

臺北市立大學資訊科學系

機率報告

報告題目： 二項式隨機變數

學生姓名：

資科系二 張鈺亭 U10816007

資科系二 金宣妘 U10816014

資科系二 馮珮筠 U10816016

資科系二 詹雅年 U10816021

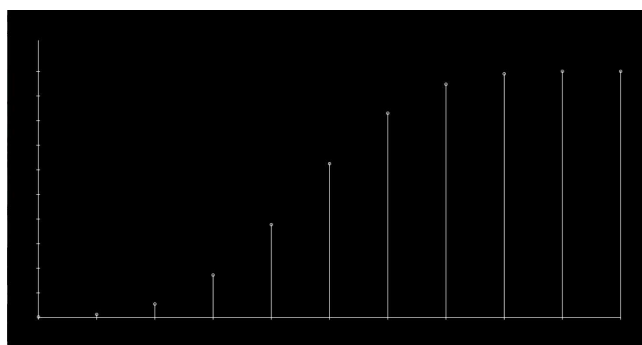
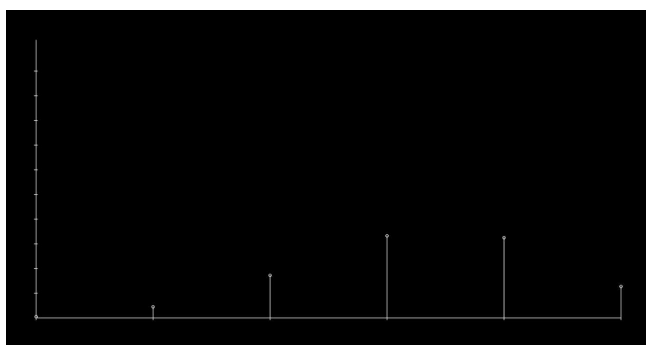
中 華 民 國 1 1 0 年 5 月 2 8 日

一、用途

許多隨機試驗都有一些共同的特性，像丟一個銅板，只丟出正面與反面兩種結果；抽一支籤，會出現中獎與不中獎兩種結果；候選人支持率的調查中，只有支持與不支持兩種結果。只有兩種結果（通常將這兩種結果稱為「成功」及「失敗」）的隨機試驗，稱為伯努利試驗(Bernoulli Trial)。在伯努利試驗中，如果成功的機率為 p ，則失敗的機率為 $1 - p$ 。若重複 n 次伯努利試驗，每次試驗結果都是獨立的，而且每次成功的機率都是 p ，令 X 表示成功的次數，則隨機變數 X 的分布稱為參數是 (n, p) 的二項分布，以符號 $X \sim B(n, p)$ 表示。

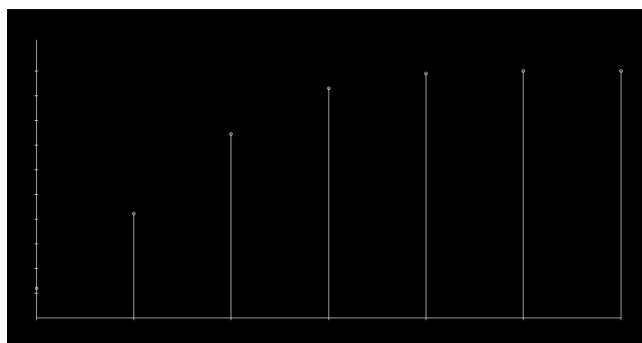
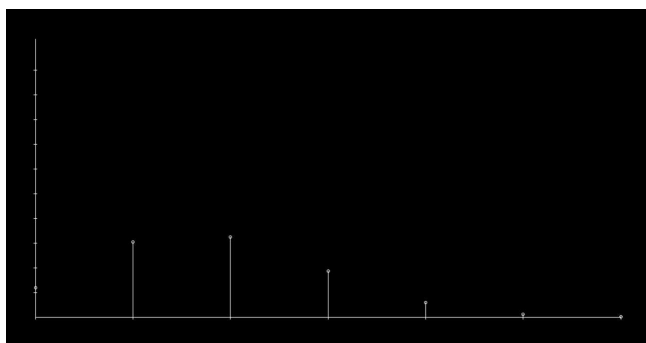
二、範例

