



Física Experimental I

PLE 2020.1

Conteúdo

4
5

6 I Experimentos – Roteiros	9
7 1 Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos	11
8 1.1 Introdução	11
9 1.2 Procedimento Experimental	12
10 1.3 Análise de Dados e Discussão dos Resultados	12
11 1.4 Opcional	14
13 2 Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza	15
14 2.1 Introdução	15
15 2.2 Procedimento experimental	16
16 2.3 Análise de dados	18
17 2.4 Discussão dos Resultados	18
18 3 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda	19
19 3.1 Introdução	19
20 3.2 Procedimento Experimental	19
21 3.3 Análise de dados	20

22	3.4 Discussão dos resultados	22
23	3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia	22
24	4 Sistema de partículas – Colisões	23
25	4.1 Introdução	23
26	4.2 Colisão unidimensional sem atrito	24
27	4.3 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados	24
28	4.4 Análise de dados e discussão dos resultados	25
29	5 Colisões (Opcional)	27
30	5.1 Introdução	27
31	5.2 Procedimento experimental	28
32	5.2.1 Realização das medidas	28
33	5.2.2 Análise das imagens	28
34	5.3 Exemplo de resultados e análise	29
35	5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas	29
36	5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo	31
37	II Conceitos Básicos para Análise de Dados	33
38	1 Medidas e incertezas	35
39	2 Medidas Diretas e Indiretas	39
40	3 Algarismos Significativos	43
41	3.1 Incertezas e algarismos significativos	44
42	3.2 Regra de bolso sobre algarismos significativos	46
43	4 Representações gráficas	49
44	5 Ajuste linear	55

45	6 Determinação da velocidade instantânea	59
46	7 Distribuição Gaussiana	61
47	III Exercícios	67
48	1 Algarismos significativos	69
49	2 Propagação incerteza	71
50	IV Apêndices	73
51	A Caderno de laboratório	75
52	B Como escrever um relatório?	77
53	C Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)	79
54	D Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker	81
55	E Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis	87
56	F Apêndice: $(E_f - E_i)/E_i$ a partir de traços e um ângulo	93

57

58

Introdução

59 A Apostila do curso de Física Experimental apresenta os conceitos básicos relacionados com as análises de dados dos experimentos, bem como os métodos e instrumentos
60 utilizados.

62 Experimentos

63 Ao longo do semestre realizaremos os seguintes experimentos, em modo remoto:

64 **EXP 1** – Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos
65 dados

66 **EXP 2** – Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

67 **EXP 3** – Movimento de um corpo em queda livre – Aceleração da gravidade

68 **EXP 4** – Sistema de partículas – Colisões

69 Bibliografia

70 O material completo da disciplina compreende a [Apostila de Conceitos Básicos de Física](#)
71 [Experimental I](#), o [Guia do Estudante](#) e os textos complementares, todos disponíveis no site
72 <https://fisexp1.if.ufrj.br>.

73 Além disso, indicamos os seguintes livros para um estudo mais sólido dos conceitos básicos
74 de análise de dados e da física dos fenômenos observados: Fundamentos da Teoria de Er-
75 ros de José Henrique Vuolo [1], Curso de Física Básica - Mecânica de H. Moysés Nussenz-
76 veig [2] e Física I, Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman [3].

PARTE I

EXPERIMENTOS – ROTEIROS

1

78
79

Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

80 1.1 Introdução

81 Neste experimento determinaremos o tempo de queda de uma moeda, solta do repouso
82 de uma altura de 1,5 m repetidas vezes. Cada grupo deve apresentar um conjunto de
83 medidas independentes, contendo 120 medições. A partir destas medições vamos estudar
84 os conceitos de flutuações aleatórias, tratamento estatístico dos dados e estudo de efeitos
85 sistemáticos.

86 Planeje seu experimento e comece a fazer as anotações no seu caderno de laboratório. Para
87 todos os experimentos que faremos nesse curso, cada aluno deve elaborar um pequeno
88 texto no caderno para os seguintes tópicos:

- 89 1. Introdução
- 90 2. Procedimento Experimental
- 91 3. Análise de Dados
- 92 4. Discussão dos Resultados

93 Eventualmente, estes tópicos poderiam ser organizados em um relatório (veja o Apêndice B
94 da Apostolia). Ainda não exigiremos a elaboração de um relatório completo para esse expe-
95 rimento, mas, para cada um destes itens, preparamos algumas perguntas para você pensar,
96 discutir com os colegas e com seu professor. A partir desta discussão, faça suas anotações.

- 97 1. Qual o objetivo e a motivação desse experimento?
- 98 2. De acordo com as leis da Física que você conhece, qual deveria ser o tempo de queda
99 da moeda?

Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

100 1.2 Procedimento Experimental

- 101 1. Você pode medir o tempo diretamente ? Que instrumento vai utilizar ? Qual a **re-**
102 **solução** desse instrumento?
- 103 2. Qual a melhor forma de montar o seu experimento, a fim de tentar garantir que a
104 altura de queda esteja sempre no intervalo $(1,50 \pm 0,02)$ m e que a moeda caia sempre
105 do repouso?
- 106 3. Registre seus dados na forma de uma tabela, em ordem cronológica, como mostrado
107 nas duas primeiras colunas da Tabela 1. Você pode também construir a tabela di-
108 retamente em um programa de planilha no computador (por exemplo Excel, Open
109 Office, Google Sheets), e posteriormente imprimir (ou fazer uma captura de tela) para
110 anexar ao relatório e ao caderno de laboratório.

111 **Tabela 1:** Medições realizadas

i	t_i	$\delta_i = t_i - \bar{t}$	$\delta_i^2 = (t_i - \bar{t})^2$
1			
2			
3			
...			
120			

113 1.3 Análise de Dados e Discussão dos Resultados

114 Você certamente encontrará mais de um valor como resultado da medida direta do tempo
115 de queda. Com base nesses valores, como pode apresentar o resultado dessa medição?
116 Conforme explicado no Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apos-
117 tila), a melhor forma de apresentar essa medida experimental é realizando uma análise
118 estatística dos dados obtidos. Para entender melhor o significado dessa análise, propomos
119 as seguintes atividades:

120 Parte I: Análise estatística dos dados

- 121 1. Considere o conjunto de 120 medidas. Para 6 conjuntos independentes de 10 medições
122 consecutivas, calculem o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio

(consulte o Capítulo 2 da Apostila). Utilize as últimas colunas da Tabela 1.2 para auxiliar nos cálculos.

- 123
124
125
126
127
128
- Resuma os resultados obtidos para os 6 subconjuntos dos dados colocando-os na Tabela 2 e observe como variam o valor médio e o desvio padrão. O que pode dizer sobre os valores encontrados? Para este experimento, 10 medidas é uma quantidade suficiente para se determinar o tempo de queda ? Justifique suas respostas.

129
130

Tabela 2: Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos de 10 medições independentes.

Medições	N	Valor Médio ()	Desvio Padrão ()	Incerteza ()
Grupo 1	10			
Grupo 2	10			
Grupo 3	10			
Grupo 4	10			
Grupo 5	10			
Grupo 6	10			

- 131
132
133
134
135
136
- Calcule o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio para: (a) as 20 últimas medidas, (b) as 60 primeiras medidas e (c) para o conjunto completo de 120 medidas. Coloque estes valores na Tabela 3 e discuta como variam estas três grandezas com respeito ao número de medidas. Analise se as 120 medidas foram suficientes para determinar o tempo de queda.

137
138

Tabela 3: Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos com diferentes números de medições.

N	Valor Médio ()	Desvio Padrão ()	Incerteza ()
20			
60			
120			

- 139
140
141
142
143
144
145
- Analise como se compara o valor médio encontrado com o valor de referência, igual a $t_q = (0,554 \pm 0,004)$ s. Caso existam efeitos sistemáticos, discuta sobre eles e como poderia evitá-los refazendo as medições (ver Capítulo 2 da Apostila).
 - Por convenção, utilizamos como definição para a incerteza de cada medida realizada, o valor de σ . Discuta o resultado da comparação entre o valor de σ encontrado para o conjunto de 120 medições com a precisão do cronômetro utilizado.

Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

- 146 6. Calcule para o conjunto de 120 medições a fração de medidas contidas nos intervalos
147 $[\bar{t} - 1\sigma, \bar{t} + 1\sigma]$, $[\bar{t} - 2\sigma, \bar{t} + 2\sigma]$, $[\bar{t} - 3\sigma, \bar{t} + 3\sigma]$. Em um procedimento sujeito somente
148 a flutuações aleatórias, as frações esperadas para estes intervalos são aproximada-
149 mente 68,3%, 95,4% e 99,7%. Note então que a convenção mais adotada, de utili-
150 zar como incerteza o valor do desvio padrão, corresponde a adotar um intervalo de
151 incerteza que conteria aproximadamente 68% dos valores obtidos, caso o processo
152 de medida fosse repetido muitas vezes. Quando não conhecemos bem nosso pro-
153cesso de medida, a realização de uma análise estatística permite também a melhor
154 determinação da incerteza das medidas individuais.¹

155 Parte II: Representação gráfica dos conjuntos de medidas

- 156 7. Com base no Capítulo 4 da Apostila, construa um histograma de frequência relativa
157 para os dados em uma folha de papel milimetrado. Lembre que o número adequado
158 de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições. Neste caso
159 particular, o número aconselhável de barras fica entre 6 e 10.
- 160 8. Marque no gráfico, as posições dos valores médios encontrados. As medições se
161 distribuem simetricamente ao redor do seu valor médio? O que isso significa e qual
162 o tipo de incerteza está sendo observada?
- 163 9. Desenhe sobre o histograma dois segmentos de reta verticais representando o inter-
164 valo $[\bar{t} - \sigma, \bar{t} + \sigma]$. Observe a concentração dos dados nesse intervalo.
- 165 10. Analise no histograma o valor médio e desvio padrão. O que é possível concluir so-
166 bre os processos de medida empregados? Discuta em termos de desvios sistemáticos
167 e flutuações aleatórias.

168 1.4 Opcional

169 Realize novamente as suas medidas tendo em conta os cuidados discutidos para eliminar
170 suas incertezas sistemáticas. Para este conjunto de 120 medições, calcule o valor médio, o
171 desvio padrão e a incerteza do valor médio e compare com o valor de referência. Conse-
172 guiu eliminar as incertezas sistemáticas? Discuta.

¹Essas frações decorrem de um modelo matemático que descreve o comportamento de medidas somente sujeitas a flutuações aleatórias. Esse modelo será discutido na Física Experimental II, mas quem quiser se aprofundar pode olhar a Seção 7 de Conceitos Básicos da Apostila.

2

173

174

Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

175

2.1 Introdução

176 Neste experimento determinaremos o volume de uma ou mais moedas. Planeje o expe-
177 rimento antes de começar a realizar as medidas. Pense em quais métodos poderiam ser
178 utilizados para se medir um volume, em quais medidas deveriam ser realizadas para es-
179 ses métodos e quais instrumentos seriam mais adequados para tal finalidade.

180 O volume pode ser determinado a partir das dimensões da moeda. Qual é a expressão
181 matemática do volume a partir dessas dimensões?

182 Se você conhecesse a massa e a densidade volumétrica de massa do material utilizado na
183 fabricação da moeda, como você poderia determinar o seu volume?

184 Se você tivesse um recipiente com água, como poderia determinar o volume de uma mo-
185 eda imersa nesse líquido?

186 Avançando para a análise dos dados, como estimar as incertezas das medidas diretas?
187 Como são calculadas as incertezas das medidas indiretas? Leia as duas primeiras seções
188 do Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados). Medindo a partir desses dife-
189 rentes métodos, o que se espera da comparação dos seus resultados? Os valores deveriam
190 ser compatíveis, considerando suas respectivas incertezas, independentemente do método
191 utilizado?

192 Planejem seu experimento e comecem a fazer as anotações nos seus cadernos de labo-
193 ratório. Para todos os experimentos que faremos nesse curso, cada um de vocês deve
194 elaborar um pequeno texto no caderno para os seguintes tópicos:

195

1. Introdução

196

2. Procedimento Experimental

197 **3. Análise de Dados**198 **4. Discussão dos Resultados**

199 Separe os materiais necessários para o Experimento 2 (detalhes na Figura 2.1):

200 1. Moedas (sugerimos as de R\$ 0,50);

201 2. Régua;

202 203 3. Copo (que seja o mais próximo possível da forma de um cilindro). Note que você
pode simplificar e melhorar a medição do volume deslocado, utilizando uma seringa
descartável, que já vem com uma escala volumétrica impressa.

204 Material necessário para o experimento:



(a) Moedas de 50 centavos (*)



(b) Régua preferencialmente transparente



(c) Copo (o mais cilíndrico possível)

(*) Atenção para o ano da sua moeda!

Figura 2.1: Material para o Experimento 2

205 **2.2 Procedimento experimental**

206 Antes de qualquer medida, se posicione de forma semelhante à sugerida na Figura 2.2.

207 **1. A partir do volume de água deslocado**208 209 Usando um copo cilíndrico parcialmente cheio d'água, introduza a(s) moeda(s) e es-
210 time o seu volume a partir do deslocamento do nível da coluna de água. No caso
211 do copo, utilize uma régua para fazer essa medida a partir do registro dos níveis ini-
212 cial e final. Já com uma seringa descartável (Figura 2.3), o volume deslocado pode



Figura 2.2: Posicionamento do observador

ser medido diretamente na seringa ao sugar a água, até que retorne ao mesmo nível da situação sem moeda(s), e lendo este volume na escala da própria seringa. Dependendo do diâmetro do copo usado, avalie se o experimento deveria ser realizado com uma ou mais moedas de mesmo valor.

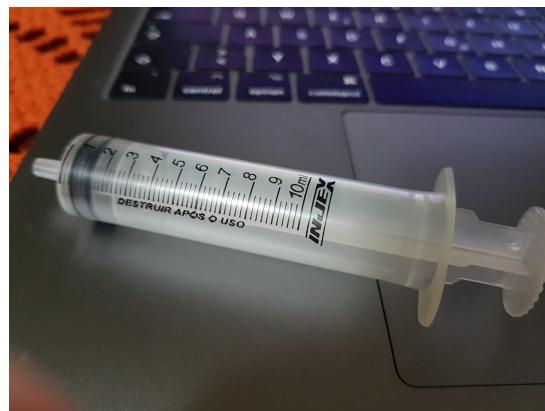


Figura 2.3: Seringa

2. A partir da área da base da moeda e de sua espessura

Meça a espessura da moeda. A área da base da moeda pode ser determinada a partir da medição direta de seu diâmetro com uma régua ou a partir da medição de sua circunferência com o uso de um barbante e da régua. Avalie qual procedimento é mais adequado. A régua é o instrumento adequado para a determinação do diâmetro da moeda? Nesse caso, também avalie se o experimento deveria ser realizado com uma ou mais moedas do mesmo valor.

3. A partir da densidade volumétrica

225 As moedas são fabricadas de forma padronizada com relação às suas dimensões,
226 massa e material. Busque essas informações na Internet (página da Casa da Moeda).
227 Fique atento que essas informações podem variar de acordo com o ano de fabricação
228 da moeda. A informação sobre o ano de fabricação consta na “cara” da mesma.

229 **2.3 Análise de dados**

- 230 1. A partir dos valores da espessura e do diâmetro ou circunferência da moeda, medi-
231 dos por você, calcule o volume da moeda utilizando uma das fórmulas $V = \pi d^2 h / 4$
232 (d = diâmetro e h = espessura) ou $V = C^2 h / (4\pi)$ (C = circunferência).
- 233 2. Sabendo que a densidade volumétrica do aço inoxidável, dependendo da liga que o
234 compõe, varia entre 7,8 e 8,0 g/cm³, e utilizando o valor de massa padrão para a
235 moeda utilizada, determine o seu volume e incerteza.
- 236 3. Organize em uma tabela os resultados obtidos para a determinação do volume da
237 moeda com as respectivas incertezas para os três métodos realizados. Faça uma
238 comparação entre os resultados obtidos. Leia a segunda seção do Capítulo 2 (Con-
239 ceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila).

240 **2.4 Discussão dos Resultados**

- 241 1. Qual foi a medição mais precisa? Justifique.
- 242 2. Considerando como referência o cálculo do volume da moeda a partir dos valores de
243 suas dimensões encontrados na Internet, não os medidos por você, qual foi a medição
244 mais exata? Justifique.
- 245 3. Justifique a vantagem de usar mais de uma moeda para o procedimento “A partir do
246 volume de água deslocado”.
- 247 4. Os resultados encontrados são compatíveis entre si? Justifique. Esse resultado era
248 esperado?
- 249 5. Quais parâmetros contribuem mais fortemente para a incerteza do volume em cada
250 um dos três métodos? Como essas incertezas poderiam ser diminuídas? Você sugere
251 alguma modificação do procedimento experimental adotado?

252
253

Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

254

3.1 Introdução

255 Neste experimento determinaremos a aceleração de um corpo em queda vertical e vamos
256 comparar o resultado obtido com o valor de referência da aceleração da gravidade (g) para
257 a cidade de Rio de Janeiro.

258 Vamos analisar o movimento de queda vertical de um corpo cuja forma e tamanho apre-
259 sente uma força de resistência do ar desprezível (por exemplo uma bolinha de gude)¹. Que
260 tipo de movimento apresentaria o corpo se a força de resistência do ar fosse desprezível?²

261 Pense sobre o planejamento desse experimento. A aceleração do corpo pode ser obtida
262 diretamente? Quais grandezas devem ser medidas para que seja possível obtê-la? Quais
263 instrumentos são mais adequados para que esses dados possam ser coletados?

264 O experimento será discutido e guiado pelo roteiro abaixo. Siga o roteiro e as orientações
265 do professor nos encontros remotos e vá fazendo suas anotações no caderno de laboratório.

266

3.2 Procedimento Experimental

267 O arranjo experimental experimental está mostrado na Figura 3.1. Escolha uma bola de
268 gude ou qualquer corpo arredondado de dimensões da ordem de grandeza da bolinha
269 mostrada na Figura 3.1. Você deverá filmar a queda da bolinha com um celular, desde uma
270 altura de, mais o menos, um metro. Para isso peça ajuda a uma pessoa que vai segurar a
271 bolinha enquanto você filma. Cole na parede uma régua de papel como está indicado na
272 Figura 3.1³. Para a filmagem, posicione o celular num apoio com a tela do celular paralela

¹Lembre que a queda vertical de um corpo quando a única força atuante sobre ele é a força da gravidade chama-se queda livre.

²Lembre que o movimento da partícula é determinado através da Segunda Lei de Newton.

³A régua não precisa ter a extensão de toda a trajetória a ser filmada, é somente uma referência de escala.

20 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

273 à parede onde está colada a régua de papel. O celular deverá estar posicionado mais o
274 menos no meio da trajetória da bolinha a uma distância da parede suficiente para poder
275 filmar toda a queda de mais ou menos um metro. Não use “slow-motion” (câmera lenta),
276 filme com a velocidade normal do seu celular. A imensa maioria dos celulares filma a uma
277 taxa de 30 frames/s⁴. Verifique no seu celular se essa é a taxa usada.

278 Para analisar o filme da queda será usado o aplicativo Tracker para uso num computador
279 que poderá ser baixado gratuitamente no link: <https://physlets.org/tracker/>⁵. O filme
280 também poderá ser analisado com o aplicativo VidAnalysis disponível gratuitamente para
281 celulares com sistema operacional Android no link do [Google Play](#). Os tutoriais de uso
282 destes aplicativos estão disponíveis na forma de vídeos no site da [Física Experimental 1](#).
283 No final do roteiro, encontram-se o Apêndice D um tutorial básico do aplicativo Tracker, e
284 um tutorial básico do aplicativo VidAnalysis no Apêndice E.

