



Física Experimental I

2020.1 REMOTO

6	1	Introdução	7
7	I	Experimentos – Roteiros	9
8	1	Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados	11
9	1.1	Introdução	11
10	1.2	Procedimento Experimental	12
11	1.3	Análise de Dados e Discussão dos Resultados	12
12	1.4	Opcional	14
13	2	Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza	15
14	2.1	Introdução	15
15	2.2	Procedimento experimental	16
16	2.3	Análise de dados	18
17	2.4	Discussão dos Resultados	18
18	3	Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda	19
19	3.1	Introdução	19

21	3.2 Procedimento Experimental	19
22	3.3 Análise de dados	20
23	3.4 Discussão dos resultados	22
24	3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia	22
25	4 Sistema de partículas – Colisões	23
26	4.1 Introdução	23
27	4.2 Colisão unidimensional sem atrito	24
28	4.3 Introdução	24
29	4.4 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados	25
30	4.5 Análise de dados e discussão dos resultados	25
31	5 Colisões (Opcional)	27
32	5.1 Introdução	27
33	5.2 Procedimento experimental	28
34	5.2.1 Realização das medidas	28
35	5.2.2 Análise das imagens	28
36	5.3 Exemplo de resultados e análise	29
37	5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas	29
38	5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo	31
39	II Conceitos Básicos para Análise de Dados	33
40	1 Medidas e incertezas	35
41	2 Medidas Diretas e Indiretas	39
42	3 Algarismos Significativos	45
43	4 Representações gráficas	53

44	5 Ajuste linear	59
45	6 Determinação da velocidade instantânea	63
46	7 Distribuição Gaussiana	65
47	III Apêndices	71
48	A Caderno de laboratório	73
49	B Como escrever um relatório?	75
50	C Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)	77
51	D Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker	79
52	E Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis	85
53	F Apêndice: $(E_f - E_i)/E_i$ a partir de traços e um ângulo	91

1

54

55

Introdução

56 A Apostila do curso de Física Experimental apresenta os conceitos básicos relacionados com as análises de dados dos experimentos, bem como os métodos e instrumentos
57 utilizados.

59 Experimentos

60 Ao longo do semestre realizaremos os seguintes experimentos, em modo remoto:

61 **EXP 1** – Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos
62 dados

63 **EXP 2** – Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

64 **EXP 3** – Movimento de um corpo em queda livre – Aceleração da gravidade

65 **EXP 4** – Sistema de partículas – Colisões

66 Bibliografia

67 O material completo da disciplina compreende a [Apostila de Conceitos Básicos de Física](#)
68 [Experimental I](#), o [Guia do Estudante](#) e os textos complementares, todos disponíveis no site
69 <https://fisexp1.if.ufn.br>.

70 Além disso, indicamos os seguintes livros para um estudo mais sólido dos conceitos básicos
71 de análise de dados e da física dos fenômenos observados: Fundamentos da Teoria de Er-
72 ros de José Henrique Vuolo [1], Curso de Física Básica - Mecânica de H. Moysés Nussenz-
73 veig [2] e Física I, Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman [3].

PARTE I

EXPERIMENTOS – ROTEIROS

1

75
76

Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

77

1.1 Introdução

78 Neste experimento determinaremos o tempo de queda de uma moeda, solta do repouso
79 de uma altura de 1,5 m repetidas vezes. Cada grupo deve apresentar um conjunto de
80 medidas independentes, contendo 120 medições. A partir destas medições vamos estudar
81 os conceitos de flutuações aleatórias, tratamento estatístico dos dados e estudo de efeitos
82 sistemáticos.

83 Planeje seu experimento e comece a fazer as anotações no seu caderno de laboratório. Para
84 todos os experimentos que faremos nesse curso, cada aluno deve elaborar um pequeno
85 texto no caderno para os seguintes tópicos:

86

1. Introdução

87

2. Procedimento Experimental

88

3. Análise de Dados

89

4. Discussão dos Resultados

90 Eventualmente, estes tópicos poderiam ser organizados em um relatório (veja o Apêndice B
91 da Apostolia). Ainda não exigiremos a elaboração de um relatório completo para esse expe-
92 rimento, mas, para cada um destes itens, preparamos algumas perguntas para você pensar,
93 discutir com os colegas e com seu professor. A partir desta discussão, faça suas anotações.

94

1. Qual o objetivo e a motivação desse experimento?

95

2. De acordo com as leis da Física que você conhece, qual deveria ser o tempo de queda 96 da moeda?

97 **1.2 Procedimento Experimental**

- 98 1. Você pode medir o tempo diretamente ? Que instrumento vai utilizar ? Qual a **re-**
99 **solução** desse instrumento?
- 100 2. Qual a melhor forma de montar o seu experimento, a fim de tentar garantir que a
101 altura de queda esteja sempre no intervalo $(1,50 \pm 0,02)$ m e que a moeda caia sempre
102 do repouso?
- 103 3. Registre seus dados na forma de uma tabela, em ordem cronológica, como mostrado
104 nas duas primeiras colunas da Tabela 1. Você pode também construir a tabela di-
105 retamente em um programa de planilha no computador (por exemplo Excel, Open
106 Office, Google Sheets), e posteriormente imprimir (ou fazer uma captura de tela) para
107 anexar ao relatório e ao caderno de laboratório.

108 **Tabela 1:** Medições realizadas

i	t_i	$\delta_i = t_i - \bar{t}$	$\delta_i^2 = (t_i - \bar{t})^2$
1			
2			
3			
...			
120			

110 **1.3 Análise de Dados e Discussão dos Resultados**

111 Você certamente encontrará mais de um valor como resultado da medida direta do tempo
112 de queda. Com base nesses valores, como pode apresentar o resultado dessa medição?
113 Conforme explicado no Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apos-
114 tila), a melhor forma de apresentar essa medida experimental é realizando uma análise
115 estatística dos dados obtidos. Para entender melhor o significado dessa análise, propomos
116 as seguintes atividades:

117 **Parte I: Análise estatística dos dados**

- 118 1. Considere o conjunto de 120 medidas. Para 6 conjuntos independentes de 10 medições
119 consecutivas, calculem o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio

(consulte o Capítulo 2 da Apostila). Utilize as últimas colunas da Tabela 1.2 para auxiliar nos cálculos.

- 120
121
122
123
124
125
- Resuma os resultados obtidos para os 6 subconjuntos dos dados colocando-os na Tabela 2 e observe como variam o valor médio e o desvio padrão. O que pode dizer sobre os valores encontrados? Para este experimento, 10 medidas é uma quantidade suficiente para se determinar o tempo de queda ? Justifique suas respostas.

126
127

Tabela 2: Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos de 10 medições independentes.

Medições	N	Valor Médio ()	Desvio Padrão ()	Incerteza ()
Grupo 1	10			
Grupo 2	10			
Grupo 3	10			
Grupo 4	10			
Grupo 5	10			
Grupo 6	10			

- 129
130
131
132
133
- Calcule o valor médio, desvio padrão e a incerteza do valor médio para: (a) as 20 últimas medidas, (b) as 60 primeiras medidas e (c) para o conjunto completo de 120 medidas. Coloque estes valores na Tabela 3 e discuta como variam estas três grandezas com respeito ao número de medidas. Analise se as 120 medidas foram suficientes para determinar o tempo de queda.

134
135

Tabela 3: Valor médio, desvio padrão e incerteza para subgrupos com diferentes números de medições.

N	Valor Médio ()	Desvio Padrão ()	Incerteza ()
20			
60			
120			

- 136
137
138
139
140
141
142
- Analise como se compara o valor médio encontrado com o valor de referência, igual a $t_q = (0,554 \pm 0,004)$ s. Caso existam efeitos sistemáticos, discuta sobre eles e como poderia evitá-los refazendo as medições (ver Capítulo 2 da Apostila).
 - Por convenção, utilizamos como definição para a incerteza de cada medida realizada, o valor de σ . Discuta o resultado da comparação entre o valor de σ encontrado para o conjunto de 120 medições com a precisão do cronômetro utilizado.

Determinação do tempo de queda de uma moeda – Tratamento estatístico dos dados

- 143 6. Calcule para o conjunto de 120 medições a fração de medidas contidas nos intervalos
144 $[\bar{t} - 1\sigma, \bar{t} + 1\sigma]$, $[\bar{t} - 2\sigma, \bar{t} + 2\sigma]$, $[\bar{t} - 3\sigma, \bar{t} + 3\sigma]$. Em um procedimento sujeito somente
145 a flutuações aleatórias, as frações esperadas para estes intervalos são aproximadamente
146 68,3%, 95,4% e 99,7%. Note então que a convenção mais adotada, de utilizar como incerteza
147 o valor do desvio padrão, corresponde a adotar um intervalo de
148 incerteza que conteria aproximadamente 68% dos valores obtidos, caso o processo
149 de medida fosse repetido muitas vezes. Quando não conhecemos bem nosso pro-
150cesso de medida, a realização de uma análise estatística permite também a melhor
151 determinação da incerteza das medidas individuais.¹

Parte II: Representação gráfica dos conjuntos de medidas

- 152 7. Com base no Capítulo 4 da Apostila, construa um histograma de frequência relativa
153 para os dados em uma folha de papel milimetrado. Lembre que o número adequado
154 de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições. Neste caso
155 particular, o número aconselhável de barras fica entre 6 e 10.
- 156 8. Marque no gráfico, as posições dos valores médios encontrados. As medições se
157 distribuem simetricamente ao redor do seu valor médio? O que isso significa e qual
158 o tipo de incerteza está sendo observada?
- 159 9. Desenhe sobre o histograma dois segmentos de reta verticais representando o inter-
160 valo $[\bar{t} - \sigma, \bar{t} + \sigma]$. Observe a concentração dos dados nesse intervalo.
- 161 10. Analise no histograma o valor médio e desvio padrão. O que é possível concluir so-
162 bre os processos de medida empregados? Discuta em termos de desvios sistemáticos
163 e flutuações aleatórias.

1.4 Opcional

- 164 165 Realize novamente as suas medidas tendo em conta os cuidados discutidos para eliminar
166 suas incertezas sistemáticas. Para este conjunto de 120 medições, calcule o valor médio, o
167 desvio padrão e a incerteza do valor médio e compare com o valor de referência. Conse-
168 guiu eliminar as incertezas sistemáticas? Discuta.

¹Essas frações decorrem de um modelo matemático que descreve o comportamento de medidas somente sujeitas a flutuações aleatórias. Esse modelo será discutido na Física Experimental II, mas quem quiser se aprofundar pode olhar a Seção 7 de Conceitos Básicos da Apostila.

2

170
171

Medição do volume de uma moeda – Propagação de incerteza

172 2.1 Introdução

173 Neste experimento determinaremos o volume de uma ou mais moedas. Planeje o expe-
174 rimento antes de começar a realizar as medidas. Pense em quais métodos poderiam ser
175 utilizados para se medir um volume, em quais medidas deveriam ser realizadas para es-
176 ses métodos e quais instrumentos seriam mais adequados para tal finalidade.

177 O volume pode ser determinado a partir das dimensões da moeda. Qual é a expressão
178 matemática do volume a partir dessas dimensões?

179 Se você conhecesse a massa e a densidade volumétrica de massa do material utilizado na
180 fabricação da moeda, como você poderia determinar o seu volume?

181 Se você tivesse um recipiente com água, como poderia determinar o volume de uma mo-
182 eda imersa nesse líquido?

183 Avançando para a análise dos dados, como estimar as incertezas das medidas diretas?
184 Como são calculadas as incertezas das medidas indiretas? Leia as duas primeiras seções
185 do Capítulo 2 (Conceitos Básicos para Análise de Dados). Medindo a partir desses dife-
186 rentes métodos, o que se espera da comparação dos seus resultados? Os valores deveriam
187 ser compatíveis, considerando suas respectivas incertezas, independentemente do método
188 utilizado?

189 Planejem seu experimento e comecem a fazer as anotações nos seus cadernos de labo-
190 ratório. Para todos os experimentos que faremos nesse curso, cada um de vocês deve
191 elaborar um pequeno texto no caderno para os seguintes tópicos:

192 1. Introdução

193 2. Procedimento Experimental

194 **3. Análise de Dados**195 **4. Discussão dos Resultados**

196 Separe os materiais necessários para o Experimento 2 (detalhes na Figura 2.1):

197 1. Moedas (sugerimos as de R\$ 0,50);

198 2. Régua;

199 3. Copo (que seja o mais próximo possível da forma de um cilindro). Note que você
200 pode simplificar e melhorar a medição do volume deslocado, utilizando uma seringa
201 descartável, que já vem com uma escala volumétrica impressa.

Material necessário para o experimento:



(a) Moedas de 50 centavos (*)



(b) Régua preferencialmente transparente



(c) Copo (o mais cilíndrico possível)

(*) Atenção para o ano da sua moeda!

Figura 2.1: Material para o Experimento 2

202 **2.2 Procedimento experimental**

203 Antes de qualquer medida, se posicione de forma semelhante à sugerida na Figura 2.2.

204 **1. A partir do volume de água deslocado**205 Usando um copo cilíndrico parcialmente cheio d'água, introduza a(s) moeda(s) e es-
206 time o seu volume a partir do deslocamento do nível da coluna de água. No caso
207 do copo, utilize uma régua para fazer essa medida a partir do registro dos níveis ini-
208 cial e final. Já com uma seringa descartável (Figura 2.3), o volume deslocado pode



Figura 2.2: Posicionamento do observador

210 ser medido diretamente na seringa ao sugar a água, até que retorne ao mesmo nível
211 da situação sem moeda(s), e lendo este volume na escala da própria seringa. De-
212 pendendo do diâmetro do copo usado, avalie se o experimento deveria ser realizado
213 com uma ou mais moedas de mesmo valor.

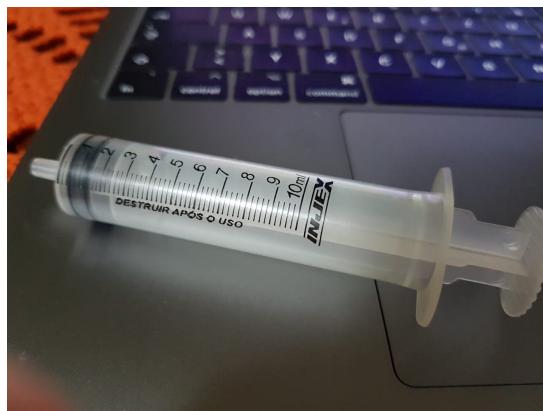


Figura 2.3: Seringa

214 **2. A partir da área da base da moeda e de sua espessura**

215 Meça a espessura da moeda. A área da base da moeda pode ser determinada a partir
216 da medição direta de seu diâmetro com uma régua ou a partir da medição de sua
217 circunferência com o uso de um barbante e da régua. Avalie qual procedimento é
218 mais adequado. A régua é o instrumento adequado para a determinação do diâmetro
219 da moeda? Nesse caso, também avalie se o experimento deveria ser realizado com
220 uma ou mais moedas do mesmo valor.

221 **3. A partir da densidade volumétrica**

222 As moedas são fabricadas de forma padronizada com relação às suas dimensões,
223 massa e material. Busque essas informações na Internet (página da Casa da Moeda).
224 Fique atento que essas informações podem variar de acordo com o ano de fabricação
225 da moeda. A informação sobre o ano de fabricação consta na “cara” da mesma.

226 **2.3 Análise de dados**

- 227 1. A partir dos valores da espessura e do diâmetro ou circunferência da moeda, medi-
228 dos por você, calcule o volume da moeda utilizando uma das fórmulas $V = \pi d^2 h / 4$
229 (d = diâmetro e h = espessura) ou $V = C^2 h / (4\pi)$ (C = circunferência).
- 230 2. Sabendo que a densidade volumétrica do aço inoxidável, dependendo da liga que o
231 compõe, varia entre 7,8 e 8,0 g/cm³, e utilizando o valor de massa padrão para a
232 moeda utilizada, determine o seu volume e incerteza.
- 233 3. Organize em uma tabela os resultados obtidos para a determinação do volume da
234 moeda com as respectivas incertezas para os três métodos realizados. Faça uma
235 comparação entre os resultados obtidos. Leia a segunda seção do Capítulo 2 (Con-
236 ceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila).

237 **2.4 Discussão dos Resultados**

- 238 1. Qual foi a medição mais precisa? Justifique.
- 239 2. Considerando como referência o cálculo do volume da moeda a partir dos valores de
240 suas dimensões encontrados na Internet, não os medidos por você, qual foi a medição
241 mais exata? Justifique.
- 242 3. Justifique a vantagem de usar mais de uma moeda para o procedimento “A partir do
243 volume de água deslocado”.
- 244 4. Os resultados encontrados são compatíveis entre si? Justifique. Esse resultado era
245 esperado?
- 246 5. Quais parâmetros contribuem mais fortemente para a incerteza do volume em cada
247 um dos três métodos? Como essas incertezas poderiam ser diminuídas? Você sugere
248 alguma modificação do procedimento experimental adotado?

249
250

Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

251 3.1 Introdução

252 Neste experimento determinaremos a aceleração de um corpo em queda vertical e vamos
253 comparar o resultado obtido com o valor de referência da aceleração da gravidade (g) para
254 a cidade de Rio de Janeiro.

255 Vamos analisar o movimento de queda vertical de um corpo cuja forma e tamanho apre-
256 sente uma força de resistência do ar desprezível (por exemplo uma bolinha de gude)¹. Que
257 tipo de movimento apresentaria o corpo se a força de resistência do ar fosse desprezível?²

258 Pense sobre o planejamento desse experimento. A aceleração do corpo pode ser obtida
259 diretamente? Quais grandezas devem ser medidas para que seja possível obtê-la? Quais
260 instrumentos são mais adequados para que esses dados possam ser coletados?

261 O experimento será discutido e guiado pelo roteiro abaixo. Siga o roteiro e as orientações
262 do professor nos encontros remotos e vá fazendo suas anotações no caderno de laboratório.

263 3.2 Procedimento Experimental

264 O arranjo experimental experimental está mostrado na Figura 3.1. Escolha uma bola de
265 gude ou qualquer corpo arredondado de dimensões da ordem de grandeza da bolinha
266 mostrada na Figura 3.1. Você deverá filmar a queda da bolinha com um celular, desde uma
267 altura de, mais o menos, um metro. Para isso peça ajuda a uma pessoa que vai segurar a
268 bolinha enquanto você filma. Cole na parede uma régua de papel como está indicado na
269 Figura 3.1³. Para a filmagem, posicione o celular num apoio com a tela do celular paralela

¹Lembre que a queda vertical de um corpo quando a única força atuante sobre ele é a força da gravidade chama-se queda livre.

²Lembre que o movimento da partícula é determinado através da Segunda Lei de Newton.

³A régua não precisa ter a extensão de toda a trajetória a ser filmada, é somente uma referência de escala.

20 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

270 à parede onde está colada a régua de papel. O celular deverá estar posicionado mais o
271 menos no meio da trajetória da bolinha a uma distância da parede suficiente para poder
272 filmar toda a queda de mais ou menos um metro. Não use “slow-motion” (câmera lenta),
273 filme com a velocidade normal do seu celular. A imensa maioria dos celulares filma a uma
274 taxa de 30 frames/s⁴. Verifique no seu celular se essa é a taxa usada.

275 Para analisar o filme da queda será usado o aplicativo Tracker para uso num computador
276 que poderá ser baixado gratuitamente no link: <https://physlets.org/tracker/>⁵. O filme
277 também poderá ser analisado com o aplicativo VidAnalysis disponível gratuitamente para
278 celulares com sistema operacional Android no link do [Google Play](#). Os tutoriais de uso
279 destes aplicativos estão disponíveis na forma de vídeos no site da [Física Experimental 1](#).
280 No final do roteiro, encontram-se o Apêndice D um tutorial básico do aplicativo Tracker, e
281 um tutorial básico do aplicativo VidAnalysis no Apêndice E.

