הסתברות - סיכומי הרצאה למבחן

22 ביוני 2025

הסיכום נכתב בזמן ההרצאה, ולכן ייתכן כי נפלו בו טעויות (על אחריותכם בלבד)

מבוא להסתברות: מרחב מדגם, הסתברות מותנית, תלות ואי תלות, קומבינטוריקה (הרצאות 1-2)

מרחב מדגם

תיאור אוסף התוצאות האפשריות. זו קבוצה שנסמנה כ-Ω ועבורה מתקיים:
1. איבריה זרים - כלומר אם תוצאת הניסוי $A\in\Omega$ אזי לא ייתכן כי $B\in\Omega$.
2. כיסוי כל האפשרויות - ניתן להצביע על איבר בקבוצה שהוא התוצאה

דוגמאות -
* יהי מטבע. הניסוי - המטבע מוטל. $\Omega=\{H,T\}$
* תינוק בא לעולם. $\Omega=\{B,G\}$

מאורע: תת קבוצה של מרחב המדגם. ההסתברויות יינתנו למאורעות ע"י הגדרת פונקציית ההסתברות, שתתן לכל מאורע הסתברות בין אפס לאחד.
כלומר פונקציית ההסתברות היא: $f:\Omega\longrightarrow[0,1]$ כאשר $P(A)=0$ ייאמר כי למאורע אין סיכוי להתקיים (למשל הסיכוי שנוציא שטר של 005 שקלים), וכאשר $P(A)=1$ ייאמר כי בוודאות המאורע יקרה - למשל, השמש תופיע הבוקר בשמיים.

אקסיומות ההסתברות:

1. אי שליליות: $P(A)\geq 0$ לכל מאורע A.
2. נורמליזציה: $P(\Omega)=1$
3. אדטיביות: לכל זוג מאורעות המקיימים $P(A\bigcap b)=\emptyset$ יתקיים כי $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

מסקנות:
1. $P(A)+P(\overline{A})=1$
2. $P(\emptyset)=0$
3. לכל k מאורעות זרים בזוגות יתקיים כי $P(A_1\bigcap A_2\bigcap...\bigcap A_K)=P(A_1)+....+P(A_K)$
4. $A\subseteq B\Longrightarrow P(A)\leq P(B)$
5. $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$.
6. $P(A\bigcup B)\leq P(A)+P(B)$
7. הכלה והדחה - $P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(\overline{A}\bigcap B)+P(\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap c)$ וניתן להכליל ליותר מאורעות...

דוגמה חשובה:

יש לנו מרובע במערכת הצירים שהקודקוד השמאלי למטה שלו הוא בראשית הצירים ורדיוסו אחד.
נזרוק חץ ונרצה לחשב הסתברויות.
נשתמש בזוג סדור ־ (x,y) כאשר $0 \leq x,y \leq 1$.
ולמשל ־ נרצה לחשב את הסיכוי ש $P(\{(x,y)|x+y \leq \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
כלומר נחשב את השטח של המשולש שווה השוקיים ששוקו היא $\frac{1}{3}$.
* לזכור כי טוב ־ ההסתברות לזרוק מטבע k פעמים עד שנקבל משהו היא $(\frac{1}{2})^k$.

הסתברות מותנית:

נסמן כך ־ $P(A|B)$ והמשמעות היא "מה הסיכוי של A בהינתן ש־B קרה".
הנוסחה להלן ־
$P(A|B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}$
*נדרוש כי $P(B) > 0$.
כל האקסיומות מתקיימות גם כאן ־
* $0 \leq P(A|B) \leq 1$
*$P(\Omega|B) = 1$
*$P(B|B) = 1$
* אם $A \bigcap C = \emptyset$ אז $P(A\bigcup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$.

דוגמה טובה:

מאורע A־ יש מטוס בשמיים.
מאורע B־ מכ"ם מאתר עצם בשמיים.
נתון: A קורה בהסתברות של 50.0 , המכ"ם מזהה מטוס כאשר יש מטוס בשמיים בהסתברות של 99.0 ומכריז על זיהוי מטוס כאשר אין בהסתברות של 1.0.
מצא: $P(A|B)$.
פתרון: נתון כי ־ $P(A) = 0.05, P(B|A) = 0.99, P(B|\overline{A}) = 0.1$
מכאן ש ־ $P(B|A) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A\bigcap B) = P(A) * P(B|A)$
כעת, $P(B) = P(A\bigcap B) + P(\overline{A}\bigcap B) = 0.99 * 0.05 + 0.95 * 0.1 = 0.145$
ומכאן, $P(A|B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)} = \frac{0.0495}{0.145} = 0.34$
מש"ל.

משפט ההסתברות השלמה:

תהי חלוקה של מרחב המדגם Ω למאורעות $A_1, A_2, ...A_n$. כמו כן, לכל i נתון $P(A_i)$ וכן $P(B|A_i)$.
אזי ־
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P(B|A_i)$.

כלל בייס:

מתקיים כי ־ $P(A|B) = \frac{P(B|A)*P(A)}{P(B)}$
באופן כללי בהינתן חלוקה של מרחב המדגם Ω למאורעות מתקיים כי ־
$P(A_i|B) = \frac{P(B|A)*P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)*P(B|A_k)}$

תלות ואי תלות מאורעות

הגדרה־ יהי Ω מרחב מדגם ויהיו A,B מאורעות. נאמר כי אלו מאורעות בלתי תלויים אם מתקיים $P(A\bigcap B)=P(A)*P(B)$. ההגדרה שקולה גם ל ־ $P(A|B)=P(A)$
נאמר כי הם תלווים, אם השוויון לא נכון.
טענה־ יהיו A,B מאורעות כך ש־$P(A\bigcap B)=P(A)*P(B)$, אזי ־ $P(A\bigcap \overline{B})=P(A)*P(\overline{B})$

אי תלות מותנית:

יהי Ω מרחב מדגם ויהיו A,B,C מאורעות. בהינתן שקרה מאורע C , נאמר כי A וB בלתי תלווים בהתניה C אם מתקיים ־
$P(A\bigcap B|C)=P(A|C)*P(B|C)$

אי תלות בין אוסף מאורעות:

הגדרה ־ תהי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$סדרת מאורעות ממרחב המדגם, נאמר כי כלל המאורעות בלתי תלויים זה בזה אם מתקיים ־
$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)$.

קומבינטוריקה

מתקיים כי בהינתן קבוצה בגודל A כאשר $A\sqsubseteq\Omega$ $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$
1. עקרון ספירה ־ בהינתן r מס' השלבים וn_iמס' האפשרויות בכל שלב, מס' האפשרויות הכולל הוא $\prod_{k=1}^{r}n_k$.
דוגמה ־ אם יש לי שלוש חולצות, 2 משקפיים ו7 מכנסיים. מס' האפשרויות הכולל שלי הוא $2*3*7=42$.
2. תמורות: פרמוטציות. מס' הדרכים לסדר n אובייקטים ־ $n!$
מס' תתי הקבוצות של $|A|=n$ ־ 2^n.
3. צירופים ־ $\binom{n}{k}$ ־ מס' תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n. (יענו, ספירה ללא חזרה וחשיבות)
דוגמה חשובה ־
ניסוי הטלות בלתי תלויות של מטבע זהה. $P(H)=p$.
א. מה ההסתברות שיצא K פעמים H?
ב. מה ההסתברות לקבל רצף $THTHHH$?
נענה קודם על ב ־
הסיכוי עבור T הינו $1-p$ ולכן ־
$P(THTHHH)=(1-p)(p)(1-p)(p^3)=p^4(1-p)^2$
־♡־ כי זו ההסתברות לכל מחרוזת עם שני T ו־4 H .
כעת נענה על א־
נגדיר מאורע A־ מס' הפעמים שיצא H הוא k.
$P(A)=\sum p^k*(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ ־ מדוע זו התשובה? אנחנו סוכמים את כל הרצפים הקיימים a עם k פעמים בדיוק H . כמה כאלו יש? $choose$....
חשוב מהתרגול:
* בשביל ששלוש מאורעות יהיו בלתי תלווים נדרוש כי $P(A\bigcap B\bigcap C)=P(A)*P(B)*P(C)$ וכן שכל זוג מאורעות יהיה בלתי תלווים אחד בשני!
$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

נוסחת ברנולי

ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות להצלחה היא p היא ־
$P_n(k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$.