- a. 已知一個不均勻銅板，出現正面的機率為 0.66，出現反面的機率為 0.34，今丟此銅板 5 次，令 X 代表出現正面的次數。



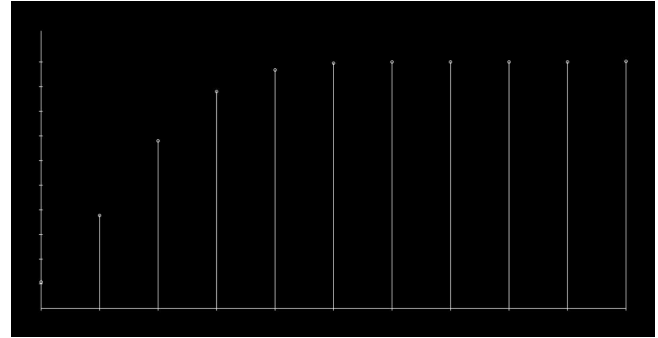
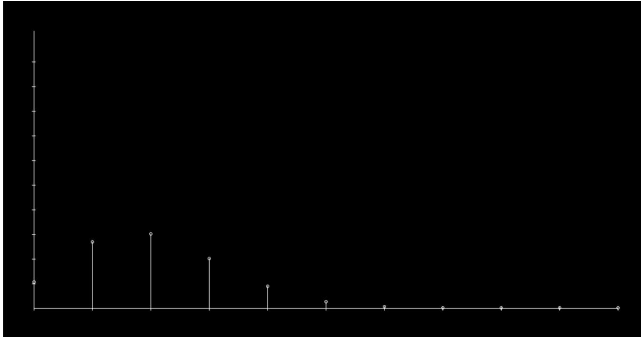
(左) PDF (右) CDF

- b. 袋中有 3 紅球、7 白球，從中每次任取一球，取後放回，共取 6 次，令 X 代表出現紅球的次數。



(左) PDF (右) CDF

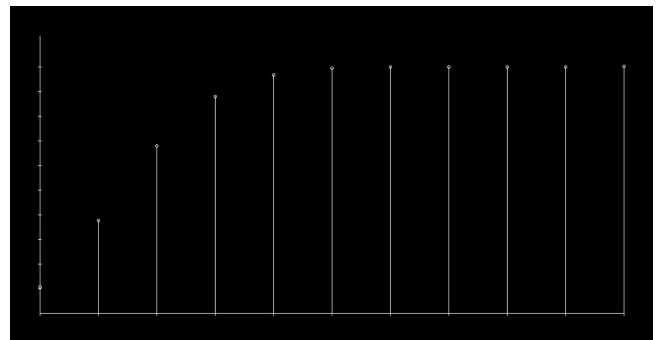
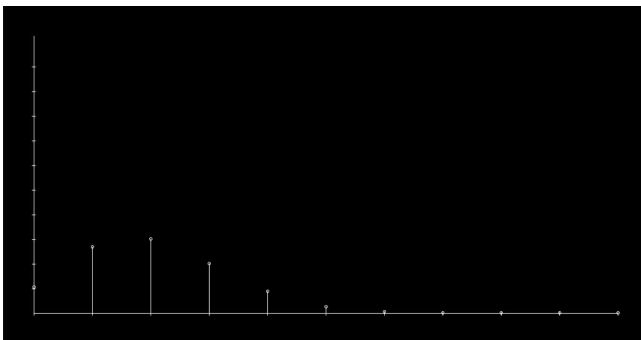
c. 投擲一均勻骰子 10 次，令 X 代表出現偶數點的次數。



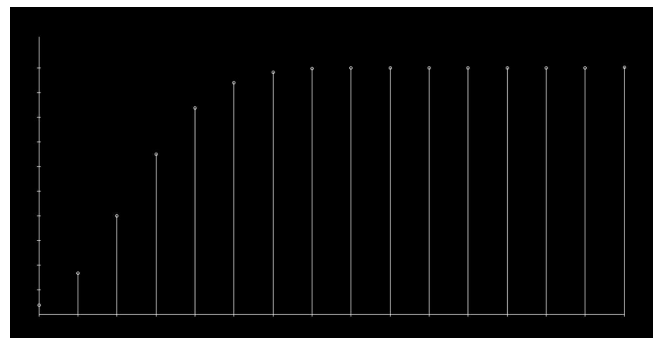
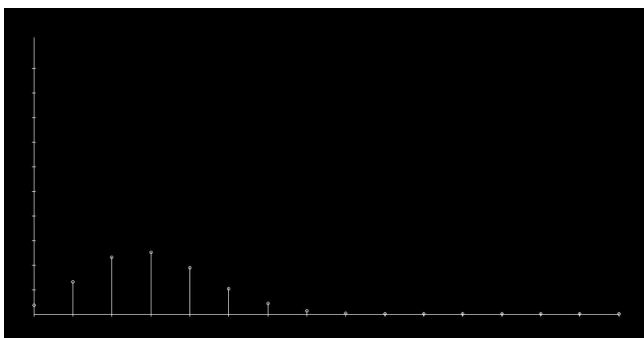
(左) PDF (右) CDF