282 3.3 Análise de dados

283 Usando o aplicativo Tracker ou alternativamente o aplicativo VidAnalysis, monte a Tabela
3.1. As colunas do tempo t e da posição y são preenchidas usando os aplicativos Tracker

t (s)	y (cm)	δy (cm)	v_y (cm/s)	δv_y (cm/s)

284 *Tabela 3.1: Tabela de dados da experiência.*

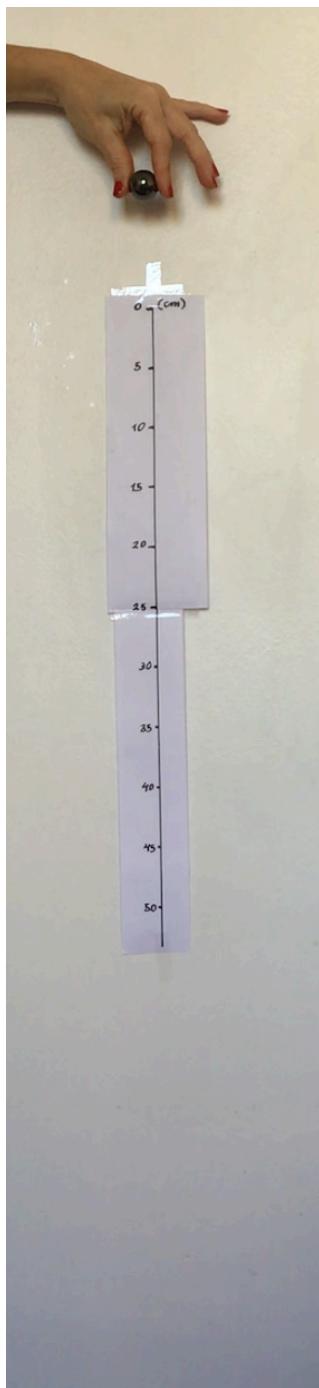
285 ou VidAnalysis. As coordenadas y correspondem às posições, por exemplo, do centro da
286 bolinha ao longo da trajetória de queda, após ter escolhido o sistema de referência. Note
287 que ao longo da trajetória a imagem da bolinha pode ficar um pouco embaçada como na
288 Figura 3.2. Nesse caso, foi marcado com um “x” em azul o centro da bolinha enquanto que
289 a barra vermelha é uma escolha razoável da região de incerteza da posição do centro da
290 bolinha. A incerteza é uma fração do comprimento da mancha e depende da posição da
291 bolinha.

292 Para preencher a coluna da velocidade v_y leia o Capítulo 6 da Apostila. Como são calcula-
293 das as incertezas δv_y ?

- 294 • Em um papel milimetrado desenhe o gráfico $v_y \times t$ a partir dos dados da tabela in-
295 dicando a incerteza nos valores das velocidades. Qual é a forma esperada para este
296 gráfico?

⁴A palavra em inglês “frame” significa quadro.

⁵O aplicativo é disponibilizado para os sistemas operacionais Windows, Linux e Mac OSX.



297

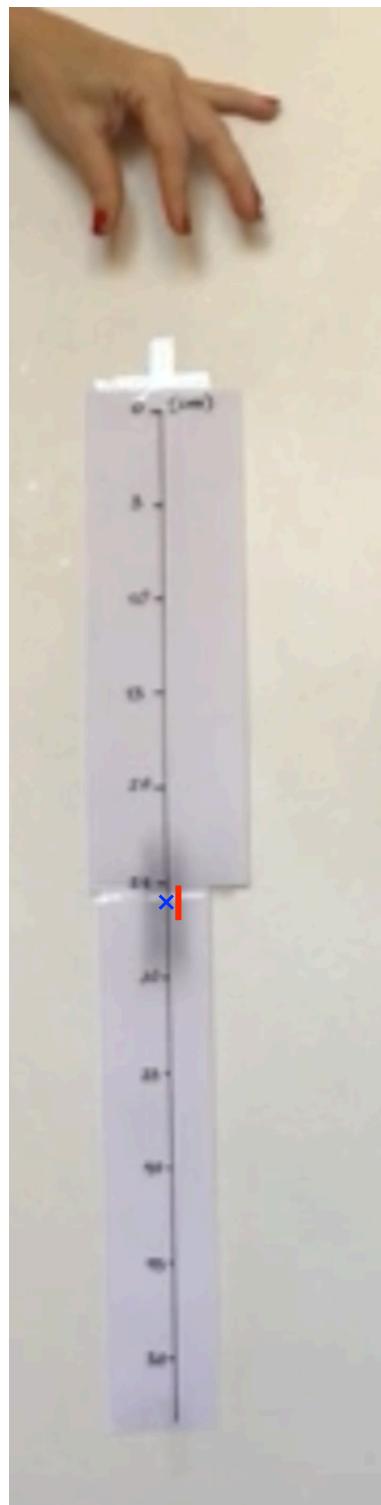


Figura 3.1: Dispositivo experimental. Não esqueça de colar na parede uma régua de papel, como a indicada na Figura, para ser usada como referência na análise de dados.

Figura 3.2: Imagem da bolinha em plena queda. Note-se que a imagem, devido à alta velocidade, fica um pouco embaçada.

22 Movimento de um corpo em queda vertical: determinação da aceleração da queda

- Use as colunas t , v_y e δv_y para calcular através do Método dos Mínimos Quadrados (Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila), qual é a melhor reta que aproxima os dados experimentais do gráfico $v_y \times t$?
- Com os parâmetros da reta obtida no item anterior, desenhe-a na mesma folha de papel milimetrado onde fez o gráfico $v_y \times t$. Se você não conseguir achar um aplicativo que implemente o ajuste linear pelo método dos mínimos quadrados, desenhe a melhor reta que aproxima os dados experimentais pelo método visual (ver Seção 5 do Capítulo Conceitos Básicos para Análise de Dados da Apostila) e obtenha os parâmetros que definem a reta (coeficiente angular a e coeficiente linear b) escolhendo dois pontos na reta e substituindo na equação da reta $y = a t + b$.

308 3.4 Discussão dos resultados

1. A partir dos parâmetros do ajuste linear aos dados experimentais v_y vs. t , como se obtêm o valor da aceleração de queda da bolinha?
2. Compare o valor da aceleração de queda da bolinha com o valor da aceleração da gravidade para a cidade do Rio de Janeiro que é $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$. Qual valor é mais preciso? Você utilizaria este método para determinar o valor da gravidade? Justifique.

315 3.5 Opcional: Estudo da conservação da energia

1. Utilizando os dados registrados para a posição y como função do tempo t , determine a altura h da bolinha para cada instante de tempo, a partir do ponto mais baixo na Tabela 3.1.
2. Determine a energia cinética (K), energia potencial (U) e a energia mecânica (E) para cada intervalo de tempo. Para facilitar a organização das informações, construa uma tabela.
3. Faça um gráfico que contenha a energia cinética, potencial e mecânica em função do tempo.
4. Discuta a partir do gráfico obtido, se há ou não conservação da energia mecânica. Justificar.
5. No caso da energia não se conservar, determine o ganho ou perda percentual.

327 Observações:

- Para os cálculos de energia considere a aceleração da gravidade no Rio de Janeiro, com sendo $g = (978,7 \pm 0,1) \text{ cm/s}^2$.

4

330
331

Sistema de partículas – Colisões

332 4.1 Introdução

333 Neste experimento estudaremos colisões entre dois corpos. Em particular, procuraremos
334 verificar experimentalmente se a conservação de momento linear total do sistema está
335 presente. Também iremos analisar uma possível conservação de energia mecânica to-
336 tal, explorando a diferença entre colisões elásticas e inelásticas. Na tomada de dados o
337 movimento é gravado em um filme. A variação das posições dos corpos é analisada pos-
338 teriormente. Programas de computador como aquele já utilizado no experimento anterior,
339 o Tracker (Apêndice D), são bastante úteis nessa análise. A análise do movimento com apli-
340 cativos no próprio celular é também possível.

341 A realização deste experimento em um curso remoto merece alguns comentários, dadas
342 suas peculiaridades em relação à presença de atrito. Na versão presencial da disciplina de
343 Física Experimental 1 da UFRJ, os alunos trabalham em sala com uma montagem usada
344 para minimizar o atrito de dois carrinhos com a base: o trilho de ar. Em nosso curso re-
345 moto, os alunos não têm à disposição em casa uma ferramenta eficiente como o trilho de
346 ar para minimizar o atrito. Assim, dividimos o experimento em duas partes. Na primeira
347 parte o estudante faz a análise de dados experimentais nos moldes do curso presencial,
348 porém utilizando dados obtidos previamente no Laboratório de Física Experimental 1. Na
349 segunda parte (de realização opcional) o estudante faz a tomada de dados em casa, fa-
350 zendo colidir objetos aos quais ele tem acesso fácil, como moedas. Este é um desafio final
351 na disciplina: estudar colisões fora das condições controladas no laboratório didático, pla-
352 nejar e realizar sua montagem experimental, e analisar um sistema físico no qual as forças
353 de atrito provavelmente serão observáveis. Para essa segunda parte, apontamos ainda
354 uma versão simplificada do experimento que, fazendo suposições sobre o atrito, permite
355 fazer um teste da conservação de momento linear em uma colisão, mesmo sem o uso de
356 celular ou computador [4].¹ Outros exemplos de experimentos envolvendo colisões que
357 os alunos podem fazer em casa estão na página da disciplina [Física Experimental 1](#), no
358 site do IF .

¹*Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, Lorenzo Galante e Ivan Gnesi, American Journal of Physics **88**, 279 (2020).

359 4.2 Colisão unidimensional sem atrito

360 Neste experimento estudaremos as colisões e seu caráter elástico ou inelástico. Analisare-
361 mos as conservações de momento linear e energia mecânica de um sistema unidimensional
362 de dois carrinhos que colidem entre si em um trilho de ar com atrito desprezível. Será utili-
363 zada uma gravação de um filme. Iremos analisá-la com o programa Tracker (Apêndice D)
364 para computador ou VidAnalysis (Apêndice E) para celular para levantamento de dados.
365 O aluno também poderá usar outros programas ou aplicativos que permitam atingir os
366 mesmos objetivos.

367 Pense sobre o planejamento desse experimento. Quais grandezas devem ser medidas
368 diretamente para que seja possível avaliar as conservações de momento linear e energia
369 mecânica?

370 Siga o roteiro e as orientações do professor para fazer o experimento. Faça todas as anotações
371 que julgar serem necessárias, elas serão importantes quando você for analisar os dados. Ao
372 preparar o relatório, tome como base as orientações do Apêndice B da Apostila do curso
373 e as anotações realizadas durante o experimento. As discussões contidas no roteiro abaixo
374 serão importantes para a elaboração do seu relatório.

375 4.3 Introdução

376 Reflita sobre as seguintes questões e sugestões:

377 1. Qual é o objetivo desse experimento?

378 2. O que é um processo de colisão?

379 3. O filme mostra o movimento de dois carrinhos que deslizam sobre um trilho hori-
380 zontal; há uma camada de ar entre o trilho e a base dos carrinhos, a fim de minimizar
381 o atrito. Que tipo de movimento sobre o trilho é esperado para cada carrinho antes e
382 após a colisão? Pense nas forças que atuam sobre cada um deles.

383 4. Considere a situação onde dois carrinhos colidem entre si ao se movimentarem sobre
384 um trilho de ar horizontal com atrito desprezível; espera-se que tanto o momento
385 linear como a energia mecânica se conservem nas colisões? O que define a diferença
386 entre as colisões elástica e inelástica? Desenvolva as expressões matemáticas para
387 conservação de momento linear e energia mecânica deste sistema unidimensional
388 para os dois tipos de colisão, em termos das grandezas medidas no experimento.

389 5. Como verificar experimentalmente se o momento linear do centro de massa do sis-
390 tema é conservado?

4.4 Procedimento Experimental e Levantamento de Dados

Você terá acesso ao filme elasti.mp4 que deverá ser aberto com o programa Tracker ou VidAnalysis. É interessante você observar esse filme: um carrinho (incidente), que chama-remos de A , move-se em direção a outro carrinho, denominado B , que está inicialmente em repouso. Ocorre o choque, mediado por “para-choques” feitos com elásticos esticados. Em seguida, B passa a se mover, enquanto que A continua a se mover, porém mais lentamente do que antes do choque. As massas dos carrinhos são $m_A = 287,9 \pm 0,2$ g e $m_B = 179,4 \pm 0,2$ g. O comprimento total do trilho é 200 cm; esse valor é importante para calibrar os comprimentos (escala da sua filmagem). Essa informação será usada quando for atribuir um valor à barra de medição do Tracker. Quando for estimar seu erro na calibração, note que há uma deformação da geometria do trilho no filme.

1. Proceda fazendo a tomada de dados da posição dos dois carrinhos antes e depois do choque. Precisaremos, para cada carrinho, aproximadamente 10 pontos antes e 10 pontos depois do choque. Entretanto, para minimizar o erro nas velocidades determinadas, é aconselhável que esses pontos não sejam “instantes sucessivos” registrados pelo Tracker ou VidAnalysis. Você pode escolher um intervalo de 0,1 s no seu registro de dados (há vários “frames” do Tracker ou VidAnalysis entre eles).
2. Analise o movimento de cada carrinho (tomada de dados) separadamente. Você terá que escolher um ponto de referência em cada carrinho para acompanhá-lo “manualmente” no programa. Então terá que estimar a incerteza da sua medida de posição: amplie a imagem e estime com que precisão consegue identificar o ponto de referência. Por exemplo, para uma ampliação de 200 vezes, a incerteza é da ordem de 3 mm.
3. Lembre-se de escolher um único sistema de referência para a determinação da posição em função do tempo.
4. Construa uma tabela da posição de cada carrinho em função do tempo.

4.5 Análise de dados e discussão dos resultados

1. O instante de colisão pode ser obtido diretamente a partir da tabela dos dados? Faça um gráfico da posição em função do tempo para os dois carrinhos e determine o instante em que eles colidem.
2. Determine as velocidades dos carrinhos antes e depois da colisão a partir do ajuste linear dos dados. Alternativamente, você pode usar o método gráfico para tal determinação. As duas abordagens estão descritas em apêndices na apostila do curso.
3. Analise o comportamento do momento linear e da energia mecânica do sistema antes e depois do choque. Houve conservação dessas grandezas? Que conclusões você pode tirar desses resultados?

4. Calcule a porcentagem de perda de energia cinética, dada por:

$$\frac{|K_f - K_i|}{K_i}$$

428 onde K_i e K_f são a energia cinética inicial e final, respectivamente. Discuta os resul-
429 tados obtidos.

430
431

Colisões (Opcional)

432 5.1 Introdução

433 Neste experimento propomos um estudo de colisões entre dois corpos, que o aluno pode
434 executar todo em casa. O sistema físico estudado é composto por duas moedas apoiadas
435 sobre uma superfície lisa. Uma delas está inicialmente em repouso e a outra é lançada
436 sobre ela, deslizando. Nossa foco é explorar quais grandezas se alteram e quais se conser-
437 vam durante a colisão. Analisamos o momento linear e a energia mecânica das moedas
438 individualmente e, muito importante, do sistema formado pelas duas juntas.

439 Agora em duas dimensões, a pergunta básica feita antes no seu experimento unidimen-
440 sional sobre o momento linear total do sistema se divide em duas: Há conservação do
441 momento linear total na direção x ? Há conservação do momento linear total na direção y ?
442 A energia é uma grandeza escalar e continuamos perguntando: A energia mecânica total
443 E do sistema se conserva na colisão estudada?

444 Uma diferença fundamental entre este e o estudo que utilizou a filmagem do trilho de ar é
445 a presença aqui de uma força atrito sobre cada moeda enquanto ela se desloca. Propomos
446 explorar uma diferença qualitativa entre (i) as forças de atrito entre as moedas e a superfície
447 e (ii) as forças de contato entre as moedas. As forças de contato, ditas *forças impulsivas*,
448 são muito mais intensas que as forças de atrito, mas atuam apenas durante a colisão em
449 si. O efeito das forças de atrito sobre as moedas no curto intervalo de tempo durante o
450 qual elas interagem é muito pequeno: durante a colisão dominam as forças de contato.
451 Assim, a discussão sobre conservação de momento e energia durante a colisão continua
452 basicamente a mesma da situação sem atrito.

453 Este roteiro usa como exemplo o choque entre duas moedas de 1 Real, e indica dois cami-
454 nhos para a análise da colisão. Use o exemplo fornecido para se ambientar com o estudo de
455 colisões, mas não se preocupe em reproduzir as trajetórias mostradas ou em usar também
456 moedas de 1 Real. Lance uma de suas moedas em direção à outra, e analise o resultado da
457 colisão entre as duas. As sugestões para registrar o movimento e analisar os dados estão
458 nas próximas seções. Na primeira sugestão para análise, a informação sobre a colisão vem

459 de medidas da distância percorrida depois da colisão por cada uma das moedas [4] e do
460 ângulo entre essas duas trajetórias. Na segunda, são feitas medidas diretas de posição em
461 função do tempo com uma taxa alta o suficiente para revelar o caráter impulsivo das forças
462 de contato [5]

463 Neste experimento você tem liberdade na organização de um relatório a ser encaminhado
464 ao professor. Note que é importante que seu texto tenha suporte em uma ou mais imagens
465 relativas à sua montagem experimental e às análises gráfica e/ou numérica do movimento.

466 5.2 Procedimento experimental

467 5.2.1 Realização das medidas

468 O procedimento para realizar a colisão é simples: procure em sua casa uma superfície
469 plana e lisa sobre a qual as moedas possam deslizar com o menor atrito possível. Dê um
470 peteleco em uma das moedas, lançando-a em direção à outra. Teste diferentes superfícies.
471 No caso mostrado como exemplo neste roteiro foi usada uma superfície de fórmica. Utilize
472 um aparelho celular para filmar todo o experimento, desde o instante inicial do movimento
473 até o repouso final das moedas.

474 Experimente diferentes velocidades iniciais do objeto incidente. Se a velocidade for muito
475 baixa, o atrito fará a moeda incidente parar muito rápido, inviabilizando o experimento.
476 Se a velocidade for alta demais, o celular não irá conseguir capturar imagens com uma
477 taxa alta o suficiente para estudar o movimento. Fazer a filmagem no modo em câmera
478 lenta pode ajudar. É comum que os celulares façam filmagens em seu modo padrão com
479 taxa de 30 quadros por segundo (ou *frames per second - fps*). Possivelmente seu celular é
480 capaz de fazer a filmagem em um modo em câmera lenta com 120 fps ou mais. Se esse for
481 o caso, aproveite essa opção, mas certifique-se de que seu filme não seja comprimido antes
482 da análise. Se usar 30 fps, faça o filme com muita luz, de preferência ao Sol, evitando assim
483 imagens borradadas.

484 Uma vantagem no uso das moedas é que suas massas podem ser descobertas com uma
485 pesquisa na internet. O diâmetro das moedas também é informação de fácil obtenção
486 *online*, e pode ser usada para calibrar as distâncias na análise dos dados. Use duas moedas
487 iguais para que as forças de atrito sejam iguais.

488 5.2.2 Análise das imagens

489 Os dois métodos sugeridos para análise da colisão baseiam-se em medidas de posição
490 sobre imagens registradas em função do tempo. O programa Tracker (Apêndice D), usado
491 anteriormente no Experimento 3 e agora no 4, é uma ferramenta interessante para uso nos
492 dois métodos.

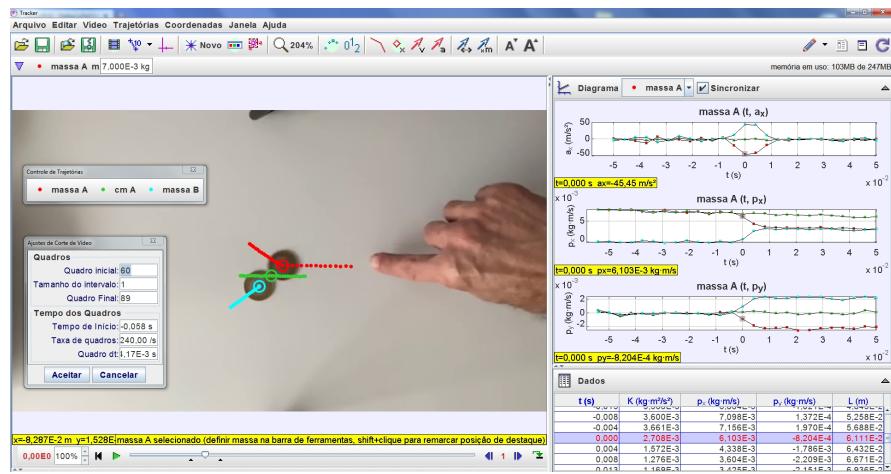


Figura 5.1: Tela típica de análise com o programa Tracker.

493 A partir de suas medições para as posições de cada um dos corpos, e de informação sobre
 494 suas massas, você poderá obter também a evolução da posição do centro de massa do
 495 sistema. Note que as forças de interação entre os dois objetos são internas ao sistema.
 496 Assim, não influenciam o movimento do centro de massa (CM), que deve ser mais simples
 497 que o movimento de cada um dos corpos. Analise o comportamento do CM do sistema
 498 antes, durante e depois da colisão.

499 Depois de importar seu filme para o Tracker, entre no programa com a informação sobre
 500 a taxa de quadros por segundo da sua filmagem. Dê um “zoom” nas suas imagens para
 501 marcar melhor as posições dos centros de massa de cada moeda. O próprio programa
 502 calcula e representa a posição do CM do sistema.

503 Com o programa Tracker você pode ainda gerar facilmente gráficos de velocidade, aceleração,
 504 momento linear, energia e outros. A Figura 5.1 mostra uma tela típica do Tracker em uma
 505 análise desse tipo, na qual os gráficos escolhidos são feitos automaticamente à medida que
 506 os pontos são marcados sobre a imagem. O programa utiliza para isso derivação numérica,
 507 mas você não precisa aqui se preocupar com os detalhes desse procedimento matemático.
 508 Se estiver curioso, pode ver na apostila um exemplo de derivação numérica na seção so-
 509 bre “Determinação da velocidade instantânea”. Os gráficos de aceleração de cada um dos
 510 corpos são úteis para você entender o caráter impulsivo das forças de interação na colisão.
 511 Você pode também construir seus gráficos à mão ou utilizando um programa específico
 512 para essa função (consulte o Capítulo 5 “representações gráficas” da Apostila).

513 5.3 Exemplo de resultados e análise

514 5.3.1 Medidas do traço de posição até o repouso das moedas

515 A primeira estratégia que indicamos para testar a conservação de momento linear na
 516 colisão de duas moedas, na presença de atrito, foi sugerida recentemente por Galante e

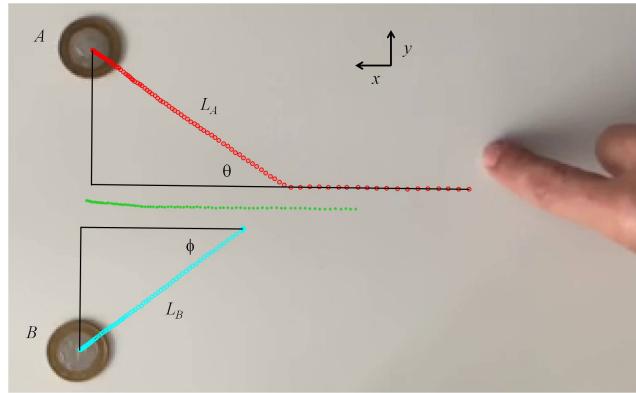


Figura 5.2: Moedas em suas posições finais e marcações de suas trajetórias (CM em verde).

517 Gnesi [4].

Eles chamam a atenção para similaridades dela com métodos calorimétricos com os quais se mede o momento de uma partícula sub atômica a partir de um rastro que ela deixa em um detetor. Na versão simplificada com moedas colidindo, é assumido que a força de atrito é constante e o teorema trabalho-energia cinética é usado para estimar os módulos dos momentos lineares das duas moedas depois da colisão. Temos assim para cada moeda a relação entre o módulo de seu momento p logo após a colisão e o alcance L até parar:

$$\frac{p^2}{2m} = F_{at} L, \quad (5.1)$$

onde F_{at} é o módulo da força de atrito e m é a massa da partícula. Se as moedas são iguais, m e F_{at} são iguais para as duas, e obtemos (ver Figura 5.2):

$$\frac{p_A}{p_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}}. \quad (5.2)$$

Tomando a direção de incidência da moeda A em x , e considerando a moeda B inicialmente parada, a componente do momento linear total em y antes da colisão é zero. Logo, devemos ter depois da colisão as componentes p_{Ay} e p_{By} com mesmo módulo e sinais contrários e, portanto, a razão entre elas deve ser igual a -1. Para testar essa hipótese, precisamos medir também os ângulos entre os momentos finais e a direção de incidência da moeda projétil, a fim de determinar

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -\frac{p_A \operatorname{sen}(\theta)}{p_B \operatorname{sen}(\phi)} = -\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\phi)}. \quad (5.3)$$

A partir da Figura 5.2, na qual foram marcadas as posições das moedas até elas pararem, obtemos $L_A = (0,111 \pm 0,003)$ m, $\operatorname{sen}(\theta) = (0,57 \pm 0,02)$, $L_B = (0,091 \pm 0,003)$ m, e

$\text{sen}(\phi) = (0, 60 \pm 0, 02)$. Assim, obtemos experimentalmente, depois da colisão:

$$\frac{p_{Ay}}{p_{By}} = -1,05 \pm 0,05. \quad (5.4)$$

Este resultado mostra que a soma das componentes p_{Ay} e p_{By} , dentro do erro experimental, permanece igual a zero depois da colisão. Verificamos assim que a componente y do momento linear total se conservou nesse experimento.

A variação percentual de energia na colisão pode ser expressa como (dedução no Apêndice deste roteiro):

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}}{2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (5.5)$$

A Eq. 5.5 mostra que se não houvesse perda de energia cinética na colisão, teríamos um ângulo entre os vetores momento final dos dois corpos $\theta + \phi = 90^\circ$. No entanto, da Figura 5.2 temos $\theta + \phi = 72^\circ$ e $L_A/L_B = 1,2$. Nesse caso, substituindo valores na Eq. 5.5, determinamos uma diminuição, devida à colisão, de 24% na energia cinética total do sistema. A colisão é, portanto, inelástica.

Note que você pode filmar a colisão, como feito aqui, mas isso não é essencial. No experimento original de Galante e Gnesi eles usam apenas moedas, lápis, papel, e régua. O preço da simplicidade neste método é assumir que a força de atrito é constante e igual, em módulo, para as duas moedas.

5.3.2 Medidas de posição durante curto intervalo de tempo

Analizando apenas um curto intervalo de tempo antes e depois da colisão, o efeitos da força de atrito nas variações de momento linear em cada moeda serão pequenos em relação aos efeitos da força de contato entre as moedas. Os gráficos da Figura 5.1 estão reproduzidos com destaque na Figura 5.3: aceleração na direção x (direção dada pela moeda incidente), componente do momento linear na direção x , e componente do momento linear na direção y . Em cada gráfico é feita uma comparação dos valores associados à moeda A (em vermelho), à moeda B (em azul), e ao centro de massa do sistema moeda A mais moeda B (em verde). O gráfico da aceleração mostra no momento da colisão um pico para a moeda B e um pico invertido bastante similar para a moeda A. Esses picos refletem as forças de contato durante a colisão. Ainda no mesmo gráfico, vemos que a duração da colisão é de cerca de um centésimo de segundo. Para efeito de comparação, perceba que a aceleração de cada moeda chega, durante a colisão, a cerca de quatro vezes o valor da aceleração da gravidade, mas cai rapidamente quando apenas a força de atrito está presente.

É possível demonstrar que o produto da massa pela área de cada um dos picos é igual à variação do momento linear. Assim, picos simétricos no gráfico de aceleração na Figura 5.3

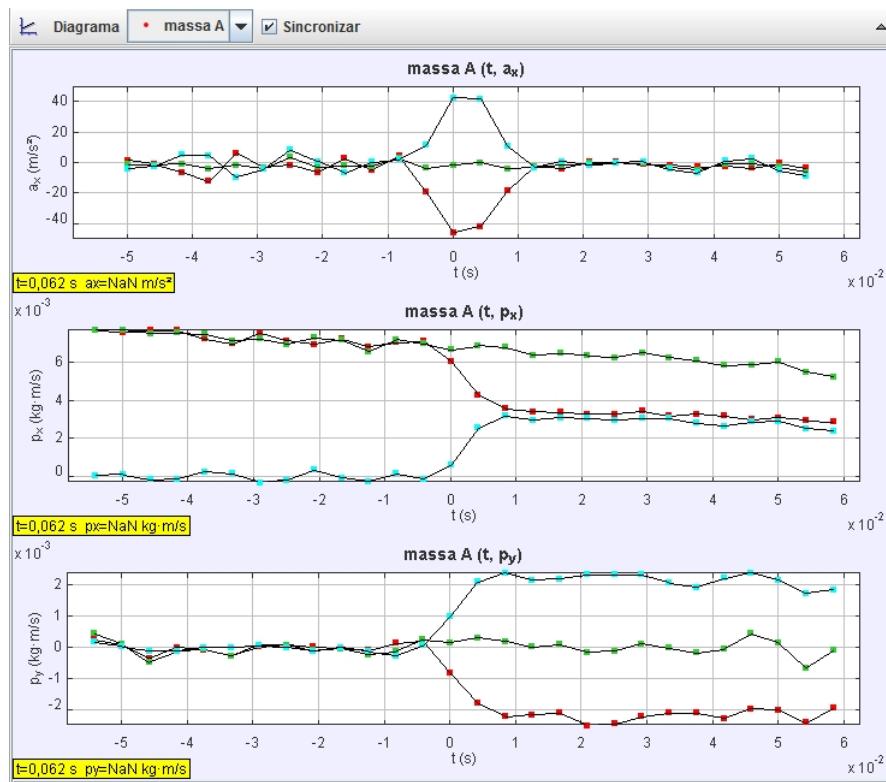


Figura 5.3: Gráficos de a_x , p_x e p_y em função do tempo. Moeda A em vermelho, moeda B em azul e centro de massa do sistema moeda A mais moeda B em verde.

546 demonstram a conservação do momento linear total do sistema, neste caso na direção x .
 547 Note que a aceleração do centro de massa é próxima de zero antes, durante e depois da
 548 colisão. A conservação de momento linear em x e em y durante a colisão pode ser vista
 549 também diretamente nos dois últimos gráficos da Figura 5.3, ligeiramente mascarada por
 550 uma pequena e lenta variação do momento linear total devida às forças de atrito, que são
 551 externas ao sistema moeda A mais moeda B.

PARTE II

CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE DADOS

1

553

554

Medidas e incertezas

555 Uma das maneiras para conhecer e descrever a natureza que nos rodeia é mediante a
556 realização de observações experimentais, que chamamos de medidas. O primeiro pro-
557 blema com o qual nos encontramos é como os resultados encontrados podem ser comu-
558 nicados de maneira clara, de forma que sejam compreensíveis e reproduutíveis por outros
559 experimentadores. Para estabelecer o valor de uma grandeza (mensurando) temos que
560 utilizar instrumentos e um método de medida, como também é necessário definir as uni-
561 dades da medida. Por exemplo se desejamos medir a largura de uma mesa, o instrumento
562 de medição será uma régua ou uma trena e, utilizando o sistema de unidades internacio-
563 nal (SI), a unidade que utilizaremos será o metro (m). A régua, portanto, estará calibrada
564 nessa unidade ou em seus submúltiplos, como, por exemplo, centímetros e milímetros. O
565 método de medição consistirá em determinar quantas vezes a unidade e as frações dela
566 estão contidas no valor do mensurando.

567 Toda medição é afetada por uma incerteza que provém das limitações impostas pela pre-
568 cisão e exatidão dos instrumentos utilizados, da interação do método de medição com
569 o mensurando, da definição do objeto a medir, e da influência do(s) observador(es) que
570 realiza(m) a medição.

O que se procura em cada medição é conhecer o valor medido (x) e a sua incerteza (δ_x) na determinação do resultado, ou seja, determinar os limites probabilísticos destas incertezas. Procura-se estabelecer um intervalo

$$x - \delta_x < x < x + \delta_x \quad (1.1)$$

571 como ilustrado na Figura 1.1, dentro do qual podemos dizer que o valor da grandeza se
572 encontra, com uma certa probabilidade. Em geral utiliza-se como incerteza um intervalo
573 em torno do valor central com 68% de probabilidade.

574 Não existem regras para determinar o tamanho do intervalo, porque dependerá de mu-
575 tos fatores do processo de medição. O tipo de medição, a figura da escala, a acuidade
576 visual de quem esteja fazendo a medida, as condições de iluminação, etc, formarão parte
577 na determinação da largura do intervalo de medição. A incerteza associada a uma medida

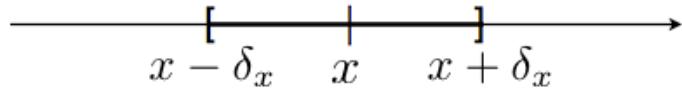


Figura 1.1: Intervalo de probabilidade para a grandeza medida, onde x é o valor mais representativo da nossa medição e δ_x é a incerteza absoluta.

578 deve ser determinada a cada vez que se faça a medição. Por exemplo, é comum pensar que
 579 quando fazemos uma medida com uma régua com escala graduada, a "incerteza de leitura
 580 (incerteza instrumental)" é automaticamente a metade da menor divisão. Um instrumento
 581 com divisões muito finas usado para medir um objeto com bordas mal definidas pode dar
 582 um intervalo de medição maior que várias das divisões menores. Contrariamente, um
 583 objeto bem definido com boas condições visuais pode permitir a identificação de um in-
 584 tervalo de medição muito menor que a menor divisão da escala. Cada situação deve ser
 585 avaliada de forma individual.

Uma forma usual de expressar o resultado de uma medição é:

$$x \pm \delta_x \quad (1.2)$$

e indicando a *unidade de medição*. Além disso é possível definir a *incerteza relativa* como:

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{x} \quad (1.3)$$

que expressa o quanto significativa é a incerteza em relação ao valor medido. Também pode-se calcular a *incerteza relativa percentual* como:

$$\epsilon_{\%} = \epsilon_x \cdot 100\% = \frac{\delta_x}{x} \cdot 100\% \quad (1.4)$$

586 Por exemplo, ao medir o comprimento L de uma mesa podemos apresentá-lo como $L=(1,00$
 587 $\pm 0,01)$ m ou $L=1,00 \pm 0,01$ m, se encontramos um valor de 1,00 m, com uma incerteza de
 588 1 cm em torno desse valor central encontrado. É importante apresentar sempre o valor
 589 central e a incerteza na mesma unidade. Essa medição tem uma incerteza relativa de 0,01
 590 ($0,01/1,00$) e uma incerteza relativa percentual de 1%. A palavra **precisão** muitas vezes
 591 é utilizada como sinônimo de incerteza relativa percentual. Note, no entanto, que nem
 592 sempre a precisão de uma medida corresponde à precisão do instrumento utilizado para
 593 realizá-la. A precisão de um instrumento será discutida em contraposição ao conceito de
 594 acurácia mais abaixo.

595 Incertezas

596 Os distintos tipos de incertezas podem ser classificados em:

- 597 • **Incertezas do instrumento:** Os instrumentos de medição têm uma incerteza finita
598 que está associada à variação mínima da magnitude que ele mesmo pode detectar.
599 Por exemplo, se temos uma régua graduada em milímetros, não será possível de-
600 tectar variações muito menores que uma fração de milímetro. Se, ao leremos o valor
601 medido na régua, aproximamos para o valor inteiro em mm que mais se aproxima da
602 medida, dizemos que a incerteza da régua é de 1 mm. Se, ao contrário, conseguimos
603 identificar valores múltiplos de meio milímetro, então dizemos que a incerteza é de
604 0,5 mm. Não é, no entanto, razoável supor que conseguimos identificar a olho nú-
605 frações menores que 0,5 mm em uma régua milimetrada.
- 606 • **Incertezas estatísticas ou aleatórias:** São as devidas flutuações aleatórias na determi-
607 nação do valor do mensurando entre uma medida e outra. Estas flutuações ocorrem
608 com igual probabilidade tanto para mais quanto para menos. Portanto, medindo
609 várias vezes e calculando a média, é possível reduzir a incerteza significativamente.
610 Estas incertezas são tratadas pela teoria estatística de erros de medição.
- 611 • **Incertezas sistemáticas:** Acontecem pelas imperfeições dos instrumentos e métodos
612 de medição e sempre se produzem no mesmo sentido (não podem ser eliminados
613 com várias medições). Alguns exemplos podem ser um relógio que atrasa ou adianta,
614 uma régua que se dilata, o erro devido à paralaxe, etc...

615 A interação do método de medição com o mensurando também pode introduzir erros.
616 Consideremos como exemplo a medição de temperatura para a qual utilizamos um termô-
617 metro. Parte do calor do objeto que queremos medir flui ao termômetro (ou vice-versa),
618 de maneira que o resultado da medição do valor da temperatura difere do original devido
619 à presença do termômetro (interação que devemos realizar). Fica claro que esta interação
620 pode ser desprezível, se, por exemplo, estamos medindo a temperatura de um litro de
621 água, mas a quantidade de calor transferida ao termômetro pode ser significativa se a
622 quantidade de volume é uma fração pequena de, por exemplo, um mililitro e utilizamos
623 um termômetro convencional.

624 Precisão e exatidão

625 A precisão de um instrumento ou um método de medida está relacionada à sensibilidade
626 ou menor variação de uma grandeza que pode ser detectada com certo instrumento ou
627 método. Dizemos que um paquímetro (por exemplo, com mínima divisão de 0,01 mm) é
628 mais preciso que uma régua (mínima divisão 1 mm) ou que um cronômetro (por exem-
629 plo com mínima divisão 10 ms) é mais preciso que um relógio (mínima divisão 1 s), etc.
630 Quanto menor a **incerteza relativa** de uma medição, mais precisa ela é. É importante notar
631 que o valor absoluto da incerteza isoladamente não é suficiente para qualificar a precisão

632 de uma medida. Por exemplo, reportar a distância entre Rio e São Paulo com incerteza
633 de um metro certamente é muito bom. Por outro lado, medir o comprimento de um carro
634 com incerteza de um metro é muito ruim. Qual a diferença? No primeiro caso, estamos
635 falando de uma dúvida de um metro em cerca de 500 km e no segundo caso, a incerteza é
636 de um metro em cerca de 4 metros.

637 Além da precisão, é importante realizar uma medição com exatidão ou, utilizando um
638 termo mais antigo, acurácia. Esta está geralmente relacionada com a qualidade da calibração
639 do instrumento utilizado ou o método de medição aplicado. Imaginemos que utilizamos
640 um cronômetro para medir os tempos com uma precisão de 10 ms, mas sabemos que atrasa
641 1 minuto cada uma hora. Por outro lado, utilizamos um relógio com uma precisão de 1
642 s que marca a hora certa a todo instante. Neste caso vamos dizer que o cronômetro é o
643 mais preciso, mas o relógio é o mais acurado. Um critério para se comparar a exatidão de
644 duas medidas é dado pela menor discrepância relativa. A discrepância é definida como o
645 módulo da diferença entre o valor medido e um valor de referência para a grandeza e a
646 discrepância relativa é definida como o módulo da razão entre a discrepância e o valor de
647 referência. Quanto menor a discrepância relativa de uma medida, mais exata ou acurada
648 ela é.

649 Portanto, procuraremos sempre realizar uma medição utilizando um método que seja pre-
650 ciso e exato ao mesmo tempo.