מקדם מולטינומי

נתונים n חפצים וr אנשים. מתקיים כי האיש ה־i מקבל n_iחפצים כך ש ־ $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$.
אזי, מס' החלוקות החוקיות של חפצים לאנשים היא ־
$C = \frac{n!}{n_1! * ..... * n_r!}$

נושא 2: משתנים רנדומיים, משתנים רנדומיים בדידים, פונקציית מסת ההסתברות, משתנה בינומי, גאומטרי, ברנולי ותוחלת. (הרצאה 3)

הגדרה ־ משתנה רנדומי משייך ערך מספרי לתוצאה ממרחב המדגם. הוא פונקציה ממרחב המדגם אל $\mathbb{R}$.
דוגמה: יש 4 אנשים , נבחר אחד ונמדוד את משקלו.
דוגמה נוספת: נטיל קוביה, את התוצאה נעלה בריבוע.
סימון: את המשתנה הרנדומי נסמן ב־X ואת ערכו ב־x כלומר $X = x$.
־$\heartsuit$־ לאותו מרחב מדגם אפשר להגדיר מס' רב של משתנים רנדומיים וכן ניתן להגדיר פונקציה ממשתנה רנדומי לרנדומי אחר.

משתנה רנדומי בדיד (רלוונטי למחצית הראשונה של הקורס):

פונקציית מסת ההסתברות ־
נתון מרחב המדגם Ω ומשתנה מקרי x
נסמנה כ־P_xוהיא מוגדרת לכל ערך x אפשרי של X . כך ־
$P_x : \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.
כלומר,
$P_x(X) = P(X = x) = P(\{a \in \Omega | X(a) = x\})$
נתבונן בדוגמה, הטלנו קוביה והעלנו את התוצאה בריבוע.
$P_x(36) = P(X = 36) = P(\{\frac{\sqrt{36}}{|\Omega|}\}) = P(\frac{6}{36}) = \frac{1}{6}$
אכן הסיכוי לקבל 36 הוא רק מהמס' 6 שסיכוי לקבל אותו הוא אכן שישית.
תכונות:
1. $\sum_x p(x) = 1$
2. $P_x(X) \geq 0$

סוגי משתנים:

1. **משתנה ברנולי ־** משתנה רנדומי X הוא משתנה ברנולי עם פרמטר $p \in [0,1]$ אם מתקיים כי הסיכוי לתוצאת הניסוי היא הצלחה או כשלון. כלומר, הסיכוי להצלחה הינו p ולכשלון $1-p$.
שימוש ־ הטלת מטבע.
*משתנה אינדיקטור ־ I_A. מקבל 1 אם התקיים מאורע A ומקבל 0 אם מתקיים $\overline{A}$.
2. **משתנה בדיד אחיד ־** משתנה רנדומי X הוא משתנה אחיד עם פרמטרים a,b כאשר $a \leq b$ אם ערכו של המשתנה הוא מס' המקיים $a, a+1, ...b$ כאשר לכל מס' ההסתברות זהה.

ההסתברות למאורע שתוצאתה w ממרחב המדגם תהיה $\frac{1}{b-a+1}$.
דוגמה - הטלת קוביה כאשר $a=1, b=6$, ואכן לכל הצדדים בקוביה שווה סיכוי שווה ליפול.
3. **משתנה בינומי:** הניסוי יהיה n הטלות בלתי תלויות כאשר מתקיים $P(H)=p$. המשתנה המקרי הבינומי X הוא מס' ה-H שיצאו בניסוי, אזי
$P_x(k)=\binom{n}{k}*p^k*(1-p)^{n-k}$
4. **משתנה גאומטרי:** הניסוי כעת הוא אנסוף האלות מטבע בלתי תלויות כאשר המטבע מקיים $P(H)=p$. המשתנה המקרי הגאומטרי X הוא מס' ההטלות עד שיוצא H בפעם הראשונה בניסוי.
$P_x(k)=(1-p)^{k-1}*p$

תוחלת

ה"ממוצע" של תוצאות המשתנה המקרי.
הגדרה: $E[X]=\sum_x x*P_x(X=x)$
תכונות -
1. $x\geq 0 \Longrightarrow E[x]\geq 0$
2. $a\leq x\leq b \Longrightarrow a\leq E[x]\leq b$
3. אם c קבוע אז $E[c]=c$.

דוגמות לחישובי תוחלת -

1. תוחלת משתנה ברנולי -
$E[x]=1*p+0*p-1=p$
2. תוחלת משתנה אחיד בקטע $[0,n]$ -
$P_x(i)=\frac{1}{n-0+1}=\frac{1}{n+1}$
$E[x]=0*\frac{1}{n+1}+1*\frac{1}{n+1}+....+n*\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}*(0+1+2+...+n)=\frac{1}{n+1}*\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}$
דוגמה - תוחלת קוביה הוגנת:
$E[x]=1*\frac{1}{6}+...+6*\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.5$

הערות חשובות -

*** במשתנה מקרי בדיד טווח הערכים שצריך להתקבל הוא בן מניה. (למשל - מס' רכבים על כביש 4)**
לפונקציית ההסתברות נקרא PMF.
עבור חסם עליון נגדיר פונקציית הצטברות/התפלגות CDF - $F_X(t)=P(x\leq t)$ כלומר ההסתברות של כל מי שקטן מ-t.
ומה אם נרצה לחשב את ההסתברות לקבל ערך גדול ממשהו? $P(x>t)=\overline{F_X(t)}=1-P(x\leq t)$
ועבור חישוב ערכים בקטע - $(a,b]$ - כלומר $P(a<x\leq b)=F_x(b)-F_x(a)$
----
*ניסוי ברנולי - קיימים רק 2 תוצאות אפשריות - כשלון או הצלחה. נסמן הסתברות להצלחה ב-p .
התפלגות בינומית - התפלגות בדידה המתארת את מס' ההצלחות בסדרה של n ניסויי ברנולי.
ההסתברות להצלחת k ניסווים בדיוק של הצלחות ללא חשיבות לסדר -
$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
* **התוחלת של משתנה גאומטרי עבור מס' הכשלונות עד להצלחה** הינה $E[x]=\frac{1-p}{p}$. מדוע? סה"כ אנחנו סופרים את התוחלת פחות המקום האחרון ששם יש כשלון ולכן $E[X]=\frac{1}{p}-1=\frac{1-p}{p}$
***התפלגות מולטינומית:** הכללה של התפלגות בינומית. תוצאת סדרה של n ניסויים בלתי תלווים. נניח שיש r תוצאות אפשריות וההסתברויות לתוצאות הן $p_1,....p_r$.