三、分布說明

當 $p = 0.2$ 時， $n=10$ 和 $n=15$ 分布如下



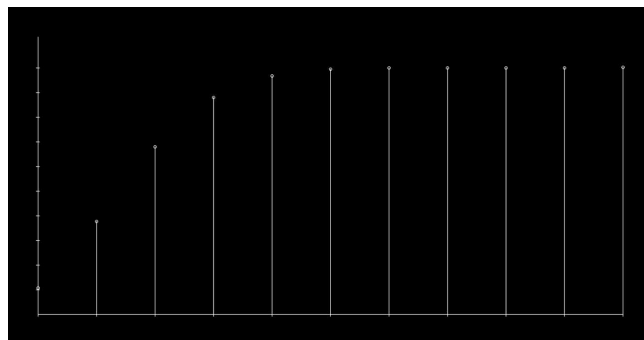
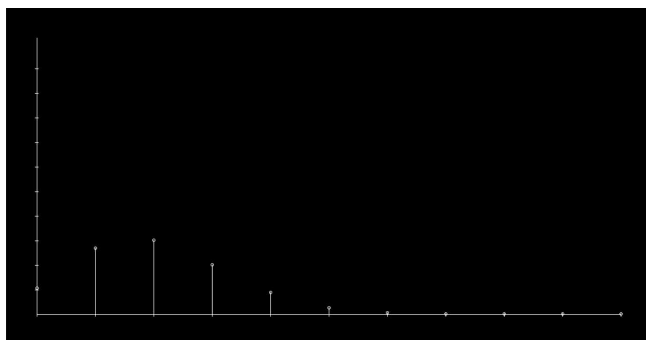
$n=10$ (左) PDF (右) CDF



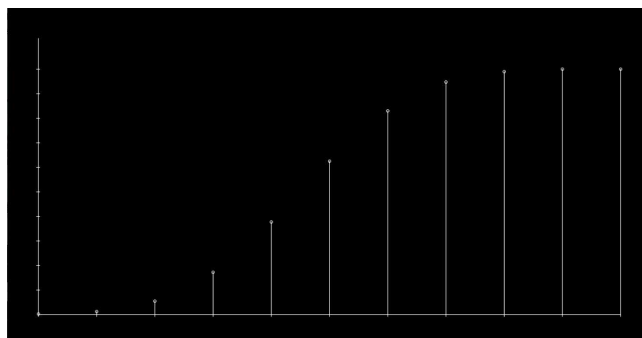
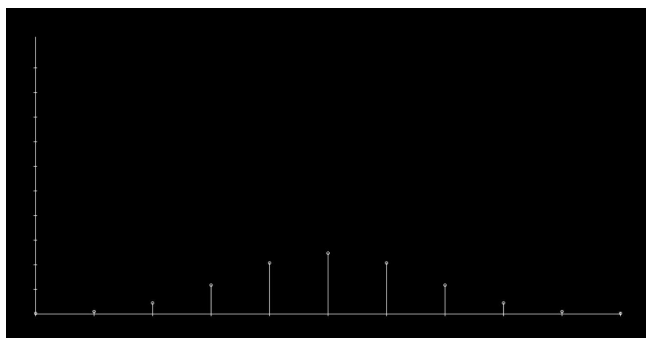
$n=15$ (左) PDF (右) CDF

由上面圖例可以看出來，當我們將 x 軸以同樣的比例展示，其走勢大致相同，但 n 越大，每個數值之間會相對密集。

當 $n = 10$ 時， $p=0.2$ 和 $p=0.5$ 分布如下



$p=0.2$ (左) PDF (右) CDF



$p=0.5$ (左) PDF (右) CDF

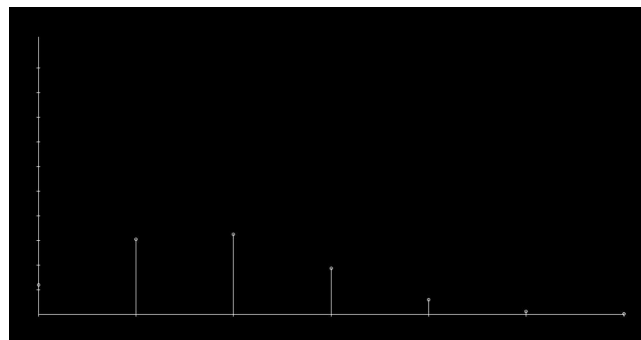
由上面圖例可以看出來，當 p 變大，其數值較大的區域向右移了，CDF 也有類似的效果。