285 3.3 Análise de dados

286 Usando o aplicativo Tracker ou alternativamente o aplicativo VidAnalysis, monte a Tabela
3.1. As colunas do tempo t e da posição y são preenchidas usando os aplicativos Tracker

t (s)	y (cm)	δy (cm)	v_y (cm/s)	δv_y (cm/s)

287 *Tabela 3.1: Tabela de dados da experiência.*

288 ou VidAnalysis. As coordenadas y correspondem às posições, por exemplo, do centro da
289 bolinha ao longo da trajetória de queda, após ter escolhido o sistema de referência. Note
290 que ao longo da trajetória a imagem da bolinha pode ficar um pouco embaçada como na
291 Figura 3.2. Nesse caso, foi marcado com um “x” em azul o centro da bolinha enquanto que
292 a barra vermelha é uma escolha razoável da região de incerteza da posição do centro da
293 bolinha. A incerteza é uma fração do comprimento da mancha e depende da posição da
294 bolinha.

295 Para preencher a coluna da velocidade v_y leia o Capítulo 6 da Apostila. Como são calcula-
296 das as incertezas δv_y ?

- 297 • Em um papel milimetrado desenhe o gráfico $v_y \times t$ a partir dos dados da tabela in-
298 dicando a incerteza nos valores das velocidades. Qual é a forma esperada para este
299 gráfico?

⁴A palavra em inglês “frame” significa quadro.

⁵O aplicativo é disponibilizado para os sistemas operacionais Windows, Linux e Mac OSX.

300

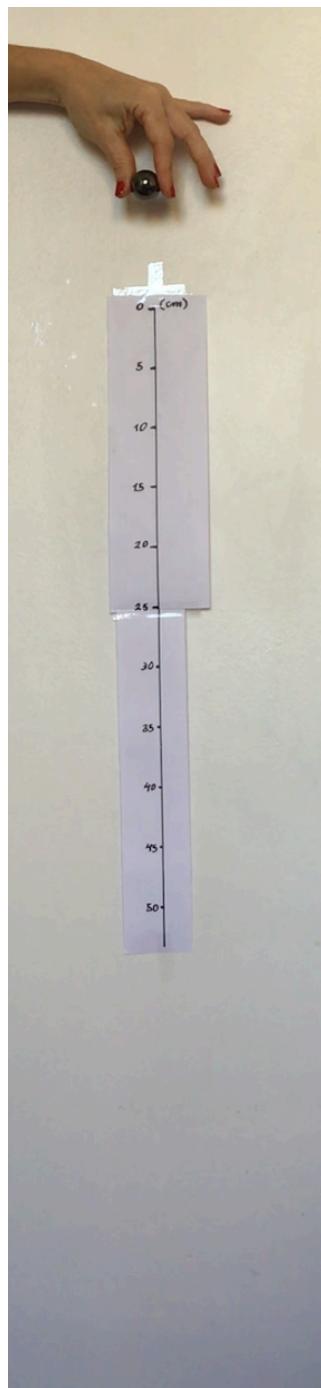


Figura 3.1: Dispositivo experimental. Não esqueça de colar na parede uma régua de papel, como a indicada na Figura, para ser usada como referência na análise de dados.

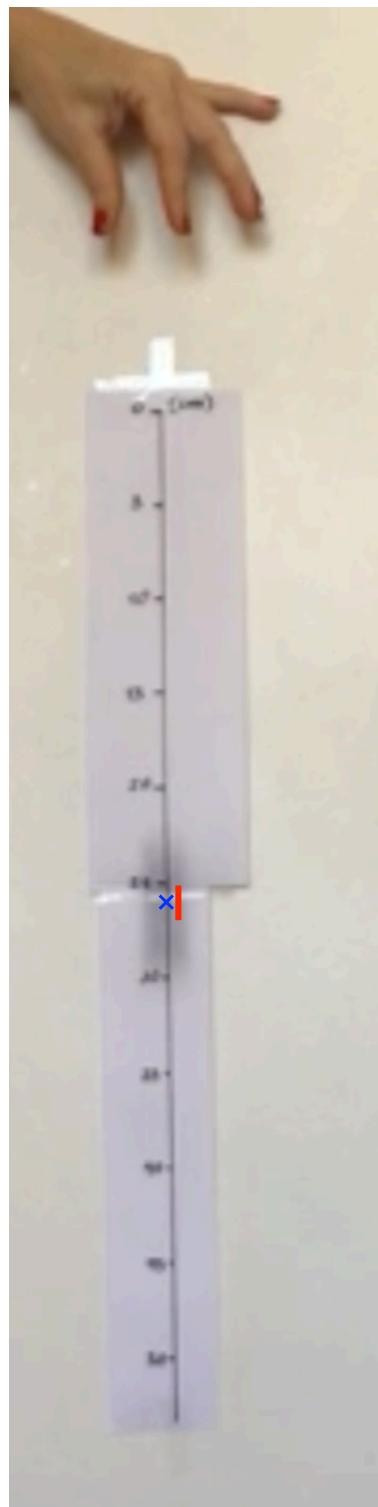


Figura 3.2: Imagem da bolinha em plena queda. Note-se que a imagem, devido à alta velocidade, fica um pouco embaçada.

22 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

- Use as colunas t , v_y e δv_y para calcular através do Método dos Mínimos Quadrados (Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila), qual é a melhor reta que aproxima os dados experimentais do gráfico $v_y \times t$?
- Com os parâmetros da reta obtida no item anterior, desenhe-a na mesma folha de papel milimetrado onde fez o gráfico $v_y \times t$. Se você não conseguir achar um aplicativo que implemente o ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados, desenhe a melhor reta que aproxima os dados experimentais pelo método visual (ver Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila) e obtenha os parâmetros que definem a reta (coeficiente angular a e coeficiente linear b) escolhendo dois pontos na reta e substituindo na equação da reta $y = a t + b$.

3.4 Discussão dos resultados

1. A partir dos parâmetros do ajuste linear aos dados experimentais v_y vs. t , como se obtém o valor da aceleração de queda da bolinha?
2. Compare o valor da aceleração de queda da bolinha com o valor da aceleração da gravidade para a cidade do Rio de Janeiro que é $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$. Qual valor é mais preciso? Você utilizaria este método para determinar o valor da gravidade? Justifique.

3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia

1. Utilizando os dados registrados para a posição y como função do tempo t , determine a altura h da bolinha para cada instante de tempo, a partir do ponto mais baixo na Tabela 3.1.
2. Determine a energia cinética (K), energia potencial (U) e a energia mecânica (E) para cada intervalo de tempo. Para facilitar a organização das informações, construa uma tabela.
3. Faça um gráfico que contenha a energia cinética, potencial e mecânica em função do tempo.
4. Discuta a partir do gráfico obtido, se há ou não conservação da energia mecânica. Justificar.
5. No caso da energia não se conservar, determine o ganho ou perda percentual.

Observações:

- Para os cálculos de energia considere a aceleração da gravidade no Rio de Janeiro, com sendo $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$.

4

333
334

Sistema de partículas – Colisões

335 4.1 Introdução

336 Neste experimento estudaremos colisões entre dois corpos. Em particular, procuraremos
337 verificar experimentalmente se a conservação de momento linear total do sistema está
338 presente. Também iremos analisar uma possível conservação de energia mecânica to-
339 tal, explorando a diferença entre colisões elásticas e inelásticas. Na tomada de dados o
340 movimento é gravado em um filme. A variação das posições dos corpos é analisada pos-
341 teriormente. Programas de computador como aquele já utilizado no experimento anterior,
342 o Tracker (Apêndice D), são bastante úteis nessa análise. A análise do movimento com apli-
343 cativos no próprio celular é também possível.

344 A realização deste experimento em um curso remoto merece alguns comentários, dadas
345 suas peculiaridades em relação à presença de atrito. Na versão presencial da disciplina de
346 Física Experimental 1 da UFRJ, os alunos trabalham em sala com uma montagem usada
347 para minimizar o atrito de dois carrinhos com a base: o trilho de ar. Em nosso curso re-
348 moto, os alunos não têm à disposição em casa uma ferramenta eficiente como o trilho de
349 ar para minimizar o atrito. Assim, dividimos o experimento em duas partes. Na primeira
350 parte o estudante faz a análise de dados experimentais nos moldes do curso presencial,
351 porém utilizando dados obtidos previamente no Laboratório de Física Experimental 1. Na
352 segunda parte (de realização opcional) o estudante faz a tomada de dados em casa, fa-
353 zendo colidir objetos aos quais ele tem acesso fácil, como moedas. Este é um desafio final
354 na disciplina: estudar colisões fora das condições controladas no laboratório didático, pla-
355 nejar e realizar sua montagem experimental, e analisar um sistema físico no qual as forças
356 de atrito provavelmente serão observáveis. Para essa segunda parte, apontamos ainda
357 uma versão simplificada do experimento que, fazendo suposições sobre o atrito, permite
358 fazer um teste da conservação de momento linear em uma colisão, mesmo sem o uso de
359 celular ou computador [4].¹ Outros exemplos de experimentos envolvendo colisões que
360 os alunos podem fazer em casa estão na página da disciplina [Física Experimental 1](#), no
361 site do IF .

¹*Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, Lorenzo Galante e Ivan Gnesi, American Journal of Physics **88**, 279 (2020).

362 4.2 Colisão unidimensional sem atrito

363 Neste experimento estudaremos as colisões e seu caráter elástico ou inelástico. Analisare-
364 mos as conservações de momento linear e energia mecânica de um sistema unidimensional
365 de dois carrinhos que colidem entre si em um trilho de ar com atrito desprezível. Será utili-
366 zada uma gravação de um filme. Iremos analisá-la com o programa Tracker (Apêndice D)
367 para computador ou VidAnalysis (Apêndice E) para celular para levantamento de dados.
368 O aluno também poderá usar outros programas ou aplicativos que permitam atingir os
369 mesmos objetivos.

370 Pense sobre o planejamento desse experimento. Quais grandezas devem ser medidas
371 diretamente para que seja possível avaliar as conservações de momento linear e energia
372 mecânica?

373 Siga o roteiro e as orientações do professor para fazer o experimento. Faça todas as anotações
374 que julgar serem necessárias, elas serão importantes quando você for analisar os dados. Ao
375 preparar o relatório, tome como base as orientações do Apêndice B da Apostila do curso
376 e as anotações realizadas durante o experimento. As discussões contidas no roteiro abaixo
377 serão importantes para a elaboração do seu relatório.

378 Reflita sobre as seguintes questões e sugestões:

- 379 1. Qual é o objetivo desse experimento?
- 380 2. O que é um processo de colisão?
- 381 3. O filme mostra o movimento de dois carrinhos que deslizam sobre um trilho hori-
382 zontal; há uma camada de ar entre o trilho e a base dos carrinhos, a fim de minimizar
383 o atrito. Que tipo de movimento sobre o trilho é esperado para cada carrinho antes e
384 após a colisão? Pense nas forças que atuam sobre cada um deles.
- 385 4. Considere a situação onde dois carrinhos colidem entre si ao se movimentarem sobre
386 um trilho de ar horizontal com atrito desprezível; espera-se que tanto o momento
387 linear como a energia mecânica se conservem nas colisões? O que define a diferença
388 entre as colisões elástica e inelástica? Desenvolva as expressões matemáticas para
389 conservação de momento linear e energia mecânica deste sistema unidimensional
390 para os dois tipos de colisão, em termos das grandezas medidas no experimento.
- 391 5. Como verificar experimentalmente se o momento linear do centro de massa do sis-
392 tema é conservado?

393 4.3 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados

394 Você terá acesso ao filme elasti.mp4 que deverá ser aberto com o programa Tracker ou
395 VidAnalysis. É interessante você observar esse filme: um carrinho (incidente), que chama-
396 remos de *A*, move-se em direção a outro carrinho, denominado *B*, que está inicialmente

em repouso. Ocorre o choque, mediado por “para-choques” feitos com elásticos esticados. Em seguida, B passa a se mover, enquanto que A continua a se mover, porém mais lentamente do que antes do choque. As massas dos carrinhos são $m_A = 287,9 \pm 0,2$ g e $m_B = 179,4 \pm 0,2$ g. O comprimento total do trilho é 200 cm; esse valor é importante para calibrar os comprimentos (escala da sua filmagem). Essa informação será usada quando for atribuir um valor à barra de medição do Tracker. Quando for estimar seu erro na calibração, note que há uma deformação da geometria do trilho no filme.

1. Proceda fazendo a tomada de dados da posição dos dois carrinhos antes e depois do choque. Precisaremos, para cada carrinho, aproximadamente 10 pontos antes e 10 pontos depois do choque. Entretanto, para minimizar o erro nas velocidades determinadas, é aconselhável que esses pontos não sejam “instantes sucessivos” registrados pelo Tracker ou VidAnalysis. Você pode escolher um intervalo de 0,1 s no seu registro de dados (há vários “frames” do Tracker ou VidAnalysis entre eles).
2. Analise o movimento de cada carrinho (tomada de dados) separadamente. Você terá que escolher um ponto de referência em cada carrinho para acompanhá-lo “manualmente” no programa. Então terá que estimar a incerteza da sua medida de posição: amplie a imagem e estime com que precisão consegue identificar o ponto de referência. Por exemplo, para uma ampliação de 200 vezes, a incerteza é da ordem de 3 mm.
3. Lembre-se de escolher um único sistema de referência para a determinação da posição em função do tempo.
4. Construa uma tabela da posição de cada carrinho em função do tempo.

4.4 Análise de dados e discussão dos resultados

1. O instante de colisão pode ser obtido diretamente a partir da tabela dos dados? Faça um gráfico da posição em função do tempo para os dois carrinhos e determine o instante em que eles colidem.
2. Determine as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão a partir do ajuste linear dos dados. Alternativamente, você pode usar o método gráfico para tal determinação. As duas abordagens estão descritas em apêndices na apostila do curso.
3. Analise o comportamento do momento linear e da energia mecânica do sistema antes e depois do choque. Houve conservação dessas grandezas? Que conclusões você pode tirar desses resultados?
4. Calcule a porcentagem de perda de energia cinética, dada por:

$$\frac{|K_f - K_i|}{K_i}$$

⁴³⁰ onde K_i e K_f são a energia cinética inicial e final, respectivamente. Discuta os resul-
⁴³¹ tados obtidos.

432

433

Colisões (Opcional)

434 5.1 Introdução

435 Neste experimento propomos um estudo de colisões entre dois corpos, que o aluno pode
436 executar todo em casa. O sistema físico estudado é composto por duas moedas apoiadas
437 sobre uma superfície lisa. Uma delas está inicialmente em repouso e a outra é lançada
438 sobre ela, deslizando. Nossa foco é explorar quais grandezas se alteram e quais se conser-
439 vam durante a colisão. Analisamos o momento linear e a energia mecânica das moedas
440 individualmente e, muito importante, do sistema formado pelas duas juntas.

441 Agora em duas dimensões, a pergunta básica feita antes no seu experimento unidimen-
442 sional sobre o momento linear total do sistema se divide em duas: Há conservação do
443 momento linear total na direção x ? Há conservação do momento linear total na direção y ?
444 A energia é uma grandeza escalar e continuamos perguntando: A energia mecânica total
445 E do sistema se conserva na colisão estudada?

446 Uma diferença fundamental entre este e o estudo que utilizou a filmagem do trilho de ar é
447 a presença aqui de uma força atrito sobre cada moeda enquanto ela se desloca. Propomos
448 explorar uma diferença qualitativa entre (i) as forças de atrito entre as moedas e a superfície
449 e (ii) as forças de contato entre as moedas. As forças de contato, ditas *forças impulsivas*,
450 são muito mais intensas que as forças de atrito, mas atuam apenas durante a colisão em
451 si. O efeito das forças de atrito sobre as moedas no curto intervalo de tempo durante o
452 qual elas interagem é muito pequeno: durante a colisão dominam as forças de contato.
453 Assim, a discussão sobre conservação de momento e energia durante a colisão continua
454 basicamente a mesma da situação sem atrito.

455 Este roteiro usa como exemplo o choque entre duas moedas de 1 Real, e indica dois cami-
456 nhos para a análise da colisão. Use o exemplo fornecido para se ambientar com o estudo de
457 colisões, mas não se preocupe em reproduzir as trajetórias mostradas ou em usar também
458 moedas de 1 Real. Lance uma de suas moedas em direção à outra, e analise o resultado da
459 colisão entre as duas. As sugestões para registrar o movimento e analisar os dados estão
460 nas próximas seções. Na primeira sugestão para análise, a informação sobre a colisão vem

461 de medidas da distância percorrida depois da colisão por cada uma das moedas [4] e do
462 ângulo entre essas duas trajetórias. Na segunda, são feitas medidas diretas de posição em
463 função do tempo com uma taxa alta o suficiente para revelar o caráter impulsivo das forças
464 de contato [5]

465 Neste experimento você tem liberdade na organização de um relatório a ser encaminhado
466 ao professor. Note que é importante que seu texto tenha suporte em uma ou mais imagens
467 relativas à sua montagem experimental e às análises gráfica e/ou numérica do movimento.

468 5.2 Procedimento experimental

469 5.2.1 Realização das medidas

470 O procedimento para realizar a colisão é simples: procure em sua casa uma superfície
471 plana e lisa sobre a qual as moedas possam deslizar com o menor atrito possível. Dê um
472 peteleco em uma das moedas, lançando-a em direção à outra. Teste diferentes superfícies.
473 No caso mostrado como exemplo neste roteiro foi usada uma superfície de fórmica. Utilize
474 um aparelho celular para filmar todo o experimento, desde o instante inicial do movimento
475 até o repouso final das moedas.

476 Experimente diferentes velocidades iniciais do objeto incidente. Se a velocidade for muito
477 baixa, o atrito fará a moeda incidente parar muito rápido, inviabilizando o experimento.
478 Se a velocidade for alta demais, o celular não irá conseguir capturar imagens com uma
479 taxa alta o suficiente para estudar o movimento. Fazer a filmagem no modo em câmera
480 lenta pode ajudar. É comum que os celulares façam filmagens em seu modo padrão com
481 taxa de 30 quadros por segundo (ou *frames per second - fps*). Possivelmente seu celular é
482 capaz de fazer a filmagem em um modo em câmera lenta com 120 fps ou mais. Se esse for
483 o caso, aproveite essa opção, mas certifique-se de que seu filme não seja comprimido antes
484 da análise. Se usar 30 fps, faça o filme com muita luz, de preferência ao Sol, evitando assim
485 imagens borradadas.

486 Uma vantagem no uso das moedas é que suas massas podem ser descobertas com uma
487 pesquisa na internet. O diâmetro das moedas também é informação de fácil obtenção
488 *online*, e pode ser usada para calibrar as distâncias na análise dos dados. Use duas moedas
489 iguais para que as forças de atrito sejam iguais.

490 5.2.2 Análise das imagens

491 Os dois métodos sugeridos para análise da colisão baseiam-se em medidas de posição
492 sobre imagens registradas em função do tempo. O programa Tracker (Apêndice D), usado
493 anteriormente no Experimento 3 e agora no 4, é uma ferramenta interessante para uso nos
494 dois métodos.

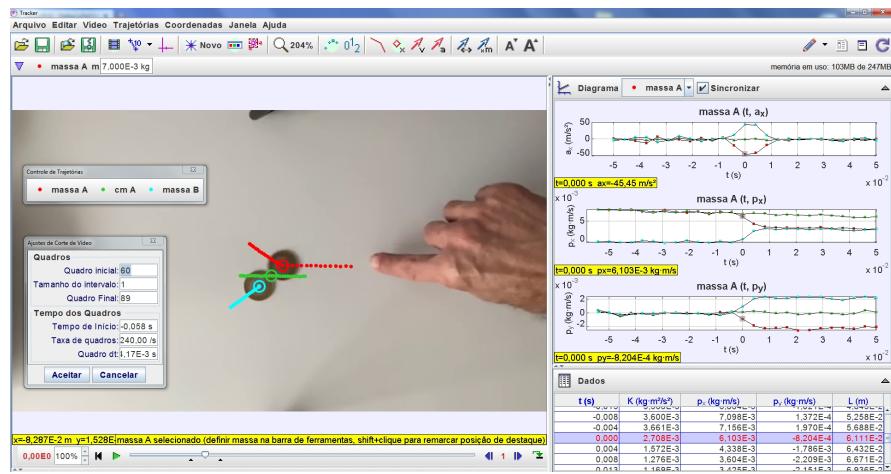


Figura 5.1: Tela típica de análise com o programa Tracker.

495 A partir de suas medições para as posições de cada um dos corpos, e de informação sobre
 496 suas massas, você poderá obter também a evolução da posição do centro de massa do
 497 sistema. Note que as forças de interação entre os dois objetos são internas ao sistema.
 498 Assim, não influenciam o movimento do centro de massa (CM), que deve ser mais simples
 499 que o movimento de cada um dos corpos. Analise o comportamento do CM do sistema
 500 antes, durante e depois da colisão.

501 Depois de importar seu filme para o Tracker, entre no programa com a informação sobre
 502 a taxa de quadros por segundo da sua filmagem. Dê um “zoom” nas suas imagens para
 503 marcar melhor as posições dos centros de massa de cada moeda. O próprio programa
 504 calcula e representa a posição do CM do sistema.

505 Com o programa Tracker você pode ainda gerar facilmente gráficos de velocidade, aceleração,
 506 momento linear, energia e outros. A Figura 5.1 mostra uma tela típica do Tracker em uma
 507 análise desse tipo, na qual os gráficos escolhidos são feitos automaticamente à medida que
 508 os pontos são marcados sobre a imagem. O programa utiliza para isso derivação numérica,
 509 mas você não precisa aqui se preocupar com os detalhes desse procedimento matemático.
 510 Se estiver curioso, pode ver na apostila um exemplo de derivação numérica na seção so-
 511 bre “Determinação da velocidade instantânea”. Os gráficos de aceleração de cada um dos
 512 corpos são úteis para você entender o caráter impulsivo das forças de interação na colisão.
 513 Você pode também construir seus gráficos à mão ou utilizando um programa específico
 514 para essa função (consulte o Capítulo 5 “representações gráficas” da Apostila).

5.3 Exemplo de resultados e análise

5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas

517 A primeira estratégia que indicamos para testar a conservação de momento linear na
 518 colisão de duas moedas, na presença de atrito, foi sugerida recentemente por Galante e

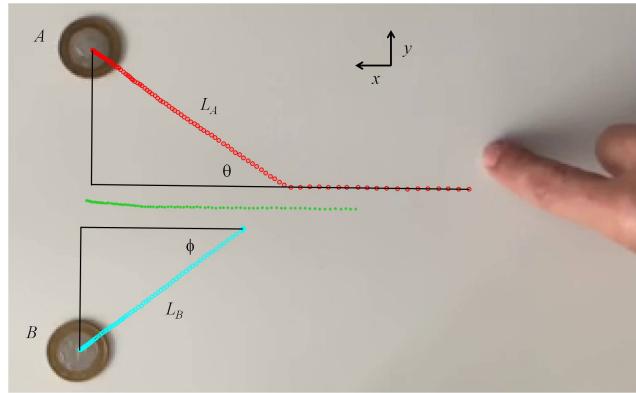


Figura 5.2: Moedas em suas posições finais e marcações de suas trajetórias (CM em verde).

519 Gnesi [4].

Eles chamam a atenção para similaridades dela com métodos calorimétricos com os quais se mede o momento de uma partícula sub atômica a partir de um rastro que ela deixa em um detetor. Na versão simplificada com moedas colidindo, é assumido que a força de atrito é constante e o teorema trabalho-energia cinética é usado para estimar os módulos dos momentos lineares das duas moedas depois da colisão. Temos assim para cada moeda a relação entre o módulo de seu momento p logo após a colisão e o alcance L até parar:

$$\frac{p^2}{2m} = F_{at} L, \quad (5.1)$$

onde F_{at} é o módulo da força de atrito e m é a massa da partícula. Se as moedas são iguais, m e F_{at} são iguais para as duas, e obtemos (ver Figura 5.2):

$$\frac{p_A}{p_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}}. \quad (5.2)$$

Tomando a direção de incidência da moeda A em x , e considerando a moeda B inicialmente parada, a componente do momento linear total em y antes da colisão é zero. Logo, devemos ter depois da colisão as componentes p_{Ay} e p_{By} com mesmo módulo e sinais contrários e, portanto, a razão entre elas deve ser igual a -1. Para testar essa hipótese, precisamos medir também os ângulos entre os momentos finais e a direção de incidência da moeda projétil, a fim de determinar

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -\frac{p_A \operatorname{sen}(\theta)}{p_B \operatorname{sen}(\phi)} = -\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\phi)}. \quad (5.3)$$

A partir da Figura 5.2, na qual foram marcadas as posições das moedas até elas pararem, obtemos $L_A = (0,111 \pm 0,003)$ m, $\operatorname{sen}(\theta) = (0,57 \pm 0,02)$, $L_B = (0,091 \pm 0,003)$ m, e

$\text{sen}(\phi) = (0, 60 \pm 0, 02)$. Assim, obtemos experimentalmente, depois da colisão:

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -1,05 \pm 0,05. \quad (5.4)$$

Este resultado mostra que a soma das componentes p_{Ay} e p_{By} , dentro do erro experimental, permanece igual a zero depois da colisão. Verificamos assim que a componente y do momento linear total se conservou nesse experimento.

A variação percentual de energia na colisão pode ser expressa como (dedução no Apêndice deste roteiro):

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}}{2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (5.5)$$

A Eq. 5.5 mostra que se não houvesse perda de energia cinética na colisão, teríamos um ângulo entre os vetores momento final dos dois corpos $\theta + \phi = 90^\circ$. No entanto, da Figura 5.2 temos $\theta + \phi = 72^\circ$ e $L_A/L_B = 1,2$. Nesse caso, substituindo valores na Eq. 5.5, determinamos uma diminuição, devida à colisão, de 24% na energia cinética total do sistema. A colisão é, portanto, inelástica.

Note que você pode filmar a colisão, como feito aqui, mas isso não é essencial. No experimento original de Galante e Gnesi eles usam apenas moedas, lápis, papel, e régua. O preço da simplicidade neste método é assumir que a força de atrito é constante e igual, em módulo, para as duas moedas.

5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo

Analizando apenas um curto intervalo de tempo antes e depois da colisão, o efeitos da força de atrito nas variações de momento linear em cada moeda serão pequenos em relação aos efeitos da força de contato entre as moedas. Os gráficos da Figura 5.1 estão reproduzidos com destaque na Figura 5.3: aceleração na direção x (direção dada pela moeda incidente), componente do momento linear na direção x , e componente do momento linear na direção y . Em cada gráfico é feita uma comparação dos valores associados à moeda A (em vermelho), à moeda B (em azul), e ao centro de massa do sistema moeda A mais moeda B (em verde). O gráfico da aceleração mostra no momento da colisão um pico para a moeda B e um pico invertido bastante similar para a moeda A. Esses picos refletem as forças de contato durante a colisão. Ainda no mesmo gráfico, vemos que a duração da colisão é de cerca de um centésimo de segundo. Para efeito de comparação, perceba que a aceleração de cada moeda chega, durante a colisão, a cerca de quatro vezes o valor da aceleração da gravidade, mas cai rapidamente quando apenas a força de atrito está presente.

É possível demonstrar que o produto da massa pela área de cada um dos picos é igual à variação do momento linear. Assim, picos simétricos no gráfico de aceleração na Figura 5.3

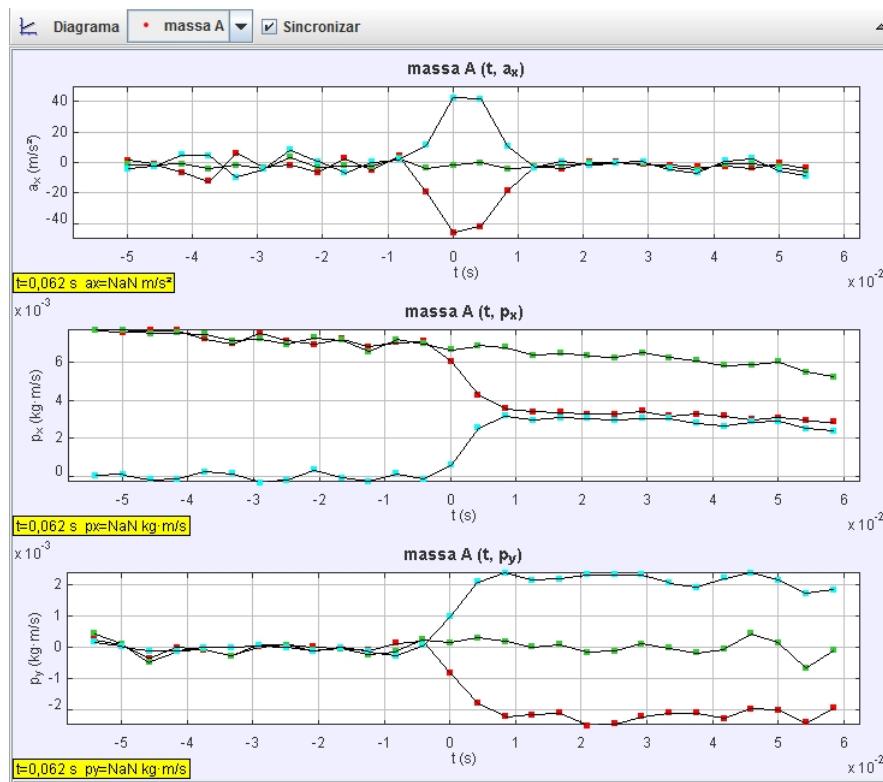


Figura 5.3: Gráficos de a_x , p_x e p_y em função do tempo. Moeda A em vermelho, moeda B em azul e centro de massa do sistema moeda A mais moeda B em verde.

548 demonstram a conservação do momento linear total do sistema, neste caso na direção x .
 549 Note que a aceleração do centro de massa é próxima de zero antes, durante e depois da
 550 colisão. A conservação de momento linear em x e em y durante a colisão pode ser vista
 551 também diretamente nos dois últimos gráficos da Figura 5.3, ligeiramente mascarada por
 552 uma pequena e lenta variação do momento linear total devida às forças de atrito, que são
 553 externas ao sistema moeda A mais moeda B.

PARTE II

CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE DADOS

1

555
556

Medidas e incertezas

557 Uma das maneiras para conhecer e descrever a natureza que nos rodeia é mediante a
558 realização de observações experimentais, que chamamos de medidas. O primeiro pro-
559 blema com o qual nos encontramos é como os resultados encontrados podem ser comu-
560 nicados de maneira clara, de forma que sejam compreensíveis e reproduutíveis por outros
561 experimentadores. Para estabelecer o valor de uma grandeza (mensurando) temos que
562 utilizar instrumentos e um método de medida, como também é necessário definir as uni-
563 dades da medida. Por exemplo se desejamos medir a largura de uma mesa, o instrumento
564 de medição será uma régua ou uma trena e, utilizando o sistema de unidades internacio-
565 nal (SI), a unidade que utilizaremos será o metro (m). A régua, portanto, estará calibrada
566 nessa unidade ou em seus submúltiplos, como, por exemplo, centímetros e milímetros. O
567 método de medição consistirá em determinar quantas vezes a unidade e as frações dela
568 estão contidas no valor do mensurando.

569 Toda medição é afetada por uma incerteza que provém das limitações impostas pela pre-
570 cisão e exatidão dos instrumentos utilizados, da interação do método de medição com
571 o mensurando, da definição do objeto a medir, e da influência do(s) observador(es) que
572 realiza(m) a medição.

O que se procura em cada medição é conhecer o valor medido (x) e a sua incerteza (δ_x) na determinação do resultado, ou seja, determinar os limites probabilísticos destas incertezas. Procura-se estabelecer um intervalo

$$x - \delta_x < x < x + \delta_x \quad (1.1)$$

573 como ilustrado na Figura 1.1, dentro do qual podemos dizer que o valor da grandeza se
574 encontra, com uma certa probabilidade. Em geral utiliza-se como incerteza um intervalo
575 em torno do valor central com 68% de probabilidade.

576 Não existem regras para determinar o tamanho do intervalo, porque dependerá de mu-
577 tos fatores do processo de medição. O tipo de medição, a figura da escala, a acuidade
578 visual de quem esteja fazendo a medida, as condições de iluminação, etc, formarão parte
579 na determinação da largura do intervalo de medição. A incerteza associada a uma medida

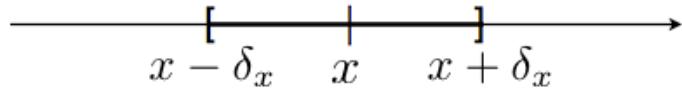


Figura 1.1: Intervalo de probabilidade para a grandeza medida, onde x é o valor mais representativo da nossa medição e δ_x é a incerteza absoluta.

580 deve ser determinada a cada vez que se faça a medição. Por exemplo, é comum pensar que
 581 quando fazemos uma medida com uma régua com escala graduada, a "incerteza de leitura
 582 (incerteza instrumental)" é automaticamente a metade da menor divisão. Um instrumento
 583 com divisões muito finas usado para medir um objeto com bordas mal definidas pode dar
 584 um intervalo de medição maior que várias das divisões menores. Contrariamente, um
 585 objeto bem definido com boas condições visuais pode permitir a identificação de um in-
 586 tervalo de medição muito menor que a menor divisão da escala. Cada situação deve ser
 587 avaliada de forma individual.

Uma forma usual de expressar o resultado de uma medição é:

$$x \pm \delta_x \quad (1.2)$$

e indicando a *unidade de medição*. Além disso é possível definir a *incerteza relativa* como:

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{x} \quad (1.3)$$

que expressa o quanto significativa é a incerteza em relação ao valor medido. Também pode-se calcular a *incerteza relativa percentual* como:

$$\epsilon_{\%} = \epsilon_x \cdot 100\% = \frac{\delta_x}{x} \cdot 100\% \quad (1.4)$$

588 Por exemplo, ao medir o comprimento L de uma mesa podemos apresentá-lo como $L=(1,00$
 589 $\pm 0,01)$ m ou $L=1,00 \pm 0,01$ m, se encontramos um valor de 1,00 m, com uma incerteza de
 590 1 cm em torno desse valor central encontrado. É importante apresentar sempre o valor
 591 central e a incerteza na mesma unidade. Essa medição tem um incerteza relativa de 0,01
 592 ($0,01/1,00$) e uma incerteza relativa percentual de 1%. A palavra **precisão** muitas vezes
 593 é utilizada como sinônimo de incerteza relativa percentual. Note, no entanto, que nem
 594 sempre a precisão de uma medida corresponde à precisão do instrumento utilizado para
 595 realizá-la. A precisão de um instrumento será discutida em contraposição ao conceito de
 596 acurácia mais abaixo.

597 Incertezas

598 Os distintos tipos de incertezas podem ser classificados em:

- 599 • **Incertezas do instrumento:** Os instrumentos de medição têm uma incerteza finita
600 que está associada à variação mínima da magnitude que ele mesmo pode detectar.
601 Por exemplo, se temos uma régua graduada em milímetros, não será possível de-
602 tectar variações muito menores que uma fração de milímetro. Se, ao leremos o valor
603 medido na régua, aproximamos para o valor inteiro em mm que mais se aproxima da
604 medida, dizemos que a incerteza da régua é de 1 mm. Se, ao contrário, conseguimos
605 identificar valores múltiplos de meio milímetro, então dizemos que a incerteza é de
606 0,5 mm. Não é, no entanto, razoável supor que conseguimos identificar a olho nú-
607 frações menores que 0,5 mm em uma régua milimetrada.
- 608 • **Incertezas estatísticas ou aleatórias:** São as devidas flutuações aleatórias na determi-
609 nação do valor do mensurando entre uma medida e outra. Estas flutuações ocorrem
610 com igual probabilidade tanto para mais quanto para menos. Portanto, medindo
611 várias vezes e calculando a média, é possível reduzir a incerteza significativamente.
612 Estas incertezas são tratadas pela teoria estatística de erros de medição.
- 613 • **Incertezas sistemáticas:** Acontecem pelas imperfeições dos instrumentos e métodos
614 de medição e sempre se produzem no mesmo sentido (não podem ser eliminados
615 com várias medições). Alguns exemplos podem ser um relógio que atrasa ou adianta,
616 uma régua que se dilata, o erro devido à paralaxe, etc...

617 A interação do método de medição com o mensurando também pode introduzir erros.
618 Consideremos como exemplo a medição de temperatura para a qual utilizamos um termô-
619 metro. Parte do calor do objeto que queremos medir flui ao termômetro (ou vice-versa),
620 de maneira que o resultado da medição do valor da temperatura difere do original devido
621 à presença do termômetro (interação que devemos realizar). Fica claro que esta interação
622 pode ser desprezível, se, por exemplo, estamos medindo a temperatura de um litro de
623 água, mas a quantidade de calor transferida ao termômetro pode ser significativa se a
624 quantidade de volume é uma fração pequena de, por exemplo, um mililitro e utilizamos
625 um termômetro convencional.

626 Precisão e exatidão

627 A precisão de um instrumento ou um método de medida está relacionada à sensibilidade
628 ou menor variação de uma grandeza que pode ser detectada com certo instrumento ou
629 método. Dizemos que um paquímetro (por exemplo, com mínima divisão de 0,01 mm) é
630 mais preciso que uma régua (mínima divisão 1 mm) ou que um cronômetro (por exem-
631 plo com mínima divisão 10 ms) é mais preciso que um relógio (mínima divisão 1 s), etc.
632 Quanto menor a **incerteza relativa** de uma medição, mais precisa ela é. É importante notar
633 que o valor absoluto da incerteza isoladamente não é suficiente para qualificar a precisão

634 de uma medida. Por exemplo, reportar a distância entre Rio e São Paulo com incerteza
635 de um metro certamente é muito bom. Por outro lado, medir o comprimento de um carro
636 com incerteza de um metro é muito ruim. Qual a diferença? No primeiro caso, estamos
637 falando de uma dúvida de um metro em cerca de 500 km e no segundo caso, a incerteza é
638 de um metro em cerca de 4 metros.

639 Além da precisão, é importante realizar uma medição com exatidão ou, utilizando um
640 termo mais antigo, acurácia. Esta está geralmente relacionada com a qualidade da calibração
641 do instrumento utilizado ou o método de medição aplicado. Imaginemos que utilizamos
642 um cronômetro para medir os tempos com uma precisão de 10 ms, mas sabemos que atrasa
643 1 minuto cada uma hora. Por outro lado, utilizamos um relógio com uma precisão de 1
644 s que marca a hora certa a todo instante. Neste caso vamos dizer que o cronômetro é o
645 mais preciso, mas o relógio é o mais acurado. Um critério para se comparar a exatidão de
646 duas medidas é dado pela menor discrepância relativa. A discrepância é definida como o
647 módulo da diferença entre o valor medido e um valor de referência para a grandeza e a
648 discrepância relativa é definida como o módulo da razão entre a discrepância e o valor de
649 referência. Quanto menor a discrepância relativa de uma medida, mais exata ou acurada
650 ela é.

651 Portanto, procuraremos sempre realizar uma medição utilizando um método que seja pre-
652 ciso e exato ao mesmo tempo.

653

654

Medidas Diretas e Indiretas

655 Para estabelecer o valor de uma grandeza temos que utilizar um instrumento de medição
 656 e um método de medição. Além disso, será necessário definir as unidades em que essa
 657 magnitude é medida. Por exemplo, se queremos medir a largura de uma mesa, utilizare-
 658 mos uma régua e, dependendo do sistema de medição escolhido, expressaremos o valor
 659 medido em unidades de comprimento como, por exemplo, o metro (m) para o sistema de
 660 unidades internacional (SI) ou centímetros (cm) no caso do CGS. O método de medição
 661 consistirá em determinar a quantidade de unidades da menor fração da régua que corres-
 662 pondem ao comprimento que se deseja medir. Quando uma medição é realizada lendo
 663 o resultado diretamente em um instrumento (construído para isso), dizemos que a **me-
 664 dida é direta**. Há grandes que não se medem diretamente, mas que são obtidas a partir
 665 de outras grandes medidas de forma direta. Por exemplo, para conhecer área de um
 666 retângulo medem-se os comprimentos de seus lados ou para determinar o volume de uma
 667 esfera deve-se medir o diâmetro. Neste caso a **medida é indireta**.

668 Medidas diretas com flutuações aleatórias

669 Consideremos uma grandeza da qual se fazem N medições diretas, que chamaremos:
 670 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Estes valores serão geralmente distintos entre si, mas alguns valores po-
 671 dem se repetir.

672 Evidentemente não será satisfatório fornecer como resultado da medição uma tabela de
 673 N valores. É necessário caracterizar a série de medições mediante uns poucos parâmetros
 674 que tenham um significado preciso relacionado com a magnitude medida e/ou o processo
 675 de medição utilizado. Os parâmetros importantes são:

1. **Valor médio** é a média aritmética dos valores medidos

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.1)$$

e é o valor atribuído à magnitude medida. É bastante intuitivo considerar a média aritmética como valor representativo da grandeza medida. A média aritmética se caracteriza por apresentar as medições ao seu redor, de modo que a soma dos desvios

$$\delta_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.2)$$

é igual a zero. Ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = 0. \quad (2.3)$$

Isto pode ser facilmente demonstrado, escrevendo:

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}), \quad (2.4)$$

e distribuindo o somatório, de modo que:

$$S = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x}. \quad (2.5)$$

Utilizando a expressão do valor médio (equação 2.1):

$$\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}, \quad (2.6)$$

obtemos $S = 0$ como queríamos mostrar.

Por esta razão, a soma dos desvios não é um parâmetro que possa ser utilizado para caracterizar a distribuição das medições ao redor do valor médio e é necessário utilizar outro parâmetro.

2. Dispersão das medições ou **desvio padrão** define-se como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (2.7)$$

O desvio padrão é um parâmetro que caracteriza o processo de medida. Quando as medições são poucas, σ pode flutuar, mas para muitas medidas (N grande) estabiliza-se e não depende do número de medições.

3. O **erro ou incerteza do valor médio** é definido como:

$$\xi = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2}, \quad (2.8)$$

684 onde σ_m está associado às flutuações estatísticas em torno do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.9)$$

685 e σ_r expressa os erros sistemáticos residuais (por exemplo devido à um instrumento
686 mal calibrado).

687 Vamos supor que nas nossas medidas não ocorrem tais erros sistemáticos, de forma
688 que usaremos sempre:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.10)$$

689 O erro do valor médio é a dispersão esperada para as médias de várias séries de
690 medições realizadas nas mesmas condições. O erro do valor médio depende do
691 número de medições como se pode ver na sua expressão, sendo que ela diminui
692 com o aumento do número de medições.

693 Medidas Indiretas

694 Como já foi definido anteriormente, há grandezas que não podem ser determinadas dire-
695 tamente, mas que se obtém a partir de outras grandezas que, estas sim, são medidas de
696 forma direta. Portanto, as incertezas das grandezas que se medem diretamente devem ser
697 propagadas para contribuir à incerteza da grandeza que se calcula utilizando uma deter-
698 minada expressão.

699 Sejam x_1, x_2, \dots, x_N grandezas independentes medidas de forma direta, e seja a grandeza
700 que se quer determinar $F = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ uma função das grandezas x_1, x_2, \dots, x_N , cujas
701 incertezas estão dadas por $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N$. Pode-se mostrar que a incerteza de F é dada
702 por:

$$(\delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \delta x_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \delta x_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_N} \right)^2 \cdot \delta x_N^2, \quad (2.11)$$

ou

$$(\delta F)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \delta x_i^2. \quad (2.12)$$

699 Esta equação é a fórmula de propagação da incerteza para uma grandeza determinada
700 indiretamente.

701 Comparação entre duas medidas da mesma grandeza

Muitas vezes comparamos diferentes resultados experimentais para a medida de uma
mesma grandeza. Estes resultados podem vir por exemplo das diferentes técnicas utilizadas
para determinar uma grandeza, ou podem vir de valores conhecidos tabulados na

literatura. Vamos supor que temos dois resultados para uma mesma grandeza sendo o primeiro $x_1 \pm \delta x_1$ e o segundo $x_2 \pm \delta x_2$. Se eles são estimativas de uma mesma grandeza, esperamos que a discrepância entre eles ($|x_1 - x_2|$) seja compatível com zero. Como cada uma das medidas está sujeita a uma flutuação estatística de acordo com sua incerteza, em geral encontramos valores diferentes de zero para a discrepância. Como podemos avaliar se a discrepância é significativamente diferente de zero? Há várias formas de se fazer essa avaliação, dependendo do grau de confiança que queremos ter na afirmação de que a diferença é incompatível com zero (ou equivalentemente de que os dois valores são incompatíveis entre si). Vamos considerar a discrepância entre os valores ($|x_1 - x_2|$) pouco significativa ou irrelevante quando for menor que 3 vezes a incerteza da discrepância. Utilizando a expressão para propagação de incertezas definida na Seção 2, determinamos a incerteza da discrepância $\delta|x_1 - x_2| = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$. Resumindo, duas medidas independentes x_1 e x_2 da mesma grandeza são consideradas **compatíveis** quando :

$$|x_1 - x_2| < 3\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$$

ou

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}} < 3.$$

⁷⁰² Ao contrário, consideramos as duas medidas x_1 e x_2 **incompatíveis** quando a discrepância
⁷⁰³ entre elas é maior que 3 vezes a incerteza da discrepância.

⁷⁰⁴ Considere por exemplo a medida de um comprimento de uma mesa cujo resultado é
⁷⁰⁵ $L_{exp} = (98 \pm 1)$ cm. Como podemos ver se esse resultado é compatível com o valor no-
⁷⁰⁶ minal fornecido pelo fabricante, que é de $L_{nom} = 1$ m? Como o valor nominal nesse caso
⁷⁰⁷ não tem incerteza, a incerteza da discrepância é igual à incerteza da medida experimental.
⁷⁰⁸ A discrepância é de 2 cm, que é apenas duas vezes a incerteza da discrepância e a medida
⁷⁰⁹ é, portanto, compatível com o valor nominal. Uma outra forma de ver isso é analisando
⁷¹⁰ se o valor nominal está contido no intervalo de valores $I_{exp} = [L-3\delta L, L+3\delta L]$. Nesse caso, o
⁷¹¹ valor 100 cm está contido no intervalo $I_{exp} = [95, 101]$ cm.

Em um outro exemplo, um estudante mede o valor da aceleração da gravidade e encontra $g_{exp} = 9,21 \pm 0,01$ m/s² e quer comparar com o valor tabelado $g = 9,787 \pm 0,001$ m/s². Temos:

$$\frac{|g_{exp} - g|}{\sqrt{\delta g_{exp}^2 + \delta g^2}} = \frac{0,577}{0,01005} \approx 57 \gg 3.$$

⁷¹² Logo, os dois valores são incompatíveis.

713

714

Algarismos Significativos

715 Imagine que você pergunta a hora a uma pessoa com um relógio de pulso analógico, como
716 o mostrado na Figura 3.1. Essa pessoa dá uma olhada no relógio, e responde: são 10 horas
717 e 42 minutos. Você entende que o ponteiro dos minutos certamente estava entre o 8 e o 9,
718 ou seja, corresponde a um valor entre 40 e 45 minutos, mais próximo de 40 do que de 45.
719 Dizemos que esse algarismo que foi estimado, o 2, é um **algarismo duvidoso**. Os outros
720 algarismos são **algarismos certos**: o ponteiro das horas estava entre 10 e 11, com certeza.
721 O conjunto de algarismos certos e duvidosos são os **algarismos significativos da medida**.
722 Quanto maior for o número de algarismos significativos em uma medida, mais informação
723 ela traz.



Figura 3.1: Relógio marcando hora.

724 Quando realizamos uma medição direta de uma grandeza, a partir da leitura de um ins-
725 trumento analógico, que apresenta uma escala, o procedimento que se usa para fazer o
726 registro do valor da grandeza é anotar todos os algarismos fornecidos pela escala do ins-
727 trumento, eventualmente acrescentando mais um algarismo, que represente uma fração
728 da menor divisão da escala do instrumento. No exemplo acima, do relógio, ao estimar 42
729 minutos, a pessoa imaginou uma escala de subdivisão da menor divisão do relógio em 5
730 partes, cada uma delas correspondendo a 1 minuto, e estimou que o ponteiro estava mais
731 perto de duas subdivisões. Quando o instrumento é digital, o múltiplo da menor medida
732 que ele pode fazer corresponde ao algarismo duvidoso do valor lido. Em um cronômetro
733 digital com resolução de 1 centésimo de segundo, que mede um intervalo de tempo de
734 12,04 s, o 4 é o algarismo duvidoso da medida direta.

Um ponto que sempre gera dúvida é se os zeros são significativos ou não. Para responder, pense em alterar as unidades da medida. Se o número de zeros mudar ao fazer essa alteração, eles não são significativos, já que indicam apenas em que unidades estamos escrevendo a medida. A medida $x_1 = 2,47$ cm tem três algarismos significativos, sendo o 7 duvidoso. Para escrever x_1 em metros, caminhamos a vírgula para a esquerda duas casas decimais e completamos com zeros. Nada foi feito em termos de alterar a quantidade de informação em x_1 , apenas trocamos as unidades, logo esses zeros de preenchimento não são significativos. Em resumo, as duas formas abaixo são equivalentes e têm três algarismos significativos:

$$x_1 = \underbrace{2,47}_{\text{sig}} \text{ cm} = 0,0 \underbrace{247}_{\text{sig}} \text{ m}$$

A mudança para uma unidade menor pode ser feita com ajuda de potências de dez, que não contam como algarismos significativos. Por exemplo, a medida x_2 , com dois algarismos significativos pode ser escrita nas formas equivalentes

$$x_2 = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \text{ kg} = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \times 10^3 \text{ g} = \underbrace{5,2}_{\text{sig}} \times 10^2 \text{ g}$$

Se escrevermos uma medida como $x_3 = 3,10$ s, ficará implícito que temos certeza dos três segundos e do um décimo de segundo. O zero na casa dos centésimos de segundo é duvidoso, sendo o último algarismo significativo da medida. Os zeros ao final do número são significativos. Observe mais um exemplo:

$$\underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ m} = 0, \underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ km} = \underbrace{1,00}_{\text{sig}} \times 10^8 \mu\text{m}$$

⁷³⁵ Também aqui os dois algarismos zero à direita do 1 são significativos, independentemente
⁷³⁶ da unidade que escolhemos para registrar o valor. Ao todo o comprimento registrado tem
⁷³⁷ 3 algarismos significativos.

⁷³⁸ 3.1 Incertezas e algarismos significativos

Normalmente usamos um ou dois algarismos significativos para representar as incertezas, dependendo do grau de estimativa envolvido na sua determinação. Como vamos trabalhar com muitas estimativas na determinação das incertezas nas medidas diretas, usaremos a convenção de um significativo. Assim, o valor da medida deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza, como nos exemplos abaixo.

$$L = (2,25 \pm 0,05) \text{ cm} \quad M = (351 \pm 2) \times 10^{-2} \text{ kg}$$

⁷³⁹ No caso da incerteza de medidas indiretas, em geral é preciso arredondar o valor determinado a partir da propagação das incertezas das medidas diretas, explicado no Capítulo 2.

⁷⁴¹ Para arredondar um determinado valor, vamos adotar os critérios da norma técnica da

⁷⁴² Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT-5891:

- ⁷⁴³ 1. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo inferior a 5, permanece inalterado o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6357 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,6);
- ⁷⁴⁴ 2. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6678 torna-se 1,7 e 1,6505 torna-se 1,7, arredondados à primeira casa decimal);
- ⁷⁴⁵ 3. Se o algarismo à seguida do algarismo a ser conservado for igual a 5 e não houver mais nenhum algarismo à sua direita ou se todos os algarismos à direita forem zeros, retira-se todos os algarismos posteriores ao que será conservado e :
 - ⁷⁵⁰ (a) adiciona-se uma unidade ao algarismo conservado, se este for ímpar;
 - ⁷⁵¹ (b) permanece inalterado o algarismo conservado, se este for par.

⁷⁵⁵ Observe os arredondamentos abaixo, feitos de modo a que a medida tenha 3 algarismos significativos e seguindo os critérios acima:

- ⁷⁵⁷ • $x = 4,678 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- ⁷⁵⁸ • $y = 4,674 \text{ m} \rightarrow x = 4,67 \text{ m}$
- ⁷⁵⁹ • $z = 4,675 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- ⁷⁶⁰ • $w = 4,665 \text{ m} \rightarrow x = 4,66 \text{ m}$

Como exemplo, vamos calcular o peso p da massa $m = (234,40 \pm 0,02)\text{g}$ sabendo que $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$. Vamos trabalhar no SI, portanto escrevemos $m = (234,40 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg}$. Com isso,

$$p = m g = 2,29428376 \text{ N}$$

Agora vamos calcular a incerteza. Como temos um produto,

$$\left(\frac{\delta_p}{p} \right)^2 = \left(\frac{\delta_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\delta_g}{g} \right)^2 = \left(\frac{0,02}{234,00} \right)^2 + \left(\frac{0,0001}{9,7879} \right)^2 = 7,409 \times 10^{-10}$$

Logo,

$$\delta_p = 2,29428376 \text{ N} \times 2,72 \times 10^{-5} = 6,23 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Agora escrevemos a incerteza calculada com um significativo:

$$\delta_p = 6 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Finalmente escrevemos p até a quinta casa decimal, usando o critério de arredondamento, e escrevemos o resultado final:

$$2,29428376 \text{ N} \rightarrow p = (2,29428 \pm 0,00006) \text{ N}$$

Claro que também poderíamos usar a equação (2.12) para calcular a incerteza absoluta:

$$\delta_p = \sqrt{(m\delta_g)^2 + (g\delta_m)^2}.$$

761 3.2 Regra de bolso sobre algarismos significativos

762 Muitas vezes o cálculo da incerteza propagada pode ser bem longo e fica difícil de saber
 763 se o resultado está certo ou não. Uma forma simples de saber se pelo menos a ordem de
 764 grandeza da incerteza propagada está correta é usar a seguinte regra:

- 765 • Numa operação matemática envolvendo medidas com diferentes números de alga-
 766 rismos significativos o resultado terá aproximadamente o mesmo número de algaris-
 767 mos significativos que a medida com menor número.

Vamos calcular o volume V de um tubo de seção reta quadrada de lado $a = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ e comprimento $L = (120,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. A medida a tem 2 algarismos significativos e L , 4, sendo a mais precisa. Assim esperamos que V tenha entre 2 e 4 algarismos significativos. Vamos fazer a propagação:

$$V = a^2 L \rightarrow V = a^2 L = 120,0 \text{ cm}^3$$

$$\left(\frac{\delta_V}{V} \right) = \sqrt{\left(2 \frac{\delta_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\delta_L}{L} \right)^2} = 0,1000034722$$

768 Um erro muito comum é esquecer que 0,1000034722 é a incerteza relativa e escrever este
 769 valor como se fosse a incerteza absoluta.

Calculando corretamente a incerteza absoluta, temos

$$\delta_V = V \left(\frac{\delta_V}{V} \right) = (480,0 \text{ cm}^3)(0,1000034722) = 48,001666656 \approx 4,8001666656 \times 10 \text{ cm}^3$$

Finalmente,

$$V = (48 \pm 5) \times 10 \text{ cm}^3$$

770 O resultado final tem dois algarismos significativos, como a medida menos precisa usada
 771 no cálculo. Se for necessário melhorar a precisão da medida de V , vale a pena medir a com
 772 mais precisão. Note que ao escrevermos o resultado final, utilizamos a mesma potência de
 773 10 para V e para sua incerteza δ_V . Assim podemos saber qual deve ser o último algarismo

⁷⁷⁴ a ser conservado no valor da medida e realizar o arredondamento, se necessário. Neste
⁷⁷⁵ caso, o arredondamento foi feito na casa da unidade de $1 \times 10 \text{ cm}^3$.

4

776

777

Representações gráficas

778 Como fazer um histograma

779 Quando fazemos uma análise estatística de um conjunto de N medidas de uma determinada grandeza, podemos realizar um gráfico no qual se representa para cada valor (ou intervalo de valores) o número de vezes em que este aparece. Este tipo de gráfico recebe o nome de **Histograma**. Um exemplo é mostrado na Figura 4.1. Como o conjunto de valores obtidos é discreto, resulta um esquema de barras. A largura destas barras é a menor diferença entre os valores medidos ou o tamanho do intervalo escolhido no caso em que seja conveniente agrupar vários valores num intervalo (isto deve ser determinado em função da série de medições realizadas). O número de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições.

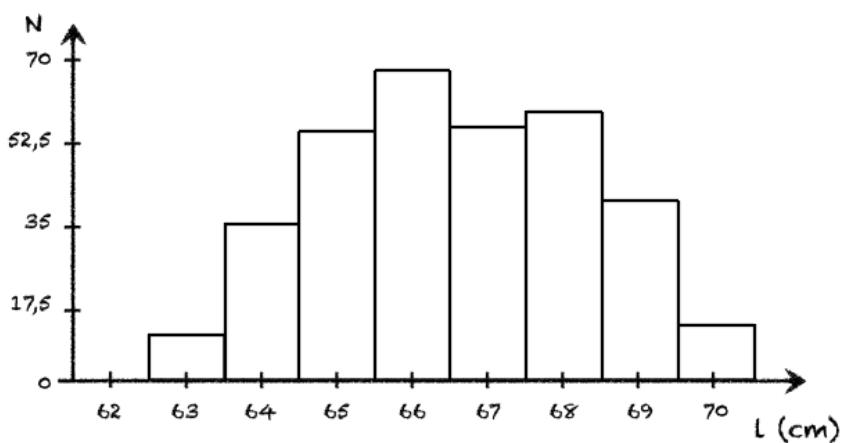


Figura 4.1: Exemplo de um histograma.

788 Para que fique mais claro, vamos considerar o seguinte exemplo. Medimos a altura de
789 uma garrafa de água 40 vezes obtendo os seguintes valores, em centímetros:

	20,3	20,1	20,2	20,5	20,2	19,7	20,6	20,4
	19,8	20,3	20,1	20,2	20,3	20,4	20,3	19,6
790	20,0	19,5	20,7	20,3	20,1	20,7	20,5	20,5
	20,5	20,3	20,4	20,2	20,3	20,2	20,6	20,8
	20,4	20,0	19,9	20,6	20,8	19,7	20,9	20,3

791 Como podemos ver, há valores que se repetem e a frequência de repetição é diferente para
 792 cada valor. Esta informação pode ser apresentada em forma gráfica, mediante a construção
 793 de um histograma. Para isto devemos escolher valores ou intervalos de valores e determi-
 794 nar quantas vezes o valor se repete no conjunto de dados.

795 Para nosso exemplo, vamos escolher intervalos de 0,2 cm começando pelo menor valor
 796 medido de 19,5 cm. Desta forma o primeiro intervalo será de 19,5 a 19,7 cm, o segundo de
 797 19,7 cm a 19,9 cm e assim sucessivamente. Cada intervalo será representado no gráfico pelo
 798 seu valor central, ou seja, para o primeiro será 19,6 cm, para o segundo 19,8 cm, etc. Como
 799 os intervalos são contínuos devemos escolher como serão os limites dos intervalos, aberto
 800 e fechado, pois, por exemplo, o valor 19,7 cm vai contar para o primeiro ou o segundo
 801 intervalo. No nosso exemplo, o valor inferior vai ser o fechado e o valor superior o aberto
 802 (ou seja, 19,7 cm vai contar para o segundo intervalo e não para o primeiro). Desta forma,
 podemos construir a Tabela 4.1, de frequências:

Tabela 4.1: Tabela de frequências absolutas e relativas em função da altura medida de uma garrafa.

Intervalo (cm)	Valor do Intervalo (cm)	Frequência	Frequência Relativa (%)
19,5 - 19,7	19,6	2	5,0
19,7 - 19,9	19,8	3	7,5
19,9 - 20,1	20,0	3	7,5
20,1 - 20,3	20,2	7	17,5
20,3 - 20,5	20,4	12	30,0
20,5 - 20,7	20,6	8	20,0
20,7 - 20,9	20,8	4	10,0
20,9 - 21,1	21,0	1	2,5

803

804 Uma vez construída a tabela, podemos fazer o gráfico no qual vamos colocar no eixo-x os
 805 valores centrais dos intervalos escolhidos e no eixo-y o número de repetições (Frequência).
 806 Para isto deve ser escolhida uma escala adequada em cada eixo, de forma que a distância
 807 entre todos os valores centrais dos intervalos seja constante. Para o caso do eixo-y, a escala

808 deve ser escolhida de forma tal que o valor mais repetido fique na parte superior do eixo,
 809 de forma que possa ser apreciada a estrutura do histograma. Uma vez escolhida a escala,
 810 uma barra será desenhada para cada intervalo com o tamanho da frequência determinada
 811 na tabela anterior, como mostramos no lado esquerdo da Figura 4.2.

812 Uma forma alternativa de se fazer o histograma é colocando no eixo-y a frequência relativa,
 813 ou seja, o número de repetições dividido pelo número total de medidas, frequentemente
 814 mostrado em percentagem, como na última coluna da Tabela 4.1 e no histograma do lado
 815 direito da Figura 4.2.

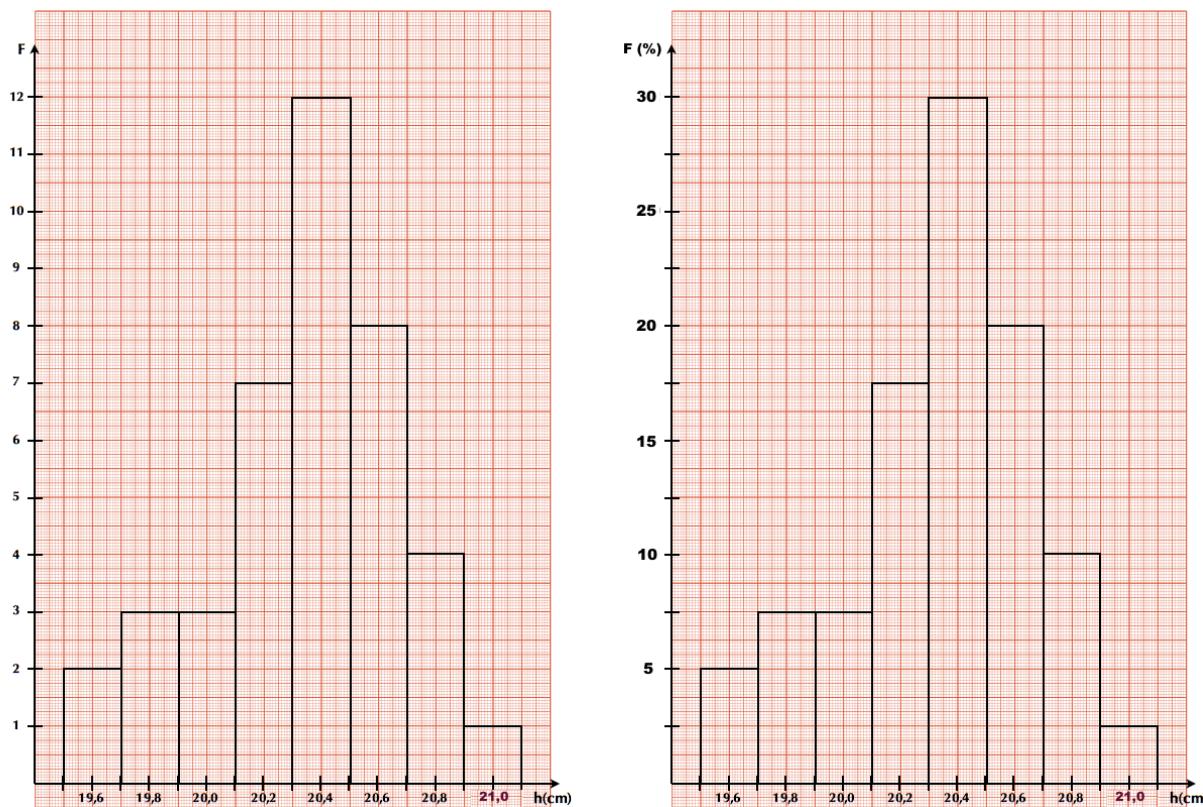


Figura 4.2: Histogramas de frequências (lado esquerdo) e frequências relativas (lado direito) da medida da altura (h) da garrafa de água .

816 Como construir um gráfico

817 Uma forma muito útil de apresentar os resultados experimentais é a partir de representa-
 818 ções gráficas dos mesmos, pois neles a informação é sintetizada, facilitando sua análise e
 819 interpretação. Geralmente, um gráfico é mais útil que uma tabela de valores, por exemplo,
 820 quando estamos realizando medições de uma variável Y em função de outra X que varia
 821 independentemente e queremos ver a relação funcional entre elas (por exemplo, a posição
 822 de um móvel em função do tempo), ou para estudar se duas variáveis possuem alguma
 823 correlação ou não.

824 Em Física Experimental I, todos os gráficos que realizaremos serão em duas dimensões

825 além dos histogramas que já foram discutidos na sessão 4. O primeiro passo é escolher
 826 quais serão as variáveis e, logo, qual é a variável independente que será representada no
 827 eixo horizontal e qual a dependente no eixo vertical. Por exemplo, se queremos represen-
 828 tar a posição de um corpo em movimento em função do tempo vamos identificar duas
 829 variáveis: posição (x) e tempo (t), sendo o tempo a variável independente. Ou seja, o
 830 tempo será colocado no eixo-x e a posição no eixo-y.

831 Uma vez escolhidas as variáveis, devemos determinar a escala para cada eixo. Para isto
 832 temos que considerar os valores medidos de cada variável, de forma a poder escolher uma
 833 escala que facilite a leitura dos pontos experimentais, ou qualquer outro ponto represen-
 834 tado no gráfico. Quando desenhamos o gráfico em papel, devemos escolher a escala de
 835 forma a usar pelo menos metade da folha para representar os pontos experimentais. Para
 836 facilitar a leitura do gráfico, é interessante utilizar escalas em que cada milímetro do pa-
 837 pel corresponda a múltiplos ou submúltiplos de 2 ou 5 da grandeza correspondente. A
 838 determinação da escala em cada eixo é independente.

839 Consideremos os seguintes valores medidos para o exemplo da posição do corpo em
 840 função do tempo:

	Tempo (s)	Posição (m)	Incerteza da Posição (m)
	0,1	29	1
	0,3	34	1
	0,4	41	1
	0,5	38	1
841	0,7	33	1
	1,0	26	1
	1,1	23	1
	1,2	20	1
	1,4	17	1
	1,5	16	1

842 Vamos construir o gráfico em papel milimetrado, usando a folha “na vertical”, de forma
 843 que o eixo-x fique na menor dimensão da mesma e o eixo-y na maior. Para o eixo-x, onde
 844 vamos representar o tempo, a escolha parece simples, começamos em 0 (zero) e conside-
 845 ramos uma escala de 10 mm para cada 0,1 s, pois o tamanho nesta dimensão é de 180 mm
 846 e nós precisamos marcar de 0 a 1,5 s. Para o eixo-y, onde vamos representar a posição,
 847 dispomos de 28 cm de folha. Neste caso, podemos considerar duas possibilidades: (A)
 848 começamos a escala a partir do zero ou (B) começamos ela perto do menor valor medido,
 849 neste caso 16 m. Em ambos os casos a escala deve ir até o máximo valor medido ou algum
 850 valor superior imediato. Em geral escolhemos um valor superior que permita ajustar a
 851 escala para um múltiplo de 2 ou 5. Se considerarmos o caso (A), uma escala possível seria
 852 1 cm no papel para cada 2 m de posição (Figura 4.3 (esquerda)). Como podemos ver, não

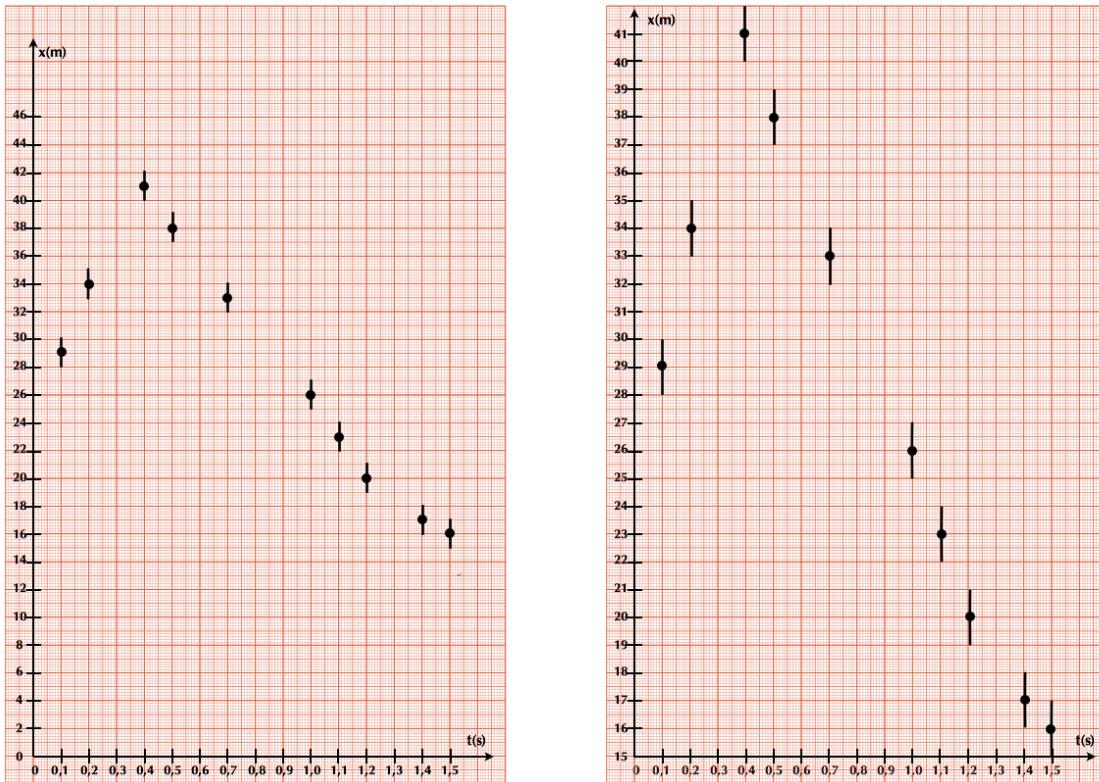


Figura 4.3: Gráfico da posição (x) em função do tempo (s) para o caso A (esquerda). Gráfico da posição (x) em função do tempo (s) para o caso B (direita).

é necessário começar do zero, podemos começar por exemplo de 15 m (caso B) e escolher uma escala de 1 cm para cada 1 m (Figura 4.3 (direita)). Desta forma podemos observar melhor a estrutura própria do gráfico. Uma vez definida a escala, marcamos valores regularmente espaçados nos eixos correspondentes e identificamos os eixos com as grandezas que estes representam, com suas respectivas unidades. Finalmente, desenha-se os pontos com suas barras de erro de acordo com a tabela de dados, como pode se ver na Figura 4.3. A barra de erro é a representação gráfica da incerteza. Assim, ela deve ser desenhada como uma reta que vai de um valor igual ao valor do ponto subtraído do valor de uma incerteza até o valor do ponto somado de uma incerteza.

Não existe uma única forma de representar os nossos dados. No exemplo anterior, ambos os gráficos estão corretos. **O importante é que se deve adotar uma “escala limpa e fácil de ser lida” de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.**

866

867

Ajuste linear

868 Ajuste de uma função linear por Mínimos Quadrados

869 Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encon-
870 trar uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. A forma de realizá-la é medi-
871 ante o procedimento de Mínimos Quadrados, que no caso particular de uma função linear
872 chama-se de regressão ou ajuste linear. Em Física Experimental I, só trabalharemos com
873 este tipo de ajuste, seja porque as relações das grandezas medidas tem uma relação linear
874 ou porque seremos capazes de linearizar relações entre grandezas.

Vamos então nos focalizar só no caso da regressão linear, deixando o caso mais genérico de mínimos quadrados para ser estudado mais para a frente. Na Figura 5.1, mostramos o caso linear. A dispersão dos valores está associada às flutuações dos valores de cada variável. Supomos uma tendência linear entre as variáveis X e Y, e nos perguntamos qual é a melhor reta:

$$y(x) = ax + b \quad (5.1)$$

875 que ajusta estes dados. A quantidade $y_i - y(x_i)$ representa o desvio de cada medida y_i em
876 relação ao valor previsto pelo modelo $y(x)$.

Vamos definir uma função χ^2 (chi-quadrado), dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.2)$$

onde N é o número de pontos que serão utilizados para a realização do ajuste linear. Desta forma, a função χ^2 é uma medida do desvio total dos valores medidos y_i em relação aos valores previstos pelo modelo linear $ax + b$. Os melhores valores para o coeficiente angular a e o coeficiente linear b são os que minimizam este desvio total, ou seja o valor de χ^2 .

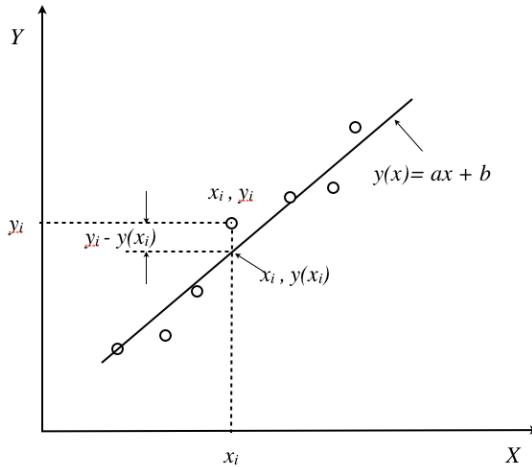


Figura 5.1: Gráfico de dados associado a um modelo linear.

Portanto, os melhores valores de a e b serão os que satisfazem:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (5.3)$$

Resolvendo as duas equações obtemos (mostrar):

$$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.4)$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.5)$$

Estes dois resultados se aplicam ao caso em que todos os dados da variável dependente (y) têm a mesma incerteza absoluta e a incerteza da variável independente (x) considera-se desprezível. As incertezas dos parâmetros a e b são dadas por:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N V[x]}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_i x_i^2}{N V[x]}} \quad (5.6)$$

onde $V[x]$ é a variância de x e χ_N^2 é conhecido como o chi-quadrado por grau de liberdade (ou chi-quadrado reduzido), que no caso linear está dado por:

$$\chi_N^2 = \frac{1}{N-2} \chi^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.7)$$

A qualidade do ajuste linear pode ser determinada pelo *coeficiente de correlação* dado por:

$$\rho = \frac{\frac{1}{N} \sum_i x_i y_i - \frac{1}{N^2} \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{V[x]V[y]}} \quad (5.8)$$

onde:

$$V[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \quad \text{e} \quad V[y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \quad (5.9)$$

⁸⁷⁷ Método gráfico para ajustar uma reta com incerteza

⁸⁷⁸ Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encontrar
⁸⁷⁹ uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. No Capítulo 4 da parte Conceitos Básicos na apostila discutimos como isto é feito analiticamente mediante o método
⁸⁸⁰ de mínimos quadrados, mas aqui estudaremos como fazê-lo a partir do gráfico de Y em
⁸⁸¹ função de X, o que chamamos de **método gráfico**.

⁸⁸³ Na Figura 5.2 podemos observar a distribuição dos dados, círculos abertos, que queremos
⁸⁸⁴ ajustar. Neste caso, para simplificar, vamos considerar que a incerteza associada a cada
⁸⁸⁵ medida é do tamanho do ponto. Para ajustar graficamente os pontos por uma reta que
⁸⁸⁶ melhor representa a variação de Y em função de X devemos traçar uma reta de forma tal
⁸⁸⁷ que os pontos que se situem “acima” da reta se vejam compensados pelos pontos que se
 situem “abaixo” da mesma, como na linha cheia mostrada na Figura 5.2¹.

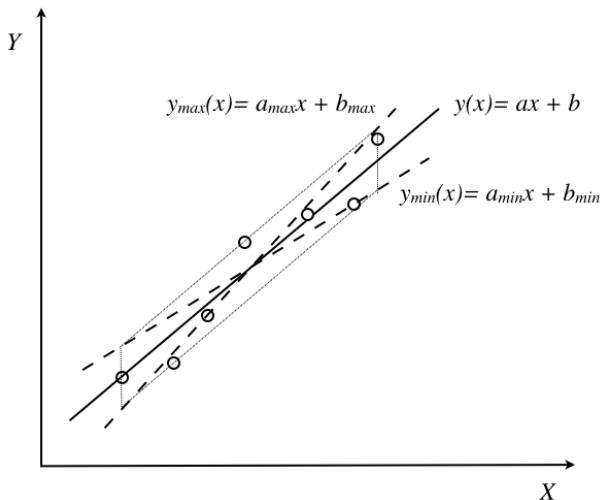


Figura 5.2: Método para ajuste linear.

⁸⁸⁸

⁸⁸⁹ Desta forma podemos determinar o coeficiente angular (a) e linear (b) para a equação da
⁸⁹⁰ reta $y = ax + b$. Mas mesmo no caso gráfico é preciso dar as incertezas associadas à
⁸⁹¹ determinação de a e b . Para isto, vamos traçar duas linhas paralelas à melhor reta (R)
⁸⁹² que ajusta os nossos dados encontrados, uma passando pelo ponto mais afastado “acima”
⁸⁹³ da reta R e outra pelo ponto mais afastado “abaixo” da reta R . Caso exista um ou outro

¹Note que o uso de uma régua transparente é conveniente pois permite ter uma visão global de todos os pontos.

894 ponto excepcionalmente afastado da reta média poderá não ser considerado pois a proba-
895 bilidade de corresponder a uma medida incorreta é grande. Obtendo a interseção destas
896 retas por duas retas paralelas ao eixo-y que contêm o primeiro e último ponto experimental
897 representado temos um “paralelogramo de incerteza” como é mostrado na figura (parale-
898 logramo pontilhado). A partir deste, desenhamos as duas retas diagonais achando o que
899 chamaremos a reta de máxima $y_{max} = a_{max}x + b_{max}$ e a de mínima $y_{min} = a_{min}x + b_{min}$ (ver
900 figura).

A partir destas três retas, podemos então determinar as incertezas associadas para o coeficiente angular δa e linear δb como:

$$\delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

$$\delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

6

901
902

Determinação da velocidade instantânea

No movimento uniformemente acelerado a velocidade da partícula em um instante t pode ser calculada a partir da velocidade média calculada entre os instantes $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$ com Δt constante. Isto é:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (6.1)$$

Assim, para um conjunto de medições de posição em função do tempo, podemos calcular a velocidade em cada ponto (i) a partir das medições de tempo e posição do ponto posterior (t_{i+1} e x_{i+1}) e anterior (t_{i-1} e x_{i-1}), utilizando a fórmula:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (6.2)$$

Para cada valor de velocidade também podemos calcular a incerteza associada mediante a fórmula de propagação de incertezas. Desprezando a incerteza na determinação do tempo, obtemos:

$$\delta_{v_i}^2 = \frac{\delta_{x_{i+1}}^2 + \delta_{x_{i-1}}^2}{(t_{i+1} - t_{i-1})^2} \quad (6.3)$$

onde $\delta_{x_{i+1}}$ e $\delta_{x_{i-1}}$ são as incertezas na determinação da posição x_{i+1} e x_{i-1} respectivamente.

Distribuição Gaussiana

906 Valor médio, Desvio Padrão e Densidade de Probabilidade

Sejam N medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Como alguns dos valores x_i medidos podem ser repetidos, podemos dizer que para esta grandeza temos M **eventos** possíveis de medida tal que $M \leq N$ e eles são: y_1, y_2, \dots, y_M . Então, podemos definir a **frequência de ocorrência** do evento y_i como $N(y_i)$ de forma tal que:

$$\sum_{i=1}^M N(y_i) = N. \quad (7.1)$$

Desta forma, podemos definir a **frequência relativa** como a fração de eventos y_i em relação ao número total de eventos N , dada por:

$$F(y_i) = \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.2)$$

de forma que (mostrar):

$$\sum_{i=1}^M F(y_i) = 1. \quad (7.3)$$

Se o processo é repetido indefinidamente, ou seja, $N \rightarrow \infty$, a frequência relativa é interpretada como a **probabilidade de ocorrência** do evento y_i :

$$P(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.4)$$

907 e como sabemos que $0 \leq N(y_i) \leq N$, então $0 \leq P(y_i) \leq 1$.

908 No Capítulo 2 da parte Conceitos Básicos definimos os conceitos de valor médio e desvio
909 padrão. Agora podemos re-escrever estas definições em função da frequência relativa,
910 obtendo:

1. Valor médio

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^M F(x_i)x_i, \quad (7.5)$$

2. Variância $V[x] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2 F(x_i) \quad (7.6)$$

911 Quando realizamos observações experimentais utilizamos instrumentos que determinam
 912 os valores de grandezas que são continuamente distribuídas. Os resultados são truncados
 913 até o limite da precisão de medida do instrumento utilizado. Por exemplo, um cronômetro
 914 usual mede intervalos de tempo com precisão de um centésimo de segundo. Isto signi-
 915 fica que intervalos de tempo menores que este valor não podem ser medidos com este
 916 instrumento. Assim, os resultados obtidos serão representados por um número finito de
 917 valores, mesmo que a variável observada seja contínua. Algumas vezes, o número de va-
 918 lores possíveis medidos, mesmo que finito, pode ser muito grande, e para estes casos é
 919 conveniente agrupa-los em intervalos. Desta forma o conjunto de medidas diferentes fica
 920 reduzido sem que a informação da amostra original seja perdida.

Consideremos novamente N medições aleatórias independentes de uma grandeza qual-
 quer, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Para estes casos, definimos como o mesmo evento todo resultado da
 realização do processo aleatório y que caia num intervalo de valores Δy , de forma que o
 evento agora será caracterizado por $\{y_i, \Delta y\}$:

$$y_i - \frac{\Delta y}{2} \leq x_j < y_i + \frac{\Delta y}{2}. \quad (7.7)$$

A probabilidade de ocorrência do evento $\{y_i, \Delta y\}$ é definida por:

$$P(y_i) = \Delta P_i \quad (7.8)$$

onde ΔP_i é a probabilidade de encontrarmos como resultado da realização do processo
 aleatório, valores no intervalo $\{y_i - \frac{\Delta y}{2}, y_i + \frac{\Delta y}{2}\}$. Para intervalos Δy pequenos, podemos
 escrever a seguinte relação:

$$P(y_i) = \Delta P_i = p(y_i)\Delta y \quad (7.9)$$

onde $p(y_i)$ é denominada de densidade de probabilidade do evento aleatório y_i . E se
 $\Delta y \rightarrow 0$, então ΔP_i e Δy são infinitesimais podendo escrever a densidade de probabi-
 lidade como:

$$p(y) = \frac{dP}{dy} \quad (7.10)$$

sendo que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = 1 \quad (7.11)$$

Em N repetições de um processo aleatório real, a aproximação experimental para a proba-

bilidade de realização de um evento é a frequência relativa $F(y_i)$, definida na equação 7.2. Assim, a densidade de probabilidade experimental $p_{exp}(y_i)$ de ocorrência do evento $\{y_i, \Delta y\}$ é dada por:

$$p_{exp}(y_i) = \frac{F(y_i)}{\Delta y}. \quad (7.12)$$

Para o caso contínuo e utilizando o conceito de densidade de probabilidade, o valor médio (μ) e a variância (σ^2) podem ser escritos da seguinte forma:

1. Valor médio

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy. \quad (7.13)$$

2. Variância $V[y] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 p(y) dy. \quad (7.14)$$

924 Função de Laplace-Gauss

Em muitas situações experimentais utilizamos **distribuições Gaussianas** para interpretar nossos resultados físicos, em parte porque os fundamentos teóricos das medições realizadas se correspondem com distribuições Gaussianas ou porque a experiência tem nos mostrado que a estatística de Gauss nos proporciona uma descrição razoavelmente acurada dos vários eventos reais. Na distribuição Gaussiana, a densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7.15)$$

onde μ é o valor médio e σ o desvio padrão da distribuição, dados pelas equações discutidas anteriormente.

Na Figura 7.1 apresentamos a função Gaussiana de densidade de probabilidade para a variável continua x . Esta função é também chamada de função de Laplace-Gauss ou função Normal. O gráfico da função Gaussiana é uma curva simétrica em forma de "sino" com uma altura máxima dada por $G_{max} = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$. Pode ser mostrado a partir da equação 7.15 que σ é a meia largura da curva na altura correspondente a $\sim 0,61G_{max}$ e que a área sob a curva entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ (região pintada na Figura 7.1) corresponde a 68,3% da área total. Isto quer dizer que a probabilidade de medirmos um valor no intervalo $\mu \pm \sigma$ é 68,3%. Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que a probabilidade de encontrarmos um valor entre $\mu \pm 2\sigma$ é 95,4% e entre $\mu \pm 3\sigma$ é 99,7%.

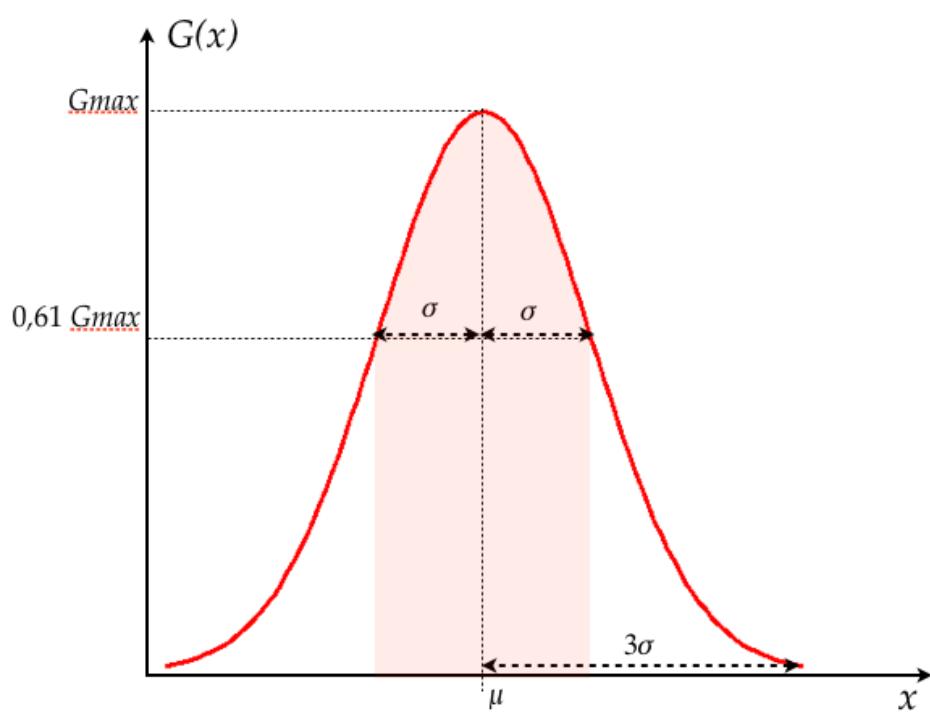


Figura 7.1: Representação da função Gaussiana.

Bibliografia

- 938 [1] Fundamentos da Teoria de Erros, José Henrique Vuolo, 2.^a Edição 1996, Editora Edgar
939 Blücher Ltda,
- 940 [2] Curso de Física Básica, – Mecânica Volume 1), H. Moysés Nussenzveig, 2.^a Edição 2015,
941 Ed. Edgard Blücher Ltda,
- 942 [3] Física I – Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman, 14.^a Edição 2016, Pearson
943 Education do Brasdil Ltda.,
- 944 [4] *Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, L. Galante e I. Gnesi, American
945 Journal of Physics **88**, 279 (2020).
- 946 [5] *Uma visão diferenciada sobre o ensino de forças impulsivas usando um smartphone*, V. L. B. de
947 Jesus e D. G. G. Sasaki, Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, 1303 (2016).

PARTE III

EXERCÍCIOS

1

949

950

Algarismos significativos

- 951 Expressse corretamente os resultados para as seguintes medições com suas respectivas incertezas.
952

953

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
1	67,002	0,023	cm	
2	0,001	2,3	erg	
3	45612,98	345	cm/s	
4	14	29	erg	
5	152,389	0,037	cm/s ²	
6	74,58	3,14	g	
7	0,0012	0,0001	m	
8	120034	2607	m/s ²	
9	45,98	2,1	erg	
10	65555,467	56,001	g	
11	23,456	1,2	m	
12	0,173	0,056	cm ³	
13	45001,6	657,31	J	
14	45,629	2,5914	km/h	
15	104104	104	m ²	
16	0,0826	0,099	cm/s	
17	3,69	1,582	mm ³	

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
18	19,78	5,46	kg	
19	0,458	0,177	cm	
20	135,589	0,0888	g	
21	25,36	0,84	cm	
22	74589,589	5698,26	erg	
23	0,145	0,5	cm/s	
24	14580,8	37,36	erg	
25	125,369	0,041	cm/s ²	
26	74,58	3,14	g	
27	0,025	0,0074	m	
28	256	0,5	m/s ²	
29	7489	2,1	m/s ²	
30	4789,4	36,001	g	

2

Propagação incerteza

955
956

- 957 1. Os lados de um paralelepípedo são $a = (4,50 \pm 0,05)$ cm, $b = (8,50 \pm 0,09)$ cm e $c = (35,0 \pm 0,3)$ mm. Determinar o volume do cubo com sua incerteza absoluta e relativa.
- 958
- 959 2. Na medição da resistência (R), se obteve o valor da tensão $V = (15,2 \pm 0,2)$ V e da
- 960 corrente $I = (2,6 \pm 0,1)$ A. Qual é a incerteza absoluta da resistência usando a equação
- 961 $R = V/I$?
- 962 3. Um pêndulo simples é utilizado para medir o valor da aceleração da gravidade uti-
- 963 lizando equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

964 O período T medido foi de $(1,24 \pm 0,02)$ s e o comprimento do pêndulo $l = (0,381 \pm$
965 $0,002)$ m. Qual é o resultado do valor da aceleração da gravidade g com sua incerteza
966 absoluta e relativa?

- 967 4. Para medir o comprimento total de um pêndulo (fio + esfera) usou-se uma régua mi-
- 968 limetrada para medir o comprimento do fio e um paquímetro para medir o diâmetro
- 969 da esfera. Observam-se os seguintes valores com as suas respectivas incertezas:

970 Comprimento do fio = 2,100 m

971 Incerteza comprimento do fio = 0,5 cm

972 Diâmetro da esfera = 2,114 cm

973 Incerteza do diâmetro da esfera = 0,01 mm

974 Ache o comprimento total e a sua incerteza associada.

- 975 5. Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma: $R = (232,0 \pm$
976 $0,1)$ mm. Calcular seu volume com a sua respectiva incerteza relativa.
- 977 6. A partir da figura 2.1, com as seguintes medidas:

978 $L_1 = (5,00 \pm 0,05)$ cm

979 $L_2 = (20,00 \pm 0,05)$ mm

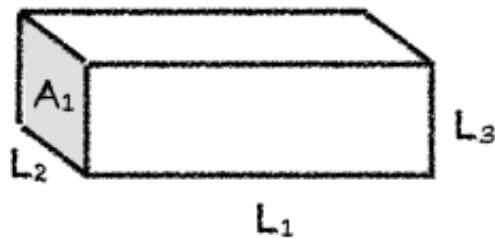


Figura 2.1: Bloco retangular.

$$L_3 = (15,00 \pm 0,01) \text{ mm}$$

- (a) Determine a área A_1 com a incerteza correspondente.
 (b) Determine o volume desta peça com a incerteza correspondente.
 (c) Se a precisão necessária para o resultado da área é de 0,5% podemos considerar este resultado satisfatório?

7. Para determinar a altura de uma cachoeira, algumas pessoas mediram o tempo de queda de pedrinhas que eram soltas, em queda livre, de um mesmo local. Conhecendo o tempo de queda t , pode-se calcular a altura h a partir da relação cinemática $h = 1/2gt^2$ em que g é a aceleração da gravidade. Foi utilizado um cronômetro com precisão de centésimos de segundo e os valores t_i obtidos em 8 medidas estão na seguinte tabela:

	$t(\text{s})$
1	1,30
2	1,09
3	1,03
4	1,27
5	1,18
6	1,31
7	1,24
8	1,15

Considerando $g = (9,784 \pm 0,001) \text{ m/s}^2$, calcule a altura da cachoeira e a sua incerteza.

PARTE IV

APÊNDICES



995
996

Caderno de laboratório

- 997 1. **É um documento.** Nele se tem todos os registros cronológicos de um experimentos
998 ou ideia. Portanto, deve ter datas, sem rasuras nem espaços em branco, sem inserções
999 e se possível assinado por quem realizou as anotações.
- 1000 2. **É pessoal.** Pode haver outros cadernos de uso compartilhado, por exemplo, para
1001 equipamentos ou instrumentos de laboratório, etc., onde se registram informações
1002 de uso geral, como mudanças introduzidas em configurações experimentais ou es-
1003 tado de conservação dos equipamentos. Mas o caderno de laboratório contem ideias,
1004 propostas e modo de colocar a informação que são pessoais, próprias de cada pessoa.
- 1005 3. **É um registro de anotação em sequência.** Não se devem intercalar resultados nem
1006 se corrigir o que está escrito. Em caso de se detectar um erro, se anota na margem o
1007 erro encontrado e a página na qual se corrige. Isto permite saber se o erro pode-se
1008 voltar a encontrar e a partir de que dados foi corrigido. Por este mesmo motivo não
1009 se deve escrever a lápis.
- 1010 4. As páginas devem ser numeradas. Isto permite fazer referência de forma fácil e or-
1011 ganizada às anotações anteriores, assim como também indicar na margem onde se
1012 corrigem os erros.
- 1013 5. As fórmulas e figuras devem ter uma numeração consistente e interna. Um exem-
1014 plo prático é numerar todas as fórmulas dentro de cada página ou folha e citá-las
1015 por página-fórmula. É importante numerar todas as fórmulas, pois não sabemos no
1016 futuro qual necessitaremos citar ou utilizar.
- 1017 6. Referências completas. No caso em que se deva utilizar uma referência externa (ro-
1018 teiro do experimento, artigo, livro, etc.), esta referência deve ser completa. Se uma
1019 referência é citada com frequência pode-se utilizar a última página do caderno para
1020 registrá-la e citá-la por seu número. Quando citamos alguma coisa, sempre acredita-
1021 mos que vamos nos lembrar de onde saiu, mas isto só é assim a curto prazo.
- 1022 7. **Deve-se escrever todos os resultados.** Indicar sempre a maior quantidade de in-
1023 formação possível do experimento. Todas as condições experimentais devem ser

1024 corretamente registradas e deve-se utilizar diagramas claros das configurações ex-
1025perimentais e indicando também cada vez que há uma mudança. Um dado ou
1026 informação que hoje parece irrelevante em função do nosso modelo da realidade,
1027 pode resultar vital ao descobrir que nossas ideias estavam erradas ou eram incom-
1028pletas. A falta de um dado de aparência menor pode invalidar tudo o que foi reali-
1029zado.

1030 **8. Deve-se escrever o plano.** O que é que se pretende medir, o que é que se procura e
1031 as considerações ou razões pelas quais se faz o experimento. O planejamento do ex-
1032perimento e as ideias a serem realizadas devem ser explícitas. A anotação sequencial
1033 permite seguir a evolução das idéias, dado vital também para interpretar os resul-
1034tados, pois os preconceitos condicionam o que se mede e como se mede. Saber o que
1035 se pensava no momento de medir vai nos indicar se nesse momento tivemos uma
1036determinada precaução que depois demonstrou ser fundamental.

1037 **9. Deve-se escrever as conclusões.** O mesmo vale para o planejamento do experimento.

1038 **10. Fazer uma reorganização periódica das ideias.** Se uma ideia tem evoluído desde o
1039 inicio do experimento, é conveniente periodicamente fazer um quadro da situação,
1040 passando a limpo o que foi feito, para não ter que reconstruir a história a cada vez.



1041
1042

Como escrever um relatório?

1043 A idéia desta nota é dar aos alunos de Física Experimental I algumas dicas e recomenda-
1044 ções de como escrever um relatório. Infelizmente, não existe uma “receita” para isto, pois
1045 há várias maneiras de fazer um relatório, dependendo do tipo de trabalho realizado e de
1046 quem o escreva. Portanto, a organização do relatório pode ser diferente apresentando di-
1047 ferentes distribuições de seções. Nesta nota propõe-se uma estrutura básica com algumas
1048 sugestões, mas será com a experiência, com a prática e com as sucessivas correções do pro-
1049 fessor que os alunos aprenderão a fazê-lo. Escrever um relatório é um aprendizado que se
1050 obtém aos poucos.

1051 O ponto principal a ser tido em conta é que no relatório deve-se apresentar os resultados
1052 obtidos de forma clara e concisa. Para isto, deve-se expor cuidadosamente quais são os
1053 objetivos do trabalho realizado, os conceitos físicos básicos necessários para a realização
1054 do experimento e como ele foi realizado, entre outros. O relatório tem que ser escrito
1055 de modo que um leitor que nunca tenha realizado o experimento descrito, ou a pesquisa
1056 realizada, seja capaz de entender e até reproduzir o trabalho a partir do conhecimento
1057 adquirido na sua leitura. Para começar, sugere-se a seguinte distribuição:

- 1058 • **Título e autores:** O título deve descrever claramente o conteúdo do trabalho. O re-
1059 latório tem que ter o(s) nome(s) do(s) autor(es) e as informações relevantes referentes
1060 a ele(s).
- 1061 • **Resumo:** Deve dar uma visão completa do trabalho realizado. De forma breve, deve-
1062 se descrever qual é o objetivo do mesmo, o que foi feito e qual foi o resultado obtido.
- 1063 • **Introdução:** Nela expõem-se as motivações do trabalho e os objetivos a serem atin-
1064 gidos. Deve-se apresentar uma revisão da informação existente sobre o tema em
1065 questão. Também, deve-se incluir uma explicação teórica mínima (não copiada de
1066 livro, mas elaborada pelos alunos) que permita a compreensão do trabalho e como
1067 esta informação está aplicada ao experimento específico.
- 1068 • **Método experimental ou Descrição do experimento:** Deve-se descrever em deta-
1069 lhe a configuração experimental utilizada, os métodos utilizados para a realização

das medições, incluindo a fundamentação física. Deve-se realizar uma descrição dos aspectos relevantes dos dispositivos e equipamentos utilizados, especificando suas características importantes (precisão dos instrumentos, intervalos de medição, etc). Pode-se representar esquematicamente o dispositivo empregado para a realização do experimento de forma a acompanhar as explicações e facilitar a compreensão do leitor.

- **Resultados e discussão:** Esta seção tem que ser uma continuação natural da Introdução e do Método experimental ou Descrição do experimento. Deve-se incluir tabelas dos dados colhidos junto com as suas incertezas e a explicação de como foram avaliadas essas incertezas. Também deve ser realizada uma descrição de como a análise de dados foi realizada e como os resultados foram obtidos. Deve-se incluir também gráficos, junto com as curvas de ajuste dos dados realizados. Além da análise dos dados, é fundamental realizar uma discussão dos mesmos: sua validade, precisão e a sua interpretação. Dependendo do caso, pode-se realizar uma proposição de um modelo para a descrição dos resultados ou realizar uma comparação com o modelo teórico já discutido na introdução. Caso seja necessária a utilização de equações, elas devem estar explicitadas ou, se já foram introduzidas anteriormente (na introdução), através de uma referência ao número de equação correspondente.

Levar em conta que, dependendo do relatório e do trabalho apresentados, pode-se separar esta seção em duas independentes, uma de resultados e outra de discussões.

Figuras e tabelas: cada figura ou tabela deve estar numerada e deve conter uma legenda ao pé que permita entendê-la. A descrição detalhada da figura deve estar incluída também no texto e referenciada pelo número. Os gráficos são considerados figuras, então deverão ser numerados de forma correlacionada com as mesmas.

- **Conclusões:** Deve conter uma discussão de como a partir dos resultados obtidos mostra-se que as hipóteses e objetivos do trabalho foram satisfeitos ou não. Espera-se que a discussão do trabalho seja feita de forma crítica podendo-se propor melhorias ao trabalho realizado, tanto na metodologia empregada quanto nas propostas para ampliar o objetivo do experimento no futuro.
- **Referências:** Deve-se informar a bibliografia citada durante o desenvolvimento do trabalho. A bibliografia pode estar relacionada ao modelo teórico discutido, a referências de equipamento utilizado, ou a artigos de referência no qual o trabalho foi baseado.
- **Apêndice:** Caso seja necessário, pode-se anexar um ou mais apêndices com informação complementar que ajude a esclarecer o conteúdo das partes anteriores (cálculos realizados para obter um dado resultado, estimativa de incertezas, etc.), mas que no corpo principal do relatório desviariam a atenção do leitor. No(s) apêndice(s) coloca-se geralmente informação adicional necessária, mas não fundamental.



1108

1109

Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Se a força resultante sobre uma partícula de massa m for, \vec{F} , a segunda lei de Newton diz que:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{C.1})$$

com \vec{a} sendo o vetor aceleração da partícula. No caso de \vec{F} ser uma força constante, *viz.* não depende nem do tempo, nem da posição da partícula e nem da velocidade da mesma, da Eq.(C.1) vemos que a aceleração \vec{a} é constante. Assim, a Eq.(C.1) pode ser facilmente integrada para obtermos:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m \int_{t_0}^t \vec{a} dt \implies \vec{F}(t - t_0) = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \implies \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.2})$$

com $\vec{v} := \vec{v}(t)$ e $\vec{v}_0 := \vec{v}(t_0)$. Integrando temporalmente mais uma vez ambos os membros da Eq.(C.2) obtemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.3})$$

com $\vec{r} := \vec{r}(t)$ sendo a posição da partícula como função do tempo e $\vec{r}_0 := \vec{r}(t_0)$ a sua posição inicial.

Vamos supor agora que a força resultante \vec{F} é paralela à velocidade inicial \vec{v}_0 . Como a soma vetorial de vetores paralelos continua sendo um vetor na mesma direção que os vetores somados, de acordo com a Eq.(C.2), a velocidade $\vec{v}(t)$ é paralela a \vec{v}_0 para todo tempo. Portanto trata-se de um movimento retilíneo. Como também a aceleração é constante o movimento se denomina Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Sem perda de generalidade podemos chamar de eixo “y” o eixo coordenado na direção de movimento, e as equações de movimento, Eqs.(C.1) e (C.2), nessa direção são:

$$y = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{F}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.5})$$

1119 com $y := y(t)$ e $v_y := v_y(t)$ e as condições iniciais, $y_0 := y(t_0)$ e $v_{y0} := v_y(t_0)$.



1120

1121

Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker

1122 Uma vez baixada a versão do aplicativo Tracker para o sistema operacional de seu com-
1123 putador, a partir do endereço eletrônico <https://physlets.org/tracker/>, instale-o seguindo
1124 as orientações no próprio sítio da Internet. Com o aplicativo instalado, siga os sete passos
1125 descritos a seguir para realizar a tomada de dados.

Passo 1: Escolha de idioma português

1126 Abra o aplicativo e no caminho Edit > Language > e escolha a opção português como
1127
1128 mostra a Figura D.1.

Passo 2: Abertura do arquivo do vídeo a ser analisado

1129 Para abrir o arquivo do tipo vídeo gravado com o celular faça um “click” na aba “Arquivo”
1130 e logo na aba “Abrir”. Na janela que abrirá procure onde o arquivo do tipo vídeo está guar-
1131 dado e faça “click” nele. O Tracker carrega vídeos de quase todos os formatos gravados
1132 por celulares mas os arquivos não podem ser muito grandes (o arquivo carregado nas fi-
1133 guras deste tutorial era de 1,3 MB). Se o arquivo não abre tente reduzir o tamanho dele
1134 editando o vídeo no celular, cortando as partes em que a bolinha não se move, antes da
1135 queda, ou quando já está no chão. Na Figura D.2 vemos um vídeo já aberto para análise.
1136
1137
1138

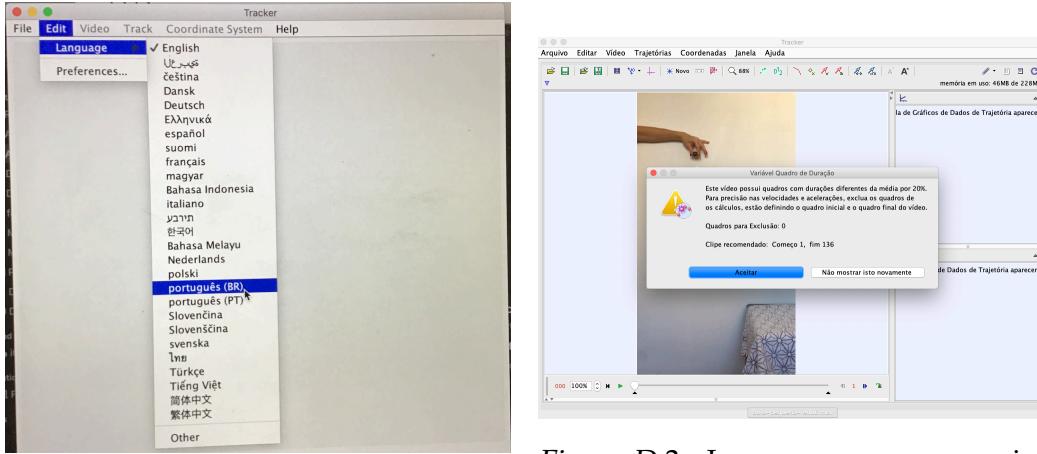


Figura D.1: Escolha de idioma no aplicativo Tracker.

Figura D.2: Ignore a mensagem na janela fazendo “click em “Aceitar”.

Passo 3: Determinação dos quadros inicial e final da análise

- 1140 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.3 para abrir a janela de “Ajustes
1141 de Corte de Vídeo”. Muitas vezes no lugar assinalado com uma seta vermelha na Figura
1142 D.3 aparece um valor muito próximo de 30.00/s (trinta quadros por segundo), apague o
1143 valor e coloque exatamente 30.00/s.
1144
1145 As setas verdes e laranja da Figura D.3 mostram os lugares onde deveremos colocar os
1146 valores numéricos corretos dos quadros iniciais e finais respectivamente. Para escolher o
1147 quadro inicial correto movimente o ícone preto indicado pela seta verde na Figura D.4 até
1148 ver a bolinha justa saindo da mão. Verá que o valor numérico do quadro inicial se coloca
1149 automaticamente no lugar indicado pela seta verde na Figura D.3. Para escolher o quadro
1150 final faça o mesmo com o ícone preto indicado pela seta laranja na Figura D.4. Escolha o
1151 quadro final mais o menos como no instante mostrado na Figura D.4. Finalmente feche a
1152 janela “Ajustes de Corte de Vídeo” fazendo “click em “Aceitar”.
1153

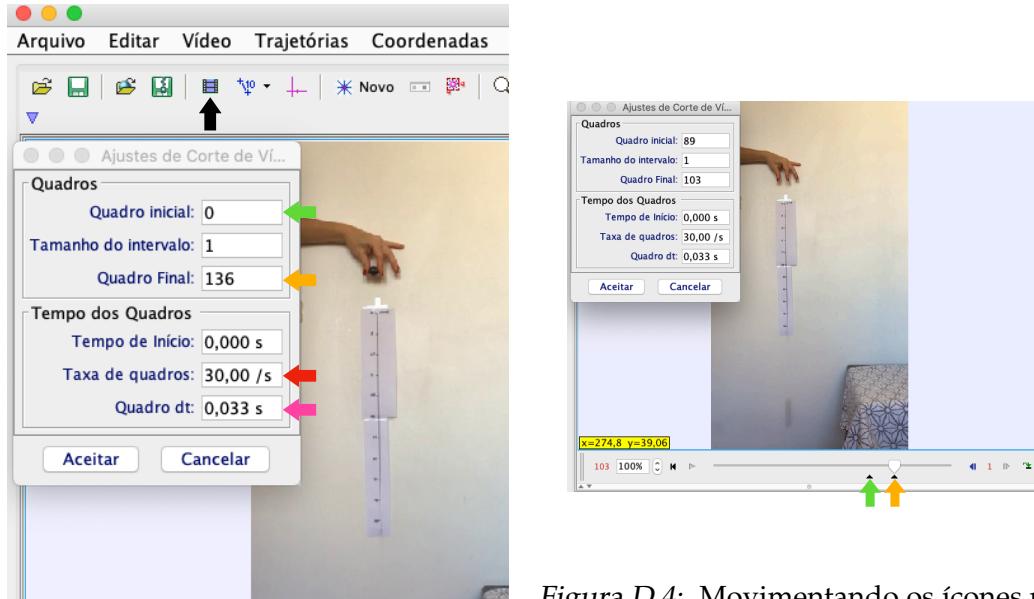


Figura D.4: Movimentando os ícones pretos indicados pelas setas verde e laranja es-
colhemos os quadros iniciais e finais res-
pectivamente.

1154
1155 Figura D.3: Faça “click” no ícone indi-
cado pela seta preta para abrir a janela
de “Ajustes de Corte de Vídeo”.

1155 **Passo 4: Escolha da escala de comprimentos**

1156
1157 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.5 e escolha um novo “bastão
1158 de medição”. De um “zoom” na imagem escolhendo o aumento apropriado no ícone
1159 da lupa de maneira de ver claramente a região da régua na imagem do quadro inicial.
1160 Mantendo apertada a tecla “shift”do computador selecione os pontos iniciais e finais so-
1161 bre a régua como indicado na Figura D.6. Não esqueça de colocar na janela indicada
1162 nessa figura o valor real do comprimento do “bastão de medição” escolhido em metros.

1163

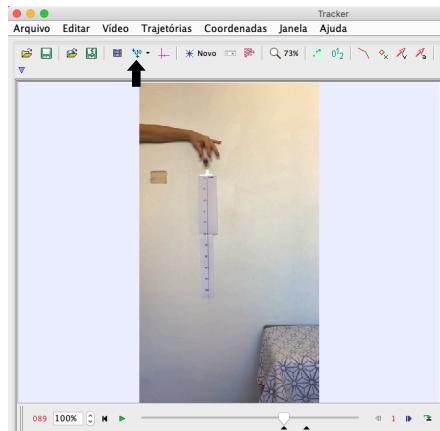


Figura D.5: Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta você pode escolher um “bastão de medição” que definirá a escala.

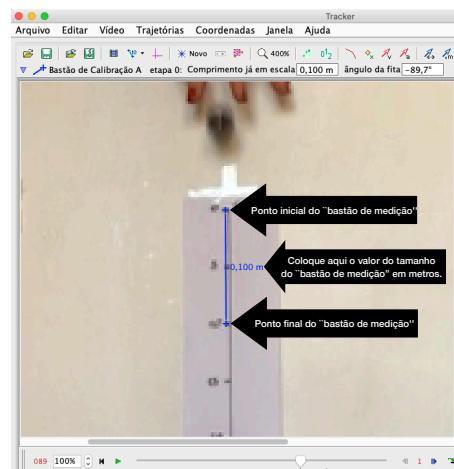


Figura D.6: Determinação do “bastão de medição” que estabelece a escala de comprimentos.

1164 Passo 5: Escolha do sistema de coordenadas

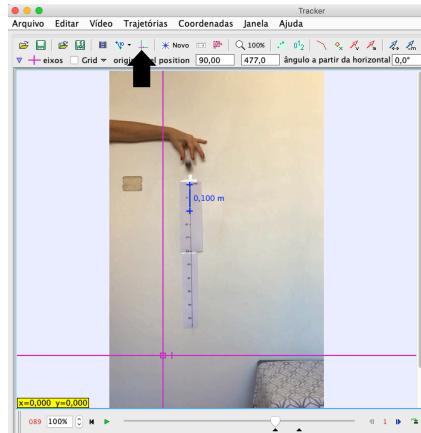
1165

1166 Para escolher um sistema de eixos coordenados faça “click” no ícone indicado pela seta
 1167 preta na Figura D.7. Dessa forma aparecerá o sistema de eixos cor de rosa da figura. Você
 1168 pode deslocar a origem de coordenadas do sistema de eixos fazendo “click” com o botão
 1169 esquerdo do mouse do computador e arrastando a origem para o local que você desejar.
 1170 Também é possível inclinar o sistema de eixos se for necessário (nesta experiência não será
 1171 necessário) fazendo “click” com o botão esquerdo do mouse do computador em qualquer
 1172 eixo e arrastando esse eixo para obter a inclinação desejada.

1173 Passo 6: Escolha da janela de controle da massa cuja trajetória será determinada

1174

1175 Fazendo “click” no ícone marcado pela seta preta na Figura D.8 se abrirá a janela de
 1176 controle da massa (indicada pela seta vermelha na Figura D.8, cuja trajetória será determinada
 1177 (neste caso a bolinha da figura). Fazendo “click” na seta verde você poderá escolher qual
 1178 gráfico quer visualizar uma vez escolhidos os pontos da trajetória cuja forma será ensi-
 1179 nada no próximo passo deste tutorial. Também fazendo “click” na aba “Dados” assina-
 1180 lada pela seta azul na Figura D.8 se abrirá a janela onde você poderá selecionar (seta rosa
 1181 na figura) as colunas que apareceram na janela de tabelas (indicada também na figura).



1182

Figura D.7: Para criar um sistema de coordenadas (eixos de cor rosa na Figura) faça “click” no ícone indicado pela seta preta. Logo posicione a origem de coordenadas, como mostrado na figura, arrastando com o mouse do computador o quadrado rosa no sistema de eixos.

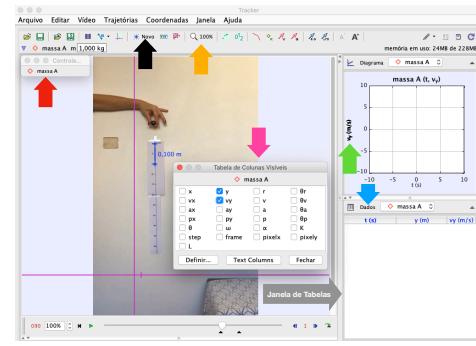


Figura D.8: Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta abre-se a janela indicada pela seta vermelha. Fazendo “click” no ícone indicado pela seta verde se escolhe o gráfico que quer ser visualizado após determinar os pontos da trajetória. Fazendo “click” na aba “Dados”, indicada pela seta azul, abre-se a janela indicada pela seta rosa onde podem ser escolhidas as colunas das tabelas de dados que apareceram na janela de tabelas. Se precisar fazer um zoom na imagem pode usar a aba indicada pela seta laranja.

1183 **Passo 7: Determinação dos pontos da trajetória de uma partícula**

1184

1185 Para determinar os pontos da trajetória em forma manual você precisará manter apertada
 1186 a tecla “shift” do computador durante todo o processo de medida . Ao apertar a tecla
 1187 “shift” você entra no modo aquisição de dados e verá que o cursor virá um quadrado
 1188 com um “x” no meio. Ao fazer “click” no ponto que você quer traçar a trajetória (no
 1189 nosso caso será o centro da bolinha) pela primeira vez se marca um ponto da trajetória e a
 1190 imagem pula automaticamente para o próximo quadro e ali você pode marcar o centro da
 1191 bolinha novamente. Repita esse processo até marcar todos os pontos da trajetória contidos
 1192 nas imagens entre os quadros iniciais e finais determinadas no passo 3 deste tutorial. À
 1193 medida que você vai marcando os pontos da trajetória as colunas nas tabelas de dados
 1194 (ver Figura D.8) vão sendo preenchidas em forma automática. No processo de medida
 1195 é importante se auxiliar da ferramenta zoom, indicada pela seta laranja na Figura D.8,
 1196 para ter uma melhor imagem da bolinha e poder determinar com melhor precisão o seu
 1197 centro. Uma vez escolhido um zoom (por exemplo 400%) para enquadrar a imagem da
 1198 bolinha arraste a imagem com o mouse. Na Figura D.9 é mostrado o final do processo de
 1199 medida. Fazendo “double click”, com o botão esquerdo do mouse, no cabeçalho de uma
 1200 coluna, na janela de tabela, você seleciona a janela e os valores ficaram da cor rosa como
 1201 estão os valores da coordenada “y” na Figura D.9. Uma vez selecionada a coluna, fazendo

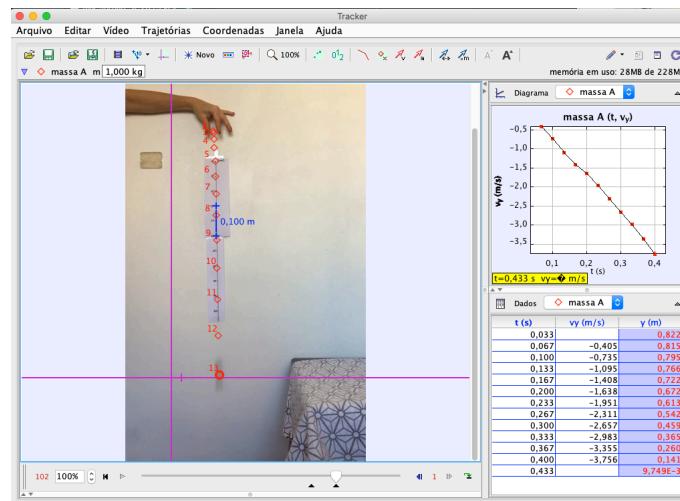


Figura D.9: Pontos da trajetória marcados e dados coletados nas colunas da janela de tabela.

1202 “click” com o botão direito do mouse você abrirá uma janela com varias opções. Na aba
 1203 “Números” você poderá escolher o formato (sem com vírgula ou ponto para separar os
 1204 decimais). Uma vez escolhido o formato você poderá copiar os dados selecionados para
 1205 serem transferidos, por exemplo, para uma planilha tipo Excel.



1206

1207

Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis

1208 VidAnalysis é um aplicativo para análise física de movimentos em vídeos muito fáceis
1209 de usar. O aplicativo é compatível com Android e pode ser baixado gratuitamente em
1210 <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.freey>, ou simplesmente
1211 pesquise no Google Play com o nome VidAnalysis free. O aplicativo possui apenas uma
1212 versão em inglês, mas devido à simplicidade de seu uso, ele não representa nenhum pro-
1213 blema.

1214 Para realizar a coleta de dados das posições do objeto gravado no vídeo, siga as etapas
1215 abaixo:

1216 **Passo 1: Abertura do vídeo a ser analisado**

1217

1218 Primeiro, temos que gravar um vídeo ou importar um existente. Se você decidir importar
1219 um vídeo, “click” no sinal de adição mostrado com uma seta preta na Figura E.1. Como
1220 o aplicativo VidAnalysis suporta apenas formatos de vídeo com extensão “mp4” é reco-
1221 mendável gravar diretamente dentro do aplicativo, escolhendo a opção marcada pela seta
1222 vermelha na Figura E.1. Ao capturar vídeos para análise, é importante que a câmera esteja
1223 fixa, que o movimento esteja dentro do plano da câmera, e que no vídeo gravado apareça
1224 alguma referência de um comprimento conhecido, por exemplo de uma régua.

1225 **Passo 2: Calibração**

1226

1227 Para começar a análise do movimento do objeto primeiramente selecionamos o vídeo no
1228 reprodutor e será aberta a primeira imagem dele como se mostra na Figura E.2. É im-
1229 portante avançar o vídeo nessa tela, para começar a coleta de dados da trajetória do objeto
1230 diretamente no momento em que o movimento começa, para isso fazemos “click” no botão
1231 mostrado pela seta verde na Figura E.2 até avançarmos ao quadro do vídeo que interessa.
1232 Fazendo “click” nos três pontos indicados pela seta azul na Figura E.2, conseguimos ocultar
1233 o menu em preto, para uma melhor visualização do vídeo.

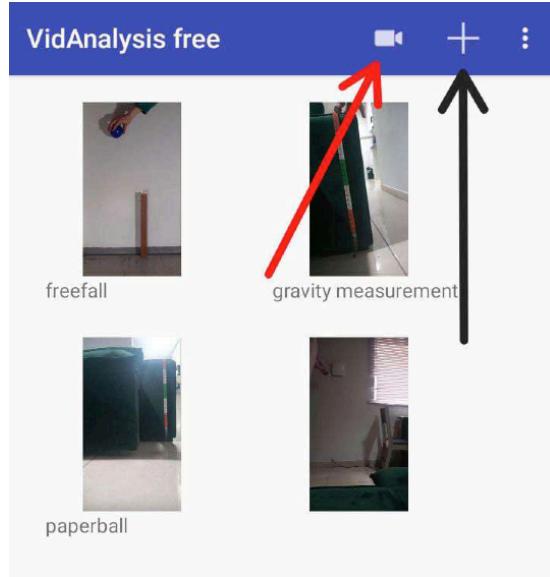


Figura E.1: Menu do aplicativo VidAnalysis.

1234 Antes da coleta de dados deve primeiro calibrar qual é a escala de comprimentos que será
 1235 usada pelo aplicativo. Para isso, fazemos “click” na aba “start analysis” no canto superior
 1236 direito na Figura E.2. Agora temos que marcar o comprimento conhecido. Ao fazer “click”
 1237 no ponto inicial do comprimento conhecido, na tela esse ponto será marcado com uma
 1238 cruz azul. Em seguida, deve fazer “click” novamente no ponto final do comprimento
 1239 conhecido e outra cruz azul indicará esse ponto. Após finalizar essa segunda marcação
 1240 abrirá imediatamente uma janela solicitando o tamanho conhecido, como mostramos na
 1241 Figura E.3. A legenda em inglês na janela pergunta “Qual é o comprimento real disto em
 1242 metros” (“How many meters is this in real” em inglês). É importante saber que a unidade
 1243 a ser usada pelo aplicativo para comprimentos é sempre metros portanto as velocidades
 1244 serão em metros por segundo por exemplo.

1245 Após dar “ok” na janela da escala aparecerá um sistema de eixos coordenados cuja origem
 1246 devemos estabelecer (ver Figura E.4). Em geral, é uma boa ideia posicionar a origem de
 1247 coordenadas de tal maneira que as coordenadas da posição do objeto sempre tenham o
 1248 mesmo sinal ao longo da trajetória.

1249 **Passo 3: Coleta de dados**

1250

1251 A coleta de dados começa fazendo um “click” com o dedo no ponto do objeto que que-

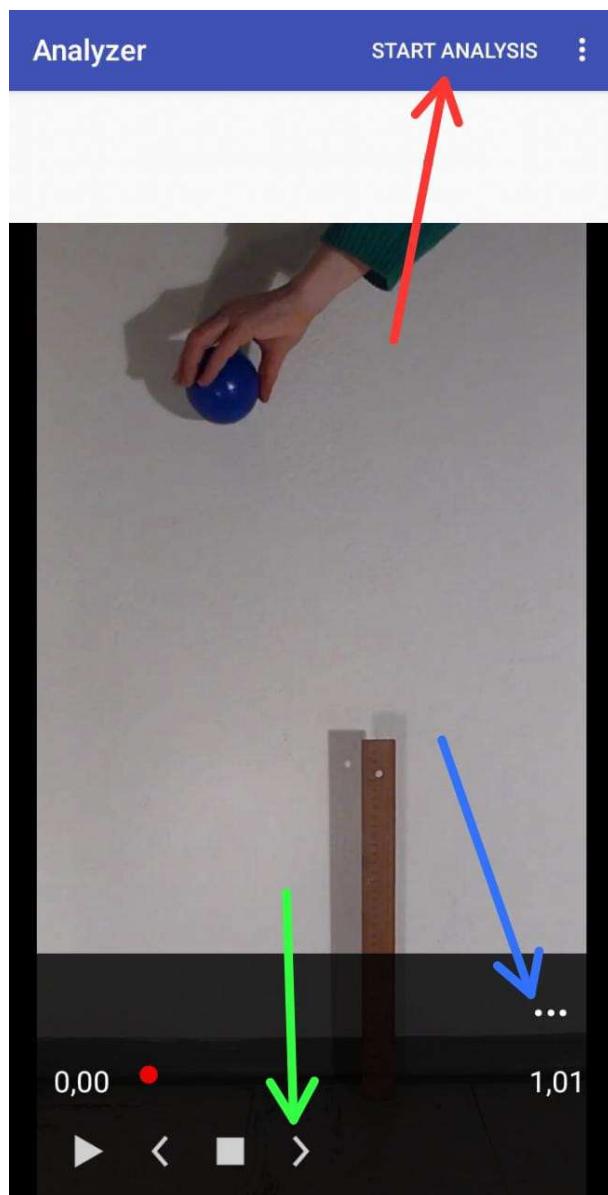


Figura E.2: Reprodutor de video do aplicativo VidAnalysis.

remos seguir a trajetória, por exemplo no meio da bolinha azul na Figura E.4. Como as marcações são feitas com o dedo sugerimos que o corpo, cuja trajetória será determinada, seja suficientemente grande. Depois que o primeiro “click” for feito, uma cruz azul aparecerá e o vídeo avançará alguns quadros. O intervalo de tempo transcorrido, medido em segundos, entre um “click” e outro é automaticamente determinado pelo programa. Vamos fazer “click” novamente tantas vezes como seja necessário para acompanhar a evolução da posição do objeto entre a posição inicial e final previamente estabelecidas. Leve em conta que para uma bolinha em queda vertical uma distância percorrida de um metro é o mínimo necessário para efetuar a análise, mas também não é necessário acompanhar todo o movimento do corpo até o chão.

Como mostrado na Figura 3.2, pode ser que ao longo da trajetória não vejamos o corpo em

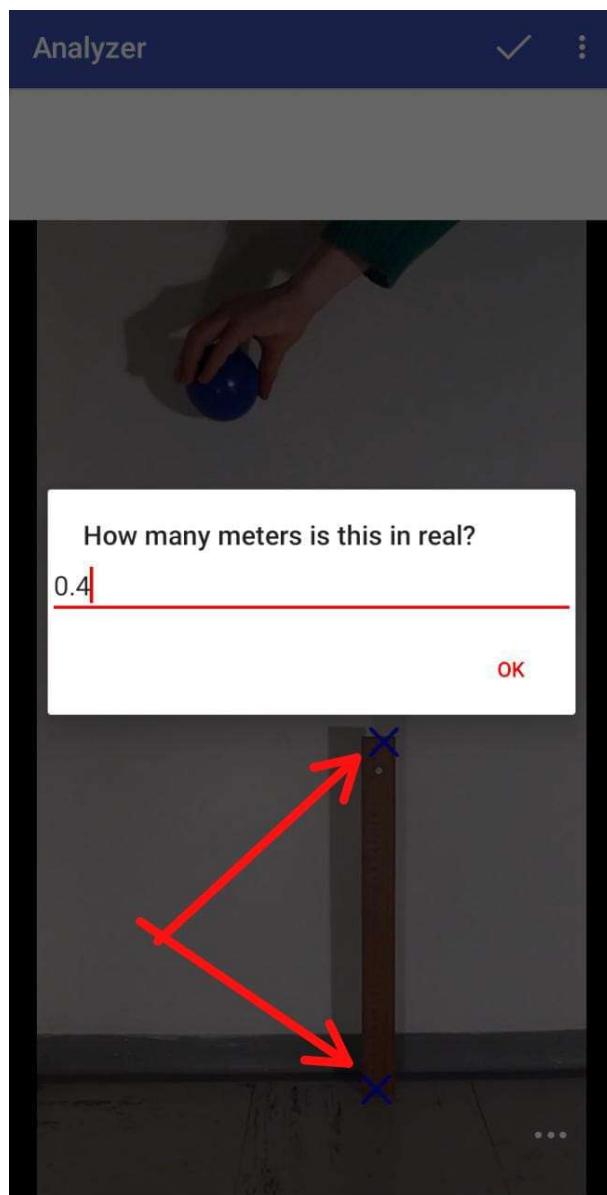


Figura E.3: Escolha da escala de comprimentos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis, a ser usado na tomada de dados dos pontos da trajetória do objeto.

1263 questão claramente definido em uma única posição, mas como uma imagem embaçada
1264 devido à alta velocidade do mesmo. Então para determinar a posição do centro da bolinha
1265 e a sua incerteza siga as orientações indicadas nessa figura e no texto ao lado dela.

1266 **Passo 4: Salvar dados**

1267

1268 Depois de determinados todos os pontos da trajetória do corpo, basta pressionar o botão
1269 “Salvar”, conforme mostrado pela seta vermelha na Figura E.4. Após o “click” se abrirá
1270 uma janela com a frase “Nome para a análise” (“Name for analysis” em inglês). Uma
1271 vez escrito o nome do arquivo de dados dê “click em “ok” e imediatamente verá uma

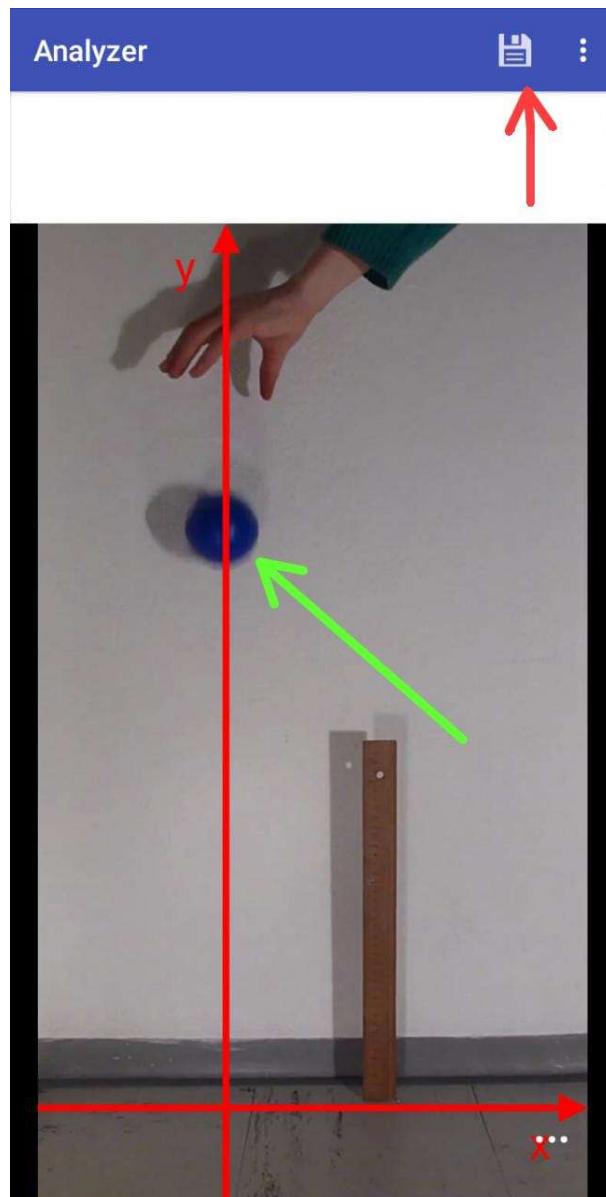
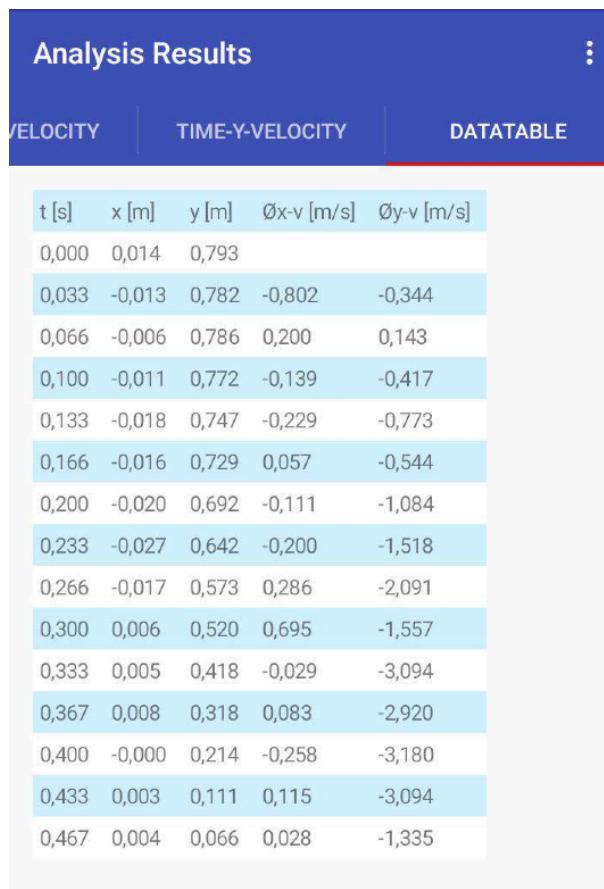


Figura E.4: Sistema de eixos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis.

1272 janela na qual você poderá navegar. Rolando a imagem, no final aparecerá uma tabela
 1273 com várias colunas de dados como mostrada na Figura E.5. É possível também exportar
 1274 essa tabela de dados para um arquivo que é uma planilha no formato “.cvs” (“comma
 1275 separated values”), que poderá ser lida por um programa de computador do tipo Excel.
 1276 Mas também você poderá simplesmente copiar os dados que precisará (por exemplo a
 1277 posição “ y ” como função do tempo “ t ”) numa folha de papel para continuar a análise.

1278 Note que uma vez escolhido o nome do arquivo para a tabela de dados, esta tabela é au-
 1279 tomaticamente guardada pelo aplicativo. Para cada vídeo guardado dentro do aplicativo
 1280 é possível realizar diferentes análises de dados e guardar cada um deles, dentro do apli-
 1281 cativo, com nomes diferentes. Assim, por exemplo, na Figura E.1 vemos vários vídeos guar-
 1282 dados. Se algum desses vídeos já foi analisado, quando fizer “click nele aparecerá uma

1283 janela com várias opções de escolha. A primeira diz “Começar análises” (“Start analysis”
 1284 em inglês), o que permitirá realizar uma nova tomada de dados. Embaixo aparecem as
 1285 outras opções que são os nomes dos diferentes arquivos de dados já guardados. Fazendo
 1286 “click” num deles é possível visualizar seu conteúdo novamente. Note que desta maneira
 1287 é possível guardar a trajetória de mais de uma massa cujo movimento estiver gravado
 1288 no vídeo. Assim, por exemplo, no caso em que a colisão de dois ou mais corpos estiver
 1289 gravada no vídeo, é possível guardar os dados da trajetória de cada um deles.



t [s]	x [m]	y [m]	$\bar{O}x\text{-}v$ [m/s]	$\bar{O}y\text{-}v$ [m/s]
0,000	0,014	0,793		
0,033	-0,013	0,782	-0,802	-0,344
0,066	-0,006	0,786	0,200	0,143
0,100	-0,011	0,772	-0,139	-0,417
0,133	-0,018	0,747	-0,229	-0,773
0,166	-0,016	0,729	0,057	-0,544
0,200	-0,020	0,692	-0,111	-1,084
0,233	-0,027	0,642	-0,200	-1,518
0,266	-0,017	0,573	0,286	-2,091
0,300	0,006	0,520	0,695	-1,557
0,333	0,005	0,418	-0,029	-3,094
0,367	0,008	0,318	0,083	-2,920
0,400	-0,000	0,214	-0,258	-3,180
0,433	0,003	0,111	0,115	-3,094
0,467	0,004	0,066	0,028	-1,335

Figura E.5: Tabela de dados gerada dentro do aplicativo VidAnalysis.



1290

1291

Apêndice: $(E_f - E_i)/E_i$ a partir de traços e um ângulo

Usando as equações para conservação de momento linear e balanço de energia, a variação percentual de energia cinética na colisão com massas iguais pode ser obtida a partir dos comprimentos e ângulos representados na Figura ???. Chamando a velocidade da moeda A logo antes da colisão de v_0 , e as velocidades das moedas A e B logo depois da colisão de v_1 e v_2 , respectivamente, temos

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos(\theta) + m_2 v_2 \cos(\phi), \quad (\text{F.1})$$

$$0 = m_1 v_1 \sin(\theta) - m_2 v_2 \sin(\phi), \quad (\text{F.2})$$

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2. \quad (\text{F.3})$$

Somando os quadrados das equações para conservação de momento linear em x e em y

$$m_1^2 v_0^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi). \quad (\text{F.4})$$

Logo,

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) v_2^2 - m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi), \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 - \frac{E_f}{E_i - E_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{v_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}}}{\left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}} - 2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.6})$$

Se as moedas são iguais, as massas são iguais e também as forças de atrito entre cada moeda e a superfície. Neste caso, usando o teorema trabalho-energia cinética (aqui, $mv^2/2 =$

$F_{at}L)$:

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}}{2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.7})$$

1292 A Equação F.7 mostra que, para moedas iguais, a variação percentual de energia cinética
 1293 na colisão pode ser obtida medindo apenas comprimentos e um ângulo entre trajetórias
 1294 das duas, sem nem mesmo uma calibração para os comprimentos dos traços. Os dois
 1295 parâmetros relevantes são (i) a razão entre os comprimentos dos traços depois da
 1296 colisão, L_A/L_B , e (ii) a soma dos ângulos θ e ϕ .