



## **Física Experimental I**

**PLE 2020.1**



# Conteúdo

4  
5

<b>6 I Experimentos – Roteiros</b>	<b>9</b>
<b>7 1 Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos</b>	<b>11</b>
8    1.1 Introdução	11
9    1.2 Procedimento Experimental	12
10    1.3 Análise de Dados e Discussão dos Resultados	12
11    1.4 Opcional	14
<b>13 2 Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza</b>	<b>15</b>
14    2.1 Introdução	15
15    2.2 Procedimento experimental	16
16    2.3 Análise de dados	18
17    2.4 Discussão dos Resultados	18
<b>18 3 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda</b>	<b>19</b>
19    3.1 Introdução	19
20    3.2 Procedimento Experimental	19
21    3.3 Análise de dados	20

22	3.4 Discussão dos resultados	22
23	3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia	22
24	<b>4 Sistema de partículas – Colisões</b>	23
25	4.1 Introdução	23
26	4.2 Colisão unidimensional sem atrito	24
27	4.3 Introdução	24
28	4.4 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados	25
29	4.5 Análise de dados e discussão dos resultados	25
30	<b>5 Colisões (Opcional)</b>	27
31	5.1 Introdução	27
32	5.2 Procedimento experimental	28
33	5.2.1 Realização das medidas	28
34	5.2.2 Análise das imagens	29
35	5.3 Exemplo de resultados e análise	30
36	5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas	30
37	5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo	31
38	<b>II Conceitos Básicos para Análise de Dados</b>	33
39	<b>1 Medidas e incertezas</b>	35
40	<b>2 Medidas Diretas e Indiretas</b>	39
41	<b>3 Algarismos Significativos</b>	43
42	3.1 Incertezas e algarismos significativos	44
43	3.2 Regra de bolso sobre algarismos significativos	46
44	<b>4 Representações gráficas</b>	49

45	4.1 Como fazer um histograma	49
46	4.2 Como construir um gráfico	51
47	<b>5 Ajuste linear</b>	55
48	5.1 Ajuste de uma função linear por Mínimos Quadrados	55
49	5.2 Método gráfico para ajustar uma reta com incerteza	57
50	<b>6 Determinação da velocidade instantânea</b>	59
51	<b>7 Distribuição Gaussiana</b>	61
52	<b>III Exercícios</b>	67
53	<b>1 Algarismos significativos</b>	69
54	<b>2 Propagação incerteza</b>	71
55	<b>IV Apêndices</b>	73
56	<b>A Caderno de laboratório</b>	75
57	<b>B Como escrever um relatório?</b>	77
58	<b>C Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)</b>	79
59	<b>D Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker</b>	81
60	<b>E Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis</b>	87
61	<b>F Apêndice: <math>(E_f - E_i)/E_i</math> a partir de traços e um ângulo</b>	93



62  
63

## Introdução

64 A Apostila do curso de Física Experimental apresenta os conceitos básicos relacionados com as análises de dados dos experimentos, bem como os métodos e instrumentos  
65 utilizados.

## 67 Experimentos

68 Ao longo do semestre realizaremos os seguintes experimentos, em modo remoto:

69 **EXP 1** – Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos  
70 dados

71 **EXP 2** – Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

72 **EXP 3** – Movimento de um corpo em queda livre – Aceleração da gravidade

73 **EXP 4** – Sistema de partículas – Colisões

## 74 Bibliografia

75 O material completo da disciplina compreende a [Apostila de Conceitos Básicos de Física](#)  
76 [Experimental I](#), o [Guia do Estudante](#) e os textos complementares, todos disponíveis no site  
77 <https://fisexp1.if.ufrj.br>.

78 Além disso, indicamos os seguintes livros para um estudo mais sólido dos conceitos básicos  
79 de análise de dados e da física dos fenômenos observados: Fundamentos da Teoria de Er-  
80 ros de José Henrique Vuolo [1], Curso de Física Básica - Mecânica de H. Moysés Nussenz-  
81 veig [2] e Física I, Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman [3].



PARTE I

## EXPERIMENTOS – ROTEIROS



# 1

83  
84

## Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

### 85 1.1 Introdução

86 Neste experimento determinaremos o tempo de queda de uma moeda, solta do repouso  
87 de uma altura de 1,5 m repetidas vezes. Cada grupo deve apresentar um conjunto de  
88 medidas independentes, contendo 120 medições. A partir destas medições vamos estudar  
89 os conceitos de flutuações aleatórias, tratamento estatístico dos dados e estudo de efeitos  
90 sistemáticos.

91 Planejem seu experimento e comecem a fazer as anotações nos seus cadernos de labo-  
92 ratório. Para todos os experimentos que faremos nesse curso, cada um de vocês deve  
93 elaborar um pequeno texto no caderno para os seguintes tópicos:

- 94     1. Introdução
- 95     2. Procedimento Experimental
- 96     3. Análise de Dados
- 97     4. Discussão dos Resultados

98 Eventualmente, esses tópicos poderiam ser organizados em um relatório (veja o Apêndice B  
99 da Apostolia). Ainda não exigiremos a elaboração de um relatório completo para esse ex-  
100 perimento, mas, para cada um desses itens, preparamos algumas perguntas para vocês  
101 pensarem, discutirem entre si e com seu professor. A partir dessa discussão, façam suas  
102 anotações.

- 103     1. Qual o objetivo e a motivação desse experimento?
- 104     2. De acordo com as leis da Física que você conhece, qual deveria ser o tempo de queda  
105 da moeda?

**106 1.2 Procedimento Experimental**

- 107 1. Vocês podem medir o tempo diretamente ? Que instrumento vão utilizar ? Qual a  
108 resolução desse instrumento?**
- 109 2. Qual a melhor forma de montar o seu experimento, a fim de tentar garantir que a  
110 altura de queda esteja sempre no intervalo  $(1,50 \pm 0,02)$  m e que a moeda caia sempre  
111 do repouso?**
- 112 3. Registre seus dados na forma de uma tabela, em ordem cronológica, como mostrado  
113 nas duas primeiras colunas da Tabela 1. Vocês podem também construir a tabela  
114 diretamente em um programa de planilha no computador (por exemplo Excel, Open  
115 Office, Google Sheets), e posteriormente imprimir (ou fazer uma captura de tela) para  
116 anexar ao relatório e ao caderno de laboratório.**

**117 Tabela 1:** Medições realizadas

$i$	$t_i$	$\delta_i = t_i - \bar{t}$	$\delta_i^2 = (t_i - \bar{t})^2$
1			
2			
3			
...			
120			

**119 1.3 Análise de Dados e Discussão dos Resultados**

**120 121 122 123 124 125 Vocês certamente encontraram mais de um valor como resultado da medida direta do  
tempo de queda. Com base nesses valores, como podem apresentar o resultado dessa  
medição? Conforme explicado no Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados  
da Apostila), a melhor forma de apresentar essa medida experimental é realizando uma  
análise estatística dos dados obtidos. Para entender melhor o significado dessa análise,  
propomos as seguintes atividades:**

**126 Parte I: Análise estatística dos dados**

- 127 1. Considerem o conjunto de 120 medidas. Para 6 conjuntos independentes de 10 medições  
128 consecutivas, calculem o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio**

(consulte o Capítulo 2 da Apostila). Utilize as últimas colunas da Tabela 1.2 para auxiliar nos cálculos.

- 129  
130  
131  
132  
133  
134  
135
- Resumam os resultados obtidos para os 6 subconjuntos dos dados colocando-os na Tabela 2 e observem como variam o valor médio e o desvio padrão. O que podem dizer sobre os valores encontrados? Para o experimento que estão fazendo, 10 medidas é uma quantidade suficiente para se determinar o tempo de queda ? Justifiquem suas respostas.

136  
137

**Tabela 2:** Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos de 10 medições independentes.

Medições	N	Valor Médio ( )	Desvio Padrão ( )	Incerteza ( )
Grupo 1	10			
Grupo 2	10			
Grupo 3	10			
Grupo 4	10			
Grupo 5	10			
Grupo 6	10			

- 138  
139  
140  
141  
142  
143
- Calcule o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio para: (a) as 20 últimas medidas, (b) as 60 primeiras medidas e (c) para o conjunto completo de 120 medidas. Coloquem esses valores na Tabela 3 e discutam como variam estas três grandezas com respeito ao número de medidas. Analisem se as 120 medidas foram suficientes para determinar o tempo de queda.

144  
145

**Tabela 3:** Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos com diferentes números de medições.

N	Valor Médio ( )	Desvio Padrão ( )	Incerteza ( )
20			
60			
120			

- 146  
147  
148  
149  
150  
151  
152
- Analisem como se compara o valor médio encontrado com o valor de referência, igual a  $t_q = (0,554 \pm 0,004)$  s. Caso existam efeitos sistemáticos, discutam sobre eles e como poderiam evitá-los refazendo as medições (ver Capítulo 2 da Apostila).
  - Por convenção, utilizamos como definição para a incerteza de cada medida realizada, o valor de  $\sigma$ . Discutam o resultado da comparação entre o valor de  $\sigma$  encontrado para o conjunto de 120 medições com a precisão do cronômetro utilizado.

## Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

- 153     6. Calculem para o conjunto de 120 medições a fração de medidas contidas nos inter-  
154       valos  $[\bar{t} - 1\sigma, \bar{t} + 1\sigma]$ ,  $[\bar{t} - 2\sigma, \bar{t} + 2\sigma]$ ,  $[\bar{t} - 3\sigma, \bar{t} + 3\sigma]$ . Em um procedimento sujeito  
155       somente a flutuações aleatórias, as frações esperadas para estes intervalos são apro-  
156       ximadamente 68,3%, 95,4% e 99,7%. Note então que a convenção mais adotada,  
157       de utilizar como incerteza o valor do desvio padrão, corresponde a adotar um in-  
158       tervalo de incerteza que conteria aproximadamente 68% dos valores obtidos, caso  
159       o processo de medida fosse repetido muitas vezes. Quando não conhecemos bem  
160       nossa processo de medida, a realização de uma análise estatística permite também a  
161       melhor determinação da incerteza das medidas individuais.<sup>1</sup>

## 162     Parte II: Representação gráfica dos conjuntos de medidas

- 163     7. Com base no Capítulo 4.1 da Apostila, construa um histograma de frequência rela-  
164       tiva para os dados em uma folha de papel milimetrado. Lembrem que o número  
165       adequado de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições.  
166       Neste caso particular, o número aconselhável de barras fica entre 6 e 10.
- 167     8. Marquem no gráfico, as posições dos valores médios encontrados. As medições se  
168       distribuem simetricamente ao redor do seu valor médio? O que isso significa e qual  
169       o tipo de incerteza está sendo observada?
- 170     9. Desenhem sobre o histograma dois segmentos de reta representando o intervalo  $[\bar{t} -$   
171        $\sigma, \bar{t} + \sigma]$ . Observem a concentração dos dados nesse intervalo.
- 172     10. Analisem no histograma o valor médio e desvio padrão. O que é possível concluir  
173       sobre os processos de medida empregados? Discutam em termos de desvios sis-  
174       temáticos e flutuações aleatórias.

## 175     1.4 Opcional

176     Realize novamente as suas medidas tendo em conta os cuidados discutidos para eliminar  
177       suas incertezas sistemáticas. Para este conjunto de 120 medições, calcule o valor médio, o  
178       desvio padrão e a incerteza do valor médio e compare com o valor de referência. Conse-  
179       guiu eliminar as incertezas sistemáticas? Discuta.

---

<sup>1</sup>Essas frações decorrem de um modelo matemático que descreve o comportamento de medidas somente sujeitas a flutuações aleatórias. Esse modelo será discutido na Física Experimental II, mas quem quiser se aprofundar pode olhar a Seção 7 de Conceitos Básicos da Apostila.

# 2

180  
181

## Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

### 182 2.1 Introdução

183 Neste experimento determinaremos o volume de uma ou mais moedas. Planeje o expe-  
184 rimento antes de começar a realizar as medidas. Pense em quais métodos poderiam ser  
185 utilizados para se medir um volume, em quais medidas deveriam ser realizadas para es-  
186 ses métodos e quais instrumentos seriam mais adequados para tal finalidade.

187 O volume pode ser determinado a partir das dimensões da moeda. Qual é a expressão  
188 matemática do volume a partir dessas dimensões?

189 Se você conhecesse a massa e a densidade volumétrica de massa do material utilizado na  
190 fabricação da moeda, como você poderia determinar o seu volume?

191 Se você tivesse um recipiente com água, como poderia determinar o volume de uma mo-  
192 eda imersa nesse líquido?

193 Avançando para a análise dos dados, como estimar as incertezas das medidas diretas?  
194 Como são calculadas as incertezas das medidas indiretas? Leia as duas primeiras seções  
195 do Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados). Medindo a partir desses dife-  
196 rentes métodos, o que se espera da comparação dos seus resultados? Os valores deveriam  
197 ser compatíveis, considerando suas respectivas incertezas, independentemente do método  
198 utilizado?

199 Planejem seu experimento e comecem a fazer as anotações nos seus cadernos de labo-  
200 ratório. Para todos os experimentos que faremos nesse curso, cada um de vocês deve  
201 elaborar um pequeno texto no caderno para os seguintes tópicos:

202 1. Introdução

203 2. Procedimento Experimental

204     **3. Análise de Dados**

205     **4. Discussão dos Resultados**

206 Separe os materiais necessários para o Experimento 2 (detalhes na Figura 2.1):

207     1. Moedas (sugerimos as de R\$ 0,50);

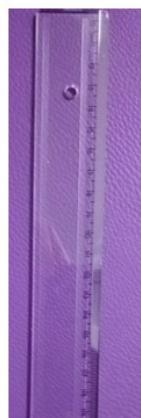
208     2. Régua;

209     3. Copo (que seja o mais próximo possível da forma de um cilindro). Note que você  
210       pode simplificar e melhorar a medição do volume deslocado, utilizando uma seringa  
211       descartável, que já vem com uma escala volumétrica impressa.

Material necessário para o experimento:



(a) Moedas de 50 centavos (\*)



(b) Régua preferencialmente transparente



(c) Copo (o mais cilíndrico possível)

(\* ) Atenção para o ano da sua moeda!

*Figura 2.1: Material para o Experimento 2*

## 212   **2.2 Procedimento experimental**

213   Antes de qualquer medida, se posicione de forma semelhante à sugerida na Figura 2.2.

214   **1. A partir do volume de água deslocado**

216   Usando um copo cilíndrico parcialmente cheio d'água, introduza a(s) moeda(s) e es-  
217       time o seu volume a partir do deslocamento do nível da coluna de água. No caso  
218       do copo, utilize uma régua para fazer essa medida a partir do registro dos níveis ini-  
219       cial e final. Já com uma seringa descartável (Figura 2.3), o volume deslocado pode



Figura 2.2: Posicionamento do observador

ser medido diretamente na seringa ao sugar a água, até que retorne ao mesmo nível da situação sem moeda(s), e lendo este volume na escala da própria seringa. Dependendo do diâmetro do copo usado, avalie se o experimento deveria ser realizado com uma ou mais moedas de mesmo valor.

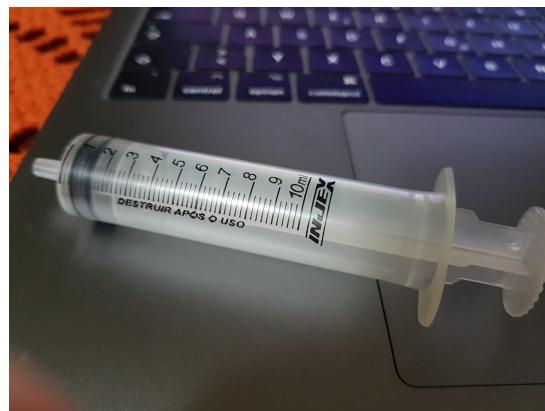


Figura 2.3: Seringa

**2. A partir da área da base da moeda e de sua espessura**

Meça a espessura da moeda. A área da base da moeda pode ser determinada a partir da medição direta de seu diâmetro com uma régua ou a partir da medição de sua circunferência com o uso de um barbante e da régua. Avalie qual procedimento é mais adequado. A régua é o instrumento adequado para a determinação do diâmetro da moeda? Nesse caso, também avalie se o experimento deveria ser realizado com uma ou mais moedas do mesmo valor.

**3. A partir da densidade volumétrica**

232 As moedas são fabricadas de forma padronizada com relação às suas dimensões,  
233 massa e material. Busque essas informações na Internet (página da Casa da Moeda).  
234 Fique atento que essas informações podem variar de acordo com o ano de fabricação  
235 da moeda. A informação sobre o ano de fabricação consta na “cara” da mesma.

## 236 **2.3 Análise de dados**

- 237 1. A partir dos valores da espessura e do diâmetro ou circunferência da moeda, medi-  
238 dos por você, calcule o volume da moeda utilizando uma das fórmulas  $V = \pi d^2 h / 4$   
239 ( $d$  = diâmetro e  $h$  = espessura) ou  $V = C^2 h / (4\pi)$  ( $C$  = circunferência).
- 240 2. Sabendo que a densidade volumétrica do aço inoxidável, dependendo da liga que o  
241 compõe, varia entre 7,8 e 8,0 g/cm<sup>3</sup>, e utilizando o valor de massa padrão para a  
242 moeda utilizada, determine o seu volume e incerteza.
- 243 3. Organize em uma tabela os resultados obtidos para a determinação do volume da  
244 moeda com as respectivas incertezas para os três métodos realizados. Faça uma  
245 comparação entre os resultados obtidos. Leia a segunda seção do Capítulo 2 (Con-  
246 ceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila).

## 247 **2.4 Discussão dos Resultados**

- 248 1. Qual foi a medição mais precisa? Justifique.
- 249 2. Considerando como referência o cálculo do volume da moeda a partir dos valores de  
250 suas dimensões encontrados na Internet, não os medidos por você, qual foi a medição  
251 mais exata? Justifique.
- 252 3. Justifique a vantagem de usar mais de uma moeda para o procedimento “A partir do  
253 volume de água deslocado”.
- 254 4. Os resultados encontrados são compatíveis entre si? Justifique. Esse resultado era  
255 esperado?
- 256 5. Quais parâmetros contribuem mais fortemente para a incerteza do volume em cada  
257 um dos três métodos? Como essas incertezas poderiam ser diminuídas? Você sugere  
258 alguma modificação do procedimento experimental adotado?

259  
260

## Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

261 

### 3.1 Introdução

262 Neste experimento determinaremos a aceleração de um corpo em queda vertical e vamos  
263 comparar o resultado obtido com o valor de referência da aceleração da gravidade ( $g$ ) para  
264 a cidade de Rio de Janeiro.

265 Vamos analisar o movimento de queda vertical de um corpo cuja forma e tamanho apre-  
266 sente uma força de resistência do ar desprezível (por exemplo uma bolinha de gude)<sup>1</sup>. Que  
267 tipo de movimento apresentaria o corpo se a força de resistência do ar fosse desprezível?<sup>2</sup>

268 Pense sobre o planejamento desse experimento. A aceleração do corpo pode ser obtida  
269 diretamente? Quais grandezas devem ser medidas para que seja possível obtê-la? Quais  
270 instrumentos são mais adequados para que esses dados possam ser coletados?

271 O experimento será discutido e guiado pelo roteiro abaixo. Siga o roteiro e as orientações  
272 do professor nos encontros remotos e vá fazendo suas anotações no caderno de laboratório.

273 

### 3.2 Procedimento Experimental

274 O arranjo experimental experimental está mostrado na Figura 3.1. Escolha uma bola de  
275 gude ou qualquer corpo arredondado de dimensões da ordem de grandeza da bolinha  
276 mostrada na Figura 3.1. Você deverá filmar a queda da bolinha com um celular, desde uma  
277 altura de, mais o menos, um metro. Para isso peça ajuda a uma pessoa que vai segurar a  
278 bolinha enquanto você filma. Cole na parede uma régua de papel como está indicado na  
279 Figura 3.1<sup>3</sup>. Para a filmagem, posicione o celular num apoio com a tela do celular paralela

<sup>1</sup>Lembre que a queda vertical de um corpo quando a única força atuante sobre ele é a força da gravidade chama-se queda livre.

<sup>2</sup>Lembre que o movimento da partícula é determinado através da Segunda Lei de Newton.

<sup>3</sup>A régua não precisa ter a extensão de toda a trajetória a ser filmada, é somente uma referência de escala.