四、PMF

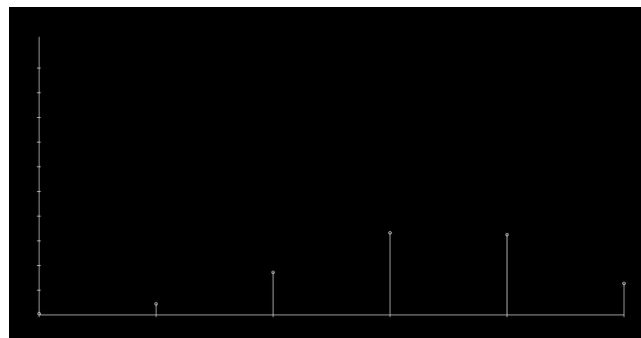
a. 公式證明

因為重複 n 次伯努利試驗，每次試驗結果都是獨立的，故 n 次試驗中恰有 x 次成功、 $(n - x)$ 次失敗的任一種排列順序之事件機率皆為 $p^x(1-p)^{n-x}$ 。 n 次試驗中恰有 x 次成功、 $(n - x)$ 次失敗的排列法有種 C_x^n ，由加法原理，可得 n 次試驗恰有 x 次 ($0 \leq x \leq n$ ， x 為整數) 成功的機率為 $C_x^n p^x(1-p)^{n-x}$ 。

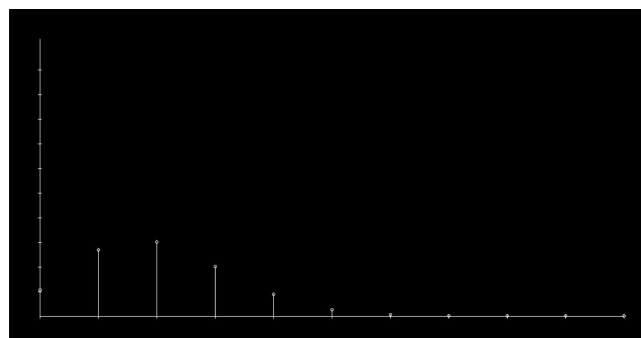
b. 圖例展示



$P = 0.3$ $N = 6$



$P = 0.66$ $N = 5$



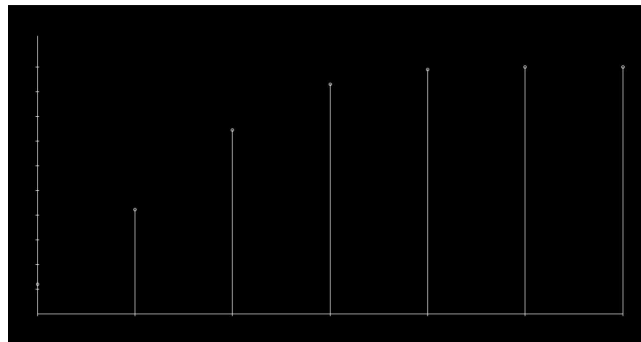
$P = 0.2$ $N = 10$

五、CDF

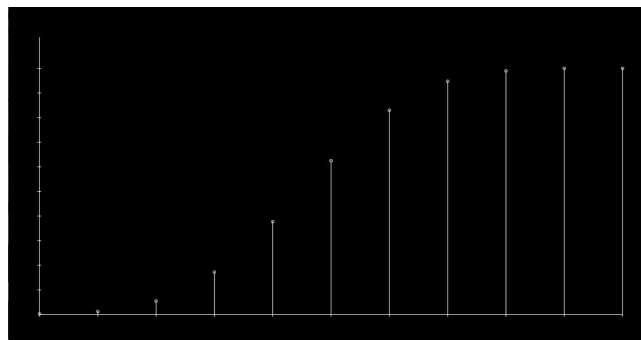
a. 公式證明

將PMF值累加起來即為CDF公式 $\sum_{x=0}^n C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$ 。

