



## **Física Experimental I**

**2020.1 REMOTO**



6	1	Introdução	7
7	I	Experimentos – Roteiros	9
8	1	Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados	11
9	1.1	Introdução	11
10	1.2	Procedimento Experimental	12
11	1.3	Análise de Dados e Discussão dos Resultados	12
12	1.4	Opcional	14
13	2	Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza	15
14	2.1	Introdução	15
15	2.2	Procedimento experimental	16
16	2.3	Análise de dados	18
17	2.4	Discussão dos Resultados	18
18	3	Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda	19
19	3.1	Introdução	19

21	3.2 Procedimento Experimental	19
22	3.3 Análise de dados	20
23	3.4 Discussão dos resultados	22
24	3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia	22
25	<b>4 Sistema de partículas – Colisões</b>	23
26	4.1 Introdução	23
27	4.2 Colisão unidimensional sem atrito	24
28	4.3 Introdução	24
29	4.4 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados	25
30	4.5 Análise de dados e discussão dos resultados	25
31	<b>5 Colisões (Opcional)</b>	27
32	5.1 Introdução	27
33	5.2 Procedimento experimental	28
34	5.2.1 Realização das medidas	28
35	5.2.2 Análise das imagens	29
36	5.3 Exemplo de resultados e análise	30
37	5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas	30
38	5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo	31
39	<b>II Conceitos Básicos para Análise de Dados</b>	33
40	<b>1 Medidas e incertezas</b>	35
41	<b>2 Medidas Diretas e Indiretas</b>	39
42	<b>3 Algarismos Significativos</b>	45
43	<b>4 Representações gráficas</b>	53

44	<b>5 Ajuste linear</b>	59
45	<b>6 Determinação da velocidade instantânea</b>	63
46	<b>7 Distribuição Gaussiana</b>	65
47	<b>III Apêndices</b>	71
48	<b>A Caderno de laboratório</b>	73
49	<b>B Como escrever um relatório?</b>	75
50	<b>C Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)</b>	77
51	<b>D Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker</b>	79
52	<b>E Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis</b>	85
53	<b>F Apêndice: <math>(E_f - E_i)/E_i</math> a partir de traços e um ângulo</b>	91



# 1

54

55

## Introdução

56 A Apostila do curso de Física Experimental apresenta os conceitos básicos relacionados com as análises de dados dos experimentos, bem como os métodos e instrumentos  
57 utilizados.

## 59 Experimentos

60 Ao longo do semestre realizaremos os seguintes experimentos, em modo remoto:

61 **EXP 1** – Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos  
62 dados

63 **EXP 2** – Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

64 **EXP 3** – Movimento de um corpo em queda livre – Aceleração da gravidade

65 **EXP 4** – Sistema de partículas – Colisões

## 66 Bibliografia

67 O material completo da disciplina compreende a [Apostila de Conceitos Básicos de Física](#)  
68 [Experimental I](#), o [Guia do Estudante](#) e os textos complementares, todos disponíveis no site  
69 <https://fisexp1.if.ufn.br>.

70 Além disso, indicamos os seguintes livros para um estudo mais sólido dos conceitos básicos  
71 de análise de dados e da física dos fenômenos observados: Fundamentos da Teoria de Er-  
72 ros de José Henrique Vuolo [1], Curso de Física Básica - Mecânica de H. Moysés Nussenz-  
73 veig [2] e Física I, Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman [3].



PARTE I

## EXPERIMENTOS – ROTEIROS



# 1

75  
76

## Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

77

### 1.1 Introdução

78 Neste experimento determinaremos o tempo de queda de uma moeda, solta do repouso  
79 de uma altura de 1,5 m repetidas vezes. Cada grupo deve apresentar um conjunto de  
80 medidas independentes, contendo 120 medições. A partir destas medições vamos estudar  
81 os conceitos de flutuações aleatórias, tratamento estatístico dos dados e estudo de efeitos  
82 sistemáticos.

83 Planeje seu experimento e comece a fazer as anotações no seu caderno de laboratório. Para  
84 todos os experimentos que faremos nesse curso, cada aluno deve elaborar um pequeno  
85 texto no caderno para os seguintes tópicos:

86

#### 1. Introdução

87

#### 2. Procedimento Experimental

88

#### 3. Análise de Dados

89

#### 4. Discussão dos Resultados

90 Eventualmente, estes tópicos poderiam ser organizados em um relatório (veja o Apêndice B  
91 da Apostolia). Ainda não exigiremos a elaboração de um relatório completo para esse expe-  
92 rimento, mas, para cada um destes itens, preparamos algumas perguntas para você pensar,  
93 discutir com os colegas e com seu professor. A partir desta discussão, faça suas anotações.

94

#### 1. Qual o objetivo e a motivação desse experimento?

95

#### 2. De acordo com as leis da Física que você conhece, qual deveria ser o tempo de queda 96 da moeda?

**97 1.2 Procedimento Experimental**

- 98 1. Você pode medir o tempo diretamente ? Que instrumento vai utilizar ? Qual a **re-**  
99 **solução** desse instrumento?
- 100 2. Qual a melhor forma de montar o seu experimento, a fim de tentar garantir que a  
101 altura de queda esteja sempre no intervalo  $(1,50 \pm 0,02)$  m e que a moeda caia sempre  
102 do repouso?
- 103 3. Registre seus dados na forma de uma tabela, em ordem cronológica, como mostrado  
104 nas duas primeiras colunas da Tabela 1. Você pode também construir a tabela di-  
105 retamente em um programa de planilha no computador (por exemplo Excel, Open  
106 Office, Google Sheets), e posteriormente imprimir (ou fazer uma captura de tela) para  
107 anexar ao relatório e ao caderno de laboratório.

108 **Tabela 1:** Medições realizadas

$i$	$t_i$	$\delta_i = t_i - \bar{t}$	$\delta_i^2 = (t_i - \bar{t})^2$
1			
2			
3			
...			
120			

**110 1.3 Análise de Dados e Discussão dos Resultados**

111 Você certamente encontrará mais de um valor como resultado da medida direta do tempo  
112 de queda. Com base nesses valores, como pode apresentar o resultado dessa medição?  
113 Conforme explicado no Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apos-  
114 tila), a melhor forma de apresentar essa medida experimental é realizando uma análise  
115 estatística dos dados obtidos. Para entender melhor o significado dessa análise, propomos  
116 as seguintes atividades:

**117 Parte I: Análise estatística dos dados**

- 118 1. Considere o conjunto de 120 medidas. Para 6 conjuntos independentes de 10 medições  
119 consecutivas, calculem o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio

(consulte o Capítulo 2 da Apostila). Utilize as últimas colunas da Tabela 1.2 para auxiliar nos cálculos.

- 120  
121  
122  
123  
124  
125
- Resuma os resultados obtidos para os 6 subconjuntos dos dados colocando-os na Tabela 2 e observe como variam o valor médio e o desvio padrão. O que pode dizer sobre os valores encontrados? Para este experimento, 10 medidas é uma quantidade suficiente para se determinar o tempo de queda ? Justifique suas respostas.

126  
127

**Tabela 2:** Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos de 10 medições independentes.

Medições	N	Valor Médio ( )	Desvio Padrão ( )	Incerteza ( )
Grupo 1	10			
Grupo 2	10			
Grupo 3	10			
Grupo 4	10			
Grupo 5	10			
Grupo 6	10			

- 129  
130  
131  
132  
133
- Calcule o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio para: (a) as 20 últimas medidas, (b) as 60 primeiras medidas e (c) para o conjunto completo de 120 medidas. Coloque estes valores na Tabela 3 e discuta como variam estas três grandezas com respeito ao número de medidas. Analise se as 120 medidas foram suficientes para determinar o tempo de queda.

134  
135

**Tabela 3:** Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos com diferentes números de medições.

N	Valor Médio ( )	Desvio Padrão ( )	Incerteza ( )
20			
60			
120			

- 136  
137  
138  
139  
140  
141  
142
- Analise como se compara o valor médio encontrado com o valor de referência, igual a  $t_q = (0,554 \pm 0,004)$  s. Caso existam efeitos sistemáticos, discuta sobre eles e como poderia evitá-los refazendo as medições (ver Capítulo 2 da Apostila).
  - Por convenção, utilizamos como definição para a incerteza de cada medida realizada, o valor de  $\sigma$ . Discuta o resultado da comparação entre o valor de  $\sigma$  encontrado para o conjunto de 120 medições com a precisão do cronômetro utilizado.

## Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

- 143     6. Calcule para o conjunto de 120 medições a fração de medidas contidas nos intervalos  
144         $[\bar{t} - 1\sigma, \bar{t} + 1\sigma]$ ,  $[\bar{t} - 2\sigma, \bar{t} + 2\sigma]$ ,  $[\bar{t} - 3\sigma, \bar{t} + 3\sigma]$ . Em um procedimento sujeito somente  
145        a flutuações aleatórias, as frações esperadas para estes intervalos são aproximada-  
146        mente 68,3%, 95,4% e 99,7%. Note então que a convenção mais adotada, de utili-  
147        zar como incerteza o valor do desvio padrão, corresponde a adotar um intervalo de  
148        incerteza que conteria aproximadamente 68% dos valores obtidos, caso o processo  
149        de medida fosse repetido muitas vezes. Quando não conhecemos bem nosso pro-  
150        cesso de medida, a realização de uma análise estatística permite também a melhor  
151        determinação da incerteza das medidas individuais.<sup>1</sup>

## 152     Parte II: Representação gráfica dos conjuntos de medidas

- 153     7. Com base no Capítulo 4 da Apostila, construa um histograma de frequência relativa  
154        para os dados em uma folha de papel milimetrado. Lembre que o número adequado  
155        de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições. Neste caso  
156        particular, o número aconselhável de barras fica entre 6 e 10.
- 157     8. Marque no gráfico, as posições dos valores médios encontrados. As medições se  
158        distribuem simetricamente ao redor do seu valor médio? O que isso significa e qual  
159        o tipo de incerteza está sendo observada?
- 160     9. Desenhe sobre o histograma dois segmentos de reta verticais representando o inter-  
161        valo  $[\bar{t} - \sigma, \bar{t} + \sigma]$ . Observe a concentração dos dados nesse intervalo.
- 162     10. Analise no histograma o valor médio e desvio padrão. O que é possível concluir so-  
163        bre os processos de medida empregados? Discuta em termos de desvios sistemáticos  
164        e flutuações aleatórias.

## 165     1.4 Opcional

166     Realize novamente as suas medidas tendo em conta os cuidados discutidos para eliminar  
167        suas incertezas sistemáticas. Para este conjunto de 120 medições, calcule o valor médio, o  
168        desvio padrão e a incerteza do valor médio e compare com o valor de referência. Conse-  
169        guiu eliminar as incertezas sistemáticas? Discuta.

---

<sup>1</sup>Essas frações decorrem de um modelo matemático que descreve o comportamento de medidas somente sujeitas a flutuações aleatórias. Esse modelo será discutido na Física Experimental II, mas quem quiser se aprofundar pode olhar a Seção 7 de Conceitos Básicos da Apostila.

# 2

170  
171

## Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

### 172 2.1 Introdução

173 Neste experimento determinaremos o volume de uma ou mais moedas. Planeje o expe-  
174 rimento antes de começar a realizar as medidas. Pense em quais métodos poderiam ser  
175 utilizados para se medir um volume, em quais medidas deveriam ser realizadas para es-  
176 ses métodos e quais instrumentos seriam mais adequados para tal finalidade.

177 O volume pode ser determinado a partir das dimensões da moeda. Qual é a expressão  
178 matemática do volume a partir dessas dimensões?

179 Se você conhecesse a massa e a densidade volumétrica de massa do material utilizado na  
180 fabricação da moeda, como você poderia determinar o seu volume?

181 Se você tivesse um recipiente com água, como poderia determinar o volume de uma mo-  
182 eda imersa nesse líquido?

183 Avançando para a análise dos dados, como estimar as incertezas das medidas diretas?  
184 Como são calculadas as incertezas das medidas indiretas? Leia as duas primeiras seções  
185 do Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados). Medindo a partir desses dife-  
186 rentes métodos, o que se espera da comparação dos seus resultados? Os valores deveriam  
187 ser compatíveis, considerando suas respectivas incertezas, independentemente do método  
188 utilizado?

189 Planejem seu experimento e comecem a fazer as anotações nos seus cadernos de labo-  
190 ratório. Para todos os experimentos que faremos nesse curso, cada um de vocês deve  
191 elaborar um pequeno texto no caderno para os seguintes tópicos:

192 1. Introdução

193 2. Procedimento Experimental

194 **3. Análise de Dados**195 **4. Discussão dos Resultados**

196 Separe os materiais necessários para o Experimento 2 (detalhes na Figura 2.1):

197 1. Moedas (sugerimos as de R\$ 0,50);

198 2. Régua;

199 3. Copo (que seja o mais próximo possível da forma de um cilindro). Note que você  
200 pode simplificar e melhorar a medição do volume deslocado, utilizando uma seringa  
201 descartável, que já vem com uma escala volumétrica impressa.

Material necessário para o experimento:



(a) Moedas de 50 centavos (\*)



(b) Régua preferencialmente transparente



(c) Copo (o mais cilíndrico possível)

(\*) Atenção para o ano da sua moeda!

Figura 2.1: Material para o Experimento 2

202 **2.2 Procedimento experimental**

203 Antes de qualquer medida, se posicione de forma semelhante à sugerida na Figura 2.2.

204 **1. A partir do volume de água deslocado**205 Usando um copo cilíndrico parcialmente cheio d'água, introduza a(s) moeda(s) e es-  
206 time o seu volume a partir do deslocamento do nível da coluna de água. No caso  
207 do copo, utilize uma régua para fazer essa medida a partir do registro dos níveis ini-  
208 cial e final. Já com uma seringa descartável (Figura 2.3), o volume deslocado pode



Figura 2.2: Posicionamento do observador

210 ser medido diretamente na seringa ao sugar a água, até que retorne ao mesmo nível  
211 da situação sem moeda(s), e lendo este volume na escala da própria seringa. De-  
212 pendendo do diâmetro do copo usado, avalie se o experimento deveria ser realizado  
213 com uma ou mais moedas de mesmo valor.

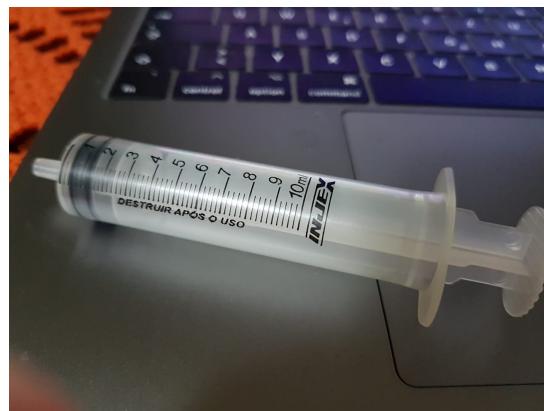


Figura 2.3: Seringa

214 **2. A partir da área da base da moeda e de sua espessura**

215 Meça a espessura da moeda. A área da base da moeda pode ser determinada a partir  
216 da medição direta de seu diâmetro com uma régua ou a partir da medição de sua  
217 circunferência com o uso de um barbante e da régua. Avalie qual procedimento é  
218 mais adequado. A régua é o instrumento adequado para a determinação do diâmetro  
219 da moeda? Nesse caso, também avalie se o experimento deveria ser realizado com  
220 uma ou mais moedas do mesmo valor.

221 **3. A partir da densidade volumétrica**

222 As moedas são fabricadas de forma padronizada com relação às suas dimensões,  
223 massa e material. Busque essas informações na Internet (página da Casa da Moeda).  
224 Fique atento que essas informações podem variar de acordo com o ano de fabricação  
225 da moeda. A informação sobre o ano de fabricação consta na “cara” da mesma.

## 226 **2.3 Análise de dados**

- 227 1. A partir dos valores da espessura e do diâmetro ou circunferência da moeda, medi-  
228 dos por você, calcule o volume da moeda utilizando uma das fórmulas  $V = \pi d^2 h / 4$   
229 ( $d$  = diâmetro e  $h$  = espessura) ou  $V = C^2 h / (4\pi)$  ( $C$  = circunferência).
- 230 2. Sabendo que a densidade volumétrica do aço inoxidável, dependendo da liga que o  
231 compõe, varia entre 7,8 e 8,0 g/cm<sup>3</sup>, e utilizando o valor de massa padrão para a  
232 moeda utilizada, determine o seu volume e incerteza.
- 233 3. Organize em uma tabela os resultados obtidos para a determinação do volume da  
234 moeda com as respectivas incertezas para os três métodos realizados. Faça uma  
235 comparação entre os resultados obtidos. Leia a segunda seção do Capítulo 2 (Con-  
236 ceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila).

## 237 **2.4 Discussão dos Resultados**

- 238 1. Qual foi a medição mais precisa? Justifique.
- 239 2. Considerando como referência o cálculo do volume da moeda a partir dos valores de  
240 suas dimensões encontrados na Internet, não os medidos por você, qual foi a medição  
241 mais exata? Justifique.
- 242 3. Justifique a vantagem de usar mais de uma moeda para o procedimento “A partir do  
243 volume de água deslocado”.
- 244 4. Os resultados encontrados são compatíveis entre si? Justifique. Esse resultado era  
245 esperado?
- 246 5. Quais parâmetros contribuem mais fortemente para a incerteza do volume em cada  
247 um dos três métodos? Como essas incertezas poderiam ser diminuídas? Você sugere  
248 alguma modificação do procedimento experimental adotado?

249  
250

## Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

### 251 3.1 Introdução

252 Neste experimento determinaremos a aceleração de um corpo em queda vertical e vamos  
253 comparar o resultado obtido com o valor de referência da aceleração da gravidade ( $g$ ) para  
254 a cidade de Rio de Janeiro.

255 Vamos analisar o movimento de queda vertical de um corpo cuja forma e tamanho apre-  
256 sente uma força de resistência do ar desprezível (por exemplo uma bolinha de gude)<sup>1</sup>. Que  
257 tipo de movimento apresentaria o corpo se a força de resistência do ar fosse desprezível?<sup>2</sup>

258 Pense sobre o planejamento desse experimento. A aceleração do corpo pode ser obtida  
259 diretamente? Quais grandezas devem ser medidas para que seja possível obtê-la? Quais  
260 instrumentos são mais adequados para que esses dados possam ser coletados?

261 O experimento será discutido e guiado pelo roteiro abaixo. Siga o roteiro e as orientações  
262 do professor nos encontros remotos e vá fazendo suas anotações no caderno de laboratório.

### 263 3.2 Procedimento Experimental

264 O arranjo experimental experimental está mostrado na Figura 3.1. Escolha uma bola de  
265 gude ou qualquer corpo arredondado de dimensões da ordem de grandeza da bolinha  
266 mostrada na Figura 3.1. Você deverá filmar a queda da bolinha com um celular, desde uma  
267 altura de, mais o menos, um metro. Para isso peça ajuda a uma pessoa que vai segurar a  
268 bolinha enquanto você filma. Cole na parede uma régua de papel como está indicado na  
269 Figura 3.1<sup>3</sup>. Para a filmagem, posicione o celular num apoio com a tela do celular paralela

<sup>1</sup>Lembre que a queda vertical de um corpo quando a única força atuante sobre ele é a força da gravidade chama-se queda livre.

<sup>2</sup>Lembre que o movimento da partícula é determinado através da Segunda Lei de Newton.

<sup>3</sup>A régua não precisa ter a extensão de toda a trajetória a ser filmada, é somente uma referência de escala.

## 20 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

270 à parede onde está colada a régua de papel. O celular deverá estar posicionado mais o  
271 menos no meio da trajetória da bolinha a uma distância da parede suficiente para poder  
272 filmar toda a queda de mais ou menos um metro. Não use “slow-motion” (câmera lenta),  
273 filme com a velocidade normal do seu celular. A imensa maioria dos celulares filma a uma  
274 taxa de 30 frames/s<sup>4</sup>. Verifique no seu celular se essa é a taxa usada.

