מבנים בדידים - סיכום הגדרות ומשפטים 2026

16 בינואר 2026

גיא יער־און

חלק I

עוצמות

הגדרה 1. נסמן את עוצמת הטבעיים $\mathbb{N}$ להיות $\aleph_0$.

משפט 1. תהי עוצמת הטבעיים $\aleph_0$. אזי, כל ההבאים מטה שקולים עוצמה לעוצמה זו:

א. $\mathbb{N}_{\geq 1}$
ב. $Even = 2\mathbb{N}, Odd = \mathbb{N} \backslash Even$
ג. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ובאופן כללי $\forall n \geq 1 : \mathbb{N}^n$
ד. $\mathbb{Z}$
ה. $\mathbb{Q}$

הגדרה 2. נאמר כי עוצמת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ הינה $\aleph$ המקיימת $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

משפט 2. תהי עוצמת הממשיים $\aleph$. אזי, כל ההבאים מטה שקולים עוצמה לעוצמה זו:

א. $(0, 1]$
ב. $(0, 1)$
ג. $(1, \infty)$
ד. $\mathbb{R}^k$ לכל $k \geq 1$
ה. $P(\mathbb{N})$

הגדרה 3. יהיו שתי קבוצות A, B. נאמר כי A וB שקולות עוצמה ונסמן $A \sim B$ אם קיימת בניהן פונקציה חד חד ערכית ועל $f : A \to B$.

משפט 3. תהי קבוצה X. אזי, $\sim$ (שקילות עוצמה) על $P(X)$ היא יחס שקילות.

הגדרה 4. יהיו שתי קבוצות A, B. נאמר כי A קטנה־שוות עוצמה לB ונסמן $A \preccurlyeq B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע . כמו כן, נאמר כי A לא קטנה־שוות עוצמה לB ונסמן $A \not\preccurlyeq B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע וגם $A \nsim B$.

משפט 4. יהיו $a < b, c < d \in \mathbb{R}$. אזי $[a, b] \sim [c, d]$ וכן $(a, b) \sim (c, d)$ וכן $(a, b] \sim (c, d)$.

משפט 5. יהיו A_1, A_2, B_1, B_2 קבוצות כך ש$A_1 \sim A_2$ וכן $B_1 \sim B_2$. אזי, $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.

הגדרה 5. יהי $n \in \mathbb{N}$. נסמן $I_n = \{i \in \mathbb{N}^+ | i \leq n\}$. קבוצה S נקראת סופית אם היא שקולת עוצמה לתת קבוצה שהיא $prefix$ של $\mathbb{N}$. במצב כזה נאמר כי $|S| = n$.

הגדרה 6. קבוצה S נקראת בת מניה אם היא סופית, או שהיא שקולה ל$\mathbb{N}$. כלומר, בעלת עוצמה $\aleph_0$.

משפט 5. יהיו A, B קבוצות. אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע, אזי קיימת $g : B \to A$ על.

משפט 6. קבוצה A היא אינסופית אמ"מ קיימת תת קבוצה אינסופית $B \subseteq A$ שהיא בת מניה. כמו כן, אם A סופית אזי $|A| < \aleph_0$.

משפט 7. תהי A קבוצה. אזי, A אינסופית $\iff \mathbb{N} \preceq A$. ובמילים אחרות: $\aleph_0$ היא עוצמה מינימלית.

משפט 8. יהיו A, B קבוצות לא ריקות. אזי, $A \sim B \Longrightarrow A \backslash B \sim B \backslash A$.

משפט 9. יהיו A, B קבוצות. אזי $\preceq$, כלומר $A \preceq B$ הוא יחס סדר.

משפט 10. משפט קנטור ברנשטיין. יהיו A, B קבוצות. אזי,

$$A \preceq B \wedge B \preceq A \Longrightarrow A \sim B$$

למה. יהיו A, B קבוצות כך ש$B \subseteq A$. אזי, $A \preceq B \Longrightarrow A \sim B$.

משפט 11. מתקיים $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$

משפט 12. תהי A קבוצה. אזי, A לא שקולה ל$P(A)$. כלומר: $A \nsim P(A)$.

הערה. ישנם אנסוף עוצמות, שכן:

$$\mathbb{N} \precneqq P(\mathbb{N}) \precneqq P(P(\mathbb{N}) \precneqq ....$$

משפט 13. אריתמטיקה של עוצמות. נגדיר את הכללים הבאים:

א. חיבור עוצמות: $|A + B| = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|$
ב. כפל עוצמות: $|A| \times |B| = |A \times B|$
ג. חזקה של עוצמות: $|A|^{|B|} = |A^B| = |\{f : B \to A\}|$

משפט 14. יהיו A, B, C עוצמות. אזי,

א. $A \times B = B \times A$
ב. $A(B + C) = A \times B + A \times C$
ג. לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $A \times A \times A \times .... \times A = A^n$
ד. $(A \times B)^C = A^C + B^C$
ה. $A^B \times A^C = A^{B+C}$
ו. $(A^B)^C = A^{B \times C}$
ז. $A \leq A + B$

משפט 15. אריתמטיקה של $\aleph_0$. כל ההבאים מתקיימים:

א. $\forall n \in \mathbb{N} : \aleph_0 + n = \aleph_0$

ב. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

ג. $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

משפט 16. תהי קבוצה A. אזי, $|P(A)| = 2^{|A|}$

משפט 17. השערת הרצף. לא קיימת עוצמה A המקיימת: $\aleph_0 < A < 2^{\aleph_0} = \aleph$.