אזי - $P(x_1=n_1,....x_r=n_r)=\frac{n!}{n_1!*....*n_r!}*p_1^{n_1}*...p_r^{n_r}$
(למשל - בטורניר הפועל ומכבי משחקים 5 פעמים.מה ההסתברות שהפועל תנצח 3 פעמיים, מכבי פעמיים, תיקו פעם אחת.... וכו')

הרצאה 4: שונות, סטיית תקן ומשפט התוחלת השלמה

♡- **חשוב** - בהינתן X משתנה מקרי ויהי $Y=g(x)$ אזי $E[Y]=\sum_y y*p_y(y)=\sum_x g(x)*p_x(x)$ כלומר, נחשב את הערך של y כפול המסה של x. (יתרון - לא נזדקק לחשב את המסה של y).
טענה - $E[Y]=\sum_x g(x)*p_x(x)$
♡- פונקציית מסת ההסתברות של משתנה x היא - $\sum_x x*p_x(x)$ כלומר סכום הממוצע כל ההסתברויות של x.
♡- יש לשים לב כי $E[g(x)]\neq g(E[X])$
♡- לינאריות התוחלת: $E[aX+b]=aE[X]+b$

שונות (Var)

נרצה לראות כמה דברים הם שונים וכמה הם קרובים זה לזה - נמדוד זאת מבחינה מספרית.
באמצעות מס' אחד נדע כמה הדברים שונים בתהליך ההסתברותי.
נמדוד את השוני של הPMF של שני משתנים מקריים x,y כך- נסמן $E[X]=\mu$ ונראה כי
הגדרת השונות - $Var[x]=E[(X-\mu)^2]$
זהו מדד לכמה נהיה רחוקים בניסוי החוזר על עצמו מס' פעמים.
סטיית תקן - $\sigma_x=\sqrt{Var[X]}$
♡- חישוב השונות - $Var[x]=E[(X-\mu)^2]=\sum_x(x-\mu)^2p_x(x)$
*למשל - בהינתן הטלת קוביה $E[X]=3.5$, נקבל כי $Var[x]=\sum_1^6(k-3.5)^2*\frac{1}{6}=2.9$ וכן סטיית התקן $\sigma_X=\sqrt{2.9}=1.7$

טענה: $Var[aX+B]=a^2Var[x]$
טענה: $Var[x]=E[X^2]-(E[X])^2$

שונות של משתנה ברנולי:

$Var[X]=p(1-p)$
הוכחה - $Var[x]=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)$. נשים לב כי $X=X^2$ עבור משתנה ברנולי! מדוע? $1^2=1$ וכן $0^2=0$ ולכן עבור משתנה ברנולי מתקיים $X=X^K$ עבור $K\in\mathbb{N}$. ומכאן כמובן כי $E[X]=E[X^K]$.
נשים לב כי ניתן להתייחס אל $Var[x]=p-p^2$ כפרבולה ולמצוא את הערך המקסימלי של השונות עבור $p=\frac{1}{2}$. (מה שמאוד הגיוני), כלומר $Var-Max=\frac{1}{4}$ עבור משתנה ברנולי ולכן $Var[x]\leq\frac{1}{4}$.

שונות של משתנה אחיד:

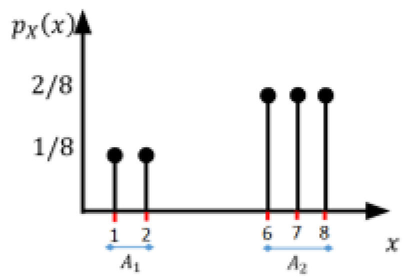
נסתכל עליו כמשתנה עם פרמטרים $a=0,b=n$.
נקבל כי $Var[x]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{1}{12}n(n+2)$
עבור a,b כלליים: $Var[x]=\frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)$

משתנה רנדומי מותנה במאורע:

נזכר כי ללא התניה $P_x(x) = P(X = x)$
בהינתן מאורע A מתקיים כי $P_{x|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\}\bigcap A)}{P(A)}$
כמו כן $\sum_x p_{x|A}(x) = 1$
וכן $E[X|A] = \sum_x xp_{x|A}(x)$
וכן $E[g(x)|A] = \sum_x g(x)p_{x|A}(x)$
דוגמה - יש לנו קוביה עם 4 פאות, קל לחשב הכל. בהינתן $x \geq 2$ כעת נעלם האפשרות של 1 ולכן הסתברות כל אחת מהקוביות הנותרות תעלה ל-$\frac{1}{3}$.

משפט התוחלת השלמה:

נחלק את מרחב המדגם לקבוצות $A_1, ...A_n$ ואז מתקיים כי $E[X] = P(A_1) * E[X|A_1] + ... + P(A_N) * E[X|A_N]$.
דוגמה - (נשים לב כי כל אחד משני המאורעות הבודדים הם אחידים)



$P(A_1) = \frac{1}{4} \quad P(A_2) = \frac{3}{4}$

$E[X|A_1] = 1.5$

$E[X|A_2] = 7$

$E[X] = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{45}{8}$

משתנה גאומטרי - התניה וחסר זכרון

נזכר כי המטבע מקיים $P(H) = p$ וX הוא מס' ההטלות עד שנקבל H לראשונה. ולכן $P(x) = (1-p)^{k-1}p$ כאשר $k \in \mathbb{N}$.
נשים לב כי גם $X - 1$ (כלומר לאחר שנכשלנו וקיבלנו T פעם אחת) גם הוא משתנה גאומטרי! כאשר בפעם הראשונה ידוע שנכשלנו.
(דוגמה טובה - סטודנט יצא מהכיתה לשירותים ובנתיים ליעם הטיל מטבע בכיתה ונכשל. כעת הסטודנט חוזר, מבחינתנו זה ההטלה הראשונה כעת בזמן שבפועל ליעם מטיל בפעם השנייה - הסטודנט יסתכל על זה כמשתנה גאומטרי שהתחיל כעת)
**תכונה חשובה - משתנה גאומטרי הוא "חסר זכרון"
למשל נחשב $P_{X-1|x>1}(3) = P(x-1 = 3|x > 1) = P(T_2T_3H_4) = (1-p)^2p = P_x(3)$ - כלומר זו דוגמה יפה שאכן משתנה גאומטרי חסר זכרון!
ובאופן כללי - $P_{X-n|x>n}(k) = P_x(k)$
*בהינתן $X > n$ אזי $X - n$ הוא משתנה גאומטרי עם פרמטר p.

תוחלת של משתנה גאומטרי: $E[X] = X[1 + X - 1] = 1 + E[X - 1] = 1 + (*)pE[X - 1|X = 1] + (1-p)E[X - 1|X > 1] = 1 + 0 + (1-p)E[x] \Longrightarrow E[X] = \frac{1}{p}$
כאשר המעבר ב(*) היה לפי משפט התוחלת השלמה.

משתנים מקריים מרובים:
מה עושים בהינתן שני משתנים מקריים?!...

נגדיר את פונקציית מסת ההסתברות המשותפת.
$P_{x,y}(x,y) = P(X = x\&Y = y)$
כלומר, אילו ערכים סביר ששני המשתנים יקבלו ביחד! אנחנו לא מדברים על תהליכים שונים.
כלומר - מה ההסתברות שגם X וגם y יהיו זוגיים?..
תכונה -
$\sum_x \sum_y p_{x,y}(x,y) = 1$.
בהינתן פונקציית $joint$ נקרא ל$P_x(x)$ ול$PMF\ p_Y(y)$ שוליים. והם יתנהגו כמו הרנדומיים שכבר ראינו.
כמו כן -
1. $P_x(x) = \sum_y p_{x,y}(x,y)$
2. $P_y(x) = \sum_x p_{x,y}(x,y)$

את אותו התהליך ניתן להכליל לn משתנים מקריים.
$P_{x_1,....x_n}(x_1,...x_n) = p(X_1 = x_1\&....\&X_n = x_n) = \sum_{x_1} ..... \sum_{x_n} p_{x_1,...pxn}(x_1,...x_n)$

תוחלת של שני משתנים מקריים:

למשל - התוחלת של $X+Y$.
נגדירה כך -
$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)p_{x,y}(x,y)$
ליניאריות תוחלת לשני משתנים - $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
טענה: $E[E[X|Y]] = E[X]$

תרגילים טובים מהתרגול:

תרגול 5 - תרגיל 8

התרגיל: מטילים קוביה הוגנת בעלת 6 פיאות עד אשר יתקבל 6 בפעם הראשונה. מהי תוחלת מספר הפעמים שיצא 1?
פתרון: נסמן X= מס' הפעמים שיצא 1. Y= אורך המשחק.
X לא גאומטרי, נראה כי: $Y \sim G(\frac{1}{6})$, וגם $X|_{Y=y} \sim (y-1, \frac{1}{5})$ מדוע פחות אחד? כיוון שאנחנו סופרים מס' פעמים שיצא 1, עד שלא יוצא אחד ולכן נוריד את הפעם האחרונה.
היו $y-1$ הטלות קודמות ולכן נראה כי כיוון שמתפלג בינומית,

$$E[X|Y=y] = \frac{y-1}{5}$$

אם נסמן: $h(y) = \frac{y-1}{5}$ נראה כי $E[X|Y] = H(y) = \frac{Y-1}{5}$
מכאן,

$$E[X] = E[E[X|Y] = E[\frac{Y-1}{5}] = \frac{1}{5}E[Y] - \frac{1}{5}E[1] = \frac{1}{5} * \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{1}{5} = 1$$

תרגול 6 - תרגיל 1

מדריך טיולים מנסה להוציא קבוצה לסיור בהרים ביום שאינו גשום. ההסתברות לכך שיום יהיה לא גשום היא p. מזג האויר בימים שונים הינו ב"ת. בכל יום שהקבוצה לא יוצאת לסיור, עליהם לשלם לבית המלון 2000 (שימו לב: ביום בו הם יוצאים, הם אינם צריכים לשלם לבית המלון).

א. מהי תוחלת הכסף שהקבוצה תצטרך לשלם לבית המלון?

נגדיר: X- מס' הימים עד שהקבוצה יוצאת לסיור.

Y- סך הכסף שהקבוצה תצטרך לשלם.

נראה כי (כיוון שגם היום האחרון נספר בx)

$$Y = 2000(x-1)$$

X מתפלג גאומטרית, נגדיר כי הצלחה זה יום לא גשום. אנחנו נספור את מס' הכשלונות שלנו עד שנצא לסיור. כלומר -

$$E[Y] = E[2000(X-1)] = 2000E[X] - 2000 = 2000(\frac{1}{P}) - 2000$$

תזכורת: אם $X \sim Geo(p)$ **אזי** $Var[x] = \frac{1-p}{p^2}$

ב. מצאו את $V[Y]$-

$$V[Y] = V[2000(X-1)] = 2000^2V[X-1] = 2000^2V[X] = 2000^2 * \frac{1-p}{p^2}$$

תרגול 6 - תרגיל 3

קונים סופגניה בלי להסתכל. בסכוי של P קיבלנו סופגניה ריקה ובסכוי $1-P$ קיבלנו סופגניה עם ריבה. ממשיכים לקנות סופגניות עד אשר תצא לנו סופגניה ריבה. ידוע שהשונות של מספר הסופגניות עם ריבה שנקנה (משמע, ללא מניית הפעם האחרונה) היא 12. מצא את p.

פתרון: נגדיר X- מס' הסופגניות עם ריבה שנקנה.

נראה כי $x \sim Geo(p)$ ולכן

$$12 = Var[x] = \frac{1-p}{p^2}$$

נפתור משוואה ריבועית ונקבל: $p = \frac{1}{4}$.

תרגול 6 - תרגיל 4

מטילים קוביה הוגנת בעלת 6 דפנות עם הערכים: $12, 24, 36, 48, 60, 72$. מה השונות של תוצאת הטלת הקוביה? (הקוביה מוטלת פעם אחת)

תזכורת: עבור משתנה $x \sim U[a,b]$ **מתקיים כי** $Var[x] = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

פתרון: נגדיר את המשתנים הבאים. X= הטלת קוביה עם הערכים $1,...6$, וכן $Y = 12x$ אצלנו.

נרצה לחשב $Var[Y] = Var[12X] = 12^2Var[x] = 12^2 * \frac{35}{12} = 420$

תרגול 6 - תרגיל 5

בבריכת דגים יש 99 דגים, מתוכם 33 דגי זהב והשאר לא. ביולוג מבצע n דגימות אקראיות של דגים, אחת אחת. אם מדובר בדג זהב – הוא מקבל 3 משאלות ולאחר מכן מחזירו לבריכה. עבור איזה ערך של n סטיית התקן של כמות המשאלות שהביולוג יקבל תהיה 6?

תזכורת: עבור $X \sim Bin(n,p)$ מתקיים $Var[x] = np(1-p)$

פתרון: נגדיר X= מס' דגי זהב שנשלפו. נראה כי $X \sim Bin(n, \frac{1}{3})$ כי יש 33 דגי זהב מתוך 99. מכאן, Y= כמות המשאלות. $Y = 3X$.

$$6^2 = Var[Y] = Var[3X] = 3^2 Var[x] = 9Var[x] = 9(\frac{n}{3} * \frac{2}{3}) = 2n$$

$$36 = 2n \Rightarrow n = 18$$

סיכום - תוחלת ושונות עבור סוגי המשתנים שלנו

א. **משתנה גאומטרי:** $X \sim Geo(p)$ הוא משתנה חסר זכרון! מס' הפעמים עד להצלחה הרצויה. כאשר נגדיר p הוא ההסתברות להצלחה יתקיים

$$P_x(k) = (1-p)^{k-1} * p$$

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

ב. **משתנה בינומי:** משתנה $x \sim Bin(n,p)$. n הטלות בלתי תלויות כאשר הסיכוי להצלחה הוא p.

$$P_x(k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

$$E[X] = np$$

$$Var[X] = np(1-p)$$

ג. **משתנה ברנולי:** הסיכוי להצלחה הוא p והסיכוי לכשלון $1-p$, כלומר שתי אפשרויות בלבד הצלחה או כשלון. כמו במטבע.

$$E[X]=p$$

$$Var[x]=p(1-p)$$

ד. **משתנה אחיד:** משתנה אחיד יוניפורמי $X\sim U[a,b]$ אם ערכו של המשתנה הוא מס' המקיים $a,a+1,...b$ כאשר לכל מס' ההסתברות זהה.

$$p(x)=\frac{1}{b-a+1}$$

$$E[X]=\frac{a+b}{2}$$

$$Var[x]=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$$

הרצאה 5:

* **טענה:** משתנה הוא חסר זכרון $\Longleftrightarrow$ הוא משתנה גאומטרי.

טענה: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

וכן לכל $X_1,....X_n$ מתקיים

$$E[X_1+....+X_n]=E[X_1]+.....+E[X_n]$$

תוחלת מותנית:

$$E[X]=\sum_x xp_x(x)\Longrightarrow E[X|A]=\sum_x xp_{X|A}(x)$$

נתבונן בדוגמה: ℓ מס' שלם חיובי. דני בוחר מס' שלם בין 0 ל100 בסבירות שווה ולאחר מכן יוסי בוחר מספר בין 0 לבין המספר שדני בחר בסבירות שלמה. מה תוחלת המספר שבחר יוסי? נסמן ב־X את המס' שבחר יוסי ובY את אורך המספר שבחר יוסי.

$$p_{x,y}(x,y) = p_{y|x}(y|x) * p_x(x)$$

$$p_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(\ell+1)(x+1)} & 0 \le y \le x \le \ell \\ 0 & ow \end{cases}$$

$$E[Y] = \sum_x p_x(x) E[Y|X=x] = \sum_x \frac{1}{\ell+1} * \frac{X}{2} = \frac{1}{2} \sum_x \frac{1}{\ell+1} * x = \frac{1}{2} E[X] = \frac{\frac{\ell+0}{2}}{2} = \frac{\ell}{4}$$

*הערה: זה משתנה יוניפורמי, ולכן התוחלת של x כדקלמן מעלה. כמו כן הסיכוי לתפוס מס' הוא בהתאמה $\frac{1}{x+1}$ וכו'.. ולכן כך נראית הפונקציה.

אי תלות בין מאורע A ומשתנה מקרי X

$$\forall x, P(X=x, and - A) = p(X=x) * p(A) = p_x(x) * p(A)$$

אי תלות בין שני משתנים מקריים x וy:

$$\forall x, \forall y P(X=x, Y=y) = P(X=x) * P(Y=y)$$

בכדי להראות תלות מספיק להראות שקיים ערך אחד של x שתלוי בערך אחד של y!
דוגמה טובה - כשהם לא תלויים צריך לעבור על כל הזוגות

y \ x	1	2	3	4
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	
3	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$
2		$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$
1		$\frac{1}{20}$		

	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
x	1	2	

האם תחת התניה קיימת אי תלות בין X ו-Y?

ידוע כי: $X \le 2, Y \ge 3$ נסמן כמאורע A

בכדי להראות <u>אי תלות</u> תחת התנאי יש להראות <u>לכל ערך</u> של X ו<u>לכל ערך</u> של Y בתחום:

$$p_{X,Y|A}(x,y) = p_{X|A}(x) \cdot p_{Y|A}(y)$$

$$p_{X,Y|A}(1,4) = \frac{P(X=1, Y=4, A)}{P(A)} = \frac{1/20}{9/20} = \frac{1}{9}$$

$$p_{X|A}(1) = \frac{3}{9}, \qquad p_{Y|A}(4) = \frac{3}{9}$$

$$p_{X|A}(1) \cdot p_{Y|A}(4) = \frac{1}{9}$$

אי תלות ותוחלת:

טענה: אם X וY הם בלתי תלויים, אזי

$$E[XY] = E[X] * E[Y]$$

כמו כן, אם X וY בלתי תלויים, אזי

$$E[g(X) * h(Y)] = E[g(x)] * E[h(y)]$$

טענה: אם X וY הם בלתי תלויים אז:

$$Var[X + Y] = Var[x] + Var[y]$$

חוקי Var:

$$Var[x + a] = Var[x]$$

$$Var[aX] = a^2 Var[x]$$

חוקי E:

$$E[aX + Y] = aE[X] + E[Y]$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

בעיית הכובעים - תרגיל קשה

n אנשקים זורקים את הכובעים שלהם לקופסה. לאחר מכן כל אחד לוקח כובע אקראי. X משתנה מקרי שערכו הוא מס' האנשים שקיבלו את הכובע שלהם. נסמן בi את הכובע של איש i. תוצאה היא תמורה של המספרים מ-1 עד n.

חוק הסתברות: כל תמורה בעלת הסתברות שווה של $\frac{1}{n!}$

התהליך: איש i ניגש לקופסא ולקח כובע. נראה כי בהינתן 3 אנשים שניגשים לפי הסדר, הרצף $2, 1, 3$ יהי בהסתברות של $\frac{1}{3} * \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{3!}$ וזה זהה לרצף $1, 2, 3$....

צריך למצוא את $E[X]$.

נראה כי

$$X_i = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & i-get-i \\ 0 & o.w \end{array} \right\}$$

כלומר כל X_i הוא משתנה ברנולי. נראה כי הם גם תלויים כי אם איש 01 קיבל את כובע 7, איש 7 לא יקבל את כובע 7. כך נוכל לתאר את X כסכום משתנים ברנוליים.
נגדיר A־ מאורע שהכובע של אדם i פנוי. לפי נוסחת ההסתברות השלמה ־

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1|A) * P(A) + P(X_i = 1|\overline{A}) * P(\overline{A})$$

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1|A) * P(A) + 0 * P(\overline{A})$$

כאשר ה־0 נובע מכך שאם מישהו לקח את הכובע שלי כבר ההסתברות היא 0 שאקבלו. בנוסף, ההסתברות שבאמצע היא כאשר $i-1$ אנשים לפני לקחו כובעים ולכן נותרו $n-(i-1)$ כובעים.

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1|A) * P(A) = \frac{1}{n-(i-1)} * p(A)$$

$$p(A) = \frac{n-1}{n} * \frac{n-2}{n-1} * .... * \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} = \frac{n-(i-1)}{n}$$

כאשר המעבר למעלה הוא כי האדם הראשון לקח כובע שאינו שלו, כלומר יש סיכוי לכך של $n-1$ כובעים מתוך הn וכן הלאה...

$$P(X_i = 1) = P(X_i = 1|A) * P(A) = \frac{1}{n-(i-1)} * \frac{n-(i-1)}{n} = \frac{1}{n}$$

וכן X_iמשתנה ברנולי ולכן

$$E[X_i] = \frac{1}{n}$$

וסה"כ

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n * \frac{1}{n} = 1$$

כנדרש.
כעת נרצה למצוא את $Var[x]$.
אי אפשר לומר שסכום התוחלות הם תוחלת הסכום. האם באמת אי אפשר? אם הם בלתי תלויים כן אפשר לפי טענה מלמעלה! ואכן הם תלויים. באסה לנו, הם תלויים.

$$X = X_1 + ... + X_n$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

נראה כי־

$$X^2 = \sum_i X_i^2 + \sum_{i,j:i\neq j} X_i X_j$$

נעיר כי יש $n(n-1)$ מחוברים מימין וn^2משמאל. מדוע? כי יש סה"כ n^2צירפופים פחות X_iX_i ־ האלכסון שיש n כאלו ולכן $n^2 - n$

$$E[x_i^2] = E[x_1^2] = E[x_1] = \frac{1}{n}$$

כיוון שמשתנה ברנולי בריבוע נשאר זהה!!!!!!

$$E[X_iX_j] = E[X_1X_2] = **P(X_1X_2 = 1) = P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1) = P(X_1 = 1)*P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{1}{n}*\frac{1}{n-1}$$

כאשר $**$־ נובע מכך שתוחלת ברנולי היא הסתברות ברנולי. שכן X_1X_2 משתנה ברנולי בעצמו!

$$E[X^2] = nE[X_1^2] + n(n-1)E[X_1X_2] = \frac{1}{n} * n + \frac{1}{n(n-1)} * n(n-1) = 2$$

וסה"כ

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - (1)^2 = 1$$

הרצאה 6: שונות משותפת

תזכורת ־ תוחלת מותנית:

תוחלת מותנית של $X = x$ בהינתן $Y = y$ הינה:

$$E[X|Y = y] = \sum_x x p_{x|y}(x|y)$$

אם נסמן $g(Y)=E[X|Y=y]$ הרי שזה משתנה מקרי ונראה כי $E[g(x)]=E[X|Y]$

$$E[E[X|Y]=E[g(Y)]=\sum_y g(y)P_Y(y)=\sum_y E[X|Y=y]*p_Y(y)=E[X]$$

ומכאן ההוכחה לכלל המפורסם שלנו $E[E[X|Y]]=E[X]$.

שונות מותנית:

שונות מותנית של x בהינתן $Y=y$:

$$Var[X|Y=y]=E[(X-E[X|Y=y])^2|Y=y]$$

משפט השונות השלמה:

$$Var[x]=E[Var(X|Y)]+Var[E[X|Y]]$$

קונבולציה

בהינתן שני משתנים מקריים x,y ב"ת אנחנו יכולים לבצע עליהם כל מיני מניפולציות מתמטיות כמו $z=x+y$. מה תהיה פונקציית מסת ההסתברות?

$$p_Z(z)=p(X+Y=z)=\sum_{(x,y)|x+y=z}P(X=x,Y=y)=\sum_x p(X=x,Y=z-x)=\sum_x p_X(x)*p_Y(z-x)$$

למשל, וכיוון שבלתי תלויים אזי יתקיים:

$$p_Z(3)=p(x=0)*p(y=3)+p(x=1)*p(y=2)+p(x=2)*p(y=1)+p(x=3)*p(y=0)$$

שונות משותפת ומקדם מתאם

מתאם או **קשר** הוא מושג המבטא את קיומו או אי קיומו ואת חוזקו של קשר סטטיסטי בין שני משתנים. קשר זה לא חייב להיות סיבתי. למשל, הקשר בין מס' כבאיות האש שמגיעות לזירת שריפה לבין מידת הנזק. או לחלופין, הקשר בין זמן ההשקעה בלמידה למבחן לבין הציון - עם זאת, זה שלמד הכי הרבה לא בהכרח יוציא את הציון הכי גבוה (ולכן הקשר אינו סיבתי)

הגדרה: בהינתן שני משתנים בדידים השונות המשותפת (cov) היא המידה לקשר שלהם. נתונים X,Y בדידים

*אם תוחלת כל אחד מהם הינה אפס, אזי $E[XY]=E[X]*E[Y]=0$

* באופן כללי נגדיר כך:

$$Cov(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

אם X,Y ב"ת אזי $Cov(X,Y)=0$ (הכיוון ההפוך אינו נכון, כלומר אם השונות המשותפת שווה אפס הם לא בהכרח בת"ל)
נזכור כי $E[E[X]]=E[X]$
הגדרה שקולה:

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

תכונות:

.1

$$Cov(X,X)=E[X^2]-(E[X])^2=Var(X)$$

.2

$$Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)$$

.3

$$Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)$$

.4

$$Cov(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(X_i,Y_j)$$

.5

$$Var[X+Y]=VAR[X]+VAR[Y]+2Cov(X,Y)$$

3 הוא מקרה פרטי של 4.
מהתכונות לעיל ניתן להוכיח וזו טענה כי־

$$Var[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}Var[X_i]+\sum_{(i,j):i\neq j}Cov(X_i,X_j)$$

מכאן קל לחשב סכום משתנים מקריים! גם אם אינם בת"ל! צריך לחסום ולחשב גם Cov.
משמעות: הערך עצמו של השונות המשותפות לא רלוונטי. אם המקדם חיובי אז ככל שאחד גדל גם השני, אם הוא שלילי אז ככל שמשתנה מקרי אחד גדל השני יורד ואם הוא אפס אזי אין תיאום מסויים בין קצבי הגדילה של שני המשתנים המקריים.

מקדם המתאם

הגדרה:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

כאשר σ_X σ_Y הם סטיות התקן.
זה מודד את המתאם בין השניים.

תכונות:

1. אי תלות $\Longleftarrow$ $\rho(X,Y)=0$
2. $\rho(X,-X)=-1$ וכן $\rho(X,X)=1$
3. תמיד יתקיים $-1\leq\rho\leq 1$
4. אם C קבוע, אזי

$$|\rho|=1\Longleftrightarrow X-E[X]=C*(Y-E[Y])$$

5.

$$\rho(aX+b,y)=sign(a)*\rho(X,Y)$$

****ככל שמקדם השונות קרוב לאחד, כך הקשר בין שני המשתנים המקריים הינו לינארי.**

הרצאה 7: משתנה מקרי רציף

עד היום היה לנו אוסף סופי ואחיד שנתנו להם מסת הסתברות, כעת ניתן זאת עבור רצף ערכים ולכן לא נדבר על פונקציית מסת ההסתברות אלא על פונקציית צפיפות ההסתברות.

פונקציית צפיפות ההסתברות(PDF)**:**

ראשית נתבונן בדוגמה. משתנה מקרי X מתפלג אחיד בין 0 ל1. מה ההסתברות $X=0.3$?
נחלק את המקטע לn קטעים ונראה כי:

$$p_X(x):\begin{Bmatrix}\frac{1}{n} & 1,2,.....,n\\ 0 & o.w\end{Bmatrix}$$

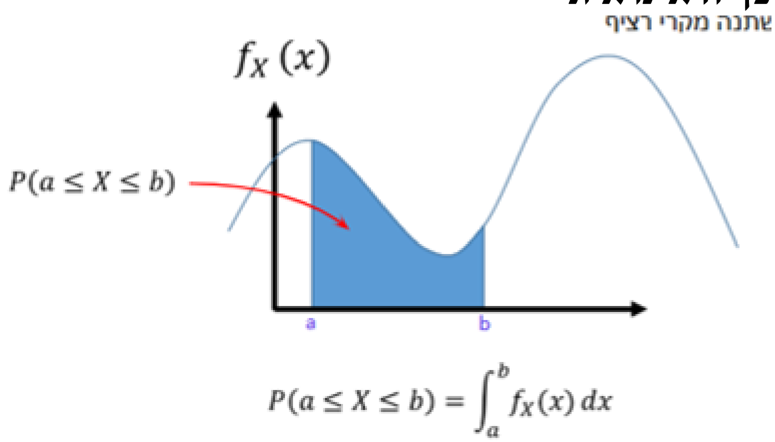
וכן

$$P(X=x)\leq lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

דהיינו, ההסתברות $P(X=0.3)=0$.
כעת, נגדיר:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(x)dx$$

כך היא נראית -



תכונות:

1. $f_x(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$
3. $P(X=a) = \int_a^a f_x(x)dx = 0$, כלומר כמו שראינו בדוגמה מעלה השטח מתחת לנקודה בודדת הוא אפס וכך גם ההסתברות.
4.

$$P(a \leq X \leq b) = P(a) + P(a < X < b) + P(b) = P(a < X < b)$$

** תמיד לפני שניגש לעבוד עם PDF צריך לבדוק שאכן הפונקציה מוגדרת היטב - אלא אם כן אמרו לי שהיא כזו.

הגדרה: משתנה מקרי הינו רציף אמ"מ ניתן לתארו באמצעות PDF

תוחלת משתנה מקרי רציף

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)$$

(תמיד נניח שאינטגרל זה יתכנס....)

תכונות:

$$x \geq 0 \Longrightarrow E[X] \geq 0$$

$$a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$$

$$E[aX+b] = aE[X] + b$$

כלל התוחלת:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)$$

דוגמה:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)$$

שונות משתנה מקרי רציף:

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx$$

$$Var[aX+b] = a^2 Var[x]$$

משתנים מקריים רציפים

PDF של משתנה מקרי רציף אחיד

כאשר $x \sim U[a,b]$, אזי הפונקציה תהיה

$$f_x(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \vee x < a \end{array} \right\}$$

הCDF יהיה:

$$F(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{array} \right\}$$

תוחלת ושונות משתנה רציף אחיד:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var[x] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

משתנה מקרי מעריכי (דומה לגאומטרי בעולם הבדיד)

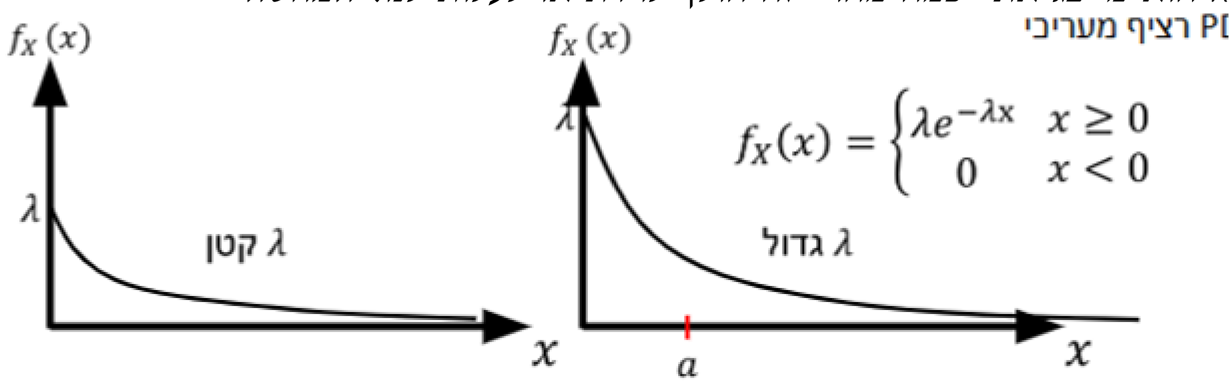
נגדירו כך: $X \sim exp(\lambda)$
פונקציית PDF :

$$f_X(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\}$$

פונקציית CDF:

$$F_X(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right\}$$

משתנה מקרי מייצג את משך הזמן עד שקורה מאורע כלשהו (נזכיר ־ גאומטרי זה מס' ניסויים עד הצלחה ראשונה. בדיד) , כאן זה רציף ־ מודדים זמן. למשל: משך הזמן עד לקוח שנכנס לחנות. משך חיים של מכשיר חשמלי וכו'. מודדים משך זמן עד להתרחשות הראשונה של האירוע.
λ הוא מייצג את "כמה מהר" זה הולך לרדת או לעלות לנו. **המחשה ־**



$$p(X \geq a) = \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = ... = e^{-\lambda a}$$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

טענה: X חסר זכרון $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \sim G(p) \\ x \sim exp(\lambda) \end{array} \right\}$
חוסר זכרון משמע

$$P(x > t + s | x > t) = P(x > s)$$

משתנה פואסון

מוטיבציה ־ בעולם יש בממוצע 8.2 רעידות אדמה בשנה. מה הסיכוי שתהיה יותר מרעידה אחת שנה הבאה? (דומה לבינומי)

נגדיר $X \sim Poi(\lambda)$

יש לנו טווח מסויים של מופעים בקטעים זרים בלתי תלויים, ומשתנה פואסון יגדיר את ההסתברות למופע פורפורציונלי יחיד לאורך הקטע. יכל להיות בקטע לכל היותר מופע יחיד. כלומר, יש מאורע שיכול לקרות בכל רגע (רעידת אדמה) ולכן אין הסתברות על המאורע. נניח כי האירועים מתרחשים בקצב בלתי תלוי ובקצב ממוצע.

פונקציית מסת ההסתברות: ההסתברות לk מופעים בזמן הדגימה ־

$$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

עבור n מאוד גדול וp מאוד קטן אזי $\lambda = pn$ וכן

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \approx \binom{n}{k} p^k (a-p)^{n-k}$$

תוחלת ושונות:

$$E[X] = \lambda$$

$$Var[X] = \lambda$$

הקשר בין מעריכית לפואסון: אם נגדיר $X \sim Poi(\lambda)$, מס' מאורעות ביחידת זמן כאשר הצפי הוא λ מאורעות ביחידת זמן, נגדיר Y־ זמן ההמתנה עד להתרחשות המאורע הראשון, אזי $Y \sim exp(\lambda)$.

הקשר בין משתנה מקרי פואסיני לבינומי: בדומה, המאורעות ב"ת וכן גם על הסתברות פואסון יש סיכוי להצלח וכשלון, גם כאן מעוניינים במס' הצלחות. השוני הוא מס' הנסויים לא מוגדר, וההסתברות למאורע בודד לא ידועה. מתי נשתמש בכל אחד? נתון קצב ־ פואסון, נתון מס' ניסויים וסיכוי להצלחה ־ בינומי. כאשר מס' הניסויים המבוצעים n הוא גדול מאוד וההסתברות להצלחה בכל ניסוי p קרובה ל0 אזי ההתפלגות הפואסנית היא קירוב טוב מאוד לבינומית עם $\lambda = pn$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת (CDF)

המטרה: נרצה לאחד את ההגדרות של משתנה מקרי רציף ובדיד. הפונקציה תייצג אותו דבר עבור המשתנים, רק נממש אותה אחרת. נגדיר ־

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

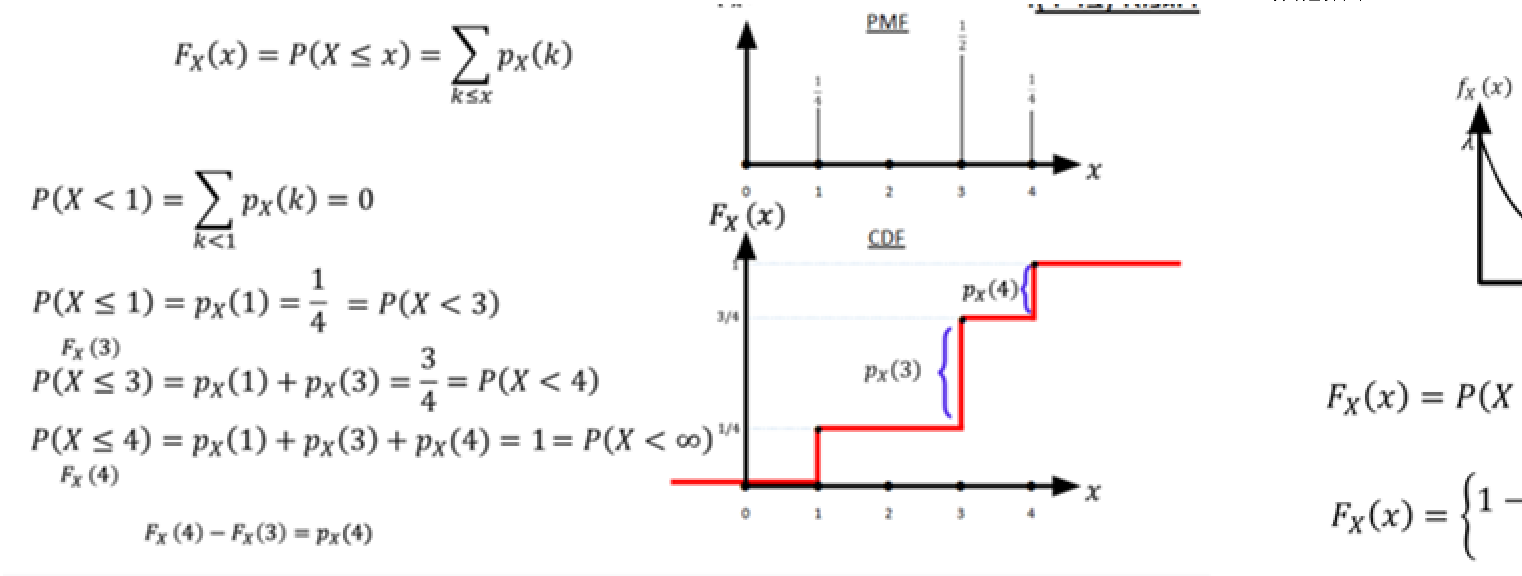
עבור רציף ־

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dt$$

עבור בדיד -

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} p_x(k)$$

דוגמה:



תכונות הפונקציה:

1. $x \le y \Rightarrow F_X(X) \le F_Y(Y)$
2. $x \to \infty \Rightarrow F_X(X) = 1$
3. $x \to -\infty \Rightarrow F_X(X) = 0$
4. אם נגזור אותה נקבל את פונקציית ההסתברות pdf

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_x(x)$$

אי שיוויון מרקוב

אם $X \ge 0$ וכן $a > 0$ אזי $P(X \ge a) \le \frac{E[X]}{a}$.

אי שוויון צ'בישב

משפר את החסם של מרקוב אך משתמש במידע נוסף. נניח כי ידועות התוחלת והשונות.
יהא X משתנה מקרי עם תוחלת μ וכן שונות σ^2. אם השונות של משתנה מקרי קטנה אזי לא סביר שערכו יהיה רחוק מהתוחלת, ובאי שוויון זה נראה ככה:
אם $C > 0$ אזי

$$P(|X-\mu|\geq c)\leq\frac{\sigma^2}{c^2}$$

שקול לגמרי

$$P(|X-E[x]|\geq c)\leq\frac{Var[X]}{c^2}$$

וכן: אם $a>0$ **אזי**

$$P(|X-\mu|\geq a\sigma)\leq\frac{1}{a^2}$$

שימושי לבעיות במבחנים כאשר נשאל "מצא חסם עליון או תחתון להסתברות ש..." אזי אנחנו נרצה למצוא תוחלת ושונות, להציב באי שוויון. נזכור כי תמיד יתקיים אי שוויון מהסוג הבא:

$$p(30\leq x\leq 100)\geq p(30\leq x\leq 70)$$

ואז אנחנו נוכל לבצע אי שוויון ששקול

$$p(30\leq x\leq 70)=P(|x-50|\leq 20)$$

כלומר כאן התוחלת חמישים, **נניח והיה ידוע כי השונות היא** 100, אזי נוכל להשתמש בצבישב' הגבר.

$$p(30\leq x\leq 100)\geq p(30\leq x\leq 70)=P(|x-50|\leq 20)\leq\frac{100}{20^2}=\frac{1}{4}$$

כלומר ההסתברות קיבלה חסם עליון, יש גם תחתון ולכן סה"כ מתקיים

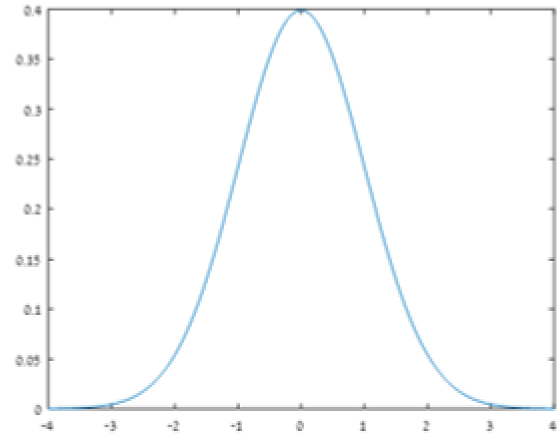
$$0\leq p(30\leq x\leq 100)\leq\frac{1}{4}$$

משתנה מקרי נורמלי

משתנה מקרי נורמלי חשוב מהמון סיבות: תאוריה - משפט גבול מרכזי שנראה בהמשך וכן אפליקציות רבות.
משתנה מקרי נורמל סטנדרטי - כאשר 0 תוחלת ו1 היא השונות:

$$N(0,1):f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$$

זו פונקציית הפעמון המפורסמת:



נראה כי עבור משתנה מקרי נורמלי סטדנרטי מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) = 1$$

$$E[X] = 0$$

$$Var[X] = 1$$

משתנה גאוסייני

משתנה מקרי נורמלי כללי

$$N(\mu, \sigma^2) : f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

וכן

$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

בהינתן $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אם נגדיר $Y = aX + b$ אזי

$$E[Y]=a\mu+b, Var[Y]=a^2\sigma^2$$

ניתן להוכיח כי $Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$ - **כלומר הזזה לינארית של משתנה מקרי נורמלי היא משתנה מקרי נורמלי בעצמה!!!!**

לא קיימת פונקציה פשוטה לתיאור הCDF של של ההתפלגות הנורמלית - לכן יש טבלאות. קיימת טבלה שמתארת את

$$\Phi(Y)=F_Y(y)=P(Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

כמו כן היא אינה אלמנטרית לכן אי אפשר לחשב קדומה... נלך לטבלה ונחפש את הערכים המתאימים.

תמיד מתקיים

$$\phi(X)+\phi(-x)=1$$

חשוב להבין כיצד עובדת הטבלה: הטבלה מייצגת עבור כל ערך x מה ההסתברות להיות קטן ממנו. בצד שמאל בטבלה יש קפיצות של 0.1 ובצד מעלה יש קפיצות של 0.01. נניח ונרצה לדעת הסתברות שקטן מ1.47 אז נלך לעמודה משמאל של 1.4 ומעלה של 0.07, נגיע למשבצת וזה ההסתברות להיות קטן מ1.47.

כאשר המשתנה המקרי אינו סטדנרטי - נעבור לסדטדנרטי - ואז נחשב עם הטבלה.

נשים לב כיצד עוברים מלא סטנדרטי לסטנדרטי:

שה עבור משתנה X

רמלי כללי

$$N(\mu,\sigma^2):\ f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ת Y:

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$E[Y]=E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]=\frac{1}{\sigma}(E[X]-\mu)=0$$

$$Var[Y]=\frac{1}{\sigma^2}\cdot Var[X]=1$$

$$Y\sim N(0,1)$$

פונקציית צפיפות ההסתברות והתניה במאורע של משתנה בדיד

ידוע כי קרה מאורע A כך ש$P(A) > 0$. בבדידה אנחנו יודעים כי $P_{X|A} = P(X = x|A)$. מה קורה ברציף?

$$f_x(x) * \delta \approx P(x \leq X \leq x + \delta)$$

$$f_{x|A}(x) * \delta \approx P(x \leq X \leq x + \delta|A)$$

$$P(x \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$$

ידוע כי קרה מאורע A מסויים כאשר $X \in A$, מה ניתן לומר על הPDF המותנה של X?

$$f_{X|X \in A}(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{f_x(x)}{P(A)} & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{array} \right\}$$

תוחלת מותנית:

$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x)$$

חוק התוחלת

$$E[g(x)|A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|A}(x)$$

חוסר זכרון של משתנה מעריכי

בדומה למשתנה גאומטרי, גם משתנה מעריכי הוא חסר זכרון. כלומר, ההסתברות להיות גדולים מערך בהינתן משהו, שווה להסתברות גדולים להיות מערך בלי שקרה כלום. זה אמ"מ.

משפט ההסתברות השלמה למשתנה רציף

אם מרחב המדגם מחולק למאורעות $A_1, ...A_n$

$$f_x(x) = P(A_1) * f_{X|A_1} + ...P(A_n) * f_{X|A_n}$$

משפט התוחלת השלמה

$$E[X] = P(A_1)E[X|A_1] + ... + P(A_n)E[X|A_n]$$

משתנה מקרי מעורב:

כאשר

$$X := \left\{ \begin{array}{cc} Y & p \\ Z & 1-p \end{array} \right\}$$

למשל, וכן Y בדיד וZ רציף, נקרא לX משתנה מעורב. במקרה זה הCDF יהיה

$$P_X(x) = pP(Y \leq x) + (1-p)P(Z \leq x) = pF_Y(y) + (1-p)F_Z(z)$$

משתנים מקריים מרובים וPDF משותף

תמיד יתקיים $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$. וכן

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_{(x,y)\in B} f(x,y)dxdy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

מPDF משותף לPDF שולי -

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

שני משתנים מקריים הם רציפים במשותף אם ניתן לתארם באמצעות PDF משותף.

פונקציית מסת ההסתברות המשותפת:

$$P_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)du$$

(מדוע v וu ? כיוון שהמשתנה באינטגרל הוא איקס, לכן שיננו את u ועל הדרך גם את y לv למרות שזה לא חובה.)

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v)dv$$

ניתן להכליל כמובן לשלושה משתנים מרובים וכן הלאה.

CDF משותף למשתנים מרובים רציפים

במשתנה מקרי רציף בודד

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$$

במשתנים מרובים:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(u,v)dudv$$

מתקיים

$$\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x,y)$$

כלומר אם נגזור פעמיים את הCDF נקבל את הPDF (בדומה לגזירה פעם אחת במשתנה מקרי אחד)

התנייה

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

(נכון כמובן לשני הכיוונים)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) E[X|Y=y]$$

אי תלות

ההבאים שקולים: X ו־Y בלתי תלויים אם

$$f_{X,Y}(x,y) = f_x(x) * f_Y(y)$$

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$VAR[X+Y] = VAR[X] + VAR[Y]$$

ההתפלגות של $Z = X + Y$

אם x ו־y ב"ת ונגדיר $z = x + y$ ראינו בבדיד כבר. ברציף נקבל

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

החוק החלש של המספרים הגדולים

נתונים $X_1, ..., X_n$ משתנים בלתי תלויים זהים (כלומר עם אותה התפלגות) עם תוחלת μ ושונות σ^2. כלומר לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $E[X_i] = \mu$. נסתכל על ממוצע המדגם:

$$M_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

נשים לב $E[M_n] = \mu$ וכן $Var[M_n] = \frac{\sigma^2}{n}$
אזי, לכל $\epsilon > 0$ כאשר $n \to \infty$

$$P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = P(|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \mu| \geq \epsilon) \to 0$$

מה זה אומר? חוזרים מס' רב של פעמים על אותו הניסוי. בכל שלב מקבלים תוצאה $X_i = \mu + W_i$ כך ש־W_i בלתי תלויים, אזי לא סביר שממוצע המדגם יהיה גדול מהתוחלת באמת. לא סביר - הסתברות אפס.

משפט הגבול המרכזי

נתונים $X_1, ..., X_n$ משתנים בלתי תלויים זהים (כלומר עם אותה התפלגות) עם תוחלת μ ושונות σ^2.
כלומר לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $E[X_i] = \mu$. כך ש$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
נגדיר

$$Z_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}$$

מתקיים $E[Z_n] = 0$ וכן $Var[Z_n] = 1$.
אזי, יהא $Z \sim N(0,1)$.

$$\forall z : lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

מה החידוש כאן? לא משנה כיצד $X_1, ..., X_n$ התפלגו קודם לכן. Z_n תמיד יהיה משתנה מקרי נורמלי.
לרוב נרצה לפתור $P(S_n \leq a) \approx b$. כאשר שניים יהיו נתונים ונרצה למצוא השלישי.

קירוב דה מוויאיר לפלס להסתברות בינומית

$S_n \sim Bin(n,p)$ וכן k, l שלמים חיוביים.

$$P(k \leq S_n \leq l) = \Phi(\frac{l + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}})$$