## 20 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

280 à parede onde está colada a régua de papel. O celular deverá estar posicionado mais o  
281 menos no meio da trajetória da bolinha a uma distância da parede suficiente para poder  
282 filmar toda a queda de mais ou menos um metro. Não use “slow-motion” (câmera lenta),  
283 filme com a velocidade normal do seu celular. A imensa maioria dos celulares filma a uma  
284 taxa de 30 frames/s<sup>4</sup>. Verifique no seu celular se essa é a taxa usada.

285 Para analisar o filme da queda será usado o aplicativo Tracker para uso num computador  
286 que poderá ser baixado gratuitamente no link: <https://physlets.org/tracker/><sup>5</sup>. O filme  
287 também poderá ser analisado com o aplicativo VidAnalysis disponível gratuitamente para  
288 celulares com sistema operacional Android no link do [Google Play](#). Os tutoriais de uso  
289 destes aplicativos estão disponíveis na forma de vídeos no site da [Física Experimental 1](#).  
290 No final do roteiro, encontram-se o Apêndice D um tutorial básico do aplicativo Tracker, e  
291 um tutorial básico do aplicativo VidAnalysis no Apêndice E.

### 292 3.3 Análise de dados

293 Usando o aplicativo Tracker ou alternativamente o aplicativo VidAnalysis, monte a Tabela  
3.1. As colunas do tempo  $t$  e da posição  $y$  são preenchidas usando os aplicativos Tracker

$t$ (s)	$y$ (cm)	$\delta y$ (cm)	$v_y$ (cm/s)	$\delta v_y$ (cm/s)

294 *Tabela 3.1: Tabela de dados da experiência.*

295 ou VidAnalysis. As coordenadas  $y$  correspondem às posições, por exemplo, do centro da  
296 bolinha ao longo da trajetória de queda, após ter escolhido o sistema de referência. Note  
297 que ao longo da trajetória a imagem da bolinha pode ficar um pouco embaçada como na  
298 Figura 3.2. Nesse caso, foi marcado com um “x” em azul o centro da bolinha enquanto que  
299 a barra vermelha é uma escolha razoável da região de incerteza da posição do centro da  
300 bolinha.

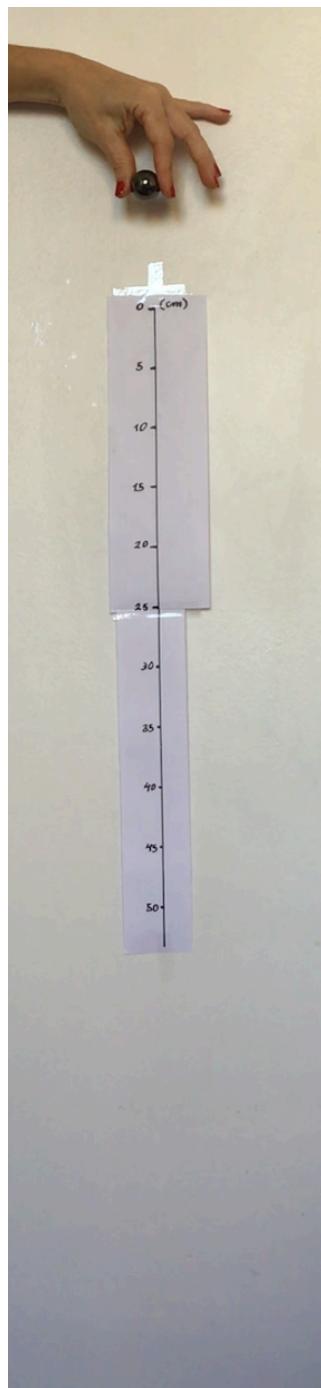
301 Para preencher a coluna da velocidade  $v_y$  leia o Capítulo 6 da Apostila. Como são calcula-  
302 das as incertezas  $\delta v_y$ ?

- 303
- 304 • Em um papel milimetrado desenhe o gráfico  $v_y \times t$  a partir dos dados da tabela in-  
305 dicando a incerteza nos valores das velocidades. Qual é a forma esperada para este  
gráfico?

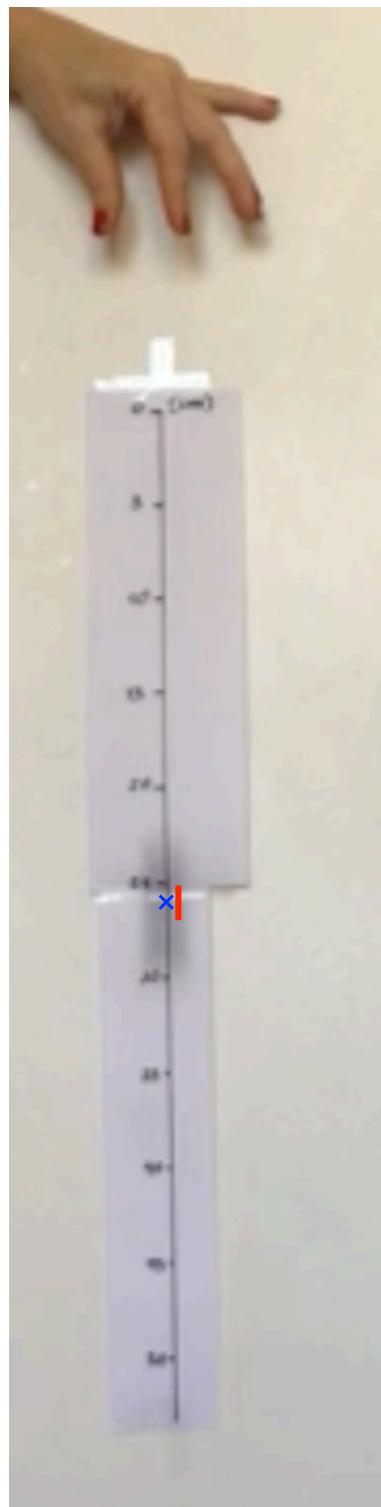
<sup>4</sup>A palavra em inglês “frame” significa quadro.

<sup>5</sup>O aplicativo é disponibilizado para os sistemas operacionais Windows, Linux e Mac OSX.

306



*Figura 3.1:* Dispositivo experimental. Não esqueça de colar na parede uma régua de papel, como a indicada na Figura, para ser usada como referência na análise de dados.



*Figura 3.2:* Imagem da bolinha em plena queda. Note-se que a imagem, devido à alta velocidade, fica um pouco embaçada.

## 22 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

- Use as colunas  $t$ ,  $v_y$  e  $\delta v_y$  para calcular através do Método dos Mínimos Quadrados (Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila), qual é a melhor reta que aproxima os dados experimentais do gráfico  $v_y \times t$ ?
- Com os parâmetros da reta obtida no item anterior, desenhe-a na mesma folha de papel milimetrado onde fez o gráfico  $v_y \times t$ . Se você não conseguir achar um aplicativo que implemente o ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados, desenhe a melhor reta que aproxima os dados experimentais pelo método visual (ver Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila) e obtenha os parâmetros que definem a reta (coeficiente angular  $a$  e coeficiente linear  $b$ ) escolhendo dois pontos na reta e substituindo na equação da reta  $y = a t + b$ .

### 3.4 Discussão dos resultados

1. A partir dos parâmetros do ajuste linear aos dados experimentais  $v_y$  vs.  $t$ , como se obtém o valor da aceleração de queda da bolinha?
2. Compare o valor da aceleração de queda da bolinha com o valor da aceleração da gravidade para a cidade do Rio de Janeiro que é  $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$ . Qual valor é mais preciso? Você utilizaria este método para determinar o valor da gravidade? Justifique.

### 3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia

1. Utilizando os dados registrados para a posição  $y$  como função do tempo  $t$ , determine a altura  $h$  da bolinha para cada instante de tempo, a partir do ponto mais baixo na Tabela 3.1.
2. Determine a energia cinética ( $K$ ), energia potencial ( $U$ ) e a energia mecânica ( $E$ ) para cada intervalo de tempo. Para facilitar a organização das informações, construa uma tabela.
3. Faça um gráfico que contenha a energia cinética, potencial e mecânica em função do tempo.
4. Discuta a partir do gráfico obtido, se há ou não conservação da energia mecânica. Justificar.
5. No caso da energia não se conservar, determine o ganho ou perda percentual.

#### 336 Observações:

- Para os cálculos de energia considere a aceleração da gravidade no Rio de Janeiro, com sendo  $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$ .

339  
340

## Sistema de partículas – Colisões

### 341 4.1 Introdução

342 Neste experimento estudaremos colisões entre dois corpos. Em particular, procuraremos  
343 verificar experimentalmente se a conservação de momento linear total do sistema está  
344 presente. Também iremos analisar uma possível conservação de energia mecânica to-  
345 tal, explorando a diferença entre colisões elásticas e inelásticas. Na tomada de dados o  
346 movimento é gravado em um filme. A variação das posições dos corpos é analisada pos-  
347 teriormente. Programas de computador como aquele já utilizado no experimento anterior,  
348 o Tracker (Apêndice D), são bastante úteis nessa análise. A análise do movimento com apli-  
349 cativos no próprio celular é também possível.

350 A realização deste experimento em um curso remoto merece alguns comentários, dadas  
351 suas peculiaridades em relação à presença de atrito. Na versão presencial da disciplina de  
352 Física Experimental 1 da UFRJ, os alunos trabalham em sala com uma montagem usada  
353 para minimizar o atrito de dois carrinhos com a base: o trilho de ar. Em nosso curso re-  
354 moto, os alunos não têm à disposição em casa uma ferramenta eficiente como o trilho de  
355 ar para minimizar o atrito. Assim, dividimos o experimento em duas partes. Na primeira  
356 parte o estudante faz a análise de dados experimentais nos moldes do curso presencial,  
357 porém utilizando dados obtidos previamente no Laboratório de Física Experimental 1. Na  
358 segunda parte (de realização opcional) o estudante faz a tomada de dados em casa, fa-  
359 zendo colidir objetos aos quais ele tem acesso fácil, como moedas. Este é um desafio final  
360 na disciplina: estudar colisões fora das condições controladas no laboratório didático, pla-  
361 nejar e realizar sua montagem experimental, e analisar um sistema físico no qual as forças  
362 de atrito provavelmente serão observáveis. Para essa segunda parte, apontamos ainda  
363 uma versão simplificada do experimento que, fazendo suposições sobre o atrito, permite  
364 fazer um teste da conservação de momento linear em uma colisão, mesmo sem o uso de  
365 celular ou computador [4].<sup>1</sup> Outros exemplos de experimentos envolvendo colisões que  
366 os alunos podem fazer em casa estão na página da disciplina [Física Experimental 1](#), no  
367 site do IF .

---

<sup>1</sup>*Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, Lorenzo Galante e Ivan Gnesi, American Journal of Physics **88**, 279 (2020).

**368 4.2 Colisão unidimensional sem atrito**

369 Neste experimento estudaremos as colisões e seu caráter elástico ou inelástico. Analisare-  
370 mos as conservações de momento linear e energia mecânica de um sistema unidimensional  
371 de dois carrinhos que colidem entre si em um trilho de ar com atrito desprezível. Será utili-  
372 zada uma gravação de um filme. Iremos analisá-la com o programa Tracker (Apêndice D)  
373 para computador ou VidAnalysis (Apêndice E) para celular para levantamento de dados.  
374 O aluno também poderá usar outros programas ou aplicativos que permitam atingir os  
375 mesmos objetivos.

376 Pense sobre o planejamento desse experimento. Quais grandezas devem ser medidas  
377 diretamente para que seja possível avaliar as conservações de momento linear e energia  
378 mecânica?

379 Siga o roteiro e as orientações do professor para fazer o experimento. Faça todas as anotações  
380 que julgar serem necessárias, elas serão importantes quando você for analisar os dados. Ao  
381 preparar o relatório, tome como base as orientações do Apêndice B da Apostila do curso  
382 e as anotações realizadas durante o experimento. As discussões contidas no roteiro abaixo  
383 serão importantes para a elaboração do seu relatório.

**384 4.3 Introdução**

385 Reflita sobre as seguintes questões e sugestões:

386 1. Qual é o objetivo desse experimento?

387 2. O que é um processo de colisão?

388 3. O filme mostra o movimento de dois carrinhos que deslizam sobre um trilho hori-  
389 zontal; há uma camada de ar entre o trilho e a base dos carrinhos, a fim de minimizar  
390 o atrito. Que tipo de movimento sobre o trilho é esperado para cada carrinho antes e  
391 após a colisão? Pense nas forças que atuam sobre cada um deles.

392 4. Considere a situação onde dois carrinhos colidem entre si ao se movimentarem sobre  
393 um trilho de ar horizontal com atrito desprezível; espera-se que tanto o momento  
394 linear como a energia mecânica se conservem nas colisões? O que define a diferença  
395 entre as colisões elástica e inelástica? Desenvolva as expressões matemáticas para  
396 conservação de momento linear e energia mecânica deste sistema unidimensional  
397 para os dois tipos de colisão, em termos das grandezas medidas no experimento.

398 5. Como verificar experimentalmente se o momento linear do centro de massa do sis-  
399 tema é conservado?

## 400 4.4 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados

401 Você terá acesso ao filme elasti.mp4 que deverá ser aberto com o programa Tracker ou  
402 VidAnalysis. É interessante você observar esse filme: um carrinho (incidente), que chama-  
403 remos de  $A$ , move-se em direção a outro carrinho, denominado  $B$ , que está inicialmente  
404 em repouso. Ocorre o choque, mediado por “para-choques” feitos com elásticos estica-  
405 dos. Em seguida,  $B$  passa a se mover, enquanto que  $A$  continua a se mover, porém mais  
406 lentamente do que antes do choque. As massas dos carrinhos são  $m_A = 287,9 \pm 0,2$  g e  
407  $m_B = 179,4 \pm 0,2$  g. O comprimento total do trilho é 200 cm; esse valor é importante para  
408 calibrar os comprimentos (escala da sua filmagem). Essa informação será usada quando  
409 for atribuir um valor à barra de medição do Tracker. Quando for estimar seu erro na  
410 calibração, note que há uma deformação da geometria do trilho no filme.

- 411 1. Proceda fazendo a tomada de dados da posição dos dois carrinhos antes e depois  
412 do choque. Precisaremos, para cada carrinho, aproximadamente 10 pontos antes  
413 e 10 pontos depois do choque. Entretanto, para minimizar o erro nas velocida-  
414 des determinadas, é aconselhável que esses pontos não sejam “instantes suces-  
415 sivos” registrados pelo Tracker ou VidAnalysis. Você pode escolher um intervalo de  
416 0,1 s no seu registro de dados (há vários “frames” do Tracker ou VidAnalysis entre  
417 eles).
- 418 2. Analise o movimento de cada carrinho (tomada de dados) separadamente. Você terá  
419 que escolher um ponto de referência em cada carrinho para acompanhá-lo “manual-  
420 mente” no programa. Então terá que estimar a incerteza da sua medida de posição:  
421 amplie a imagem e estime com que precisão consegue identificar o ponto de re-  
422 ferência. Por exemplo, para uma ampliação de 200 vezes, a incerteza é da ordem  
423 de 3 mm.
- 424 3. Lembre-se de escolher um único sistema de referência para a determinação da posição  
425 em função do tempo.
- 426 4. Construa uma tabela da posição de cada carrinho em função do tempo.

## 427 4.5 Análise de dados e discussão dos resultados

- 428 1. O instante de colisão pode ser obtido diretamente a partir da tabela dos dados? Faça  
429 um gráfico da posição em função do tempo para os dois carrinhos e determine o  
430 instante em que eles colidem.
- 431 2. Determine as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão a partir do ajuste li-  
432 near dos dados. Alternativamente, você pode usar o método gráfico para tal determinação.  
433 As duas abordagens estão descritas em apêndices na apostila do curso.
- 434 3. Analise o comportamento do momento linear e da energia mecânica do sistema antes  
435 e depois do choque. Houve conservação dessas grandezas? Que conclusões você  
436 pode tirar desses resultados?

4. Calcule a porcentagem de perda de energia cinética, dada por:

$$\frac{|K_f - K_i|}{K_i}$$

437 onde  $K_i$  e  $K_f$  são a energia cinética inicial e final, respectivamente. Discuta os resul-  
438 tados obtidos.

# 5

439

440

## Colisões (Opcional)

441 [

### 442 5.1 Introdução

443 Neste experimento propomos um estudo de colisões entre dois corpos, que o aluno pode  
444 executar todo em casa. O sistema físico estudado é composto por duas moedas apoiadas  
445 sobre uma superfície lisa. Uma delas está inicialmente em repouso e a outra é lançada  
446 sobre ela, deslizando. Nossa foco é explorar quais grandezas se alteram e quais se conser-  
447 vam durante a colisão. Analisamos o momento linear e a energia mecânica das moedas  
448 individualmente e, muito importante, do sistema formado pelas duas juntas.

449 Agora em duas dimensões, a pergunta básica feita antes no seu experimento unidimen-  
450 sional sobre o momento linear total do sistema se divide em duas: Há conservação do  
451 momento linear total na direção  $x$ ? Há conservação do momento linear total na direção  $y$ ?  
452 A energia é uma grandeza escalar e continuamos perguntando: A energia mecânica total  
453 E do sistema se conserva na colisão estudada?

454 Uma diferença fundamental entre este e o estudo que utilizou a filmagem do trilho de ar é  
455 a presença aqui de uma força atrito sobre cada moeda enquanto ela se desloca. Propomos  
456 explorar uma diferença qualitativa entre (i) as forças de atrito entre as moedas e a superfície  
457 e (ii) as forças de contato entre as moedas. As forças de contato, ditas *forças impulsivas*,  
458 são muito mais intensas que as forças de atrito, mas atuam apenas durante a colisão em  
459 si. O efeito das forças de atrito sobre as moedas no curto intervalo de tempo durante o  
460 qual elas interagem é muito pequeno: durante a colisão dominam as forças de contato.  
461 Assim, a discussão sobre conservação de momento e energia durante a colisão continua  
462 basicamente a mesma da situação sem atrito.

463 Este roteiro usa como exemplo o choque entre duas moedas de 1 Real, e indica dois cami-  
464 nhos para a análise da colisão. Use o exemplo fornecido para se ambientar com o estudo de  
465 colisões, mas não se preocupe em reproduzir as trajetórias mostradas ou em usar também

moedas de 1 Real. Lance uma de suas moedas em direção à outra, e analise o resultado da colisão entre as duas. As sugestões para registrar o movimento e analisar os dados estão nas próximas seções. Na primeira sugestão para análise, a informação sobre a colisão vem de medidas da distância percorrida depois da colisão por cada uma das moedas [4] e do ângulo entre essas duas trajetórias. Na segunda, são feitas medidas diretas de posição em função do tempo com uma taxa alta o suficiente para revelar o caráter impulsivo das forças de contato [5]

Neste experimento você tem liberdade na organização de um relatório a ser encaminhado ao professor. Note que é importante que seu texto tenha suporte em uma ou mais imagens relativas à sua montagem experimental e às análises gráfica e / ou numérica do movimento.

## 5.2 Procedimento experimental

### 5.2.1 Realização das medidas

O procedimento para realizar a colisão é simples: procure em sua casa uma superfície plana e lisa sobre a qual as moedas possam deslizar com o menor atrito possível. Dê um peteleco em uma das moedas, lançando-a em direção à outra. Teste diferentes superfícies. No caso mostrado como exemplo neste roteiro foi usada uma superfície de fórmica. Utilize um aparelho celular para filmar todo o experimento, desde o instante inicial do movimento até o repouso final das moedas.

Experimente diferentes velocidades iniciais do objeto incidente. Se a velocidade for muito baixa, o atrito fará a moeda incidente parar muito rápido, inviabilizando o experimento. Se a velocidade for alta demais, o celular não irá conseguir capturar imagens com uma taxa alta o suficiente para estudar o movimento. Fazer a filmagem no modo em câmera lenta pode ajudar. É comum que os celulares façam filmagens em seu modo padrão com taxa de 30 quadros por segundo (ou *frames per second - fps*). Possivelmente seu celular é capaz de fazer a filmagem em um modo em câmera lenta com 120 fps ou mais. Se esse for o caso, aproveite essa opção, mas certifique-se de que seu filme não seja comprimido antes da análise. Se usar 30 fps, faça o filme com muita luz, de preferência ao Sol, evitando assim imagens borradadas.

