**2Outline-רשימת הגדרות ומשפטים**

**1.טופולגיה וקומפקטיות***.*

**1.6 הגדרה** (תכונת החיתוך הסופי):

משפחה לא ריקה של תת-קבוצות של קבוצה היא בעלת תכונת החיתוך הסופי(finite intersection property), אם ורק אם החיתוך של כל מספר סופי של קבוצות מתוכה אינו ריק.

***1.8 טענה***

מרחב קומפקטי אם ורק אם מתקיים שלכל משפחה  *של קבוצות* ***סגורות*** *ב**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי מתקיים: .*

**1.10 הגדרה**(קומפקטיפיקציה)

**קומפקטיפיקציה**(compactification)של מרחב טופולוגי היא זוג סדור , שבו הוא מרחב קומפקטי ו- הוא שיכון של כתת קבוצה צפופה ב, כלומר הוא הומאומורפיזם מ*לתוך ו .*

***1.11הגדרה****(קומפקטיפציית סטון-צ'ך,* Stone-Cech compactification*)*

*קומפקטיפציית סטון-צ'ך* הינה שיכון , כאשר הינו מרחב האוסדורף קומפקטי, כך שמתקיים שלכל התאמה רציפה כאשר מרחב האוסדורף קומפקטי, קיימת התאמה רציפה **יחידה** כך ש- הינה הרחבה רציפה של *.*

**2 אולטרה פילטר**

**2.1 הגדרה (**פילטר):

יהי קבוצה ויהי אוסף לא ריק של תת קבוצות של , הוא **פילטר** (filter) על , אם ורק אם:

1. לכל , .
2. אם אזי
3. אם וגם אזי .

**2.2 הגדרה** – אולטרה-פילטר(ultra filter):

פילטר על קבוצה הוא אולטרה-פילטר אם ורק אם אין שום פילטר על המכיל ממש את .

ניתן להגיד אם כן כי אולטרה-פילטר הוא פילטר מקסימלי.

***2.3 טענה***

*יהי פילטר על , אולטרה פילטר על אם ורק אם לכל בדיוק אחת מבין שייכת ל*

**2.4 טענה**

תהי ונסמן ב- את הפילטר . אזי  *הינו אולטרה פילטר אם ורק אם A הינו סינגלטון.*

**2.5 הגדרה** – אולטרה-פילטר ראשי(principal ultra filter):

יהי ***,*** *האולטרה פילטר*

יקרא אולטרה-פילטר - ראשי.

**2.6 טענה**

יהי אולטרה-פילטר **שאינו ראשי** על , ויהי , אזי  *אינסופי.*

***2.8 משפט***

*כל פילטר על מוכל באולטרה-פילטר על .*

***2.9 הגדרה – התכנסות פילטר***

*יהי*  פילטר על העולם של מרחב טופולוגי ותהי נאמר שהפילטר **מתכנס** ל במרחב ושהנקודה היא **גבול** של אם ורק אם מכיל את פילטר הסביבות (כלומר אם ורק אם כל סביבה של שייכת לפילטר). כאשר מתכנס ל נרשום

***2.10 משפט***

*מרחב טופולוגי הוא מרחב האוסדורף אם ורק אם לכל פילטר מתכנס על יש גבול יחיד.*

***2.11 משפט***

*התאמה רציפה בנקודה , אם ורק אם לכל פילטר על המקיים פילטר התמונה, , שהוא הפילטר על שבסיסו הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר , מקיים*

**3 בניית**  *- קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך*

**3.1 הגדרה**

יהי מרחב דיסקרטי נגדיר את המרחב

**3.3 טענה**

יהי אזי

ו- הינה סינגלטון ב- . *כלומר, הקבוצה היא סינגלטון* ב- *.*

**3.4 למה**

ההתאמה *, מהווה שיכון של קבוצות עם סדר חלקי תחת . ובפרט:*

1. *.*
2. *אם אזי .*
3. *וגם .*
4. *. ()*
5. *ההתאמה , הינה חד חד ערכית.*

***הוכחה:***

1. נוכיח כי   
   זאת נובע כי כל אולטרא פילטר וכן כל אולטרא פילטר מקיים ולכן   
   נוכיח כי   
   זאת נובע כי לכל אולטרא פילטר מתקיים , ולכן **אין** איברים ב המכילים את ולכן קיבלנו כי
2. נניח כי   
   ויהי אזי אבל וכן אולטרא פילטר ולכן ולכן . מש"ל
3. נוכיח

יהי אזי אולטרא פילטר ולכן וגם  
 ואם כן קיבלנו כי ולכן וכן ולכן .

ולכן קיבלנו כי וגם . וממילא קיבלנו כי .

נוכיח

יהי ולכן וגם ולכן וכן ובגלל ש אולטרא פילטר אזי וממילא נקבל כי

נוכיח

נניח בשלילה כי קיים כך ש ולכן וגם ולכן וגם

אבל אולטרא פילטר ולכן וגם מצד שני ולכן

אולטרא פילטר ולכן , אך מצד שני(כפי שראינו) וגם וזה בסתירה להיות אולטרא פילטר.

נוכיח

יהי ולכן או ללא הגבלת כלליות נניח כי ולכן והיות אולטרא פילטר נובע כי . ולכן קיבלנו כי ולכן .

המקרה השני הינו אותו דבר עד כדי שינוי אותיות A וB.

ולכן קיבלנו כי.

1. אם"ם אם"ם(אולטרא פילטר) אם"ם אם"ם
2. נניח כי קבוצות שונות של   
    שונות ולכן ללא הגבלת כלליות(המקרה השני דומה עד שינוי סימנים) קיים כך ש ולכן ולכן נקבל כי (לפי סעיף 2)  
   מצד שני לפי סעיף 4. אבל ברור כי . ולכן נקבל כי

**הגדרה(**טופולוגיה על **)**

יהי נגדיר אוסף כך:

הבסיס לטופלוגיה על יוגדר על ידי קבוצת התת קבוצות

**3.5 משפט**

התת-קבוצות מהוות בסיס עבור טופולוגיה על וביחס לטופולוגיה זו. וההתאמה  *כך ש-, משכן את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-, ולכן ההגבלה של ל הינה הומאומורפיזם.*

**3.6 משפט**

יהי מרחב דיסקרטי אזי המרחב הינו קומפטי והאוסדורף. וכן  *הינו קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך של .*

**4 הוכחת משפט הינדמן**

**4.1 הגדרה**

יהי , ויהי .

**4.2.1 הגדרה**

יהי אולטרה פילטר ויהי , נגדיר את הפעולה

**4.2.2 הגדרה**

תהיינה אולטרה פילטרים על **,** נגדיר את הפעולה להיות אוסף כל התת-קבוצות המקיימות ביחס לA שקבוצת האיברים המקיימים היא קבוצה השייכת ל

**4.3 למה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

**טענות עזר-**

**טענת עזר-1:**

**הוכחה:**

ברור כי

צד שני :

אזי אם אזי ברור כי ולכן אבל ולכן גם .

ולכן

**מש"ל**

**טענת עזר-2:**

**הוכחה:**

אםם קיים כך ש-

אםם וגם

וגם וגם

אםם וגם

אםם

**מש"ל**

**טענת עזר-3:**

אם אזי

**הוכחה:**

יהי אזי קיים כך ש אבל ולכן  *וכן ולכן*

***מש"ל***

**טענת עזר-4:**

*אםם קיים כך ש .*

*אםם אםם*

*אםם .*

**מש"ל.**

**טענת עזר-5:**

**הוכחה:**

לכל k מתקיים אבל אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן . וזה מתקיים לכל k ולכן **.**

**טענת עזר-6:**

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי קיים   
אבל  
  
אבל לכל k *.  
אבל לא קיימים n-ים כאלה ולכן .  
אבל אזי קיבלנו כי ואזי קיבלנו כי אבל אולטרה-פילטר ומהגדרתו . בסתירה  
ולכן לא קיימים k כך ש-ולכן* . **מש"ל.**

**טענת עזר-7:**

**הוכחה:**

*יהי*

*ולכן*

*אבל*

*וכן*

*אולטרה-פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים כי וכן ולכן וגם ולכן .*

*ולכן הוכחנו כי .*

*נוכיח כוון שני יהי*

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם אבל*

ולכן קיבלנו כי גם .

