**3 בניית**  *- קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך*

**3.1 הגדרה**

יהי מרחב דיסקרטי נגדיר את המרחב

**3.2 הגדרה**

יהי נסמן:

**3.3 למה**

ההתאמה *, מהווה שיכון של קבוצות עם סדר חלקי תחת . ובפרט:*

1. *.*
2. *אם אזי .*
3. *וגם .*
4. *. ()*
5. *ההתאמה , הינה חד חד ערכית.*

***הוכחה:***

1. נוכיח כי   
   זאת נובע כי כל אולטרא פילטר וכן כל אולטרא פילטר מקיים ולכן   
   נוכיח כי   
   זאת נובע כי לכל אולטרא פילטר מתקיים , ולכן **אין** איברים ב המכילים את ולכן קיבלנו כי
2. נניח כי   
   ויהי אזי אבל וכן אולטרא פילטר ולכן ולכן . מש"ל
3. נוכיח

יהי אזי אולטרא פילטר ולכן וגם  
 ואם כן קיבלנו כי ולכן וכן ולכן .

ולכן קיבלנו כי וגם . וממילא קיבלנו כי .

נוכיח

יהי ולכן וגם ולכן וכן ובגלל ש אולטרא פילטר אזי וממילא נקבל כי

נוכיח

נניח בשלילה כי קיים כך ש ולכן וגם ולכן וגם

אבל אולטרא פילטר ולכן וגם מצד שני ולכן

אולטרא פילטר ולכן , אך מצד שני(כפי שראינו) וגם וזה בסתירה להיות אולטרא פילטר.

נוכיח

יהי ולכן או ללא הגבלת כלליות נניח כי ולכן והיות אולטרא פילטר נובע כי . ולכן קיבלנו כי ולכן .

המקרה השני הינו אותו דבר עד כדי שינוי אותיות A וB.

ולכן קיבלנו כי.

1. אם"ם אם"ם(אולטרא פילטר) אם"ם אם"ם
2. נניח כי קבוצות שונות של   
    שונות ולכן ללא הגבלת כלליות(המקרה השני דומה עד שינוי סימנים) קיים כך ש ולכן ולכן נקבל כי (לפי סעיף 2)  
   מצד שני לפי סעיף 4. אבל ברור כי . ולכן נקבל כי

**3.4 הגדרה(**טופולוגיה על **)**

יהי נגדיר אוסף כך:

הבסיס לטופלוגיה על יוגדר על ידי קבוצת התת קבוצות

**3.5 משפט**

התת-קבוצות מהוות בסיס עבור טופולוגיה על וביחס לטופולוגיה זו ההתאמה  *כך ש-, משכנת את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-, ולכן ההגבלה של ל הינה הומיאומורפיזם.*

***הוכחה:***

*נסמן* . נראה כי מהווה בסיס עבור טופולוגיה על *.*

1. *יהי   
   נתבונן ב- אזי לפי למה 3.4 הרי ש- ולכן אך .*
2. *תהאנה ונניח כי   
   אזי היות ו הרי שקיימים כך ש   
   ולכן   
     
   ולכן מצאנו כי כך ש- .*

*מקיום שני תנאים אלה לפי 2.10 בספר – קיימת טופולוגיה יחידה על ש בסיס שלה.*

*נוכיח כי* ההתאמה  *כך ש-, משכנת את כמרחב דיסקרטי וצפוף ב-*

*ההתאמה , כך ש- . הינה חח"ע – כי עבור מתקיים:*

והיות ומתוך הגדרת הטופולוגיה על נובע כי הסינגלטונים- הינם קבוצות פתוחות. ולכן נקבל כי התמונה של תחת הינה דיסקרטית.

נוכיח צפיפות( צפופה ב- ) –

נוכיח כי פוגשת כל קבוצה בבסיס של הטופולוגיה

אזי יהי . קבוצה פתוחה בבסיס. ולכן קיים . אבל אזי ,  
ולכן קיבלנו כי פוגשת כל קבוצה בבסיס.

ולכן הינה צפופה.

מש"ל.

**3.6 טענה**

יהי אזי

ו- הינה סינגלטון ב- . *כלומר, הקבוצה היא סינגלטון* ב- *.*

**3.7 משפט**

יהי מרחב דיסקרטי אזי המרחב הינו קומפטי והאוסדורף. וכן  *הינו קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך של .*

*הוכחה:*

*הוכחת האוסדורף-*

*תהיינה נקודות שונות, ז"א הם אולטרא פילטרים שונים.*

*ללא הגבלת כלליות יש עבורה וגם .*

*אזי אם ניקח את אזי .*

*ולכן קיבלנו כי הסביבות הפתוחות של הנקודות בהתאמה, המקיימות .*

*ולכן קיבלנו כי האוסדורף.*

הוכחת קומפקטיות-

יהי משפחה של קבוצות סגורות המקיימות את תכונת החיתוך הסופי.

היות ומתקיים לפי למה 3.3

אזי קיבלנו כי גם ולכן גם המשפחה מקיימת את תכונת החיתוך הסופי.

אם ניקח את האוסף

*היות* הרי ש .

וכן לכל

ולכן קיים

וכן אם וגם אזי  *ולכן גם*

ולכן נקבל כי המשפחה יוצרת פילטר על . נוכל להרחיב את את הפילטר לאולטרא פילטר (כל פילטר מוכל באולטרא פילטר(2.9))

אולטרא פילטר ולכן .

ברור כי לכל מתקיים .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ולכן קיבלנו כי לכל המקיים את תכונת החיתוך הסופי מתקיים . ולכן קומפקטית.

הוכחת קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך:

יהי התאמה רציפה כל שהיא, כאשר מרחב קומפקטי האוסדורף.( הינה דיסקרטית ולכן כל התאמה מ הינה רציפה.)

יהי אולטרא פילטר על .

נתבונן ב פילטר התמונה מעל (*שהוא הפילטר על שבסיסו(*2.2*) הוא אוסף הקבוצות מהטיפוס כאשר* ). אזי היות ו רציפה ולפי 2.12 נקבל כי אם מתכנס לאיזה שהוא נקודהy ב.

אם כן נוכל לבנות התאמה

*כך כאשר מקיים .*

*ואם נתבונן בהתאמה*

וכן היות  *(כי מכיל את כל הסביבות של )*

*והיות וf רציפה אזי לפי 2.12 מתקיים:*

ולכן מהגדרת מתקיים

נראה כעת כי רציפה.

יהי ויהי סביבה פתוחה של . ונמצא קבוצה פתוחה כך ש-.

היות ו מרחב רגולרי אזי קיימת סביבה פתוחה של כך שמתקיים

בנוסף הקבוצה הינה קבוצה פתוחה( רציפה) וכן

ולכן ומכאן שזה הרי אומר ש- .

על מנת להראות ש נראה כי כי .

נניח בשלילה כי קיים כך ש .

אזי ולכן .

והיות והקבוצות זרות נקבל כי:

אבל זה בסתירה שאולטרא פילטר(אינה מכילה את הקבוצה הריקה.)

ולכן הנחת השלילה שגויה. ולכן קיבלנו כי *.*

*ולכן קיבלנו כי רציפה.*

*נוכיח את יחידות ההרחבה*

*אם רציפה המקיימת*

*אזי לכל מתקיים .*

*כלומר לכל מתקיים .*

*אם כן ו מתלכדות על התת קבוצה שהיא צפופה בומאחר ש האוסדורף נובע כי (5.11 בספר)*

*ומכל האמור קיבלנו כי קומפקטיפיקציית סטון צ'ך מעל . מש"ל.*