Uma vantagem no uso das moedas é que suas massas podem ser descobertas com uma pesquisa na internet. O diâmetro das moedas também é informação de fácil obtenção *online*, e pode ser usada para calibrar as distâncias na análise dos dados. Use duas moedas iguais para que as forças de atrito sejam iguais.

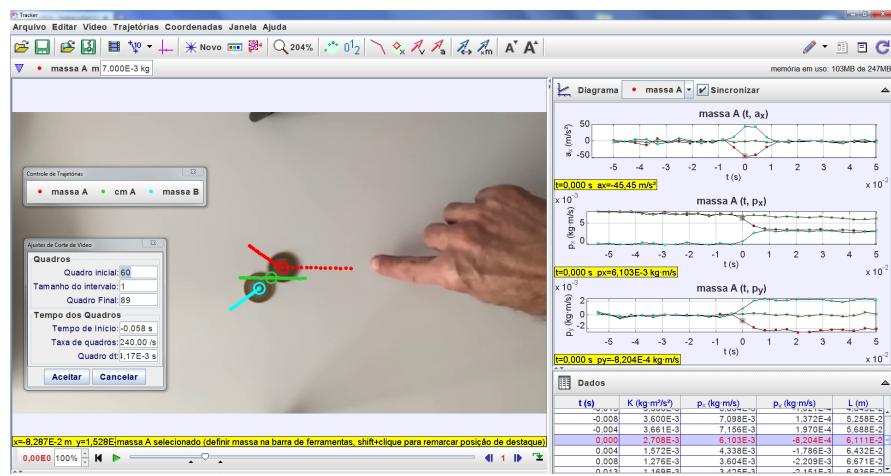


Figura 5.1: Tela típica de análise com o programa Tracker.

### 498 5.2.2 Análise das imagens

499 Os dois métodos sugeridos para análise da colisão baseiam-se em medidas de posição  
 500 sobre imagens registradas em função do tempo. O programa Tracker (Apêndice D), usado  
 501 anteriormente no Experimento 3 e agora no 4, é uma ferramenta interessante para uso nos  
 502 dois métodos.

503 A partir de suas medições para as posições de cada um dos corpos, e de informação sobre  
 504 suas massas, você poderá obter também a evolução da posição do centro de massa do  
 505 sistema. Note que as forças de interação entre os dois objetos são internas ao sistema.  
 506 Assim, não influenciam o movimento do centro de massa (CM), que deve ser mais simples  
 507 que o movimento de cada um dos corpos. Analise o comportamento do CM do sistema  
 508 antes, durante e depois da colisão.

509 Depois de importar seu filme para o Tracker, entre no programa com a informação sobre  
 510 a taxa de quadros por segundo da sua filmagem. Dê um “zoom” nas suas imagens para  
 511 marcar melhor as posições dos centros de massa de cada moeda. O próprio programa  
 512 calcula e representa a posição do CM do sistema.

513 Com o programa Tracker você pode ainda gerar facilmente gráficos de velocidade, aceleração,  
 514 momento linear, energia e outros. A Figura 5.1 mostra uma tela típica do Tracker em uma  
 515 análise desse tipo, na qual os gráficos escolhidos são feitos automaticamente à medida que  
 516 os pontos são marcados sobre a imagem. O programa utiliza para isso derivação numérica,  
 517 mas você não precisa aqui se preocupar com os detalhes desse procedimento matemático.  
 518 Se estiver curioso, pode ver na apostila um exemplo de derivação numérica na seção so-  
 519 bre “Determinação da velocidade instantânea”. Os gráficos de aceleração de cada um dos  
 520 corpos são úteis para você entender o caráter impulsivo das forças de interação na colisão.  
 521 Você pode também construir seus gráficos à mão ou utilizando um programa específico  
 522 para essa função (consulte o Capítulo 5 “representações gráficas” da Apostila).

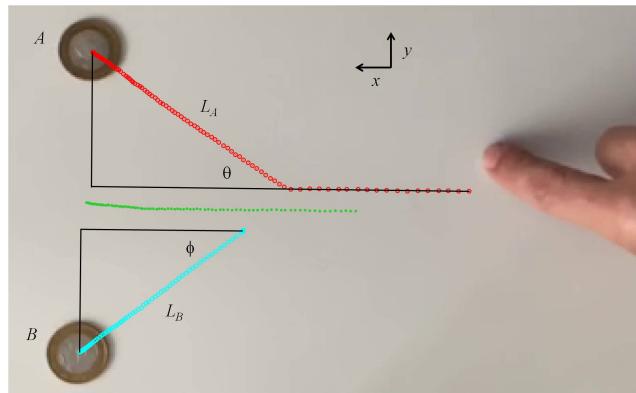


Figura 5.2: Moedas em suas posições finais e marcações de suas trajetórias (CM em verde).

### 5.3 Exemplo de resultados e análise

#### 5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas

A primeira estratégia que indicamos para testar a conservação de momento linear na colisão de duas moedas, na presença de atrito, foi sugerida recentemente por Galante e Gnesi [4].

Eles chamam a atenção para similaridades dela com métodos calorimétricos com os quais se mede o momento de uma partícula sub atômica a partir de um rastro que ela deixa em um detector. Na versão simplificada com moedas colidindo, é assumido que a força de atrito é constante e o teorema trabalho-energia cinética é usado para estimar os módulos dos momentos lineares das duas moedas depois da colisão. Temos assim para cada moeda a relação entre o módulo de seu momento  $p$  logo após a colisão e o alcance  $L$  até parar:

$$\frac{p^2}{2m} = F_{at} L, \quad (5.1)$$

onde  $F_{at}$  é o módulo da força de atrito e  $m$  é a massa da partícula. Se as moedas são iguais,  $m$  e  $F_{at}$  são iguais para as duas, e obtemos (ver Figura 5.2):

$$\frac{p_A}{p_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}}. \quad (5.2)$$

Tomando a direção de incidência da moeda A em  $x$ , e considerando a moeda B inicialmente parada, a componente do momento linear total em  $y$  antes da colisão é zero. Logo, devemos ter depois da colisão as componentes  $p_{Ay}$  e  $p_{By}$  com mesmo módulo e sinais contrários e, portanto, a razão entre elas deve ser igual a -1. Para testar essa hipótese, precisamos medir também os ângulos entre os momentos finais e a direção de incidência da moeda projétil, a fim de determinar

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -\frac{p_A \operatorname{sen}(\theta)}{p_B \operatorname{sen}(\phi)} = -\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\phi)}. \quad (5.3)$$

A partir da Figura 5.2, na qual foram marcadas as posições das moedas até elas pararem, obtemos  $L_A = (0.111 \pm 0.003)$  m,  $\text{sen}(\theta) = (0.57 \pm 0.02)$ ,  $L_B = (0.091 \pm 0.003)$  m, e  $\text{sen}(\phi) = (0.60 \pm 0.02)$ . Assim, obtemos experimentalmente, depois da colisão:

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -1.05 \pm 0.05. \quad (5.4)$$

Este resultado mostra que a soma das componentes  $p_{Ay}$  e  $p_{By}$ , dentro do erro experimental, permanece igual a zero depois da colisão. Verificamos assim que a componente  $y$  do momento linear total se conservou nesse experimento.

A variação percentual de energia na colisão pode ser expressa como (dedução no Apêndice deste roteiro):

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}} \cdot \frac{2 \cos(\theta + \phi)}{2 \cos(\theta + \phi)}. \quad (5.5)$$

A Eq. 5.5 mostra que se não houvesse perda de energia cinética na colisão, teríamos um ângulo entre os vetores momento final dos dois corpos  $\theta + \phi = 90^\circ$ . No entanto, da Figura 5.2 temos  $\theta + \phi = 72^\circ$  e  $L_A/L_B = 1.2$ . Nesse caso, substituindo valores na Eq. 5.5, determinamos uma diminuição, devida à colisão, de 24% na energia cinética total do sistema. A colisão é, portanto, inelástica.

Note que você pode filmar a colisão, como feito aqui, mas isso não é essencial. No experimento original de Galante e Gnesi eles usam apenas moedas, lápis, papel, e régua. O preço da simplicidade neste método é assumir que a força de atrito é constante e igual, em módulo, para as duas moedas.

### 5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo

Analisando apenas um curto intervalo de tempo antes e depois da colisão, o efeitos da força de atrito nas variações de momento linear em cada moeda serão pequenos em relação aos efeitos da força de contato entre as moedas. Os gráficos da Figura 5.1 estão reproduzidos com destaque na Figura 5.3: aceleração na direção  $x$  (direção dada pela moeda incidente), componente do momento linear na direção  $x$ , e componente do momento linear na direção  $y$ . Em cada gráfico é feita uma comparação dos valores associados à moeda A (em vermelho), à moeda B (em azul), e ao centro de massa do sistema moeda A mais moeda B (em verde). O gráfico da aceleração mostra no momento da colisão um pico para a moeda B e um pico invertido bastante similar para a moeda A. Esses picos refletem as forças de contato durante a colisão. Ainda no mesmo gráfico, vemos que a duração da colisão é de cerca de um centésimo de segundo. Para efeito de comparação, perceba que a aceleração de cada moeda chega, durante a colisão, a cerca de quatro vezes o valor da aceleração da gravidade, mas cai rapidamente quando apenas a força de atrito está presente.

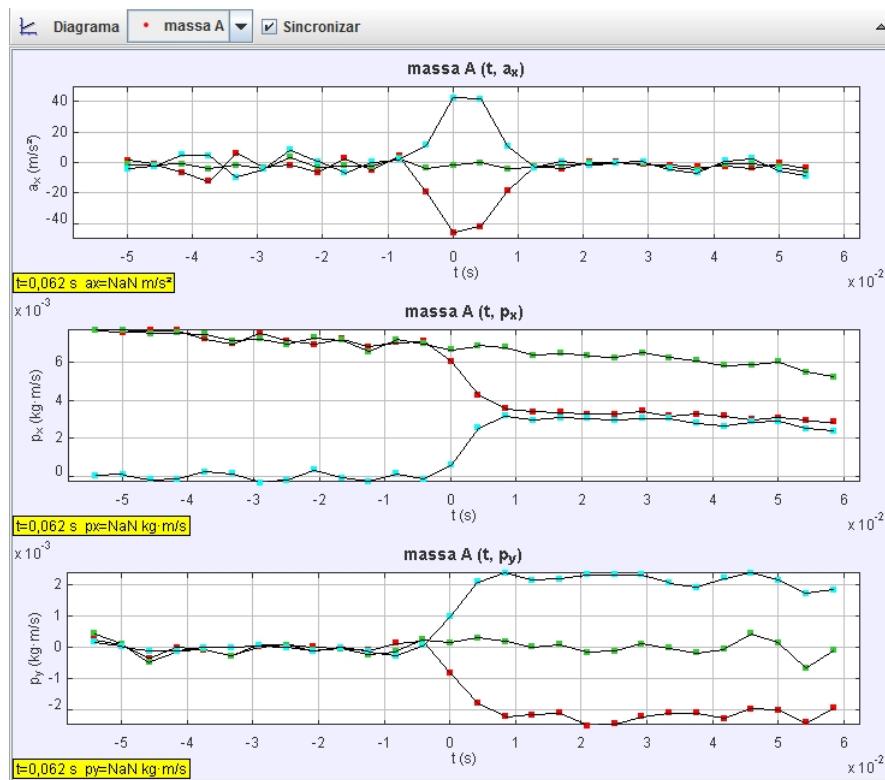


Figura 5.3: Gráficos de  $a_x$ ,  $p_x$  e  $p_y$  em função do tempo. Moeda A em vermelho, moeda B em azul e centro de massa do sistema moeda A mais moeda B em verde.

É possível demonstrar que o produto da massa pela área de cada um dos picos é igual à variação do momento linear. Assim, picos simétricos no gráfico de aceleração na Figura 5.3 demonstram a conservação do momento linear total do sistema, neste caso na direção  $x$ . Note que a aceleração do centro de massa é próxima de zero antes, durante e depois da colisão. A conservação de momento linear em  $x$  e em  $y$  durante a colisão pode ser vista também diretamente nos dois últimos gráficos da Figura 5.3, ligeiramente mascarada por uma pequena e lenta variação do momento linear total devida às forças de atrito, que são externas ao sistema moeda A mais moeda B.

PARTE II

## CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE DADOS



# 1

563

564

## Medidas e incertezas

565 Uma das maneiras para conhecer e descrever a natureza que nos rodeia é mediante a  
566 realização de observações experimentais, que chamamos de medidas. O primeiro pro-  
567 blema com o qual nos encontramos é como os resultados encontrados podem ser comu-  
568 nicados de maneira clara, de forma que sejam compreensíveis e reproduutíveis por outros  
569 experimentadores. Para estabelecer o valor de uma grandeza (mensurando) temos que  
570 utilizar instrumentos e um método de medida, como também é necessário definir as uni-  
571 dades da medida. Por exemplo se desejamos medir a largura de uma mesa, o instrumento  
572 de medição será uma régua ou uma trena e, utilizando o sistema de unidades internacio-  
573 nal (SI), a unidade que utilizaremos será o metro (m). A régua, portanto, estará calibrada  
574 nessa unidade ou em seus submúltiplos, como, por exemplo, centímetros e milímetros. O  
575 método de medição consistirá em determinar quantas vezes a unidade e as frações dela  
576 estão contidas no valor do mensurando.

577 Toda medição é afetada por uma incerteza que provém das limitações impostas pela pre-  
578 cisão e exatidão dos instrumentos utilizados, da interação do método de medição com  
579 o mensurando, da definição do objeto a medir, e da influência do(s) observador(es) que  
580 realiza(m) a medição.

O que se procura em cada medição é conhecer o valor medido ( $x$ ) e a sua incerteza ( $\delta_x$ ) na determinação do resultado, ou seja, determinar os limites probabilísticos destas incertezas. Procura-se estabelecer um intervalo

$$x - \delta_x < x < x + \delta_x \quad (1.1)$$

581 como ilustrado na Figura 1.1, dentro do qual podemos dizer que o valor da grandeza se  
582 encontra, com uma certa probabilidade. Em geral utiliza-se como incerteza um intervalo  
583 em torno do valor central com 68% de probabilidade.

584 Não existem regras para determinar o tamanho do intervalo, porque dependerá de mui-  
585 tos fatores do processo de medição. O tipo de medição, a figura da escala, a acuidade  
586 visual de quem esteja fazendo a medida, as condições de iluminação, etc, formarão parte  
587 na determinação da largura do intervalo de medição. A incerteza associada a uma medida

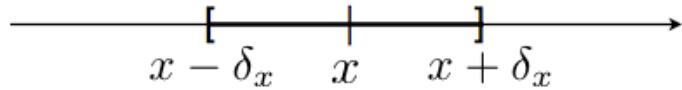


Figura 1.1: Intervalo de probabilidade para a grandeza medida, onde  $x$  é o valor mais representativo da nossa medição e  $\delta_x$  é a incerteza absoluta.

588 deve ser determinada a cada vez que se faça a medição. Por exemplo, é comum pensar que  
 589 quando fazemos uma medida com uma régua com escala graduada, a "incerteza de leitura  
 590 (incerteza instrumental)" é automaticamente a metade da menor divisão. Um instrumento  
 591 com divisões muito finas usado para medir um objeto com bordas mal definidas pode dar  
 592 um intervalo de medição maior que várias das divisões menores. Contrariamente, um  
 593 objeto bem definido com boas condições visuais pode permitir a identificação de um in-  
 594 tervalo de medição muito menor que a menor divisão da escala. Cada situação deve ser  
 595 avaliada de forma individual.

Uma forma usual de expressar o resultado de uma medição é:

$$x \pm \delta_x \quad (1.2)$$

e indicando a *unidade de medição*. Além disso é possível definir a *incerteza relativa* como:

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{x} \quad (1.3)$$

que expressa o quanto significativa é a incerteza em relação ao valor medido. Também pode-se calcular a *incerteza relativa percentual* como:

$$\epsilon_{\%} = \epsilon_x \cdot 100\% = \frac{\delta_x}{x} \cdot 100\% \quad (1.4)$$

596 Por exemplo, ao medir o comprimento  $L$  de uma mesa podemos apresentá-lo como  $L=(1,00$   
 597  $\pm 0,01)$  m ou  $L=1,00 \pm 0,01$  m, se encontramos um valor de 1,00 m, com uma incerteza de  
 598 1 cm em torno desse valor central encontrado. É importante apresentar sempre o valor  
 599 central e a incerteza na mesma unidade. Essa medição tem uma incerteza relativa de 0,01  
 600 ( $0,01/1,00$ ) e uma incerteza relativa percentual de 1%. A palavra **precisão** muitas vezes  
 601 é utilizada como sinônimo de incerteza relativa percentual. Note, no entanto, que nem  
 602 sempre a precisão de uma medida corresponde à precisão do instrumento utilizado para  
 603 realizá-la. A precisão de um instrumento será discutida em contraposição ao conceito de  
 604 acurácia mais abaixo.

## 605 Incertezas

606 Os distintos tipos de incertezas podem ser classificados em:

- 607 • **Incertezas do instrumento:** Os instrumentos de medição têm uma incerteza finita  
608 que está associada à variação mínima da magnitude que ele mesmo pode detectar.  
609 Por exemplo, se temos uma régua graduada em milímetros, não será possível de-  
610 tectar variações muito menores que uma fração de milímetro. Se, ao leremos o valor  
611 medido na régua, aproximamos para o valor inteiro em mm que mais se aproxima da  
612 medida, dizemos que a incerteza da régua é de 1 mm. Se, ao contrário, conseguimos  
613 identificar valores múltiplos de meio milímetro, então dizemos que a incerteza é de  
614 0,5 mm. Não é, no entanto, razoável supor que conseguimos identificar a olho nú-  
615 frações menores que 0,5 mm em uma régua milimetrada.
- 616 • **Incertezas estatísticas ou aleatórias:** São as devidas flutuações aleatórias na determi-  
617 nação do valor do mensurando entre uma medida e outra. Estas flutuações ocorrem  
618 com igual probabilidade tanto para mais quanto para menos. Portanto, medindo  
619 várias vezes e calculando a média, é possível reduzir a incerteza significativamente.  
620 Estas incertezas são tratadas pela teoria estatística de erros de medição.
- 621 • **Incertezas sistemáticas:** Acontecem pelas imperfeições dos instrumentos e métodos  
622 de medição e sempre se produzem no mesmo sentido (não podem ser eliminados  
623 com várias medições). Alguns exemplos podem ser um relógio que atrasa ou adianta,  
624 uma régua que se dilata, o erro devido à paralaxe, etc...

625 A interação do método de medição com o mensurando também pode introduzir erros.  
626 Consideremos como exemplo a medição de temperatura para a qual utilizamos um termô-  
627 metro. Parte do calor do objeto que queremos medir flui ao termômetro (ou vice-versa),  
628 de maneira que o resultado da medição do valor da temperatura difere do original devido  
629 à presença do termômetro (interação que devemos realizar). Fica claro que esta interação  
630 pode ser desprezível, se, por exemplo, estamos medindo a temperatura de um litro de  
631 água, mas a quantidade de calor transferida ao termômetro pode ser significativa se a  
632 quantidade de volume é uma fração pequena de, por exemplo, um mililitro e utilizamos  
633 um termômetro convencional.

## 634 Precisão e exatidão

635 A precisão de um instrumento ou um método de medida está relacionada à sensibilidade  
636 ou menor variação de uma grandeza que pode ser detectada com certo instrumento ou  
637 método. Dizemos que um paquímetro (por exemplo, com mínima divisão de 0,01 mm) é  
638 mais preciso que uma régua (mínima divisão 1 mm) ou que um cronômetro (por exem-  
639 plo com mínima divisão 10 ms) é mais preciso que um relógio (mínima divisão 1 s), etc.  
640 Quanto menor a **incerteza relativa** de uma medição, mais precisa ela é. É importante notar  
641 que o valor absoluto da incerteza isoladamente não é suficiente para qualificar a precisão

642 de uma medida. Por exemplo, reportar a distância entre Rio e São Paulo com incerteza  
643 de um metro certamente é muito bom. Por outro lado, medir o comprimento de um carro  
644 com incerteza de um metro é muito ruim. Qual a diferença? No primeiro caso, estamos  
645 falando de uma dúvida de um metro em cerca de 500 km e no segundo caso, a incerteza é  
646 de um metro em cerca de 4 metros.