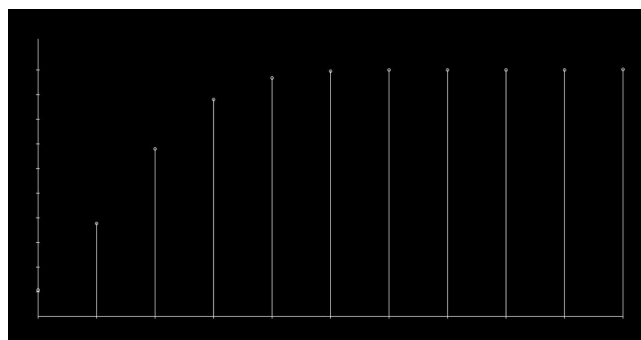
b. 圖例展示



P = 0.3 N = 6



P = 0.66 N = 5



P = 0.2 N = 10

c. 數值顯示

```

輸入p : 0.3
輸入n : 6
PMF :
x = 0.000000, Px(x) = 0.117649
x = 1.000000, Px(x) = 0.302526
x = 2.000000, Px(x) = 0.324135
x = 3.000000, Px(x) = 0.185220
x = 4.000000, Px(x) = 0.059535
x = 5.000000, Px(x) = 0.010206
x = 6.000000, Px(x) = 0.000729
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
CDF :
x = 0.000000      Fx(X) = 0.117649
x = 1.000000      Fx(X) = 0.420175
x = 2.000000      Fx(X) = 0.744310
x = 3.000000      Fx(X) = 0.929530
x = 4.000000      Fx(X) = 0.989065
x = 5.000000      Fx(X) = 0.999271
x = 6.000000      Fx(X) = 1.000000
請按任意鍵繼續 . . .

```

```

輸入p : 0.66
輸入n : 5
PMF :
x = 0.000000, Px(x) = 0.004544
x = 1.000000, Px(x) = 0.044099
x = 2.000000, Px(x) = 0.171208
x = 3.000000, Px(x) = 0.332345
x = 4.000000, Px(x) = 0.322571
x = 5.000000, Px(x) = 0.125233
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
CDF :
x = 0.000000      Fx(X) = 0.004544
x = 1.000000      Fx(X) = 0.048643
x = 2.000000      Fx(X) = 0.219851
x = 3.000000      Fx(X) = 0.552196
x = 4.000000      Fx(X) = 0.874767
x = 5.000000      Fx(X) = 1.000000
請按任意鍵繼續 . . .

```

(左) $p = 0.3$ $n = 6$ (右) $p = 0.66$ $n = 5$

```

輸入p : 0.2
輸入n : 10
PMF :
x = 0.000000, Px(x) = 0.107374
x = 1.000000, Px(x) = 0.268435
x = 2.000000, Px(x) = 0.301990
x = 3.000000, Px(x) = 0.201327
x = 4.000000, Px(x) = 0.088080
x = 5.000000, Px(x) = 0.026424
x = 6.000000, Px(x) = 0.005505
x = 7.000000, Px(x) = 0.000786
x = 8.000000, Px(x) = 0.000074
x = 9.000000, Px(x) = 0.000004
x = 10.000000, Px(x) = 0.000000
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
請按任意鍵繼續 . . .
CDF :
x = 0.000000      Fx(X) = 0.107374
x = 1.000000      Fx(X) = 0.375810
x = 2.000000      Fx(X) = 0.677800
x = 3.000000      Fx(X) = 0.879126
x = 4.000000      Fx(X) = 0.967207
x = 5.000000      Fx(X) = 0.993631
x = 6.000000      Fx(X) = 0.999136
x = 7.000000      Fx(X) = 0.999922
x = 8.000000      Fx(X) = 0.999996

```

$p = 0.2$ $n = 10$

六、期望值公式證明

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^n x C_x^n p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
 &= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-y-1)!} p^y (1-p)^{n-y-1} \\
 &= np(p+(1-p))^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

七、變異數公式證明

$$\begin{aligned}
 Var[x] &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \\
 (E[X(X-1)]) &= \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} \\
 &= n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} = n(n-1)p^2 \\
 &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
 &= np(1-p) = npq
 \end{aligned}$$

八、資料來源

<http://math1.ck.tp.edu.tw/林信安/學術研究/上課講義/99課網/數甲上/1-2二項分布.pdf>

<https://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=73317>

<https://easyx.cn/>