טריקים ותזכורות לבוחן ־ליני 2

27 ביולי 2025

גיא יער־און

חלק ראשון של הקורס: דטרמיננטות ע"ע ולכסונים

א. אם יש לי פולינום מדרגה אי זוגית וכל רכיבי המטריצה ממשיים, קיים לפחות שורש ממשי אחד כי ע"ע מרוכבים באים בזוגות. כלומר אם Z ע"ע גם $\overline{Z}$ ע"ע.

ב. התחלת שאלה טכנית? בדוק ־ אולי סכום כל השורות או העמודות זהה ־ אולי עדי החביאה ע"ע.

ג. אם כל רכיבי מטריצה ממשיים = בפרט tr וdet ממשיים. דטרמיננטה של מטריצה שאיבריה שלמים, בהכרח מס' שלם. דטרמיננטה של מטריצה שאיבריה ממשיים, תהיה ממשית.

ד. שאלות של "הוכיחו שקיים ת"מ T אינווריאנטי שמימדו...." ־ איך ניגשים לזה? אם $W = sp\{w\}$, אזי $T(w) \in W$. דהיינו יש $\lambda \in R$ כך ש$T(w) = \lambda w$ למה? כי $T(w)$ הוא איזשהי כפל בסקלר של w עצמו.

ה. בלוק ז'ורדן ־ הוא לא לכסין, יש לו ע"ע יחיד עם ריבוי n וגאומטרי 1.

ו. לזכור כי פעולות עמודה על דטרמיננטה לגיטמיות ומומלצות (אם עושים טרנספוז דטרמיננטה נשארת זהה ואז נעשה עמודת שורה כבר... ונעשה טרנספוז שוב ודטרמיננטה נשמרת)

ז. מומלץ להגדיר דברים להפרכות כמו $A = 3I$ ואז $f(x) = x - 3$ מקיים $f(A) = 0$. שימושי.

ח. קצת ליני 1 ־ לא לשכוח $N(A) = 0$ אמ"מ A הפיכה. אם ידוע כי $rankA \neq n$ אזי בוודאות אינה הפיכה וכן 0 ע"ע וכן דטרמיננטה 0 וכיף לנו יש לנו מלא נתונים.

ט. נניח ויש שאלה שנדרשים להראות הפרכה למשהו כמו $A = B^2$ ב$\mathbb{R}$, לנסות להגיע למצב שהדטרמיננטה של A שלילית! ואז $-a = |B|^2$ בסתירה. $(a > 0)$.

י. אם x אינו ע"ע אזי $A - xI$ הפיכה בוודאות כי הדטרמיננטה אינה אפס. אם כן ע"ע אזי $A - xI$ הפיכה.

יא. אומרים לכסינה? משולשית? ישר לכתוב לפי ההגדרה $A = P^{-1}BP$ ואולי זה יעזור. בהרבה שאלות מנסים לשבור את הראש ואז בסוף זה לפי ההגדרה.

יב. מטריצות אלכסוניות הן מתחלפות $AB = BA$ ־ קל להוכיח זאת עם סיגמה לפי הגדרת כפל מטריצות ־ שהרי הסקלרים שם יכולים להתחלף.

יג. אם הדטרמיננטה שונה מאחד, בוודאות המטריצה אינה דומה להופכית שלה. (כי אז הדטרמיננטות שלהן שונות ־ והן לא דומות)

יד. הלמה השימושית!! היא שימושית מאוד ־ אם מימדים שווים ויש הכלה ־ אזי יש שוויון.

טו. קשור ללינארית 1 אבל טוב לזכור (אותי זה בלבל), $dim(\mathbb{F}_n[x]) = n + 1$

טז. משפט דה מואבר מהתיכון: הפתרונות למשוואה $X^n = a$ הם:

$$x_i = \sqrt[n]{a}cis(\frac{360k}{n})$$

יח. למטריצות דומות אין בהכרח אותם ו"ע

יט. המטריצה שכולה אחדות - $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ שונה מאפס, אך $adjA = 0$ (מוזמנים לבדוק)

כ. העתקות לינאריות:

* חישוב פולינום אופייני: ניקח בסיס B ונחשב פ"א של $[T]_B^B$
* ו"ע או מ"ע: ניקח בסיס B נחשב את המרחב העצמי של $[T]_B^B - \lambda I$, פתרונות משוואה אלו הם הוקטורים העצמיים של T ביחס לקורדינטות של B! לכן נצטרך אותם לכפול באיברי בסיס.
* לכסון אופרטור - ניקח בסיס B (או סטנדרטי), נלכסן את $[T]_B^B$, עמודות המטריצה המלכסנת הן קורדינטות הבסיס המלכסן (הם הו"ע הרי) ולכן נכפול באיברי הבסיס על מנת לקבל את הבסיס המלכסן.

כא. ניפוליטנטית $\Longleftarrow$ 0 ע"ע יחיד $\Longleftarrow P_A(x) = x^n \Longleftarrow A^n = 0$ (קיילי)

כב. המטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ אינה לכסינה לכל $b \neq 0$, תמיד יהיה ע"ע אחד a, הפ"א יהיה x^2אך הר"ג יהיה 1 שונה מר"א 2.

כג. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ לא לכסינה לא מעל הממשיים ולא מעל המרוכבים, אך $A^2 = 0$. שימושי

כד. אם A לכסינה וכל הע"ע שלה הם ב-$\{-1,1\}$ אזי $A^2 = I$. הוכחה-

$$A^2 = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}D^2P = P^{-1}P = I$$

שכן $D^2 = I$ כיוון שאלכסונית ואם כל ע"ע הוא בתחום שלנו בריבוע נקבל תמיד 1.

כה. כל מטריצה אידמופוטנטית $(A = A^2)$ תהיה לכסינה שכן נקבל

$$f(x) = x(x-1)$$

מאפס את A ולכן פ"מ מתחלק בו והוא בוודאות מלל שונים.

כו. אם אנחנו יודעים במהלך חישוב הדטרמיננטה כי $(x-5)$ למשל הוא גורם שהצלחנו להוציא החוצה, למשל

$$\begin{matrix} & x-2 & 4 & 5 & \\ (x-5)| & & x & & | \\ & & & x-1 & \end{matrix}$$

אזי $x-5$ מחלק את הפ"א ולכן 5 הינו ע"ע.

כז. אם A שלישה/לכסינה - אזי גם A^2. קל להוכיח זאת לפי הגדרה. הכיוון השני - לא בהכרח נכון.

כח. זכור - אם נתון משהו כמו $A^2 = -I$ אזי $-I$ הפיכה ולכן גם A^2הפיכה כלומר $A * A$ הפיכה ולפי לינארית 1 זה גורר שכל אחת מהמכפלות הפיכה כלומר A הפיכה ולכן $rankA = n$ ועוד מלא דברים...

כט. תזכורת - מרחב שורות ומרחב עמודות: מדרגים, מרחב השורות זה השורות עם הציר בצורה המדורגת. מרחב העמודות זה העמודות עם הציר במטריצה המקורית.

ל. אם אנחנו ב$F^{n\times n}$ ונתון $A^n \neq 0$ אזי היא לא ניפוליטנטית

לא. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת $A^2 = I$.

לב. $rank(A^2) \leq Rank(A)$

לג. כאשר מעלים בלוק ז'ורדן של אפס בריבוע הדרגה שלו יורדת באחד.

לד. הוכח הפרך - קיימת מעל המרוכבים מטריצה שמקיימת $A^n = J_n(0)$

הפרכה: נב"ש שקיימת. אזי 0 ע"ע יחיד שלה. כלומר $P_{A^n}(x) = x^n$ ולפי קיילי המילטון $(A^n)^n = 0$ כלומר $A^{n^2} = 0$ כלומר $m_A(x)|x^{n^2}$ כלומר ע"ע יחיד של A הינו אפס ולכן $P_A(x) = x^n$ ונקבל לפי קיילי המליטון $A^n = 0$ בסתירה ל$A^n = J_n(0) \neq 0$.

לה. לזכור - A לכסינה גורר A^k לכסינה ההפך לא נכון.

לו. $(AB)_{ij} = R_i(A)C_j(B)$.

לז. תעזר בלמה השימושית - שימושי מאוד להוכחת הכלה ושוויון מימדים.

לח. תמיד כשתראה משוואה $X^2 = X$ או בסגנון תלכסן.

לז. אם איברים תלויים לינארית - קיים צירוף לא טריוואלי שמניב אפס.

לח. אם הע"ל $T : V \to W$ הפיכה אזי $dimW = dimV$. אם הע"ל חח"ע אזי $dimW \leq dimV$ ואם הע"ל על אזי $dimW \leq dimV$. כמו כן אם הע"ל על אזי $dimImT = dimW$ וכן אם הע"ל חח"ע אזי $KerT = \{0\}$.

חלק שני של קורס - ממ"פ נורמות ומלא כיף

1. העתקה בין בסיסים או"נ היא העתקה אוניטרית

2. משום מה לא למדנו אבל שימושי: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. כשנרצה להשתמש נוכיח $T^*(T^{-1})^* = I$ ואז היא אכן ההופכית שלה -

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = I$$

שכן השתמשנו בכך ש$(AB)^* = B^*A^*$.

3. אינטואיציה להפרכות של מטריצה נורמלית - קחו מטריצה אלכסונית עם 2 ע"ע ממשיים (או יותר תלוי בסדר המטריצה) שונים, היא לכסינה, שווה לטרנספוז צמוד שלה.

4. המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת $A^2 = I$ (בין היתר גם היא הרמיטית ואוניטרית).

5. טריקים ושטיקים לפיתגורס וכו - כשאנחנו עובדים בתוך ביטוי עם נורמה ורוצים להגיע לפיתגורס, תמיד כדאי לנסות להוסיף ולחסר ואז לא שינינו את הביטוי, אך ייתכן שקיבלנו שני איברים מאונכים.

6. לזכור $ImT = ImT^*$ עבור העתקה נורמלית - יש להוכיח זאת אם משתמשים.

7. שאלות אחרונות: לנסות תמיד טריקים עם לכסון או"נ. לפי הגדרה ומשחקים שם עם הביטויים.

8. דרך להוכיח צל"ע - $< T(v), u >=< v, T(u) >$ לכל $v, u \in V$.

9. $(R(A)^{\perp}) = N(A)$ וכן $(C(A))^{\perp} = N(A^t)$ - ראינו בתרגול.

10. עבור אופרטור נורמלי - $KerT^k = KerT = KerT^* = (KerT^*)^k$ ובדומה עבור Im - יש להוכיח טענה זו באינדוקציה אם משתמשים.

11. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ היא צל"ע אך לא אוניטרית.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ לא לכסינה לא או"נ ולא או"ג לא מעל הממשיים ולא מעל המרוכבים - אבל $A^2 = 0$.

13. ההיטל אידמפוטנטי - כי ההיטל פשוט שייך למרחב והיטל של משהו ששייך למרחב הוא הוא בעצמו.

14. זכור! TT^* זו הרכבה!!!!!! לא כפל!!!!!

15. מטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אמנם ממשית אבל שני ע"ע מרוכבים $\pm i$.

16. מטריצה זו אוניטרית - $\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

17. לזכור שעבור ההיטל $p = \Pi_U(v)$ מתקיים $v - p \perp U$ כלומר $\forall u \in U :< v - p, u >= 0$ כלומר $v - p \in U^\perp$.

18. במשוואות - תפעיל צמוד על שני האגפים. בשנייה סיימת.

19. $[I]_B^B$ עבור B כלשהו תמיד אלכסונית והיא פשוט I.

20. מטריצת גראם היא צמודה לעצמה - ולכן לכסינה.

21. מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix}$ מקיימת $A^2 = I$ אך איננה אוניטרית.

22. הבינום של ניוטון - $(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

מעברים חשובים:

א. $||Tv||^2 =< T(v), T(v) >=< v, T^*T(v) >$

ב. $||T^*v||^2 =< T^*v, T^*v >=< v, TT^*v >$

ג. נשים לב כי $< A^*Ax, x >=< Ax, Ax >= ||Ax||^2$. הוכחה - אנו יודעים כי $< Bu, v >=< u, B^*v >$. אם נסמן $B = A^*, u = Ax, v = x$ נקבל בדיוק את השוויון.

ד. נשים לב כי $< AA^*v, v >=< A^*v, A^*v >$

הוכחות שימושית למבחנים שכדאי לדעת ולזכור :

א. $(ImT)^\perp = KerT^*$:

$\subseteq$: יהי $v \in KerT^*$. כעת יהי $T(v) \in ImT$. נראה כי

$$\forall v \in V :< T(v), v >=< v, T^*(v) >=< v, 0 >= 0$$

ואכן לכל $T(v)$ (כל התמונה) מתקיים שv מאונך עם חבריה ולכן $v \in (ImT)^\perp$

$\supseteq$: יהי $u \in ImT^\perp$, אזי

$$\forall v \in ImT :< T(v), u >= 0 =< v, T^*(u) = 0$$

לכל v שווה אפס, לכן $T^*(u) = 0$ ואכן $u \in KerT^*$.

ב. $ImT^* = KerT^\perp$.

הוכחה: נעזר בסעיף הקודם ונפעילו על T^* ונקבל $(ImT^*)^\perp = KerT^{**}$ כלומר $(ImT^*)^\perp = KerT$ ואם נפעיל $\perp$ נקבל $ImT^* = KerT^\perp$.

ג. משתי הטענות מעלה ניתן להוכיח 1. $dimImT = dimImT^*$ וכן $dimKerT = dimKerT^*$.

נראה כי $(ImT)^\perp = KerT^*$ גורר $ImT = (KerT^*)^\perp$

$$dimKerT = dimV - dimKerT^\perp = dimV - dim(ImT^*)$$

$$dimKerT^* = dimV - dimKerT^{*\perp} = dimV - dim(ImT)$$

כמו כן לפי משפט הדרגה נקבל $dimV = dimKerT + dimImT$. נציב זרת במשוואה ראשונה ונקבל

$$dimKerT = dimKerT + dimImT - dim(ImT^*)$$

וע"י העברת אגפים נקבל

$$dimImT = dimImT^*$$

כעת מהמשוואה מעלה נקבל גם כי $dimKerT = dimKerT^*$.

ג. איך מוכיחים גודל ערך עצמי של מטריצה אוניטרית הוא 1?

$$||Av||^2 =< Av, Av >=< v, A^*Av >=< v, v >$$

מצד שני

$$< Av, Av >=< \lambda v, \lambda v >= \lambda\overline{\lambda} < v, v >$$

סה"כ

$$|\lambda|^2 < v, v >=< v, v >\Longrightarrow |\lambda| = 1$$

ד. עבור אופרטור נורמלי $KerT = KerT^*$ (טענה זו ניתנת להכללה באינדוקציה פשוטה)
יהי $v \in KerT$. אזי $T(v) = 0$. נראה כי $0 =< 0, 0 >=< T(v), T(v) >=< v, T^*Tv >=< v, TT^*v >=< T^*v, T^*v >= ||T^*v||^2$ כלומר $||T^*v||^2 = 0$ ונקבל $T^*v = 0$ כלומר $v \in kerT^*$. באינדוקציה ניתן להכליל לכל חזקה T^k.

ה. עבור אופרטור נורמלי $ImT = ImT^*$.
הוכחה: יודעים כי $dimImT + dimKerT = dimV$ ובדומה $dimImT^* + dimKerT^* = dimV$ ומהשווין של סעיף ד' נוכל לקבוע $dimImT = dimImT^*$. כעת יש להראות הכלה:
יהי $T(v) \in ImT$. אזי נזכר בסעיף ב' ($ImT^* = KerT^{\perp}$) ונראה שזה שקול להוכיח שהוא או"ג עם מישהו מהגרעין. וכן הראינו סעיף קודם $kerT = KerT^*$ לכן שקול הדבר להוכיח כי $T(v) \in KerT^{*\perp}$. ובכן - יהי $u \in KerT$. נוכיח $< T(v), u >= 0$. ובכן

$$0 =< v, 0 >=< v, T^*u >=< T(v), u >$$

כנדרש, כלומר $T(v) \perp u$ ולכן $T(v) \in KerT = KerT^* = ImT^{\perp}$
סה"כ הראינו הכלה ושוויון מימדים - וסיימנו.

ו. טענה - $(W + U)^{\perp} = W^{\perp} \cap U^{\perp}$**.**
הוכחה בהכלה דו כיוונית:
$\subseteq$: יהי $v \in W^{\perp} \cap U^{\perp}$. בפרט $v \in W^{\perp}$ ולכן $\forall w \in W :< v, w >= 0$ בפרט $v \in U^{\perp}$ ולכן $\forall u \in U :< v, u >= 0$ סה"כ $\forall u \in U, w \in W :< v, u > + < v, w >= 0 \Longrightarrow < v, u + w >= 0$ כלומר $\forall u + w \in U + W :< v, u + w >= 0$ ולכן $v \in (U + W)^{\perp}$.

$\supseteq$: יהי $v \in (W+U)^{\perp}$. אזי $\forall u+w \in U+W :< v, u+w >= 0$, בפרט נכון הדבר עבור $u=0$ יתקיים $\forall w \in W :< v, 0+w >= 0$ כלומר $v \in W^{\perp}$ ובדומה עבור $w=0$ נקבל $v \in U^{\perp}$ סה"כ $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ כנדרש.

ז. טענה $R(A) = N(A)^{\perp}$

נראה $N(A) \subseteq R(A)^{\perp}$

יהי $v \in N(A)$. אזי $Av = 0$ כלומר $R_i(A)v = 0$. נכון הדבר לכל $1 \leq i \leq n$ כלומר $\forall 1 \leq i \leq n :< R_i(A)v, v >= 0$ ולכן $v \in R(A)^{\perp}$.

קל להראות שוויון מימדים לכן מיותר לכתוב כאן.