משפט 18. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ עוצמות גדולות מאפס כך שמתקיים $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$ אזי: $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$

משפט 19. מסקנה ממשפט קנטור. אם A קבוצה אינסופית אזי קבוצת כל תתי הקבוצה שלה אינה בת מניה.

משפט 20. תהי A אינסופית שאינה בת מנייה, ותהי $B \subseteq A$ בת מניה. אזי $A \backslash B$ לא בת מניה.

משפט 21. נניח כי $\alpha, \beta \geq 2$. אזי, לכל עוצמה מהצורה $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, ...$ נוכל לסמן $\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. לפיכך:

$$\alpha^\beta = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & \alpha > \beta \\ 2^\beta & \alpha \leq \beta \end{array} \right\}$$

משפט 22. תהי קבוצה S כך שקיימת פונקציה חד חד ערכית $f : S \to S$ שאינה על. אזי, S אינסופית.

משפט 23. תהי קבוצה I בת מניה כך שלכל $i \in I$ מתקיים S_i בת מניה. אזי, $\bigcup_{i \in I} S_i$ בת מניה.

משפט 24. $X \sim X \times X \Longrightarrow P(X) \sim P(X) \times P(X)$

משפט 25. **אקסיומת הבחירה:** יהיו אנסוף קבוצות שאינן ריקות, אזי, ניתן לבחור איבר אחד מכל קבוצה.

$$\forall X[\emptyset \notin X \Longrightarrow \exists f : X \to \cup_{A \in X} A, \forall A \in X(f(A) \in A)]$$

חלק II

מבוא לתורת הגרפים

הגדרה 1. גרף $G = (V, E)$ הוא זוג סדור של קודקודים וצלעות באשר $E \subseteq \binom{V}{2}$

הגדרה 2. תהי V קבוצה סופית שאינה ריקה ותהי E קבוצה של זוגות איברים מV.

א. הזוג $G=(V,E)$ נקרא גרף מכוון אם הזוגות בE הינם זוגות סדורים.

עבור גרף מכוון, נגדיר את המושגים הבאים:

1. דרגת הכניסה של קודקוד v מוגדרת להיות $deg_{in}(v)=|\{u\in V:(u,v)\in E\}|$
2. דרגת היציאה של קודקוד v מוגדרת להיות $deg_{out}(v)=|\{u\in V|(v,u)\in E\}|$

ב. הזוג $G=(V,E)$ נקרא גרף לא מכוון אם הזוגות בE אינם זוגות סדורים.

הגדרה 3. גרף $G=(V,E)$ נקרא גרף פשוט אם הוא לא מכוון, ללא קשתות עצמיות וללא לולאות עצמיות.

הגדרה 4. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.

א. נאמר כי $v,u\in V$ הם שכנים אם $(v,u)\in E$.

ב. לכל $v\in V$ נסמן את קבוצת השכנים כ$\Gamma(v)=\{u\in V|(v,u)\in E\}$

ג. לכל $v\in V$ נגדיר את הדרגה של v להיות $deg(v)=|\Gamma(v)|$

משפט 26. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט כך ש$|V|\geq 2$. אזי, בG ישנם לפחות 2 קודקודים מאותה הדרגה.

הגדרה 5. יהי $G=(V,E)$ גרף. נסמן ב$\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף, וב$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית בגרף. מתקיים $\Delta(G)\geq 2\frac{|E|}{|V|}\geq\delta(G)$

הגדרה 6. יהי גרף $G=(V,E)$.

א. G נקרא מולטי גרף אם E היא מולטי SET - כלומר, יתכן שבין שני קודקודים יעברו מס' צלעות.

ב. G נקרא פסאודו גרף אם G מכיל לולאות עצמיות. כלומר קשתות מהצורה $(v,v)\in E$.

הגדרה 7. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון.

א. סדרת קודקודים $(v_0,....,v_p)$ באשר $\forall_{1\leq i\leq p-1}:(v_i,v_{i+1})\in E$ נקראת טיול.

ב. מסלול הוא טיול בו אין צלע שמופיעה פעמיים.

ג. מסלול פשוט הוא מסלול בו אין קודקוד שמופיע פעמיים.

ד. אורך של טיול מוגדר להיות מס' הצלעות שחלות בטיול.

ה. טיול מעגלי הוא טיול $(v_0,....,v_q)$ באשר $v_0=v_q$.

ו. מעגל הוא מסלול שמסתיים ומתחיל באותו הקודקוד.

ז. מעגל פשוט הוא מסלול, כך שהקודקוד הראשון שווה לקודקוד האחרון וכן כל קודקוד $v\neq v_0$ לא מופיע יותר מפעם אחת.

משפט 27. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$. ויהיו $v,u\in V$. אזי, אם בין v לu קיים טיול, בהכרח קיים בין u לv מסלול פשוט.

הגדרה 8. מרחק בין שני קודקודים: בהינתן מסלול $P:v\rightsquigarrow u$, נגדיר את המרחק בין שני הקודקודים להיות:

$$d_G(v,u)=\left\{\begin{array}{cc} min\{|P:v\rightsquigarrow u|\} & \exists v\rightsquigarrow u \\ \infty & o.w \end{array}\right\}$$

הגדרה 9. יהי גרף $G=(V,E)$ לא מכוון.
א. גרף G נקרא קשיר אם קיים מסלול בין כל $v,u\in V$.
ב. קוטר הגרף יוגדר להיות $diam(G)=max_{u,v\in V}\{d_G(u,v)\}$

משפט 28. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$. אזי, G קשיר $\iff diam(G)<\infty$.