647 Além da precisão, é importante realizar uma medição com exatidão ou, utilizando um  
648 termo mais antigo, acurácia. Esta está geralmente relacionada com a qualidade da calibração  
649 do instrumento utilizado ou o método de medição aplicado. Imaginemos que utilizamos  
650 um cronômetro para medir os tempos com uma precisão de 10 ms, mas sabemos que atrasa  
651 1 minuto cada uma hora. Por outro lado, utilizamos um relógio com uma precisão de 1  
652 s que marca a hora certa a todo instante. Neste caso vamos dizer que o cronômetro é o  
653 mais preciso, mas o relógio é o mais acurado. Um critério para se comparar a exatidão de  
654 duas medidas é dado pela menor discrepância relativa. A discrepância é definida como o  
655 módulo da diferença entre o valor medido e um valor de referência para a grandeza e a  
656 discrepância relativa é definida como o módulo da razão entre a discrepância e o valor de  
657 referência. Quanto menor a discrepância relativa de uma medida, mais exata ou acurada  
658 ela é.

659 Portanto, procuraremos sempre realizar uma medição utilizando um método que seja pre-  
660 ciso e exato ao mesmo tempo.

661  
662

## Medidas Diretas e Indiretas

663 Para estabelecer o valor de uma grandeza temos que utilizar um instrumento de medição  
 664 e um método de medição. Além disso, será necessário definir as unidades em que essa  
 665 magnitude é medida. Por exemplo, se queremos medir a largura de uma mesa, utilizare-  
 666 mos uma régua e, dependendo do sistema de medição escolhido, expressaremos o valor  
 667 medido em unidades de comprimento como, por exemplo, o metro (m) para o sistema de  
 668 unidades internacional (SI) ou centímetros (cm) no caso do CGS. O método de medição  
 669 consistirá em determinar a quantidade de unidades da menor fração da régua que corres-  
 670 pondem ao comprimento que se deseja medir. Quando uma medição é realizada lendo  
 671 o resultado diretamente em um instrumento (construído para isso), dizemos que a **me-  
 672 dida é direta**. Há grandes que não se medem diretamente, mas que são obtidas a partir  
 673 de outras grandes medidas de forma direta. Por exemplo, para conhecer área de um  
 674 retângulo medem-se os comprimentos de seus lados ou para determinar o volume de uma  
 675 esfera deve-se medir o diâmetro. Neste caso a **medida é indireta**.

### 676 Medidas diretas com flutuações aleatórias

677 Consideremos uma grandeza da qual se fazem  $N$  medições diretas, que chamaremos:  
 678  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Estes valores serão geralmente distintos entre si, mas alguns valores po-  
 679 dem se repetir.

680 Evidentemente não será satisfatório fornecer como resultado da medição uma tabela de  
 681  $N$  valores. É necessário caracterizar a série de medições mediante uns poucos parâmetros  
 682 que tenham um significado preciso relacionado com a magnitude medida e/ou o processo  
 683 de medição utilizado. Os parâmetros importantes são:

1. **Valor médio** é a média aritmética dos valores medidos

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.1)$$

e é o valor atribuído à magnitude medida. É bastante intuitivo considerar a média aritmética como valor representativo da grandeza medida. A média aritmética se caracteriza por apresentar as medições ao seu redor, de modo que a soma dos desvios

$$\delta_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.2)$$

é igual a zero. Ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = 0. \quad (2.3)$$

Isto pode ser facilmente demonstrado, escrevendo:

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}), \quad (2.4)$$

e distribuindo o somatório, de modo que:

$$S = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x}. \quad (2.5)$$

Utilizando a expressão do valor médio (equação 2.1):

$$\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}, \quad (2.6)$$

obtemos  $S = 0$  como queríamos mostrar.

Por esta razão, a soma dos desvios não é um parâmetro que possa ser utilizado para caracterizar a distribuição das medições ao redor do valor médio e é necessário utilizar outro parâmetro.

2. Dispersão das medições ou **desvio padrão** define-se como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (2.7)$$

O desvio padrão é um parâmetro que caracteriza o processo de medida. Quando as medições são poucas,  $\sigma$  pode flutuar, mas para muitas medidas ( $N$  grande) estabiliza-se e não depende do número de medições.

3. O **erro ou incerteza do valor médio** é definido como:

$$\xi = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2}, \quad (2.8)$$

692 onde  $\sigma_m$  está associado às flutuações estatísticas em torno do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.9)$$

693 e  $\sigma_r$  expressa os erros sistemáticos residuais (por exemplo devido à um instrumento  
694 mal calibrado).

695 Vamos supor que nas nossas medidas não ocorrem tais erros sistemáticos, de forma  
696 que usaremos sempre:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.10)$$

697 O erro do valor médio é a dispersão esperada para as médias de várias séries de  
698 medições realizadas nas mesmas condições. O erro do valor médio depende do  
699 número de medições como se pode ver na sua expressão, sendo que ela diminui  
700 com o aumento do número de medições.

## 701 Medidas Indiretas

702 Como já foi definido anteriormente, há grandezas que não podem ser determinadas dire-  
703 tamente, mas que se obtém a partir de outras grandezas que, estas sim, são medidas de  
704 forma direta. Portanto, as incertezas das grandezas que se medem diretamente devem ser  
705 propagadas para contribuir à incerteza da grandeza que se calcula utilizando uma deter-  
706 minada expressão.

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_N$  grandezas independentes medidas de forma direta, e seja a grandeza que se quer determinar  $F = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$  uma função das grandezas  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , cujas incertezas estão dadas por  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N$ . Pode-se mostrar que a incerteza de  $F$  é dada por:

$$(\delta F)^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \delta x_1^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \delta x_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)^2 \cdot \delta x_N^2, \quad (2.11)$$

ou

$$(\delta F)^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \delta x_i^2. \quad (2.12)$$

707 Esta equação é a fórmula de propagação da incerteza para uma grandeza determinada  
708 indiretamente.

## 709 Comparação entre duas medidas da mesma grandeza

Muitas vezes comparamos diferentes resultados experimentais para a medida de uma mesma grandeza. Estes resultados podem vir por exemplo das diferentes técnicas utilizadas para determinar uma grandeza, ou podem vir de valores conhecidos tabulados na

literatura. Vamos supor que temos dois resultados para uma mesma grandeza sendo o primeiro  $x_1 \pm \delta x_1$  e o segundo  $x_2 \pm \delta x_2$ . Se eles são estimativas de uma mesma grandeza, esperamos que a discrepância entre eles ( $|x_1 - x_2|$ ) seja compatível com zero. Como cada uma das medidas está sujeita a uma flutuação estatística de acordo com sua incerteza, em geral encontramos valores diferentes de zero para a discrepância. Como podemos avaliar se a discrepância é significativamente diferente de zero? Há várias formas de se fazer essa avaliação, dependendo do grau de confiança que queremos ter na afirmação de que a diferença é incompatível com zero (ou equivalentemente de que os dois valores são incompatíveis entre si). Vamos considerar a discrepância entre os valores ( $|x_1 - x_2|$ ) pouco significativa ou irrelevante quando for menor que 3 vezes a incerteza da discrepância. Utilizando a expressão para propagação de incertezas definida na Seção 2, determinamos a incerteza da discrepância  $\delta|x_1 - x_2| = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$ . Resumindo, duas medidas independentes  $x_1$  e  $x_2$  da mesma grandeza são consideradas **compatíveis** quando :

$$|x_1 - x_2| < 3\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$$

ou

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}} < 3.$$

<sup>710</sup> Ao contrário, consideramos as duas medidas  $x_1$  e  $x_2$  **incompatíveis** quando a discrepância  
<sup>711</sup> entre elas é maior que 3 vezes a incerteza da discrepância.

<sup>712</sup> Considere por exemplo a medida de um comprimento de uma mesa cujo resultado é  
<sup>713</sup>  $L_{exp} = (98 \pm 1)$  cm. Como podemos ver se esse resultado é compatível com o valor no-  
<sup>714</sup> minal fornecido pelo fabricante, que é de  $L_{nom} = 1$  m? Como o valor nominal nesse caso  
<sup>715</sup> não tem incerteza, a incerteza da discrepância é igual à incerteza da medida experimental.  
<sup>716</sup> A discrepância é de 2 cm, que é apenas duas vezes a incerteza da discrepância e a medida  
<sup>717</sup> é, portanto, compatível com o valor nominal. Uma outra forma de ver isso é analisando  
<sup>718</sup> se o valor nominal está contido no intervalo de valores  $I_{exp} = [L-3\delta L, L+3\delta L]$ . Nesse caso, o  
<sup>719</sup> valor 100 cm está contido no intervalo  $I_{exp} = [95, 101]$  cm.

Em um outro exemplo, um estudante mede o valor da aceleração da gravidade e encontra  $g_{exp} = 9,21 \pm 0,01$  m/s<sup>2</sup> e quer comparar com o valor tabelado  $g = 9,787 \pm 0,001$  m/s<sup>2</sup>. Temos:

$$\frac{|g_{exp} - g|}{\sqrt{\delta g_{exp}^2 + \delta g^2}} = \frac{0,577}{0,01005} \approx 57 \gg 3.$$

<sup>720</sup> Logo, os dois valores são incompatíveis.

721

722

## Algarismos Significativos

723 Imagine que você pergunta a hora a uma pessoa com um relógio de pulso analógico, como  
 724 o mostrado na Figura 3.1. Essa pessoa dá uma olhada no relógio, e responde: são 10 horas  
 725 e 42 minutos. Você entende que o ponteiro dos minutos certamente estava entre o 8 e o 9,  
 726 ou seja, corresponde a um valor entre 40 e 45 minutos, mais próximo de 40 do que de 45.  
 727 Dizemos que esse algarismo que foi estimado, o 2, é um **algarismo duvidoso**. Os outros  
 728 algarismos são **algarismos certos**: o ponteiro das horas estava entre 10 e 11, com certeza.  
 729 O conjunto de algarismos certos e duvidosos são os **algarismos significativos da medida**.  
 730 Quanto maior for o número de algarismos significativos em uma medida, mais informação  
 731 ela traz.



Figura 3.1: Relógio marcando hora.

732 Quando realizamos uma medição direta de uma grandeza, a partir da leitura de um ins-  
 733 trumento analógico, que apresenta uma escala, o procedimento que se usa para fazer o  
 734 registro do valor da grandeza é anotar todos os algarismos fornecidos pela escala do ins-  
 735 trumento, eventualmente acrescentando mais um algarismo, que represente uma fração  
 736 da menor divisão da escala do instrumento. No exemplo acima, do relógio, ao estimar 42  
 737 minutos, a pessoa imaginou uma escala de subdivisão da menor divisão do relógio em 5  
 738 partes, cada uma delas correspondendo a 1 minuto, e estimou que o ponteiro estava mais  
 739 perto de duas subdivisões. Quando o instrumento é digital, o múltiplo da menor medida  
 740 que ele pode fazer corresponde ao algarismo duvidoso do valor lido. Em um cronômetro  
 741 digital com resolução de 1 centésimo de segundo, que mede um intervalo de tempo de  
 742 12,04 s, o 4 é o algarismo duvidoso da medida direta.

Um ponto que sempre gera dúvida é se os zeros são significativos ou não. Para responder, pense em alterar as unidades da medida. Se o número de zeros mudar ao fazer essa alteração, eles não são significativos, já que indicam apenas em que unidades estamos escrevendo a medida. A medida  $x_1 = 2,47$  cm tem três algarismos significativos, sendo o 7 duvidoso. Para escrever  $x_1$  em metros, caminhamos a vírgula para a esquerda duas casas decimais e completamos com zeros. Nada foi feito em termos de alterar a quantidade de informação em  $x_1$ , apenas trocamos as unidades, logo esses zeros de preenchimento não são significativos. Em resumo, as duas formas abaixo são equivalentes e têm três algarismos significativos:

$$x_1 = \underbrace{2,47}_{\text{sig}} \text{ cm} = 0,0 \underbrace{247}_{\text{sig}} \text{ m}$$

A mudança para uma unidade menor pode ser feita com ajuda de potências de dez, que não contam como algarismos significativos. Por exemplo, a medida  $x_2$ , com dois algarismos significativos pode ser escrita nas formas equivalentes

$$x_2 = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \text{ kg} = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \times 10^3 \text{ g} = \underbrace{5,2}_{\text{sig}} \times 10^2 \text{ g}$$

Se escrevermos uma medida como  $x_3 = 3,10$  s, ficará implícito que temos certeza dos três segundos e do um décimo de segundo. O zero na casa dos centésimos de segundo é duvidoso, sendo o último algarismo significativo da medida. Os zeros ao final do número são significativos. Observe mais um exemplo:

$$\underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ m} = 0, \underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ km} = \underbrace{1,00}_{\text{sig}} \times 10^8 \mu\text{m}$$

<sup>743</sup> Também aqui os dois algarismos zero à direita do 1 são significativos, independentemente <sup>744</sup> da unidade que escolhemos para registrar o valor. Ao todo o comprimento registrado tem <sup>745</sup> 3 algarismos significativos.

### <sup>746</sup> 3.1 Incertezas e algarismos significativos

Normalmente usamos um ou dois algarismos significativos para representar as incertezas, dependendo do grau de estimativa envolvido na sua determinação. Como vamos trabalhar com muitas estimativas na determinação das incertezas nas medidas diretas, usaremos a convenção de um significativo. Assim, o valor da medida deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza, como nos exemplos abaixo.

$$L = (2,25 \pm 0,05) \text{ cm} \quad M = (351 \pm 2) \times 10^{-2} \text{ kg}$$

<sup>747</sup> No caso da incerteza de medidas indiretas, em geral é preciso arredondar o valor determinado a partir da propagação das incertezas das medidas diretas, explicado no Capítulo 2.

<sup>749</sup> Para arredondar um determinado valor, vamos adotar os critérios da norma técnica da

750 Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT-5891:

- 751 1. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo inferior a 5, permanece inalterado o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6357 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,6);
- 754 2. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6678 torna-se 755 1,7 e 1,6505 torna-se 1,7, arredondados à primeira casa decimal);
- 756 3. Se o algarismo à seguida do algarismo a ser conservado for igual a 5 e não houver 757 mais nenhum algarismo à sua direita ou se todos os algarismos à direita forem zeros, 758 retira-se todos os algarismos posteriores ao que será conservado e :
  - 759 (a) adiciona-se uma unidade ao algarismo conservado, se este for ímpar;
  - 760 (b) permanece inalterado o algarismo conservado, se este for par.

763 Observe os arredondamentos abaixo, feitos de modo a que a medida tenha 3 algarismos  
764 significativos e seguindo os critérios acima:

- 765 •  $x = 4,678 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- 766 •  $y = 4,674 \text{ m} \rightarrow x = 4,67 \text{ m}$
- 767 •  $z = 4,675 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- 768 •  $w = 4,665 \text{ m} \rightarrow x = 4,66 \text{ m}$

Como exemplo, vamos calcular o peso  $p$  da massa  $m = (234,40 \pm 0,02)\text{g}$  sabendo que  $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$ . Vamos trabalhar no SI, portanto escrevemos  $m = (234,40 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg}$ . Com isso,

$$p = m g = 2,29428376 \text{ N}$$

Agora vamos calcular a incerteza. Como temos um produto,

$$\left(\frac{\delta_p}{p}\right)^2 = \left(\frac{\delta_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{0,02}{234,00}\right)^2 + \left(\frac{0,0001}{9,7879}\right)^2 = 7,409 \times 10^{-10}$$

Logo,

$$\delta_p = 2,29428376 \text{ N} \times 2,72 \times 10^{-5} = 6,23 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Agora escrevemos a incerteza calculada com um significativo:

$$\delta_p = 6 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Finalmente escrevemos  $p$  até a quinta casa decimal, usando o critério de arredondamento, e escrevemos o resultado final:

$$2,29428376 \text{ N} \rightarrow p = (2,29428 \pm 0,00006) \text{ N}$$

Claro que também poderíamos usar a equação (2.12) para calcular a incerteza absoluta:

$$\delta_p = \sqrt{(m\delta_g)^2 + (g\delta_m)^2}.$$

## 769 3.2 Regra de bolso sobre algarismos significativos

770 Muitas vezes o cálculo da incerteza propagada pode ser bem longo e fica difícil de saber  
 771 se o resultado está certo ou não. Uma forma simples de saber se pelo menos a ordem de  
 772 grandeza da incerteza propagada está correta é usar a seguinte regra:

- 773 • Numa operação matemática envolvendo medidas com diferentes números de alga-  
 774 rismos significativos o resultado terá aproximadamente o mesmo número de algaris-  
 775 mos significativos que a medida com menor número.

Vamos calcular o volume  $V$  de um tubo de seção reta quadrada de lado  $a = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$  e comprimento  $L = (120,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ . A medida  $a$  tem 2 algarismos significativos e  $L$ , 4, sendo a mais precisa. Assim esperamos que  $V$  tenha entre 2 e 4 algarismos significativos. Vamos fazer a propagação:

$$V = a^2 L \rightarrow V = a^2 L = 120,0 \text{ cm}^3$$

$$\left( \frac{\delta_V}{V} \right) = \sqrt{\left( 2 \frac{\delta_a}{a} \right)^2 + \left( \frac{\delta_L}{L} \right)^2} = 0,1000034722$$

776 Um erro muito comum é esquecer que 0,1000034722 é a incerteza relativa e escrever este  
 777 valor como se fosse a incerteza absoluta.

Calculando corretamente a incerteza absoluta, temos

$$\delta_V = V \left( \frac{\delta_V}{V} \right) = (480,0 \text{ cm}^3)(0,1000034722) = 48,001666656 \approx 4,8001666656 \times 10 \text{ cm}^3$$

Finalmente,

$$V = (48 \pm 5) \times 10 \text{ cm}^3$$

778 O resultado final tem dois algarismos significativos, como a medida menos precisa usada  
 779 no cálculo. Se for necessário melhorar a precisão da medida de  $V$ , vale a pena medir  $a$  com  
 780 mais precisão. Note que ao escrevermos o resultado final, utilizamos a mesma potência de  
 781 10 para  $V$  e para sua incerteza  $\delta_V$ . Assim podemos saber qual deve ser o último algarismo

<sup>782</sup> a ser conservado no valor da medida e realizar o arredondamento, se necessário. Neste  
<sup>783</sup> caso, o arredondamento foi feito na casa da unidade de  $1 \times 10 \text{ cm}^3$ .



# 4

784

785

## Representações gráficas

### 786 4.1 Como fazer um histograma

787 Quando fazemos uma análise estatística de um conjunto de  $N$  medidas de uma determi-  
788 nada grandeza, podemos realizar um gráfico no qual se representa para cada valor (ou  
789 intervalo de valores) o número de vezes em que este aparece. Este tipo de gráfico re-  
790 cebe o nome de **Histograma**. Um exemplo é mostrado na Figura 4.1. Como o conjunto  
791 de valores obtidos é discreto, resulta um esquema de barras. A largura destas barras é a  
792 menor diferença entre os valores medidos ou o tamanho do intervalo escolhido no caso  
793 em que seja conveniente agrupar vários valores num intervalo (isto deve ser determinado  
794 em função da série de medições realizadas). O número de barras depende do conjunto de  
795 dados e do número total de medições.

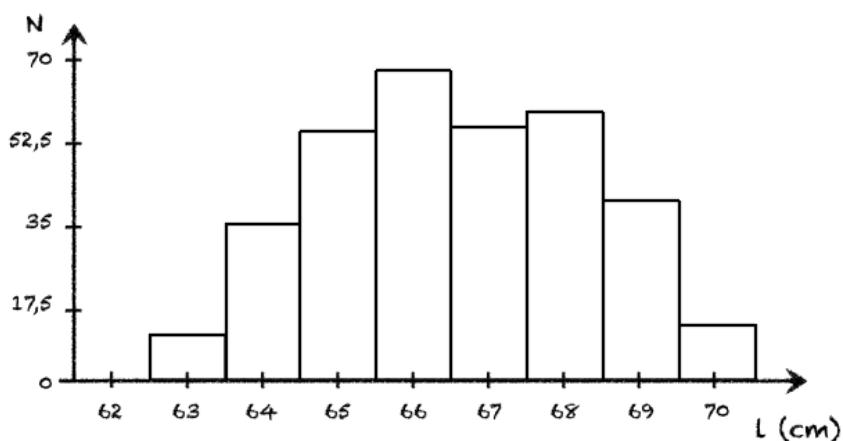


Figura 4.1: Exemplo de um histograma.

