**4 הוכחת משפט הינדמן**

**4.1 הגדרה**

יהי , ויהי .

**4.2.1 הגדרה**

יהי אולטרה פילטר ויהי , נגדיר את הפעולה

**4.2.2 הגדרה**

תהיינה אולטרה פילטרים על **,** נגדיר את הפעולה להיות אוסף כל התת-קבוצות המקיימות ביחס לA שקבוצת האיברים המקיימים היא קבוצה השייכת ל

**4.3 למה**

תהיינה אולטרה פילטרים על , אזי אולטרה פילטר.

**טענות עזר-**

**טענת עזר-1:**

**הוכחה:**

ברור כי

צד שני :

אזי אם אזי ברור כי ולכן אבל ולכן גם .

ולכן

**מש"ל**

**טענת עזר-2:**

**הוכחה:**

אםם קיים כך ש-

אםם וגם

וגם וגם

אםם וגם

אםם

**מש"ל**

**טענת עזר-3:**

אם אזי

**הוכחה:**

יהי אזי קיים כך ש אבל ולכן  *וכן ולכן*

***מש"ל***

**טענת עזר-4:**

*אםם קיים כך ש .*

*אםם אםם*

*אםם .*

**מש"ל.**

**טענת עזר-5:**

**הוכחה:**

לכל k מתקיים אבל אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן . וזה מתקיים לכל k ולכן **.**

**טענת עזר-6:**

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי קיים   
אבל  
  
אבל לכל k *.  
אבל לא קיימים n-ים כאלה ולכן .  
אבל אזי קיבלנו כי ואזי קיבלנו כי אבל אולטרה-פילטר ומהגדרתו . בסתירה  
ולכן לא קיימים k כך ש-ולכן* . **מש"ל.**

**טענת עזר-7:**

**הוכחה:**

*יהי*

*ולכן*

*אבל*

*וכן*

*אולטרה-פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים כי וכן ולכן וגם ולכן .*

*ולכן הוכחנו כי .*

*נוכיח כוון שני יהי*

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם אבל*

ולכן קיבלנו כי גם .

ולכן .

ולכן הוכחנו את ההכלה

ומכל האמור קיבלנו כי

**מש"ל.**

**טענת עזר-8:**

תהאנה כך ש- אזי

**הוכחה:**

יהי ונוכיח כי

ולכן .

אבל ולכן

אולטרה פילטר וכן ולכן מהגדרת פילטר מתקיים גם .

ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

מש"ל.

**טענת עזר-9:**

***הוכחה:***

**מש"ל.**

**הוכחת למה 4.3:**

1. נוכיח כי

אזי צריך להוכיח כי מטענת-עזר-5 נובע כי .

אולטרה-פילטר מעל ולכן ולכן   
ולכן

מש"ל.

1. נוכיח כי .

נניח בשלילה כי .  
ולכן מטענת-עזר-6 נובע כי .

אבל מההנחה  *ולכן .  
וקיבלנו שלמרות ש אולטרה פילטר בסתירה להגדרת אולטרה פילטר.  
ולכן הנחת השלילה הראשונה גם שגויה ולכן ולכן .  
מש"ל*

1. תהיינה

*ולכן וגם*

*אולטרה פילטר ולכן גם*

*אבל מטענת-עזר-7 נובע כי*

*ולכן קיבלנו כי*

*ובפרט שקיבלנו כי . מש"ל.*

1. יהי ויהי כך ש נוכיח כי גם .

במילים אחרות צריך להוכיח כי .

ולכן

*אולטרה פילטר וכן מטענת עזר-8*

*ולכן נקבל מהגדרת פילטר נקבל כי .*

*ולכן נקבל כי מש"ל.*

מ1,2,3,4 קיבלנו כי פילטר.

נוכיח כי פילטר זה הינו אולטרה פילטר.

*יהי נתבונן ב.*

*נוכיח כי*

*מהנתון כי אזי אבל אולטרה פילטר ולכן ומטענת-עזר-9 נקבל כי*

*ולכן ולכן נקבל כי .*

*ומכל האמור נקבל לפי 2.3 כי אולטרא פילטר.*

*מש"ל.*

*וממילא קיבלנו כי . ולכן קיבלנו כי פעולה בינארית על*  .

**4.3.1 טענה**(אסוציאטיביות)

לכל מתקיים:

הוכחה:

אםם

אםם

אםם (בהצבה - )

אםם

אםם.

מש"ל.

**4.4 טענה**

תהיינה אולטרה פילטרים ראשיים על , אזי אולטרה פילטר ומתקיים

הוכחה:

תהיינה .

אזי .

ולכן .

מצד שני האולטרה פילטר היחיד המכיל את הסינגלטון הוא האולטרה פילטר הראשי .

ולכן קיבלנו כי כנדרש.

**4.5 טענה**

לכל ההתאמה *, רציפה.*

*הוכחה:*

יהי קבוצה פתוחה בסיסית נבחן את המקור של

*נקבל כי*

*אםם . אםם אםם כאשר .*

*וקבלנו כי לכל קבוצה פתוחה המקור גם פתוח.*

*ולכן מדובר על התאמה רציפה. משל*

**4.6 הגדרה**

אולטרה פילטר הוא אידמפוטנטי(Idempotent Ultra-Filter) אם ורק אם מתקיים:

**4.7 משפט**

קיים כך ש- אידמפוטנטי.