275 Para analisar o filme da queda será usado o aplicativo Tracker para uso num computador  
276 que poderá ser baixado gratuitamente no link: <https://physlets.org/tracker/><sup>5</sup>. O filme  
277 também poderá ser analisado com o aplicativo VidAnalysis disponível gratuitamente para  
278 celulares com sistema operacional Android no link do [Google Play](#). Os tutoriais de uso  
279 destes aplicativos estão disponíveis na forma de vídeos no site da [Física Experimental 1](#).  
280 No final do roteiro, encontram-se o Apêndice D um tutorial básico do aplicativo Tracker, e  
281 um tutorial básico do aplicativo VidAnalysis no Apêndice E.

### 282 3.3 Análise de dados

283 Usando o aplicativo Tracker ou alternativamente o aplicativo VidAnalysis, monte a Tabela  
3.1. As colunas do tempo  $t$  e da posição  $y$  são preenchidas usando os aplicativos Tracker

$t$ (s)	$y$ (cm)	$\delta y$ (cm)	$v_y$ (cm/s)	$\delta v_y$ (cm/s)

284 *Tabela 3.1: Tabela de dados da experiência.*

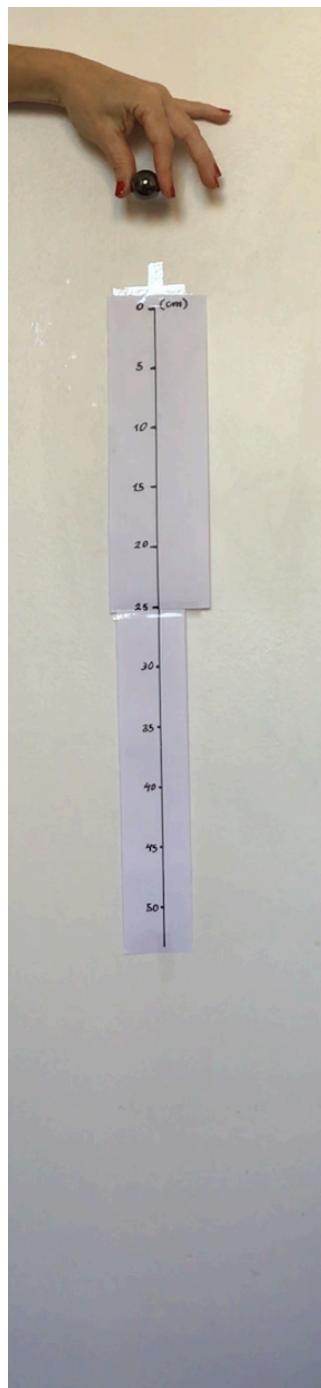
285 ou VidAnalysis. As coordenadas  $y$  correspondem às posições, por exemplo, do centro da  
286 bolinha ao longo da trajetória de queda, após ter escolhido o sistema de referência. Note  
287 que ao longo da trajetória a imagem da bolinha pode ficar um pouco embaçada como na  
288 Figura 3.2. Nesse caso, foi marcado com um “x” em azul o centro da bolinha enquanto que  
289 a barra vermelha é uma escolha razoável da região de incerteza da posição do centro da  
290 bolinha. A incerteza é uma fração do comprimento da mancha e depende da posição da  
291 bolinha.

292 Para preencher a coluna da velocidade  $v_y$  leia o Capítulo 6 da Apostila. Como são calcula-  
293 das as incertezas  $\delta v_y$ ?

- 294 • Em um papel milimetrado desenhe o gráfico  $v_y \times t$  a partir dos dados da tabela in-  
295 dicando a incerteza nos valores das velocidades. Qual é a forma esperada para este  
296 gráfico?

<sup>4</sup>A palavra em inglês “frame” significa quadro.

<sup>5</sup>O aplicativo é disponibilizado para os sistemas operacionais Windows, Linux e Mac OSX.



297



*Figura 3.1:* Dispositivo experimental. Não esqueça de colar na parede uma régua de papel, como a indicada na Figura, para ser usada como referência na análise de dados.

*Figura 3.2:* Imagem da bolinha em plena queda. Note-se que a imagem, devido à alta velocidade, fica um pouco embaçada.

## 22 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

- Use as colunas  $t$ ,  $v_y$  e  $\delta v_y$  para calcular através do Método dos Mínimos Quadrados (Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila), qual é a melhor reta que aproxima os dados experimentais do gráfico  $v_y \times t$ ?
- Com os parâmetros da reta obtida no item anterior, desenhe-a na mesma folha de papel milimetrado onde fez o gráfico  $v_y \times t$ . Se você não conseguir achar um aplicativo que implemente o ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados, desenhe a melhor reta que aproxima os dados experimentais pelo método visual (ver Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila) e obtenha os parâmetros que definem a reta (coeficiente angular  $a$  e coeficiente linear  $b$ ) escolhendo dois pontos na reta e substituindo na equação da reta  $y = a t + b$ .

### 308 3.4 Discussão dos resultados

1. A partir dos parâmetros do ajuste linear aos dados experimentais  $v_y$  vs.  $t$ , como se obtêm o valor da aceleração de queda da bolinha?
2. Compare o valor da aceleração de queda da bolinha com o valor da aceleração da gravidade para a cidade do Rio de Janeiro que é  $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$ . Qual valor é mais preciso? Você utilizaria este método para determinar o valor da gravidade? Justifique.

### 315 3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia

1. Utilizando os dados registrados para a posição  $y$  como função do tempo  $t$ , determine a altura  $h$  da bolinha para cada instante de tempo, a partir do ponto mais baixo na Tabela 3.1.
2. Determine a energia cinética ( $K$ ), energia potencial ( $U$ ) e a energia mecânica ( $E$ ) para cada intervalo de tempo. Para facilitar a organização das informações, construa uma tabela.
3. Faça um gráfico que contenha a energia cinética, potencial e mecânica em função do tempo.
4. Discuta a partir do gráfico obtido, se há ou não conservação da energia mecânica. Justificar.
5. No caso da energia não se conservar, determine o ganho ou perda percentual.

#### 327 Observações:

- Para os cálculos de energia considere a aceleração da gravidade no Rio de Janeiro, com sendo  $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$ .

# 4

330  
331

## Sistema de partículas – Colisões

### 332 4.1 Introdução

333 Neste experimento estudaremos colisões entre dois corpos. Em particular, procuraremos  
334 verificar experimentalmente se a conservação de momento linear total do sistema está  
335 presente. Também iremos analisar uma possível conservação de energia mecânica to-  
336 tal, explorando a diferença entre colisões elásticas e inelásticas. Na tomada de dados o  
337 movimento é gravado em um filme. A variação das posições dos corpos é analisada pos-  
338 teriormente. Programas de computador como aquele já utilizado no experimento anterior,  
339 o Tracker (Apêndice D), são bastante úteis nessa análise. A análise do movimento com apli-  
340 cativos no próprio celular é também possível.

341 A realização deste experimento em um curso remoto merece alguns comentários, dadas  
342 suas peculiaridades em relação à presença de atrito. Na versão presencial da disciplina de  
343 Física Experimental 1 da UFRJ, os alunos trabalham em sala com uma montagem usada  
344 para minimizar o atrito de dois carrinhos com a base: o trilho de ar. Em nosso curso re-  
345 moto, os alunos não têm à disposição em casa uma ferramenta eficiente como o trilho de  
346 ar para minimizar o atrito. Assim, dividimos o experimento em duas partes. Na primeira  
347 parte o estudante faz a análise de dados experimentais nos moldes do curso presencial,  
348 porém utilizando dados obtidos previamente no Laboratório de Física Experimental 1. Na  
349 segunda parte (de realização opcional) o estudante faz a tomada de dados em casa, fa-  
350 zendo colidir objetos aos quais ele tem acesso fácil, como moedas. Este é um desafio final  
351 na disciplina: estudar colisões fora das condições controladas no laboratório didático, pla-  
352 nejar e realizar sua montagem experimental, e analisar um sistema físico no qual as forças  
353 de atrito provavelmente serão observáveis. Para essa segunda parte, apontamos ainda  
354 uma versão simplificada do experimento que, fazendo suposições sobre o atrito, permite  
355 fazer um teste da conservação de momento linear em uma colisão, mesmo sem o uso de  
356 celular ou computador [4].<sup>1</sup> Outros exemplos de experimentos envolvendo colisões que  
357 os alunos podem fazer em casa estão na página da disciplina [Física Experimental 1](#), no  
358 site do IF .

---

<sup>1</sup>*Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, Lorenzo Galante e Ivan Gnesi, American Journal of Physics **88**, 279 (2020).

**359 4.2 Colisão unidimensional sem atrito**

360 Neste experimento estudaremos as colisões e seu caráter elástico ou inelástico. Analisare-  
361 mos as conservações de momento linear e energia mecânica de um sistema unidimensional  
362 de dois carrinhos que colidem entre si em um trilho de ar com atrito desprezível. Será utili-  
363 zada uma gravação de um filme. Iremos analisá-la com o programa Tracker (Apêndice D)  
364 para computador ou VidAnalysis (Apêndice E) para celular para levantamento de dados.  
365 O aluno também poderá usar outros programas ou aplicativos que permitam atingir os  
366 mesmos objetivos.

367 Pense sobre o planejamento desse experimento. Quais grandezas devem ser medidas  
368 diretamente para que seja possível avaliar as conservações de momento linear e energia  
369 mecânica?

370 Siga o roteiro e as orientações do professor para fazer o experimento. Faça todas as anotações  
371 que julgar serem necessárias, elas serão importantes quando você for analisar os dados. Ao  
372 preparar o relatório, tome como base as orientações do Apêndice B da Apostila do curso  
373 e as anotações realizadas durante o experimento. As discussões contidas no roteiro abaixo  
374 serão importantes para a elaboração do seu relatório.

**375 4.3 Introdução**

376 Reflita sobre as seguintes questões e sugestões:

377 1. Qual é o objetivo desse experimento?

378 2. O que é um processo de colisão?

379 3. O filme mostra o movimento de dois carrinhos que deslizam sobre um trilho hori-  
380 zontal; há uma camada de ar entre o trilho e a base dos carrinhos, a fim de minimizar  
381 o atrito. Que tipo de movimento sobre o trilho é esperado para cada carrinho antes e  
382 após a colisão? Pense nas forças que atuam sobre cada um deles.

383 4. Considere a situação onde dois carrinhos colidem entre si ao se movimentarem sobre  
384 um trilho de ar horizontal com atrito desprezível; espera-se que tanto o momento  
385 linear como a energia mecânica se conservem nas colisões? O que define a diferença  
386 entre as colisões elástica e inelástica? Desenvolva as expressões matemáticas para  
387 conservação de momento linear e energia mecânica deste sistema unidimensional  
388 para os dois tipos de colisão, em termos das grandezas medidas no experimento.

389 5. Como verificar experimentalmente se o momento linear do centro de massa do sis-  
390 tema é conservado?

## 4.4 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados

Você terá acesso ao filme elasti.mp4 que deverá ser aberto com o programa Tracker ou VidAnalysis. É interessante você observar esse filme: um carrinho (incidente), que chama-remos de  $A$ , move-se em direção a outro carrinho, denominado  $B$ , que está inicialmente em repouso. Ocorre o choque, mediado por “para-choques” feitos com elásticos esticados. Em seguida,  $B$  passa a se mover, enquanto que  $A$  continua a se mover, porém mais lentamente do que antes do choque. As massas dos carrinhos são  $m_A = 287,9 \pm 0,2$  g e  $m_B = 179,4 \pm 0,2$  g. O comprimento total do trilho é 200 cm; esse valor é importante para calibrar os comprimentos (escala da sua filmagem). Essa informação será usada quando for atribuir um valor à barra de medição do Tracker. Quando for estimar seu erro na calibração, note que há uma deformação da geometria do trilho no filme.

1. Proceda fazendo a tomada de dados da posição dos dois carrinhos antes e depois do choque. Precisaremos, para cada carrinho, aproximadamente 10 pontos antes e 10 pontos depois do choque. Entretanto, para minimizar o erro nas velocidades determinadas, é aconselhável que esses pontos não sejam “instantes sucessivos” registrados pelo Tracker ou VidAnalysis. Você pode escolher um intervalo de 0,1 s no seu registro de dados (há vários “frames” do Tracker ou VidAnalysis entre eles).
2. Analise o movimento de cada carrinho (tomada de dados) separadamente. Você terá que escolher um ponto de referência em cada carrinho para acompanhá-lo “manualmente” no programa. Então terá que estimar a incerteza da sua medida de posição: amplie a imagem e estime com que precisão consegue identificar o ponto de referência. Por exemplo, para uma ampliação de 200 vezes, a incerteza é da ordem de 3 mm.
3. Lembre-se de escolher um único sistema de referência para a determinação da posição em função do tempo.
4. Construa uma tabela da posição de cada carrinho em função do tempo.

## 4.5 Análise de dados e discussão dos resultados

1. O instante de colisão pode ser obtido diretamente a partir da tabela dos dados? Faça um gráfico da posição em função do tempo para os dois carrinhos e determine o instante em que eles colidem.
2. Determine as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão a partir do ajuste linear dos dados. Alternativamente, você pode usar o método gráfico para tal determinação. As duas abordagens estão descritas em apêndices na apostila do curso.
3. Analise o comportamento do momento linear e da energia mecânica do sistema antes e depois do choque. Houve conservação dessas grandezas? Que conclusões você pode tirar desses resultados?

4. Calcule a porcentagem de perda de energia cinética, dada por:

$$\frac{|K_f - K_i|}{K_i}$$

428      onde  $K_i$  e  $K_f$  são a energia cinética inicial e final, respectivamente. Discuta os resul-  
429      tados obtidos.

# 5

430  
431

## Colisões (Opcional)

432 [

### 433 5.1 Introdução

434 Neste experimento propomos um estudo de colisões entre dois corpos, que o aluno pode  
435 executar todo em casa. O sistema físico estudado é composto por duas moedas apoiadas  
436 sobre uma superfície lisa. Uma delas está inicialmente em repouso e a outra é lançada  
437 sobre ela, deslizando. Nossa foco é explorar quais grandezas se alteram e quais se conser-  
438 vam durante a colisão. Analisamos o momento linear e a energia mecânica das moedas  
439 individualmente e, muito importante, do sistema formado pelas duas juntas.

440 Agora em duas dimensões, a pergunta básica feita antes no seu experimento unidimen-  
441 sional sobre o momento linear total do sistema se divide em duas: Há conservação do  
442 momento linear total na direção  $x$ ? Há conservação do momento linear total na direção  $y$ ?  
443 A energia é uma grandeza escalar e continuamos perguntando: A energia mecânica total  
444 E do sistema se conserva na colisão estudada?

445 Uma diferença fundamental entre este e o estudo que utilizou a filmagem do trilho de ar é  
446 a presença aqui de uma força atrito sobre cada moeda enquanto ela se desloca. Propomos  
447 explorar uma diferença qualitativa entre (i) as forças de atrito entre as moedas e a superfície  
448 e (ii) as forças de contato entre as moedas. As forças de contato, ditas *forças impulsivas*,  
449 são muito mais intensas que as forças de atrito, mas atuam apenas durante a colisão em  
450 si. O efeito das forças de atrito sobre as moedas no curto intervalo de tempo durante o  
451 qual elas interagem é muito pequeno: durante a colisão dominam as forças de contato.  
452 Assim, a discussão sobre conservação de momento e energia durante a colisão continua  
453 basicamente a mesma da situação sem atrito.

454 Este roteiro usa como exemplo o choque entre duas moedas de 1 Real, e indica dois cami-  
455 nhos para a análise da colisão. Use o exemplo fornecido para se ambientar com o estudo de  
456 colisões, mas não se preocupe em reproduzir as trajetórias mostradas ou em usar também

moedas de 1 Real. Lance uma de suas moedas em direção à outra, e analise o resultado da colisão entre as duas. As sugestões para registrar o movimento e analisar os dados estão nas próximas seções. Na primeira sugestão para análise, a informação sobre a colisão vem de medidas da distância percorrida depois da colisão por cada uma das moedas [4] e do ângulo entre essas duas trajetórias. Na segunda, são feitas medidas diretas de posição em função do tempo com uma taxa alta o suficiente para revelar o caráter impulsivo das forças de contato [5]

Neste experimento você tem liberdade na organização de um relatório a ser encaminhado ao professor. Note que é importante que seu texto tenha suporte em uma ou mais imagens relativas à sua montagem experimental e às análises gráfica e / ou numérica do movimento.

## 5.2 Procedimento experimental

### 5.2.1 Realização das medidas

O procedimento para realizar a colisão é simples: procure em sua casa uma superfície plana e lisa sobre a qual as moedas possam deslizar com o menor atrito possível. Dê um peteleco em uma das moedas, lançando-a em direção à outra. Teste diferentes superfícies. No caso mostrado como exemplo neste roteiro foi usada uma superfície de fórmica. Utilize um aparelho celular para filmar todo o experimento, desde o instante inicial do movimento até o repouso final das moedas.

Experimente diferentes velocidades iniciais do objeto incidente. Se a velocidade for muito baixa, o atrito fará a moeda incidente parar muito rápido, inviabilizando o experimento. Se a velocidade for alta demais, o celular não irá conseguir capturar imagens com uma taxa alta o suficiente para estudar o movimento. Fazer a filmagem no modo em câmera lenta pode ajudar. É comum que os celulares façam filmagens em seu modo padrão com taxa de 30 quadros por segundo (ou *frames per second - fps*). Possivelmente seu celular é capaz de fazer a filmagem em um modo em câmera lenta com 120 fps ou mais. Se esse for o caso, aproveite essa opção, mas certifique-se de que seu filme não seja comprimido antes da análise. Se usar 30 fps, faça o filme com muita luz, de preferência ao Sol, evitando assim imagens borradadas.

Uma vantagem no uso das moedas é que suas massas podem ser descobertas com uma pesquisa na internet. O diâmetro das moedas também é informação de fácil obtenção *online*, e pode ser usada para calibrar as distâncias na análise dos dados. Use duas moedas iguais para que as forças de atrito sejam iguais.

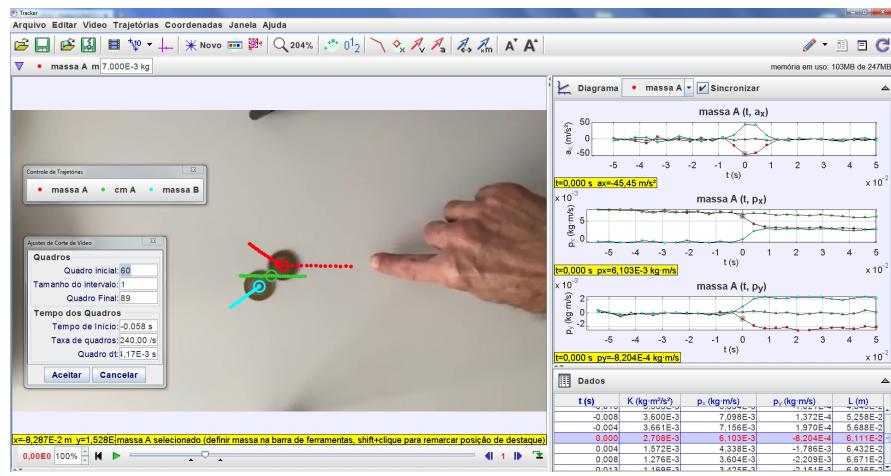


Figura 5.1: Tela típica de análise com o programa Tracker.

### 489 5.2.2 Análise das imagens

490 Os dois métodos sugeridos para análise da colisão baseiam-se em medidas de posição  
 491 sobre imagens registradas em função do tempo. O programa Tracker (Apêndice D), usado  
 492 anteriormente no Experimento 3 e agora no 4, é uma ferramenta interessante para uso nos  
 493 dois métodos.

494 A partir de suas medições para as posições de cada um dos corpos, e de informação sobre  
 495 suas massas, você poderá obter também a evolução da posição do centro de massa do  
 496 sistema. Note que as forças de interação entre os dois objetos são internas ao sistema.  
 497 Assim, não influenciam o movimento do centro de massa (CM), que deve ser mais simples  
 498 que o movimento de cada um dos corpos. Analise o comportamento do CM do sistema  
 499 antes, durante e depois da colisão.

500 Depois de importar seu filme para o Tracker, entre no programa com a informação sobre  
 501 a taxa de quadros por segundo da sua filmagem. Dê um “zoom” nas suas imagens para  
 502 marcar melhor as posições dos centros de massa de cada moeda. O próprio programa  
 503 calcula e representa a posição do CM do sistema.

504 Com o programa Tracker você pode ainda gerar facilmente gráficos de velocidade, aceleração,  
 505 momento linear, energia e outros. A Figura 5.1 mostra uma tela típica do Tracker em uma  
 506 análise desse tipo, na qual os gráficos escolhidos são feitos automaticamente à medida que  
 507 os pontos são marcados sobre a imagem. O programa utiliza para isso derivação numérica,  
 508 mas você não precisa aqui se preocupar com os detalhes desse procedimento matemático.  
 509 Se estiver curioso, pode ver na apostila um exemplo de derivação numérica na seção so-  
 510 bre “Determinação da velocidade instantânea”. Os gráficos de aceleração de cada um dos  
 511 corpos são úteis para você entender o caráter impulsivo das forças de interação na colisão.  
 512 Você pode também construir seus gráficos à mão ou utilizando um programa específico  
 513 para essa função (consulte o Capítulo 5 “representações gráficas” da Apostila).

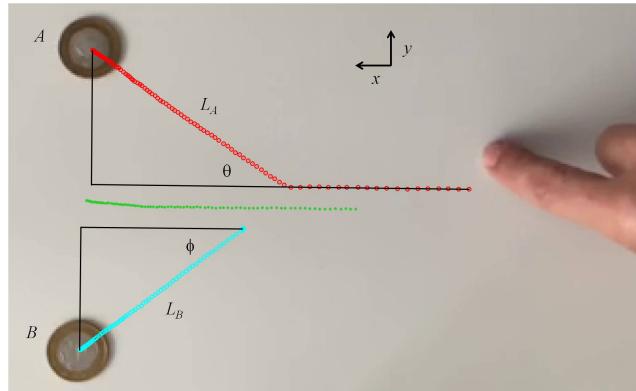


Figura 5.2: Moedas em suas posições finais e marcações de suas trajetórias (CM em verde).

### 5.3 Exemplo de resultados e análise

#### 5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas

A primeira estratégia que indicamos para testar a conservação de momento linear na colisão de duas moedas, na presença de atrito, foi sugerida recentemente por Galante e Gnesi [4].

Eles chamam a atenção para similaridades dela com métodos calorimétricos com os quais se mede o momento de uma partícula sub atômica a partir de um rastro que ela deixa em um detector. Na versão simplificada com moedas colidindo, é assumido que a força de atrito é constante e o teorema trabalho-energia cinética é usado para estimar os módulos dos momentos lineares das duas moedas depois da colisão. Temos assim para cada moeda a relação entre o módulo de seu momento  $p$  logo após a colisão e o alcance  $L$  até parar:

$$\frac{p^2}{2m} = F_{at} L, \quad (5.1)$$

onde  $F_{at}$  é o módulo da força de atrito e  $m$  é a massa da partícula. Se as moedas são iguais,  $m$  e  $F_{at}$  são iguais para as duas, e obtemos (ver Figura 5.2):

$$\frac{p_A}{p_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}}. \quad (5.2)$$

Tomando a direção de incidência da moeda A em  $x$ , e considerando a moeda B inicialmente parada, a componente do momento linear total em  $y$  antes da colisão é zero. Logo, devemos ter depois da colisão as componentes  $p_{Ay}$  e  $p_{By}$  com mesmo módulo e sinais contrários e, portanto, a razão entre elas deve ser igual a -1. Para testar essa hipótese, precisamos medir também os ângulos entre os momentos finais e a direção de incidência da moeda projétil, a fim de determinar

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -\frac{p_A \operatorname{sen}(\theta)}{p_B \operatorname{sen}(\phi)} = -\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\phi)}. \quad (5.3)$$

A partir da Figura 5.2, na qual foram marcadas as posições das moedas até elas pararem, obtemos  $L_A = (0.111 \pm 0.003)$  m,  $\text{sen}(\theta) = (0.57 \pm 0.02)$ ,  $L_B = (0.091 \pm 0.003)$  m, e  $\text{sen}(\phi) = (0.60 \pm 0.02)$ . Assim, obtemos experimentalmente, depois da colisão:

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -1.05 \pm 0.05. \quad (5.4)$$

Este resultado mostra que a soma das componentes  $p_{Ay}$  e  $p_{By}$ , dentro do erro experimental, permanece igual a zero depois da colisão. Verificamos assim que a componente  $y$  do momento linear total se conservou nesse experimento.

A variação percentual de energia na colisão pode ser expressa como (dedução no Apêndice deste roteiro):

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}} \cdot \frac{2 \cos(\theta + \phi)}{2 \cos(\theta + \phi)}. \quad (5.5)$$

A Eq. 5.5 mostra que se não houvesse perda de energia cinética na colisão, teríamos um ângulo entre os vetores momento final dos dois corpos  $\theta + \phi = 90^\circ$ . No entanto, da Figura 5.2 temos  $\theta + \phi = 72^\circ$  e  $L_A/L_B = 1.2$ . Nesse caso, substituindo valores na Eq. 5.5, determinamos uma diminuição, devida à colisão, de 24% na energia cinética total do sistema. A colisão é, portanto, inelástica.

Note que você pode filmar a colisão, como feito aqui, mas isso não é essencial. No experimento original de Galante e Gnesi eles usam apenas moedas, lápis, papel, e régua. O preço da simplicidade neste método é assumir que a força de atrito é constante e igual, em módulo, para as duas moedas.

### 5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo

Analizando apenas um curto intervalo de tempo antes e depois da colisão, o efeitos da força de atrito nas variações de momento linear em cada moeda serão pequenos em relação aos efeitos da força de contato entre as moedas. Os gráficos da Figura 5.1 estão reproduzidos com destaque na Figura 5.3: aceleração na direção  $x$  (direção dada pela moeda incidente), componente do momento linear na direção  $x$ , e componente do momento linear na direção  $y$ . Em cada gráfico é feita uma comparação dos valores associados à moeda A (em vermelho), à moeda B (em azul), e ao centro de massa do sistema moeda A mais moeda B (em verde). O gráfico da aceleração mostra no momento da colisão um pico para a moeda B e um pico invertido bastante similar para a moeda A. Esses picos refletem as forças de contato durante a colisão. Ainda no mesmo gráfico, vemos que a duração da colisão é de cerca de um centésimo de segundo. Para efeito de comparação, perceba que a aceleração de cada moeda chega, durante a colisão, a cerca de quatro vezes o valor da aceleração da gravidade, mas cai rapidamente quando apenas a força de atrito está presente.

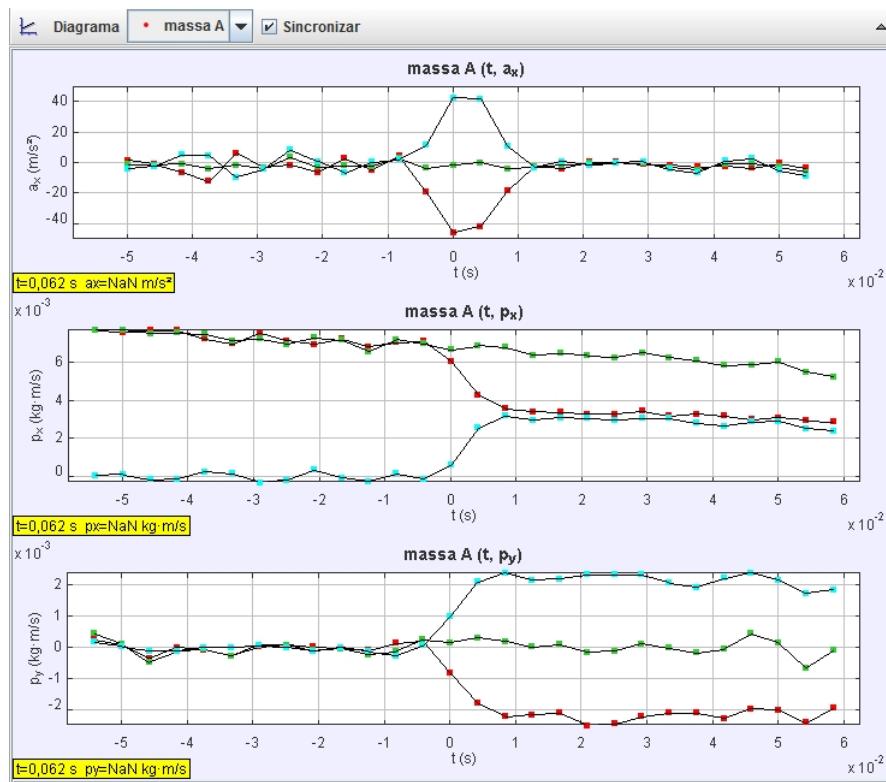


Figura 5.3: Gráficos de  $a_x$ ,  $p_x$  e  $p_y$  em função do tempo. Moeda A em vermelho, moeda B em azul e centro de massa do sistema moeda A mais moeda B em verde.

É possível demonstrar que o produto da massa pela área de cada um dos picos é igual à variação do momento linear. Assim, picos simétricos no gráfico de aceleração na Figura 5.3 demonstram a conservação do momento linear total do sistema, neste caso na direção  $x$ . Note que a aceleração do centro de massa é próxima de zero antes, durante e depois da colisão. A conservação de momento linear em  $x$  e em  $y$  durante a colisão pode ser vista também diretamente nos dois últimos gráficos da Figura 5.3, ligeiramente mascarada por uma pequena e lenta variação do momento linear total devida às forças de atrito, que são externas ao sistema moeda A mais moeda B.

PARTE II

## CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE DADOS



# 1

554

555

## Medidas e incertezas

556 Uma das maneiras para conhecer e descrever a natureza que nos rodeia é mediante a  
557 realização de observações experimentais, que chamamos de medidas. O primeiro pro-  
558 blema com o qual nos encontramos é como os resultados encontrados podem ser comu-  
559 nicados de maneira clara, de forma que sejam compreensíveis e reproduutíveis por outros  
560 experimentadores. Para estabelecer o valor de uma grandeza (mensurando) temos que  
561 utilizar instrumentos e um método de medida, como também é necessário definir as uni-  
562 dades da medida. Por exemplo se desejamos medir a largura de uma mesa, o instrumento  
563 de medição será uma régua ou uma trena e, utilizando o sistema de unidades internacio-  
564 nal (SI), a unidade que utilizaremos será o metro (m). A régua, portanto, estará calibrada  
565 nessa unidade ou em seus submúltiplos, como, por exemplo, centímetros e milímetros. O  
566 método de medição consistirá em determinar quantas vezes a unidade e as frações dela  
567 estão contidas no valor do mensurando.

568 Toda medição é afetada por uma incerteza que provém das limitações impostas pela pre-  
569 cisão e exatidão dos instrumentos utilizados, da interação do método de medição com  
570 o mensurando, da definição do objeto a medir, e da influência do(s) observador(es) que  
571 realiza(m) a medição.

O que se procura em cada medição é conhecer o valor medido ( $x$ ) e a sua incerteza ( $\delta_x$ ) na determinação do resultado, ou seja, determinar os limites probabilísticos destas incertezas. Procura-se estabelecer um intervalo

$$x - \delta_x < x < x + \delta_x \quad (1.1)$$

572 como ilustrado na Figura 1.1, dentro do qual podemos dizer que o valor da grandeza se  
573 encontra, com uma certa probabilidade. Em geral utiliza-se como incerteza um intervalo  
574 em torno do valor central com 68% de probabilidade.

575 Não existem regras para determinar o tamanho do intervalo, porque dependerá de mu-  
576 tos fatores do processo de medição. O tipo de medição, a figura da escala, a acuidade  
577 visual de quem esteja fazendo a medida, as condições de iluminação, etc, formarão parte  
578 na determinação da largura do intervalo de medição. A incerteza associada a uma medida

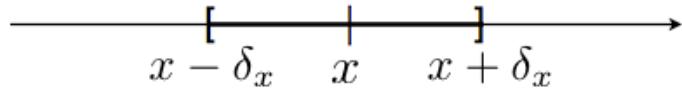


Figura 1.1: Intervalo de probabilidade para a grandeza medida, onde  $x$  é o valor mais representativo da nossa medição e  $\delta_x$  é a incerteza absoluta.

579 deve ser determinada a cada vez que se faça a medição. Por exemplo, é comum pensar que  
 580 quando fazemos uma medida com uma régua com escala graduada, a "incerteza de leitura  
 581 (incerteza instrumental)" é automaticamente a metade da menor divisão. Um instrumento  
 582 com divisões muito finas usado para medir um objeto com bordas mal definidas pode dar  
 583 um intervalo de medição maior que várias das divisões menores. Contrariamente, um  
 584 objeto bem definido com boas condições visuais pode permitir a identificação de um in-  
 585 tervalo de medição muito menor que a menor divisão da escala. Cada situação deve ser  
 586 avaliada de forma individual.

Uma forma usual de expressar o resultado de uma medição é:

$$x \pm \delta_x \quad (1.2)$$

e indicando a *unidade de medição*. Além disso é possível definir a *incerteza relativa* como:

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{x} \quad (1.3)$$

que expressa o quanto significativa é a incerteza em relação ao valor medido. Também pode-se calcular a *incerteza relativa percentual* como:

$$\epsilon_{\%} = \epsilon_x \cdot 100\% = \frac{\delta_x}{x} \cdot 100\% \quad (1.4)$$

587 Por exemplo, ao medir o comprimento  $L$  de uma mesa podemos apresentá-lo como  $L=(1,00$   
 588  $\pm 0,01)$  m ou  $L=1,00 \pm 0,01$  m, se encontramos um valor de 1,00 m, com uma incerteza de  
 589 1 cm em torno desse valor central encontrado. É importante apresentar sempre o valor  
 590 central e a incerteza na mesma unidade. Essa medição tem uma incerteza relativa de 0,01  
 591 ( $0,01/1,00$ ) e uma incerteza relativa percentual de 1%. A palavra **precisão** muitas vezes  
 592 é utilizada como sinônimo de incerteza relativa percentual. Note, no entanto, que nem  
 593 sempre a precisão de uma medida corresponde à precisão do instrumento utilizado para  
 594 realizá-la. A precisão de um instrumento será discutida em contraposição ao conceito de  
 595 acurácia mais abaixo.

## 596 Incertezas

597 Os distintos tipos de incertezas podem ser classificados em:

- 598 • **Incertezas do instrumento:** Os instrumentos de medição têm uma incerteza finita  
599 que está associada à variação mínima da magnitude que ele mesmo pode detectar.  
600 Por exemplo, se temos uma régua graduada em milímetros, não será possível de-  
601 tectar variações muito menores que uma fração de milímetro. Se, ao leremos o valor  
602 medido na régua, aproximamos para o valor inteiro em mm que mais se aproxima da  
603 medida, dizemos que a incerteza da régua é de 1 mm. Se, ao contrário, conseguimos  
604 identificar valores múltiplos de meio milímetro, então dizemos que a incerteza é de  
605 0,5 mm. Não é, no entanto, razoável supor que conseguimos identificar a olho nú-  
606 frações menores que 0,5 mm em uma régua milimetrada.
- 607 • **Incertezas estatísticas ou aleatórias:** São as devidas flutuações aleatórias na determi-  
608 nação do valor do mensurando entre uma medida e outra. Estas flutuações ocorrem  
609 com igual probabilidade tanto para mais quanto para menos. Portanto, medindo  
610 várias vezes e calculando a média, é possível reduzir a incerteza significativamente.  
611 Estas incertezas são tratadas pela teoria estatística de erros de medição.
- 612 • **Incertezas sistemáticas:** Acontecem pelas imperfeições dos instrumentos e métodos  
613 de medição e sempre se produzem no mesmo sentido (não podem ser eliminados  
614 com várias medições). Alguns exemplos podem ser um relógio que atrasa ou adianta,  
615 uma régua que se dilata, o erro devido à paralaxe, etc...

616 A interação do método de medição com o mensurando também pode introduzir erros.  
617 Consideremos como exemplo a medição de temperatura para a qual utilizamos um termô-  
618 metro. Parte do calor do objeto que queremos medir flui ao termômetro (ou vice-versa),  
619 de maneira que o resultado da medição do valor da temperatura difere do original devido  
620 à presença do termômetro (interação que devemos realizar). Fica claro que esta interação  
621 pode ser desprezível, se, por exemplo, estamos medindo a temperatura de um litro de  
622 água, mas a quantidade de calor transferida ao termômetro pode ser significativa se a  
623 quantidade de volume é uma fração pequena de, por exemplo, um mililitro e utilizamos  
624 um termômetro convencional.

## 625 Precisão e exatidão

626 A precisão de um instrumento ou um método de medida está relacionada à sensibilidade  
627 ou menor variação de uma grandeza que pode ser detectada com certo instrumento ou  
628 método. Dizemos que um paquímetro (por exemplo, com mínima divisão de 0,01 mm) é  
629 mais preciso que uma régua (mínima divisão 1 mm) ou que um cronômetro (por exem-  
630 plo com mínima divisão 10 ms) é mais preciso que um relógio (mínima divisão 1 s), etc.  
631 Quanto menor a **incerteza relativa** de uma medição, mais precisa ela é. É importante notar  
632 que o valor absoluto da incerteza isoladamente não é suficiente para qualificar a precisão

633 de uma medida. Por exemplo, reportar a distância entre Rio e São Paulo com incerteza  
634 de um metro certamente é muito bom. Por outro lado, medir o comprimento de um carro  
635 com incerteza de um metro é muito ruim. Qual a diferença? No primeiro caso, estamos  
636 falando de uma dúvida de um metro em cerca de 500 km e no segundo caso, a incerteza é  
637 de um metro em cerca de 4 metros.

638 Além da precisão, é importante realizar uma medição com exatidão ou, utilizando um  
639 termo mais antigo, acurácia. Esta está geralmente relacionada com a qualidade da calibração  
640 do instrumento utilizado ou o método de medição aplicado. Imaginemos que utilizamos  
641 um cronômetro para medir os tempos com uma precisão de 10 ms, mas sabemos que atrasa  
642 1 minuto cada uma hora. Por outro lado, utilizamos um relógio com uma precisão de 1  
643 s que marca a hora certa a todo instante. Neste caso vamos dizer que o cronômetro é o  
644 mais preciso, mas o relógio é o mais acurado. Um critério para se comparar a exatidão de  
645 duas medidas é dado pela menor discrepância relativa. A discrepância é definida como o  
646 módulo da diferença entre o valor medido e um valor de referência para a grandeza e a  
647 discrepância relativa é definida como o módulo da razão entre a discrepância e o valor de  
648 referência. Quanto menor a discrepância relativa de uma medida, mais exata ou acurada  
649 ela é.

650 Portanto, procuraremos sempre realizar uma medição utilizando um método que seja pre-  
651 ciso e exato ao mesmo tempo.

652

653

## Medidas Diretas e Indiretas

654 Para estabelecer o valor de uma grandeza temos que utilizar um instrumento de medição  
 655 e um método de medição. Além disso, será necessário definir as unidades em que essa  
 656 magnitude é medida. Por exemplo, se queremos medir a largura de uma mesa, utilizare-  
 657 mos uma régua e, dependendo do sistema de medição escolhido, expressaremos o valor  
 658 medido em unidades de comprimento como, por exemplo, o metro (m) para o sistema de  
 659 unidades internacional (SI) ou centímetros (cm) no caso do CGS. O método de medição  
 660 consistirá em determinar a quantidade de unidades da menor fração da régua que corres-  
 661 pondem ao comprimento que se deseja medir. Quando uma medição é realizada lendo  
 662 o resultado diretamente em um instrumento (construído para isso), dizemos que a **me-  
 663 dida é direta**. Há grandes que não se medem diretamente, mas que são obtidas a partir  
 664 de outras grandes medidas de forma direta. Por exemplo, para conhecer área de um  
 665 retângulo medem-se os comprimentos de seus lados ou para determinar o volume de uma  
 666 esfera deve-se medir o diâmetro. Neste caso a **medida é indireta**.

### 667 Medidas diretas com flutuações aleatórias

668 Consideremos uma grandeza da qual se fazem  $N$  medições diretas, que chamaremos:  
 669  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Estes valores serão geralmente distintos entre si, mas alguns valores po-  
 670 dem se repetir.

671 Evidentemente não será satisfatório fornecer como resultado da medição uma tabela de  
 672  $N$  valores. É necessário caracterizar a série de medições mediante uns poucos parâmetros  
 673 que tenham um significado preciso relacionado com a magnitude medida e/ou o processo  
 674 de medição utilizado. Os parâmetros importantes são:

1. **Valor médio** é a média aritmética dos valores medidos

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.1)$$

e é o valor atribuído à magnitude medida. É bastante intuitivo considerar a média aritmética como valor representativo da grandeza medida. A média aritmética se caracteriza por apresentar as medições ao seu redor, de modo que a soma dos desvios

$$\delta_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.2)$$

é igual a zero. Ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = 0. \quad (2.3)$$

Isto pode ser facilmente demonstrado, escrevendo:

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}), \quad (2.4)$$

e distribuindo o somatório, de modo que:

$$S = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x}. \quad (2.5)$$

Utilizando a expressão do valor médio (equação 2.1):

$$\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}, \quad (2.6)$$

obtemos  $S = 0$  como queríamos mostrar.

Por esta razão, a soma dos desvios não é um parâmetro que possa ser utilizado para caracterizar a distribuição das medições ao redor do valor médio e é necessário utilizar outro parâmetro.

2. Dispersão das medições ou **desvio padrão** define-se como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (2.7)$$

O desvio padrão é um parâmetro que caracteriza o processo de medida. Quando as medições são poucas,  $\sigma$  pode flutuar, mas para muitas medidas ( $N$  grande) estabiliza-se e não depende do número de medições.

3. O **erro ou incerteza do valor médio** é definido como:

$$\xi = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2}, \quad (2.8)$$

683 onde  $\sigma_m$  está associado às flutuações estatísticas em torno do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.9)$$

684 e  $\sigma_r$  expressa os erros sistemáticos residuais (por exemplo devido à um instrumento  
685 mal calibrado).

686 Vamos supor que nas nossas medidas não ocorrem tais erros sistemáticos, de forma  
687 que usaremos sempre:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.10)$$

688 O erro do valor médio é a dispersão esperada para as médias de várias séries de  
689 medições realizadas nas mesmas condições. O erro do valor médio depende do  
690 número de medições como se pode ver na sua expressão, sendo que ela diminui  
691 com o aumento do número de medições.

## 692 Medidas Indiretas

693 Como já foi definido anteriormente, há grandezas que não podem ser determinadas dire-  
694 tamente, mas que se obtém a partir de outras grandezas que, estas sim, são medidas de  
695 forma direta. Portanto, as incertezas das grandezas que se medem diretamente devem ser  
696 propagadas para contribuir à incerteza da grandeza que se calcula utilizando uma deter-  
697 minada expressão.

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_N$  grandezas independentes medidas de forma direta, e seja a grandeza que se quer determinar  $F = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$  uma função das grandezas  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , cujas incertezas estão dadas por  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N$ . Pode-se mostrar que a incerteza de  $F$  é dada por:

$$(\delta F)^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \delta x_1^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \delta x_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)^2 \cdot \delta x_N^2, \quad (2.11)$$

ou

$$(\delta F)^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \delta x_i^2. \quad (2.12)$$

698 Esta equação é a fórmula de propagação da incerteza para uma grandeza determinada  
699 indiretamente.

## 700 Comparação entre duas medidas da mesma grandeza

Muitas vezes comparamos diferentes resultados experimentais para a medida de uma mesma grandeza. Estes resultados podem vir por exemplo das diferentes técnicas utilizadas para determinar uma grandeza, ou podem vir de valores conhecidos tabulados na

literatura. Vamos supor que temos dois resultados para uma mesma grandeza sendo o primeiro  $x_1 \pm \delta x_1$  e o segundo  $x_2 \pm \delta x_2$ . Se eles são estimativas de uma mesma grandeza, esperamos que a discrepância entre eles ( $|x_1 - x_2|$ ) seja compatível com zero. Como cada uma das medidas está sujeita a uma flutuação estatística de acordo com sua incerteza, em geral encontramos valores diferentes de zero para a discrepância. Como podemos avaliar se a discrepância é significativamente diferente de zero? Há várias formas de se fazer essa avaliação, dependendo do grau de confiança que queremos ter na afirmação de que a diferença é incompatível com zero (ou equivalentemente de que os dois valores são incompatíveis entre si). Vamos considerar a discrepância entre os valores ( $|x_1 - x_2|$ ) pouco significativa ou irrelevante quando for menor que 3 vezes a incerteza da discrepância. Utilizando a expressão para propagação de incertezas definida na Seção 2, determinamos a incerteza da discrepância  $\delta|x_1 - x_2| = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$ . Resumindo, duas medidas independentes  $x_1$  e  $x_2$  da mesma grandeza são consideradas **compatíveis** quando :

$$|x_1 - x_2| < 3\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$$

ou

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}} < 3.$$

701 Ao contrário, consideramos as duas medidas  $x_1$  e  $x_2$  **incompatíveis** quando a discrepância  
702 entre elas é maior que 3 vezes a incerteza da discrepância.

703 Considere por exemplo a medida de um comprimento de uma mesa cujo resultado é  
704  $L_{exp} = (98 \pm 1)$  cm. Como podemos ver se esse resultado é compatível com o valor no-  
705 minal fornecido pelo fabricante, que é de  $L_{nom} = 1$  m? Como o valor nominal nesse caso  
706 não tem incerteza, a incerteza da discrepância é igual à incerteza da medida experimental.  
707 A discrepância é de 2 cm, que é apenas duas vezes a incerteza da discrepância e a medida  
708 é, portanto, compatível com o valor nominal. Uma outra forma de ver isso é analisando  
709 se o valor nominal está contido no intervalo de valores  $I_{exp} = [L - 3\delta L, L + 3\delta L]$ . Nesse caso, o  
710 valor 100 cm está contido no intervalo  $I_{exp} = [95, 101]$  cm.

Em um outro exemplo, um estudante mede o valor da aceleração da gravidade e encontra  $g_{exp} = 9,21 \pm 0,01$  m/s<sup>2</sup> e quer comparar com o valor tabelado  $g = 9,787 \pm 0,001$  m/s<sup>2</sup>. Temos:

$$\frac{|g_{exp} - g|}{\sqrt{\delta g_{exp}^2 + \delta g^2}} = \frac{0,577}{0,01005} \approx 57 \gg 3.$$

711 Logo, os dois valores são incompatíveis.

## 712 Exercícios

- 713 1. Os lados de um paralelepípedo são  $a = (4,50 \pm 0,05)$  cm,  $b = (8,50 \pm 0,09)$  cm e  $c = (35,0 \pm 0,3)$  mm. Determinar o volume do cubo com sua incerteza absoluta e relativa.

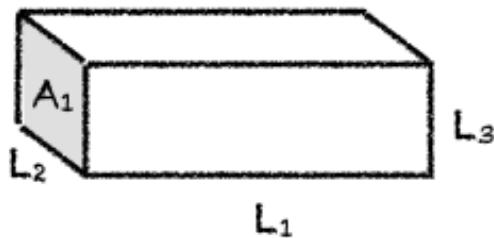


Figura 2.1: Bloco retangular.

- 715 2. Na medição da resistência ( $R$ ), se obteve o valor da tensão  $V = (15,2 \pm 0,2)$  V e da  
716 corrente  $I = (2,6 \pm 0,1)$  A. Qual é a incerteza absoluta da resistência usando a equação  
717  $R = V/I$ ?
- 718 3. Um pêndulo simples é utilizado para medir o valor da aceleração da gravidade uti-  
719 lizando equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

720 O período  $T$  medido foi de  $(1,24 \pm 0,02)$  s e o comprimento do pêndulo  $l = (0,381 \pm$   
721  $0,002)$  m. Qual é o resultado do valor da aceleração da gravidade  $g$  com sua incerteza  
722 absoluta e relativa?

- 723 4. Para medir o comprimento total de um pêndulo (fio + esfera) usou-se uma régua mi-  
724 limetrada para medir o comprimento do fio e um paquímetro para medir o diâmetro  
725 da esfera. Observam-se os seguintes valores com as suas respectivas incertezas:

726 Comprimento do fio = 2,100 m  
727 Incerteza comprimento do fio = 0,5 cm  
728 Diâmetro da esfera = 2,114 cm  
729 Incerteza do diâmetro da esfera = 0,01 mm

730 Ache o comprimento total e a sua incerteza associada.

- 731 5. Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma:  $R = (232,0 \pm$   
732  $0,1)$  mm. Calcular seu volume com a sua respectiva incerteza relativa.  
733 6. A partir da figura 2.1, com as seguintes medidas:

734  $L_1 = (5,00 \pm 0,05)$  cm  
735  $L_2 = (20,00 \pm 0,05)$  mm  
736  $L_3 = (15,00 \pm 0,01)$  mm

- 737 (a) Determine a área  $A_1$  com a incerteza correspondente.  
738 (b) Determine o volume desta peça com a incerteza correspondente.

- (c) Se a precisão necessária para o resultado da área é de 0,5% podemos considerar este resultado satisfatório?

7. Para determinar a altura de uma cachoeira, algumas pessoas mediram o tempo de queda de pedrinhas que eram soltas, em queda livre, de um mesmo local. Conhecendo o tempo de queda  $t$ , pode-se calcular a altura  $h$  a partir da relação cinemática  $h = 1/2gt^2$  em que  $g$  é a aceleração da gravidade. Foi utilizado um cronômetro com precisão de centésimos de segundo e os valores  $t_i$  obtidos em 8 medidas estão na seguinte tabela:

	t(s)
1	1,30
2	1,09
3	1,03
4	1,27
5	1,18
6	1,31
7	1,24
8	1,15

Considerando  $g = (9,784 \pm 0,001) \text{ m/s}^2$ , calcule a altura da cachoeira e a sua incerteza.

750

751

## Algarismos Significativos

752 Imagine que você pergunta a hora a uma pessoa com um relógio de pulso analógico, como  
753 o mostrado na Figura 3.1. Essa pessoa dá uma olhada no relógio, e responde: são 10 horas  
754 e 42 minutos. Você entende que o ponteiro dos minutos certamente estava entre o 8 e o 9,  
755 ou seja, corresponde a um valor entre 40 e 45 minutos, mais próximo de 40 do que de 45.  
756 Dizemos que esse algarismo que foi estimado, o 2, é um **algarismo duvidoso**. Os outros  
757 algarismos são **algarismos certos**: o ponteiro das horas estava entre 10 e 11, com certeza.  
758 O conjunto de algarismos certos e duvidosos são os **algarismos significativos da medida**.  
759 Quanto maior for o número de algarismos significativos em uma medida, mais informação  
760 ela traz.



Figura 3.1: Relógio marcando hora.

761 Quando realizamos uma medição direta de uma grandeza, a partir da leitura de um ins-  
762 trumento analógico, que apresenta uma escala, o procedimento que se usa para fazer o  
763 registro do valor da grandeza é anotar todos os algarismos fornecidos pela escala do ins-  
764 trumento, eventualmente acrescentando mais um algarismo, que represente uma fração  
765 da menor divisão da escala do instrumento. No exemplo acima, do relógio, ao estimar 42  
766 minutos, a pessoa imaginou uma escala de subdivisão da menor divisão do relógio em 5  
767 partes, cada uma delas correspondendo a 1 minuto, e estimou que o ponteiro estava mais  
768 perto de duas subdivisões. Quando o instrumento é digital, o múltiplo da menor medida  
769 que ele pode fazer corresponde ao algarismo duvidoso do valor lido. Em um cronômetro  
770 digital com resolução de 1 centésimo de segundo, que mede um intervalo de tempo de  
771 12,04 s, o 4 é o algarismo duvidoso da medida direta.

Um ponto que sempre gera dúvida é se os zeros são significativos ou não. Para responder, pense em alterar as unidades da medida. Se o número de zeros mudar ao fazer essa alteração, eles não são significativos, já que indicam apenas em que unidades estamos escrevendo a medida. A medida  $x_1 = 2,47$  cm tem três algarismos significativos, sendo o 7 duvidoso. Para escrever  $x_1$  em metros, caminhamos a vírgula para a esquerda duas casas decimais e completamos com zeros. Nada foi feito em termos de alterar a quantidade de informação em  $x_1$ , apenas trocamos as unidades, logo esses zeros de preenchimento não são significativos. Em resumo, as duas formas abaixo são equivalentes e têm três algarismos significativos:

$$x_1 = \underbrace{2,47}_{\text{sig}} \text{ cm} = 0,0 \underbrace{247}_{\text{sig}} \text{ m}$$

A mudança para uma unidade menor pode ser feita com ajuda de potências de dez, que não contam como algarismos significativos. Por exemplo, a medida  $x_2$ , com dois algarismos significativos pode ser escrita nas formas equivalentes

$$x_2 = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \text{ kg} = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \times 10^3 \text{ g} = \underbrace{5,2}_{\text{sig}} \times 10^2 \text{ g}$$

Se escrevermos uma medida como  $x_3 = 3,10$  s, ficará implícito que temos certeza dos três segundos e do um décimo de segundo. O zero na casa dos centésimos de segundo é duvidoso, sendo o último algarismo significativo da medida. Os zeros ao final do número são significativos. Observe mais um exemplo:

$$\underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ m} = 0, \underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ km} = \underbrace{1,00}_{\text{sig}} \times 10^8 \mu\text{m}$$

<sup>772</sup> Também aqui os dois algarismos zero à direita do 1 são significativos, independentemente <sup>773</sup> da unidade que escolhemos para registrar o valor. Ao todo o comprimento registrado tem <sup>774</sup> 3 algarismos significativos.

## <sup>775</sup> Incertezas e algarismos significativos

Normalmente usamos um ou dois algarismos significativos para representar as incertezas, dependendo do grau de estimativa envolvido na sua determinação. Como vamos trabalhar com muitas estimativas na determinação das incertezas nas medidas diretas, usaremos a convenção de um significativo. Assim, o valor da medida deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza, como nos exemplos abaixo.

$$L = (2,25 \pm 0,05) \text{ cm} \quad M = (351 \pm 2) \times 10^{-2} \text{ kg}$$

<sup>776</sup> No caso da incerteza de medidas indiretas, em geral é preciso arredondar o valor determinado a partir da propagação das incertezas das medidas diretas, explicado no Capítulo 2.

<sup>778</sup> Para arredondar um determinado valor, vamos adotar os critérios da norma técnica da

<sup>779</sup> Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT-5891:

- <sup>780</sup> 1. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo inferior a 5, permanece inalterado o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6357 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,6);
- <sup>783</sup> 2. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6678 torna-se 1,7 e 1,6505 torna-se 1,7, arredondados à primeira casa decimal);
- <sup>787</sup> 3. Se o algarismo à seguida do algarismo a ser conservado for igual a 5 e não houver mais nenhum algarismo à sua direita ou se todos os algarismos à direita forem zeros, retira-se todos os algarismos posteriores ao que será conservado e :
  - <sup>790</sup> (a) adiciona-se uma unidade ao algarismo conservado, se este for ímpar;
  - <sup>791</sup> (b) permanece inalterado o algarismo conservado, se este for par.

<sup>792</sup> Observe os arredondamentos abaixo, feitos de modo a que a medida tenha 3 algarismos significativos e seguindo os critérios acima:

- <sup>794</sup> •  $x = 4,678 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- <sup>795</sup> •  $y = 4,674 \text{ m} \rightarrow x = 4,67 \text{ m}$
- <sup>796</sup> •  $z = 4,675 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- <sup>797</sup> •  $w = 4,665 \text{ m} \rightarrow x = 4,66 \text{ m}$

Como exemplo, vamos calcular o peso  $p$  da massa  $m = (234,40 \pm 0,02)\text{g}$  sabendo que  $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$ . Vamos trabalhar no SI, portanto escrevemos  $m = (234,40 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg}$ . Com isso,

$$p = m g = 2,29428376 \text{ N}$$

Agora vamos calcular a incerteza. Como temos um produto,

$$\left( \frac{\delta_p}{p} \right)^2 = \left( \frac{\delta_m}{m} \right)^2 + \left( \frac{\delta_g}{g} \right)^2 = \left( \frac{0,02}{234,00} \right)^2 + \left( \frac{0,0001}{9,7879} \right)^2 = 7,409 \times 10^{-10}$$

Logo,

$$\delta_p = 2,29428376 \text{ N} \times 2,72 \times 10^{-5} = 6,23 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Agora escrevemos a incerteza calculada com um significativo:

$$\delta_p = 6 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Finalmente escrevemos  $p$  até a quinta casa decimal, usando o critério de arredondamento, e escrevemos o resultado final:

$$2,29428376 \text{ N} \rightarrow p = (2,29428 \pm 0,00006) \text{ N}$$

Claro que também poderíamos usar a equação (2.12) para calcular a incerteza absoluta:

$$\delta_p = \sqrt{(m\delta_g)^2 + (g\delta_m)^2}.$$

## 798 Regra de bolso sobre algarismos significativos

799 Muitas vezes o cálculo da incerteza propagada pode ser bem longo e fica difícil de saber  
800 se o resultado está certo ou não. Uma forma simples de saber se pelo menos a ordem de  
801 grandeza da incerteza propagada está correta é usar a seguinte regra:

- 802 • Numa operação matemática envolvendo medidas com diferentes números de alga-  
803 rismos significativos o resultado terá aproximadamente o mesmo número de algaris-  
804 mos significativos que a medida com menor número.

Vamos calcular o volume  $V$  de um tubo de seção reta quadrada de lado  $a = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$  e comprimento  $L = (120,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ . A medida  $a$  tem 2 algarismos significativos e  $L$ , 4, sendo a mais precisa. Assim esperamos que  $V$  tenha entre 2 e 4 algarismos significativos. Vamos fazer a propagação:

$$V = a^2 L \rightarrow V = a^2 L = 120,0 \text{ cm}^3$$

$$\left( \frac{\delta_V}{V} \right) = \sqrt{\left( 2 \frac{\delta_a}{a} \right)^2 + \left( \frac{\delta_L}{L} \right)^2} = 0,1000034722$$

805 Um erro muito comum é esquecer que 0,1000034722 é a incerteza relativa e escrever este  
806 valor como se fosse a incerteza absoluta.

Calculando corretamente a incerteza absoluta, temos

$$\delta_V = V \left( \frac{\delta_V}{V} \right) = (480,0 \text{ cm}^3)(0,1000034722) = 48,001666656 \approx 4,8001666656 \times 10 \text{ cm}^3$$

Finalmente,

$$V = (48 \pm 5) \times 10 \text{ cm}^3$$

807 O resultado final tem dois algarismos significativos, como a medida menos precisa usada  
808 no cálculo. Se for necessário melhorar a precisão da medida de  $V$ , vale a pena medir  $a$  com  
809 mais precisão. Note que ao escrevermos o resultado final, utilizamos a mesma potência de  
810 10 para  $V$  e para sua incerteza  $\delta_V$ . Assim podemos saber qual deve ser o último algarismo

811 a ser conservado no valor da medida e realizar o arredondamento, se necessário. Neste  
812 caso, o arredondamento foi feito na casa da unidade de  $1 \times 10 \text{ cm}^3$ .

## 813 Exercícios

814 Expressse corretamente os resultados para as seguintes medições com suas respectivas in-  
815 certezas.

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
1	67,002	0,023	cm	
2	0,001	2,3	erg	
3	45612,98	345	cm/s	
4	14	29	erg	
5	152,389	0,037	cm/s <sup>2</sup>	
6	74,58	3,14	g	
7	0,0012	0,0001	m	
8	120034	2607	m/s <sup>2</sup>	
9	45,98	2,1	erg	
10	65555,467	56,001	g	
11	23,456	1,2	m	
12	0,173	0,056	cm <sup>3</sup>	
13	45001,6	657,31	J	
14	45,629	2,5914	km/h	
15	104104	104	m <sup>2</sup>	
16	0,0826	0,099	cm/s	
17	3,69	1,582	mm <sup>3</sup>	
18	19,78	5,46	kg	
19	0,458	0,177	cm	
20	135,589	0,0888	g	
21	25,36	0,84	cm	
22	74589,589	5698,26	erg	
23	0,145	0,5	cm/s	
24	14580,8	37,36	erg	
25	125,369	0,041	cm/s <sup>2</sup>	
26	74,58	3,14	g	
27	0,025	0,0074	m	
28	256	0,5	m/s <sup>2</sup>	
29	7489	2,1	m/s <sup>2</sup>	
30	4789,4	36,001	g	

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
18	19,78	5,46	kg	
19	0,458	0,177	cm	
20	135,589	0,0888	g	
21	25,36	0,84	cm	
22	74589,589	5698,26	erg	
23	0,145	0,5	cm/s	
24	14580,8	37,36	erg	
25	125,369	0,041	cm/s <sup>2</sup>	
26	74,58	3,14	g	
27	0,025	0,0074	m	
28	256	0,5	m/s <sup>2</sup>	
29	7489	2,1	m/s <sup>2</sup>	
30	4789,4	36,001	g	



# 4

818

819

## Representações gráficas

### 820 Como fazer um histograma

821 Quando fazemos uma análise estatística de um conjunto de  $N$  medidas de uma determinada grandeza, podemos realizar um gráfico no qual se representa para cada valor (ou intervalo de valores) o número de vezes em que este aparece. Este tipo de gráfico recebe o nome de **Histograma**. Um exemplo é mostrado na Figura 4.1. Como o conjunto de valores obtidos é discreto, resulta um esquema de barras. A largura destas barras é a menor diferença entre os valores medidos ou o tamanho do intervalo escolhido no caso em que seja conveniente agrupar vários valores num intervalo (isto deve ser determinado em função da série de medições realizadas). O número de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições.

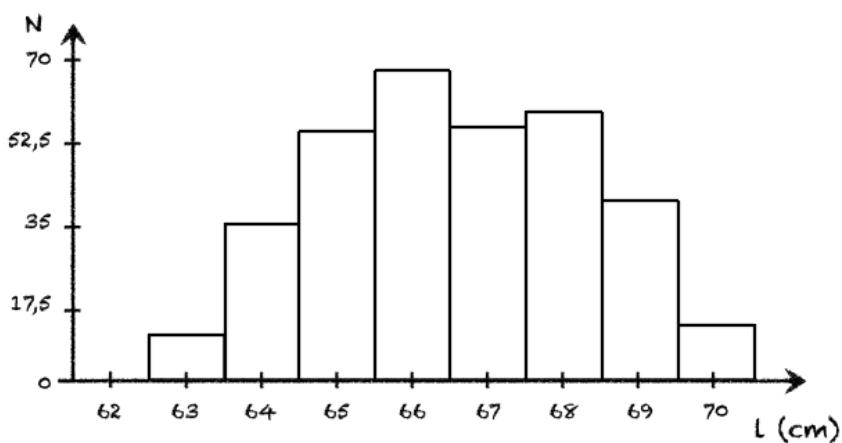


Figura 4.1: Exemplo de um histograma.

830 Para que fique mais claro, vamos considerar o seguinte exemplo. Medimos a altura de  
831 uma garrafa de água 40 vezes obtendo os seguintes valores, em centímetros:

	20,3	20,1	20,2	20,5	20,2	19,7	20,6	20,4
	19,8	20,3	20,1	20,2	20,3	20,4	20,3	19,6
832	20,0	19,5	20,7	20,3	20,1	20,7	20,5	20,5
	20,5	20,3	20,4	20,2	20,3	20,2	20,6	20,8
	20,4	20,0	19,9	20,6	20,8	19,7	20,9	20,3

833 Como podemos ver, há valores que se repetem e a frequência de repetição é diferente para  
 834 cada valor. Esta informação pode ser apresentada em forma gráfica, mediante a construção  
 835 de um histograma. Para isto devemos escolher valores ou intervalos de valores e determi-  
 836 nar quantas vezes o valor se repete no conjunto de dados.

837 Para nosso exemplo, vamos escolher intervalos de 0,2 cm começando pelo menor valor  
 838 medido de 19,5 cm. Desta forma o primeiro intervalo será de 19,5 a 19,7 cm, o segundo de  
 839 19,7 cm a 19,9 cm e assim sucessivamente. Cada intervalo será representado no gráfico pelo  
 840 seu valor central, ou seja, para o primeiro será 19,6 cm, para o segundo 19,8 cm, etc. Como  
 841 os intervalos são contínuos devemos escolher como serão os limites dos intervalos, aberto  
 842 e fechado, pois, por exemplo, o valor 19,7 cm vai contar para o primeiro ou o segundo  
 843 intervalo. No nosso exemplo, o valor inferior vai ser o fechado e o valor superior o aberto  
 844 (ou seja, 19,7 cm vai contar para o segundo intervalo e não para o primeiro). Desta forma,  
 podemos construir a Tabela 4.1, de frequências:

Tabela 4.1: Tabela de frequências absolutas e relativas em função da altura medida de uma garrafa.

Intervalo (cm)	Valor do Intervalo (cm)	Frequência	Frequência Relativa (%)
19,5 - 19,7	19,6	2	5,0
19,7 - 19,9	19,8	3	7,5
19,9 - 20,1	20,0	3	7,5
20,1 - 20,3	20,2	7	17,5
20,3 - 20,5	20,4	12	30,0
20,5 - 20,7	20,6	8	20,0
20,7 - 20,9	20,8	4	10,0
20,9 - 21,1	21,0	1	2,5

845

846 Uma vez construída a tabela, podemos fazer o gráfico no qual vamos colocar no eixo-x os  
 847 valores centrais dos intervalos escolhidos e no eixo-y o número de repetições (Frequência).  
 848 Para isto deve ser escolhida uma escala adequada em cada eixo, de forma que a distância  
 849 entre todos os valores centrais dos intervalos seja constante. Para o caso do eixo-y, a escala

850 deve ser escolhida de forma tal que o valor mais repetido fique na parte superior do eixo,  
 851 de forma que possa ser apreciada a estrutura do histograma. Uma vez escolhida a escala,  
 852 uma barra será desenhada para cada intervalo com o tamanho da frequência determinada  
 853 na tabela anterior, como mostramos no lado esquerdo da Figura 4.2.

854 Uma forma alternativa de se fazer o histograma é colocando no eixo-y a frequência relativa,  
 855 ou seja, o número de repetições dividido pelo número total de medidas, frequentemente  
 856 mostrado em percentagem, como na última coluna da Tabela 4.1 e no histograma do lado  
 857 direito da Figura 4.2.

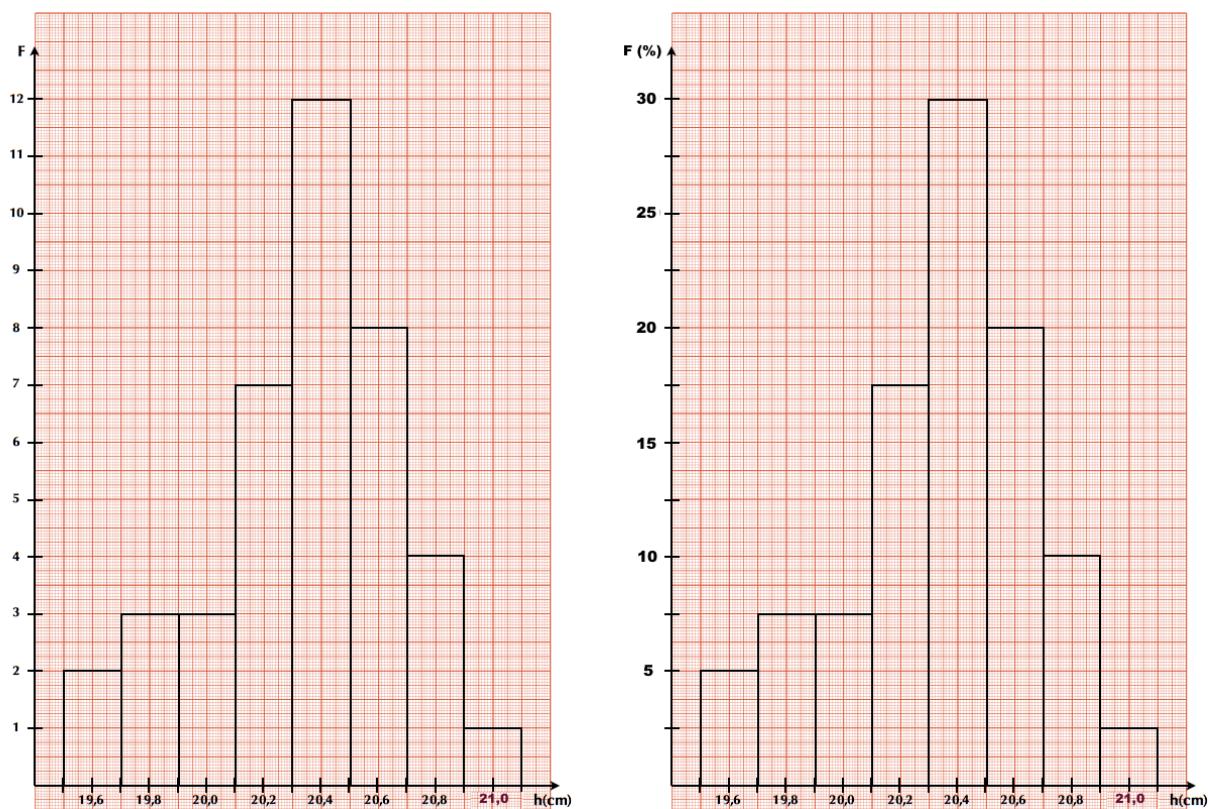


Figura 4.2: Histogramas de frequências (lado esquerdo) e frequências relativas (lado direito) da medida da altura (h) da garrafa de água .

## 858 Como construir um gráfico

859 Uma forma muito útil de apresentar os resultados experimentais é a partir de representa-  
 860 ções gráficas dos mesmos, pois neles a informação é sintetizada, facilitando sua análise e  
 861 interpretação. Geralmente, um gráfico é mais útil que uma tabela de valores, por exemplo,  
 862 quando estamos realizando medições de uma variável Y em função de outra X que varia  
 863 independentemente e queremos ver a relação funcional entre elas (por exemplo, a posição  
 864 de um móvel em função do tempo), ou para estudar se duas variáveis possuem alguma  
 865 correlação ou não.

866 Em Física Experimental I, todos os gráficos que realizaremos serão em duas dimensões

867 além dos histogramas que já foram discutidos na sessão 4. O primeiro passo é escolher  
 868 quais serão as variáveis e, logo, qual é a variável independente que será representada no  
 869 eixo horizontal e qual a dependente no eixo vertical. Por exemplo, se queremos represen-  
 870 tar a posição de um corpo em movimento em função do tempo vamos identificar duas  
 871 variáveis: posição ( $x$ ) e tempo ( $t$ ), sendo o tempo a variável independente. Ou seja, o  
 872 tempo será colocado no eixo-x e a posição no eixo-y.

873 Uma vez escolhidas as variáveis, devemos determinar a escala para cada eixo. Para isto  
 874 temos que considerar os valores medidos de cada variável, de forma a poder escolher uma  
 875 escala que facilite a leitura dos pontos experimentais, ou qualquer outro ponto represen-  
 876 tado no gráfico. Quando desenhamos o gráfico em papel, devemos escolher a escala de  
 877 forma a usar pelo menos metade da folha para representar os pontos experimentais. Para  
 878 facilitar a leitura do gráfico, é interessante utilizar escalas em que cada milímetro do pa-  
 879 pel corresponda a múltiplos ou submúltiplos de 2 ou 5 da grandeza correspondente. A  
 880 determinação da escala em cada eixo é independente.

881 Consideremos os seguintes valores medidos para o exemplo da posição do corpo em  
 882 função do tempo:

	Tempo (s)	Posição (m)	Incerteza da Posição (m)
	0,1	29	1
	0,3	34	1
	0,4	41	1
	0,5	38	1
883	0,7	33	1
	1,0	26	1
	1,1	23	1
	1,2	20	1
	1,4	17	1
	1,5	16	1

884 Vamos construir o gráfico em papel milimetrado, usando a folha “na vertical”, de forma  
 885 que o eixo-x fique na menor dimensão da mesma e o eixo-y na maior. Para o eixo-x, onde  
 886 vamos representar o tempo, a escolha parece simples, começamos em 0 (zero) e conside-  
 887 ramos uma escala de 10 mm para cada 0,1 s, pois o tamanho nesta dimensão é de 180 mm  
 888 e nós precisamos marcar de 0 a 1,5 s. Para o eixo-y, onde vamos representar a posição,  
 889 dispomos de 28 cm de folha. Neste caso, podemos considerar duas possibilidades: (A)  
 890 começamos a escala a partir do zero ou (B) começamos ela perto do menor valor medido,  
 891 neste caso 16 m. Em ambos os casos a escala deve ir até o máximo valor medido ou algum  
 892 valor superior imediato. Em geral escolhemos um valor superior que permita ajustar a  
 893 escala para um múltiplo de 2 ou 5. Se considerarmos o caso (A), uma escala possível seria  
 894 1 cm no papel para cada 2 m de posição (Figura 4.3 (esquerda)). Como podemos ver, não

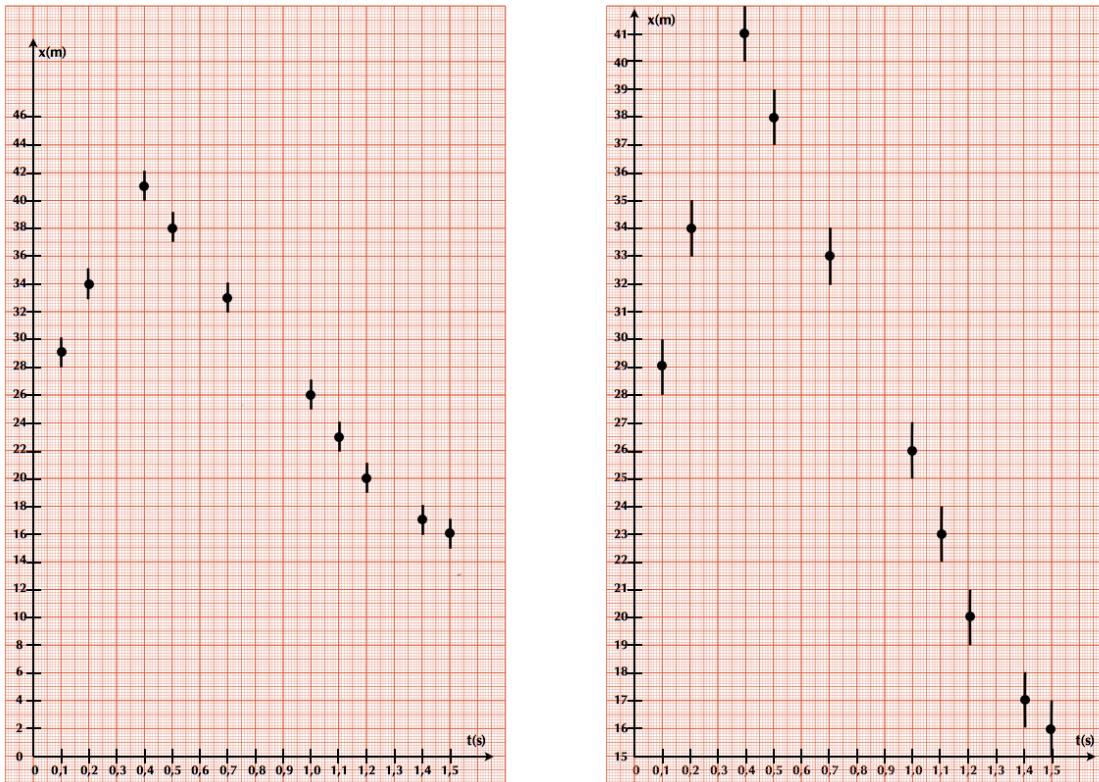


Figura 4.3: Gráfico da posição ( $x$ ) em função do tempo ( $s$ ) para o caso A (esquerda). Gráfico da posição ( $x$ ) em função do tempo ( $s$ ) para o caso B (direita).

é necessário começar do zero, podemos começar por exemplo de 15 m (caso B) e escolher uma escala de 1 cm para cada 1 m (Figura 4.3 (direita)). Desta forma podemos observar melhor a estrutura própria do gráfico. Uma vez definida a escala, marcamos valores regularmente espaçados nos eixos correspondentes e identificamos os eixos com as grandezas que estes representam, com suas respectivas unidades. Finalmente, desenha-se os pontos com suas barras de erro de acordo com a tabela de dados, como pode se ver na Figura 4.3. A barra de erro é a representação gráfica da incerteza. Assim, ela deve ser desenhada como uma reta que vai de um valor igual ao valor do ponto subtraído do valor de uma incerteza até o valor do ponto somado de uma incerteza.

Não existe uma única forma de representar os nossos dados. No exemplo anterior, ambos os gráficos estão corretos. **O importante é que se deve adotar uma “escala limpa e fácil de ser lida” de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.**



## Ajuste linear

### 910 Ajuste de uma função linear por Mínimos Quadrados

911 Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encon-  
912 trar uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. A forma de realizá-la é medi-  
913 ante o procedimento de Mínimos Quadrados, que no caso particular de uma função linear  
914 chama-se de regressão ou ajuste linear. Em Física Experimental I, só trabalharemos com  
915 este tipo de ajuste, seja porque as relações das grandezas medidas tem uma relação linear  
916 ou porque seremos capazes de linearizar relações entre grandezas.

Vamos então nos focalizar só no caso da regressão linear, deixando o caso mais genérico de mínimos quadrados para ser estudado mais para a frente. Na Figura 5.1, mostramos o caso linear. A dispersão dos valores está associada às flutuações dos valores de cada variável. Supomos uma tendência linear entre as variáveis X e Y, e nos perguntamos qual é a melhor reta:

$$y(x) = ax + b \quad (5.1)$$

917 que ajusta estes dados. A quantidade  $y_i - y(x_i)$  representa o desvio de cada medida  $y_i$  em  
918 relação ao valor previsto pelo modelo  $y(x)$ .

Vamos definir uma função  $\chi^2$  (chi-quadrado), dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.2)$$

onde  $N$  é o número de pontos que serão utilizados para a realização do ajuste linear. Desta forma, a função  $\chi^2$  é uma medida do desvio total dos valores medidos  $y_i$  em relação aos valores previstos pelo modelo linear  $ax + b$ . Os melhores valores para o coeficiente angular  $a$  e o coeficiente linear  $b$  são os que minimizam este desvio total, ou seja o valor de  $\chi^2$ .

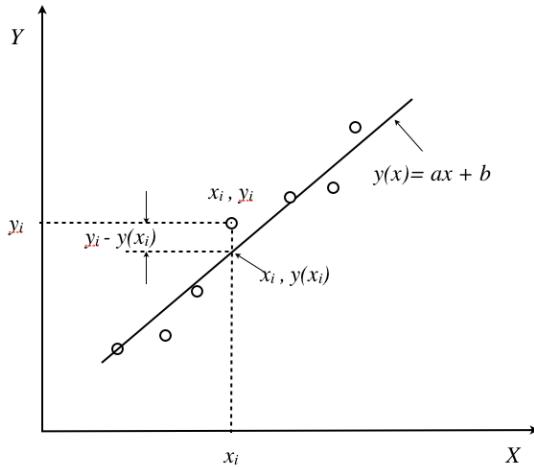


Figura 5.1: Gráfico de dados associado a um modelo linear.

Portanto, os melhores valores de  $a$  e  $b$  serão os que satisfazem:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (5.3)$$

Resolvendo as duas equações obtemos (mostrar):

$$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.4)$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.5)$$

Estes dois resultados se aplicam ao caso em que todos os dados da variável dependente ( $y$ ) têm a mesma incerteza absoluta e a incerteza da variável independente ( $x$ ) considera-se desprezível. As incertezas dos parâmetros  $a$  e  $b$  são dadas por:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N V[x]}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_i x_i^2}{N V[x]}} \quad (5.6)$$

onde  $V[x]$  é a variância de  $x$  e  $\chi_N^2$  é conhecido como o chi-quadrado por grau de liberdade (ou chi-quadrado reduzido), que no caso linear está dado por:

$$\chi_N^2 = \frac{1}{N-2} \chi^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.7)$$

A qualidade do ajuste linear pode ser determinada pelo *coeficiente de correlação* dado por:

$$\rho = \frac{\frac{1}{N} \sum_i x_i y_i - \frac{1}{N^2} \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{V[x]V[y]}} \quad (5.8)$$

onde:

$$V[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \quad \text{e} \quad V[y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \quad (5.9)$$

## <sub>919</sub> Método gráfico para ajustar uma reta com incerteza

<sub>920</sub> Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encontrar  
<sub>921</sub> uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. No Capítulo 4 da parte Concei-  
<sub>922</sub> tos Básicos na apostila discutimos como isto é feito analiticamente mediante o método  
<sub>923</sub> de mínimos quadrados, mas aqui estudaremos como faze-lo a partir do gráfico de Y em  
<sub>924</sub> função de X, o que chamamos de **método gráfico**.

<sub>925</sub> Na Figura 5.2 podemos observar a distribuição dos dados, círculos abertos, que queremos  
<sub>926</sub> ajustar. Neste caso, para simplificar, vamos considerar que a incerteza associada a cada  
<sub>927</sub> medida é do tamanho do ponto. Para ajustar graficamente os pontos por uma reta que  
<sub>928</sub> melhor representa a variação de Y em função de X devemos traçar uma reta de forma tal  
<sub>929</sub> que os pontos que se situem “acima” da reta se vejam compensados pelos pontos que se  
 situem “abaixo” da mesma, como na linha cheia mostrada na Figura 5.2<sup>1</sup>.

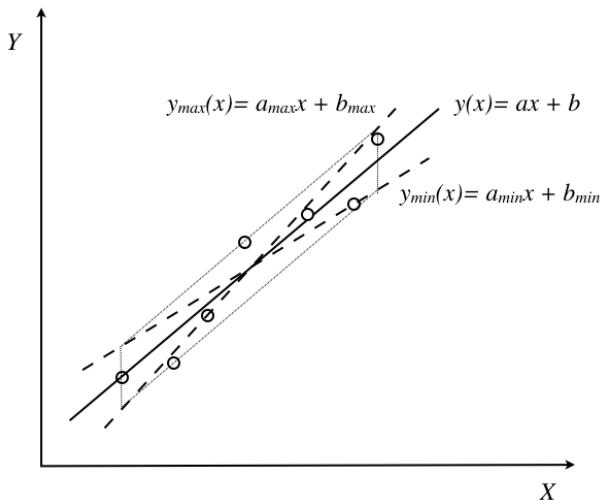


Figura 5.2: Método para ajuste linear.

<sub>930</sub>

<sub>931</sub> Desta forma podemos determinar o coeficiente angular ( $a$ ) e linear ( $b$ ) para a equação da  
<sub>932</sub> reta  $y = ax + b$ . Mas mesmo no caso gráfico é preciso dar as incertezas associadas à  
<sub>933</sub> determinação de  $a$  e  $b$ . Para isto, vamos traçar duas linhas paralelas à melhor reta ( $R$ )  
<sub>934</sub> que ajusta os nossos dados encontrados, uma passando pelo ponto mais afastado “acima”  
<sub>935</sub> da reta  $R$  e outra pelo ponto mais afastado “abaixo” da reta  $R$ . Caso exista um ou outro

---

<sup>1</sup>Note que o uso de uma régua transparente é conveniente pois permite ter uma visão global de todos os pontos.

936 ponto excepcionalmente afastado da reta média poderá não ser considerado pois a proba-  
937 bilidade de corresponder a uma medida incorreta é grande. Obtendo a interseção destas  
938 retas por duas retas paralelas ao eixo-y que contêm o primeiro e último ponto experimental  
939 representado temos um “paralelogramo de incerteza” como é mostrado na figura (parale-  
940 logramo pontilhado). A partir deste, desenhamos as duas retas diagonais achando o que  
941 chamaremos a reta de máxima  $y_{max} = a_{max}x + b_{max}$  e a de mínima  $y_{min} = a_{min}x + b_{min}$  (ver  
942 figura).

A partir destas três retas, podemos então determinar as incertezas associadas para o coeficiente angular  $\delta a$  e linear  $\delta b$  como:

$$\delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

$$\delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

# 6

943

944

## Determinação da velocidade instantânea

No movimento uniformemente acelerado a velocidade da partícula em um instante  $t$  pode ser calculada a partir da velocidade média calculada entre os instantes  $t + \Delta t$  e  $t - \Delta t$  com  $\Delta t$  constante. Isto é:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (6.1)$$

Assim, para um conjunto de medições de posição em função do tempo, podemos calcular a velocidade em cada ponto ( $i$ ) a partir das medições de tempo e posição do ponto posterior ( $t_{i+1}$  e  $x_{i+1}$ ) e anterior ( $t_{i-1}$  e  $x_{i-1}$ ), utilizando a fórmula:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (6.2)$$

Para cada valor de velocidade também podemos calcular a incerteza associada mediante a fórmula de propagação de incertezas. Desprezando a incerteza na determinação do tempo, obtemos:

$$\delta_{v_i}^2 = \frac{\delta_{x_{i+1}}^2 + \delta_{x_{i-1}}^2}{(t_{i+1} - t_{i-1})^2} \quad (6.3)$$

onde  $\delta_{x_{i+1}}$  e  $\delta_{x_{i-1}}$  são as incertezas na determinação da posição  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$  respectivamente.



946

947

## Distribuição Gaussiana

### <sup>948</sup> Valor médio, Desvio Padrão e Densidade de Probabilidade

Sejam  $N$  medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Como alguns dos valores  $x_i$  medidos podem ser repetidos, podemos dizer que para esta grandeza temos  $M$  **eventos** possíveis de medida tal que  $M \leq N$  e eles são:  $y_1, y_2, \dots, y_M$ . Então, podemos definir a **frequência de ocorrência** do evento  $y_i$  como  $N(y_i)$  de forma tal que:

$$\sum_{i=1}^M N(y_i) = N. \quad (7.1)$$

Desta forma, podemos definir a **frequência relativa** como a fração de eventos  $y_i$  em relação ao número total de eventos  $N$ , dada por:

$$F(y_i) = \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.2)$$

de forma que (mostrar):

$$\sum_{i=1}^M F(y_i) = 1. \quad (7.3)$$

Se o processo é repetido indefinidamente, ou seja,  $N \rightarrow \infty$ , a frequência relativa é interpretada como a **probabilidade de ocorrência** do evento  $y_i$ :

$$P(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.4)$$

<sup>949</sup> e como sabemos que  $0 \leq N(y_i) \leq N$ , então  $0 \leq P(y_i) \leq 1$ .

<sup>950</sup> No Capítulo 2 da parte Conceitos Básicos definimos os conceitos de valor médio e desvio  
<sup>951</sup> padrão. Agora podemos re-escrever estas definições em função da frequência relativa,  
<sup>952</sup> obtendo:

### 1. Valor médio

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^M F(x_i)x_i, \quad (7.5)$$

### 2. Variância $V[x] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2 F(x_i) \quad (7.6)$$

953

954 Quando realizamos observações experimentais utilizamos instrumentos que determinam  
 955 os valores de grandezas que são continuamente distribuídas. Os resultados são truncados  
 956 até o limite da precisão de medida do instrumento utilizado. Por exemplo, um cronômetro  
 957 usual mede intervalos de tempo com precisão de um centésimo de segundo. Isto signi-  
 958 fica que intervalos de tempo menores que este valor não podem ser medidos com este  
 959 instrumento. Assim, os resultados obtidos serão representados por um número finito de  
 960 valores, mesmo que a variável observada seja contínua. Algumas vezes, o número de va-  
 961 lores possíveis medidos, mesmo que finito, pode ser muito grande, e para estes casos é  
 962 conveniente agrupa-los em intervalos. Desta forma o conjunto de medidas diferentes fica  
 963 reduzido sem que a informação da amostra original seja perdida.

Consideremos novamente  $N$  medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ . Para estes casos, definimos como o mesmo evento todo resultado da realização do processo aleatório  $y$  que caia num intervalo de valores  $\Delta y$ , de forma que o evento agora será caracterizado por  $\{y_i, \Delta y\}$ :

$$y_i - \frac{\Delta y}{2} \leq x_j < y_i + \frac{\Delta y}{2}. \quad (7.7)$$

A probabilidade de ocorrência do evento  $\{y_i, \Delta y\}$  é definida por:

$$P(y_i) = \Delta P_i \quad (7.8)$$

onde  $\Delta P_i$  é a probabilidade de encontrarmos como resultado da realização do processo aleatório, valores no intervalo  $\{y_i - \frac{\Delta y}{2}, y_i + \frac{\Delta y}{2}\}$ . Para intervalos  $\Delta y$  pequenos, podemos escrever a seguinte relação:

$$P(y_i) = \Delta P_i = p(y_i)\Delta y \quad (7.9)$$

onde  $p(y_i)$  é denominada de densidade de probabilidade do evento aleatório  $y_i$ . E se  $\Delta y \rightarrow 0$ , então  $\Delta P_i$  e  $\Delta y$  são infinitesimais podendo escrever a densidade de probabilidade como:

$$p(y) = \frac{dP}{dy} \quad (7.10)$$

sendo que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = 1 \quad (7.11)$$

Em  $N$  repetições de um processo aleatório real, a aproximação experimental para a proba-

bilidade de realização de um evento é a frequência relativa  $F(y_i)$ , definida na equação 7.2. Assim, a densidade de probabilidade experimental  $p_{exp}(y_i)$  de ocorrência do evento  $\{y_i, \Delta y\}$  é dada por:

$$p_{exp}(y_i) = \frac{F(y_i)}{\Delta y}. \quad (7.12)$$

Para o caso contínuo e utilizando o conceito de densidade de probabilidade, o valor médio ( $\mu$ ) e a variância ( $\sigma^2$ ) podem ser escritos da seguinte forma:

### 1. Valor médio

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy. \quad (7.13)$$

### 2. Variância $V[y] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 p(y) dy. \quad (7.14)$$

## 966 Função de Laplace-Gauss

Em muitas situações experimentais utilizamos **distribuições Gaussianas** para interpretar nossos resultados físicos, em parte porque os fundamentos teóricos das medições realizadas se correspondem com distribuições Gaussianas ou porque a experiência tem nos mostrado que a estatística de Gauss nos proporciona uma descrição razoavelmente acurada dos vários eventos reais. Na distribuição Gaussiana, a densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7.15)$$

onde  $\mu$  é o valor médio e  $\sigma$  o desvio padrão da distribuição, dados pelas equações discutidas anteriormente.

Na Figura 7.1 apresentamos a função Gaussiana de densidade de probabilidade para a variável continua  $x$ . Esta função é também chamada de função de Laplace-Gauss ou função Normal. O gráfico da função Gaussiana é uma curva simétrica em forma de "sino" com uma altura máxima dada por  $G_{max} = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ . Pode ser mostrado a partir da equação 7.15 que  $\sigma$  é a meia largura da curva na altura correspondente a  $\sim 0,61G_{max}$  e que a área sob a curva entre  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$  (região pintada na Figura 7.1) corresponde a 68,3% da área total. Isto quer dizer que a probabilidade de medirmos um valor no intervalo  $\mu \pm \sigma$  é 68,3%. Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que a probabilidade de encontrarmos um valor entre  $\mu \pm 2\sigma$  é 95,4% e entre  $\mu \pm 3\sigma$  é 99,7%.

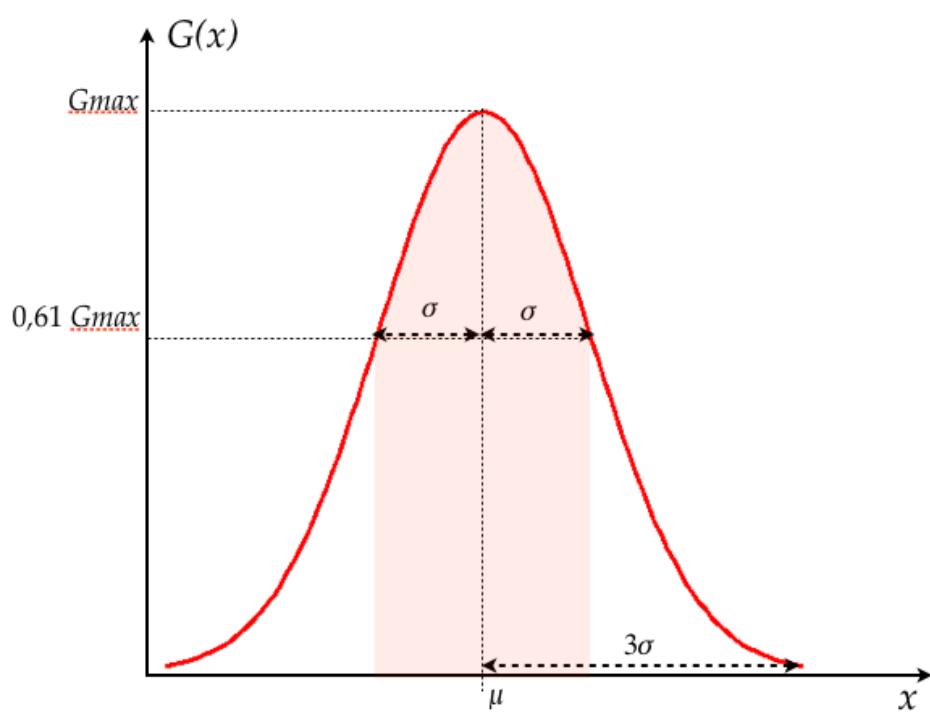


Figura 7.1: Representação da função Gaussiana.

978

979

## Bibliografia

- 980 [1] Fundamentos da Teoria de Erros, José Henrique Vuolo, 2.<sup>a</sup> Edição 1996, Editora Edgar  
981 Blücher Ltda,
- 982 [2] Curso de Física Básica, – Mecânica Volume 1), H. Moysés Nussenzveig, 2.<sup>a</sup> Edição 2015,  
983 Ed. Edgard Blücher Ltda,
- 984 [3] Física I – Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman, 14.<sup>a</sup> Edição 2016, Pearson  
985 Education do Brasdil Ltda.,
- 986 [4] *Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, L. Galante e I. Gnesi, American  
987 Journal of Physics **88**, 279 (2020).
- 988 [5] *Uma visão diferenciada sobre o ensino de forças impulsivas usando um smartphone*, V. L. B. de  
989 Jesus e D. G. G. Sasaki, Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, 1303 (2016).



PARTE III

## APÊNDICES





991  
992

## Caderno de laboratório

- 993 1. **É um documento.** Nele se tem todos os registros cronológicos de um experimentos  
994 ou ideia. Portanto, deve ter datas, sem rasuras nem espaços em branco, sem inserções  
995 e se possível assinado por quem realizou as anotações.
- 996 2. **É pessoal.** Pode haver outros cadernos de uso compartilhado, por exemplo, para  
997 equipamentos ou instrumentos de laboratório, etc., onde se registram informações  
998 de uso geral, como mudanças introduzidas em configurações experimentais ou es-  
999 tado de conservação dos equipamentos. Mas o caderno de laboratório contem ideias,  
1000 propostas e modo de colocar a informação que são pessoais, próprias de cada pessoa.
- 1001 3. **É um registro de anotação em sequência.** Não se devem intercalar resultados nem  
1002 se corrigir o que está escrito. Em caso de se detectar um erro, se anota na margem o  
1003 erro encontrado e a página na qual se corrige. Isto permite saber se o erro pode-se  
1004 voltar a encontrar e a partir de que dados foi corrigido. Por este mesmo motivo não  
1005 se deve escrever a lápis.
- 1006 4. As páginas devem ser numeradas. Isto permite fazer referência de forma fácil e or-  
1007 ganizada às anotações anteriores, assim como também indicar na margem onde se  
1008 corrigem os erros.
- 1009 5. As fórmulas e figuras devem ter uma numeração consistente e interna. Um exem-  
1010 plo prático é numerar todas as fórmulas dentro de cada página ou folha e citá-las  
1011 por página-fórmula. É importante numerar todas as fórmulas, pois não sabemos no  
1012 futuro qual necessitaremos citar ou utilizar.
- 1013 6. Referências completas. No caso em que se deva utilizar uma referência externa (ro-  
1014 teiro do experimento, artigo, livro, etc.), esta referência deve ser completa. Se uma  
1015 referência é citada com frequência pode-se utilizar a última página do caderno para  
1016 registrá-la e citá-la por seu número. Quando citamos alguma coisa, sempre acredita-  
1017 mos que vamos nos lembrar de onde saiu, mas isto só é assim a curto prazo.
- 1018 7. **Deve-se escrever todos os resultados.** Indicar sempre a maior quantidade de in-  
1019 formação possível do experimento. Todas as condições experimentais devem ser

1020 corretamente registradas e deve-se utilizar diagramas claros das configurações ex-  
1021perimentais e indicando também cada vez que há uma mudança. Um dado ou  
1022 informação que hoje parece irrelevante em função do nosso modelo da realidade,  
1023 pode resultar vital ao descobrir que nossas ideias estavam erradas ou eram incom-  
1024pletas. A falta de um dado de aparência menor pode invalidar tudo o que foi reali-  
1025zado.

1026 **8. Deve-se escrever o plano.** O que é que se pretende medir, o que é que se procura e  
1027 as considerações ou razões pelas quais se faz o experimento. O planejamento do ex-  
1028perimento e as ideias a serem realizadas devem ser explícitas. A anotação sequencial  
1029 permite seguir a evolução das idéias, dado vital também para interpretar os resul-  
1030tados, pois os preconceitos condicionam o que se mede e como se mede. Saber o que  
1031 se pensava no momento de medir vai nos indicar se nesse momento tivemos uma  
1032determinada precaução que depois demonstrou ser fundamental.

1033 **9. Deve-se escrever as conclusões.** O mesmo vale para o planejamento do experimento.

1034 **10. Fazer uma reorganização periódica das ideias.** Se uma ideia tem evoluído desde o  
1035 inicio do experimento, é conveniente periodicamente fazer um quadro da situação,  
1036 passando a limpo o que foi feito, para não ter que reconstruir a história a cada vez.



1037

1038

## Como escrever um relatório?

1039 A idéia desta nota é dar aos alunos de Física Experimental I algumas dicas e recomenda-  
1040 ções de como escrever um relatório. Infelizmente, não existe uma “receita” para isto, pois  
1041 há várias maneiras de fazer um relatório, dependendo do tipo de trabalho realizado e de  
1042 quem o escreva. Portanto, a organização do relatório pode ser diferente apresentando di-  
1043 ferentes distribuições de seções. Nesta nota propõe-se uma estrutura básica com algumas  
1044 sugestões, mas será com a experiência, com a prática e com as sucessivas correções do pro-  
1045 fessor que os alunos aprenderão a fazê-lo. Escrever um relatório é um aprendizado que se  
1046 obtém aos poucos.

1047 O ponto principal a ser tido em conta é que no relatório deve-se apresentar os resultados  
1048 obtidos de forma clara e concisa. Para isto, deve-se expor cuidadosamente quais são os  
1049 objetivos do trabalho realizado, os conceitos físicos básicos necessários para a realização  
1050 do experimento e como ele foi realizado, entre outros. O relatório tem que ser escrito  
1051 de modo que um leitor que nunca tenha realizado o experimento descrito, ou a pesquisa  
1052 realizada, seja capaz de entender e até reproduzir o trabalho a partir do conhecimento  
1053 adquirido na sua leitura. Para começar, sugere-se a seguinte distribuição:

- 1054 • **Título e autores:** O título deve descrever claramente o conteúdo do trabalho. O re-  
1055 latório tem que ter o(s) nome(s) do(s) autor(es) e as informações relevantes referentes  
1056 a ele(s).
- 1057 • **Resumo:** Deve dar uma visão completa do trabalho realizado. De forma breve, deve-  
1058 se descrever qual é o objetivo do mesmo, o que foi feito e qual foi o resultado obtido.
- 1059 • **Introdução:** Nela expõem-se as motivações do trabalho e os objetivos a serem atin-  
1060 gidos. Deve-se apresentar uma revisão da informação existente sobre o tema em  
1061 questão. Também, deve-se incluir uma explicação teórica mínima (não copiada de  
1062 livro, mas elaborada pelos alunos) que permita a compreensão do trabalho e como  
1063 esta informação está aplicada ao experimento específico.
- 1064 • **Método experimental ou Descrição do experimento:** Deve-se descrever em deta-  
1065 lhe a configuração experimental utilizada, os métodos utilizados para a realização

das medições, incluindo a fundamentação física. Deve-se realizar uma descrição dos aspectos relevantes dos dispositivos e equipamentos utilizados, especificando suas características importantes (precisão dos instrumentos, intervalos de medição, etc). Pode-se representar esquematicamente o dispositivo empregado para a realização do experimento de forma a acompanhar as explicações e facilitar a compreensão do leitor.

- **Resultados e discussão:** Esta seção tem que ser uma continuação natural da Introdução e do Método experimental ou Descrição do experimento. Deve-se incluir tabelas dos dados colhidos junto com as suas incertezas e a explicação de como foram avaliadas essas incertezas. Também deve ser realizada uma descrição de como a análise de dados foi realizada e como os resultados foram obtidos. Deve-se incluir também gráficos, junto com as curvas de ajuste dos dados realizados. Além da análise dos dados, é fundamental realizar uma discussão dos mesmos: sua validade, precisão e a sua interpretação. Dependendo do caso, pode-se realizar uma proposição de um modelo para a descrição dos resultados ou realizar uma comparação com o modelo teórico já discutido na introdução. Caso seja necessária a utilização de equações, elas devem estar explicitadas ou, se já foram introduzidas anteriormente (na introdução), através de uma referência ao número de equação correspondente.

Levar em conta que, dependendo do relatório e do trabalho apresentados, pode-se separar esta seção em duas independentes, uma de resultados e outra de discussões.

Figuras e tabelas: cada figura ou tabela deve estar numerada e deve conter uma legenda ao pé que permita entendê-la. A descrição detalhada da figura deve estar incluída também no texto e referenciada pelo número. Os gráficos são considerados figuras, então deverão ser numerados de forma correlacionada com as mesmas.

- **Conclusões:** Deve conter uma discussão de como a partir dos resultados obtidos mostra-se que as hipóteses e objetivos do trabalho foram satisfeitos ou não. Espera-se que a discussão do trabalho seja feita de forma crítica podendo-se propor melhorias ao trabalho realizado, tanto na metodologia empregada quanto nas propostas para ampliar o objetivo do experimento no futuro.
- **Referências:** Deve-se informar a bibliografia citada durante o desenvolvimento do trabalho. A bibliografia pode estar relacionada ao modelo teórico discutido, a referências de equipamento utilizado, ou a artigos de referência no qual o trabalho foi baseado.
- **Apêndice:** Caso seja necessário, pode-se anexar um ou mais apêndices com informação complementar que ajude a esclarecer o conteúdo das partes anteriores (cálculos realizados para obter um dado resultado, estimativa de incertezas, etc.), mas que no corpo principal do relatório desviariam a atenção do leitor. No(s) apêndice(s) coloca-se geralmente informação adicional necessária, mas não fundamental.



1104

1105

## Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Se a força resultante sobre uma partícula de massa  $m$  for,  $\vec{F}$ , a segunda lei de Newton diz que:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{C.1})$$

com  $\vec{a}$  sendo o vetor aceleração da partícula. No caso de  $\vec{F}$  ser uma força constante, *viz.* não depende nem do tempo, nem da posição da partícula e nem da velocidade da mesma, da Eq.(C.1) vemos que a aceleração  $\vec{a}$  é constante. Assim, a Eq.(C.1) pode ser facilmente integrada para obtermos:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m \int_{t_0}^t \vec{a} dt \implies \vec{F}(t - t_0) = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \implies \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.2})$$

com  $\vec{v} := \vec{v}(t)$  e  $\vec{v}_0 := \vec{v}(t_0)$ . Integrando temporalmente mais uma vez ambos os membros da Eq.(C.2) obtemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.3})$$

com  $\vec{r} := \vec{r}(t)$  sendo a posição da partícula como função do tempo e  $\vec{r}_0 := \vec{r}(t_0)$  a sua posição inicial.

Vamos supor agora que a força resultante  $\vec{F}$  é paralela à velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Como a soma vetorial de vetores paralelos continua sendo um vetor na mesma direção que os vetores somados, de acordo com a Eq.(C.2), a velocidade  $\vec{v}(t)$  é paralela a  $\vec{v}_0$  para todo tempo. Portanto trata-se de um movimento retilíneo. Como também a aceleração é constante o movimento se denomina Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Sem perda de generalidade podemos chamar de eixo “y” o eixo coordenado na direção de movimento, e as equações de movimento, Eqs.(C.1) e (C.2), nessa direção são:

$$y = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{F}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.5})$$

1115 com  $y := y(t)$  e  $v_y := v_y(t)$  e as condições iniciais,  $y_0 := y(t_0)$  e  $v_{y0} := v_y(t_0)$ .



1116

1117

## Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker

1118 Uma vez baixada a versão do aplicativo Tracker para o sistema operacional de seu com-  
1119 putador, a partir do endereço eletrônico <https://physlets.org/tracker/>, instale-o seguindo  
1120 as orientações no próprio sítio da Internet. Com o aplicativo instalado, siga os sete passos  
1121 descritos a seguir para realizar a tomada de dados.

### **Passo 1: Escolha de idioma português**

1122 Abra o aplicativo e no caminho Edit > Language > e escolha a opção português como  
1123 mostra a Figura D.1.

### **Passo 2: Abertura do arquivo do vídeo a ser analisado**

1124 Para abrir o arquivo do tipo vídeo gravado com o celular faça um “click” na aba “Arquivo”  
1125 e logo na aba “Abrir”. Na janela que abrirá procure onde o arquivo do tipo vídeo está guar-  
1126 dado e faça “click” nele. O Tracker carrega vídeos de quase todos os formatos gravados  
1127 por celulares mas os arquivos não podem ser muito grandes (o arquivo carregado nas fi-  
1128 guras deste tutorial era de 1,3 MB). Se o arquivo não abre tente reduzir o tamanho dele  
1129 editando o vídeo no celular, cortando as partes em que a bolinha não se move, antes da  
1130 queda, ou quando já está no chão. Na Figura D.2 vemos um vídeo já aberto para análise.  
1131

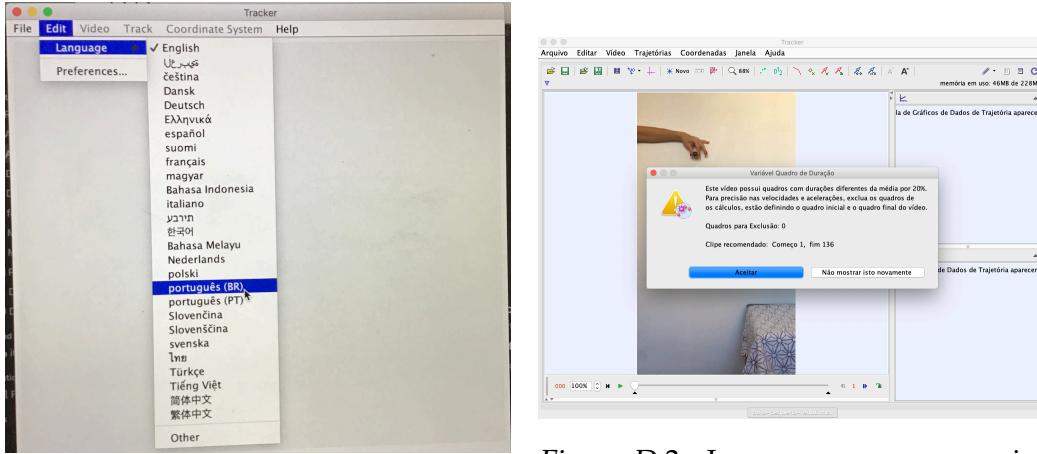


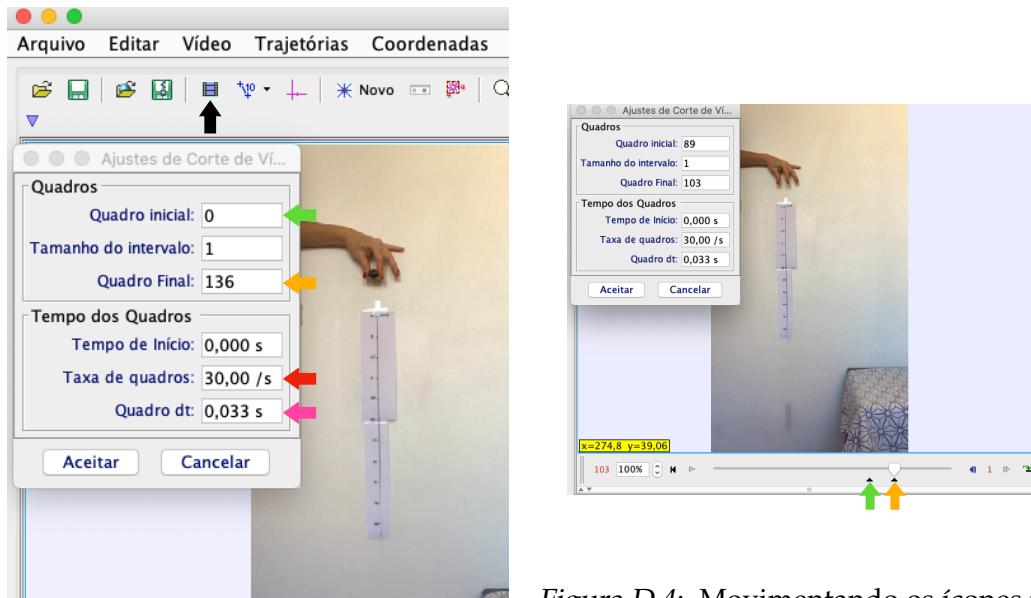
Figura D.1: Escolha de idioma no aplicativo Tracker.

Figura D.2: Ignore a mensagem na janela fazendo “click em “Aceitar”.

### 1136 Passo 3: Determinação dos quadros inicial e final da análise

1137  
1138 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.3 para abrir a janela de “Ajustes  
1139 de Corte de Vídeo”. Muitas vezes no lugar assinalado com uma seta vermelha na Figura  
1140 D.3 aparece um valor muito próximo de 30.00/s (trinta quadros por segundo), apague o  
1141 valor e coloque exatamente 30.00/s.

1142 As setas verdes e laranja da Figura D.3 mostram os lugares onde deveremos colocar os  
1143 valores numéricos corretos dos quadros iniciais e finais respectivamente. Para escolher o  
1144 quadro inicial correto movimente o ícone preto indicado pela seta verde na Figura D.4 até  
1145 ver a bolinha justa saindo da mão. Verá que o valor numérico do quadro inicial se coloca  
1146 automaticamente no lugar indicado pela seta verde na Figura D.3. Para escolher o quadro  
1147 final faça o mesmo com o ícone preto indicado pela seta laranja na Figura D.4. Escolha o  
1148 quadro final mais o menos como no instante mostrado na Figura D.4. Finalmente feche a  
1149 janela “Ajustes de Corte de Vídeo” fazendo “click em “Aceitar”.



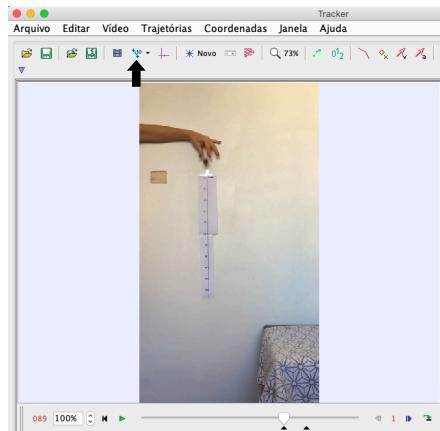
*Figura D.4:* Movimentando os ícones pretos indicados pelas setas verde e laranja es-  
colhemos os quadros iniciais e finais res-  
pectivamente.

1150  
1151 Figura D.3: Faça “click” no ícone indi-  
cado pela seta preta para abrir a janela  
de “Ajustes de Corte de Vídeo”.

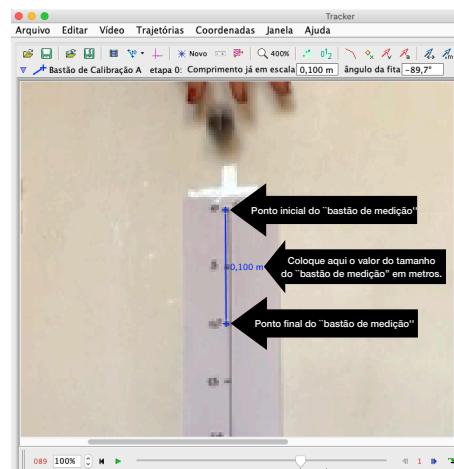
#### Passo 4: Escolha da escala de comprimentos

1152  
1153 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.5 e escolha um novo “bastão  
1154 de medição”. De um “zoom” na imagem escolhendo o aumento apropriado no ícone  
1155 da lupa de maneira de ver claramente a região da régua na imagem do quadro inicial.  
1156 Mantendo apertada a tecla “shift” do computador selecione os pontos iniciais e finais so-  
1157 bre a régua como indicado na Figura D.6. Não esqueça de colocar na janela indicada  
1158 nessa figura o valor real do comprimento do “bastão de medição” escolhido em metros.

1159



*Figura D.5:* Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta você pode escolher um “bastão de medição” que definirá a escala.



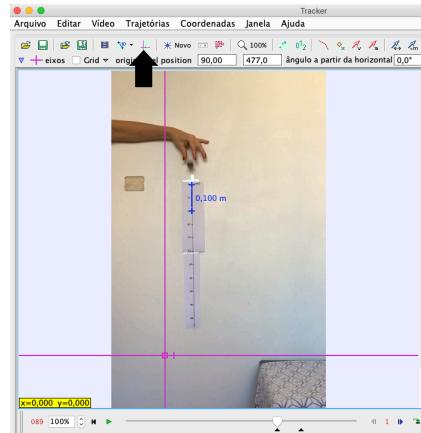
*Figura D.6:* Determinação do “bastão de medição” que estabelece a escala de comprimentos.

#### 1160 Passo 5: Escolha do sistema de coordenadas

1161  
 1162 Para escolher um sistema de eixos coordenados faça “click” no ícone indicado pela seta  
 1163 preta na Figura D.7. Dessa forma aparecerá o sistema de eixos cor de rosa da figura. Você  
 1164 pode deslocar a origem de coordenadas do sistema de eixos fazendo “click” com o botão  
 1165 esquerdo do mouse do computador e arrastando a origem para o local que você desejar.  
 1166 Também é possível inclinar o sistema de eixos se for necessário (nesta experiência não será  
 1167 necessário) fazendo “click” com o botão esquerdo do mouse do computador em qualquer  
 1168 eixo e arrastando esse eixo para obter a inclinação desejada.

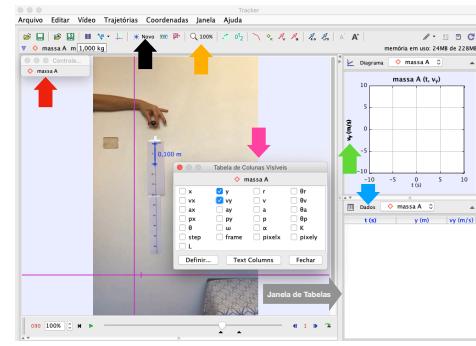
#### 1169 Passo 6: Escolha da janela de controle da massa cuja trajetória será determinada

1170  
 1171 Fazendo “click” no ícone marcado pela seta preta na Figura D.8 se abrirá a janela de  
 1172 controle da massa (indicada pela seta vermelha na Figura D.8, cuja trajetória será determinada  
 1173 (neste caso a bolinha da figura). Fazendo “click” na seta verde você poderá escolher qual  
 1174 gráfico quer visualizar uma vez escolhidos os pontos da trajetória cuja forma será ensi-  
 1175 nada no próximo passo deste tutorial. Também fazendo “click” na aba “Dados” assina-  
 1176 lada pela seta azul na Figura D.8 se abrirá a janela onde você poderá selecionar (seta rosa  
 1177 na figura) as colunas que apareceram na janela de tabelas (indicada também na figura).



1178

*Figura D.7:* Para criar um sistema de coordenadas (eixos de cor rosa na Figura) faça “click” no ícone indicado pela seta preta. Logo posicione a origem de coordenadas, como mostrado na figura, arrastando com o mouse do computador o quadrado rosa no sistema de eixos.



*Figura D.8:* Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta abre-se a janela indicada pela seta vermelha. Fazendo “click” no ícone indicado pela seta verde se escolhe o gráfico que quer ser visualizado após determinar os pontos da trajetória. Fazendo “click” na aba “Dados”, indicada pela seta azul, abre-se a janela indicada pela seta rosa onde podem ser escolhidas as colunas das tabelas de dados que apareceram na janela de tabelas. Se precisar fazer um zoom na imagem pode usar a aba indicada pela seta laranja.

## 1179 Passo 7: Determinação dos pontos da trajetória de uma partícula

1180

1181 Para determinar os pontos da trajetória em forma manual você precisará manter apertada  
 1182 a tecla “shift” do computador durante todo o processo de medida . Ao apertar a tecla  
 1183 “shift” você entra no modo aquisição de dados e verá que o cursor virá um quadrado  
 1184 com um “x” no meio. Ao fazer “click” no ponto que você quer traçar a trajetória (no  
 1185 nosso caso será o centro da bolinha) pela primeira vez se marca um ponto da trajetória e a  
 1186 imagem pula automaticamente para o próximo quadro e ali você pode marcar o centro da  
 1187 bolinha novamente. Repita esse processo até marcar todos os pontos da trajetória contidos  
 1188 nas imagens entre os quadros iniciais e finais determinadas no passo 3 deste tutorial. À  
 1189 medida que você vai marcando os pontos da trajetória as colunas nas tabelas de dados  
 1190 (ver Figura D.8) vão sendo preenchidas em forma automática. No processo de medida  
 1191 é importante se auxiliar da ferramenta zoom, indicada pela seta laranja na Figura D.8,  
 1192 para ter uma melhor imagem da bolinha e poder determinar com melhor precisão o seu  
 1193 centro. Uma vez escolhido um zoom (por exemplo 400%) para enquadrar a imagem da  
 1194 bolinha arraste a imagem com o mouse. Na Figura D.9 é mostrado o final do processo de  
 1195 medida. Fazendo “double click”, com o botão esquerdo do mouse, no cabeçalho de uma  
 1196 coluna, na janela de tabela, você seleciona a janela e os valores ficaram da cor rosa como  
 1197 estão os valores da coordenada “y” na Figura D.9. Uma vez selecionada a coluna, fazendo

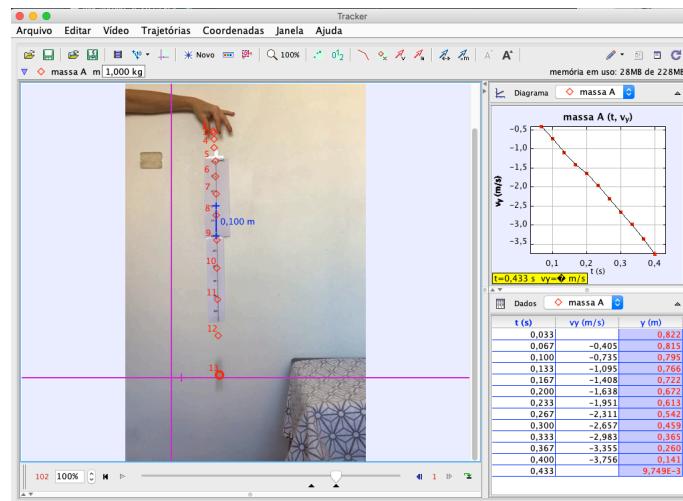


Figura D.9: Pontos da trajetória marcados e dados coletados nas colunas da janela de tabela.

1198 “click” com o botão direito do mouse você abrirá uma janela com varias opções. Na aba  
 1199 “Números” você poderá escolher o formato (sem com vírgula ou ponto para separar os  
 1200 decimais). Uma vez escolhido o formato você poderá copiar os dados selecionados para  
 1201 serem transferidos, por exemplo, para uma planilha tipo Excel.



1202

1203

## Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis

1204 VidAnalysis é um aplicativo para análise física de movimentos em vídeos muito fáceis  
1205 de usar. O aplicativo é compatível com Android e pode ser baixado gratuitamente em  
1206 <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.freey>, ou simplesmente  
1207 pesquise no Google Play com o nome VidAnalysis free. O aplicativo possui apenas uma  
1208 versão em inglês, mas devido à simplicidade de seu uso, ele não representa nenhum pro-  
1209 blema.

1210 Para realizar a coleta de dados das posições do objeto gravado no vídeo, siga as etapas  
1211 abaixo:

### 1212 **Passo 1: Abertura do vídeo a ser analisado**

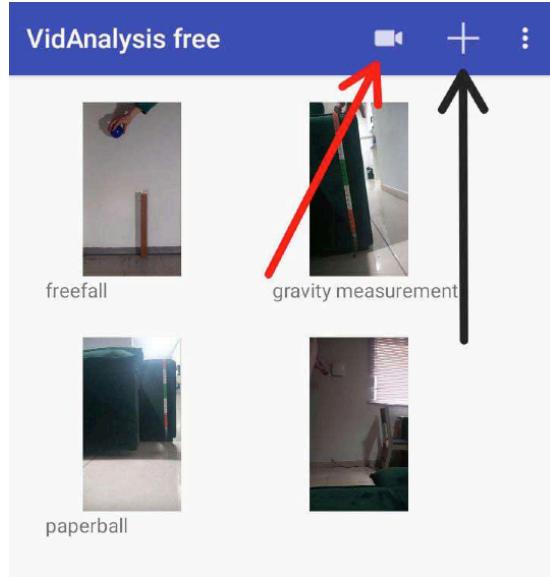
1213

1214 Primeiro, temos que gravar um vídeo ou importar um existente. Se você decidir importar  
1215 um vídeo, “click” no sinal de adição mostrado com uma seta preta na Figura E.1. Como  
1216 o aplicativo VidAnalysis suporta apenas formatos de vídeo com extensão “mp4” é reco-  
1217 mendável gravar diretamente dentro do aplicativo, escolhendo a opção marcada pela seta  
1218 vermelha na Figura E.1. Ao capturar vídeos para análise, é importante que a câmera esteja  
1219 fixa, que o movimento esteja dentro do plano da câmera, e que no vídeo gravado apareça  
1220 alguma referência de um comprimento conhecido, por exemplo de uma régua.

### 1221 **Passo 2: Calibração**

1222

1223 Para começar a análise do movimento do objeto primeiramente selecionamos o vídeo no  
1224 reprodutor e será aberta a primeira imagem dele como se mostra na Figura E.2. É im-  
1225 portante avançar o vídeo nessa tela, para começar a coleta de dados da trajetória do objeto  
1226 diretamente no momento em que o movimento começa, para isso fazemos “click” no botão  
1227 mostrado pela seta verde na Figura E.2 até avançarmos ao quadro do vídeo que interessa.  
1228 Fazendo “click” nos três pontos indicados pela seta azul na Figura E.2, conseguimos ocultar  
1229 o menu em preto, para uma melhor visualização do vídeo.



*Figura E.1:* Menu do aplicativo VidAnalysis.

1230 Antes da coleta de dados deve primeiro calibrar qual é a escala de comprimentos que será  
 1231 usada pelo aplicativo. Para isso, fazemos “click” na aba “start analysis” no canto superior  
 1232 direito na Figura E.2. Agora temos que marcar o comprimento conhecido. Ao fazer “click”  
 1233 no ponto inicial do comprimento conhecido, na tela esse ponto será marcado com uma  
 1234 cruz azul. Em seguida, deve fazer “click” novamente no ponto final do comprimento  
 1235 conhecido e outra cruz azul indicará esse ponto. Após finalizar essa segunda marcação  
 1236 abrirá imediatamente uma janela solicitando o tamanho conhecido, como mostramos na  
 1237 Figura E.3. A legenda em inglês na janela pergunta “Qual é o comprimento real disto em  
 1238 metros” (“How many meters is this in real” em inglês). É importante saber que a unidade  
 1239 a ser usada pelo aplicativo para comprimentos é sempre metros portanto as velocidades  
 1240 serão em metros por segundo por exemplo.

1241 Após dar “ok” na janela da escala aparecerá um sistema de eixos coordenados cuja origem  
 1242 devemos estabelecer (ver Figura E.4). Em geral, é uma boa ideia posicionar a origem de  
 1243 coordenadas de tal maneira que as coordenadas da posição do objeto sempre tenham o  
 1244 mesmo sinal ao longo da trajetória.

#### 1245 **Passo 3: Coleta de dados**

1246

1247 A coleta de dados começa fazendo um “click” com o dedo no ponto do objeto que que-

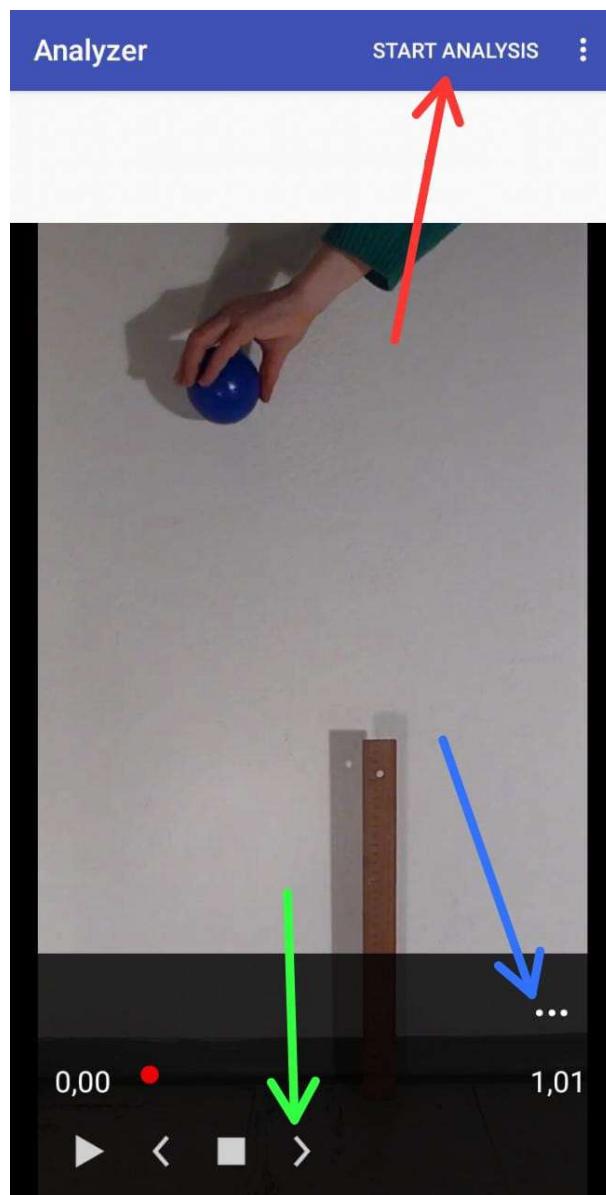


Figura E.2: Reprodutor de video do aplicativo VidAnalysis.

remos seguir a trajetória, por exemplo no meio da bolinha azul na Figura E.4. Como as marcações são feitas com o dedo sugerimos que o corpo, cuja trajetória será determinada, seja suficientemente grande. Depois que o primeiro “click” for feito, uma cruz azul aparecerá e o vídeo avançará alguns quadros. O intervalo de tempo transcorrido, medido em segundos, entre um “click” e outro é automaticamente determinado pelo programa. Vamos fazer “click” novamente tantas vezes como seja necessário para acompanhar a evolução da posição do objeto entre a posição inicial e final previamente estabelecidas. Leve em conta que para uma bolinha em queda vertical uma distância percorrida de um metro é o mínimo necessário para efetuar a análise, mas também não é necessário acompanhar todo o movimento do corpo até o chão.

Como mostrado na Figura 3.2, pode ser que ao longo da trajetória não vejamos o corpo em

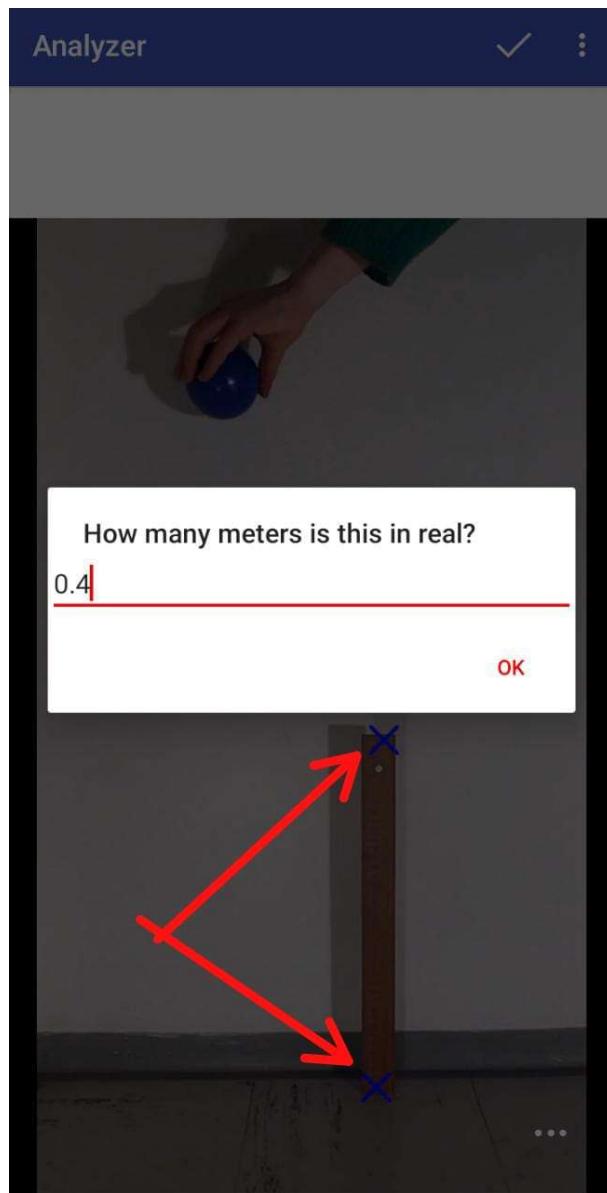


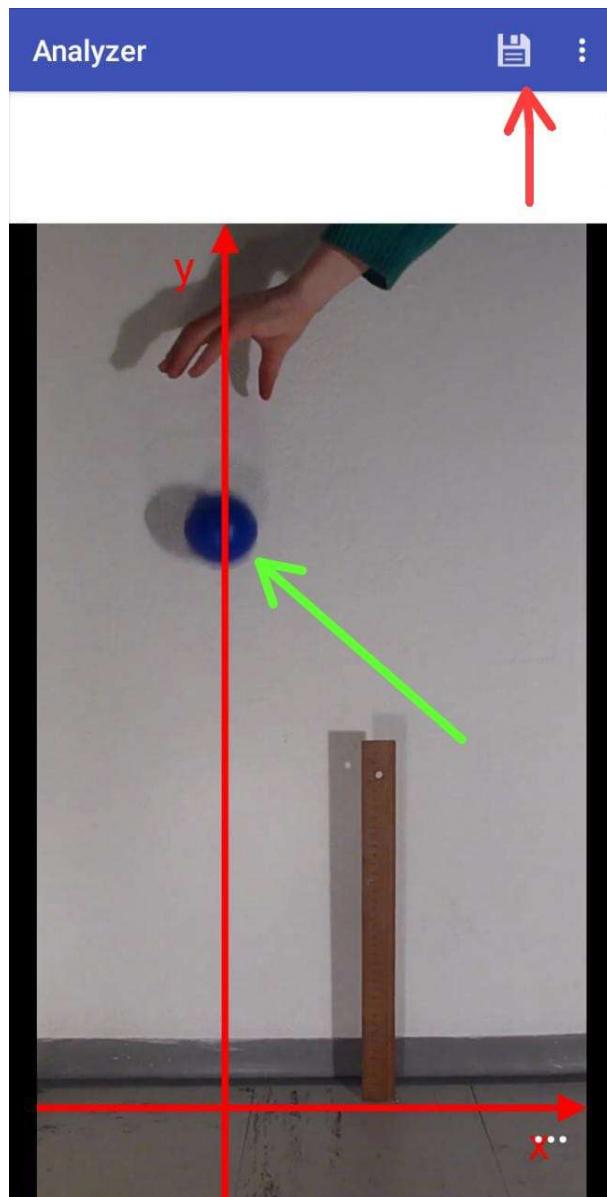
Figura E.3: Escolha da escala de comprimentos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis, a ser usado na tomada de dados dos pontos da trajetória do objeto.

1259 questão claramente definido em uma única posição, mas como uma imagem embaçada  
1260 devido à alta velocidade do mesmo. Então para determinar a posição do centro da bolinha  
1261 e a sua incerteza siga as orientações indicadas nessa figura e no texto ao lado dela.

1262 **Passo 4: Salvar dados**

1263

1264 Depois de determinados todos os pontos da trajetória do corpo, basta pressionar o botão  
1265 “Salvar”, conforme mostrado pela seta vermelha na Figura E.4. Após o “click” se abrirá  
1266 uma janela com a frase “Nome para a análise” (“Name for analysis” em inglês). Uma  
1267 vez escrito o nome do arquivo de dados dê “click em “ok” e imediatamente verá uma



*Figura E.4:* Sistema de eixos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis.

1268 janela na qual você poderá navegar. Rolando a imagem, no final aparecerá uma tabela  
 1269 com várias colunas de dados como mostrada na Figura E.5. É possível também exportar  
 1270 essa tabela de dados para um arquivo que é uma planilha no formato “.cvs” (“comma  
 1271 separated values”), que poderá ser lida por um programa de computador do tipo Excel.  
 1272 Mas também você poderá simplesmente copiar os dados que precisará (por exemplo a  
 1273 posição “ $y$ ” como função do tempo “ $t$ ”) numa folha de papel para continuar a análise.

1274 Note que uma vez escolhido o nome do arquivo para a tabela de dados, esta tabela é au-  
 1275 tomaticamente guardada pelo aplicativo. Para cada vídeo guardado dentro do aplicativo  
 1276 é possível realizar diferentes análises de dados e guardar cada um deles, dentro do apli-  
 1277 cativo, com nomes diferentes. Assim, por exemplo, na Figura E.1 vemos vários vídeos guar-  
 1278 dados. Se algum desses vídeos já foi analisado, quando fizer “click nele aparecerá uma

1279 janela com várias opções de escolha. A primeira diz “Começar análises” (“Start analysis”  
 1280 em inglês), o que permitirá realizar uma nova tomada de dados. Embaixo aparecem as  
 1281 outras opções que são os nomes dos diferentes arquivos de dados já guardados. Fazendo  
 1282 “click” num deles é possível visualizar seu conteúdo novamente. Note que desta maneira  
 1283 é possível guardar a trajetória de mais de uma massa cujo movimento estiver gravado  
 1284 no vídeo. Assim, por exemplo, no caso em que a colisão de dois ou mais corpos estiver  
 1285 gravada no vídeo, é possível guardar os dados da trajetória de cada um deles.

t [s]	x [m]	y [m]	Øx-v [m/s]	Øy-v [m/s]
0,000	0,014	0,793		
0,033	-0,013	0,782	-0,802	-0,344
0,066	-0,006	0,786	0,200	0,143
0,100	-0,011	0,772	-0,139	-0,417
0,133	-0,018	0,747	-0,229	-0,773
0,166	-0,016	0,729	0,057	-0,544
0,200	-0,020	0,692	-0,111	-1,084
0,233	-0,027	0,642	-0,200	-1,518
0,266	-0,017	0,573	0,286	-2,091
0,300	0,006	0,520	0,695	-1,557
0,333	0,005	0,418	-0,029	-3,094
0,367	0,008	0,318	0,083	-2,920
0,400	-0,000	0,214	-0,258	-3,180
0,433	0,003	0,111	0,115	-3,094
0,467	0,004	0,066	0,028	-1,335

Figura E.5: Tabela de dados gerada dentro do aplicativo VidAnalysis.



1286

1287

## Apêndice: $(E_f - E_i)/E_i$ a partir de traços e um ângulo

Usando as equações para conservação de momento linear e balanço de energia, a variação percentual de energia cinética na colisão com massas iguais pode ser obtida a partir dos comprimentos e ângulos representados na Figura ???. Chamando a velocidade da moeda A logo antes da colisão de  $v_0$ , e as velocidades das moedas A e B logo depois da colisão de  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente, temos

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos(\theta) + m_2 v_2 \cos(\phi), \quad (\text{F.1})$$

$$0 = m_1 v_1 \sin(\theta) - m_2 v_2 \sin(\phi), \quad (\text{F.2})$$

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2. \quad (\text{F.3})$$

Somando os quadrados das equações para conservação de momento linear em  $x$  e em  $y$

$$m_1^2 v_0^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi). \quad (\text{F.4})$$

Logo,

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_2 \left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right) v_2^2 - m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi), \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 - \frac{E_f}{E_i - E_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{v_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}}}{\left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}} - 2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.6})$$

Se as moedas são iguais, as massas são iguais e também as forças de atrito entre cada moeda e a superfície. Neste caso, usando o teorema trabalho-energia cinética (aqui,  $mv^2/2 =$

$F_{at}L$ ):

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}}{2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.7})$$

1288 A Equação F.7 mostra que, para moedas iguais, a variação percentual de energia cinética  
 1289 na colisão pode ser obtida medindo apenas comprimentos e um ângulo entre trajetórias  
 1290 das duas, sem nem mesmo uma calibração para os comprimentos dos traços. Os dois  
 1291 parâmetros relevantes são (i) a razão entre os comprimentos dos traços depois da  
 1292 colisão,  $L_A/L_B$ , e (ii) a soma dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .