**3 בניית**  *- קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך*

**3.1 הגדרה**

יהי מרחב דיסקרטי נגדיר את המרחב

**3.2 הגדרה**

יהי נסמן:

**3.4 למה**

ההתאמה *, מהווה שיכון של קבוצות עם סדר חלקי תחת . ובפרט:*

1. *.*
2. *אם אזי .*
3. *וגם .*
4. *. ()*
5. *ההתאמה , הינה חד חד ערכית.*

***הוכחה:***

1. נוכיח כי   
   זאת נובע כי כל אולטרא פילטר וכן כל אולטרא פילטר מקיים ולכן   
   נוכיח כי   
   זאת נובע כי לכל אולטרא פילטר מתקיים , ולכן **אין** איברים ב המכילים את ולכן קיבלנו כי
2. נניח כי   
   ויהי אזי אבל וכן אולטרא פילטר ולכן ולכן . מש"ל
3. נוכיח

יהי אזי אולטרא פילטר ולכן וגם  
 ואם כן קיבלנו כי ולכן וכן ולכן .

ולכן קיבלנו כי וגם . וממילא קיבלנו כי .

נוכיח

יהי ולכן וגם ולכן וכן ובגלל ש אולטרא פילטר אזי וממילא נקבל כי

נוכיח

נניח בשלילה כי קיים כך ש ולכן וגם ולכן וגם

אבל אולטרא פילטר ולכן וגם מצד שני ולכן

אולטרא פילטר ולכן , אך מצד שני(כפי שראינו) וגם וזה בסתירה להיות אולטרא פילטר.

נוכיח

יהי ולכן או ללא הגבלת כלליות נניח כי ולכן והיות אולטרא פילטר נובע כי . ולכן קיבלנו כי ולכן .

המקרה השני הינו אותו דבר עד כדי שינוי אותיות A וB.

ולכן קיבלנו כי.

1. אם"ם אם"ם(אולטרא פילטר) אם"ם אם"ם
2. נניח כי קבוצות שונות של   
    שונות ולכן ללא הגבלת כלליות(המקרה השני דומה עד שינוי סימנים) קיים כך ש ולכן ולכן נקבל כי (לפי סעיף 2)  
   מצד שני לפי סעיף 4. אבל ברור כי . ולכן נקבל כי

**הגדרה(**טופולוגיה על **)**

יהי נגדיר אוסף כך:

הבסיס לטופלוגיה על יוגדר על ידי קבוצת התת קבוצות

**3.5 משפט**

התת-קבוצות מהוות בסיס עבור טופולוגיה על וביחס לטופולוגיה זו ההתאמה  *כך ש-, משכנת את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-, ולכן ההגבלה של ל הינה הומיאומורפיזם.*

***הוכחה:***

*נסמן* . נראה כי מהווה בסיס עבור טופולוגיה על *.*

1. *יהי   
   נתבונן ב- אזי לפי למה 3.4 הרי ש- ולכן אך .*
2. *תהאנה ונניח כי   
   אזי היות ו הרי שקיימים כך ש   
   ולכן   
     
   ולכן מצאנו כי כך ש- .*

*מקיום שני תנאים אלה לפי 2.10 בספר – קיימת טופולוגיה יחידה על ש בסיס שלה.*

*נוכיח כי* ההתאמה  *כך ש-, משכנת את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-*

*ההתאמה , כך ש- . הינה חח"ע – כי עבור מתקיים:*

והיות ומתוך הגדרת הטופולוגיה על נובע כי הסינגלטונים- הינם קבוצות פתוחות. ולכן נקבל כי התמונה של תחת הינה דיסקרטית.

נוכיח צפיפות( צפופה ב- ) –

נוכיח כי פוגשת כל קבוצה בבסיס של הטופולוגיה

אזי יהי . קבוצה פתוחה בבסיס. ולכן קיים . אבל אזי ,  
ולכן קיבלנו כי פוגשת כל קבוצה בבסיס.

ולכן הינה צפופה.

מש"ל.

**3.3 טענה**

יהי אזי

ו- הינה סינגלטון ב- . *כלומר, הקבוצה היא סינגלטון* ב- *.*

**3.6 משפט**

יהי מרחב דיסקרטי אזי המרחב הינו קומפקטי והאוסדורף. וכן  *הינו קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך של .*