משפט 29. יחס הקשירות הוא יחס שקילות, ומחלקות השקילות הם רכיבי הקשירות.

משפט 30. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$. אם בG יש בדיוק 2 קודקודים עם דרגה אי זוגית, אזי בהכרח קיים מסלול ביניהם.

הגדרה 10. יהי $G=(V,E)$ גרף.
א. $G'=(V',E')$ הוא תת גרף של G אמ"מ $V'\subseteq V, E'\subseteq E$.
ב. G' הוא תת גרף ריק אם $V'=V$ וכן $E'=\emptyset$.
ג. תת הגרף המושרה יסומן $G[A]=(A,\binom{A}{2}\cap E)$, מתקבל ע"י הסרת חלק מהצלעות לקבלת קבוצה מסוימת שהיא תת גרף של הגרף הנוכחי. כלומר, בהינתן $A\subseteq V$ מחויבים בתת הגרף המושרה לקחת את כל הצלעות שחלו ע"י קודקודים אלו שלקחנו.

הגדרה 11. למת לחיצות הידיים. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט. אזי, $\sum_{v\in V}deg(v)=2|E|$.

משפט 31. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. אזי,
א. סכום הדרגות זוגי.
ב. כמות הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית בגרף הוא זוגי.

הגדרה 12. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. G יקרא קשיר היטב אם לכל $a,b\in V$ קיים $a\rightsquigarrow b\wedge b\rightsquigarrow a$.

משפט 32. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר, ותהי $e\in E$ צלע. אזי, $G\backslash\{e\}$ קשיר אמ"מ e הייתה שייכת למעגל פשוט כלשהו בG.

חלק III

סוגי גרפים מיוחדים

הגדרה 13. הגרף הריק $G=(V,E)$ הוא גרף המקיים $E=\emptyset$.

הגדרה 14. הגרף המלא, הלוא הוא הקליקה, מוגדר להיות הגרף $K_n=(V,\binom{V}{2})$.

הגדרה 15. קבוצה בלתי תלויה היא תת קבוצה של קודקודים $A\subseteq V$ כך שמתקיים $\binom{A}{2}\cap E=\emptyset$. כלומר, קבוצת קודקודים כך שאין צלע שמחברת בין כל שני קודקודים בקבוצה.

משפט 33. יהי גרף $G=(V,E)$. הגרף המשלים יוגדר להיות $\overline{G}=(V,\overline{E})$.
א. אם G לא קשיר, אזי $\overline{G}$ קשיר.
ב. מתקיים $deg_G(v)+deg_{\overline{G}}(v)=n-1$.
ג. $\overline{\overline{G}}=G$
ד. A היא קליקה בG $\iff$ A היא תת קבוצה בלתי תלויה ב$\overline{G}$.

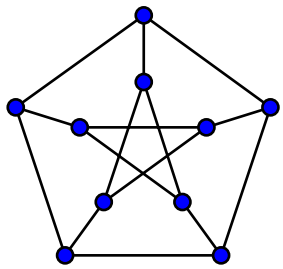
הגדרה. נגדיר:

א. גרף מסלול יסומן P_n ויוגדר להיות גרף בו כל הצלעות מופיעות ברצף ובין כל אחת מהם ישנה קשת. מתקיים $|E| = n - 1$.

ב. גרף מעגל יסומן C_n, הוא גרף מסלול שהתווספה צלע בין הקודקוד הראשון לאחרון. מתקיים $|E| = n$.

ג. גרף d רגולרי, יוגדר להיות הגרף בו $\forall v \in V : deg(v) = d$. אם כן, מתקיים $|E| = \frac{nd}{2}$

ד. גרף פטרסן הוא גרף המצורף בתמונה מטה, הוא איננו מישורי והוא 3 רגולרי.



הגדרה 16. גרף $G = (V, E)$ הוא גרף דו צדדי אם V יכול להתחלק לשתי קבוצות כך ש$V = L \sqcup R$ כך ש:

$$E \subseteq \{\{u, v\} | u \in L, c \in R\}$$

הגדרה 17. הגרף הדו צדדי המלא יסומן $K_{m,n}$ והוא הגרף המקיים $|L| = m, |R| = n$.

משפט 34. יהי $T = (V, E)$ עץ. אזי, T הוא דו צדדי.

משפט 35. יהי C_n כאשר n זוגי. אזי C_n גרף דו צדדי.

משפט 36. משפט קוניג. יהי גרף $G = (V, E)$. אזי, G דו צדדי $\iff$ כל מעגל פשוט בG הוא באורך זוגי.

הגדרה 18. גרף הקוביה Q_n הוא הגרף שקודקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n, בין שני קודקודים ישנה צלע אמ"מ הסדרות הבינאריות שהם מייצגים נבדלות בביט אחד.

א. בגרף זה מתקיים $|V| = 2^n$

ב. בגרף זה מתקיים $|E| = 2^{n-1} \times n$

ג. באופן פורמלי:

$$V_n = \{0, 1\}^n, E_n = \{(u, v) \in V \times V \wedge ||u - v||_1 = 1\}$$

ד. גרף הקוביה Q_n הוא דו צדדי.

ה. גרף הקוביה Q_n אינו מישורי לכל $n > 3$.

הגדרה 19. גרף קנזר יסומן $KG_{n,k}$ ויוגדר כך:

א. בוצת הקודקודים של הגרף הינה $\binom{[n]}{k} = \{A \subseteq [n] = \{1,..,n\} | |A| = k\}$, כלומר אוסף של הקבוצות של המספרים $1,...n$ בגודל k.

ב. קיימת צלע בין קבוצה A לקבוצה B המקיימות $A, B \in \binom{[n]}{k}$ אמ"מ $A \cap B = \emptyset$.

ג. מתקיים $|V| = \binom{n}{k}$ וכן $|E| = \frac{1}{2} \times \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{k}$

משפט 37. יהי גרף קנזר $KG_{n,k}$.

א. גרף קנזר $\binom{n-k}{k}$ רגולרי.

ב. אם $n \leq 2k-1$ אזי $KG_{n,k}$ הוא הגרף הריק.

ג. $KG_{n,1}$ הוא קליקה.

ד. $KG_{5,2}$ הוא גרף פטרסן.

ה. בגרף $KG_{n,k}$ ישנה קבוצה בלתי תלויה בגודל $\binom{n-1}{k-1}$

ו. בגרף $KG_{n,k}$ ישנה קליקה מגודל $\left[\binom{n}{k}\right]$.

הגדרה. יהי גרף פשוט $G = (V, E)$.

א. G נקרא עץ אם הוא קשיר וחסר מעגלים.

ב. יער הוא גרף פשוט שכל אחד מרכיבי הקשירות שלו הוא עץ. כלומר, גרף ללא מעגלים.

משפט 38. יהי G עץ.

א. מתקיים $|E| = |V| - 1$

ב. יהיו שני קודקודים v, u בעץ. אזי, קיים בינהם מסלול יחיד.

ג. בכל עץ עם $n \geq 2$ קיימים שני עלים.

משפט 39. משפט השלישי חינם. יהי גרף G עם n קודקודים. G הוא עץ אם הוא מקיים שניים מההבאים לפחות:

א. G חסר מעגלים

ב. G קשיר

ג. $|E| = n - 1$.

משפט 40. יהי $G = (V, E)$. אזי, התנאים הבאים באמ"מ:

א. G הוא עץ

ב. G הוא חסר מעגלים מקסימלי

ג. G הוא קשיר מינימלי

משפט 41. בהינתן $|V| = n$ ישנם $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים אפשריים. ישנם $\binom{n}{2}$ אפשרויות לקשתות, ובכל פעם בוחרים אם לקחת אותם או שלא.

הגדרה 20. תת גרף פורש של G שהוא עץ נקרא עץ פורש.

משפט 42. G הוא קשיר $\iff$ G מכיל עץ פורש.

חלק IV

מעגלי אוילר והמילטון

הגדרה 21. בהינתן מולטי גרף $G = (V, E)$, מעגל אוילר הוא מעגל $C = (x_0, ..., x_m)$ שעובר על כל צלע בדיוק פעם אחת. מסלול אוילר הוא מסלול $C = (x_0, ..., x_m)$ שעובר על כל צלע פעם אחת. נשים לב - כל מעגל אוילר הוא מסלול אוילר, אך לא להפך.

משפט 43. יהי G מולטי גרף קשיר. בG יש מעגל אוילר $\iff$ כל הדרגות בG זוגיות.

משפט 44. יהי גרף G מכוון, קשיר חזק. אזי, בG יש מעגל אוילר $\iff \forall v \in V : deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$

משפט 45. יהי G גרף פשוט קשיר.G מכיל מסלול אוילר $\iff$ G מכיל 0 או 2 קודקודים מדרגה אי זוגית.

משפט 46. יהי $G = (V, E)$ גרף בעל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר (לפחות אחד). אזי, ניתן להוסיף לG קודקוד בודד ומס' צלעות ולקבל גרף חדש G' בו כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.

הגדרה 22. יהי גרף $G = (V, E)$. נאמר כי מסלול המילטון הוא מסלול פשוט $P = (x_0, ..., x_{n-1})$ שעובר על כל הקודקודים. מעגל המילטון הוא מעגל פשוט שעובר על כל הקודקודים.

משפט 47. יהי הגרף הדו צדדי השלם $K_{p,q}$.
א. $K_{p,q}$ מכיל מעגל המילטון אמ"מ $p = q$.
ב. $K_{p,q}$ מכיל מסלול המילטון אמ"מ $|p - q| \leq 1$.

משפט 48. אם $n \geq 2$ וסכום הדרגות של כל שני קודקודים הוא לפחות $n - 1$ אזי בגרף ישנו מסלול המילטון.

משפט 49. משפט אורה. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט, המקיים $n \geq 3$, כך שלכל זוג קודקודים v, u שאינם שכנים מתקיים $deg_G(v) + deg_G(u) \geq n$, אזי G מכיל מעגל המילטון.

משפט 50. משפט דיראק. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט עם $n \geq 3$. אזי, אם $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ אזי G מכיל מעגל המילטון.

חלק V

זיווגים

הגדרה 23. יהי גרף $G = (V, E)$. זיווג הוא תת קבוצה של קשתות $M \subseteq E$, בלי קודקודים משותפים זרה בקודקודים.
א. קודקוד v נקרא M־רווי אם הוא נמצא באחת הצלעות של M, אחרת v נקרא M־בלתי רווי.
ב. זיווג נקרא זיווג מושלם אם כל הקודקודים בגרף רווים, כלומר $|M| = \frac{n}{2}$
ג. M נקרא זיווג מקסימלי אם לא קיים זיווג M' כך ש$M \subset M'$ (לא ניתן להוסיף צלע מבלי לשבור את תכונת הזיווג).
ד. M נקרא זיווג מקסימום אם לא קיים זיווג M' כך ש$|M| < |M'|$
ה. זיווג מושלם $\Longrightarrow$ זיווג מקסימום $\Longrightarrow$ זיווג מקסימלי

הגדרה 24. יהי זיווג M. מסלול $(e_1, ..., e_m)$ נקרא זיווג מתחלף אם הוא מכיל קודקודים בין צלעות בM לבין צלעות שאינן בM לסירוגין. מסלול מתחלף נקרא מרחיב אם $P = (v_0, ..., v_k)$ אם P מסלול מתחלף, וכן $v_0 \neq v_k$ ושניהם לא רווים.

משפט 51. משפט ברג. יהי $G = (V, E)$ גרף ויהי M זיווג. אזי, M הוא זיווג מקסימום $\iff$ אין מסלול מתרחב מחליף בגרף.

משפט 52. יהי $G=(V,E)$.

א. אם $G=P_n$ אזי גרף המסלול מכיל זיווג מושלם אמ"מ המסלול באורך אי זוגי (מס' הקודקודים זוגי)

ב. אם $G=C_n$ אזי גרף המעגל מכיל זיווג מושלם אמ"מ המעגל באורך אי זוגי (מס' קודקודים זוגי)

ג. בקליקה $G=K_n$ יש זיווס מושלם אמ"מ מס' הקודקודים זוגי.

ד. בגרף קשיר עם מס' אי זוגי של קודקודים לא קיים זיווג מושלם.

ה. בגרף לא קשיר עם רכיב קשירות בו מס' הקודקודים אי זוגי אין זיווג מושלם.

סימון: נסמן $o(H)$ מס' רכיבי הקשירות האי זוגיים בגרף H.

משפט 53. משפט טאט. יהי גרף $G=(V,E)$. אזי, G מכיל זיווג מושלם $\iff$ לכל $S\subseteq V$ מתקיים $o(G\backslash S)\leq |S|$.

משפט 54. נוסחת טט־ברג. יהי גרף $G=(V,E)$. אורך זיווג מושלם בגרף הינו

$$MM(G)=min_{U\subseteq V}\frac{|V|+|U|-o(G\backslash U)}{2}$$

משפט 55. משפט החתונה של הול. יהי גרף דו צדדי, $G=(V=L\cup R,E)$ כך ש$|R|=|L|$. אזי, G מכיל זיווג מושלם אמ"מ לכל קבוצה $S\subseteq L$ מתקיים $|S|\leq|\Gamma(S)|$. **משפט** $Hall$ **המוכלל:** בגרף דו צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ כאשר $|V_1|\leq|V_2|$ יש זיווג המרווה את V_1 אם ורק אם לכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$.

הגדרה 25. יהי $G=(V,E)$ גרף. נסמן ב$c(G)$ את מס' רכיבי הקשירות בG.

הגדרה 26. יהי $G=(V,E)$ גרף. קשת $e\in E$ נקראת קשת חתך אם $c(G\backslash\{e\})>c(G)$. כלומר, אם היא מגדילה את מס' רכיבי הקשירות (בפרט, בגרף המקורי חיברה בין שניים כאלו)

משפט 56. משפט פיטרסן. בכל גרף $G=(V,E)$ שהוא 3 רגולרי ללא קשתות חתך, קיים זיווג מושלם.

משפט 57. משפט קוניג אוורגרי. יהי $G=(V,E)$ גרף דו צדדי, אזי $VC(G)=MM(G)$.

הערה. עבור גרף $G=(V,E)$ קבוצה $A\subseteq V$ נקראת כיסוי בצמתים אם לכל צלע $\{v,u\}\in E$ לפחות אחת מבין v,u שייך לA. נסמן ב$VC(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי בצמתים של G.

משפט 58. משפט גאלאיי. יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים ללא צמתים מבודדים. אזי, $MM(G)+EC(G)=n$.

הערה. עבור גרף $G=(V,E)$, קבוצה $E'\subseteq E$ נקראת כיסוי בקשתות אם לכל קודקוד $v\in V$ קיימת קשת $\{v,u\}\in E'$. נסמן ב$EC(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי בקשתות של G.

חלק VI

גרפים מישוריים

הגדרה 27. שיכון למישור הוא ציור של הגרף, כך שאין שתי קשתות שנחתכות בציור. כמו כן, חיתוך בקודקודים לא נחשב חיתוך. גרף נקרא מישורי, אם קיים לו שיכון למישור. פורמלית: שיכון למישור הוא פונקציה חד חד ערכית מהקודקודים ל$\mathbb{R}^2$ ולכל צלע $(u,v) \in E$ ישנה מסילה $g_e : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ וכן $g_e(0) = u$ וכן $g_e(1) = v$ ולכל e, e' לא קיימים $\alpha, \beta \in (0,1)$ כך ש$g_e(\alpha) = g_e(\beta)$.

הגדרה 28. פאה היא אזור שתחום בין הצלעות: פאה היא מחלקת שקילות ששתי נקודות נמצאות באותה פאה אמ"מ ניתן להעביר בניהם מסילה שלא חותכת את הקשתות.

משפט 59. נוסחת אוילר. יהי $G = (V,E)$ גרף מישורי קשיר עם n קודקודים, m צלעות וf פאות. אזי, $n + f - m = 2$.

משפט 60. יהי $G = (V,E)$ גרף מישורי קשיר כך ש$n \geq 3$. אזי, $m \leq 3n - 6$.

הגדרה 29. דרגה של פאה, E_f תוגדר להיות מס' הצלעות שחלות על פאה.

א. כל צלע בגרף מישורי חלה בלכל היותר 2 פאות. כלומר, $\sum_{f \in F} E_f \leq 2m$.

