**משפט**

יהי מרחב טופולוגי: הטענות שלהלן שקולות זו לזו.

1. קומפקטי.
2. לכל משפחה של קבוצות **סגורות**, שהיא בעלת תכונת החיתוך הסופי, מתקיים .
3. כל אולטרה-פילטר על - מתכנס.

**הוכחה**

*: תהי משפחה בעלת תכונת החיתוך הסופי, של קבוצות סגורות במרחב קומפקטי (ונוכיח ). נניח בשלילה ש-.*

*אזי*

*האוסף הוא אפוא כיסוי פתוח של .*

*מן הקומפקטיות של נובע שלכיסוי הזה יש תת-כיסוי סופי, נאמר:*

*אבל מכך נובע:*

בספירה לכך שהמשפחה היא בעלת תכונת החיתוך הסופי.

: יהי אולטרה פילטר על (ונוכיח שהוא מתכנס). נסתכל במשפחת הקבוצות הסגורות:

משפחה זו היא בעלת תכונת החיתוך הסופי, שכן אם ב-, אזי (חיתוך סופי של קבוצות מתוך פילטר, שייך לפילטר, ובפילטר אין קבוצות ריקות).

לכן: .

לפיכך, על פי ההנחה 2, .

תהי (ונוכיח ש- ).

אם סביבה של , אז, מאחר שלכל , , אנו מקבלים: לכל , . מכך נובע שהאוסף *, הוא בסיס-פילטר על . יהי הפילטר אשר בסיסו. הפילטר*  מכיל את הפילטר (כי אם אז, מאחר ש- היא סביבה של מתקיים , כלומר ). מאחר ש-אולטרה פילטר, בהכרח מתקיים: . אבל הפילטר , מצידו, מכיל כל סביבה של (כי ולכן לכל , ). לפיכך .עצמו מכיל כל סביבה של ופירוש הדבר הוא.

: בהנחה שכל אולטרה פילטר על מתכנס, נוכיח ש- קומפקטי.

נניח בשלילה ש – הוא כיסוי פתוח של ,שאין לא תת-כיסוי סופי. לכל אוסף סופי לא ריק, , (אחרת היה תת-כיסוי סופי של ). משפחת הקבוצות מהטיפוס היא בסיס-פילטר (היא אינה ריקה,כל הקבוצות בה אינן קירות והחיתוך של כל שתי קבוצות מטיפוס זה הוא קבוצה מאותו טיפוס). כל פילטר מוכל באולטרה פילטר, לפיכך קיים אולטרה פילטר על המכיל את כל הקבוצות מטיפוס זה. על פי ההנחה 3, קיים כך ש-.

בכיסוי הפתוח קיימת קבוצה כך ש-. היא סביבה של ולכן . אבל על פי הגדרת , גם *, וזה לא יתכן כי מכך ש- בעוד ש , ובפילטר אין קבוצות ריקות.*