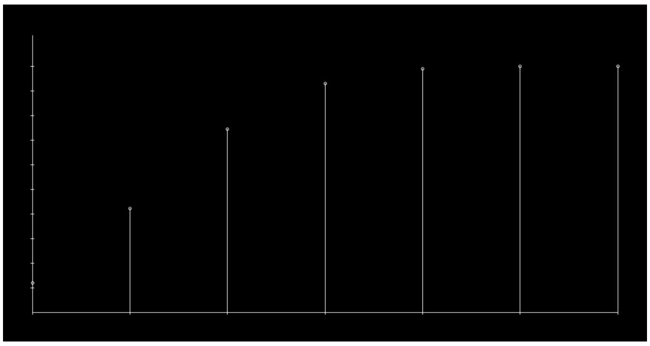
P = 0.2　　　N = 10

五、CDF

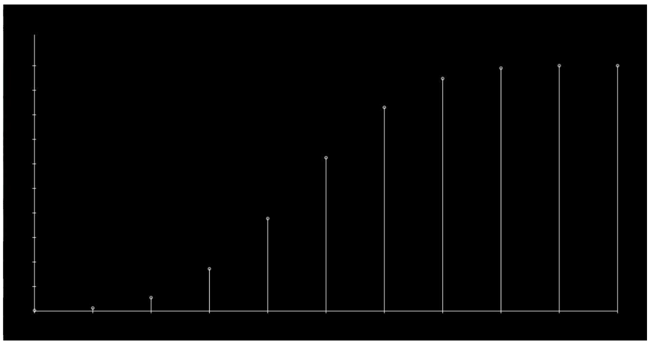
a. 公式證明

將PMF值累加起來即為CDF公式$\sum_{x=0}^{n} C_{\mathrm{x}}^{n} p^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$。

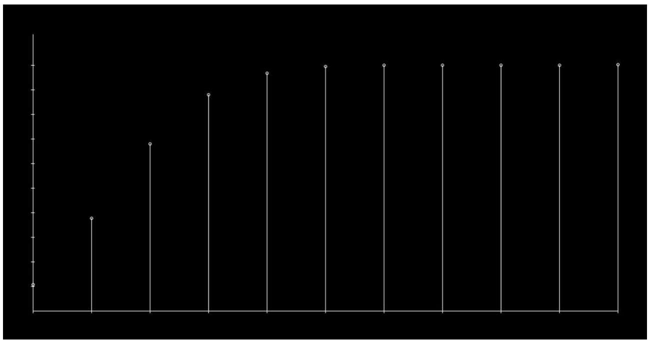
b. 圖例展示



P = 0.3　　N = 6



P = 0.66　　N = 5



P = 0.2　　N = 10

c. 數值顯示

```
輸入p : 0.3
輸入n : 6
PMF :
x = 0.000000, Px(x) = 0.117649
x = 1.000000, Px(x) = 0.302526
x = 2.000000, Px(x) = 0.324135
x = 3.000000, Px(x) = 0.185220
x = 4.000000, Px(x) = 0.059535
x = 5.000000, Px(x) = 0.010206
x = 6.000000, Px(x) = 0.000729
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
CDF :
x = 0.000000          Fx(X) = 0.117649
x = 1.000000          Fx(X) = 0.420175
x = 2.000000          Fx(X) = 0.744310
x = 3.000000          Fx(X) = 0.929530
x = 4.000000          Fx(X) = 0.989065
x = 5.000000          Fx(X) = 0.999271
x = 6.000000          Fx(X) = 1.000000
請按任意鍵繼續 . . .
```

```
輸入p : 0.66
輸入n : 5
PMF :
x = 0.000000, Px(x) = 0.004544
x = 1.000000, Px(x) = 0.044099
x = 2.000000, Px(x) = 0.171208
x = 3.000000, Px(x) = 0.332345
x = 4.000000, Px(x) = 0.322571
x = 5.000000, Px(x) = 0.125233
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續
CDF :
x = 0.000000          Fx(X) = 0.004544
x = 1.000000          Fx(X) = 0.048643
x = 2.000000          Fx(X) = 0.219851
x = 3.000000          Fx(X) = 0.552196
x = 4.000000          Fx(X) = 0.874767
x = 5.000000          Fx(X) = 1.000000
請按任意鍵繼續 . . .
```

（左）p = 0.3 n = 6 （右）p = 0.66 n = 5

```
輸入p : 0.2
輸入n : 10
PMF :
x = 0.000000, Px(x) = 0.107374
x = 1.000000, Px(x) = 0.268435
x = 2.000000, Px(x) = 0.301990
x = 3.000000, Px(x) = 0.201327
x = 4.000000, Px(x) = 0.088080
x = 5.000000, Px(x) = 0.026424
x = 6.000000, Px(x) = 0.005505
x = 7.000000, Px(x) = 0.000786
x = 8.000000, Px(x) = 0.000074
x = 9.000000, Px(x) = 0.000004
x = 10.000000, Px(x) = 0.000000
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
CDF :
x = 0.000000          Fx(X) = 0.107374
x = 1.000000          Fx(X) = 0.375810
x = 2.000000          Fx(X) = 0.677800
x = 3.000000          Fx(X) = 0.879126
x = 4.000000          Fx(X) = 0.967207
x = 5.000000          Fx(X) = 0.993631
x = 6.000000          Fx(X) = 0.999136
x = 7.000000          Fx(X) = 0.999922
x = 8.000000          Fx(X) = 0.999996
```

p = 0.2 n = 10

六、期望值公式證明

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x C_{\mathrm{x}}^{n} p^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}} p^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(x-1)!(n-x)!}} p^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$$

$$= np\sum_{x=1}^{n} \frac{\mathrm{(n-1)!}}{\mathrm{(x-1)!(n-x)!}} p^{\mathrm{x-1}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$$

$$= np\sum_{y=0}^{\mathrm{n-1}} \frac{\mathrm{(n-1)!}}{\mathrm{y!(n-y-1)!}} p^{\mathrm{y}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-y-1}}$$

$$= np(\mathrm{p}+(1-\mathrm{p}))^{\mathrm{n-1}} \qquad = np$$

七、變異數公式證明

$$Var[x] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$$

$$(E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}} p^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n} \frac{\mathrm{(n-2)!}}{\mathrm{(x-2)!(n-x)!}} p^{\mathrm{x-2}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-x}}$$

$$= n(n-1)p^2(\mathrm{p}+(1-\mathrm{p}))^{\mathrm{n-2}} \quad = n(n-1)p^2)$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p) \qquad = npq$$