ב. אם אורך המעגל הפשוט הקצר ביותר הוא d, דרגתה של כל פאה מקיימת $E_f \geq d$.

משפט 61. הכללה לנוסחת אוילר. אם G מישורי ובעל d רכיבי קשירות מתקיים $n + f - m = d + 1$.

משפט 62. א. K_5 אינו מישורי.

ב. כל גרף מישורי בהכרח מכיל קודקוד מדרגה לכל היותר 5.

ג. $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הגדרה 30. H הוא מינור של $G = (V,E)$ אם הוא מתקבל ע"י אחת משלושת הפעולות הבאות מG כמה פעמים שרוצים (מס' סופי של פעמים):

א. מחיקת צלע

ב. מחיקת קודקוד וכל הצלעות שחלות עליו.

ג. כיווץ של זוג קודקודים שיש בניהם צלע.

משפט 63. משפט וגנר קרטובסקי. יהי $G = (V,E)$. אזי, G מישורי אמ"מ הוא לא מכיל את $K_5, K_{3,3}$ כמינור.

חלק VII

צביעה

הגדרה 31. יהי גרף $G = (V,E)$. פונקציית k צביעה היא פונקציה $\chi : V \to \{1, ..., k\}$ אם לכל $\{u,v\} \in E$ מתקיים $\chi(u) \neq \chi(v)$. גרף נקרא k צביע אם ניתן לצבוע אותו בk צבעים בצורה חוקית. המס' הכרומטי של הגרף, $\chi(G)$ הוא מס' k הצבעים המינימלי שניתן לצבוע את G בו.

משפט 64. נסתכל על כל הקודקודים המקיימים $X = \{v | \chi(v) = i\}$, אזי X בלתי תלויה.

משפט 65. גרף $G=(V,E)$ הוא דו צדדי $\iff$ G הוא 2 צביע.

משפט 66. יהי $G=(V,E)$ המקיים $\Delta(G)=k$, אזי ניתן לצבוע את G ב$k+1$ צבעים.

משפט 67. את הקליקה K_n ניתן לצבוע בn צבעים (ואי אפשר בפחות).

משפט 68. אם גרף G מכיל קליקה K_q, אזי בהכרח $\chi(G)\geq q$

הגדרה 32. $\omega(G)$ היא גודל הקליקה הגדולה ביותר בG. נבחין כי $\omega(G)\neq\chi(G)$ (יתכן שוויון, אך זה לא בהכרח).

הגדרה 33. גרף $G=(V,E)$ יקרא גרף אינטרוול כך שלכל $v_i\in V$ קיים אינטרוול $[l_i,r_i]\subset\mathbb{R}$ וכן ישנה קשת $\{v_i,v_j\}\in E$ אמ"מ האינטרוולים נחתכים.

משפט 69. יהי $G=(V,E)$ גרף אינטרוול, אזי $\chi(G)=\omega(G)$.

משפט 70. משפט מיצ'לסקי. לכל מס' $k\geq 1$, קיים גרף M_k ללא משולשים כך ש$\chi(M_k)=k$. (כלומר, אם הגרף ללא משולשים, זה לא גורר חסם עליון על $\chi(G)$. נשים לב שתמיד ישנו חסם תחתון $\chi(G)\geq\omega$ אם G מכיל קליקה K_ω).

הגדרה 34. גרף יקרא דליל אמ"מ מתקיים $m<<n^2$.

משפט 71. יהי $G=(V,E)$ גרף עם m צלעות. אזי, $\chi(G)\leq O(\sqrt{m})$

משפט 72. משפט ברוקס. יהי $G=(V,E)$ גרף עם $\Delta(G)=k$ באשר $k\geq 3$, אזי G הוא k־צביע אלא אם כן הוא קליקה.

(כלומר, המקרה היחיד בו אפשר לצבוע רק עם $k+1$ צבעים זה שהוא קליקה).

משפט 73. משפט 6 הצבעים. כל גרף מישורי $G=(V,E)$ הוא 6־צביע.

משפט 74. משפט 5 הצבעים. כל גרף מישורי $G=(V,E)$ הוא 5־צביע.

משפט 75. משפט 4 הצבעים. כל גרף מישורי $G=(V,E)$ הוא 4־צביע.

חלק VIII
צביעת קשתות

הגדרה 35. יהי גרף $G=(V,E)$. צביעת קשתות היא פונקציה $\chi':E\to\{1,...,k\}$ כך שלכל זוג קשתות $e_1,e_2\in E$ אם הקשתות מכילות קודקוד משותף אזי $\chi'(e_1)\neq\chi'(e_2)$.

הגדרה 36. יהי $G=(V,E)$ גרף. ה$Line\ Graph$ הוא גרף באשר $V(L(G))=E$, כלומר: קודקודיו הם הקשתות, וכן בין כל שני קודקודים של $L(G)$ ישנה צלע אמ"מ בגרף G לצלעות ישנו קודקוד משותף. דהיינו, $E(L(G))=\{(e,e')|e\cap e'\neq\emptyset\}$

משפט 76. עבור ה$Line\ Graph$ מתקיים: $|V(L(G))|=m$ וכן $|E(L(G))|=\sum_{v\in V}\binom{deg_G(v)}{2}$

הערה 1. צביעת קשתות של הגרף המקורי, שקולה לצביעת קודקודים של $L(G)$. (שכן, נצבע שני קודקודים של $L(G)$ באותו הצבע, אמ"מ לא קיימת קשת (e,e'). המשמעות היא כי לא קיים קודקוד שחל בשתי הקשתות (אחרת הייתה קשת) ולכן אין (e,e'), ולכן ניתן לצבוע אותם באותו הצבע, כלומר גם בגרף המקורי: את הקשתות שקודקודים אלו מייצגים, ניתן לצבוע באותו צבע כי אין להם שכן משותף).

הגדרה 37. האינדקס הכרומטי של הגרף הוא מס' הצלעות המינימלי שיש לצבוע בשביל לקבל צביעה חוקית. נסמנו $\chi'(G)$ ומתקיים $\chi'(G) = \chi(L(G))$

משפט 77. זיווג M בG הוא קבוצה בלתי תלויה ב$L(G)$ [כעת אין בינהם קשתות], וכן כל מחלקת צבע בG של קשתות הינה זיווג.

משפט 78. מתקיים:
א. גרף כוכב מקיים $\chi'(G) = \Delta(G)$.
ב. יהי $T = (V, E_T)$ עץ. אזי, $\chi'(G) = \Delta(T)$
ג. משפט קוניג: לכל גרף דו צדדי מתקיים $\chi'(G) = \Delta(G)$.

משפט 79. צביעה בקשתות של הגרף בk צבעים היא חלוקה של הגרף לk זיווגים מושלמים.

משפט 80. משפט ויזינג. יהי $G = (V, E)$ גרף, אזי מתקיים $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.
נאמר כי גרף הוא ממחלקה 1 אם ניתן לצבוע אותו בקשתות עם $\Delta(G)$ צבעים.
נאמר כי גרף הוא ממחלקה 2 אם ניתן לצבוע אותו בקשתות עם $\Delta(G) + 1$ צבעים.

משפט 81. יהי $G = (V, E)$ גרף. אזי, מתקיים $\chi'(G) \geq \frac{|E|}{MM(G)}$

מסקנה. יהי גרף $G = (V, E)$. אם $|E| > MM(G) \times \Delta(G)$ אזי G ממחלקה 2.

הגדרה 38. יהי $G = (V, E)$ גרף ובנוסף לכל $v \in V$ נתונה רשימה $L_V \in \mathbb{N}$ המגדירה את הצבעים בהם מותר לצבוע את הצומת v. צביעה חוקית מהרשימות $L = \{L_v\}_{v \in V}$ היא פונקציה $C : V \to \mathbb{N}$ המקיימת:
א. C צביעה חוקית של G במובן הרגיל.
ב. לכל קודקוד $v \in V$ מתקיים $C(v) \in L_v$
גרף נקרא k־בחיר או k־צביע מרשימות אם לכל משפחת רשימות $L = \{L_v\}_{v \in V} \subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל קודקוד $v \in V$ מתקיים $|L_v| = k$ וG צביע באופן חוקי מהרשימות L. מספר הבחירה הוא $ch(G)$ והוא המספר k המינימלי ביותר עבורו G k־בחיר.

משפט 82. כלל הטענות הבאות נכונות אודות צביעה ברשימות:
א. תמיד מתקיים $ch(G) \geq \chi(G)$, אין בהכרח שוויון.
ב. לכל $k \in \mathbb{N}$ אם $n = \binom{2k-1}{k}$ אזי $K_{n,n}$ אינו k־בחיר. כלומר בהכרח $ch(G) > k$.
ג. כל גרף מישורי דו"צ הוא 3 בחיר.
ד. כל גרף מישורי הוא 5 בחיר.

חלק IX

השיטה ההסתברותית ותורת הגרפים האקסטרמלית

הגדרה 39. גרף תחרות $G = (V, E)$ הוא גרף מכוון שלכל $u, v \in V$ רק קשת אחת מבין $(u, v), (v, u) \in E$ (בהכרח אחד מן הזוגות בקשתות ורק אחד מהם). בגרף תחרות מתקיים $|E| = \binom{n}{2}$.

הגדרה 40. תת קבוצה $A \subseteq V$ היא טרנזטיבית אם לכל $(x, y), (y, z) \in E \implies x, y, z \in A$ $(x, z) \in E$. כלומר, קיים סדר כלשהו על A $(v_1, ..., v_l)$ שבו $i < j \implies (v_i, v_j) \in E$.

הגדרה 41. יהי גרף תחרות $G = (V, E)$, באשר $|V| = n$, אזי ישנה בהכרח תת קבוצה טרנזטיבית מגודל $\lfloor log(n) \rfloor$

משפט 83. בגרף תחרות בהכרח ישנו קודקוד המקיים $deg_{out}(v_1) \geq \frac{n-1}{2}$

משפט 84. אם $\binom{n}{k} \times \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$ אזי קיים גרף תחרות $G = (V, E)$ כך ש$|V| = n$ ללא קבוצה טרנזטיבית בגודל k.

משפט 85. כל גרף $G = (V, E)$ עם m צלעות מכיל תת גרף דו צדדי עם לפחות $\frac{m}{2}$ צלעות.

משפט 86. יהי גרף $G = (V, E)$ כך ש$|V| = 2n$ זוגי, אזי קיים תת גרף דו צדדי בגודל $m \times \frac{n}{2n-1}$. אם $|V| = 2n + 1$ אזי קיים תת גרף דו צדדי בגודל $m \times \frac{n+1}{2n+1}$

הגדרה 42. מודל גרף מקרי $G(n, p)$ הינה התפלגות על גרפים מעל קבוצת הקודקודים $\{1, ..., n\}$ בו כל קשת אפשרית מופיעה בהסתברות $0 \leq p \leq 1$. כלומר, ההסתברות לקבל כל גרף מקרי בודד שכזה המכיל m קשתות הינה $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$

הגדרה 43. גרף מקרי G מעל קבוצת הקודקודים $\{1, ..., n\}$ הוא בעל התפלגות אחידה אם הוא גרף שההסתברות להגדיל אותו מבין אוסף הגרפים על הקודקודים $\{1, ...n\}$ מתפלג אחיד, כלומר $Pr(G) = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$.

משפט 87. ליניאריות התוחלת. עבור $X_1, ..., X_n$ משתנים מקריים מתקיים $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$

משפט 88. **אי שוויון מרקוב:** עבור כל $a > 0$, אם X מ"מ המקיים $X > 0$ אזי $Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$

הגדרה 44. קבוצה $X \subseteq \mathbb{Z}$ נקראת $sum - free$ אם לא קיימים $a, b, c \in X$ כך ש$a + b = c$. (יתכן $a = b$).

משפט 89. **משפט ארדוס:** בהינתן קבוצה A של שלמים ללא אפס, כך ש$|A| = n$. A מכילה תת קבוצה $sum - free$ בגודל $\frac{n}{3}$ לפחות.

משפט 90. נתון גרף G d רגולרי. אזי, קיימת קבוצה בלתי תלויה מגודל לפחות $IS(G) \geq \frac{n}{d+1}$.

משפט 91. יהי גרף $G = (V, E)$, תמיד קיימת קבוצה בלתי תלויה מגודל $IS(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{deg(v)+1}$.

משפט 92. כל גרף $G = (V, E)$ מכיל קליקה מקסימלית מגודל $MC(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - deg_G(v)}$

הגדרה 45. בהינתן גרף $G = (V, E)$, קבוצה $U \subseteq V$ נקראת קבוצה שולטת אם לכל קודקוד ב$V \backslash U$ ישנו שכן בU.

משפט 93. כל גרף $G = (V, E)$ עם דרגה מינימלית δ מכיל קבוצה שולטת מגודל $\frac{ln(\delta+1)+1}{\delta+1} \times n \geq$.

הגדרה 46. **הגדרה:** עבור גרף $G = (V, E)$, מס' החיתוך של הגרף $(crossing\ number)$ הוא מס' החיתוכים המינימלי מבין השיכונים של G במישור (כלומר השיכון עם ערך החיתוכים הקטן ביותר). אותו נסמן ב$cr(G)$. כל זוג קשתות שנחתכות, נחשבות כחיתוך אחד.

משפט 94. **טענה.** גרף G הוא מישורי $\iff cr(G) = 0$.

משפט 95. **למת החיתוכים.** יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט כך ש$|V| = n, |E| = m$. אם $m \geq 4n$ אזי מתקיים $cr(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}$

משפט 96. לכל גרף פשוט $G = (V, E)$ מתקיים $cr(G) \geq |E| - 3|V|$.

הגדרה 47. צביעת היפר גרפים. היפר גרף K יוניפורמי (K גרף) הוא זוג $H = (V, E)$ כאשר V היא קבוצת קודקודים סופית וE היא קבוצת צלעות כך שכל $e \in E$ היא תת קבוצה של קודקודים בגודל k. כלומר $e \subseteq V$ וכן $|e| = k$. נאמר כי k גרף H הוא r־צביע אם ניתן לצבוע באופן חוקי את הקודקודים שלו על ידי r צבעים (כלומר אין קודקודים סמוכים באותו צבע, מה שאומר שאין קשת מונכרומנטית). נסמן ב$m(k)$ את המספר המינימלי של צלעות שיכולות להיות בk גרף שהוא לא 2 צביע.

הגדרה 48. **קשת מונכרומנטית** היא קשת שכל k הקודקודים שלה נצבעו באותו הצבע.

משפט 97. **משפט ארדוס:** $m(k) \geq 2^{k-1}$ לכל $k \geq 2$. כלומר: כל k גרף עם פחות מ2^{k-1} קשתות, הוא כן 2 צביע.

משפט 98. בהינתן קבוצה של 6 אנשים, בהכרח ישנם 3 אנשים שמכירים אחד את השני או 3 אנשים שלא מכירים אחד את השני.

הגדרה 49. מספר רמזי $s,t \in \mathbb{N}$ יסומן $R(s,t)$ הוא המספר המינימלי כך ש**בכל** צביעה של קשתות K_R באדום וכחול, יש לפחות קליקה אדומה K_s או קליקה כחולה K_t כתת גרף. נבחין כי ההגדרה שקולה לקחת כתת גרף את הקשתות האדומות, ואז קליקה אדומה בגרף המקורי היא קליקה בגרף החדש, וקליקה כחולה בגרף המקורי היא קבוצה בת"ל בגרף החדש. במילים אחרות, מס' רמאזי הוא גודל הגרף המינימלי (מס' הקודקודים המינימלי) בו יש קליקה מגודל s או קבוצה בלתי תלויה מגודל t.

משפט 99. טענות על רמזי:

א. $R(3,3) = 6$
ב. לכל $s,t \geq 1$ מתקיים $R(s,1) = R(1,t) = 1$
ג. $R(s,t) = R(t,s)$
ד. $R(s,2) = s$, לכל $s > 1$
ה. $\forall s,t \geq 2 : R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$
ו. $R(4,4) = 18$
ז. $R(4,5) = 25$
ח. $R(3,4) = 9$

משפט 100. **משפט ארדוס שזקרס:** לכל $s,t \geq 1$ $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

משפט 101. משפט מאנטל. יהי G גרף בעל n קודקודים ללא משולשים. אזי בG יש לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ צלעות.