796 Para que fique mais claro, vamos considerar o seguinte exemplo. Medimos a altura de  
797 uma garrafa de água 40 vezes obtendo os seguintes valores, em centímetros:

	20,3	20,1	20,2	20,5	20,2	19,7	20,6	20,4
	19,8	20,3	20,1	20,2	20,3	20,4	20,3	19,6
798	20,0	19,5	20,7	20,3	20,1	20,7	20,5	20,5
	20,5	20,3	20,4	20,2	20,3	20,2	20,6	20,8
	20,4	20,0	19,9	20,6	20,8	19,7	20,9	20,3

799 Como podemos ver, há valores que se repetem e a frequência de repetição é diferente para  
 800 cada valor. Esta informação pode ser apresentada em forma gráfica, mediante a construção  
 801 de um histograma. Para isto devemos escolher valores ou intervalos de valores e determi-  
 802 nar quantas vezes o valor se repete no conjunto de dados.

803 Para nosso exemplo, vamos escolher intervalos de 0,2 cm começando pelo menor valor  
 804 medido de 19,5 cm. Desta forma o primeiro intervalo será de 19,5 a 19,7 cm, o segundo de  
 805 19,7 cm a 19,9 cm e assim sucessivamente. Cada intervalo será representado no gráfico pelo  
 806 seu valor central, ou seja, para o primeiro será 19,6 cm, para o segundo 19,8 cm, etc. Como  
 807 os intervalos são contínuos devemos escolher como serão os limites dos intervalos, aberto  
 808 e fechado, pois, por exemplo, o valor 19,7 cm vai contar para o primeiro ou o segundo  
 809 intervalo. No nosso exemplo, o valor inferior vai ser o fechado e o valor superior o aberto  
 810 (ou seja, 19,7 cm vai contar para o segundo intervalo e não para o primeiro). Desta forma,  
 podemos construir a Tabela 4.1, de frequências:

Tabela 4.1: Tabela de frequências absolutas e relativas em função da altura medida de uma garrafa.

Intervalo (cm)	Valor do Intervalo (cm)	Frequência	Frequência Relativa (%)
19,5 - 19,7	19,6	2	5,0
19,7 - 19,9	19,8	3	7,5
19,9 - 20,1	20,0	3	7,5
20,1 - 20,3	20,2	7	17,5
20,3 - 20,5	20,4	12	30,0
20,5 - 20,7	20,6	8	20,0
20,7 - 20,9	20,8	4	10,0
20,9 - 21,1	21,0	1	2,5

811

812 Uma vez construída a tabela, podemos fazer o gráfico no qual vamos colocar no eixo-x os  
 813 valores centrais dos intervalos escolhidos e no eixo-y o número de repetições (Frequência).  
 814 Para isto deve ser escolhida uma escala adequada em cada eixo, de forma que a distância  
 815 entre todos os valores centrais dos intervalos seja constante. Para o caso do eixo-y, a escala

816 deve ser escolhida de forma tal que o valor mais repetido fique na parte superior do eixo,  
 817 de forma que possa ser apreciada a estrutura do histograma. Uma vez escolhida a escala,  
 818 uma barra será desenhada para cada intervalo com o tamanho da frequência determinada  
 819 na tabela anterior, como mostramos no lado esquerdo da Figura 4.2.

820 Uma forma alternativa de se fazer o histograma é colocando no eixo-y a frequência relativa,  
 821 ou seja, o número de repetições dividido pelo número total de medidas, frequentemente  
 822 mostrado em percentagem, como na última coluna da Tabela 4.1 e no histograma do lado  
 823 direito da Figura 4.2.

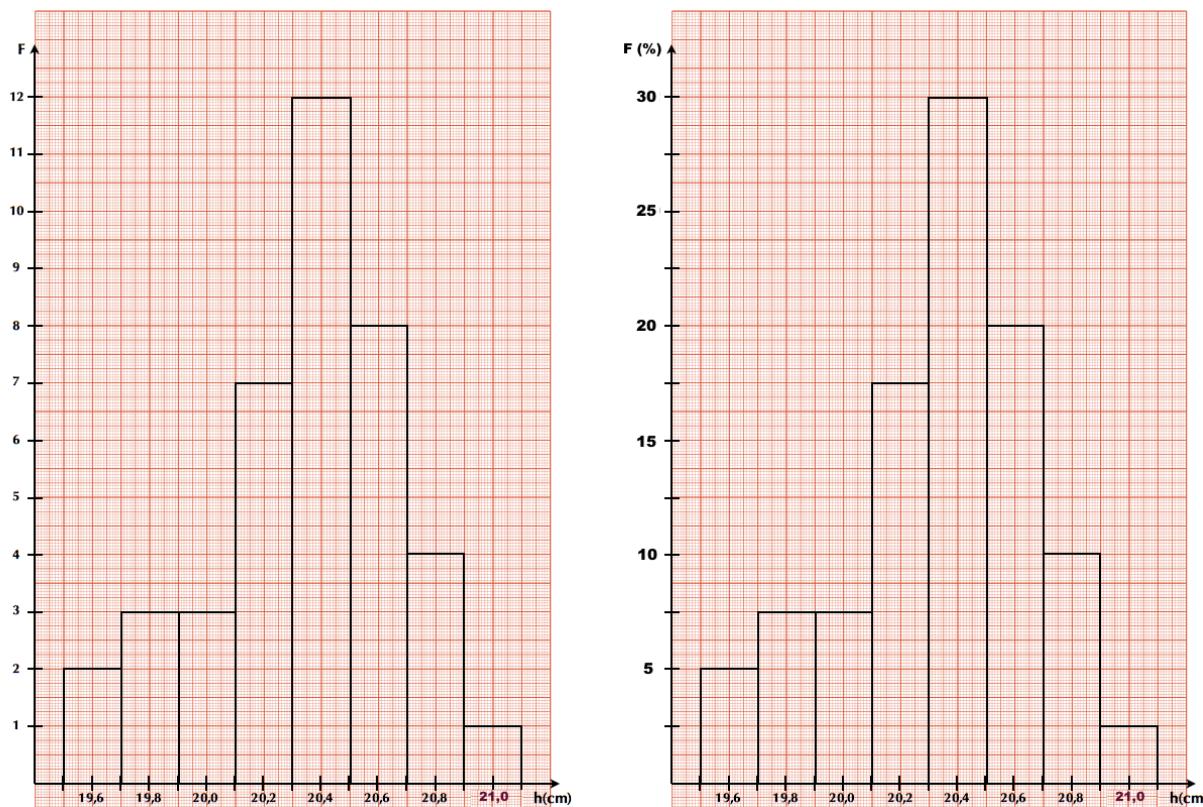


Figura 4.2: Histogramas de frequências (lado esquerdo) e frequências relativas (lado direito) da medida da altura (h) da garrafa de água .

## 824 4.2 Como construir um gráfico

825 Uma forma muito útil de apresentar os resultados experimentais é a partir de representa-  
 826 ções gráficas dos mesmos, pois neles a informação é sintetizada, facilitando sua análise e  
 827 interpretação. Geralmente, um gráfico é mais útil que uma tabela de valores, por exemplo,  
 828 quando estamos realizando medições de uma variável Y em função de outra X que varia  
 829 independentemente e queremos ver a relação funcional entre elas (por exemplo, a posição  
 830 de um móvel em função do tempo), ou para estudar se duas variáveis possuem alguma  
 831 correlação ou não.

832 Em Física Experimental I, todos os gráficos que realizaremos serão em duas dimensões

833 além dos histogramas que já foram discutidos na sessão 4.1. O primeiro passo é escolher  
 834 quais serão as variáveis e, logo, qual é a variável independente que será representada no  
 835 eixo horizontal e qual a dependente no eixo vertical. Por exemplo, se queremos represen-  
 836 tar a posição de um corpo em movimento em função do tempo vamos identificar duas  
 837 variáveis: posição ( $x$ ) e tempo ( $t$ ), sendo o tempo a variável independente. Ou seja, o  
 838 tempo será colocado no eixo-x e a posição no eixo-y.

839 Uma vez escolhidas as variáveis, devemos determinar a escala para cada eixo. Para isto  
 840 temos que considerar os valores medidos de cada variável, de forma a poder escolher uma  
 841 escala que facilite a leitura dos pontos experimentais, ou qualquer outro ponto represen-  
 842 tado no gráfico. Quando desenhamos o gráfico em papel, devemos escolher a escala de  
 843 forma a usar pelo menos metade da folha para representar os pontos experimentais. Para  
 844 facilitar a leitura do gráfico, é interessante utilizar escalas em que cada milímetro do pa-  
 845 pel corresponda a múltiplos ou submúltiplos de 2 ou 5 da grandeza correspondente. A  
 846 determinação da escala em cada eixo é independente.

847 Consideremos os seguintes valores medidos para o exemplo da posição do corpo em  
 848 função do tempo:

	Tempo (s)	Posição (m)	Incerteza da Posição (m)
	0,1	29	1
	0,3	34	1
	0,4	41	1
	0,5	38	1
849	0,7	33	1
	1,0	26	1
	1,1	23	1
	1,2	20	1
	1,4	17	1
	1,5	16	1

850 Vamos construir o gráfico em papel milimetrado, usando a folha “na vertical”, de forma  
 851 que o eixo-x fique na menor dimensão da mesma e o eixo-y na maior. Para o eixo-x, onde  
 852 vamos representar o tempo, a escolha parece simples, começamos em 0 (zero) e conside-  
 853 ramos uma escala de 10 mm para cada 0,1 s, pois o tamanho nesta dimensão é de 180 mm  
 854 e nós precisamos marcar de 0 a 1,5 s. Para o eixo-y, onde vamos representar a posição,  
 855 dispomos de 28 cm de folha. Neste caso, podemos considerar duas possibilidades: (A)  
 856 começamos a escala a partir do zero ou (B) começamos ela perto do menor valor medido,  
 857 neste caso 16 m. Em ambos os casos a escala deve ir até o máximo valor medido ou algum  
 858 valor superior imediato. Em geral escolhemos um valor superior que permita ajustar a  
 859 escala para um múltiplo de 2 ou 5. Se considerarmos o caso (A), uma escala possível seria  
 860 1 cm no papel para cada 2 m de posição (Figura 4.3 (esquerda)). Como podemos ver, não

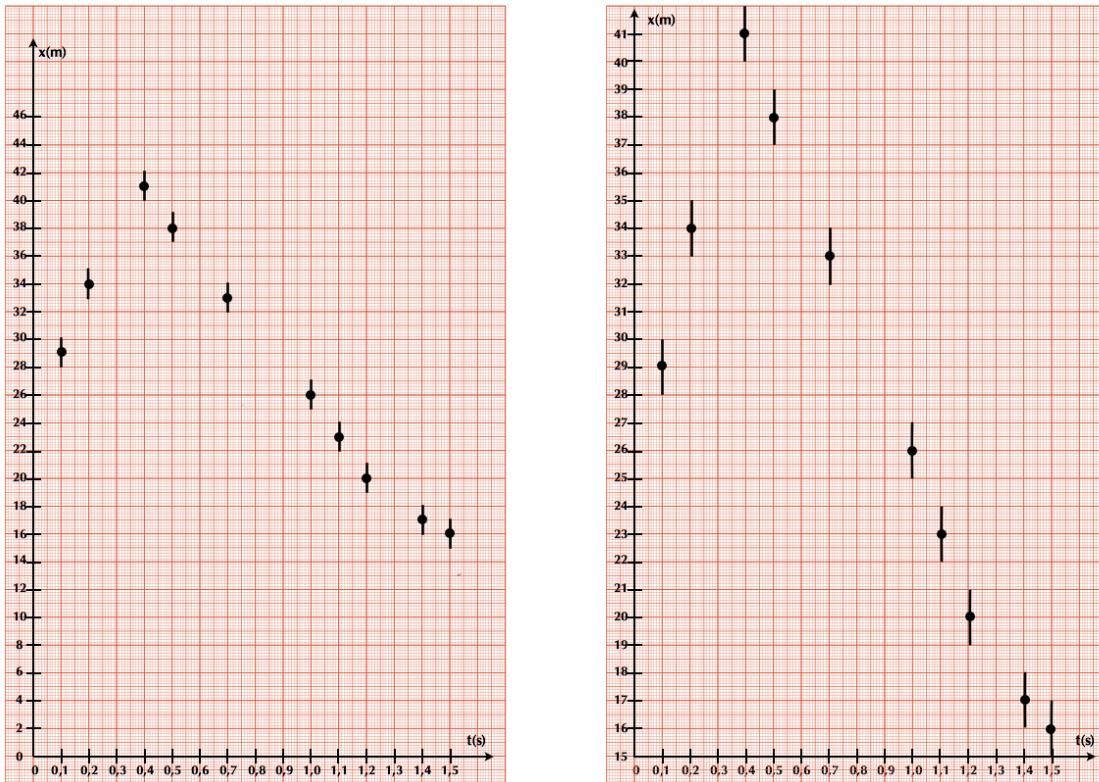


Figura 4.3: Gráfico da posição ( $x$ ) em função do tempo ( $s$ ) para o caso A (esquerda). Gráfico da posição ( $x$ ) em função do tempo ( $s$ ) para o caso B (direita).

é necessário começar do zero, podemos começar por exemplo de 15 m (caso B) e escolher uma escala de 1 cm para cada 1 m (Figura 4.3 (direita)). Desta forma podemos observar melhor a estrutura própria do gráfico. Uma vez definida a escala, marcamos valores regularmente espaçados nos eixos correspondentes e identificamos os eixos com as grandezas que estes representam, com suas respectivas unidades. Finalmente, desenha-se os pontos com suas barras de erro de acordo com a tabela de dados, como pode se ver na Figura 4.3. A barra de erro é a representação gráfica da incerteza. Assim, ela deve ser desenhada como uma reta que vai de um valor igual ao valor do ponto subtraído do valor de uma incerteza até o valor do ponto somado de uma incerteza.

Não existe uma única forma de representar os nossos dados. No exemplo anterior, ambos os gráficos estão corretos. **O importante é que se deve adotar uma “escala limpa e fácil de ser lida” de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.**



874

875

## Ajuste linear

### 876 5.1 Ajuste de uma função linear por Mínimos Quadrados

877 Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encon-  
878 trar uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. A forma de realizá-la é medi-  
879 ante o procedimento de Mínimos Quadrados, que no caso particular de uma função linear  
880 chama-se de regressão ou ajuste linear. Em Física Experimental I, só trabalharemos com  
881 este tipo de ajuste, seja porque as relações das grandezas medidas tem uma relação linear  
882 ou porque seremos capazes de linearizar relações entre grandezas.

Vamos então nos focalizar só no caso da regressão linear, deixando o caso mais genérico de mínimos quadrados para ser estudado mais para a frente. Na Figura 5.1, mostramos o caso linear. A dispersão dos valores está associada às flutuações dos valores de cada variável. Supomos uma tendência linear entre as variáveis X e Y, e nos perguntamos qual é a melhor reta:

$$y(x) = ax + b \quad (5.1)$$

883 que ajusta estes dados. A quantidade  $y_i - y(x_i)$  representa o desvio de cada medida  $y_i$  em  
884 relação ao valor previsto pelo modelo  $y(x)$ .

Vamos definir uma função  $\chi^2$  (chi-quadrado), dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.2)$$

onde  $N$  é o número de pontos que serão utilizados para a realização do ajuste linear. Desta forma, a função  $\chi^2$  é uma medida do desvio total dos valores medidos  $y_i$  em relação aos valores previstos pelo modelo linear  $ax + b$ . Os melhores valores para o coeficiente angular  $a$  e o coeficiente linear  $b$  são os que minimizam este desvio total, ou seja o valor de  $\chi^2$ .

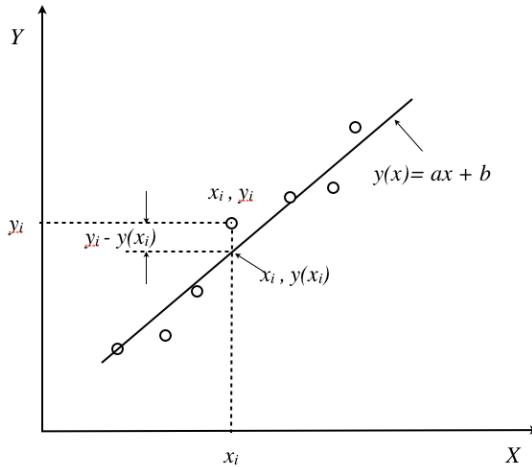


Figura 5.1: Gráfico de dados associado a um modelo linear.

Portanto, os melhores valores de  $a$  e  $b$  serão os que satisfazem:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (5.3)$$

Resolvendo as duas equações obtemos (mostrar):

$$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.4)$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.5)$$

Estes dois resultados se aplicam ao caso em que todos os dados da variável dependente ( $y$ ) têm a mesma incerteza absoluta e a incerteza da variável independente ( $x$ ) considera-se desprezível. As incertezas dos parâmetros  $a$  e  $b$  são dadas por:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N V[x]}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_i x_i^2}{N V[x]}} \quad (5.6)$$

onde  $V[x]$  é a variância de  $x$  e  $\chi_N^2$  é conhecido como o chi-quadrado por grau de liberdade (ou chi-quadrado reduzido), que no caso linear está dado por:

$$\chi_N^2 = \frac{1}{N-2} \chi^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.7)$$

A qualidade do ajuste linear pode ser determinada pelo *coeficiente de correlação* dado por:

$$\rho = \frac{\frac{1}{N} \sum_i x_i y_i - \frac{1}{N^2} \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{V[x]V[y]}} \quad (5.8)$$

onde:

$$V[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \quad \text{e} \quad V[y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \quad (5.9)$$

## 5.2 Método gráfico para ajustar uma reta com incerteza

Se medimos duas variáveis,  $X$  e  $Y$ , cuja relação sabemos que é linear, podemos encontrar uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. No Capítulo 4 da parte Conceitos Básicos na apostila discutimos como isto é feito analiticamente mediante o método de mínimos quadrados, mas aqui estudaremos como fazê-lo a partir do gráfico de  $Y$  em função de  $X$ , o que chamamos de **método gráfico**.

Na Figura 5.2 podemos observar a distribuição dos dados, círculos abertos, que queremos ajustar. Neste caso, para simplificar, vamos considerar que a incerteza associada a cada medida é do tamanho do ponto. Para ajustar graficamente os pontos por uma reta que melhor representa a variação de  $Y$  em função de  $X$  devemos traçar uma reta de forma tal que os pontos que se situem “acima” da reta se vejam compensados pelos pontos que se situem “abaixo” da mesma, como na linha cheia mostrada na Figura 5.2<sup>1</sup>.

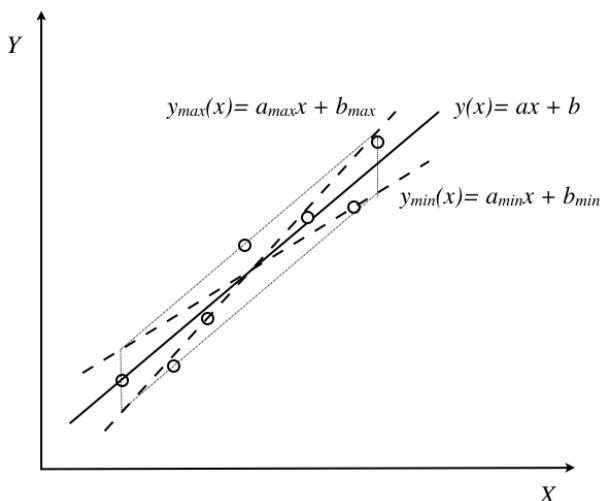


Figura 5.2: Método para ajuste linear.

Desta forma podemos determinar o coeficiente angular ( $a$ ) e linear ( $b$ ) para a equação da reta  $y = ax + b$ . Mas mesmo no caso gráfico é preciso dar as incertezas associadas à determinação de  $a$  e  $b$ . Para isto, vamos traçar duas linhas paralelas à melhor reta ( $R$ ) que ajusta os nossos dados encontrados, uma passando pelo ponto mais afastado “acima” da reta  $R$  e outra pelo ponto mais afastado “abaixo” da reta  $R$ . Caso exista um ou outro

<sup>1</sup>Note que o uso de uma régua transparente é conveniente pois permite ter uma visão global de todos os pontos.