651
652

Medidas Diretas e Indiretas

653 Para estabelecer o valor de uma grandeza temos que utilizar um instrumento de medição
 654 e um método de medição. Além disso, será necessário definir as unidades em que essa
 655 magnitude é medida. Por exemplo, se queremos medir a largura de uma mesa, utilizare-
 656 mos uma régua e, dependendo do sistema de medição escolhido, expressaremos o valor
 657 medido em unidades de comprimento como, por exemplo, o metro (m) para o sistema de
 658 unidades internacional (SI) ou centímetros (cm) no caso do CGS. O método de medição
 659 consistirá em determinar a quantidade de unidades da menor fração da régua que corres-
 660 pondem ao comprimento que se deseja medir. Quando uma medição é realizada lendo
 661 o resultado diretamente em um instrumento (construído para isso), dizemos que a **me-
 662 dida é direta**. Há grandes que não se medem diretamente, mas que são obtidas a partir
 663 de outras grandes medidas de forma direta. Por exemplo, para conhecer área de um
 664 retângulo medem-se os comprimentos de seus lados ou para determinar o volume de uma
 665 esfera deve-se medir o diâmetro. Neste caso a **medida é indireta**.

666 Medidas diretas com flutuações aleatórias

667 Consideremos uma grandeza da qual se fazem N medições diretas, que chamaremos:
 668 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Estes valores serão geralmente distintos entre si, mas alguns valores po-
 669 dem se repetir.

670 Evidentemente não será satisfatório fornecer como resultado da medição uma tabela de
 671 N valores. É necessário caracterizar a série de medições mediante uns poucos parâmetros
 672 que tenham um significado preciso relacionado com a magnitude medida e/ou o processo
 673 de medição utilizado. Os parâmetros importantes são:

1. **Valor médio** é a média aritmética dos valores medidos

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.1)$$

e é o valor atribuído à magnitude medida. É bastante intuitivo considerar a média aritmética como valor representativo da grandeza medida. A média aritmética se caracteriza por apresentar as medições ao seu redor, de modo que a soma dos desvios

$$\delta_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.2)$$

é igual a zero. Ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = 0. \quad (2.3)$$

Isto pode ser facilmente demonstrado, escrevendo:

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}), \quad (2.4)$$

e distribuindo o somatório, de modo que:

$$S = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x}. \quad (2.5)$$

Utilizando a expressão do valor médio (equação 2.1):

$$\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}, \quad (2.6)$$

obtemos $S = 0$ como queríamos mostrar.

Por esta razão, a soma dos desvios não é um parâmetro que possa ser utilizado para caracterizar a distribuição das medições ao redor do valor médio e é necessário utilizar outro parâmetro.

2. Dispersão das medições ou **desvio padrão** define-se como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (2.7)$$

O desvio padrão é um parâmetro que caracteriza o processo de medida. Quando as medições são poucas, σ pode flutuar, mas para muitas medidas (N grande) estabiliza-se e não depende do número de medições.

3. O **erro ou incerteza do valor médio** é definido como:

$$\xi = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2}, \quad (2.8)$$

682 onde σ_m está associado às flutuações estatísticas em torno do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.9)$$

683 e σ_r expressa os erros sistemáticos residuais (por exemplo devido à um instrumento
684 mal calibrado).

685 Vamos supor que nas nossas medidas não ocorrem tais erros sistemáticos, de forma
686 que usaremos sempre:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.10)$$

687 O erro do valor médio é a dispersão esperada para as médias de várias séries de
688 medições realizadas nas mesmas condições. O erro do valor médio depende do
689 número de medições como se pode ver na sua expressão, sendo que ela diminui
690 com o aumento do número de medições.

691 Medidas Indiretas

692 Como já foi definido anteriormente, há grandezas que não podem ser determinadas dire-
693 tamente, mas que se obtém a partir de outras grandezas que, estas sim, são medidas de
694 forma direta. Portanto, as incertezas das grandezas que se medem diretamente devem ser
695 propagadas para contribuir à incerteza da grandeza que se calcula utilizando uma deter-
696 minada expressão.

Sejam x_1, x_2, \dots, x_N grandezas independentes medidas de forma direta, e seja a grandeza que se quer determinar $F = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ uma função das grandezas x_1, x_2, \dots, x_N , cujas incertezas estão dadas por $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N$. Pode-se mostrar que a incerteza de F é dada por:

$$(\delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \delta x_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \delta x_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_N} \right)^2 \cdot \delta x_N^2, \quad (2.11)$$

ou

$$(\delta F)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \delta x_i^2. \quad (2.12)$$

697 Esta equação é a fórmula de propagação da incerteza para uma grandeza determinada
698 indiretamente.

699 Comparaçao entre duas medidas da mesma grandeza

Muitas vezes comparamos diferentes resultados experimentais para a medida de uma mesma grandeza. Estes resultados podem vir por exemplo das diferentes técnicas utilizadas para determinar uma grandeza, ou podem vir de valores conhecidos tabulados na

literatura. Vamos supor que temos dois resultados para uma mesma grandeza sendo o primeiro $x_1 \pm \delta x_1$ e o segundo $x_2 \pm \delta x_2$. Se eles são estimativas de uma mesma grandeza, esperamos que a discrepância entre eles ($|x_1 - x_2|$) seja compatível com zero. Como cada uma das medidas está sujeita a uma flutuação estatística de acordo com sua incerteza, em geral encontramos valores diferentes de zero para a discrepância. Como podemos avaliar se a discrepância é significativamente diferente de zero? Há várias formas de se fazer essa avaliação, dependendo do grau de confiança que queremos ter na afirmação de que a diferença é incompatível com zero (ou equivalentemente de que os dois valores são incompatíveis entre si). Vamos considerar a discrepância entre os valores ($|x_1 - x_2|$) pouco significativa ou irrelevante quando for menor que 3 vezes a incerteza da discrepância. Utilizando a expressão para propagação de incertezas definida na Seção 2, determinamos a incerteza da discrepância $\delta|x_1 - x_2| = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$. Resumindo, duas medidas independentes x_1 e x_2 da mesma grandeza são consideradas **compatíveis** quando :

$$|x_1 - x_2| < 3\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$$

ou

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}} < 3.$$

700 Ao contrário, consideramos as duas medidas x_1 e x_2 **incompatíveis** quando a discrepância
701 entre elas é maior que 3 vezes a incerteza da discrepância.

702 Considere por exemplo a medida de um comprimento de uma mesa cujo resultado é
703 $L_{exp} = (98 \pm 1)$ cm. Como podemos ver se esse resultado é compatível com o valor no-
704 minal fornecido pelo fabricante, que é de $L_{nom} = 1$ m? Como o valor nominal nesse caso
705 não tem incerteza, a incerteza da discrepância é igual à incerteza da medida experimental.
706 A discrepância é de 2 cm, que é apenas duas vezes a incerteza da discrepância e a medida
707 é, portanto, compatível com o valor nominal. Uma outra forma de ver isso é analisando
708 se o valor nominal está contido no intervalo de valores $I_{exp} = [L-3\delta L, L+3\delta L]$. Nesse caso, o
709 valor 100 cm está contido no intervalo $I_{exp} = [95, 101]$ cm.

Em um outro exemplo, um estudante mede o valor da aceleração da gravidade e encontra $g_{exp} = 9,21 \pm 0,01$ m/s² e quer comparar com o valor tabelado $g = 9,787 \pm 0,001$ m/s². Temos:

$$\frac{|g_{exp} - g|}{\sqrt{\delta g_{exp}^2 + \delta g^2}} = \frac{0,577}{0,01005} \approx 57 \gg 3.$$

710 Logo, os dois valores são incompatíveis.

711 Exercícios

- 712 1. Os lados de um paralelepípedo são $a = (4,50 \pm 0,05)$ cm, $b = (8,50 \pm 0,09)$ cm e $c = (35,0 \pm 0,3)$ mm. Determinar o volume do cubo com sua incerteza absoluta e relativa.

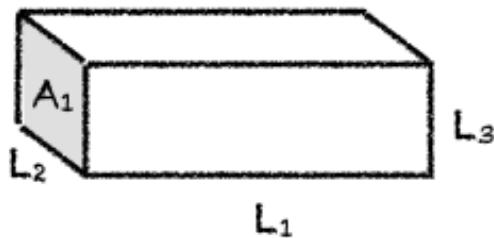


Figura 2.1: Bloco retangular.

- 714 2. Na medição da resistência (R), se obteve o valor da tensão $V = (15,2 \pm 0,2)$ V e da
715 corrente $I = (2,6 \pm 0,1)$ A. Qual é a incerteza absoluta da resistência usando a equação
716 $R = V/I$?
- 717 3. Um pêndulo simples é utilizado para medir o valor da aceleração da gravidade uti-
718 lizando equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

719 O período T medido foi de $(1,24 \pm 0,02)$ s e o comprimento do pêndulo $l = (0,381 \pm$
720 $0,002)$ m. Qual é o resultado do valor da aceleração da gravidade g com sua incerteza
721 absoluta e relativa?

- 722 4. Para medir o comprimento total de um pêndulo (fio + esfera) usou-se uma régua mi-
723 limetrada para medir o comprimento do fio e um paquímetro para medir o diâmetro
724 da esfera. Observam-se os seguintes valores com as suas respectivas incertezas:

725 Comprimento do fio = 2,100 m
726 Incerteza comprimento do fio = 0,5 cm
727 Diâmetro da esfera = 2,114 cm
728 Incerteza do diâmetro da esfera = 0,01 mm

729 Ache o comprimento total e a sua incerteza associada.

- 730 5. Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma: $R = (232,0 \pm$
731 $0,1)$ mm. Calcular seu volume com a sua respectiva incerteza relativa.
732 6. A partir da figura 2.1, com as seguintes medidas:

733 $L_1 = (5,00 \pm 0,05)$ cm
734 $L_2 = (20,00 \pm 0,05)$ mm
735 $L_3 = (15,00 \pm 0,01)$ mm

- 736 (a) Determine a área A_1 com a incerteza correspondente.
737 (b) Determine o volume desta peça com a incerteza correspondente.

- (c) Se a precisão necessária para o resultado da área é de 0,5% podemos considerar este resultado satisfatório?

7. Para determinar a altura de uma cachoeira, algumas pessoas mediram o tempo de queda de pedrinhas que eram soltas, em queda livre, de um mesmo local. Conhecendo o tempo de queda t , pode-se calcular a altura h a partir da relação cinemática $h = 1/2gt^2$ em que g é a aceleração da gravidade. Foi utilizado um cronômetro com precisão de centésimos de segundo e os valores t_i obtidos em 8 medidas estão na seguinte tabela:

	t(s)
1	1,30
2	1,09
3	1,03
4	1,27
5	1,18
6	1,31
7	1,24
8	1,15

Considerando $g = (9,784 \pm 0,001) \text{ m/s}^2$, calcule a altura da cachoeira e a sua incerteza.

749

750

Algarismos Significativos

751 Imagine que você pergunta a hora a uma pessoa com um relógio de pulso analógico, como
752 o mostrado na Figura 3.1. Essa pessoa dá uma olhada no relógio, e responde: são 10 horas
753 e 42 minutos. Você entende que o ponteiro dos minutos certamente estava entre o 8 e o 9,
754 ou seja, corresponde a um valor entre 40 e 45 minutos, mais próximo de 40 do que de 45.
755 Dizemos que esse algarismo que foi estimado, o 2, é um **algarismo duvidoso**. Os outros
756 algarismos são **algarismos certos**: o ponteiro das horas estava entre 10 e 11, com certeza.
757 O conjunto de algarismos certos e duvidosos são os **algarismos significativos da medida**.
758 Quanto maior for o número de algarismos significativos em uma medida, mais informação
759 ela traz.



Figura 3.1: Relógio marcando hora.

760 Quando realizamos uma medição direta de uma grandeza, a partir da leitura de um ins-
761 trumento analógico, que apresenta uma escala, o procedimento que se usa para fazer o
762 registro do valor da grandeza é anotar todos os algarismos fornecidos pela escala do ins-
763 trumento, eventualmente acrescentando mais um algarismo, que represente uma fração
764 da menor divisão da escala do instrumento. No exemplo acima, do relógio, ao estimar 42
765 minutos, a pessoa imaginou uma escala de subdivisão da menor divisão do relógio em 5
766 partes, cada uma delas correspondendo a 1 minuto, e estimou que o ponteiro estava mais
767 perto de duas subdivisões. Quando o instrumento é digital, o múltiplo da menor medida
768 que ele pode fazer corresponde ao algarismo duvidoso do valor lido. Em um cronômetro
769 digital com resolução de 1 centésimo de segundo, que mede um intervalo de tempo de
770 12,04 s, o 4 é o algarismo duvidoso da medida direta.

Um ponto que sempre gera dúvida é se os zeros são significativos ou não. Para responder, pense em alterar as unidades da medida. Se o número de zeros mudar ao fazer essa alteração, eles não são significativos, já que indicam apenas em que unidades estamos escrevendo a medida. A medida $x_1 = 2,47$ cm tem três algarismos significativos, sendo o 7 duvidoso. Para escrever x_1 em metros, caminhamos a vírgula para a esquerda duas casas decimais e completamos com zeros. Nada foi feito em termos de alterar a quantidade de informação em x_1 , apenas trocamos as unidades, logo esses zeros de preenchimento não são significativos. Em resumo, as duas formas abaixo são equivalentes e têm três algarismos significativos:

$$x_1 = \underbrace{2,47}_{\text{sig}} \text{ cm} = 0,0 \underbrace{247}_{\text{sig}} \text{ m}$$

A mudança para uma unidade menor pode ser feita com ajuda de potências de dez, que não contam como algarismos significativos. Por exemplo, a medida x_2 , com dois algarismos significativos pode ser escrita nas formas equivalentes

$$x_2 = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \text{ kg} = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \times 10^3 \text{ g} = \underbrace{5,2}_{\text{sig}} \times 10^2 \text{ g}$$

Se escrevermos uma medida como $x_3 = 3,10$ s, ficará implícito que temos certeza dos três segundos e do um décimo de segundo. O zero na casa dos centésimos de segundo é duvidoso, sendo o último algarismo significativo da medida. Os zeros ao final do número são significativos. Observe mais um exemplo:

$$\underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ m} = 0, \underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ km} = \underbrace{1,00}_{\text{sig}} \times 10^8 \mu\text{m}$$

⁷⁷¹ Também aqui os dois algarismos zero à direita do 1 são significativos, independentemente
⁷⁷² da unidade que escolhemos para registrar o valor. Ao todo o comprimento registrado tem
⁷⁷³ 3 algarismos significativos.

⁷⁷⁴ Incertezas e algarismos significativos

Normalmente usamos um ou dois algarismos significativos para representar as incertezas, dependendo do grau de estimativa envolvido na sua determinação. Como vamos trabalhar com muitas estimativas na determinação das incertezas nas medidas diretas, usaremos a convenção de um significativo. Assim, o valor da medida deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza, como nos exemplos abaixo.

$$L = (2,25 \pm 0,05) \text{ cm} \quad M = (351 \pm 2) \times 10^{-2} \text{ kg}$$

⁷⁷⁵ No caso da incerteza de medidas indiretas, em geral é preciso arredondar o valor determinado a partir da propagação das incertezas das medidas diretas, explicado no Capítulo 2.

⁷⁷⁷ Para arredondar um determinado valor, vamos adotar os critérios da norma técnica da

778 Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT-5891:

- 779 1. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo inferior a 5, permanece inalterado o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6357 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,6);
- 780 2. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6678 torna-se 781 1,7 e 1,6505 torna-se 1,7, arredondados à primeira casa decimal);
- 782 3. Se o algarismo à seguida do algarismo a ser conservado for igual a 5 e não houver 783 mais nenhum algarismo à sua direita ou se todos os algarismos à direita forem zeros, 784 retira-se todos os algarismos posteriores ao que será conservado e :
- 785 (a) adiciona-se uma unidade ao algarismo conservado, se este for ímpar;
- 786 (b) permanece inalterado o algarismo conservado, se este for par.

791 Observe os arredondamentos abaixo, feitos de modo a que a medida tenha 3 algarismos
792 significativos e seguindo os critérios acima:

- 793 • $x = 4,678 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- 794 • $y = 4,674 \text{ m} \rightarrow x = 4,67 \text{ m}$
- 795 • $z = 4,675 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- 796 • $w = 4,665 \text{ m} \rightarrow x = 4,66 \text{ m}$

Como exemplo, vamos calcular o peso p da massa $m = (234,40 \pm 0,02)\text{g}$ sabendo que $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$. Vamos trabalhar no SI, portanto escrevemos $m = (234,40 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg}$. Com isso,

$$p = m g = 2,29428376 \text{ N}$$

Agora vamos calcular a incerteza. Como temos um produto,

$$\left(\frac{\delta_p}{p} \right)^2 = \left(\frac{\delta_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\delta_g}{g} \right)^2 = \left(\frac{0,02}{234,00} \right)^2 + \left(\frac{0,0001}{9,7879} \right)^2 = 7,409 \times 10^{-10}$$

Logo,

$$\delta_p = 2,29428376 \text{ N} \times 2,72 \times 10^{-5} = 6,23 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Agora escrevemos a incerteza calculada com um significativo:

$$\delta_p = 6 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Finalmente escrevemos p até a quinta casa decimal, usando o critério de arredondamento, e escrevemos o resultado final:

$$2,29428376 \text{ N} \rightarrow p = (2,29428 \pm 0,00006) \text{ N}$$

Claro que também poderíamos usar a equação (2.12) para calcular a incerteza absoluta:

$$\delta_p = \sqrt{(m\delta_g)^2 + (g\delta_m)^2}.$$

797 Regra de bolso sobre algarismos significativos

798 Muitas vezes o cálculo da incerteza propagada pode ser bem longo e fica difícil de saber
 799 se o resultado está certo ou não. Uma forma simples de saber se pelo menos a ordem de
 800 grandeza da incerteza propagada está correta é usar a seguinte regra:

- 801 • Numa operação matemática envolvendo medidas com diferentes números de alga-
 802 rismos significativos o resultado terá aproximadamente o mesmo número de algaris-
 803 mos significativos que a medida com menor número.

Vamos calcular o volume V de um tubo de seção reta quadrada de lado $a = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ e comprimento $L = (120,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. A medida a tem 2 algarismos significativos e L , 4, sendo a mais precisa. Assim esperamos que V tenha entre 2 e 4 algarismos significativos. Vamos fazer a propagação:

$$V = a^2 L \rightarrow V = a^2 L = 120,0 \text{ cm}^3$$

$$\left(\frac{\delta_V}{V} \right) = \sqrt{\left(2 \frac{\delta_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{\delta_L}{L} \right)^2} = 0,1000034722$$

804 Um erro muito comum é esquecer que 0,1000034722 é a incerteza relativa e escrever este
 805 valor como se fosse a incerteza absoluta.

Calculando corretamente a incerteza absoluta, temos

$$\delta_V = V \left(\frac{\delta_V}{V} \right) = (480,0 \text{ cm}^3)(0,1000034722) = 48,001666656 \approx 4,8001666656 \times 10 \text{ cm}^3$$

Finalmente,

$$V = (48 \pm 5) \times 10 \text{ cm}^3$$

806 O resultado final tem dois algarismos significativos, como a medida menos precisa usada
 807 no cálculo. Se for necessário melhorar a precisão da medida de V , vale a pena medir a com
 808 mais precisão. Note que ao escrevermos o resultado final, utilizamos a mesma potência de
 809 10 para V e para sua incerteza δ_V . Assim podemos saber qual deve ser o último algarismo

810 a ser conservado no valor da medida e realizar o arredondamento, se necessário. Neste
811 caso, o arredondamento foi feito na casa da unidade de $1 \times 10 \text{ cm}^3$.

812 Exercícios

813 Expressse corretamente os resultados para as seguintes medições com suas respectivas in-
814 certezas.

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
1	67,002	0,023	cm	
2	0,001	2,3	erg	
3	45612,98	345	cm/s	
4	14	29	erg	
5	152,389	0,037	cm/s ²	
6	74,58	3,14	g	
7	0,0012	0,0001	m	
8	120034	2607	m/s ²	
9	45,98	2,1	erg	
10	65555,467	56,001	g	
11	23,456	1,2	m	
12	0,173	0,056	cm ³	
13	45001,6	657,31	J	
14	45,629	2,5914	km/h	
15	104104	104	m ²	
16	0,0826	0,099	cm/s	
17	3,69	1,582	mm ³	
18	19,78	5,46	kg	
19	0,458	0,177	cm	
20	135,589	0,0888	g	
21	25,36	0,84	cm	
22	74589,589	5698,26	erg	
23	0,145	0,5	cm/s	
24	14580,8	37,36	erg	
25	125,369	0,041	cm/s ²	
26	74,58	3,14	g	
27	0,025	0,0074	m	
28	256	0,5	m/s ²	
29	7489	2,1	m/s ²	
30	4789,4	36,001	g	

	Medição	Incerteza	Unidades	Resultado
18	19,78	5,46	kg	
19	0,458	0,177	cm	
20	135,589	0,0888	g	
21	25,36	0,84	cm	
22	74589,589	5698,26	erg	
23	0,145	0,5	cm/s	
24	14580,8	37,36	erg	
25	125,369	0,041	cm/s ²	
26	74,58	3,14	g	
27	0,025	0,0074	m	
28	256	0,5	m/s ²	
29	7489	2,1	m/s ²	
30	4789,4	36,001	g	

4

817

818

Representações gráficas

819 Como fazer um histograma

820 Quando fazemos uma análise estatística de um conjunto de N medidas de uma determinada grandeza, podemos realizar um gráfico no qual se representa para cada valor (ou intervalo de valores) o número de vezes em que este aparece. Este tipo de gráfico recebe o nome de **Histograma**. Um exemplo é mostrado na Figura 4.1. Como o conjunto de valores obtidos é discreto, resulta um esquema de barras. A largura destas barras é a menor diferença entre os valores medidos ou o tamanho do intervalo escolhido no caso em que seja conveniente agrupar vários valores num intervalo (isto deve ser determinado em função da série de medições realizadas). O número de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições.

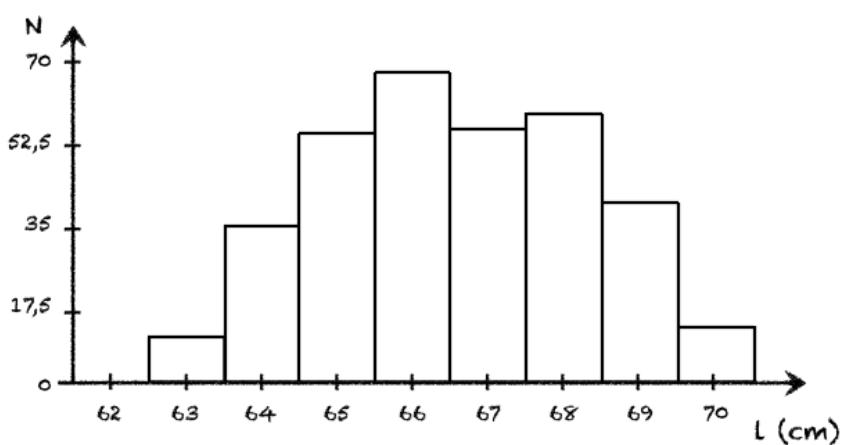


Figura 4.1: Exemplo de um histograma.

829 Para que fique mais claro, vamos considerar o seguinte exemplo. Medimos a altura de
830 uma garrafa de água 40 vezes obtendo os seguintes valores, em centímetros:

	20,3	20,1	20,2	20,5	20,2	19,7	20,6	20,4
	19,8	20,3	20,1	20,2	20,3	20,4	20,3	19,6
831	20,0	19,5	20,7	20,3	20,1	20,7	20,5	20,5
	20,5	20,3	20,4	20,2	20,3	20,2	20,6	20,8
	20,4	20,0	19,9	20,6	20,8	19,7	20,9	20,3

832 Como podemos ver, há valores que se repetem e a frequência de repetição é diferente para
 833 cada valor. Esta informação pode ser apresentada em forma gráfica, mediante a construção
 834 de um histograma. Para isto devemos escolher valores ou intervalos de valores e determi-
 835 nar quantas vezes o valor se repete no conjunto de dados.

836 Para nosso exemplo, vamos escolher intervalos de 0,2 cm começando pelo menor valor
 837 medido de 19,5 cm. Desta forma o primeiro intervalo será de 19,5 a 19,7 cm, o segundo de
 838 19,7 cm a 19,9 cm e assim sucessivamente. Cada intervalo será representado no gráfico pelo
 839 seu valor central, ou seja, para o primeiro será 19,6 cm, para o segundo 19,8 cm, etc. Como
 840 os intervalos são contínuos devemos escolher como serão os limites dos intervalos, aberto
 841 e fechado, pois, por exemplo, o valor 19,7 cm vai contar para o primeiro ou o segundo
 842 intervalo. No nosso exemplo, o valor inferior vai ser o fechado e o valor superior o aberto
 843 (ou seja, 19,7 cm vai contar para o segundo intervalo e não para o primeiro). Desta forma,
 podemos construir a Tabela 4.1, de frequências:

Tabela 4.1: Tabela de frequências absolutas e relativas em função da altura medida de uma garrafa.

Intervalo (cm)	Valor do Intervalo (cm)	Frequência	Frequência Relativa (%)
19,5 - 19,7	19,6	2	5,0
19,7 - 19,9	19,8	3	7,5
19,9 - 20,1	20,0	3	7,5
20,1 - 20,3	20,2	7	17,5
20,3 - 20,5	20,4	12	30,0
20,5 - 20,7	20,6	8	20,0
20,7 - 20,9	20,8	4	10,0
20,9 - 21,1	21,0	1	2,5

844

845 Uma vez construída a tabela, podemos fazer o gráfico no qual vamos colocar no eixo-x os
 846 valores centrais dos intervalos escolhidos e no eixo-y o número de repetições (Frequência).
 847 Para isto deve ser escolhida uma escala adequada em cada eixo, de forma que a distância
 848 entre todos os valores centrais dos intervalos seja constante. Para o caso do eixo-y, a escala

849 deve ser escolhida de forma tal que o valor mais repetido fique na parte superior do eixo,
 850 de forma que possa ser apreciada a estrutura do histograma. Uma vez escolhida a escala,
 851 uma barra será desenhada para cada intervalo com o tamanho da frequência determinada
 852 na tabela anterior, como mostramos no lado esquerdo da Figura 4.2.

853 Uma forma alternativa de se fazer o histograma é colocando no eixo-y a frequência relativa,
 854 ou seja, o número de repetições dividido pelo número total de medidas, frequentemente
 855 mostrado em percentagem, como na última coluna da Tabela 4.1 e no histograma do lado
 856 direito da Figura 4.2.

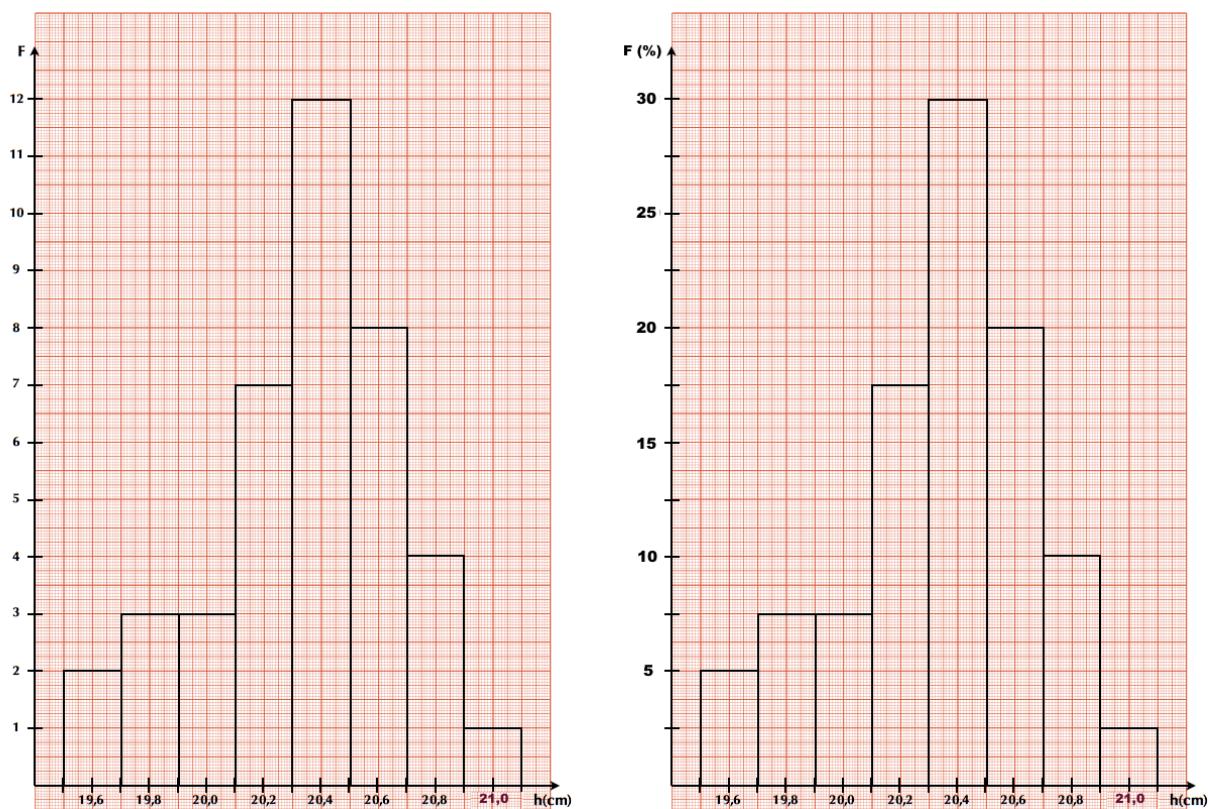


Figura 4.2: Histogramas de frequências (lado esquerdo) e frequências relativas (lado direito) da medida da altura (h) da garrafa de água .

857 Como construir um gráfico

858 Uma forma muito útil de apresentar os resultados experimentais é a partir de representa-
 859 ções gráficas dos mesmos, pois neles a informação é sintetizada, facilitando sua análise e
 860 interpretação. Geralmente, um gráfico é mais útil que uma tabela de valores, por exemplo,
 861 quando estamos realizando medições de uma variável Y em função de outra X que varia
 862 independentemente e queremos ver a relação funcional entre elas (por exemplo, a posição
 863 de um móvel em função do tempo), ou para estudar se duas variáveis possuem alguma
 864 correlação ou não.

865 Em Física Experimental I, todos os gráficos que realizaremos serão em duas dimensões

866 além dos histogramas que já foram discutidos na sessão 4. O primeiro passo é escolher
 867 quais serão as variáveis e, logo, qual é a variável independente que será representada no
 868 eixo horizontal e qual a dependente no eixo vertical. Por exemplo, se queremos represen-
 869 tar a posição de um corpo em movimento em função do tempo vamos identificar duas
 870 variáveis: posição (x) e tempo (t), sendo o tempo a variável independente. Ou seja, o
 871 tempo será colocado no eixo-x e a posição no eixo-y.

872 Uma vez escolhidas as variáveis, devemos determinar a escala para cada eixo. Para isto
 873 temos que considerar os valores medidos de cada variável, de forma a poder escolher uma
 874 escala que facilite a leitura dos pontos experimentais, ou qualquer outro ponto represen-
 875 tado no gráfico. Quando desenhamos o gráfico em papel, devemos escolher a escala de
 876 forma a usar pelo menos metade da folha para representar os pontos experimentais. Para
 877 facilitar a leitura do gráfico, é interessante utilizar escalas em que cada milímetro do pa-
 878 pel corresponda a múltiplos ou submúltiplos de 2 ou 5 da grandeza correspondente. A
 879 determinação da escala em cada eixo é independente.

880 Consideremos os seguintes valores medidos para o exemplo da posição do corpo em
 881 função do tempo:

	Tempo (s)	Posição (m)	Incerteza da Posição (m)
	0,1	29	1
	0,3	34	1
	0,4	41	1
	0,5	38	1
882	0,7	33	1
	1,0	26	1
	1,1	23	1
	1,2	20	1
	1,4	17	1
	1,5	16	1

883 Vamos construir o gráfico em papel milimetrado, usando a folha “na vertical”, de forma
 884 que o eixo-x fique na menor dimensão da mesma e o eixo-y na maior. Para o eixo-x, onde
 885 vamos representar o tempo, a escolha parece simples, começamos em 0 (zero) e conside-
 886 ramos uma escala de 10 mm para cada 0,1 s, pois o tamanho nesta dimensão é de 180 mm
 887 e nós precisamos marcar de 0 a 1,5 s. Para o eixo-y, onde vamos representar a posição,
 888 dispomos de 28 cm de folha. Neste caso, podemos considerar duas possibilidades: (A)
 889 começamos a escala a partir do zero ou (B) começamos ela perto do menor valor medido,
 890 neste caso 16 m. Em ambos os casos a escala deve ir até o máximo valor medido ou algum
 891 valor superior imediato. Em geral escolhemos um valor superior que permita ajustar a
 892 escala para um múltiplo de 2 ou 5. Se considerarmos o caso (A), uma escala possível seria
 893 1 cm no papel para cada 2 m de posição (Figura 4.3 (esquerda)). Como podemos ver, não

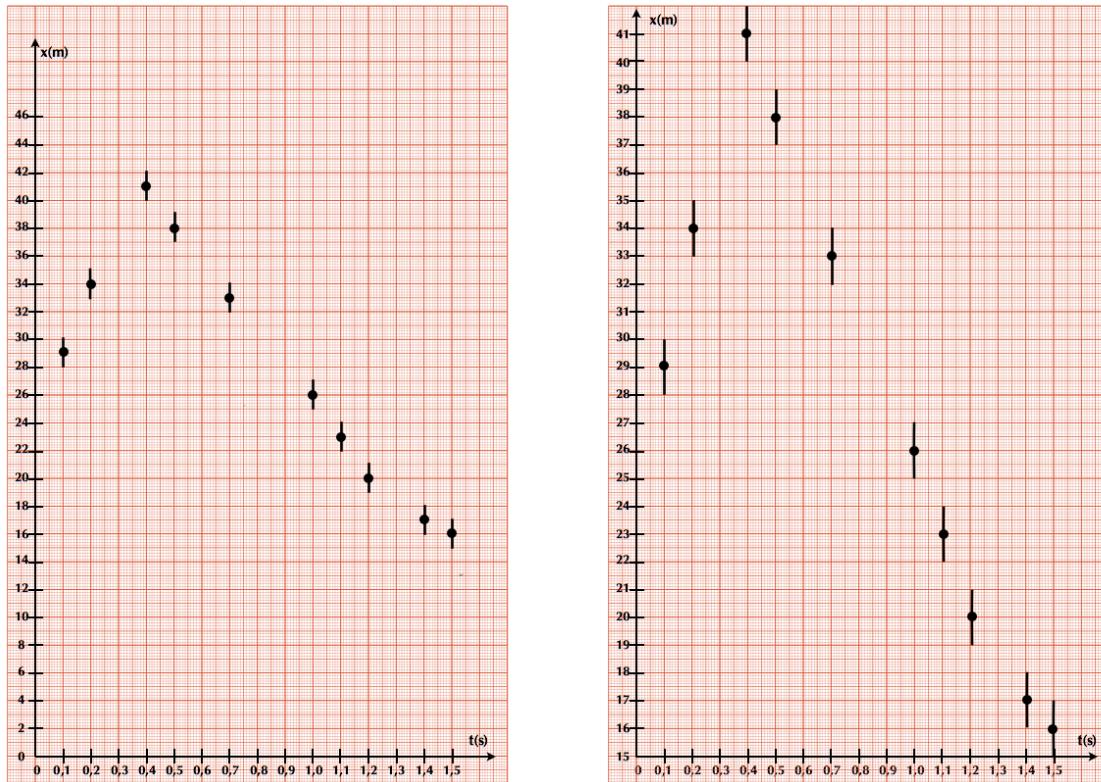


Figura 4.3: Gráfico da posição (x) em função do tempo (s) para o caso A (esquerda). Gráfico da posição (x) em função do tempo (s) para o caso B (direita).

é necessário começar do zero, podemos começar por exemplo de 15 m (caso B) e escolher uma escala de 1 cm para cada 1 m (Figura 4.3 (direita)). Desta forma podemos observar melhor a estrutura própria do gráfico. Uma vez definida a escala, marcamos valores regularmente espaçados nos eixos correspondentes e identificamos os eixos com as grandezas que estes representam, com suas respectivas unidades. Finalmente, desenha-se os pontos com suas barras de erro de acordo com a tabela de dados, como pode se ver na Figura 4.3. A barra de erro é a representação gráfica da incerteza. Assim, ela deve ser desenhada como uma reta que vai de um valor igual ao valor do ponto subtraído do valor de uma incerteza até o valor do ponto somado de uma incerteza.

Não existe uma única forma de representar os nossos dados. No exemplo anterior, ambos os gráficos estão corretos. **O importante é que se deve adotar uma “escala limpa e fácil de ser lida” de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.**

Ajuste linear

909 Ajuste de uma função linear por Mínimos Quadrados

910 Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encon-
911 trar uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. A forma de realizá-la é medi-
912 ante o procedimento de Mínimos Quadrados, que no caso particular de uma função linear
913 chama-se de regressão ou ajuste linear. Em Física Experimental I, só trabalharemos com
914 este tipo de ajuste, seja porque as relações das grandezas medidas tem uma relação linear
915 ou porque seremos capazes de linearizar relações entre grandezas.

Vamos então nos focalizar só no caso da regressão linear, deixando o caso mais genérico de mínimos quadrados para ser estudado mais para a frente. Na Figura 5.1, mostramos o caso linear. A dispersão dos valores está associada às flutuações dos valores de cada variável. Supomos uma tendência linear entre as variáveis X e Y, e nos perguntamos qual é a melhor reta:

$$y(x) = ax + b \quad (5.1)$$

916 que ajusta estes dados. A quantidade $y_i - y(x_i)$ representa o desvio de cada medida y_i em
917 relação ao valor previsto pelo modelo $y(x)$.

Vamos definir uma função χ^2 (chi-quadrado), dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.2)$$

onde N é o número de pontos que serão utilizados para a realização do ajuste linear. Desta forma, a função χ^2 é uma medida do desvio total dos valores medidos y_i em relação aos valores previstos pelo modelo linear $ax + b$. Os melhores valores para o coeficiente angular a e o coeficiente linear b são os que minimizam este desvio total, ou seja o valor de χ^2 .

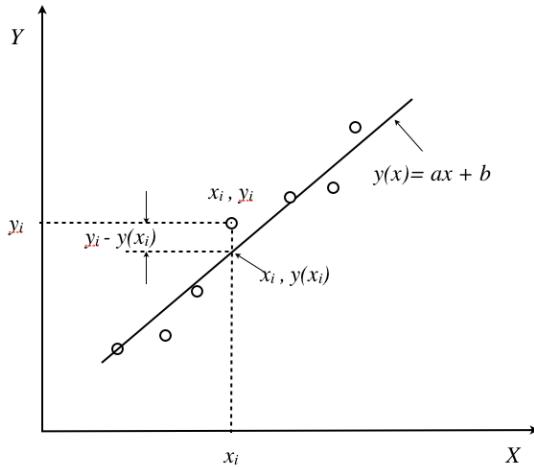


Figura 5.1: Gráfico de dados associado a um modelo linear.

Portanto, os melhores valores de a e b serão os que satisfazem:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \quad (5.3)$$

Resolvendo as duas equações obtemos (mostrar):

$$a = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.4)$$

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad (5.5)$$

Estes dois resultados se aplicam ao caso em que todos os dados da variável dependente (y) têm a mesma incerteza absoluta e a incerteza da variável independente (x) considera-se desprezível. As incertezas dos parâmetros a e b são dadas por:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N V[x]}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \sum_i x_i^2}{N V[x]}} \quad (5.6)$$

onde $V[x]$ é a variância de x e χ_N^2 é conhecido como o chi-quadrado por grau de liberdade (ou chi-quadrado reduzido), que no caso linear está dado por:

$$\chi_N^2 = \frac{1}{N-2} \chi^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (5.7)$$

A qualidade do ajuste linear pode ser determinada pelo *coeficiente de correlação* dado por:

$$\rho = \frac{\frac{1}{N} \sum_i x_i y_i - \frac{1}{N^2} \sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{V[x]V[y]}} \quad (5.8)$$

onde:

$$V[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \quad \text{e} \quad V[y] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \quad (5.9)$$

⁹¹⁸ Método gráfico para ajustar uma reta com incerteza

⁹¹⁹ Se medimos duas variáveis, X e Y, cuja relação sabemos que é linear, podemos encontrar
⁹²⁰ uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. No Capítulo 4 da parte Concei-
⁹²¹ tos Básicos na apostila discutimos como isto é feito analiticamente mediante o método
⁹²² de mínimos quadrados, mas aqui estudaremos como faze-lo a partir do gráfico de Y em
⁹²³ função de X, o que chamamos de **método gráfico**.

⁹²⁴ Na Figura 5.2 podemos observar a distribuição dos dados, círculos abertos, que queremos
⁹²⁵ ajustar. Neste caso, para simplificar, vamos considerar que a incerteza associada a cada
⁹²⁶ medida é do tamanho do ponto. Para ajustar graficamente os pontos por uma reta que
⁹²⁷ melhor representa a variação de Y em função de X devemos traçar uma reta de forma tal
⁹²⁸ que os pontos que se situem “acima” da reta se vejam compensados pelos pontos que se
 situem “abaixo” da mesma, como na linha cheia mostrada na Figura 5.2¹.

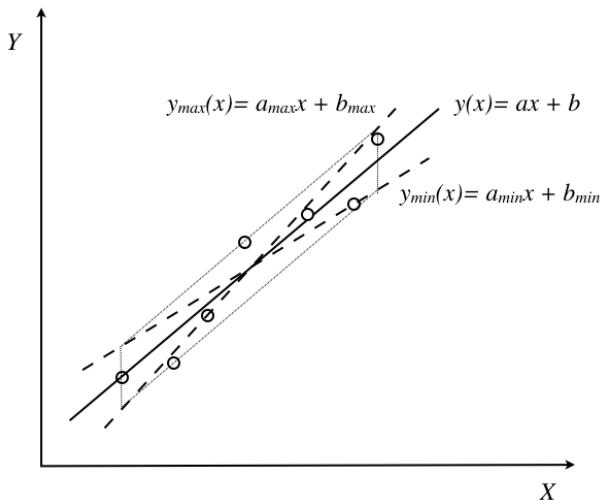


Figura 5.2: Método para ajuste linear.

⁹²⁹

⁹³⁰ Desta forma podemos determinar o coeficiente angular (a) e linear (b) para a equação da
⁹³¹ reta $y = ax + b$. Mas mesmo no caso gráfico é preciso dar as incertezas associadas à
⁹³² determinação de a e b . Para isto, vamos traçar duas linhas paralelas à melhor reta (R)
⁹³³ que ajusta os nossos dados encontrados, uma passando pelo ponto mais afastado “acima”
⁹³⁴ da reta R e outra pelo ponto mais afastado “abaixo” da reta R . Caso exista um ou outro

¹Note que o uso de uma régua transparente é conveniente pois permite ter uma visão global de todos os pontos.

935 ponto excepcionalmente afastado da reta média poderá não ser considerado pois a proba-
936 bilidade de corresponder a uma medida incorreta é grande. Obtendo a interseção destas
937 retas por duas retas paralelas ao eixo-y que contêm o primeiro e último ponto experimental
938 representado temos um “paralelogramo de incerteza” como é mostrado na figura (parale-
939 logramo pontilhado). A partir deste, desenhamos as duas retas diagonais achando o que
940 chamaremos a reta de máxima $y_{max} = a_{max}x + b_{max}$ e a de mínima $y_{min} = a_{min}x + b_{min}$ (ver
941 figura).

A partir destas três retas, podemos então determinar as incertezas associadas para o coeficiente angular δa e linear δb como:

$$\delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

$$\delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

6

942

943

Determinação da velocidade instantânea

No movimento uniformemente acelerado a velocidade da partícula em um instante t pode ser calculada a partir da velocidade média calculada entre os instantes $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$ com Δt constante. Isto é:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (6.1)$$

Assim, para um conjunto de medições de posição em função do tempo, podemos calcular a velocidade em cada ponto (i) a partir das medições de tempo e posição do ponto posterior (t_{i+1} e x_{i+1}) e anterior (t_{i-1} e x_{i-1}), utilizando a fórmula:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (6.2)$$

Para cada valor de velocidade também podemos calcular a incerteza associada mediante a fórmula de propagação de incertezas. Desprezando a incerteza na determinação do tempo, obtemos:

$$\delta_{v_i}^2 = \frac{\delta_{x_{i+1}}^2 + \delta_{x_{i-1}}^2}{(t_{i+1} - t_{i-1})^2} \quad (6.3)$$

944 onde $\delta_{x_{i+1}}$ e $\delta_{x_{i-1}}$ são as incertezas na determinação da posição x_{i+1} e x_{i-1} respectivamente.

945

946

Distribuição Gaussiana

⁹⁴⁷ Valor médio, Desvio Padrão e Densidade de Probabilidade

Sejam N medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Como alguns dos valores x_i medidos podem ser repetidos, podemos dizer que para esta grandeza temos M **eventos** possíveis de medida tal que $M \leq N$ e eles são: y_1, y_2, \dots, y_M . Então, podemos definir a **frequência de ocorrência** do evento y_i como $N(y_i)$ de forma tal que:

$$\sum_{i=1}^M N(y_i) = N. \quad (7.1)$$

Desta forma, podemos definir a **frequência relativa** como a fração de eventos y_i em relação ao número total de eventos N , dada por:

$$F(y_i) = \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.2)$$

de forma que (mostrar):

$$\sum_{i=1}^M F(y_i) = 1. \quad (7.3)$$

Se o processo é repetido indefinidamente, ou seja, $N \rightarrow \infty$, a frequência relativa é interpretada como a **probabilidade de ocorrência** do evento y_i :

$$P(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.4)$$

⁹⁴⁸ e como sabemos que $0 \leq N(y_i) \leq N$, então $0 \leq P(y_i) \leq 1$.

⁹⁴⁹ No Capítulo 2 da parte Conceitos Básicos definimos os conceitos de valor médio e desvio ⁹⁵⁰ padrão. Agora podemos re-escrever estas definições em função da frequência relativa, ⁹⁵¹ obtendo:

1. Valor médio

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^M F(x_i)x_i, \quad (7.5)$$

2. Variância $V[x] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2 F(x_i) \quad (7.6)$$

952

953 Quando realizamos observações experimentais utilizamos instrumentos que determinam
 954 os valores de grandezas que são continuamente distribuídas. Os resultados são truncados
 955 até o limite da precisão de medida do instrumento utilizado. Por exemplo, um cronômetro
 956 usual mede intervalos de tempo com precisão de um centésimo de segundo. Isto signi-
 957 fica que intervalos de tempo menores que este valor não podem ser medidos com este
 958 instrumento. Assim, os resultados obtidos serão representados por um número finito de
 959 valores, mesmo que a variável observada seja contínua. Algumas vezes, o número de va-
 960 lores possíveis medidos, mesmo que finito, pode ser muito grande, e para estes casos é
 961 conveniente agrupa-los em intervalos. Desta forma o conjunto de medidas diferentes fica
 962 reduzido sem que a informação da amostra original seja perdida.

Consideremos novamente N medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Para estes casos, definimos como o mesmo evento todo resultado da realização do processo aleatório y que caia num intervalo de valores Δy , de forma que o evento agora será caracterizado por $\{y_i, \Delta y\}$:

$$y_i - \frac{\Delta y}{2} \leq x_j < y_i + \frac{\Delta y}{2}. \quad (7.7)$$

A probabilidade de ocorrência do evento $\{y_i, \Delta y\}$ é definida por:

$$P(y_i) = \Delta P_i \quad (7.8)$$

onde ΔP_i é a probabilidade de encontrarmos como resultado da realização do processo aleatório, valores no intervalo $\{y_i - \frac{\Delta y}{2}, y_i + \frac{\Delta y}{2}\}$. Para intervalos Δy pequenos, podemos escrever a seguinte relação:

$$P(y_i) = \Delta P_i = p(y_i)\Delta y \quad (7.9)$$

onde $p(y_i)$ é denominada de densidade de probabilidade do evento aleatório y_i . E se $\Delta y \rightarrow 0$, então ΔP_i e Δy são infinitesimais podendo escrever a densidade de probabilidade como:

$$p(y) = \frac{dP}{dy} \quad (7.10)$$

sendo que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = 1 \quad (7.11)$$

Em N repetições de um processo aleatório real, a aproximação experimental para a proba-

bilidade de realização de um evento é a frequência relativa $F(y_i)$, definida na equação 7.2. Assim, a densidade de probabilidade experimental $p_{exp}(y_i)$ de ocorrência do evento $\{y_i, \Delta y\}$ é dada por:

$$p_{exp}(y_i) = \frac{F(y_i)}{\Delta y}. \quad (7.12)$$

Para o caso contínuo e utilizando o conceito de densidade de probabilidade, o valor médio (μ) e a variância (σ^2) podem ser escritos da seguinte forma:

1. Valor médio

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy. \quad (7.13)$$

2. Variância $V[y] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 p(y) dy. \quad (7.14)$$

965 Função de Laplace-Gauss

Em muitas situações experimentais utilizamos **distribuições Gaussianas** para interpretar nossos resultados físicos, em parte porque os fundamentos teóricos das medições realizadas se correspondem com distribuições Gaussianas ou porque a experiência tem nos mostrado que a estatística de Gauss nos proporciona uma descrição razoavelmente acurada dos vários eventos reais. Na distribuição Gaussiana, a densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7.15)$$

onde μ é o valor médio e σ o desvio padrão da distribuição, dados pelas equações discutidas anteriormente.

Na Figura 7.1 apresentamos a função Gaussiana de densidade de probabilidade para a variável continua x . Esta função é também chamada de função de Laplace-Gauss ou função Normal. O gráfico da função Gaussiana é uma curva simétrica em forma de "sino" com uma altura máxima dada por $G_{max} = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$. Pode ser mostrado a partir da equação 7.15 que σ é a meia largura da curva na altura correspondente a $\sim 0,61G_{max}$ e que a área sob a curva entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ (região pintada na Figura 7.1) corresponde a 68,3% da área total. Isto quer dizer que a probabilidade de medirmos um valor no intervalo $\mu \pm \sigma$ é 68,3%. Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que a probabilidade de encontrarmos um valor entre $\mu \pm 2\sigma$ é 95,4% e entre $\mu \pm 3\sigma$ é 99,7%.

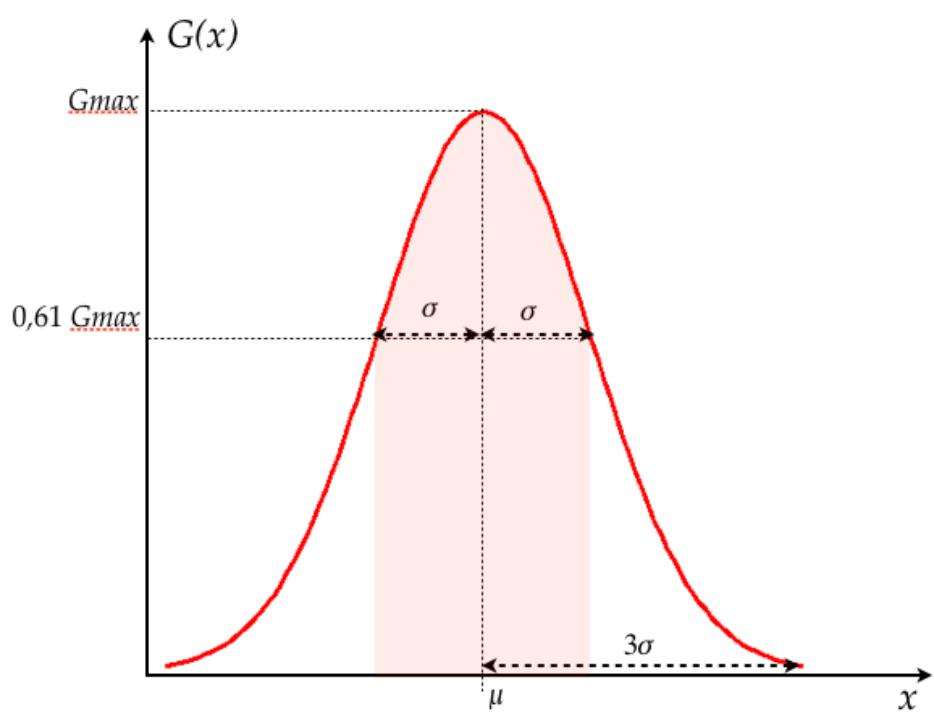


Figura 7.1: Representação da função Gaussiana.

977

978

Bibliografia

- 979 [1] Fundamentos da Teoria de Erros, José Henrique Vuolo, 2.^a Edição 1996, Editora Edgar
980 Blücher Ltda,
- 981 [2] Curso de Física Básica, – Mecânica Volume 1), H. Moysés Nussenzveig, 2.^a Edição 2015,
982 Ed. Edgard Blücher Ltda,
- 983 [3] Física I – Mecânica, Sears & Zemansky / Young & Freedman, 14.^a Edição 2016, Pearson
984 Education do Brasdil Ltda.,
- 985 [4] *Two-penny physics: Teaching 2D linear momentum conservation*, L. Galante e I. Gnesi, American
986 Journal of Physics **88**, 279 (2020).
- 987 [5] *Uma visão diferenciada sobre o ensino de forças impulsivas usando um smartphone*, V. L. B. de
988 Jesus e D. G. G. Sasaki, Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, 1303 (2016).

PARTE III

APÊNDICES



990
991

Caderno de laboratório

- 992 1. **É um documento.** Nele se tem todos os registros cronológicos de um experimentos
993 ou ideia. Portanto, deve ter datas, sem rasuras nem espaços em branco, sem inserções
994 e se possível assinado por quem realizou as anotações.
- 995 2. **É pessoal.** Pode haver outros cadernos de uso compartilhado, por exemplo, para
996 equipamentos ou instrumentos de laboratório, etc., onde se registram informações
997 de uso geral, como mudanças introduzidas em configurações experimentais ou es-
998 tado de conservação dos equipamentos. Mas o caderno de laboratório contem ideias,
999 propostas e modo de colocar a informação que são pessoais, próprias de cada pessoa.
- 1000 3. **É um registro de anotação em sequência.** Não se devem intercalar resultados nem
1001 se corrigir o que está escrito. Em caso de se detectar um erro, se anota na margem o
1002 erro encontrado e a página na qual se corrige. Isto permite saber se o erro pode-se
1003 voltar a encontrar e a partir de que dados foi corrigido. Por este mesmo motivo não
1004 se deve escrever a lápis.
- 1005 4. As páginas devem ser numeradas. Isto permite fazer referência de forma fácil e or-
1006 ganizada às anotações anteriores, assim como também indicar na margem onde se
1007 corrigem os erros.
- 1008 5. As fórmulas e figuras devem ter uma numeração consistente e interna. Um exem-
1009 plo prático é numerar todas as fórmulas dentro de cada página ou folha e citá-las
1010 por página-fórmula. É importante numerar todas as fórmulas, pois não sabemos no
1011 futuro qual necessitaremos citar ou utilizar.
- 1012 6. Referências completas. No caso em que se deva utilizar uma referência externa (ro-
1013 teiro do experimento, artigo, livro, etc.), esta referência deve ser completa. Se uma
1014 referência é citada com frequência pode-se utilizar a última página do caderno para
1015 registrá-la e citá-la por seu número. Quando citamos alguma coisa, sempre acredita-
1016 mos que vamos nos lembrar de onde saiu, mas isto só é assim a curto prazo.
- 1017 7. **Deve-se escrever todos os resultados.** Indicar sempre a maior quantidade de in-
1018 formação possível do experimento. Todas as condições experimentais devem ser

1019 corretamente registradas e deve-se utilizar diagramas claros das configurações ex-
1020perimentais e indicando também cada vez que há uma mudança. Um dado ou
1021 informação que hoje parece irrelevante em função do nosso modelo da realidade,
1022 pode resultar vital ao descobrir que nossas ideias estavam erradas ou eram incom-
1023 pletas. A falta de um dado de aparência menor pode invalidar tudo o que foi reali-
1024 zado.

1025 **8. Deve-se escrever o plano.** O que é que se pretende medir, o que é que se procura e
1026 as considerações ou razões pelas quais se faz o experimento. O planejamento do ex-
1027 perimento e as ideias a serem realizadas devem ser explícitas. A anotação sequencial
1028 permite seguir a evolução das idéias, dado vital também para interpretar os resulta-
1029 dos, pois os preconceitos condicionam o que se mede e como se mede. Saber o que
1030 se pensava no momento de medir vai nos indicar se nesse momento tivemos uma
1031 determinada precaução que depois demonstrou ser fundamental.

1032 **9. Deve-se escrever as conclusões.** O mesmo vale para o planejamento do experimento.

1033 **10. Fazer uma reorganização periódica das ideias.** Se uma ideia tem evoluído desde o
1034 inicio do experimento, é conveniente periodicamente fazer um quadro da situação,
1035 passando a limpo o que foi feito, para não ter que reconstruir a história a cada vez.



1036

1037

Como escrever um relatório?

1038 A idéia desta nota é dar aos alunos de Física Experimental I algumas dicas e recomenda-
1039 ções de como escrever um relatório. Infelizmente, não existe uma “receita” para isto, pois
1040 há várias maneiras de fazer um relatório, dependendo do tipo de trabalho realizado e de
1041 quem o escreva. Portanto, a organização do relatório pode ser diferente apresentando di-
1042 ferentes distribuições de seções. Nesta nota propõe-se uma estrutura básica com algumas
1043 sugestões, mas será com a experiência, com a prática e com as sucessivas correções do pro-
1044 fessor que os alunos aprenderão a fazê-lo. Escrever um relatório é um aprendizado que se
1045 obtém aos poucos.

1046 O ponto principal a ser tido em conta é que no relatório deve-se apresentar os resultados
1047 obtidos de forma clara e concisa. Para isto, deve-se expor cuidadosamente quais são os
1048 objetivos do trabalho realizado, os conceitos físicos básicos necessários para a realização
1049 do experimento e como ele foi realizado, entre outros. O relatório tem que ser escrito
1050 de modo que um leitor que nunca tenha realizado o experimento descrito, ou a pesquisa
1051 realizada, seja capaz de entender e até reproduzir o trabalho a partir do conhecimento
1052 adquirido na sua leitura. Para começar, sugere-se a seguinte distribuição:

- 1053 • **Título e autores:** O título deve descrever claramente o conteúdo do trabalho. O re-
1054 latório tem que ter o(s) nome(s) do(s) autor(es) e as informações relevantes referentes
1055 a ele(s).
- 1056 • **Resumo:** Deve dar uma visão completa do trabalho realizado. De forma breve, deve-
1057 se descrever qual é o objetivo do mesmo, o que foi feito e qual foi o resultado obtido.
- 1058 • **Introdução:** Nela expõem-se as motivações do trabalho e os objetivos a serem atin-
1059 gidos. Deve-se apresentar uma revisão da informação existente sobre o tema em
1060 questão. Também, deve-se incluir uma explicação teórica mínima (não copiada de
1061 livro, mas elaborada pelos alunos) que permita a compreensão do trabalho e como
1062 esta informação está aplicada ao experimento específico.
- 1063 • **Método experimental ou Descrição do experimento:** Deve-se descrever em deta-
1064 lhe a configuração experimental utilizada, os métodos utilizados para a realização

das medições, incluindo a fundamentação física. Deve-se realizar uma descrição dos aspectos relevantes dos dispositivos e equipamentos utilizados, especificando suas características importantes (precisão dos instrumentos, intervalos de medição, etc). Pode-se representar esquematicamente o dispositivo empregado para a realização do experimento de forma a acompanhar as explicações e facilitar a compreensão do leitor.

- **Resultados e discussão:** Esta seção tem que ser uma continuação natural da Introdução e do Método experimental ou Descrição do experimento. Deve-se incluir tabelas dos dados colhidos junto com as suas incertezas e a explicação de como foram avaliadas essas incertezas. Também deve ser realizada uma descrição de como a análise de dados foi realizada e como os resultados foram obtidos. Deve-se incluir também gráficos, junto com as curvas de ajuste dos dados realizados. Além da análise dos dados, é fundamental realizar uma discussão dos mesmos: sua validade, precisão e a sua interpretação. Dependendo do caso, pode-se realizar uma proposição de um modelo para a descrição dos resultados ou realizar uma comparação com o modelo teórico já discutido na introdução. Caso seja necessária a utilização de equações, elas devem estar explicitadas ou, se já foram introduzidas anteriormente (na introdução), através de uma referência ao número de equação correspondente.

Levar em conta que, dependendo do relatório e do trabalho apresentados, pode-se separar esta seção em duas independentes, uma de resultados e outra de discussões.

Figuras e tabelas: cada figura ou tabela deve estar numerada e deve conter uma legenda ao pé que permita entendê-la. A descrição detalhada da figura deve estar incluída também no texto e referenciada pelo número. Os gráficos são considerados figuras, então deverão ser numerados de forma correlacionada com as mesmas.

- **Conclusões:** Deve conter uma discussão de como a partir dos resultados obtidos mostra-se que as hipóteses e objetivos do trabalho foram satisfeitos ou não. Espera-se que a discussão do trabalho seja feita de forma crítica podendo-se propor melhorias ao trabalho realizado, tanto na metodologia empregada quanto nas propostas para ampliar o objetivo do experimento no futuro.
- **Referências:** Deve-se informar a bibliografia citada durante o desenvolvimento do trabalho. A bibliografia pode estar relacionada ao modelo teórico discutido, a referências de equipamento utilizado, ou a artigos de referência no qual o trabalho foi baseado.
- **Apêndice:** Caso seja necessário, pode-se anexar um ou mais apêndices com informação complementar que ajude a esclarecer o conteúdo das partes anteriores (cálculos realizados para obter um dado resultado, estimativa de incertezas, etc.), mas que no corpo principal do relatório desviariam a atenção do leitor. No(s) apêndice(s) coloca-se geralmente informação adicional necessária, mas não fundamental.



1103

1104

Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Se a força resultante sobre uma partícula de massa m for, \vec{F} , a segunda lei de Newton diz que:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{C.1})$$

com \vec{a} sendo o vetor aceleração da partícula. No caso de \vec{F} ser uma força constante, *viz.* não depende nem do tempo, nem da posição da partícula e nem da velocidade da mesma, da Eq.(C.1) vemos que a aceleração \vec{a} é constante. Assim, a Eq.(C.1) pode ser facilmente integrada para obtermos:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m \int_{t_0}^t \vec{a} dt \implies \vec{F}(t - t_0) = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \implies \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.2})$$

com $\vec{v} := \vec{v}(t)$ e $\vec{v}_0 := \vec{v}(t_0)$. Integrando temporalmente mais uma vez ambos os membros da Eq.(C.2) obtemos:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.3})$$

com $\vec{r} := \vec{r}(t)$ sendo a posição da partícula como função do tempo e $\vec{r}_0 := \vec{r}(t_0)$ a sua posição inicial.

Vamos supor agora que a força resultante \vec{F} é paralela à velocidade inicial \vec{v}_0 . Como a soma vetorial de vetores paralelos continua sendo um vetor na mesma direção que os vetores somados, de acordo com a Eq.(C.2), a velocidade $\vec{v}(t)$ é paralela a \vec{v}_0 para todo tempo. Portanto trata-se de um movimento retilíneo. Como também a aceleração é constante o movimento se denomina Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Sem perda de generalidade podemos chamar de eixo “y” o eixo coordenado na direção de movimento, e as equações de movimento, Eqs.(C.1) e (C.2), nessa direção são:

$$y = y_0 + v_{y0}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F}{m}(t - t_0)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$v_y = v_{y0} + \frac{F}{m}(t - t_0), \quad (\text{C.5})$$

¹¹¹⁴ com $y := y(t)$ e $v_y := v_y(t)$ e as condições iniciais, $y_0 := y(t_0)$ e $v_{y0} := v_y(t_0)$.



1115

1116

Tutorial básico de uso do aplicativo Tracker

1117 Uma vez baixada a versão do aplicativo Tracker para o sistema operacional de seu com-
1118 putador, a partir do endereço eletrônico <https://physlets.org/tracker/>, instale-o seguindo
1119 as orientações no próprio sítio da Internet. Com o aplicativo instalado, siga os sete passos
1120 descritos a seguir para realizar a tomada de dados.

1121 Passo 1: Escolha de idioma português

1122
1123 Abra o aplicativo e no caminho Edit > Language > e escolha a opção português como
1124 mostra a Figura D.1.

1125 Passo 2: Abertura do arquivo do vídeo a ser analisado

1126
1127 Para abrir o arquivo do tipo vídeo gravado com o celular faça um “click” na aba “Arquivo”
1128 e logo na aba “Abrir”. Na janela que abrirá procure onde o arquivo do tipo vídeo está guar-
1129 dado e faça “click” nele. O Tracker carrega vídeos de quase todos os formatos gravados
1130 por celulares mas os arquivos não podem ser muito grandes (o arquivo carregado nas fi-
1131 guras deste tutorial era de 1,3 MB). Se o arquivo não abre tente reduzir o tamanho dele
1132 editando o vídeo no celular, cortando as partes em que a bolinha não se move, antes da
1133 queda, ou quando já está no chão. Na Figura D.2 vemos um vídeo já aberto para análise.

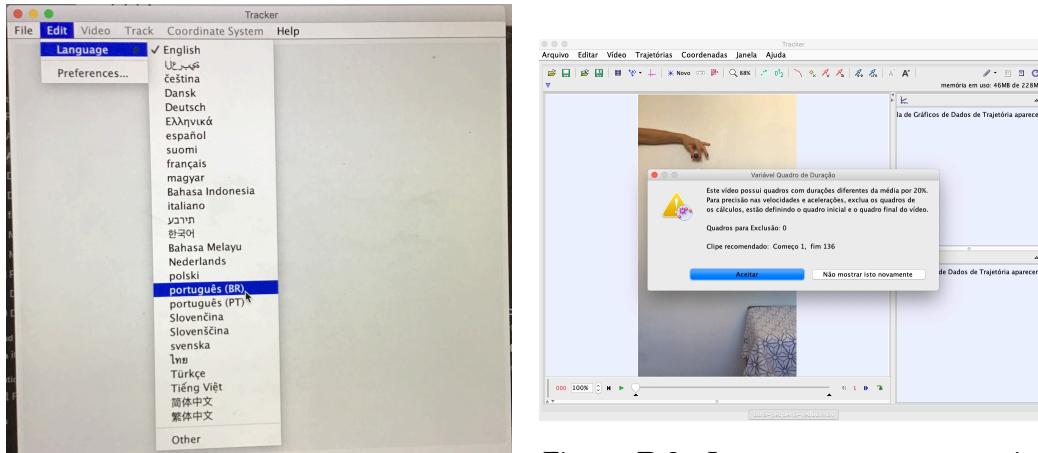


Figura D.1: Escolha de idioma no aplicativo Tracker.

Figura D.2: Ignore a mensagem na janela fazendo “click em “Aceitar”.

Passo 3: Determinação dos quadros inicial e final da análise

1135 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.3 para abrir a janela de “Ajustes
1136 de Corte de Vídeo”. Muitas vezes no lugar assinalado com uma seta vermelha na Figura
1137 D.3 aparece um valor muito próximo de 30.00/s (trinta quadros por segundo), apague o
1138 valor e coloque exatamente 30.00/s.
1139

1140 As setas verdes e laranja da Figura D.3 mostram os lugares onde deveremos colocar os
1141 valores numéricos corretos dos quadros iniciais e finais respectivamente. Para escolher o
1142 quadro inicial correto movimente o ícone preto indicado pela seta verde na Figura D.4 até
1143 ver a bolinha justa saindo da mão. Verá que o valor numérico do quadro inicial se coloca
1144 automaticamente no lugar indicado pela seta verde na Figura D.3. Para escolher o quadro
1145 final faça o mesmo com o ícone preto indicado pela seta laranja na Figura D.4. Escolha o
1146 quadro final mais o menos como no instante mostrado na Figura D.4. Finalmente feche a
1147 janela “Ajustes de Corte de Vídeo” fazendo “click em “Aceitar”.
1148

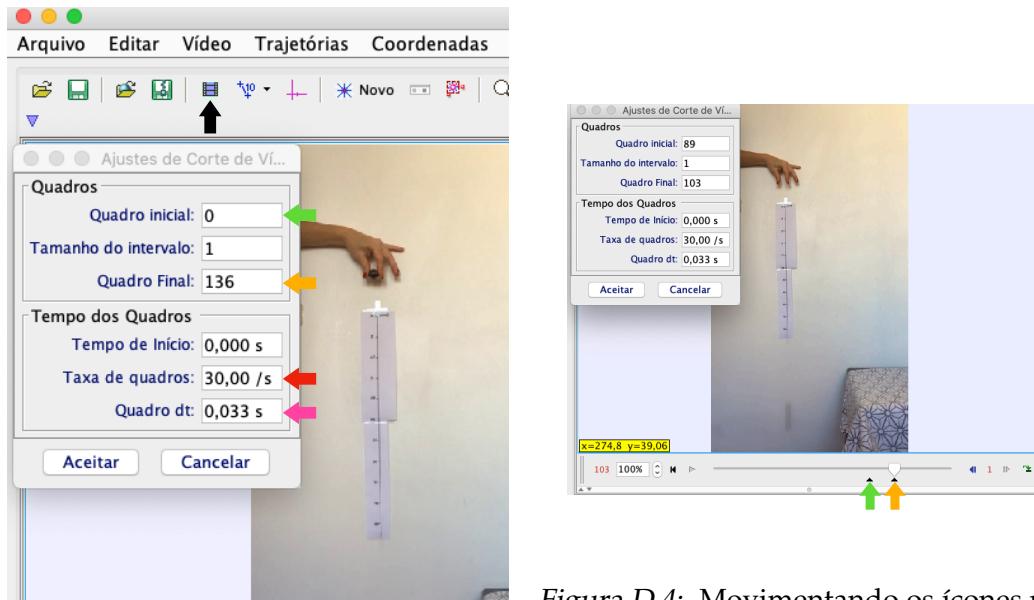


Figura D.3: Faça “click” no ícone indicado pela seta preta para abrir a janela de “Ajustes de Corte de Vídeo”.

Figura D.4: Movimentando os ícones pretos indicados pelas setas verde e laranja es-
colhemos os quadros iniciais e finais res-
pectivamente.

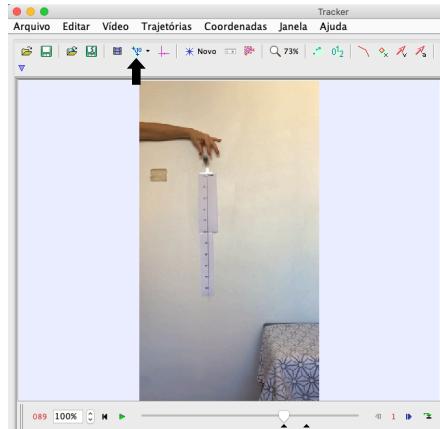
1149

Passo 4: Escolha da escala de comprimentos

1150

1151 Faça “click” no ícone indicado pela seta preta na Figura D.5 e escolha um novo “bastão de medição”. De um “zoom” na imagem escolhendo o aumento apropriado no ícone
1152 da lupa de maneira de ver claramente a região da régua na imagem do quadro inicial.
1153 Mantendo apertada a tecla “shift”do computador selecione os pontos iniciais e finais so-
1154 bre a régua como indicado na Figura D.6. Não esqueça de colocar na janela indicada
1155 nessa figura o valor real do comprimento do “bastão de medição” escolhido em metros.
1156

1157



1158

Figura D.5: Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta você pode escolher um “bastão de medição” que definirá a escala.

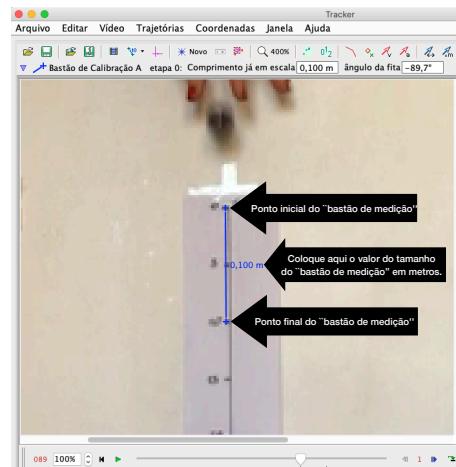


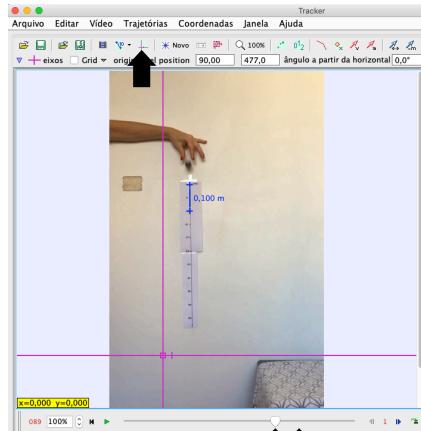
Figura D.6: Determinação do “bastão de medição” que estabelece a escala de comprimentos.

1159 Passo 5: Escolha do sistema de coordenadas

1160
 1161 Para escolher um sistema de eixos coordenados faça “click” no ícone indicado pela seta
 1162 preta na Figura D.7. Dessa forma aparecerá o sistema de eixos cor de rosa da figura. Você
 1163 pode deslocar a origem de coordenadas do sistema de eixos fazendo “click” com o botão
 1164 esquerdo do mouse do computador e arrastando a origem para o local que você desejar.
 1165 Também é possível inclinar o sistema de eixos se for necessário (nesta experiência não será
 1166 necessário) fazendo “click” com o botão esquerdo do mouse do computador em qualquer
 1167 eixo e arrastando esse eixo para obter a inclinação desejada.

1168 Passo 6: Escolha da janela de controle da massa cuja trajetória será determinada

1169
 1170 Fazendo “click” no ícone marcado pela seta preta na Figura D.8 se abrirá a janela de
 1171 controle da massa (indicada pela seta vermelha na Figura D.8, cuja trajetória será determinada
 1172 (neste caso a bolinha da figura). Fazendo “click” na seta verde você poderá escolher qual
 1173 gráfico quer visualizar uma vez escolhidos os pontos da trajetória cuja forma será ensi-
 1174 nada no próximo passo deste tutorial. Também fazendo “click” na aba “Dados” assina-
 1175 lada pela seta azul na Figura D.8 se abrirá a janela onde você poderá selecionar (seta rosa
 1176 na figura) as colunas que apareceram na janela de tabelas (indicada também na figura).



1177

Figura D.7: Para criar um sistema de coordenadas (eixos de cor rosa na Figura) faça “click” no ícone indicado pela seta preta. Logo posicione a origem de coordenadas, como mostrado na figura, arrastando com o mouse do computador o quadrado rosa no sistema de eixos.

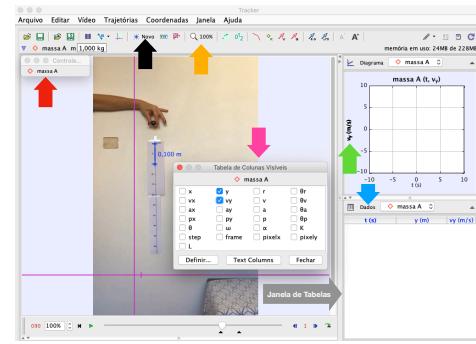


Figura D.8: Fazendo “click” no ícone indicado pela seta preta abre-se a janela indicada pela seta vermelha. Fazendo “click” no ícone indicado pela seta verde se escolhe o gráfico que quer ser visualizado após determinar os pontos da trajetória. Fazendo “click” na aba “Dados”, indicada pela seta azul, abre-se a janela indicada pela seta rosa onde podem ser escolhidas as colunas das tabelas de dados que apareceram na janela de tabelas. Se precisar fazer um zoom na imagem pode usar a aba indicada pela seta laranja.

1178 Passo 7: Determinação dos pontos da trajetória de uma partícula

1179

1180 Para determinar os pontos da trajetória em forma manual você precisará manter apertada
 1181 a tecla “shift” do computador durante todo o processo de medida . Ao apertar a tecla
 1182 “shift” você entra no modo aquisição de dados e verá que o cursor virá um quadrado
 1183 com um “x” no meio. Ao fazer “click” no ponto que você quer traçar a trajetória (no
 1184 nosso caso será o centro da bolinha) pela primeira vez se marca um ponto da trajetória e a
 1185 imagem pula automaticamente para o próximo quadro e ali você pode marcar o centro da
 1186 bolinha novamente. Repita esse processo até marcar todos os pontos da trajetória contidos
 1187 nas imagens entre os quadros iniciais e finais determinadas no passo 3 deste tutorial. À
 1188 medida que você vai marcando os pontos da trajetória as colunas nas tabelas de dados
 1189 (ver Figura D.8) vão sendo preenchidas em forma automática. No processo de medida
 1190 é importante se auxiliar da ferramenta zoom, indicada pela seta laranja na Figura D.8,
 1191 para ter uma melhor imagem da bolinha e poder determinar com melhor precisão o seu
 1192 centro. Uma vez escolhido um zoom (por exemplo 400%) para enquadrar a imagem da
 1193 bolinha arraste a imagem com o mouse. Na Figura D.9 é mostrado o final do processo de
 1194 medida. Fazendo “double click”, com o botão esquerdo do mouse, no cabeçalho de uma
 1195 coluna, na janela de tabela, você seleciona a janela e os valores ficaram da cor rosa como
 1196 estão os valores da coordenada “y” na Figura D.9. Uma vez selecionada a coluna, fazendo

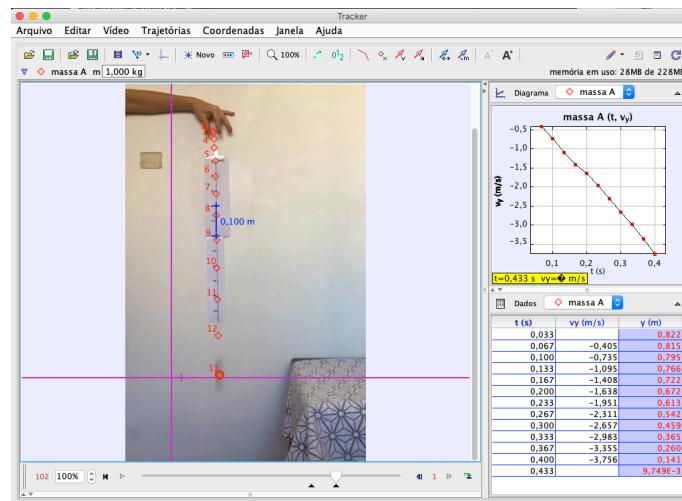


Figura D.9: Pontos da trajetória marcados e dados coletados nas colunas da janela de tabela.

1197 “click” com o botão direito do mouse você abrirá uma janela com varias opções. Na aba
 1198 “Números” você poderá escolher o formato (sem com vírgula ou ponto para separar os
 1199 decimais). Uma vez escolhido o formato você poderá copiar os dados selecionados para
 1200 serem transferidos, por exemplo, para uma planilha tipo Excel.



1201
1202

Tutorial básico de uso do aplicativo VidAnalysis

1203 VidAnalysis é um aplicativo para análise física de movimentos em vídeos muito fáceis
1204 de usar. O aplicativo é compatível com Android e pode ser baixado gratuitamente em
1205 <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.freey>, ou simplesmente
1206 pesquise no Google Play com o nome VidAnalysis free. O aplicativo possui apenas uma
1207 versão em inglês, mas devido à simplicidade de seu uso, ele não representa nenhum pro-
1208 blema.

1209 Para realizar a coleta de dados das posições do objeto gravado no vídeo, siga as etapas
1210 abaixo:

1211 Passo 1: Abertura do vídeo a ser analisado

1212

1213 Primeiro, temos que gravar um vídeo ou importar um existente. Se você decidir importar
1214 um vídeo, “click” no sinal de adição mostrado com uma seta preta na Figura E.1. Como
1215 o aplicativo VidAnalysis suporta apenas formatos de vídeo com extensão “mp4” é reco-
1216 mendável gravar diretamente dentro do aplicativo, escolhendo a opção marcada pela seta
1217 vermelha na Figura E.1. Ao capturar vídeos para análise, é importante que a câmera esteja
1218 fixa, que o movimento esteja dentro do plano da câmera, e que no vídeo gravado apareça
1219 alguma referência de um comprimento conhecido, por exemplo de uma régua.

1220 Passo 2: Calibração

1221

1222 Para começar a análise do movimento do objeto primeiramente selecionamos o vídeo no
1223 reprodutor e será aberta a primeira imagem dele como se mostra na Figura E.2. É im-
1224 portante avançar o vídeo nessa tela, para começar a coleta de dados da trajetória do objeto
1225 diretamente no momento em que o movimento começa, para isso fazemos “click” no botão
1226 mostrado pela seta verde na Figura E.2 até avançarmos ao quadro do vídeo que interessa.
1227 Fazendo “click” nos três pontos indicados pela seta azul na Figura E.2, conseguimos ocultar
1228 o menu em preto, para uma melhor visualização do vídeo.

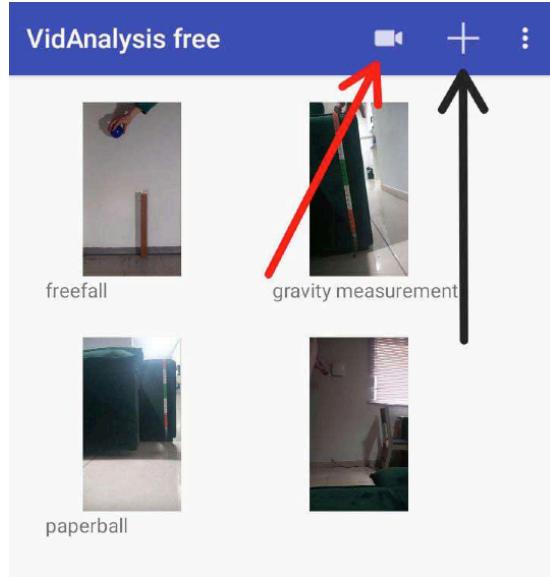


Figura E.1: Menu do aplicativo VidAnalysis.

1229 Antes da coleta de dados deve primeiro calibrar qual é a escala de comprimentos que será
 1230 usada pelo aplicativo. Para isso, fazemos “click” na aba “start analysis” no canto superior
 1231 direito na Figura E.2. Agora temos que marcar o comprimento conhecido. Ao fazer “click”
 1232 no ponto inicial do comprimento conhecido, na tela esse ponto será marcado com uma
 1233 cruz azul. Em seguida, deve fazer “click” novamente no ponto final do comprimento
 1234 conhecido e outra cruz azul indicará esse ponto. Após finalizar essa segunda marcação
 1235 abrirá imediatamente uma janela solicitando o tamanho conhecido, como mostramos na
 1236 Figura E.3. A legenda em inglês na janela pergunta “Qual é o comprimento real disto em
 1237 metros” (“How many meters is this in real” em inglês). É importante saber que a unidade
 1238 a ser usada pelo aplicativo para comprimentos é sempre metros portanto as velocidades
 1239 serão em metros por segundo por exemplo.

1240 Após dar “ok” na janela da escala aparecerá um sistema de eixos coordenados cuja origem
 1241 devemos estabelecer (ver Figura E.4). Em geral, é uma boa ideia posicionar a origem de
 1242 coordenadas de tal maneira que as coordenadas da posição do objeto sempre tenham o
 1243 mesmo sinal ao longo da trajetória.

1244 **Passo 3: Coleta de dados**

1245

1246 A coleta de dados começa fazendo um “click com o dedo no ponto do objeto que que-

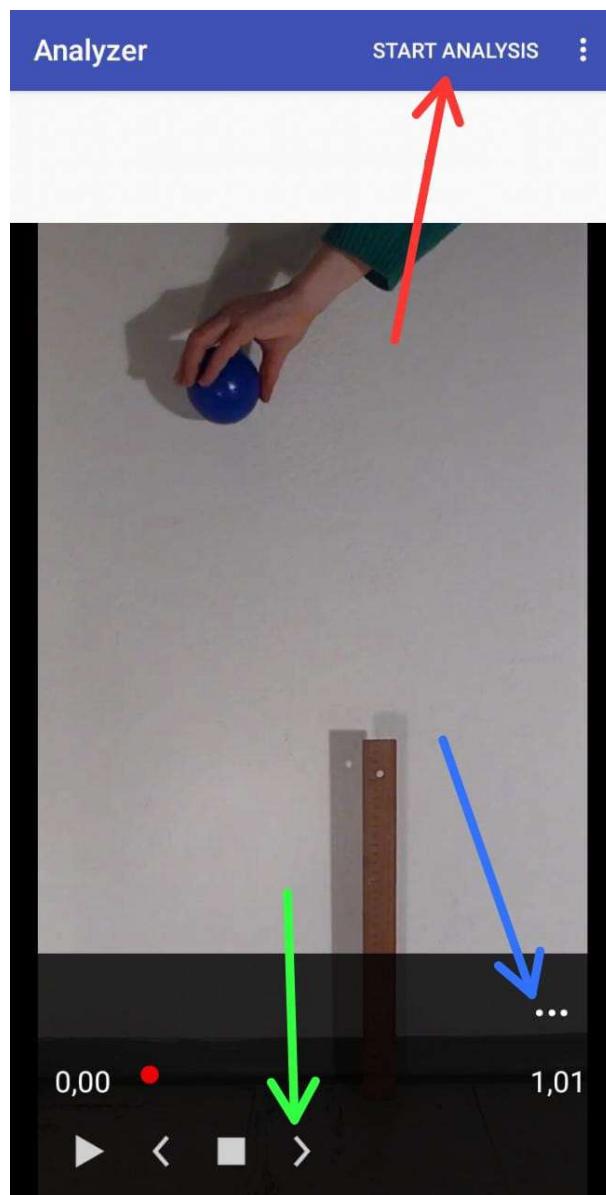


Figura E.2: Reprodutor de video do aplicativo VidAnalysis.

remos seguir a trajetória, por exemplo no meio da bolinha azul na Figura E.4. Como as marcações são feitas com o dedo sugerimos que o corpo, cuja trajetória será determinada, seja suficientemente grande. Depois que o primeiro “click” for feito, uma cruz azul aparecerá e o vídeo avançará alguns quadros. O intervalo de tempo transcorrido, medido em segundos, entre um “click” e outro é automaticamente determinado pelo programa. Vamos fazer “click” novamente tantas vezes como seja necessário para acompanhar a evolução da posição do objeto entre a posição inicial e final previamente estabelecidas. Leve em conta que para uma bolinha em queda vertical uma distância percorrida de um metro é o mínimo necessário para efetuar a análise, mas também não é necessário acompanhar todo o movimento do corpo até o chão.

Como mostrado na Figura 3.2, pode ser que ao longo da trajetória não vejamos o corpo em

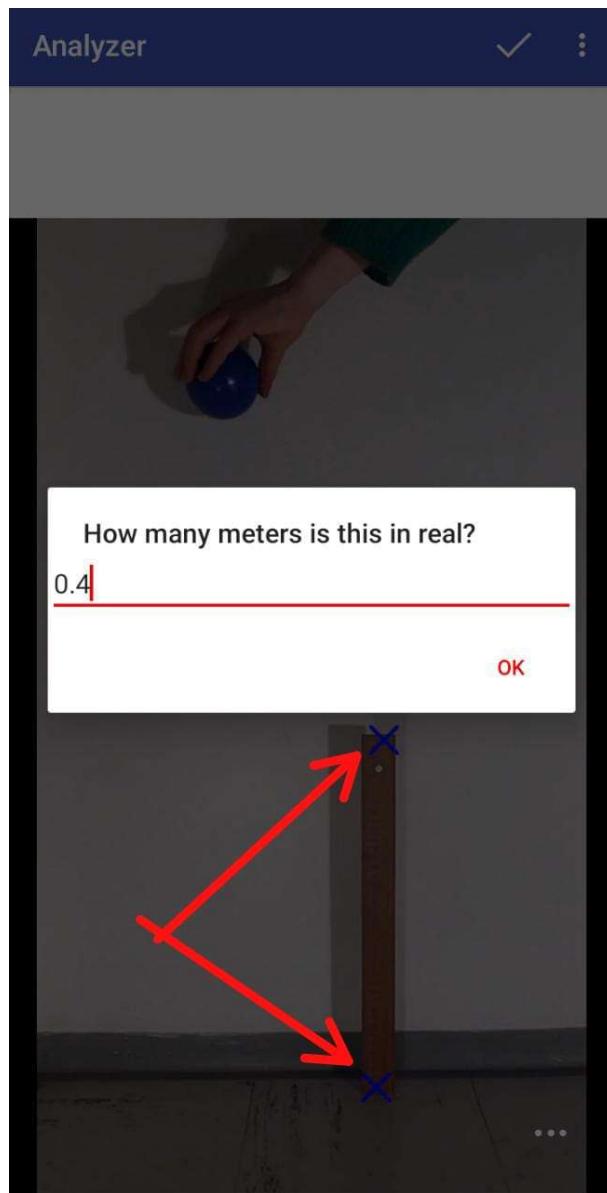


Figura E.3: Escolha da escala de comprimentos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis, a ser usado na tomada de dados dos pontos da trajetória do objeto.

1258 questão claramente definido em uma única posição, mas como uma imagem embaçada
1259 devido à alta velocidade do mesmo. Então para determinar a posição do centro da bolinha
1260 e a sua incerteza siga as orientações indicadas nessa figura e no texto ao lado dela.

1261 **Passo 4: Salvar dados**

1262

1263 Depois de determinados todos os pontos da trajetória do corpo, basta pressionar o botão
1264 “Salvar”, conforme mostrado pela seta vermelha na Figura E.4. Após o “click” se abrirá
1265 uma janela com a frase “Nome para a análise” (“Name for analysis” em inglês). Uma
1266 vez escrito o nome do arquivo de dados dê “click em “ok” e imediatamente verá uma

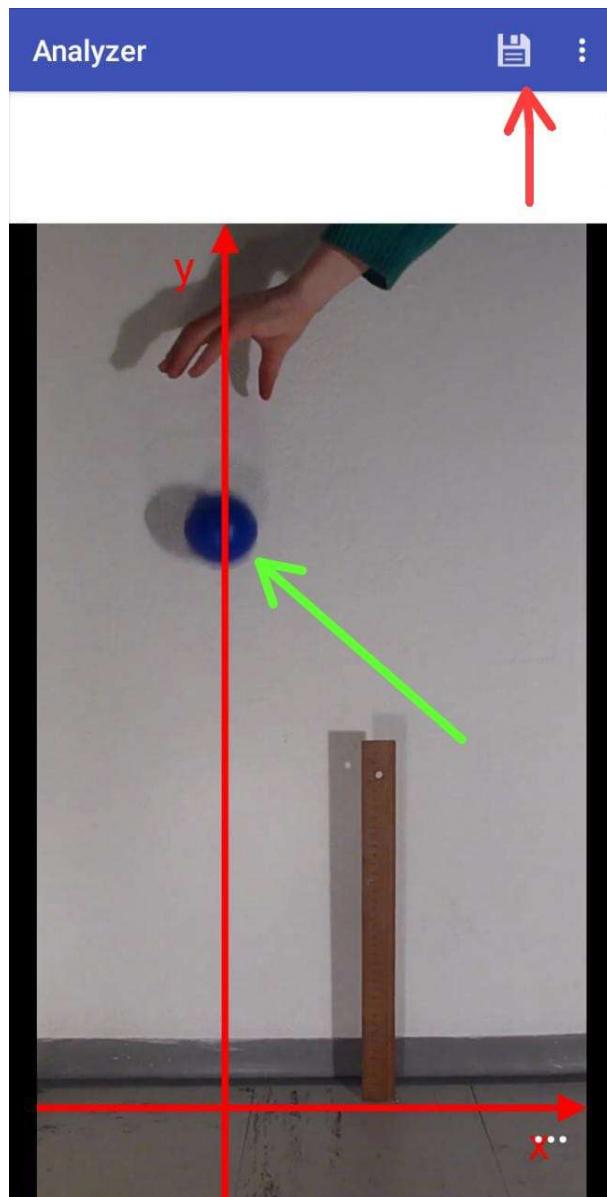
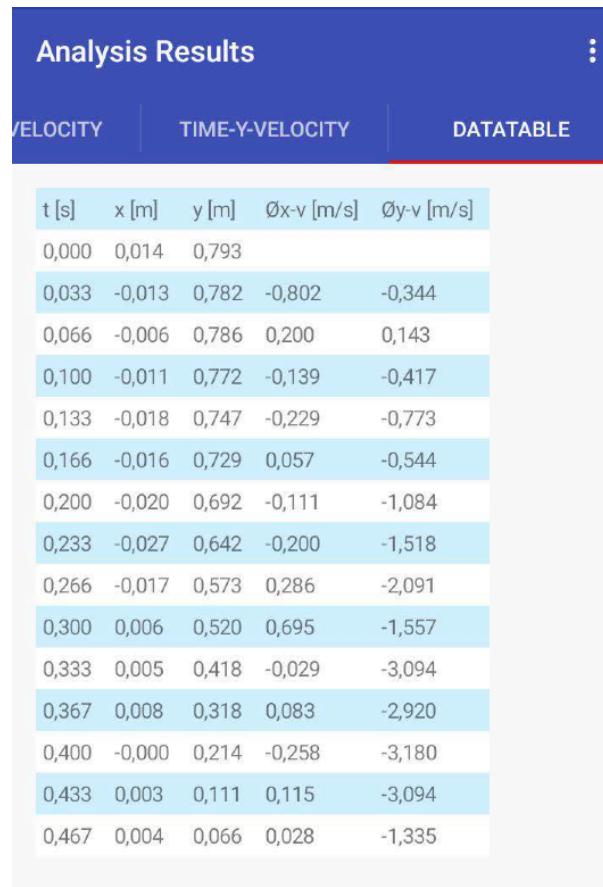


Figura E.4: Sistema de eixos no reproduutor de vídeo do aplicativo VidAnalysis.

1267 janela na qual você poderá navegar. Rolando a imagem, no final aparecerá uma tabela
 1268 com várias colunas de dados como mostrada na Figura E.5. É possível também exportar
 1269 essa tabela de dados para um arquivo que é uma planilha no formato “.cvs” (“comma
 1270 separated values”), que poderá ser lida por um programa de computador do tipo Excel.
 1271 Mas também você poderá simplesmente copiar os dados que precisará (por exemplo a
 1272 posição “ y ” como função do tempo “ t ”) numa folha de papel para continuar a análise.

1273 Note que uma vez escolhido o nome do arquivo para a tabela de dados, esta tabela é au-
 1274 tomaticamente guardada pelo aplicativo. Para cada vídeo guardado dentro do aplicativo
 1275 é possível realizar diferentes análises de dados e guardar cada um deles, dentro do aplica-
 1276 tivo, com nomes diferentes. Assim, por exemplo, na Figura E.1 vemos vários vídeos guar-
 1277 dados. Se algum desses vídeos já foi analisado, quando fizer “click nele aparecerá uma

1278 janela com várias opções de escolha. A primeira diz “Começar análises” (“Start analysis”
 1279 em inglês), o que permitirá realizar uma nova tomada de dados. Embaixo aparecem as
 1280 outras opções que são os nomes dos diferentes arquivos de dados já guardados. Fazendo
 1281 “click” num deles é possível visualizar seu conteúdo novamente. Note que desta maneira
 1282 é possível guardar a trajetória de mais de uma massa cujo movimento estiver gravado
 1283 no vídeo. Assim, por exemplo, no caso em que a colisão de dois ou mais corpos estiver
 1284 gravada no vídeo, é possível guardar os dados da trajetória de cada um deles.



t [s]	x [m]	y [m]	$\bar{O}x\text{-}v$ [m/s]	$\bar{O}y\text{-}v$ [m/s]
0,000	0,014	0,793		
0,033	-0,013	0,782	-0,802	-0,344
0,066	-0,006	0,786	0,200	0,143
0,100	-0,011	0,772	-0,139	-0,417
0,133	-0,018	0,747	-0,229	-0,773
0,166	-0,016	0,729	0,057	-0,544
0,200	-0,020	0,692	-0,111	-1,084
0,233	-0,027	0,642	-0,200	-1,518
0,266	-0,017	0,573	0,286	-2,091
0,300	0,006	0,520	0,695	-1,557
0,333	0,005	0,418	-0,029	-3,094
0,367	0,008	0,318	0,083	-2,920
0,400	-0,000	0,214	-0,258	-3,180
0,433	0,003	0,111	0,115	-3,094
0,467	0,004	0,066	0,028	-1,335

Figura E.5: Tabela de dados gerada dentro do aplicativo VidAnalysis.



1285
1286

Apêndice: $(E_f - E_i)/E_i$ a partir de traços e um ângulo

Usando as equações para conservação de momento linear e balanço de energia, a variação percentual de energia cinética na colisão com massas iguais pode ser obtida a partir dos comprimentos e ângulos representados na Figura ???. Chamando a velocidade da moeda A logo antes da colisão de v_0 , e as velocidades das moedas A e B logo depois da colisão de v_1 e v_2 , respectivamente, temos

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos(\theta) + m_2 v_2 \cos(\phi), \quad (\text{F.1})$$

$$0 = m_1 v_1 \sin(\theta) - m_2 v_2 \sin(\phi), \quad (\text{F.2})$$

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2. \quad (\text{F.3})$$

Somando os quadrados das equações para conservação de momento linear em x e em y

$$m_1^2 v_0^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi). \quad (\text{F.4})$$

Logo,

$$E_f - E_i = \frac{1}{2} m_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) v_2^2 - m_2 v_1 v_2 \cos(\theta + \phi), \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 - \frac{E_f}{E_i - E_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{v_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}}}{\left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{v_2}{v_1}} - 2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.6})$$

Se as moedas são iguais, as massas são iguais e também as forças de atrito entre cada moeda e a superfície. Neste caso, usando o teorema trabalho-energia cinética (aqui, $mv^2/2 =$

$F_{at}L)$:

$$\frac{E_f - E_i}{E_i} = \frac{-1}{1 + \frac{\sqrt{\frac{L_A}{L_B}} + \sqrt{\frac{L_B}{L_A}}}{2 \cos(\theta + \phi)}}. \quad (\text{F.7})$$

1287 A Equação F.7 mostra que, para moedas iguais, a variação percentual de energia cinética
 1288 na colisão pode ser obtida medindo apenas comprimentos e um ângulo entre trajetórias
 1289 das duas, sem nem mesmo uma calibração para os comprimentos dos traços. Os dois
 1290 parâmetros relevantes são (i) a razão entre os comprimentos dos traços depois da
 1291 colisão, L_A/L_B , e (ii) a soma dos ângulos θ e ϕ .