פורד פרקלסון עלול להכשל

16 בינואר 2026

גיא יער־און.

מבוא

כפי שראינו בהרצאה, פורד פרקלסון תמיד יסיים את ריצתו על רשת זרימה $(G = (V, E), c, s, t)$ בתנאי כי פונקציית הקיבול של הרשת $C : V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ תקיים כי לכל $(u, v) \in V \times V$ מתקיים $c(u, v) \in \mathbb{Z}^+$. ראינו גם, כי גם אם $c(u, v) \in \mathbb{Q}^+$ פורד פרקלסון יסיים את ריצתו. עם זאת, עבור מספרים אי רציונליים פורד פרקלסון עלול שלא לסיים את הריצה.

דוגמה נגדית

נתבונן במספר $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. מספר זה נקרא יחס הזהב והוא מקיים את המשוואה $\phi^2 + \phi - 1 = 0$. כלומר, $\phi^2 = 1 - \phi$.

תהי רשת הזרימה הבאה: $(G = (V, E), c, s, t)$:

$$V = \{s, t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

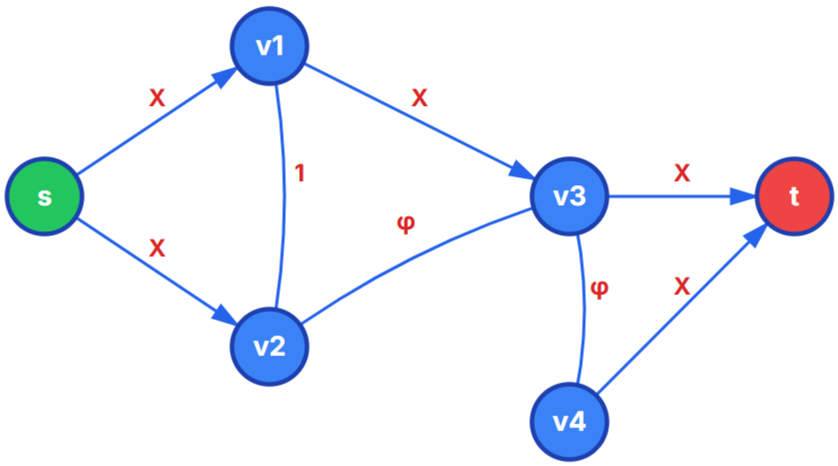
$$E = \{(s, v_1), (s, v_2), (v_1, v_3), (v_4, t), (v_3, t), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_4, v_3)\}$$

נגדיר X כמספר מאוד גדול. ונגדיר את פונקציית הקיבול כך:

$$c(s, v_1) = c(s, v_2) = c(v_1, v_3) = c(v_4, t) = c(v_3, t) = X$$

וכן:

$$c(v_2, v_1) = 1, c(v_2, v_3) = \phi, c(v_4, v_3) = \phi$$



הגדרה 1. נגדיר את המסלולים הבאים:

מסלול P_1 - $s \to v_1 \to v_3 \to t$ אשר נעביר עליו זרימה בגודל 1. (הקיבולים הינם $X > 1$).
במסלול זה מתקיים $|f| = 1$. באמצעות הזרמה על מסלול זה נוצרה קשת שיורית מv_3 אל v_1.

מסלול P_2 - $s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to t$ אשר נעביר עליו גם זרימה בגודל 1. באמצעות הזרמה על מסלול זה נוצרה קשת שיורית מv_1 לv_2.

נסמן: $a = (v_2, v_1)$ כך ש$c(a) = 1$. $b = (v_2, v_3)$ כך ש$c(b) = \phi$. וכן $c = (v_4, v_3)$ כך ש$c(c) = \phi$.

באיטרציה הראשונה נבצע את מסלול P_1. באמצעותו, נוצרת קשת אחורית (v_3, v_1) בקיבול 1.

באיטרציה השנייה, נבצע את מסלול P_2, באמצעותו, הקשת a הופכת לרוויה, ונוצרת קשת אחורית (v_1, v_2) בקיבול 1.

נתבונן במסלול איטרציה 3: $s \to v_2 \to v_3 \to v_1 \to v_3 \to t$ בקיבול ϕ

לאחר איטרציה זו: הקשת $b = (v_2, v_3)$ נותרה בקיבול שיורי ϕ והפכה לרוויה, לכן נוצרה קשת אחורית (v_3, v_2). וכן, נוצרה קשת אחורית נוספת בכיוון (v_3, v_1) בקיבול ϕ.

באיטרציה 4 נבצע את המסלול: $s \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to t$, בקיבול 1. לאחר איטרציה זו הקשת a חוזרת להיות זמינה בקיבול 1.

מכאן, באופן כללי, האלגוריתם יבצע באופן איטרטיבי בכל איטרציה n:

1. להזרים ϕ^n על מסלול שעובר דרך $v_2 \to v_3$
2. להזרים ϕ^n על מסלולים שעוברים דרך $v_3 \to v_1$

הזרימה הכוללת מתכנסת אל:

$$|f^*| = 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + ... = \frac{1}{1 - \phi} = \frac{1}{\phi^2}$$

אך האלגוריתם לעולם לא יסיים, שכן הסדרה אנסופית ובכל איטרציה מוסיפים זרימה חיובית.