902 ponto excepcionalmente afastado da reta média poderá não ser considerado pois a proba-  
903 bilidade de corresponder a uma medida incorreta é grande. Obtendo a interseção destas  
904 retas por duas retas paralelas ao eixo-y que contêm o primeiro e último ponto experimental  
905 representado temos um “paralelogramo de incerteza” como é mostrado na figura (parale-  
906 logramo pontilhado). A partir deste, desenhamos as duas retas diagonais achando o que  
907 chamaremos a reta de máxima  $y_{max} = a_{max}x + b_{max}$  e a de mínima  $y_{min} = a_{min}x + b_{min}$  (ver  
908 figura).

A partir destas três retas, podemos então determinar as incertezas associadas para o coeficiente angular  $\delta a$  e linear  $\delta b$  como:

$$\delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

$$\delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

# 6

909  
910

## Determinação da velocidade instantânea

No movimento uniformemente acelerado a velocidade da partícula em um instante  $t$  pode ser calculada a partir da velocidade média calculada entre os instantes  $t + \Delta t$  e  $t - \Delta t$  com  $\Delta t$  constante. Isto é:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (6.1)$$

Assim, para um conjunto de medições de posição em função do tempo, podemos calcular a velocidade em cada ponto ( $i$ ) a partir das medições de tempo e posição do ponto posterior ( $t_{i+1}$  e  $x_{i+1}$ ) e anterior ( $t_{i-1}$  e  $x_{i-1}$ ), utilizando a fórmula:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (6.2)$$

Para cada valor de velocidade também podemos calcular a incerteza associada mediante a fórmula de propagação de incertezas. Desprezando a incerteza na determinação do tempo, obtemos:

$$\delta_{v_i}^2 = \frac{\delta_{x_{i+1}}^2 + \delta_{x_{i-1}}^2}{(t_{i+1} - t_{i-1})^2} \quad (6.3)$$

onde  $\delta_{x_{i+1}}$  e  $\delta_{x_{i-1}}$  são as incertezas na determinação da posição  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$  respectivamente.



912

913

## Distribuição Gaussiana

### <sup>914</sup> Valor médio, Desvio Padrão e Densidade de Probabilidade

Sejam  $N$  medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Como alguns dos valores  $x_i$  medidos podem ser repetidos, podemos dizer que para esta grandeza temos  $M$  **eventos** possíveis de medida tal que  $M \leq N$  e eles são:  $y_1, y_2, \dots, y_M$ . Então, podemos definir a **frequência de ocorrência** do evento  $y_i$  como  $N(y_i)$  de forma tal que:

$$\sum_{i=1}^M N(y_i) = N. \quad (7.1)$$

Desta forma, podemos definir a **frequência relativa** como a fração de eventos  $y_i$  em relação ao número total de eventos  $N$ , dada por:

$$F(y_i) = \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.2)$$

de forma que (mostrar):

$$\sum_{i=1}^M F(y_i) = 1. \quad (7.3)$$

Se o processo é repetido indefinidamente, ou seja,  $N \rightarrow \infty$ , a frequência relativa é interpretada como a **probabilidade de ocorrência** do evento  $y_i$ :

$$P(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.4)$$

<sup>915</sup> e como sabemos que  $0 \leq N(y_i) \leq N$ , então  $0 \leq P(y_i) \leq 1$ .

<sup>916</sup> No Capítulo 2 da parte Conceitos Básicos definimos os conceitos de valor médio e desvio <sup>917</sup> padrão. Agora podemos re-escrever estas definições em função da frequência relativa, <sup>918</sup> obtendo:

### 1. Valor médio

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^M F(x_i)x_i, \quad (7.5)$$

### 2. Variância $V[x] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2 F(x_i) \quad (7.6)$$

919

Quando realizamos observações experimentais utilizamos instrumentos que determinam os valores de grandezas que são continuamente distribuídas. Os resultados são truncados até o limite da precisão de medida do instrumento utilizado. Por exemplo, um cronômetro usual mede intervalos de tempo com precisão de um centésimo de segundo. Isto significa que intervalos de tempo menores que este valor não podem ser medidos com este instrumento. Assim, os resultados obtidos serão representados por um número finito de valores, mesmo que a variável observada seja contínua. Algumas vezes, o número de valores possíveis medidos, mesmo que finito, pode ser muito grande, e para estes casos é conveniente agrupa-los em intervalos. Desta forma o conjunto de medidas diferentes fica reduzido sem que a informação da amostra original seja perdida.

Consideremos novamente  $N$  medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Para estes casos, definimos como o mesmo evento todo resultado da realização do processo aleatório  $y$  que caia num intervalo de valores  $\Delta y$ , de forma que o evento agora será caracterizado por  $\{y_i, \Delta y\}$ :

$$y_i - \frac{\Delta y}{2} \leq x_j < y_i + \frac{\Delta y}{2}. \quad (7.7)$$

A probabilidade de ocorrência do evento  $\{y_i, \Delta y\}$  é definida por:

$$P(y_i) = \Delta P_i \quad (7.8)$$

onde  $\Delta P_i$  é a probabilidade de encontrarmos como resultado da realização do processo aleatório, valores no intervalo  $\{y_i - \frac{\Delta y}{2}, y_i + \frac{\Delta y}{2}\}$ . Para intervalos  $\Delta y$  pequenos, podemos escrever a seguinte relação:

$$P(y_i) = \Delta P_i = p(y_i)\Delta y \quad (7.9)$$

onde  $p(y_i)$  é denominada de densidade de probabilidade do evento aleatório  $y_i$ . E se  $\Delta y \rightarrow 0$ , então  $\Delta P_i$  e  $\Delta y$  são infinitesimais podendo escrever a densidade de probabilidade como:

$$p(y) = \frac{dP}{dy} \quad (7.10)$$

sendo que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = 1 \quad (7.11)$$

Em  $N$  repetições de um processo aleatório real, a aproximação experimental para a proba-

bilidade de realização de um evento é a frequência relativa  $F(y_i)$ , definida na equação 7.2. Assim, a densidade de probabilidade experimental  $p_{exp}(y_i)$  de ocorrência do evento  $\{y_i, \Delta y\}$  é dada por:

$$p_{exp}(y_i) = \frac{F(y_i)}{\Delta y}. \quad (7.12)$$

Para o caso contínuo e utilizando o conceito de densidade de probabilidade, o valor médio ( $\mu$ ) e a variância ( $\sigma^2$ ) podem ser escritos da seguinte forma:

### 1. Valor médio

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy. \quad (7.13)$$

### 2. Variância $V[y] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 p(y) dy. \quad (7.14)$$

## 932 Função de Laplace-Gauss

Em muitas situações experimentais utilizamos **distribuições Gaussianas** para interpretar nossos resultados físicos, em parte porque os fundamentos teóricos das medições realizadas se correspondem com distribuições Gaussianas ou porque a experiência tem nos mostrado que a estatística de Gauss nos proporciona uma descrição razoavelmente acurada dos vários eventos reais. Na distribuição Gaussiana, a densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7.15)$$

onde  $\mu$  é o valor médio e  $\sigma$  o desvio padrão da distribuição, dados pelas equações discutidas anteriormente.

Na Figura 7.1 apresentamos a função Gaussiana de densidade de probabilidade para a variável continua  $x$ . Esta função é também chamada de função de Laplace-Gauss ou função Normal. O gráfico da função Gaussiana é uma curva simétrica em forma de "sino" com uma altura máxima dada por  $G_{max} = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ . Pode ser mostrado a partir da equação 7.15 que  $\sigma$  é a meia largura da curva na altura correspondente a  $\sim 0,61G_{max}$  e que a área sob a curva entre  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$  (região pintada na Figura 7.1) corresponde a 68,3% da área total. Isto quer dizer que a probabilidade de medirmos um valor no intervalo  $\mu \pm \sigma$  é 68,3%. Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que a probabilidade de encontrarmos um valor entre  $\mu \pm 2\sigma$  é 95,4% e entre  $\mu \pm 3\sigma$  é 99,7%.

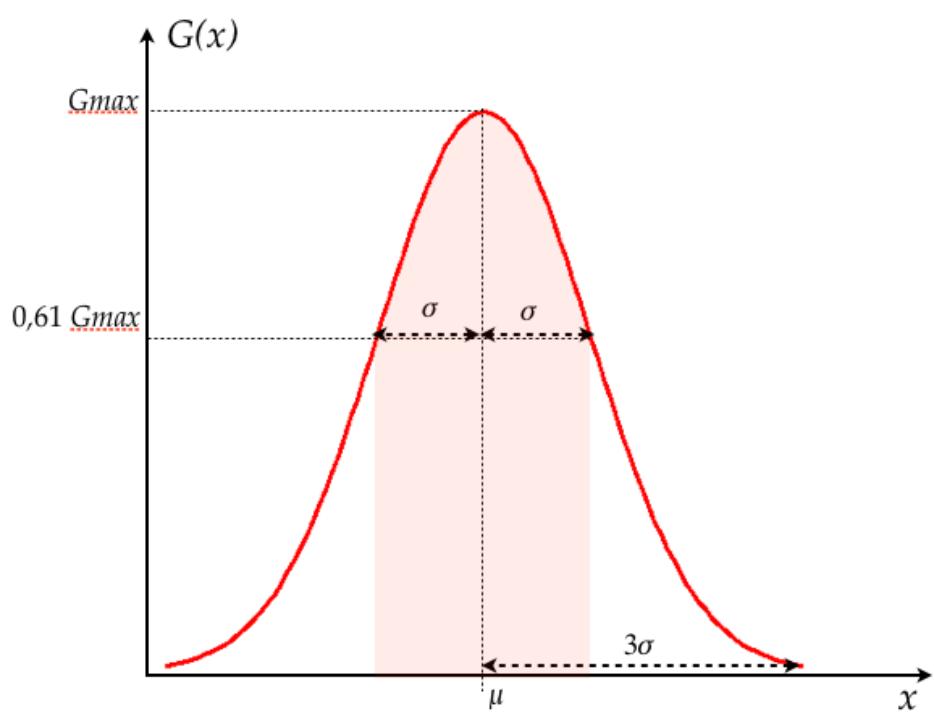


Figura 7.1: Representação da função Gaussiana.

944

945

## Bibliografia

- 946 [1] Fundamentos da Teoria de Erros, José Henrique Vuolo, 2.<sup>a</sup> Edição 1996, Editora Edgar  
947 Blücher Ltda,
- 948 [2] Curso de Física Básica, – Mecânica Volume 1), H. Moysés Nussenzveig, 2.<sup>a</sup> Edição 2015,  
949 Ed. Edgard Blücher Ltda,
- 950 [3] Física I – Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman, 14.<sup>a</sup> Edição 2016, Pearson  
951 Education do Brasdil Ltda.,
- 952 [4] *Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, L. Galante e I. Gnesi, American  
953 Journal of Physics **88**, 279 (2020).
- 954 [5] *Uma visão diferenciada sobre o ensino de forças impulsivas usando um smartphone*, V. L. B. de  
955 Jesus e D. G. G. Sasaki, Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, 1303 (2016).



PARTE III

## EXERCÍCIOS



# 1

957

958

## Algarismos significativos

959 Expressse corretamente os resultados para as seguintes medições com suas respectivas incertezas.  
960

961

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
1	67,002	0,023	cm	
2	0,001	2,3	erg	
3	45612,98	345	cm/s	
4	14	29	erg	
5	152,389	0,037	cm/s <sup>2</sup>	
6	74,58	3,14	g	
7	0,0012	0,0001	m	
8	120034	2607	m/s <sup>2</sup>	
9	45,98	2,1	erg	
10	65555,467	56,001	g	
11	23,456	1,2	m	
12	0,173	0,056	cm <sup>3</sup>	
13	45001,6	657,31	J	
14	45,629	2,5914	km/h	
15	104104	104	m <sup>2</sup>	
16	0,0826	0,099	cm/s	
17	3,69	1,582	mm <sup>3</sup>	

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
18	19,78	5,46	kg	
19	0,458	0,177	cm	
20	135,589	0,0888	g	
21	25,36	0,84	cm	
22	74589,589	5698,26	erg	
23	0,145	0,5	cm/s	
24	14580,8	37,36	erg	
25	125,369	0,041	cm/s <sup>2</sup>	
26	74,58	3,14	g	
27	0,025	0,0074	m	
28	256	0,5	m/s <sup>2</sup>	
29	7489	2,1	m/s <sup>2</sup>	
30	4789,4	36,001	g	

# 2

## Propagação incerteza

963  
964

- 965 1. Os lados de um paralelepípedo são  $a = (4,50 \pm 0,05)$  cm,  $b = (8,50 \pm 0,09)$  cm e  $c = (35,0 \pm 0,3)$  mm. Determinar o volume do cubo com sua incerteza absoluta e relativa.
- 966
- 967 2. Na medição da resistência ( $R$ ), se obteve o valor da tensão  $V = (15,2 \pm 0,2)$  V e da
- 968 corrente  $I = (2,6 \pm 0,1)$  A. Qual é a incerteza absoluta da resistência usando a equação
- 969  $R = V/I$ ?
- 970 3. Um pêndulo simples é utilizado para medir o valor da aceleração da gravidade uti-
- 971 lizando equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

972 O período  $T$  medido foi de  $(1,24 \pm 0,02)$  s e o comprimento do pêndulo  $l = (0,381 \pm$   
973  $0,002)$  m. Qual é o resultado do valor da aceleração da gravidade  $g$  com sua incerteza  
974 absoluta e relativa?

- 975 4. Para medir o comprimento total de um pêndulo (fio + esfera) usou-se uma régua mi-
- 976 limetrada para medir o comprimento do fio e um paquímetro para medir o diâmetro
- 977 da esfera. Observam-se os seguintes valores com as suas respectivas incertezas:

978 Comprimento do fio = 2,100 m

979 Incerteza comprimento do fio = 0,5 cm

980 Diâmetro da esfera = 2,114 cm

981 Incerteza do diâmetro da esfera = 0,01 mm

982 Ache o comprimento total e a sua incerteza associada.

- 983 5. Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma:  $R = (232,0 \pm$   
984  $0,1)$  mm. Calcular seu volume com a sua respectiva incerteza relativa.
- 985 6. A partir da figura 2.1, com as seguintes medidas:

986  $L_1 = (5,00 \pm 0,05)$  cm

987  $L_2 = (20,00 \pm 0,05)$  mm

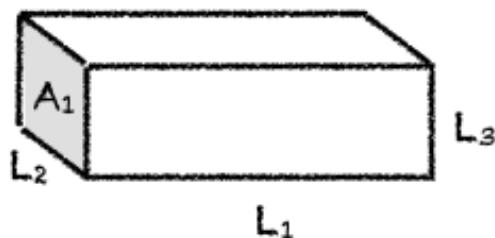


Figura 2.1: Bloco retangular.

$$L_3 = (15,00 \pm 0,01) \text{ mm}$$

- (a) Determine a área  $A_1$  com a incerteza correspondente.  
 (b) Determine o volume desta peça com a incerteza correspondente.  
 (c) Se a precisão necessária para o resultado da área é de 0,5% podemos considerar este resultado satisfatório?

7. Para determinar a altura de uma cachoeira, algumas pessoas mediram o tempo de queda de pedrinhas que eram soltas, em queda livre, de um mesmo local. Conhecendo o tempo de queda  $t$ , pode-se calcular a altura  $h$  a partir da relação cinemática  $h = 1/2gt^2$  em que  $g$  é a aceleração da gravidade. Foi utilizado um cronômetro com precisão de centésimos de segundo e os valores  $t_i$  obtidos em 8 medidas estão na seguinte tabela:

	$t(\text{s})$
1	1,30
2	1,09
3	1,03
4	1,27
5	1,18
6	1,31
7	1,24
8	1,15

Considerando  $g = (9,784 \pm 0,001) \text{ m/s}^2$ , calcule a altura da cachoeira e a sua incerteza.

PARTE IV

## APÊNDICES





1003  
1004

## Caderno de laboratório

- 1005 1. **É um documento.** Nele se tem todos os registros cronológicos de um experimentos  
1006 ou ideia. Portanto, deve ter datas, sem rasuras nem espaços em branco, sem inserções  
1007 e se possível assinado por quem realizou as anotações.
- 1008 2. **É pessoal.** Pode haver outros cadernos de uso compartilhado, por exemplo, para  
1009 equipamentos ou instrumentos de laboratório, etc., onde se registram informações  
1010 de uso geral, como mudanças introduzidas em configurações experimentais ou es-  
1011 tado de conservação dos equipamentos. Mas o caderno de laboratório contem ideias,  
1012 propostas e modo de colocar a informação que são pessoais, próprias de cada pessoa.
- 1013 3. **É um registro de anotação em sequência.** Não se devem intercalar resultados nem  
1014 se corrigir o que está escrito. Em caso de se detectar um erro, se anota na margem o  
1015 erro encontrado e a página na qual se corrige. Isto permite saber se o erro pode-se  
1016 voltar a encontrar e a partir de que dados foi corrigido. Por este mesmo motivo não  
1017 se deve escrever a lápis.
- 1018 4. As páginas devem ser numeradas. Isto permite fazer referência de forma fácil e or-  
1019 ganizada às anotações anteriores, assim como também indicar na margem onde se  
1020 corrigem os erros.
- 1021 5. As fórmulas e figuras devem ter uma numeração consistente e interna. Um exem-  
1022 plo prático é numerar todas as fórmulas dentro de cada página ou folha e citá-las  
1023 por página-fórmula. É importante numerar todas as fórmulas, pois não sabemos no  
1024 futuro qual necessitaremos citar ou utilizar.
- 1025 6. Referências completas. No caso em que se deva utilizar uma referência externa (ro-  
1026 teiro do experimento, artigo, livro, etc.), esta referência deve ser completa. Se uma  
1027 referência é citada com frequência pode-se utilizar a última página do caderno para  
1028 registrá-la e citá-la por seu número. Quando citamos alguma coisa, sempre acredita-  
1029 mos que vamos nos lembrar de onde saiu, mas isto só é assim a curto prazo.
- 1030 7. **Deve-se escrever todos os resultados.** Indicar sempre a maior quantidade de in-  
1031 formação possível do experimento. Todas as condições experimentais devem ser

1032 corretamente registradas e deve-se utilizar diagramas claros das configurações ex-  
1033perimentais e indicando também cada vez que há uma mudança. Um dado ou  
1034 informação que hoje parece irrelevante em função do nosso modelo da realidade,  
1035 pode resultar vital ao descobrir que nossas ideias estavam erradas ou eram incom-  
1036pletas. A falta de um dado de aparência menor pode invalidar tudo o que foi reali-  
1037zado.

- 1038 **8. Deve-se escrever o plano.** O que é que se pretende medir, o que é que se procura e  
1039 as considerações ou razões pelas quais se faz o experimento. O planejamento do ex-  
1040perimento e as ideias a serem realizadas devem ser explícitas. A anotação sequencial  
1041 permite seguir a evolução das idéias, dado vital também para interpretar os resul-  
1042tados, pois os preconceitos condicionam o que se mede e como se mede. Saber o que  
1043 se pensava no momento de medir vai nos indicar se nesse momento tivemos uma  
1044determinada precaução que depois demonstrou ser fundamental.
- 1045 **9. Deve-se escrever as conclusões.** O mesmo vale para o planejamento do experimento.
- 1046 **10. Fazer uma reorganização periódica das ideias.** Se uma ideia tem evoluído desde o  
1047 inicio do experimento, é conveniente periodicamente fazer um quadro da situação,  
1048 passando a limpo o que foi feito, para não ter que reconstruir a história a cada vez.



1049

1050

## Como escrever um relatório?

1051 A idéia desta nota é dar aos alunos de Física Experimental I algumas dicas e recomenda-  
1052 ções de como escrever um relatório. Infelizmente, não existe uma “receita” para isto, pois  
1053 há várias maneiras de fazer um relatório, dependendo do tipo de trabalho realizado e de  
1054 quem o escreva. Portanto, a organização do relatório pode ser diferente apresentando di-  
1055 ferentes distribuições de seções. Nesta nota propõe-se uma estrutura básica com algumas  
1056 sugestões, mas será com a experiência, com a prática e com as sucessivas correções do pro-  
1057 fessor que os alunos aprenderão a fazê-lo. Escrever um relatório é um aprendizado que se  
1058 obtém aos poucos.

1059 O ponto principal a ser tido em conta é que no relatório deve-se apresentar os resultados  
1060 obtidos de forma clara e concisa. Para isto, deve-se expor cuidadosamente quais são os  
1061 objetivos do trabalho realizado, os conceitos físicos básicos necessários para a realização  
1062 do experimento e como ele foi realizado, entre outros. O relatório tem que ser escrito  
1063 de modo que um leitor que nunca tenha realizado o experimento descrito, ou a pesquisa  
1064 realizada, seja capaz de entender e até reproduzir o trabalho a partir do conhecimento  
1065 adquirido na sua leitura. Para começar, sugere-se a seguinte distribuição:

- 1066 • **Título e autores:** O título deve descrever claramente o conteúdo do trabalho. O re-  
1067 latório tem que ter o(s) nome(s) do(s) autor(es) e as informações relevantes referentes  
1068 a ele(s).
- 1069 • **Resumo:** Deve dar uma visão completa do trabalho realizado. De forma breve, deve-  
1070 se descrever qual é o objetivo do mesmo, o que foi feito e qual foi o resultado obtido.
- 1071 • **Introdução:** Nela expõem-se as motivações do trabalho e os objetivos a serem atin-  
1072 gidos. Deve-se apresentar uma revisão da informação existente sobre o tema em  
1073 questão. Também, deve-se incluir uma explicação teórica mínima (não copiada de  
1074 livro, mas elaborada pelos alunos) que permita a compreensão do trabalho e como  
1075 esta informação está aplicada ao experimento específico.
- 1076 • **Método experimental ou Descrição do experimento:** Deve-se descrever em deta-  
1077 lhe a configuração experimental utilizada, os métodos utilizados para a realização

das medições, incluindo a fundamentação física. Deve-se realizar uma descrição dos aspectos relevantes dos dispositivos e equipamentos utilizados, especificando suas características importantes (precisão dos instrumentos, intervalos de medição, etc). Pode-se representar esquematicamente o dispositivo empregado para a realização do experimento de forma a acompanhar as explicações e facilitar a compreensão do leitor.

- **Resultados e discussão:** Esta seção tem que ser uma continuação natural da Introdução e do Método experimental ou Descrição do experimento. Deve-se incluir tabelas dos dados colhidos junto com as suas incertezas e a explicação de como foram avaliadas essas incertezas. Também deve ser realizada uma descrição de como a análise de dados foi realizada e como os resultados foram obtidos. Deve-se incluir também gráficos, junto com as curvas de ajuste dos dados realizados. Além da análise dos dados, é fundamental realizar uma discussão dos mesmos: sua validade, precisão e a sua interpretação. Dependendo do caso, pode-se realizar uma proposição de um modelo para a descrição dos resultados ou realizar uma comparação com o modelo teórico já discutido na introdução. Caso seja necessária a utilização de equações, elas devem estar explicitadas ou, se já foram introduzidas anteriormente (na introdução), através de uma referência ao número de equação correspondente.

Levar em conta que, dependendo do relatório e do trabalho apresentados, pode-se separar esta seção em duas independentes, uma de resultados e outra de discussões.

Figuras e tabelas: cada figura ou tabela deve estar numerada e deve conter uma legenda ao pé que permita entendê-la. A descrição detalhada da figura deve estar incluída também no texto e referenciada pelo número. Os gráficos são considerados figuras, então deverão ser numerados de forma correlacionada com as mesmas.

- **Conclusões:** Deve conter uma discussão de como a partir dos resultados obtidos mostra-se que as hipóteses e objetivos do trabalho foram satisfeitos ou não. Espera-se que a discussão do trabalho seja feita de forma crítica podendo-se propor melhorias ao trabalho realizado, tanto na metodologia empregada quanto nas propostas para ampliar o objetivo do experimento no futuro.
- **Referências:** Deve-se informar a bibliografia citada durante o desenvolvimento do trabalho. A bibliografia pode estar relacionada ao modelo teórico discutido, a referências de equipamento utilizado, ou a artigos de referência no qual o trabalho foi baseado.
- **Apêndice:** Caso seja necessário, pode-se anexar um ou mais apêndices com informação complementar que ajude a esclarecer o conteúdo das partes anteriores (cálculos realizados para obter um dado resultado, estimativa de incertezas, etc.), mas que no corpo principal do relatório desviariam a atenção do leitor. No(s) apêndice(s) coloca-se geralmente informação adicional necessária, mas não fundamental.



1116

1117

## Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Se a força resultante sobre uma partícula de massa  $m$  for,  $\vec{F}$ , a segunda lei de Newton diz que:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{C.1})$$

com  $\vec{a}$  sendo o vetor aceleração da partícula. No caso de  $\vec{F}$  ser uma força constante, *viz.* não depende nem do tempo, nem da posição da partícula e nem da velocidade da mesma, da Eq.(C.1) vemos que a aceleração  $\vec{a}$  é constante. Assim, a Eq.(C.1) pode ser facilmente integrada para obtermos:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m \int_{t_0}^t \vec{a} dt \implies \vec{F}(t - t_0) = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \implies \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.2})$$

com  $\vec{v} := \vec{v}(t)$  e  $\vec{v}_0 := \vec{v}(t_0)$ . Integrando temporalmente mais uma vez ambos os membros da Eq.(C.2) obtemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.3})$$

com  $\vec{r} := \vec{r}(t)$  sendo a posição da partícula como função do tempo e  $\vec{r}_0 := \vec{r}(t_0)$  a sua posição inicial.

Vamos supor agora que a força resultante  $\vec{F}$  é paralela à velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Como a soma vetorial de vetores paralelos continua sendo um vetor na mesma direção que os vetores somados, de acordo com a Eq.(C.2), a velocidade  $\vec{v}(t)$  é paralela a  $\vec{v}_0$  para todo tempo. Portanto trata-se de um movimento retilíneo. Como também a aceleração é constante o movimento se denomina Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Sem perda de generalidade podemos chamar de eixo “y” o eixo coordenado na direção de movimento, e as equações de movimento, Eqs.(C.1) e (C.2), nessa direção são:

$$y = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{F}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.5})$$

<sup>1127</sup> com  $y := y(t)$  e  $v_y := v_y(t)$  e as condições iniciais,  $y_0 := y(t_0)$  e  $v_{y0} := v_y(t_0)$ .



1128

1129

## Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker

1130 Uma vez baixada a versão do aplicativo Tracker para o sistema operacional de seu com-  
1131 putador, a partir do endereço eletrônico <https://physlets.org/tracker/>, instale-o seguindo  
1132 as orientações no próprio sítio da Internet. Com o aplicativo instalado, siga os sete passos  
1133 descritos a seguir para realizar a tomada de dados.

### **1134 Passo 1: Escolha de idioma português**

1135  
1136 Abra o aplicativo e no caminho Edit > Language > e escolha a opção português como  
1137 mostra a Figura D.1.

### **1138 Passo 2: Abertura do arquivo do vídeo a ser analisado**

1139  
1140 Para abrir o arquivo do tipo vídeo gravado com o celular faça um “click” na aba “Arquivo”  
1141 e logo na aba “Abrir”. Na janela que abrirá procure onde o arquivo do tipo vídeo está guar-  
1142 dado e faça “click” nele. O Tracker carrega vídeos de quase todos os formatos gravados  
1143 por celulares mas os arquivos não podem ser muito grandes (o arquivo carregado nas fi-  
1144 guras deste tutorial era de 1,3 MB). Se o arquivo não abre tente reduzir o tamanho dele  
1145 editando o vídeo no celular, cortando as partes em que a bolinha não se move, antes da  
1146 queda, ou quando já está no chão. Na Figura D.2 vemos um vídeo já aberto para análise.

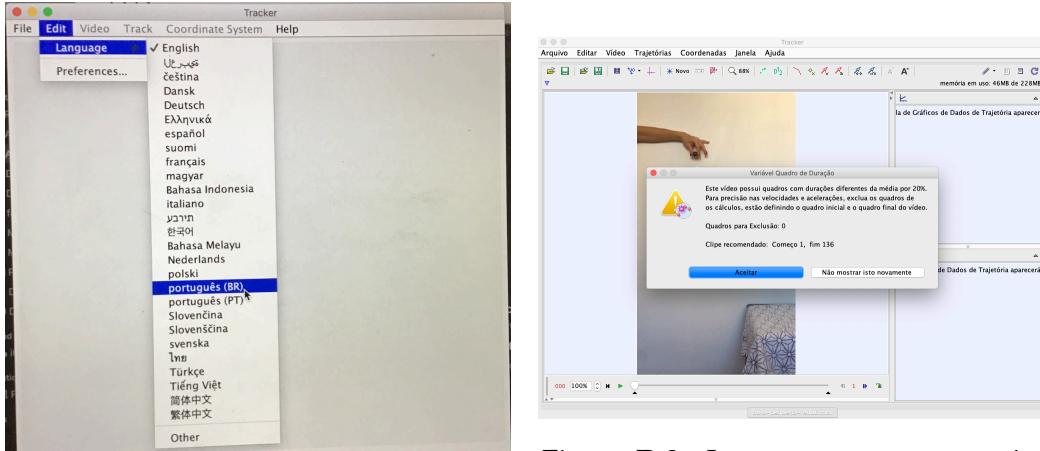


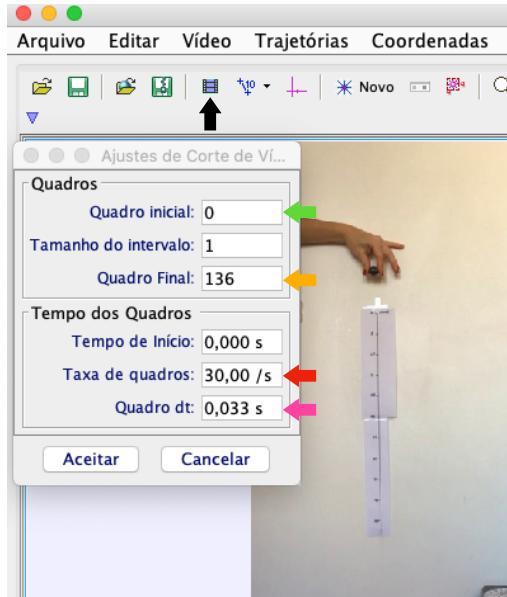
Figura D.1: Escolha de idioma no aplicativo Tracker.

Figura D.2: Ignore a mensagem na janela fazendo “click em “Aceitar”.

### Passo 3: Determinação dos quadros inicial e final da análise

1148 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.3 para abrir a janela de “Ajustes  
1149 de Corte de Vídeo”. Muitas vezes no lugar assinalado com uma seta vermelha na Figura  
1150 D.3 aparece um valor muito próximo de 30.00/s (trinta quadros por segundo), apague o  
1151 valor e coloque exatamente 30.00/s.  
1152

1153 As setas verdes e laranja da Figura D.3 mostram os lugares onde deveremos colocar os  
1154 valores numéricos corretos dos quadros iniciais e finais respectivamente. Para escolher o  
1155 quadro inicial correto movimente o ícone preto indicado pela seta verde na Figura D.4 até  
1156 ver a bolinha justa saindo da mão. Verá que o valor numérico do quadro inicial se coloca  
1157 automaticamente no lugar indicado pela seta verde na Figura D.3. Para escolher o quadro  
1158 final faça o mesmo com o ícone preto indicado pela seta laranja na Figura D.4. Escolha o  
1159 quadro final mais o menos como no instante mostrado na Figura D.4. Finalmente feche a  
1160 janela “Ajustes de Corte de Vídeo” fazendo “click em “Aceitar”.  
1161



1162

*Figura D.3:* Faça “click” no ícone indicado pela seta preta para abrir a janela de “Ajustes de Corte de Vídeo”.

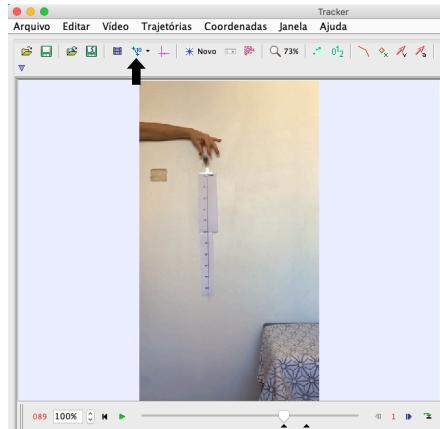


*Figura D.4:* Movimentando os ícones pretos indicados pelas setas verde e laranja es-  
colhemos os quadros iniciais e finais res-  
pectivamente.

#### 1163 Passo 4: Escolha da escala de comprimentos

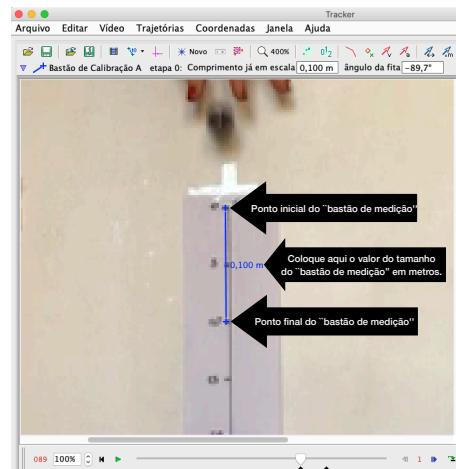
1164

1165 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.5 e escolha um novo “bastão  
1166 de medição”. De um “zoom” na imagem escolhendo o aumento apropriado no ícone  
1167 da lupa de maneira de ver claramente a região da régua na imagem do quadro inicial.  
1168 Mantendo apertada a tecla “shift” do computador selecione os pontos iniciais e finais so-  
1169 bre a régua como indicado na Figura D.6. Não esqueça de colocar na janela indicada  
1170 nessa figura o valor real do comprimento do “bastão de medição” escolhido em metros.



1171

*Figura D.5:* Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta você pode escolher um “bastão de medição” que definirá a escala.



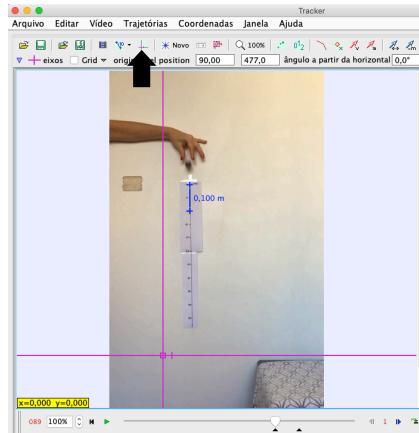
*Figura D.6:* Determinação do “bastão de medição” que estabelece a escala de comprimentos.

## 1172 Passo 5: Escolha do sistema de coordenadas

1173 Para escolher um sistema de eixos coordenados faça “click” no ícone indicado pela seta  
 1174 preta na Figura D.7. Dessa forma aparecerá o sistema de eixos cor de rosa da figura. Você  
 1175 pode deslocar a origem de coordenadas do sistema de eixos fazendo “click” com o botão  
 1176 esquerdo do mouse do computador e arrastando a origem para o local que você desejar.  
 1177 Também é possível inclinar o sistema de eixos se for necessário (nesta experiência não será  
 1178 necessário) fazendo “click” com o botão esquerdo do mouse do computador em qualquer  
 1179 eixo e arrastando esse eixo para obter a inclinação desejada.

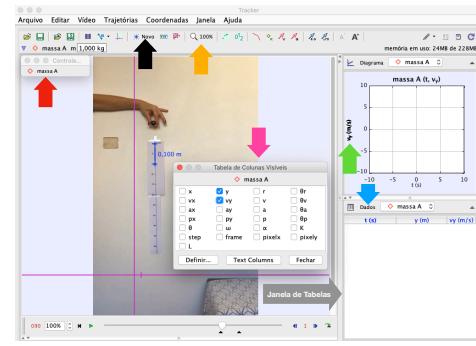
## 1181 Passo 6: Escolha da janela de controle da massa cuja trajetória será determinada

1182 Fazendo “click” no ícone marcado pela seta preta na Figura D.8 se abrirá a janela de  
 1183 controle da massa (indicada pela seta vermelha na Figura D.8, cuja trajetória será determinada  
 1184 (neste caso a bolinha da figura). Fazendo “click” na seta verde você poderá escolher qual  
 1185 gráfico quer visualizar uma vez escolhidos os pontos da trajetória cuja forma será ensi-  
 1186 nada no próximo passo deste tutorial. Também fazendo “click” na aba “Dados” assina-  
 1187 lada pela seta azul na Figura D.8 se abrirá a janela onde você poderá selecionar (seta rosa  
 1188 na figura) as colunas que apareceram na janela de tabelas (indicada também na figura).



1190

*Figura D.7:* Para criar um sistema de coordenadas (eixos de cor rosa na Figura) faça “click” no ícone indicado pela seta preta. Logo posicione a origem de coordenadas, como mostrado na figura, arrastando com o mouse do computador o quadrado rosa no sistema de eixos.



*Figura D.8:* Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta abre-se a janela indicada pela seta vermelha. Fazendo “click” no ícone indicado pela seta verde se escolhe o gráfico que quer ser visualizado após determinar os pontos da trajetória. Fazendo “click” na aba “Dados”, indicada pela seta azul, abre-se a janela indicada pela seta rosa onde podem ser escolhidas as colunas das tabelas de dados que apareceram na janela de tabelas. Se precisar fazer um zoom na imagem pode usar a aba indicada pela seta laranja.

## 1191 Passo 7: Determinação dos pontos da trajetória de uma partícula

1192

1193 Para determinar os pontos da trajetória em forma manual você precisará manter apertada  
 1194 a tecla “shift” do computador durante todo o processo de medida . Ao apertar a tecla  
 1195 “shift” você entra no modo aquisição de dados e verá que o cursor virá um quadrado  
 1196 com um “x” no meio. Ao fazer “click” no ponto que você quer traçar a trajetória (no  
 1197 nosso caso será o centro da bolinha) pela primeira vez se marca um ponto da trajetória e a  
 1198 imagem pula automaticamente para o próximo quadro e ali você pode marcar o centro da  
 1199 bolinha novamente. Repita esse processo até marcar todos os pontos da trajetória contidos  
 1200 nas imagens entre os quadros iniciais e finais determinadas no passo 3 deste tutorial. À  
 1201 medida que você vai marcando os pontos da trajetória as colunas nas tabelas de dados  
 1202 (ver Figura D.8) vão sendo preenchidas em forma automática. No processo de medida  
 1203 é importante se auxiliar da ferramenta zoom, indicada pela seta laranja na Figura D.8,  
 1204 para ter uma melhor imagem da bolinha e poder determinar com melhor precisão o seu  
 1205 centro. Uma vez escolhido um zoom (por exemplo 400%) para enquadrar a imagem da  
 1206 bolinha arraste a imagem com o mouse. Na Figura D.9 é mostrado o final do processo de  
 1207 medida. Fazendo “double click”, com o botão esquerdo do mouse, no cabeçalho de uma  
 1208 coluna, na janela de tabela, você seleciona a janela e os valores ficaram da cor rosa como  
 1209 estão os valores da coordenada “y” na Figura D.9. Uma vez selecionada a coluna, fazendo

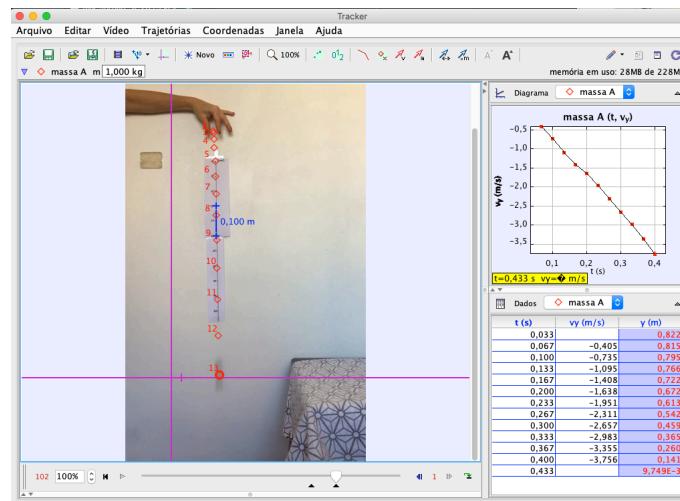


Figura D.9: Pontos da trajetória marcados e dados coletados nas colunas da janela de tabela.

1210 “click” com o botão direito do mouse você abrirá uma janela com varias opções. Na aba  
 1211 “Números” você poderá escolher o formato (sem com vírgula ou ponto para separar os  
 1212 decimais). Uma vez escolhido o formato você poderá copiar os dados selecionados para  
 1213 serem transferidos, por exemplo, para uma planilha tipo Excel.



1214

1215

## Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis

1216 VidAnalysis é um aplicativo para análise física de movimentos em vídeos muito fáceis  
1217 de usar. O aplicativo é compatível com Android e pode ser baixado gratuitamente em  
1218 <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.freey>, ou simplesmente  
1219 pesquise no Google Play com o nome VidAnalysis free. O aplicativo possui apenas uma  
1220 versão em inglês, mas devido à simplicidade de seu uso, ele não representa nenhum pro-  
1221 blema.

1222 Para realizar a coleta de dados das posições do objeto gravado no vídeo, siga as etapas  
1223 abaixo:

### **Passo 1: Abertura do vídeo a ser analisado**

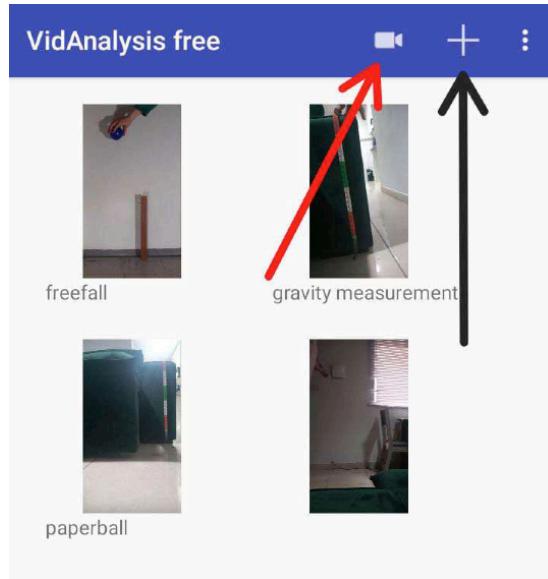
1225

1226 Primeiro, temos que gravar um vídeo ou importar um existente. Se você decidir importar  
1227 um vídeo, “click” no sinal de adição mostrado com uma seta preta na Figura E.1. Como  
1228 o aplicativo VidAnalysis suporta apenas formatos de vídeo com extensão “mp4” é reco-  
1229 mendável gravar diretamente dentro do aplicativo, escolhendo a opção marcada pela seta  
1230 vermelha na Figura E.1. Ao capturar vídeos para análise, é importante que a câmera esteja  
1231 fixa, que o movimento esteja dentro do plano da câmera, e que no vídeo gravado apareça  
1232 alguma referência de um comprimento conhecido, por exemplo de uma régua.

### **Passo 2: Calibração**

1234

1235 Para começar a análise do movimento do objeto primeiramente selecionamos o vídeo no  
1236 reprodutor e será aberta a primeira imagem dele como se mostra na Figura E.2. É im-  
1237 portante avançar o vídeo nessa tela, para começar a coleta de dados da trajetória do objeto  
1238 diretamente no momento em que o movimento começa, para isso fazemos “click” no botão  
1239 mostrado pela seta verde na Figura E.2 até avançarmos ao quadro do vídeo que interessa.  
1240 Fazendo “click” nos três pontos indicados pela seta azul na Figura E.2, conseguimos ocultar  
1241 o menu em preto, para uma melhor visualização do vídeo.



*Figura E.1:* Menu do aplicativo VidAnalysis.

1242 Antes da coleta de dados deve primeiro calibrar qual é a escala de comprimentos que será  
 1243 usada pelo aplicativo. Para isso, fazemos “click” na aba “start analysis” no canto superior  
 1244 direito na Figura E.2. Agora temos que marcar o comprimento conhecido. Ao fazer “click”  
 1245 no ponto inicial do comprimento conhecido, na tela esse ponto será marcado com uma  
 1246 cruz azul. Em seguida, deve fazer “click” novamente no ponto final do comprimento  
 1247 conhecido e outra cruz azul indicará esse ponto. Após finalizar essa segunda marcação  
 1248 abrirá imediatamente uma janela solicitando o tamanho conhecido, como mostramos na  
 1249 Figura E.3. A legenda em inglês na janela pergunta “Qual é o comprimento real disto em  
 1250 metros” (“How many meters is this in real” em inglês). É importante saber que a unidade  
 1251 a ser usada pelo aplicativo para comprimentos é sempre metros portanto as velocidades  
 1252 serão em metros por segundo por exemplo.

1253 Após dar “ok” na janela da escala aparecerá um sistema de eixos coordenados cuja origem  
 1254 devemos estabelecer (ver Figura E.4). Em geral, é uma boa ideia posicionar a origem de  
 1255 coordenadas de tal maneira que as coordenadas da posição do objeto sempre tenham o  
 1256 mesmo sinal ao longo da trajetória.

### 1257 **Passo 3: Coleta de dados**

1258

1259 A coleta de dados começa fazendo um “click” com o dedo no ponto do objeto que que-

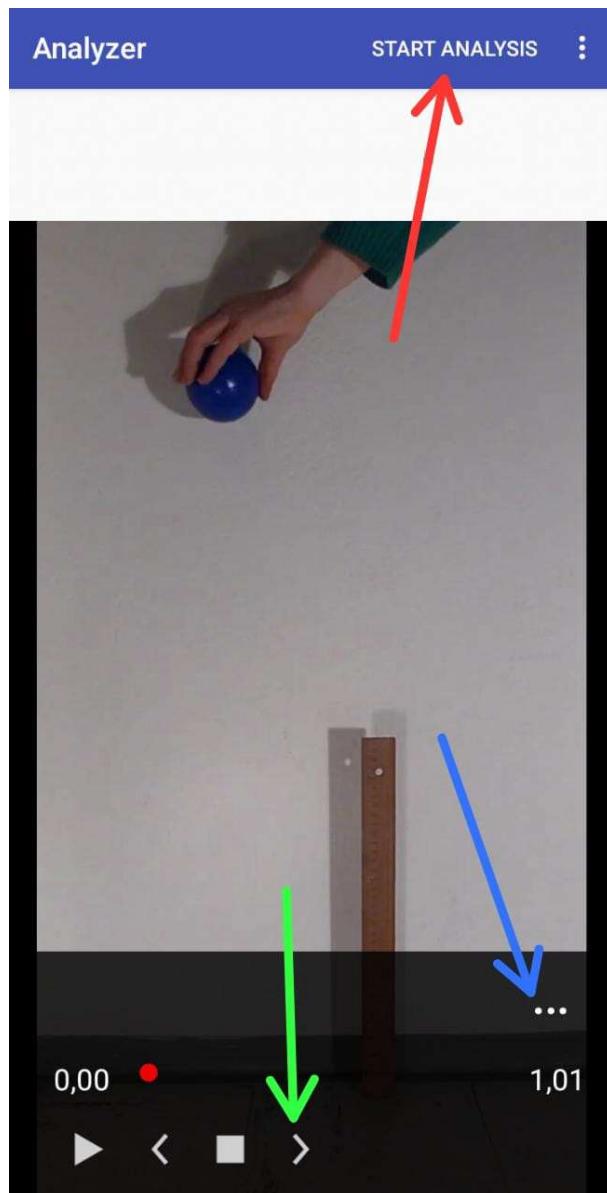


Figura E.2: Reprodutor de video do aplicativo VidAnalysis.

1260 remos seguir a trajetória, por exemplo no meio da bolinha azul na Figura E.4. Como as  
 1261 marcações são feitas com o dedo sugerimos que o corpo, cuja trajetória será determinada,  
 1262 seja suficientemente grande. Depois que o primeiro “click” for feito, uma cruz azul apa-  
 1263 recerá e o vídeo avançará alguns quadros. O intervalo de tempo transcorrido, medido em  
 1264 segundos, entre um “click” e outro é automaticamente determinado pelo programa. Vamos  
 1265 fazer “click” novamente tantas vezes como seja necessário para acompanhar a evolução  
 1266 da posição do objeto entre a posição inicial e final previamente estabelecidas. Leve em  
 1267 conta que para uma bolinha em queda vertical uma distância percorrida de um metro é o  
 1268 mínimo necessário para efetuar a análise, mas também não é necessário acompanhar todo  
 1269 o movimento do corpo até o chão.

1270 Como mostrado na Figura3.2, pode ser que ao longo da trajetória não vejamos o corpo em

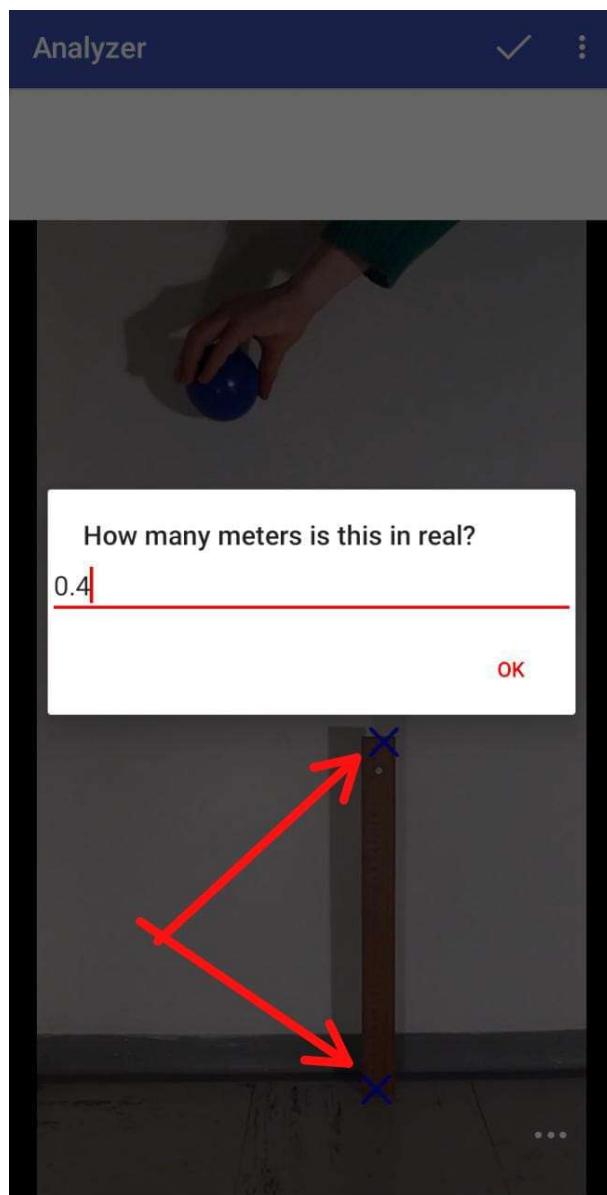


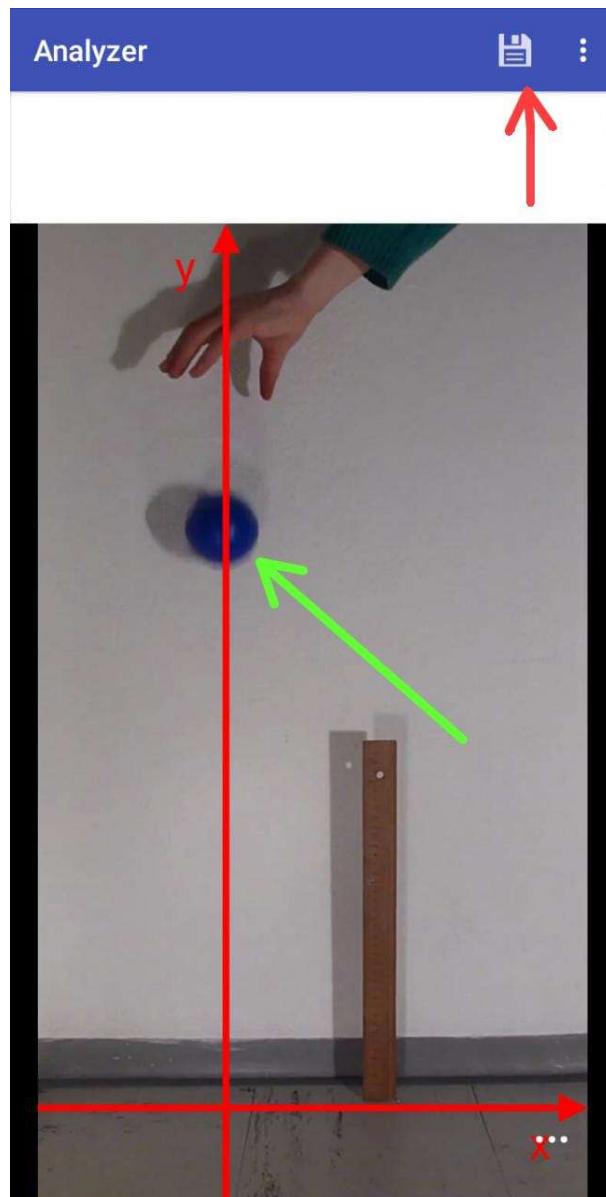
Figura E.3: Escolha da escala de comprimentos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis, a ser usado na tomada de dados dos pontos da trajetória do objeto.

1271 questão claramente definido em uma única posição, mas como uma imagem embaçada  
1272 devido à alta velocidade do mesmo. Então para determinar a posição do centro da bolinha  
1273 e a sua incerteza siga as orientações indicadas nessa figura e no texto ao lado dela.

1274 **Passo 4: Salvar dados**

1275

1276 Depois de determinados todos os pontos da trajetória do corpo, basta pressionar o botão  
1277 “Salvar”, conforme mostrado pela seta vermelha na Figura E.4. Após o “click” se abrirá  
1278 uma janela com a frase “Nome para a análise” (“Name for analysis” em inglês). Uma  
1279 vez escrito o nome do arquivo de dados dê “click em “ok” e imediatamente verá uma

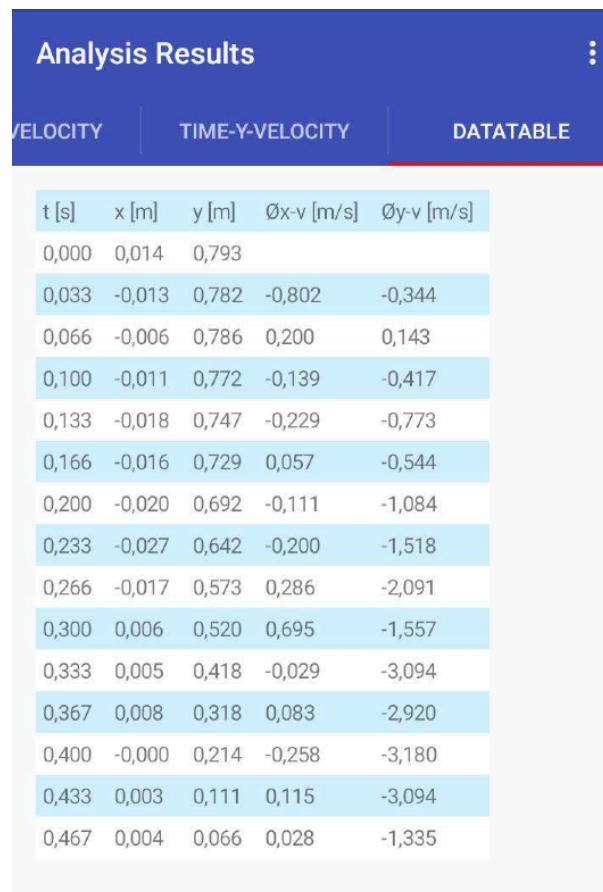


*Figura E.4:* Sistema de eixos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis.

1280 janela na qual você poderá navegar. Rolando a imagem, no final aparecerá uma tabela  
 1281 com várias colunas de dados como mostrada na Figura E.5. É possível também exportar  
 1282 essa tabela de dados para um arquivo que é uma planilha no formato “.cvs” (“comma  
 1283 separated values”), que poderá ser lida por um programa de computador do tipo Excel.  
 1284 Mas também você poderá simplesmente copiar os dados que precisará (por exemplo a  
 1285 posição “ $y$ ” como função do tempo “ $t$ ”) numa folha de papel para continuar a análise.

1286 Note que uma vez escolhido o nome do arquivo para a tabela de dados, esta tabela é au-  
 1287 tomaticamente guardada pelo aplicativo. Para cada vídeo guardado dentro do aplicativo  
 1288 é possível realizar diferentes análises de dados e guardar cada um deles, dentro do apli-  
 1289 cativo, com nomes diferentes. Assim, por exemplo, na Figura E.1 vemos vários vídeos guar-  
 1290 dados. Se algum desses vídeos já foi analisado, quando fizer “click nele aparecerá uma

1291 janela com várias opções de escolha. A primeira diz “Começar análises” (“Start analysis”  
 1292 em inglês), o que permitirá realizar uma nova tomada de dados. Embaixo aparecem as  
 1293 outras opções que são os nomes dos diferentes arquivos de dados já guardados. Fazendo  
 1294 “click” num deles é possível visualizar seu conteúdo novamente. Note que desta maneira  
 1295 é possível guardar a trajetória de mais de uma massa cujo movimento estiver gravado  
 1296 no vídeo. Assim, por exemplo, no caso em que a colisão de dois ou mais corpos estiver  
 1297 gravada no vídeo, é possível guardar os dados da trajetória de cada um deles.



The screenshot shows a software interface titled "Analysis Results". At the top, there are three tabs: "VELOCITY", "TIME-Y-VELOCITY", and "DATATABLE". The "DATATABLE" tab is currently selected, indicated by a red underline. Below the tabs is a table with the following data:

t [s]	x [m]	y [m]	$\bar{O}x\text{-}v$ [m/s]	$\bar{O}y\text{-}v$ [m/s]
0,000	0,014	0,793		
0,033	-0,013	0,782	-0,802	-0,344
0,066	-0,006	0,786	0,200	0,143
0,100	-0,011	0,772	-0,139	-0,417
0,133	-0,018	0,747	-0,229	-0,773
0,166	-0,016	0,729	0,057	-0,544
0,200	-0,020	0,692	-0,111	-1,084
0,233	-0,027	0,642	-0,200	-1,518
0,266	-0,017	0,573	0,286	-2,091
0,300	0,006	0,520	0,695	-1,557
0,333	0,005	0,418	-0,029	-3,094
0,367	0,008	0,318	0,083	-2,920
0,400	-0,000	0,214	-0,258	-3,180
0,433	0,003	0,111	0,115	-3,094
0,467	0,004	0,066	0,028	-1,335

Figura E.5: Tabela de dados gerada dentro do aplicativo VidAnalysis.



1298

1299

## Apêndice: $(E_f - E_i)/E_i$ a partir de traços e um ângulo

Usando as equações para conservação de momento linear e balanço de energia, a variação percentual de energia cinética na colisão com massas iguais pode ser obtida a partir dos comprimentos e ângulos representados na Figura ???. Chamando a velocidade da moeda A logo antes da colisão de  $v_0$ , e as velocidades das moedas A e B logo depois da colisão de  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente, temos

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos(\theta) + m_2 v_2 \cos(\phi), \quad (\text{F.1})$$

$$0 = m_1 v_1 \sin(\theta) - m_2 v_2 \sin(\phi), \quad (\text{F.2})$$

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2. \quad (\text{F.3})$$

Somando os quadrados das equações para conservação de momento linear em  $x$  e em  $y$

$$m_1^2 v_0^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi). \quad (\text{F.4})$$

Logo,

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_2 \left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right) v_2^2 - m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi), \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 - \frac{E_f}{E_i - E_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{v_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}}}{\left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}} - 2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.6})$$

Se as moedas são iguais, as massas são iguais e também as forças de atrito entre cada moeda e a superfície. Neste caso, usando o teorema trabalho-energia cinética (aqui,  $mv^2/2 =$

$F_{at}L$ ):

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}}{2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.7})$$

1300 A Equação F.7 mostra que, para moedas iguais, a variação percentual de energia cinética  
 1301 na colisão pode ser obtida medindo apenas comprimentos e um ângulo entre trajetórias  
 1302 das duas, sem nem mesmo uma calibração para os comprimentos dos traços. Os dois  
 1303 parâmetros relevantes são (i) a razão entre os comprimentos dos traços depois da  
 1304 colisão,  $L_A/L_B$ , e (ii) a soma dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .