**2Outline-רשימת הגדרות ומשפטים**

**1.טופולגיה וקומפקטיות***.*

**1.6 הגדרה** (תכונת החיתוך הסופי):

משפחה לא ריקה של תת-קבוצות של קבוצה היא בעלת תכונת החיתוך הסופי(finite intersection property), אם ורק אם החיתוך של כל מספר סופי של קבוצות מתוכה אינו ריק.

***1.8 טענה***

מרחב קומפקטי אם ורק אם מתקיים שלכל משפחה  *של קבוצות* ***סגורות*** *ב**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי מתקיים: .*

**1.10 הגדרה**(קומפקטיפיקציה)

**קומפקטיפיקציה**(compactification)של מרחב טופולוגי היא זוג סדור , שבו הוא מרחב קומפקטי ו- הוא שיכון של כתת קבוצה צפופה ב, כלומר הוא הומאומורפיזם מ*לתוך ו .*

***1.11הגדרה****(קומפקטיפציית סטון-צ'ך,* Stone-Cech compactification*)*

*קומפקטיפציית סטון-צ'ך* הינה שיכון , כאשר הינו מרחב האוסדורף קומפקטי, כך שמתקיים שלכל התאמה רציפה כאשר מרחב האוסדורף קומפקטי, קיימת התאמה רציפה **יחידה** כך ש- הינה הרחבה רציפה של *.*

**2 אולטרה פילטר**

**2.1 הגדרה (**פילטר):

יהי קבוצה ויהי אוסף לא ריק של תת קבוצות של , הוא **פילטר** (filter) על , אם ורק אם:

1. לכל , .
2. אם אזי
3. אם וגם אזי .

**2.2 הגדרה** – אולטרה-פילטר(ultra filter):

פילטר על קבוצה הוא אולטרה-פילטר אם ורק אם אין שום פילטר על המכיל ממש את .

ניתן להגיד אם כן כי אולטרה-פילטר הוא פילטר מקסימלי.

***2.3 טענה***

*יהי פילטר על , אולטרה פילטר על אם ורק אם לכל בדיוק אחת מבין שייכת ל*

**2.4 טענה**

תהי ונסמן ב- את הפילטר . אזי  *הינו אולטרה פילטר אם ורק אם A הינו סינגלטון.*

**2.5 הגדרה** – אולטרה-פילטר ראשי(principal ultra filter):

יהי ***,*** *האולטרה פילטר*

יקרא אולטרה-פילטר - ראשי.

**2.6 טענה**

יהי אולטרה-פילטר **שאינו ראשי** על , ויהי , אזי  *אינסופי.*

***2.8 משפט***

*כל פילטר על מוכל באולטרה-פילטר על .*

***2.9 הגדרה – התכנסות פילטר***

*יהי*  פילטר על העולם של מרחב טופולוגי ותהי נאמר שהפילטר **מתכנס** ל במרחב ושהנקודה היא **גבול** של אם ורק אם מכיל את פילטר הסביבות (כלומר אם ורק אם כל סביבה של שייכת לפילטר). כאשר מתכנס ל נרשום

***2.10 משפט***

*מרחב טופולוגי הוא מרחב האוסדורף אם ורק אם לכל פילטר מתכנס על יש גבול יחיד.*

***2.11 משפט***

*התאמה רציפה בנקודה , אם ורק אם לכל פילטר על המקיים פילטר התמונה, , שהוא הפילטר על שבסיסו הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר , מקיים*

**3 בניית**  *- קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך*

**3.1 הגדרה**

יהי מרחב דיסקרטי נגדיר את המרחב

**3.3 טענה**

יהי אזי

ו- הינה סינגלטון ב- . *כלומר, הקבוצה היא סינגלטון* ב- *.*

**3.4 למה**

ההתאמה *, מהווה שיכון של קבוצות עם סדר חלקי תחת . ובפרט:*

1. *.*
2. *אם אזי .*
3. *וגם .*
4. *. ()*
5. *ההתאמה , הינה חד חד ערכית.*

***הוכחה:***

1. נוכיח כי   
   זאת נובע כי כל אולטרא פילטר וכן כל אולטרא פילטר מקיים ולכן   
   נוכיח כי   
   זאת נובע כי לכל אולטרא פילטר מתקיים , ולכן **אין** איברים ב המכילים את ולכן קיבלנו כי
2. נניח כי   
   ויהי אזי אבל וכן אולטרא פילטר ולכן ולכן . מש"ל
3. נוכיח

יהי אזי אולטרא פילטר ולכן וגם  
 ואם כן קיבלנו כי ולכן וכן ולכן .

ולכן קיבלנו כי וגם . וממילא קיבלנו כי .

נוכיח

יהי ולכן וגם ולכן וכן ובגלל ש אולטרא פילטר אזי וממילא נקבל כי

נוכיח

נניח בשלילה כי קיים כך ש ולכן וגם ולכן וגם

אבל אולטרא פילטר ולכן וגם מצד שני ולכן

אולטרא פילטר ולכן , אך מצד שני(כפי שראינו) וגם וזה בסתירה להיות אולטרא פילטר.

נוכיח

יהי ולכן או ללא הגבלת כלליות נניח כי ולכן והיות אולטרא פילטר נובע כי . ולכן קיבלנו כי ולכן .

המקרה השני הינו אותו דבר עד כדי שינוי אותיות A וB.

ולכן קיבלנו כי.

1. אם"ם אם"ם(אולטרא פילטר) אם"ם אם"ם
2. נניח כי קבוצות שונות של   
    שונות ולכן ללא הגבלת כלליות(המקרה השני דומה עד שינוי סימנים) קיים כך ש ולכן ולכן נקבל כי (לפי סעיף 2)  
   מצד שני לפי סעיף 4. אבל ברור כי . ולכן נקבל כי

**הגדרה(**טופולוגיה על **)**

יהי נגדיר אוסף כך:

הבסיס לטופלוגיה על יוגדר על ידי קבוצת התת קבוצות

**3.5 משפט**

התת-קבוצות מהוות בסיס עבור טופולוגיה על וביחס לטופולוגיה זו. וההתאמה  *כך ש-, משכן את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-, ולכן ההגבלה של ל הינה הומאומורפיזם.*

**3.6 משפט**

יהי מרחב דיסקרטי אזי המרחב הינו קומפטי והאוסדורף. וכן  *הינו קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך של .*

**4 הוכחת משפט הינדמן**

**4.1 הגדרה**

יהי , ויהי .

**4.2 הגדרה**

תהיינה אולטרה פילטרים על **,** נגדיר את הפעולה להיות אוסף כל התת-קבוצות כך ש*עבור כל*  מתקיים *. ז"א*

**4.3 למה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

**4.3.1 טענה**(אסוציאטיביות)לכל מתקיים:

**4.4 טענה**

תהיינה אולטרה פילטרים ראשיים על , אזי אולטרה פילטר ומתקיים

**4.5 טענה**

לכל ההתאמה *, רציפה.*

**4.6 הגדרה**

אולטרה פילטר הוא אידמפוטנטי(Idempotent Ultra-Filter) אם ורק אם מתקיים:

**4.7 משפט**

קיים כך ש- אידמפוטנטי.

ז"א מתקיים:

**4.8 הגדרה(**קבוצת סכומים סופים**)**

יהי קבוצת הסכומים הסופיים מעל B הינה:

**4.9 הגדרה**(IP-set)

יהי *, יקרא* IP-set *אם ורק אם קיים אינסופי כך ש-*

**4.10 טענה**

בהינתן ש

ויהי אולטרה פילטר על

אזי קיים .

**4.11 משפט**

יהי אולטרה-פילטר אידמפוטנטי על ℕ,  
אזי לכל  *הינו IP-set.*

**4.12 משפט(**הינדמן**)**

אם

אזי לפחות אחד הקבוצות הינה *IP-set*.