ז"א מתקיים:

***טענות עזר עבור משפט 4.7***

*יהי .*

*נגדיר*

*נתבונן באוסף*

*וכן יהי*  ויהי

נגדיר

***טענת עזר 1***

קיים חסם מלרע M ל (ביחס לפעולה )

**הוכחה:**

יהי שרשרת.

נעיר כי מקיימת את תנאי תכונת החיתוך הסופי בגלל ש הינה בעלת יחס סדר מלא.

היות ו הינה קומפקטית, () הינה קבוצה לא ריקה וסגורה.

יהיו כך ש

היות וC שרשרת נוכל להניח ללא הגבלת כלליות כי

*ותהאנה וברור כי ובגלל ש* הרי שמתקיים

.

ולכן קיבלנו כי לכל סגורה מתקיים גם ולכן

ומתקיים לכל *.*

*ולכן קיבלנו כי לכל שרשרת על הינה חסומה מלרע.*

*ולכן לפי הלמה צורן(Zorn's Lemma)(מופעל על עם יחס הסדר "בצורה הפוכה" ) קיים לחסם מלרע ז"א קיים כך שלכל מתקיים .*

**טענת עזר 2**

*יהי* M חסם מלרע ל ויהי אזי

הוכחה:

נסמן

נראה כי

יהי

אזי מהגדרת קיים כך ש-

אבל וגם , וכן (לפי טענת עזר 1) ולכן

ולכן קיבלנו כי

ולכן *.*

נראה כי

*ברור כי אינה ריקה כי . בנוסף סגורה היות והיא תמונה של קבוצה סגורה על ידי התאמה רציפה (על פי טענה 4.5). ולכן*

*הרי שקיבלנו כי וגם וממינימאליות של M נקבל כי . מש"ל*

***טענת עזר 3***

*יהי* M חסם מלרע ל ויהי

*ונתבונן ב-*

*אזי*

*הוכחה:*

*ולכן אינה ריקה ולכן אכן קיים .*

*מצד שני מטענת עזר 2 מתקיים .*

*ולכן גם .*

*ולכן קיים כך ש -.*

*ולכן מהגדרת S*

*ולכן . מש"ל*

***הוכחת משפט 4.7:***

*יהי .*

*נגדיר*

*נתבונן באוסף*

ברור כי . ולכן אינה ריקה.

לפי טענת עזר 1 עבור 4.7 קיים כך ש חסם מלרע על .

*יהי (קיים כזה כי ולכן אינה ריקה). נוכיח כי אידמפוטנטי.*

*לפי טענת עזר 2 אזי*

ניקח אם כן שוב ונתבונן ב

נראה אם כן כי .

מטענת עזר 3 נובע כי .

וכן ברור כי הינה קבוצה סגורה היות ו סגורה

וכן הינה המקור של הנקודה *על ידי התאמה רציפה (על פי טענה 4.5).*

תהאנה  *אזי*

*וכן*  ולכן .

ולכן קיבלנו כי .

ומכל האמור קיבלנו כי *.*

*אבל ומינימאליות של M נקבל כי .*

*אבל היות ו* הרי ש ולכן *.*

*מש"ל.*

**4.8 הגדרה(**קבוצת סכומים סופים**)**

יהי קבוצת הסכומים הסופיים מעל B הינה:

**4.9 הגדרה**(IP-set)

יהי *, יקרא* IP-set *אם ורק אם קיים אינסופי כך ש-*

**4.10 טענה**

בהינתן ש

ויהי אולטרה פילטר על

אזי קיים .

הוכחה:

נניח בשלילה כי לכל . אזי לפי 2.3 וזה מתקיים לכל .

ולכן נקבל כי מהגדרה 2.1.1(מדובר על חיתוך סופי)

מצד שני מתקיים

בסתירה, ולכן הנחת השלילה שגויה. ולכן קיים . משל.

**4.11 משפט**

יהי אולטרה-פילטר אידמפוטנטי על ℕ,  
אזי לכל  *הינו IP-set.*

*הוכחה:*

*יהי .*

*נגדיר*

היות ו מקיים אזי אם מתקיים .

נבנה רקורסיבית:

* שרשרת של קבוצות
* סדרה עולה: כאשר , כך ש .

נתחיל עם .

היות ו *. קיים . מהגדרת נובע כי ולכן אם נבחר  
 מתקיים:* . והקבוצה הינה אינסופית . לכן ניתן לבחור כך שמתקיים .

באופן כללי בהינתן וכן *, לפי ההגדרה מתקיים שהקבוצה ולכן וכן כמקודם ולכן גם*  אינסופי, ולכן נבחר כך ש .

נטען את הטענה הבאה:

יהי טבעי  
ותהיינה

*אזי*

נוכיח זאת באינדוקציה על .

היות ומתקיים אזי עבור מתקיים הטענה.

נניח נכונות עבור וכן . ולכן הסכום ה *מקיים:*

*והיות ו- נקבל כי הסכום ה-r . ולכן* מתקיים. והוכחנו את הטענה.

מכל האמור קיבלנו כי קבוצת הסכומים של  *מקיים* כדרוש.

**4.12 משפט(**הינדמן**)**

אם

אזי לפחות אחד הקבוצות הינה *IP-set*.

הוכחה:

לפי 4.7 קיים כך ש- אידמפוטנטי.  
לפי 4.10 קיים .  
ולפי 4.11 הינה *IP-set*.

מש"ל.