ולכן .

ולכן הוכחנו את ההכלה

ומכל האמור קיבלנו כי

**מש"ל.**

**טענת עזר-8:**

תהאנה כך ש- אזי

**הוכחה:**

יהי ונוכיח כי

ולכן .

אבל ולכן

אולטרה פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים גם .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

מש"ל.

**טענת עזר-9:**

***הוכחה:***

**מש"ל.**

**הוכחת למה 4.3:**

1. נוכיח כי

אזי צריך להוכיח כי מטענת-עזר-5 נובע כי .

אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן   
ולכן

מש"ל.

1. נוכיח כי .

נניח בשלילה כי .  
ולכן מטענת-עזר-6 נובע כי .

אבל מההנחה  *ולכן .  
וקיבלנו שלמרות ש אולטרה פילטר בסתירה להגדרת אולטרה פילטר.  
ולכן הנחת השלילה הראשונה גם שגויה ולכן ולכן .  
מש"ל*

1. תהיינה

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם*

*אבל מטענת-עזר-7 נובע כי*

*ולכן קיבלנו כי*

*ובפרט שקיבלנו כי . מש"ל.*

1. יהי ויהי כך ש נוכיח כי גם .

במילים אחרות צריך להוכיח כי .

ולכן

*אולטרה פילטר וכן מטענת עזר-8*

*ולכן נקבל מהגדרת פילטר נקבל כי .*

*ולכן נקבל כי מש"ל.*

מ1,2,3,4 קיבלנו כי פילטר.

נוכיח כי פילטר זה הינו אולטרה פילטר.

*יהי נתבונן ב.*

*נוכיח כי*

*מהנתון כי אזי אבל אולטרה פילטר ולכן ומטענת-עזר-9 נקבל כי*

*ולכן ולכן נקבל כי .*

*ומכל האמור נקבל לפי 2.3 כי אולטרא פילטר.*

*מש"ל.*

*וממילא קיבלנו כי . ולכן קיבלנו כי פעולה בינארית על*  .

**4.3.1 טענה**(אסוציאטיביות)

לכל מתקיים:

הוכחה:

אםם

אםם

אםם (בהצבה - )

אםם

אםם.

מש"ל.

**4.4 טענה**

תהיינה אולטרה פילטרים ראשיים על , אזי אולטרה פילטר ומתקיים

הוכחה:

תהיינה .

אזי .

ולכן .

מצד שני האולטרה פילטר היחיד המכיל את הסינגלטון הוא האולטרה פילטר הראשי .

ולכן קיבלנו כי כנדרש.

**4.5 טענה**

לכל ההתאמה *, רציפה.*

*הוכחה:*

יהי קבוצה פתוחה בסיסית נבחן את המקור של

*נקבל כי*

*אםם . אםם אםם כאשר .*

*וקבלנו כי לכל קבוצה פתוחה המקור גם פתוח.*

*ולכן מדובר על התאמה רציפה. משל*

**4.6 הגדרה**

אולטרה פילטר הוא אידמפוטנטי(Idempotent Ultra-Filter) אם ורק אם מתקיים:

**4.7 משפט**

קיים כך ש- אידמפוטנטי.

ז"א מתקיים:

*הוכחה:*

*יהי .*

*נגדיר*

*נתבונן באוסף*

ברור כי . ולכן אינה ריקה.

יהי שרשרת, נוכיח כי () חסם תחתון עבור ז"א לכל .

נעיר כי מקיימת את תנאי תכונת החיתוך הסופי(1.6) בגלל ש הינה בעלת יחס סדר מלא.

היות ו הינה קומפקטית, (1.8)הינה קבוצה לא ריקה וסגורה.

נוכיח כי קיים חסם תחתון M ל

יהיו כך ש

היות וC שרשרת נוכל להניח ללא הגבלת כלליות כי

*ותהאנה וברור כי ובגלל ש* הרי שמתקיים

.

ולכן קיבלנו כי לכל ש סגורה מתקיים גם ולכן

ומתקיים לכל *.*

*ולכן קיבלנו כי לכל שרשרת על הינה חסומה מלרע.*

*ולכן לפי הלמה צורן(Zorn's Lemma)(מופעל על עם יחס הסדר "בצורה הפוכה" ) קיים לחסם תחתון ז"א קיים כך שלכל מתקיים .*

*יהי (קיים כזה כי ולכן אינה ריקה). נוכיח כי אידמפוטנטי.*

*נראה כי*

*יהי ולכן*

*ברור כי אינה ריקה כי . בנוסף סגורה היות והיא תמונה של קבוצה סגורה על ידי התאמה רציפה (על פי טענה 4.5). ולכן*

*הרי שקיבלנו כי וגם וממינימאליות של M נקבל כי .*

ניקח אם כן שוב ונתבונן ב

נראה אם כן כי .

ברור כי כי וכי .

וכן ברור כי הינה קבוצה סגורה היות ו סגורה

וכן הינה המקור של הנקודה *על ידי התאמה רציפה (על פי טענה 4.5).*

תהאנה  *אזי*

*וכן*  ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ומכל האמור קיבלנו כי *.*

*אבל ומינימאליות של M נקבל כי .*

*אבל היות ונקבל כי .*

*מש"ל.*

**4.8 הגדרה(**קבוצת סכומים סופים**)**

יהי קבוצת הסכומים הסופיים מעל B הינה:

**4.9 הגדרה**(IP-set)

יהי *, יקרא* IP-set *אם ורק אם קיים אינסופי כך ש-*

**4.10 טענה**

בהינתן ש

ויהי אולטרה פילטר על

אזי קיים .

הוכחה:

נניח בשלילה כי לכל . אזי לפי 2.3 וזה מתקיים לכל .

ולכן נקבל כי מהגדרה 2.1.1(מדובר על חיתוך סופי)

מצד שני מתקיים

בסתירה, ולכן הנחת השלילה שגויה. ולכן קיים . משל.

**4.11 משפט**

יהי אולטרה-פילטר אידמפוטנטי על ℕ,  
אזי לכל  *הינו IP-set.*

*הוכחה:*

*יהי .*

*נגדיר*

היות ו מקיים אזי אם מתקיים .

נבנה רקורסיבית:

* שרשרת של קבוצות
* סדרה עולה: כאשר , כך ש .

נתחיל עם .

היות ו *. קיים . מהגדרת נובע כי ולכן אם נבחר  
 מתקיים:* . והקבוצה הינה אינסופית(\*) . לכן ניתן לבחור כך שמתקיים .

באופן כללי בהינתן וכן *, לפי ההגדרה מתקיים שהקבוצה ולכן וכן כמקודם ולכן גם*  אינסופי, ולכן נבחר כך ש .

נטען את הטענה הבאה:

יהי טבעי  
ותהיינה

*אזי*

נוכיח זאת באינדוקציה על .

היות ומתקיים אזי עבור מתקיים הטענה.

נניח נכונות עבור וכן . ולכן הסכום ה *מקיים:*

*והיות ו- נקבל כי הסכום ה-r . ולכן* מתקיים. והוכחנו את הטענה.

מכל האמור קיבלנו כי קבוצת הסכומים של  *מקיים* כדרוש.

**4.12 משפט(**הינדמן**)**

אם

אזי לפחות אחד הקבוצות הינה *IP-set*.