לינארית 2 ־ סיכום הרצאות למבחן

22 ביוני 2025

*הסיכום לא כולל הוכחות וכן כולל הערות חשובות
* הסיכום נכתב תוך כדי הרצאות סמסטר ב' תשפ"ה של עדי בן־צבי וייתכן שנפלו בו טעויות, לכן השימוש על אחריותכם בלבד
* ה. ־ הגדרה, ט.־ טענה, מ.־משפט

סיכום מתומצת (מה שחשוב לליני 2) של אלגברה לינארית 1

ט. בשדה אין מחלקי אפס
ט. עבור שתי מטריצות־

$$\forall_{1\leq i\leq k} C_i(AB) = A * C_i(B)$$

$$\forall_{1\leq i\leq k} R_i(AB) = R_i(A) * B$$

$$Ae_i = C_i(A)$$

$$e_i^t A = R_i(A)$$

ט. כאשר V מ"ו וכן $A, B \subseteq V$

$$sp(A) + sp(B) = sp(A + B)$$

ט. משפט השלישי חינם: יהי V מ"ו ותהי $B \subseteq V$. אזי כל שניים שמתקיימים גוררים את השלישי:
א. B בסיס
ב. B פורשת את V
ג. $|B| = dimV$.
ט. משפט המימדים: יהיו U, W ת"מ של מ"ו V. אזי ־ $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$
תזכורת ־ מימד מרחב האפס הוא מס' המשתנים החופשיים.
ט. משפט הדרגה־ $dim(N(A)) + rank(A) = n$
ט. גרעין העתקה $kerT$ הוא כל הוקטורים v כך ש$T(v) = 0$.
ט. T חח"ע $\iff kerT = \{0\}$
ט. T על $\iff dimImT = dimU$ (העתקה אל U)

ט. **משפט הדרגה** $dimImT + dimKerT = dimV$
ט. אם יש לי אופרטור לינארי, אזי T חח"ע $\Longleftrightarrow$ T על.

תמורות ודטרמיננטות

ה. תמורה היא פונקציה חח"ע ועל $\sigma : (1,...,n) \longrightarrow (1,....n)$
ה. אוסף תמורות על n איברים מסומן S_n.
ה. חילוף סדר בתמורה הוא מצב בו $j > i$ אך $\sigma(j) > \sigma(i)$.
**טריק למציאת מס' חילופי הסדר - להעביר קווים בין אותם המספרים (1 יועבר ל1.. וכו') ולספור את מס' החיתוכים.
ה. $sign(\sigma) = (-1)^x$ כאשר x= מס' חילופי הסדר
ה. σ נקראת תמורה זוגית אם $sign(\sigma) = 1$ ותמורה אי זוגית אם $sign(\sigma) = -1$.
ה. דטרמיננטה היא פונקצייה $|A| : F^{n*n} \longrightarrow F$ המוגדרת כך -
$|A| = \sum_{s \in S_n} sign(\sigma) * A_{1\sigma(1)} * .... * A_{n\sigma(n)}$

למשל - דטרמיננטה של מטריצה 2×2: עבור $A = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\}$ מתקיים כי $|A| = ad - bc$
ט. תהי $A \in F^{n*n}$ משולשית עליונה/תחתונה, אזי - $|A| = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$
-♡- $|A + B| \neq |A| + |B|$
-♡- $|I| = 1$
מ. לינאריות הדטרמיננטה בשורה:

$$\left\{ \begin{matrix} -v_1- \\ . \\ -u + \alpha w- \\ . \\ -V_n- \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -v_1- \\ . \\ -u- \\ . \\ -V_n- \end{matrix} \right\} + \alpha \left\{ \begin{matrix} -v_1- \\ . \\ -w- \\ . \\ -V_n- \end{matrix} \right\}$$

מ. תהי $A \in F^{n*n}$ עם 2 שורות זהות, אזי $|A| = 0$.
מ. תהי $A \in F^{n*n}$ עם שורת אפסים, אזי $|A| = 0$.
מ. השפעת פעולות שורה על דטרמיננטה -
תהי $A \in F^{n*n}$ותהי $B \in F^{n*n}$ המתקבלת ע"י פעולת שורה ρ על A .
אזי,
1. $\rho = \alpha R_i \Longleftarrow |B| = \alpha|A|$
2. $\rho = R_i \longleftrightarrow R_j \Longleftarrow |B| = -|A|$
3. $\rho = R_i + \alpha R_j \Longleftarrow |B| = |A|$

ט. תהי $A \in F^{n*n}$ ותהי ρ פעולת שורה, אזי $|\rho(I) * A| = |\rho(I)| * |A|$
ט. (מסקנה מהטענה לפני הקודמת) תהי $A \in F^{n*n}$ותהי $B \in F^{n*n}$ המתקבלת ע"י רצף פעולות שורה על A. אזי, קיים $\alpha \in F$ כך ש-$\alpha \neq 0$ וכן $|A| = \alpha|B|$
ט. תהי $A \in F^{n*n}$, אזי A הפיכה $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$.
ט. תהיינה $A, B \in F^{n*n}$, אזי $|AB| = |A| * |B|$. ובאינדוקציה $|\Pi_{i=1}^{n} A_i| = \Pi_{i=1}^{n} |A_i|$

תכוֹנות

1. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$
2. $|A^t| = |A|$
3. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
4. $|AB| = |BA|$

(הכללה) - תהיינה $A_1, ...A_k$מטריצות, אזי - $|\prod_{i=1}^{k} A_i| = |A_1| * ...... * |A_k|$
מ. $|\rho(I)| = |\rho(I)^t|$

דרכים לחישוב דטרמיננטה:

1. עם תמורות - בהצלחה לכם.

2. עם דירוג ע"י פעולות שורה בהתאם למשפט שצויין כאן מעלה.
3. מינורים –

ה. תהי $A\in F^{n*n}$, אזי $M\in F^{n*n}$ נקראת המינור של A והיא מטריצה שמחקו לה את השורה ה־i והעמודה ה־j .
נתבונן בדוגמה לחישוב דטרמיננטה עם שיטת המינורים:

$$|A|=|\left\{\begin{array}{ccc}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{array}\right\}|=1*|\left\{\begin{array}{cc}5&6\\8&9\end{array}\right\}-2*|\left\{\begin{array}{cc}4&6\\7&9\end{array}\right\}+3*|\left\{\begin{array}{cc}4&5\\7&8\end{array}\right\}|=.....=0$$

כאשר מה שעשינו כאן הוא לפתח לפי שורה ראשונה, ניתן לפתח לפי כל שורה/עמודה – ועדיף כזו עם כמה שיותר אפסים.

*יש לשים לב כי בשור אי זוגית מקדמים יהיו $+,-,+,-...$ ואילו בשורה זוגית המקדמים יהיו $-,+,-,+,....$

מסקנה. פעולות עמודה משפיעות על הדטרמיננטה בדומה לפעולות שורה (מדוע? עושים A^t, הדטרמיננטה לא משתנה, נעשה פעולות על השורות ואז נעשה טרנספוז שוב)

*** הדיון בקורס הוא על דטרמיננטות של מטריצות ריבועיות בלבד.**

ט. פיתוח לפי שורה i. לכל $1\le i\le n$ מתקיים כי – $|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}*A_{ij}*|M_{ij}|$

ט. פיתוח לפי עמודה i. לכל $1\le j\le n$ מתקיים כי – $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}*A_{ij}*|M_{ij}|$

דטרמיננטה של אופרטור לינארי

אופרטור לינארי הוא העתקה לינארית ממרחב לעצמו.

הגדרה: יהי V מ"ו נ"ס מעל F. ויהי $T:V\longrightarrow V$ אופרטור לינארי. יהיה B בסיס סדור ל־V . נגדיר:
$|T|:=|[T]_B^B|$

ט. הדטרמיננטה של הע"ל מוגדרת היטב ולא תלויה בבחירת הבסיס B.

ערכים עצמיים, דמיון מטריצות, פולינום אופייני

ה. תהי $A\in F^{n*n}$, $\lambda\in F$ נקרא ערך עצמי של A אם קיים $v\neq 0$ כך ש$v\in F^n$ ומתקיים – $Av=\lambda v$. במקרה זה v נקרא וקטור עצמי של ערך עצמי λ.

(מה שהמטריצה A עושה לוקטור זה כיווץ/מתיחה)

ט. תהי $A\in F^{n*n}$, אזי $\lambda\in F$ הוא ע"ע של $A\Longleftrightarrow|\lambda I-A|=0$

ט. A לא הפיכה $\Longleftrightarrow$ 0 הוא ערך עצמי של A (יתכן שיש עוד וכן שקול כמובן לכיוון ההפוך)

ה. תהי $A\in F^{n*n}$ ויהי $\alpha\in F$ ע"ע של A.

המרחב העצמי של α יוגדר כך: $V_\alpha=N(\alpha I-A)$ כלומר המרחב העצמי מוגדר להיות האיחוד של אפס + כל הוקטורים העצמיים של A עבור ערך עצמי α.

* מסקנה חשובה – v ו"ע של T עבור $\lambda\Longleftrightarrow[v]_n$ ו"ע של $[T]_B^B$ עבור λ.

דמיון מטריצות:

ה. תהיינה $A,B\in F^{n*n}$.
נאמר כי A דומה ל־B אם קיימת P הפיכה כך ש – $P^{-1}AP=B$.
ט. דמיון הוא יחס שקילות
כלומר, A דומה לעצמה. (רפלקסיביות)
אם A דומה ל־B , גם B דומה ל־A (סימטריות)
אם A דומה ל־B ו־B דומה ל־C , אזי A דומה ל־C (טרנזטיביות)

תכונות של דמיון:

יהיו $A,B\in F^{n*n}$ דומות. אזי,
1. $|A|=|B|$
2. $tr(A)=tr(B)$
3. $rank(A)=rank(B)$
4. $P_A(x)=P_B(x)$

5. יש להן אותם ערכים עצמיים.
6. יש להן אותן ערכים עצמיים ואותו פולינום אופייני $\Longleftarrow$ יש להם אותו ריבוי אלגברי
7. יש להם אותו ריבוי גאומטרי (הוכח בתרגיל בית)

** ההפך לא הנכון. כלומר גם אם יש שתי מטריצות שכל התכונות האלו נכונות לגביהן, הן לא בהכרח דומות.

ה. תהי $A \in F^{n*n}$, אזי $P_A(x) = |xI - A|$נקרא הפולינום האופייני של A. הערכים העצמיים הם השורשים של הפולינום האופייני.

-♡- מטריצות מייצגות של אותה העתקה הן דומות:
$[T]_B^B = [I]_B^C * [T]_C^C * [I]_C^B$

ט. ל־A ול־A^tיש אותם ערכים עצמיים.

*בסיס למרחב עצמי הם הוקטורים העצמיים

לכסון

ה. תהי $A \in F^{n*n}$, נאמר כי A לכסינה/ניתנת ללכסון אם היא דומה למטריצה אלכסונית D.

*אם מטריצה היא אלכסונית היא דומה לעצמה ובפרט לכסינה.

ט. תהי $A \in F^{n*n}$, אזי Aלכסינה $\Longleftrightarrow$ קיים בסיס ל־F^nהמורכב מוקטורים עצמיים של A.

**מסקנה חשובה: אם A לכסינה, אזי p היא מטריצה שעמודותיה הם בסיס מוקטורים עצמיים ו־D המתאימה היא מטריצה שבאלכסון שלה מופיעים הע"ע בהתאם לסדר שסידרנו ב־P את הו"ע.

ה. תהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי. נאמר כי T לכסינה אם קיים בסיס B ל־V כך ש־$[T]_B^B$ אלכסונית.

ט. עבור אופרטור לינארי, בהינתן שני בסיסים B ו־C , $[T]_B \sim [T]_C$.

ט. תהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי. ויהי C בסיס סדור של V. אזי,
T לכסינה $\Longleftrightarrow$ $[T]_C^C$ לכסינה

הערה: Tלכסינה $\Longleftrightarrow$ יש ל־T n וקטורים עצמיים בת"ל.
(אם T יצאה לכסינה, אזי נסמן את הו"ע העצמיים $B = \{V_1, ...V_n\}$ ואם נחשב $[T]_B^B$ זו האלכסונית הנדרשת)

שימוש חשוב: למצוא את A^{2025}למשל. שלבים :

1. נחפש ע"ע
2. נחפש ו"ע
3. נבדוק אם ו"ע יוצרים בסיס $\Longleftarrow$לכסינה.
4. נפעול בהתאם למסקנה למעלה ונכפיל. במצב כזה יתקיים $A^{2025} = P^{-1}D^{2025}P$

תכונות הפולינום האופייני:

1. השורשים שלו הם ע"ע.
2. אם A משולשית כך ש־ $A = \left\{ \begin{array}{ccccc} X_1 & & & & \\ 0 & X_2 & & & \\ 0 & 0 & . & & \\ 0 & 0 & 0 & . & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n \end{array} \right\}$, אזי $P_A(\lambda) = (\lambda - X_1) * ....(\lambda - X_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda - X_i)$
3. הפ"א הוא פולינום מתוקן מדרגה n. כלומר המקדם של החזקה הגבוהה ביותר יהיה 1.
4. $a_{n-1} = -tr(A)$ (כלומר מקדם לפני ההכי גבוה)
$a_0 = (-1)^n * |A|$.

-♡- בהינתן פ"א ממעלה 2, יתקיים כי - $p_A(X) = X^2 - tr(A)X + |A|$

** אם הפ"א של שתי מטריצות זהה, האם הן דומות גם? וודאי שלא!
דוגמה נגדית - בהינתן $A = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$ ו־$B = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$. אכן הפ"א זהה ושווה ל - $p(x) = (x-1)^2$. אך הן אינן דומות שכן - נב"ש כי הן דומות: אזי קיימת P הפיכה כך ש - $P^{-1}BP = A$, $B = I$ ולכן $\Longleftarrow$ $P^{-1}IP = A$ $\Longleftarrow$ $A = I$ בסתירה.

פ"א של הע"ל:

הגדרה: תהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי. ויהי B בסיס של V. הפ"א של T מוגדר כך -
$P_{[T]_B^B}(X)$

*אכן מוגדר היטב לכל בחירת בסיס שונה.

ריבוי אלגברי וגאומטרי

הגדרה: תהי $A \in F^{n*n}$. ויהי α ע"ע של A.
הריבוי האלגברי של α מסומן K_αוהוא מוגדר להיות המס' הטבעי הגדול ביותר שמקיים: $(\lambda-\alpha)^{k_\alpha}|P_A(\lambda)$. כלומר, החזקה הגבוהה ביותר שמתחלק בה הפולינום.
הריבוי הגאומטרי של α מוגדר להיות - $G_\alpha = dim(V_\alpha)$
מ. תהי $A \in F^{n*n}$ כך ש-λ ו μ הם ע"ע של A ו-v ו-w הם ו"ע בהתאמה. אזי, v, w בת"ל.
מ. תהי A מטריצה עם n ע"ע שונים, אזי A לכסינה.
מ. מהתרגול אז צריך להוכיח - אם A לכסינה, $A \sim A^t$.

משפט - התנאים הבאים שקולים:

1. A לכסינה.
2. סכום הריבווים הגאומטרים הוא n.
3. $p_A(x)$הוא מל"ל - מתפרק לגורמים לינאריים+ לכל ערך עצמי, הריבוי הגאומטרי שווה לריבוי האלגברי.
4. יש ל-F^n בסיס המורכב מו"ע.

משפט חלוקה עם שארית: יהיו $f(x), g(x) \in F[x]$ כך ש-$deg(f(x)) \geq deg(g(x))$
אזי, קיימים $q(x), r(x) \in F[x]$ כך ש -
$f(x) = g(x) * q(x) + r(x)$
$deg(r(x)) < deg(g(x))$

ט. יהי $f(x)$ פולינום ויהי $\alpha \in F$.
אזי, $x-\alpha|f(x) \iff \alpha$ שורש של f.
ט. תהי $A \in F^{n*n}$. ויהי α ע"ע של A. אזי, $1 \leq g_\alpha \leq K_\alpha \leq n$
טענה (חשובה) - ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל.
-♡- כי אם לע"ע 1 יש שני ו"ע - $\{v_1, v_2\}$ ולע"ע 2 יש שני ו"ע - $\{v_3, v_4\}$. כן מתקיים כי $\{v_1, v_3\}$ בת"ל אך הקבוצה - $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ אינה בת"ל בהכרח.
ט. תהי $A \in F^{n*n}$. ויהיו $\lambda_1, ...\lambda_k$ע"ע שונים של A, נסמן ב-B_iאת הבסיס למ"ע של λ_iלכל $1 \leq i \leq k$. אזי, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ בת"ל.
(כלומר איחוד הבסיסים למרחב העצמי של כל הע"ע השונים נותן קבוצה בלתי תלויה לינארית)
ט. תהי $A \in F^{n*n}$. ויהיו $\lambda_1, ...\lambda_k$ע"ע שונים של A. אזי,
הפ"א של A מל"ל $\iff$ סכום ריבווים אלגבריים של הע"ע שווה ל-n.
-♡- מעל $\mathbb{C}$ כל פולינום הוא מל"ל ולכן ב-$\mathbb{C}$תמיד סכום הריבויים האלגבריים שווה n.
מ. A לכסינה $\iff$ הפ"א של A מל"ל וגם לכל ע"ע מתקיים $K_\alpha = G_\alpha$.
*הערה - אם $f(x) \in R[x]$ כלומר המקדמים ממשיים, ואנו מעל $\mathbb{C}$, אזי $z = x + yi$ הוא שורש של הפולינום $\Longleftarrow$ $z = x - yi$ (הצמוד) גם כן שורש של הפולינום.

שילוש מטריצות:

הגדרה: מטריצה $A \in F^{n*n}$ ניתנת לשילוש אם היא דומה למטריצה משולשית (עליונה/תחתונה). (כלומר אם קיימת $P \in F^{n*n}$ הפיכה כך ש$P^{-1}AP = D$) כאשר D משולשית)
* הדיון בטענות הבאות יתנהל סביב שילוש משולשית עליונה אך הדיון סימטרי
ט. תהי $A \in F^{n*n}$ דומה למשולשית עליונה $\iff$ אזי A דומה למשולשית תחתונה
ט. תהי $A \in F^{n*n}$, אזי A ניתנת לשילוש מעל F $\iff$ הפ"א מל"ל מעל F.
-♡- מעל $\mathbb{C}$ כל מטריצה ניתנת לשילוש (כיוון שב-$\mathbb{C}$כל פ"א הוא מל"ל)
מ. בהינתן $A \in F^{n*n}$ אזי A לכסינה $\Longleftarrow$ A ניתנת לשילוש. בפרט, המלכסנת היא גם משולשית.
הגדרה: הע"ל $T : V \to V$ ניתנת לשילוש אם קיים בסיס B כך ש-$[T]_B^B$ משולשית.
ט. תהי $A \in F^{n*n}$ כך שהפולינום האופייני שלה מל"ל, אזי -
1. $tr(A)$= סכום הערכים העצמיים כולל ריבוי (אלגברי) - (אם יש ע"ע שמופיע כמה פעמים נסכום אותו כמה פעמים)

2. $|A|$= מכפלת הע"ע כולל ריבוי. (אם יש ע"ע שמופיע פעמיים נכפול אותו פעמיים)

פולינומים של מטריצות:

הסבר - תהי $A \in F^{n*n}$ ויהי $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_tx_t \in F[x]$.
להציב את A בפולינום $p(x)$ הכוונה היא -
$p(A) = a_tA^t + ... + a_1A + a_0I$
ט. תהי $A \in F^{n*n}$, אזי קיים $p(x) \in F[x]$ עם דרגה $\geq n^2$ כך ש-$P(A) = 0$.
משפט קיילי המילטון: תהי $A \in \mathbb{F}^{n*n}$, אזי $P_A(A) = 0$. (נכון עבור פולינום אופייני בלבד)
[למעשה זה אומר שבוודאות קיים פולינום אחד מדרגה n שמאפס את הפולינום]
* הערה - הכוונה להציב את A לאחר חישוב הדטרמיננטה שנקבל ביטוי מהצורה $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_tx_t$.

דוגמה שימושית: חישוב מטריצה הופכית -
בהינתן $A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Bmatrix}$ מתקיים כי $P_A(x) = |\begin{Bmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x-4 \end{Bmatrix}| = (x-1)(x-4) - 6 = x^2 - 5x - 2$
לפי קיילי המילטון - $A^2 - 5A - 2I = 0 \Longleftarrow A^2 - 5A = 2I \Longleftarrow A(\frac{A-5I}{2}) = I$ ולכן ההופכית שלה היא $\frac{1}{2}(A - 5I) =$
$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{Bmatrix}$.

המטריצה הנלווית:

הגדרה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n*n}$, נגדיר $adjA \in F^{n*n}$, כך שלכל $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים
$(adjA)_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ji}|$. (מחליפים את הסדר במינור!)
ט. תהי $A \in \mathbb{F}^{n*n}$, אזי $(adjA)^t = adj(A^t)$.
המשפט המרכזי: תהי $A \in \mathbb{F}^{n*n}$. אזי, $adj(A) * A = A * adj(A) = |A| * I$.
מסקנה מהמשפט הקודם - עבור A הפיכה , $A * adjA = |A| * I \Leftarrow A * \frac{1}{|A|}adj(A) = I$ כלומר ההופכית של A תהיה $\frac{1}{|A|}adj(A)$.

טענה חשובה עם הוכחה מהתרגול:

תהי $A \in \mathbb{F}^{N*N}$ כך שסכום כל שורה הוא x. אזי, x הוא ע"ע של המטריצה.

הוכחה: תהי A כנ"ל. נגדיר את וקטור העמודה כדקלמן - $v = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$. נשים לב כי $Av = \begin{Bmatrix} a_{11} + va_{12} + .. + a_{1n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} + a_{n2} + .. + a_{nn} \end{Bmatrix} =$

$\begin{Bmatrix} x \\ x \\ x \\ . \\ . \\ x \end{Bmatrix} = x\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, כלומר סה"כ $Av = xv$ ולכן x ע"ע של A.
מש"ל.

טענה (שלא נאמרה בהרצאה אז יש להסביר אבל זה ברור): בהינתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n*n}$, אם יש n ע"ע שונים אזי המטריצה לכסינה. מדוע? אם יש n ע"ע שונים, אזי יש n ו"ע שונים בלתי תלויים לינארית, כלומר יש n ו"ע בת"ל וכן קבוצה בגודל n נקבל לפי השלישי חינם כי היא בסיס לF^n. כלומר, סה"כ קיים לF^nבסיס המורכב מו"ע ולכן לפי משפט שכן נאמר בהרצאה במקרה זה אכן המטריצה לכסינה.
*נשים לב כי בהינתן שאנחנו יודעים ע"ע אחד של הפ"א נוכל לדעת כי $X - \lambda_1$ מחלק את הפולינום, נבצע חלוקת פולינומים ונוכל לכתוב את הפולינום בצורה אחרת. טיפים למציאת הע"ע λ_1 הנ"ל הוא למשל שסכום כל שורה/עמודה שווה אליו.

תרגיל טוב על לכסון:

התרגיל: תהי $A \in \mathbb{R}^{4*4}$ כך ש־ $tr(A)=0$, $|A|=-1$, וכן A^2+I לא הפיכה. מצאו ־ את A^{100}.
פתרון: A^2+I לא הפיכה ולכן גם $-A^2-I$ לא הפיכה. כלומר, $|-I-A^2|=0$ ולכן ־1 הוא ע"ע של A^2. כעת נחשוב ־ האם זה אומר ש $\sqrt{-1}$ הוא ע"ע של A? יתכן ־ ויתכן שלא, כאן כן. נשאלת השאלה ־ כיצד זה יתכן הרי אנחנו בממשיים ־ ולמען פתרון התרגיל נכניס את ההבהרה הבאה מותר לעבור אל $\mathbb{C}$ במהלך פתרון התרגיל כל עוד התוצאה הסופית היא חלק מ־$\mathbb{R}$! ומכאן שנשים לב כי $-I-A^2=(iI+A)(iI-A)$, כעת לפחות אחת משתי המטריצות מימין אינה הפיכה. כלומר i הוא ע"ע או $-i$ הוא ע"ע. נזכר כי בהינתן שZ הוא שורש של הפולינום גם $\overline{Z}$הוא שורש של הפולינום ולכן בכל מקרה נקבל כי חלק מהפ"א הוא $(x-i)(x+i)$ ושניהם ע"ע. כעת אנחנו נרצה שיתקיים התכונות של השילוש והלכסון וכן בשביל שנוכל ללכסן נדרוש 4 ערכים עצמיים ־ אנחנו ב$\mathbb{R}^{4*4}$ונרצה כי ־
1. $tr(A)=\sum\lambda_i=i-i+\lambda_3+\lambda_4=0 \Longleftarrow \lambda_3+\lambda_4=0$
2. $|A|=\Pi\lambda_i=\lambda_3\lambda_4 i*-i=-1 \Longleftarrow \lambda_3\lambda_4=-1$
נפתור את שני המשוואות ונקבל כי $\lambda_3=1,\lambda_4=-1$
ומכאן ש ־ $P_A(X)=(x-i)(x+i)(x-1)(x+1)$
מכאן שקיבלנו 4 ע"ע ולכן לפי משפט לכסינה מעל $\mathbb{C}$. כעת ־

$$A^{100}=p^{-1}D^{100}p=p^{-1}\left\{\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{array}\right\}^{100}p=p^{-1}Ip=I$$

כלומר ־ $A^{100}=I$.

אלגוריתם לשילוש מטריצות :

א. מוצאים פ"א ע"ע וו"ע.
ב. נשלים את הו"ע לבסיס של F^n(שכן אם היה מספיק אזי הייתה לכסינה ואז וודאי שמשולשית). נשים אותם בעמודות של המטריצה P_1 ונשלים עם e_i.
ג. מחשבים את $P_1^{-1}AP_1=\left\{\begin{array}{cc}D&*\\0&A_2\end{array}\right\}$
ד. שוב עבור A_2 חוזרים על כל התהליך ־ אם יש מספיק ו"ע סיימנו אחרת ,... נסיים שיש מספיק ו"ע לבסיס עד שנקבל כי $P_i^{-1}AP_i$משולשית. כעת נחשב את p להיות ־

$$P=p_1*p_2^{\wedge}*......$$

כאשר $p_i^{\wedge}=\left\{\begin{array}{cc}I&0\\0&P_k\end{array}\right\}$
ונסיים....

פולינום מינימלי

נחפש את הפולינום המאפס את הפ"א עם הדרגה הנמוכה ביותר. ראינו כי תמיד פולינום מדרגה גדולה מ־n^2 מאפס וראינו לפי קיילי המילטון שיש פולינום מדרגה n ־ כעת נרצה למצוא טוב יותר (עבור מטריצה שרירותית כלשהי). התשובה היא ־ לא תמיד אפשר למצוא כזה.
הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $f(x)\in F[x]$ נקרא פולינום מינימלי (פ"מ) של A אם הוא פולינום מתוקן ש־A מאפסת מדרגה מינימלית.
טענה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אזי קיים ל־$A$ פולינום מינימלי יחיד ונסמנו $m_A(x)$.
מינוח ־ לתקן את הפולינום זה להפוך את הפולינום להיות פולינום מתוקן ־ למשל בהינתן $f=3x^2+x$ נראה כי $g=x^2+\frac{1}{3}x$ יקיים $f=3g$, g מאפסת פולינום ולכן גם f תאפס. ניתן לאפס כל פולינום פרט לאפס.
טענה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי f פולינום ש־A מאפסת ־ אזי $m_A|f$.
מסקנה (קיילי המילטון+טענה אחרונה): כיוון שA מאפסת את P_A אזי $m_A|P_A$.
כעת יש לנו דרך לחשב את הפ"מ. למשל ־ בהינתן $P_A(x)=(x-3)^2(x-2)$ יש מס' סופי של אפשרויות לקבלת $m_A(x)$ והם ־ $(x-3),(x-3)^2,P_A(x),(x-2),(x-2)(x-3)$ ־ יש להציב ולבדוק האם אכן A מאפסת פולינום כנ"ל ־ כלומר יש לחשב ממש ולמצוא מיהו המינימלי.
טענה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ויהי f פולינום מדרגה $\geq n$ ש־A מאפסת, אזי $P_A|f^n$.

מסקנה: כיוון ש־A מאפסת את m_A אזי $P_A|(m_A)^n$ (למה? כי A מאפסת את m_A) ־ זו דרך טובה לפסול אפשרויות שראינו מעלה ־ למשל נפסול בוודאות את $(x-2),(x-3),(x-3)^2$ כי תמיד ישארו שאריות ולא נקבל שזה מתחלק.
כלומר נשארנו למעלה עם האפשרויות $P_A(x),(x-2)(x-3)$
טענה: ל־m_A ול־P_A יש אותם גורמים אי פריקים כאשר לכל גורם אי פריק מתקיים ־ $1 \le k_A(m_A) \le k_A(P_A)$ כאשר הכוונה היא לחזקה שלו בפ"א ובפ"מ.
*למטריצות דומות אותו פ"מ.

צורת ז'ורדן

הגדרה: בלוק ז'ורדן מגודל n עם ערך α הוא מטריצה מגודל $n \times n$ מהצורה הבאה־

$$J_n(\alpha) = \left\{ \begin{matrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{matrix} \right\}$$

נראה כי תמיד פ"א של בלוק ז'ורדן הוא ־ $P_{J_{A(n)}}(\alpha) = (x-\alpha)^n$. כלומר ר"א הוא n. כמו כן ־ $m_{J_{A(n)}}(\alpha) = (x-\alpha)^n$ ־ כלומר תמיד פ"א של בלוק ז'ורדן הוא כמו הפ"מ.
* לבלוק זו'רדן יש ערך עצמי אחד ־ α.

* הריבוי הגאומטרי של בלוק ז'ורדן הוא תמיד 1. וכן הבסיס למ"ע הוא $sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix} \right\}$.

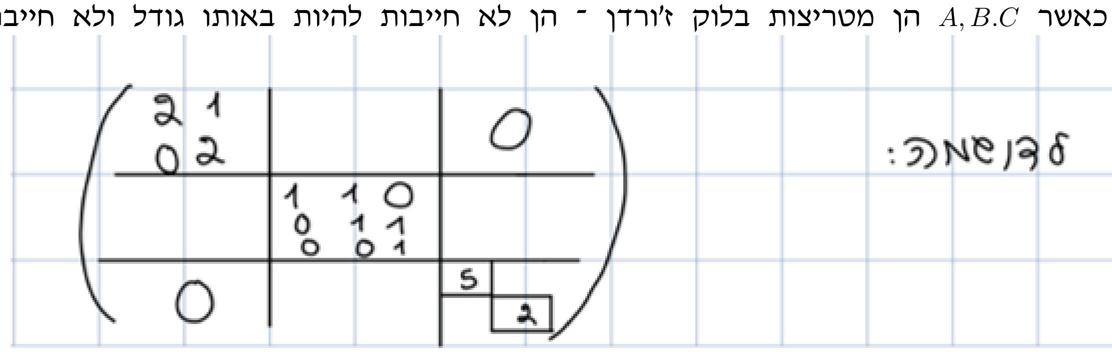
* בלוק ז'ורדן אינו לכסין שכן ר"א הוא n ור"ג הוא 1.
טענה: מטריצה מהצורה הנ"ל עם $\alpha = 0$ היא ניפולטנית ותקיים $A^n = 0$

$$A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}, A^2 = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}, A^3 = 0$$

ולמה זה חשוב? נשים לב כי תמיד נקבל כי $\alpha I - J_A(n)$ הוא בלוק ז'ורדן עם $\alpha = 0$. ולכן $(\alpha I - J_A(n))^n = 0$.
הגדרה: מטריצה נקראת בצורת ז'ורדן אם היא אלכסונית בלוקים. הבלוקים באלכסון הם בלוקי ז'ורדן:

$$\left\{ \begin{matrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{matrix} \right\}$$

כאשר $A,B.C$ הן מטריצות בלוק ז'ורדן ־ הן לא חייבות להיות באותו גודל ולא חייבות להיות עם אותו α.



הגדרה ־ סכום ישר עבור מטריצות הוא חיבור מטריצה בצורת ז'ורדן ־ למשל $A = J_2(2) \oplus J_3(1) \oplus J_2(5)$.

משפט ז'ורדן:

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אזי
1. ל־A יש צורת ז'ורדן (כלומר היא דומה למטריצה בצורת ז'ורדן) $\Longleftrightarrow$ הפ"א של A מל"ל מעל F.
2. צורת הז'ורדן של A (במידה ויש) היא יחידה עד כדי סדר הבלוקים.
3. בצורת הז'ורדן של A (במידה ויש) מתקיים לכל ע"ע α כי
א. הר"א של α= מס' הפעמים שα יופיע על האלכסון של צורת ז'ורדן
ב. הר"ג של α =מס' הבלוקים של α.
ג. גודל הבלוק הגדול ביותר שיש ל־α = החזקה (הריבוי האלגברי) ב$m_A(x)$ של $(x-\alpha)$.
* הערה ־ כיוון שב־$\mathbb{C}$ כל פולינום מל"ל אזי לכל פולינום יש צורת ז'ורדן

דוגמה: נתבנן בנתונים הבאים.
־ $P_A(x) = (x-3)^5(x-1)$
־ $m_A(x) = (x-3)^2(x-1)$
־ הר"ג של $x=1$ הוא 1 ושל $x=3$ הוא 3.
מצא צורת ז'ורדן: מדובר במטריצה 6×6 ־ יש ע"ע 1 שיופיע פעם אחת והוא בבלוק יחיד. יש ר"ג 3 של ע"ע 3 ולכן יש שלושה בלוקים של שלוש. הריבוי האלגברי בפ"מ של 3 הוא 2 ולכן גודל הבלוק הכי גדול שיש ל3 הוא בגודל 2.

$$A \sim \begin{Bmatrix} \underline{1}| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\underline{0} & \underline{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{0} & \underline{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\underline{3}| \end{Bmatrix}$$

כלומר זוהי צורת הז'ורדן של A־ היא דומה לה.

טענה (שכבר הכרנו, אך הפעם בהקשר ז'ורדן): תהי A לכסינה, אזי האלכסונית שהיא דומה לה (D) ־ היא יחידה עד כדי סדר האיברים באלכסון. (בפרט זה מגיע מסעיף 2 של ז'ורדן ־ אם נתייחס לבלוקים כבלוקים בגודל 1 שמופיעים באלכסון)
הערה: כאשר נדבר על צורת ז'ורדן של A היא תגיד הרבה על A כי היא דומה לה ולמטריצות דומות אותו פ"א, ר"א, ר"ג..... וכו'.
טענה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, אזי A לכסינה $\Longleftrightarrow$ הפ"מ מל"ל שונים.
נשים לב כי מתקיים $J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda I$

סיכום ־ קריטריון ללכסון:

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אזי התנאים הבאים שקולים ־
א. A לכסינה
ב. הפ"מ $m_A(x)$ מל"ל שונים.
ג. הפ"א מל"ל וכן לכל ע"ע מתקיים ר"ג=ר"א.
ד. קיים בסיס של ו"ע ל־F^n.
ה. קיימת מטריצה שדומה למטריצה אלכסונית.
ו. סכום הריבויים הגאומטריים הוא n.

מספר הערות חשובות:

1.אם מס' מרוכב הוא שורש של פולינום ־ גם הצמוד שלו
2. מדוע מותר לנו לעבור בתוך תרגיל בין $\mathbb{R}$ לבין $\mathbb{C}$? נראה כי בתרגילים רבים נעבור מ־$\mathbb{R}$ אל $\mathbb{C}$ ונקבל לבסוף תוצאה ב־$\mathbb{R}$. נשאלת השאלה ־ מי אמר שמותר לעשות זאת? טוב זה קל ־ עוזי. אבל מאיפה אנחנו יודעים שכשנחשב דטרמיננטה ב־$\mathbb{C}$ היא תהיה זהה גם ב־$\mathbb{R}$? ובכן לא דיברנו על כך יותר מדי אבל מתקיים $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ומשם זה מגיע (לפי עוזי)

תרגילים טובים על בלוק ז'ורדן מהתרגול:

א. תהי $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ הפיכה. כמו כן $tr(A) = 2$. כך ש־

$$(A^3+A)(A-2I)=0$$

מצאו את $P_A(x)$ ואת $m_A(x)$.
פתרון: נראה כי אם נגדיר $f(x)=(x^3+x)(x-2)=x(x^2+1)(x-2)$ מתקיים $f(A)=0$. מכאן, לפי טענה שראינו בהרצאה, $m_A|f$. כלומר - האפשרויות עבור m_A הינן:

$$m_A(x)\in\{x,x^2+1,f(x),x-2,x(x^2+1),x(x-2),(x^2+1)(x-2)\}$$

A הפיכה ולכן 0 בוודאות אינו ערך עצמי. כלומר, הוא לא יופיע כגורם בפולינום. ולכן ניתן לפסול אפשרויות רבות ולהשאר עם:

$$m_A(x)\in\{x^2+1,x-2,(x^2+1)(x-2)\}$$

א. נב"ש כי $m_A(x)=x^2+1$. מכאן ש$m_A|P_A(x)$ ולכן יתקיים כי $P_A(x)=(x^2+1)^k$. מכאן, שצריך להתקיים בפ"א כי $deg(p_A(x))=7$ ואצלנו $deg(P_A(x))=2k=7\Rightarrow k=3.5$ בסתירה, כי $k\in\mathbb{N}$.
ב. נב"ש כי $m_A(x)=x-2$. אנו יודעים כי בפ"מ ובפ"א יש אותם גורמים ולכן נקבל ש2 הוא הע"ע היחיד. הפ"א מל"ל ולכן שלישה ולכן סכום ע"ע כולל ריבוי שווה לעקבה של המטריצה. כלומר,

$$tr(A)=7*2=14\neq 2$$

בסתירה.
מכאן שמסקנתנו היא שנותרה אפשרות אחד בלבד, ו- $m_A(x)=(x^2+1)(x-2)$.
כעת נרצה למצוא פ"א. יתקיים כי עבור $k\in\mathbb{N}$ וכן עבור $p\in\mathbb{N}$ כי: $P_A(x)=(x^2+1)^p(x-2)^k$. מכאן נקבל כי $deg(P_A(X))=2p+k$. מאותם השיקולים של קודם צריך להתקיים $2p+k=7$.
נרצה לשלש את המטריצה, לכן נתבונן כאילו היינו ב-$\mathbb{C}$- שם הפ"א מלל. עם ע"ע $2,i,-i$. נסתכל על האפשרויות השונות שלנו:
1. $k=1,p=3$
2. $k=3,p=2$
3. $k=5,p=1$.

נראה כי צריך להתקיים:

$$tr(A)=pi+p(-i)+2k=2k=2\Longrightarrow k=1$$

כלומר המצב הראשון מנצח ונקבל כי $P_A(x)=(x^2+1)^3(x-2)$.
ב. מצא צורת ז'ורדן של המטריצה הבאה:

$$A=\left\{\begin{array}{cccc}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{array}\right\}$$

נחסוך את החישובים, נקבל כי

$$P_A(x)=(x+2)(x-1)^3$$

מל"ל ולכן ניתנת לז'רדון. כעת אנחנו יודעים כי הריבוי האלגברי של כל ע"ע הוא מס' הפעמים שיופיע אותו ערך בצורת ז'ורדן וכן הר"ג של כל אחד זה מס' הבלוקים שיהיו לו. הר"ג של -2 צריך לקיים $1 \leq g_{-2} \leq k_{-2} = 1$ ולכן $g_{-2} = 1$. נחשב (לא קשה...) ונקבל כי $g_1 = 2$. מכאן נקבל סה"כ כי הבלוק הכי גדול והיחיד של -2 הוא בגודל 1, וכן יש 2 בלוקים (כי ר"ג 2) של 1, 3 ערכים צריכים להתחלק פעמיים - יש אפשרות אחת כזו, 2 ו-1 ולכן נקבל את צורת הז'ורדן הבאה:

$$J_n = J_1(-2) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1)$$

מכפלות פנימיות

הערה - כל הפרק נעבוד כאשר $F = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ בלבד

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F. פונקציה $<,>: V \times V \to \mathbb{F}$ נקראת מכפלה פנימית על V אם:

א. לינאריות ברכיב ראשון: לכל $v, u, w \in V$ וכן $\alpha \in F$ מתקיים:

$$< v + \alpha u, w >=< v, w > +\alpha < u, w >$$

ב. הרמיטיות: לכל $v, u \in V$ מתקיים:

$$< v, u >=< \overline{u, v} >$$

(ב$\mathbb{R}$ התכונה נקראת סימטריות כי אכן הצמוד שווה לעצמו)

ג. אי-שליליות: לכל $v \in V$ מתקיים כי:

$$< v, v >\geq 0$$

וכן

$$< v, v >= 0 \Longleftrightarrow v = 0$$

דוגמה:

$$v = \mathbb{R}^2$$

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} >= x_1 y_1 + x_2 y_2$$

* יש לבדוק את שלושתן התכונות שאכן מתקיימות עבור מכפלה פנימית זו ואם אכן-אזי זו מכפלה פנימית. מלא אלגברה.

איך נוכיח אי שליליות?

נראה כי

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} >= x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

כי בריבוע, וכן הדרך היחידה להתאפס היא אמ"מ $x_1 = y_1 = 0$ כלומר $v = 0$.

דוגמאות למכפלות פנימיות סטנדרטיות:

א. המ"פ הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$: לכל $v,u\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$<v,u>=v^tu$$

$$<\begin{pmatrix} x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_n\end{pmatrix}>=\begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

כלומר נקבל סקלר, כצפוי.
נראה כי אם נרצה להוכיח הרמיטיות למשל נתקל בטריק:

$$<u,v>=u^tv$$

$$<v,u>=v^tu$$

נראה כי שניהם סקלר, כיוון שאנו ב־$\mathbb{R}$ הצמוד הוא בעצמו ולכן

$$(v^tu)=(v^tu)^t=u^tv$$

כפי שרצינו, כלומר

$$<u,v>=<\overline{v,u}>$$

ב. המכפלה הפנימית על $\mathbb{C}^n$: לכל $v,u\in\mathbb{C}^n$ מתקיים -

$$<v,u>=v^t\overline{u}$$

נראה כי תמיד $|Z|=\sqrt{z*\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$, כאשר $z=a+ib$, כלומר תמיד $|z|$ ממשי. נזכור כי

$$\overline{x_1+y_1+.....k_1}=\overline{x_1}+\overline{y_1}+....+\overline{k_1}$$

ג. המ"פ הסטנדרטית על $\mathbb{R}^{n\times n}$: לכל שתי מטריצות A,B מתקיים -

$$<A,B>=tr(AB^t)$$

נראה כי כשנחשב אי שליליות יתקיים

$$tr(AA^t)=\sum_{i=1}^n(AA^t)_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n(A_{ik}(A_{ki})^t)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n(A_{ik})^2\geq 0$$

הערה - הן לא חייבות להיות מטריצות ריבועיות.
סימון: כשנרצה לעשות על מטריצה צמוד+שחלוף נסמן זאת כך: $(\overline{A})^t = A^*$
ד. המ"פ הסטנדרטית על $\mathbb{C}^{n\times n}$: לכל שתי מטריצות A,B מתקיים -

$$< A,B >= tr(AB^*)$$

הערה: על המספרים המרוכבים לא מוגדר יחס סדר. כלומר, האם $1-i$ גדול מאפס? קטן מאפס? שווה לאפס? איך נוכל לדעת אי שליליות? אם התכונה השנייה - הרמיטיות מתקיימת במרוכבים, בהכרח

$$a + bi = a - bi$$

כלומר

$$b = 0$$

ולכן נקבל שממילא המספר שלנו הוא ממשי, ולכן לא נדון בשאלה זו.
טענה: יהי V ממ"פ (מרחבה מכפלה פנימית), אזי לכל $v \in V$ מתקיים $< \vec{0}, v >= 0_F$. (וכן כמובן גם $< v, \vec{0} >= 0_F$)
שאלה: האם $< v,u >= 0 \Leftarrow v = 0$ או $u = 0$? לא בהכרח. לדוגמה: במכפלה הפנימית הסטנדרטית על R^2:

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

טענה: יהי V ממ"פ ויהיו $u,w \in V$ כך ש

..

$$\forall v \in V :< u,v >=< w,v >$$

אזי, $u = w$.
טענה: יהי V ממ"פ ויהיו $u,w \in V$. כמו כן יהי B בסיס ל-V.
אזי אם

$$\forall v \in B :< u,v >=< w,v >$$

אזי $u = w$. (בשל תכונת כמעט לינאריות ברכיב שני, הטענה נכונה גם אם הוקטור הזהה הוא משמאל)
טענה: יהי V ממ"פ, ויהי $v \in V$ כך שלכל $u \in V$ מתקיים: $< v,u >= 0$ אזי בהכרח $v = 0$.
טענה: יהי V ממ"פ, אזי יש "כמעט" לינאריות ברכיב שני. כלומר, לכל $v,u,w \in V$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים:

$$< w, u + \alpha v >=< w,u > +\overline{\alpha} < w,v >$$

(כלומר, הסקלר יוצא החוצה כצמוד. בממשיים יש לינאריות ברכיב שני. וגם ב-$\mathbb{C}$ עבור מקדם ממשי).

נורמה, מטריקה והמטריקה המושרית

הגדרה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ (ממשיים או מרוכבים בלבד), פונקציה $||v|| : V \to \mathbb{R}$ נקראת נורמה על המרחב אם היא מקיימת:
א. אי שליליות: לכל $v \in V$ מתקיים $||v|| \geq 0$ וכן $||v|| = 0 \iff v = 0$.
ב. הומוגניות: לכל $v \in V$ ו-$\alpha \in F$ מתקיים: $||\alpha v|| = |a| * ||v||$
ג. אי שוויון המשולש: לכל $v,u \in V$ מתקיים:

$$||v+u|| \le ||v|| + ||u||$$

*הערה: ראינו בתרגול שלכל v,u מתקיים גם א"ש המשולש ההפוך:

$$|||u|| - ||v||| \le ||v-v||$$

*ערך מוחלט הוא נורמה. אנחנו נחשוב על נורמה כדרך למדידת אורך ומרחק. ואכן הדרישות שלנו הגיוניות.
למדנו עד היום לחשב מרחק רק ב־$\mathbb{R}^2$ עם נוסחת הדיסטנס. כעת נרצה לחשב מרחק בכל המרחבים!
הגדרה: יהי V ממ"פ מעל F. הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית מוגדרת ע"י:

$$\forall v \in V : ||v|| = \sqrt{<v,v>}$$

*נדבר בקורס שלנו רק על הנורמה המושרית ממכפלה פנימית כלשהו. יש עוד נורמות ־ לא רלוונטי.
דוגמה: נקח את $\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

$$||v|| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{v^t v} = \sqrt{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

בהינתן $\mathbb{R}^3$ נראה כי

$$||v|| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{v^t v} = \sqrt{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

כמו שצפינו לראות. כלומר הממ"פ השרתה לנו את הדרך הסטנדרטית למצוא את המרחק במרחב.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. פונקציה: $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ נקראת מטריקה אם:
א. אי שליליות: לכל $v,u \in V$ מתקיים: $\rho(u,v) \ge 0$ וכן $\rho(u,v) = 0 \iff v = u$.
ב. סימטריות: לכל $v,u \in V$ מתקיים: $\rho(u,v) = \rho(v,u)$
ג. אי שוויון המשולש: לכל $v,u,w \in V$ יתקיים: $\rho(v,u) \le \rho(v,w) + \rho(w,u)$

המטריקה המושרית

יהי V מרחב וקטורי עם נורמה עליו. נגדיר פונקציה כך:

$$\rho : V \times V \to \mathbb{R}$$

ע"י: $\rho(v,u) = ||v-u||$. זו אכן מטריקה.
סיכום כל ההגדרות שלנו: תנו לי מכפלה פנימית, בואו ניצור נורמה. אח"כ נחשב את המטריקה המושרית וכך נמצא את המרחק.

המטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$:

נחשב את הנורמה המושרית מהמכפלה הסטנדרטית.

$$\rho(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}) = || \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} || = || \begin{pmatrix} x-z \\ y-w \end{pmatrix} || = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$$

לא מפתיע, בדיוק נוסחת הדיסטנס שראינו בתיכון..... ככה מודדים מרחק במישור.

וקטורים אורתוגונליים (מאונכים):

הגדרה: יהי V ממ"פ. ויהיו $v,u\in V$. נאמר כי v ו־u אורתוגונליים (מאונכים) ונסמן $v\perp u$ כאשר

$$<v,u>=0$$

הגדרה: יהי V ממ"פ, ותהי $S\subseteq V$. נאמר כי S אורתוגונלית (או"ג) אם לכל $v\neq u\in S$ מתקיים $<v,u>=0$ (מדוע שונים? אחרת 0 וזה לא מעניין).
טענה: יהי V ממ"פ נ"ס. ותהי $S\subseteq V$, אזי אם S אורתוגונלית וכן $0\notin S$ אזי S בת"ל.
הגדרה: יהי V ממ"פ. $v\in V$ נקרא נורמלי אם $||v||=1$.
הערה: כל וקטור שונה מ־0 ניתן לנרמול. כלומר

$$v\to v^\wedge=\frac{v}{||v||},||v^\wedge||=||\frac{v}{||v||}||=||v||*\frac{1}{||v||}=1$$

הגדרה: יהי V ממ"פ ותהי $S\subseteq V$, נאמר כי S אורתונורמלית (או"נ) כאשר S אורתוגונלית וכן לכל $v\in S$ מתקיים $||v||=1$.
מסקנה: או"נ $\Longleftarrow$ או"ג. (מהמשפט מעלה, גם בהכרח בת"ל)
טענה: הנורמה של וקטור האפס תמיד תהיה 0 ולכן $v=0$ אינו נורמלי.
משפט: הבסיסים הסטנדרטיים הם בסיסים אותורנמלים עבור המכפלות הפנימיות הסטנדרטיות.
למשל, עבור $F^{n\times n}$ הבסיס הסטנדרטי האותורנומלי הוא E_{ij} לכל $1\leq i,j\leq n$ (עבור המרוכבים כמובן שיש להוסיף את i)
עבור F^n הבסיס הסטנדרטי האותורנומלי הוא e_iלכל $1\leq i\leq n$.
טענה: יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$ נ"ס. ותהי $S\subseteq V$, אזי אם S אורתוגונלית וכן $0\notin S$ אזי S בת"ל.
נשים לב כי מתקיים $<v_i,v_i>=||v_i||^2$

קורדינטאות לפי בסיס או"ג

טענה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ויהי $B=\{v_1,...v_n\}$ בסיס או"ג סדור של V. ויהי $v\in V$. ויהיו $a_1,.....a_n\in\mathbb{F}^n$ כך ש־

$$v=a_1v_1+....+a_nv_n$$

אזי, לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים כי

$$a_i=\frac{<v,v_i>}{||v_i||^2}$$

וכן אם B היה גם או"נ אזי $a_i=<v,v_i>$ כי $||v_i||=1$
הערה. דהיינו מתקיים כי

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\frac{<v,v_1>}{||v_1||^2}\\\frac{<v,v_2>}{||v_2||^2}\\.\\.\\\frac{<v,v_n>}{||v_n||^2}\end{pmatrix}$$

הערה. אם נשנה את המכפלה הפנימית, לא בהכרח α ישאר אותו דבר אם הוקטורים לא ישארו מאונכים. אם כל התנאים נשמרים ־ כלומר מצאנו מכפלה פנימית עם בסיס או"ג עדיין, אזי אכן ה־a־ות ישארו זהות.

משפט פיתגורס

טענה. יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ויהי $B=\{v_1,...v_n\}$ בסיס או"ג לV. יהיו $\alpha_1,....\alpha_n\in\mathbb{F}$. אזי,

$$||\alpha_1v_1+....\alpha_nv_n||^2=||\alpha_1v_1||^2+.....||\alpha_nv_n||^2$$

המרחב הניצב

הגדרה: יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$ ותהי $S\subseteq V$. נגדיר:

$$S^{\perp}:=\{v\in V|\forall s\in S:<v,s>=0\}$$

דוגמה: אם ניקח $S=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}^2$.

$$S^{\perp}=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}|<\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}>=0\Rightarrow x=0\}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}|y\in\mathbb{R}=sp\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$

מי המרחב הניצב לוקטור האפס? כל $\mathbb{R}$.
טענה: $S^{\perp}$ הוא תת מרחב של V.
טענה: יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$. ותהי $S\subseteq V$. אזי $S\subseteq(S^{\perp})^{\perp}$ וכן אם S ת"מ אזי $sp\{s\}=(S^{\perp})^{\perp}$
טענה: יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$. ותהיינה $A,B\subseteq V$. אזי

$$A\subseteq B\Longrightarrow A^{\perp}\supseteq B^{\perp}$$

טענה: יהי V ממ"פ ותהי $S\subseteq V$. אזי $S^{\perp}=(sp\{s\})^{\perp}$
(כלומר, בשאלות טכניות מספיק לבדוק מי מאונך לחברי הספאן, ולא לכל הספאן)

היטלים

נדמיין זאת לא פורמלי ־ יש לנו וקטור u שנפרש למרחב ויש איזשהו וקטור v שיוצא מu בזווית. ההיטל הוא ה"צל" שמטיל v על u. זה אישהו כפולה של u. נדון על היטל אורתוגונלי.

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס. ויהי $W\subseteq V$ ת"מ. יהי $B=\{w_1,....w_n\}$ בסיס אורתוגונלי לW. ויהי $v\in V$. (((הוקטור שנרצה להטיל))). נגדיר את ההיטל של v על W כך:

$$\pi_W(v)=\frac{<v,w_1>}{||w_1||^2}w_1+......+\frac{<v,w_n>}{||w_n||^2}w_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{<v,w_i>}{||w_i||^2}w_i$$

הגדרה שקולה: יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $W\subseteq V$. ויהי $v\in V$. ההיטל של v על W יסומן $\pi_W(v)$ והוא הוקטור בW שהכי קרוב ל־v.
דהיינו,

$$\forall_{w\in W}||v-w||>||v-\pi_W(v)||$$

טענה: אם וקטור מאונך לכל איברי הבסיס, אזי הוא מאונך לכל המרחב.
טענות: יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $W \subseteq V$ ת"מ ויהי $v \in V$. אזי,
1. $\pi_W(v) \in W$
2. $\pi_W(v) = v \iff v \in W$
3. $v \in W^\perp \iff \pi_W(v) = 0$
4. $v - \pi_W(v) \in W^\perp$

טענה(מהתרגול):

$$C(A^T)^\perp = N(A)$$

$$C(A)^\perp = N(A^T)$$

משפט פירוק הניצב

יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $W \subseteq V$ ת"מ, אזי

$$W \oplus W^\perp = V$$

שאלה: האם בהינתן שני ת"מ $U \oplus W = V$, אזי בהכרח $U = W^\perp$? לא! דוגמה עם $V = Sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ו $W = sp\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ תראה זאת.
טענה: ההיטל לא תלוי בבחירת הבסיס.

אלגוריתם גרם־שמידט ליצירת בסיס אורתוגונלי

מי אמר שלכל מרחב יש בסיס אורתוגונלי? לכל מרחב יש בסיס, לא בהכרח אורתוגונלי. אנחנו נקח וקטורים ונגרום להם להיות מאונכים זה לזה, וכך הם ייהפכו לאורתוגונליים. (להפוך אח"כ לנורמלי זה לא בעיה, ננרמל אותו). נרצה להשאר בספאן ולפרוש עדיין את אותו מרחב.
קלט: נתון Vממ"פ ונתון בסיס $B = \{v_1, ...v_n\}$ נ"ס.
שלב א. ליצור בסיס אורתוגונלי, נסמנו $\{u_1, ...u_n\}$. נגדיר:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \pi_{sp\{u_1\}}(v_2) = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{||u_1||^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \pi_{sp\{u_1,u_2\}}(v_3) = v_3 - \frac{< v_3, u_1 >}{||u_1||^2} u_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{||u_2||^2} u_2$$

$$u_n = v_n - \pi_{sp\{u_1,u_2,....u_{n-1}\}}(v_n)$$

**בכל פעם שאנחנו כותבים ספאן של u_1 או $\{u_1, u_2\}$ זה כי הם כבר מאונכים זה לזה.
את הראשון נשאיר אותו דבר. את השני נרצה לגרום לו להיות מאונך למרחב $sp\{u_1\}$, אכן לפי ההגדרה מעלה קיבלנו $u_2 \perp u_1$. כך נמשיך .... נקבל סה"כ כי הקבוצה החדשה היא בסיס אורתוגונלי וכן המרחב הפורש של שני הבסיסים נשאר זהה. כלומר, לכל $1 \leq k \leq n$:

$$sp\{u_1, u_2, u_3, ..., u_k\} = sp\{v_1, v_2, v_3, ..., v_k\}$$

שלב ב. ננרמל את הוקטורים וניצור בסיס אורתונורמלי. כלומר לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר:

$$w_i = \frac{u_i}{||u_i||}$$

נעיר כי כפולה בסקלר שונה מאפס לא משנה את ספאן הבסיס, וכן לא ישנה את העובדה שהקבוצה עודנה אורתוגונלית.
סה"כ קיבלנו מבסיס כלשהו, בסיס אורתונורמלי.
שאלה. מה היה קורה אם היינו מפעילים גרם שמידט (שלב א') על קבוצה שהיא כבר אורתוגונלית? היינו מקבלים את אותה הקבוצה. (קל לראות זאת מהתהליך, אך קל לראות לא נקודות במבחן. יש להוכיח זאת באינדוקציה), שלב ב' אכן היה משנה.
שאלה. אם יש לנו קבוצה של שלושה וקטורים כך ש$v_2 \perp v_3$ אך הם לא מאונכים לv_1, האם הגרם שמידט ישנה אותם? ייתכן שכן.
הערה. כל פעם מעתה והלאה ניתן לקחת כמובן מאליו משפט כמו "נקח בסיס אורתוגונלי". מדוע? בסיס תמיד אפשר לקחת, גרם שמידט תמיד ניתן לעשות, ולכן תמיד אפשר לקחת בסיס אורתוגונלי.
תזכורת מלינארית 1. ניתן להתחיל מבסיס "קטן יותר" ולהרחיבו לבסיס גדול יותר, אך לא ניתן לעשות ההפך.
טענה: בהינתן $U \subseteq V$ ת"מ ובסיס B אל U, נוכל להפעיל תהליך גרם שמידט על איברי בסיס B ולקבל בסיס אורתגונלי C. כעת, ניתן להרחיב את הבסיס C אל בסיס לV, כאשר כפי שציינו כאן מעלה בהערה, הוקטורים שכבר מאונכים זה לזה לא יושפעו מחדש כאשר נעשה שוב גרם שמידט, ואלו שישתנו יהיו החדשים שבחרנו להוסיף אל בסיס C. כך נפעיל שוב גרם שמידט ונקבל בסיס D אל V שהינו אורתוגונלי. (כנ"ל על אורתונורמלי)
טענה: יהי V ממ"פ ויהי $W \subseteq V$ ת"מ ויהי $B_W = \{w_1, ...w_n\}$ בסיס אורתגונלי של W. נשלים לבסיס של כל V:

$$B_V = \{w_1, ...w_n, v_{n+1}, ..., v_{n+k}\}$$

אם נפעיל גרם שמידט על B_V, הw_i לכל $1 \leq i \leq n$ לא ישתנו. (כמו בטענה מעלה), ונקבל

$$B_{V'} = \{w_1, ...w_n, v'_{n+1}, ...v'_{n+k}\}$$

אזי, זהו בסיס אורתונורמלי של $W^\perp$.
טענה: יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $W \subseteq V$. ויהי $v \in V$. ההיטל של v על W הוא הוקטור בW שהכי קרוב ל־v.
דהיינו,

$$\forall_{w \in W} ||v - w|| > ||v - \pi_W(v)||$$

וכן, יש שוויון אמ"מ $w = \pi_W(v)$.

אי שוויון בסל

יהי V ממ"פ נ"ס ותהי קבוצה $A = \{v_1, ...v_n\}$ אורתנורמלית (היא בת"ל. אף אחד לא אמר שהיא בסיס. המימד לא בהכרח n.)
ויהי $v \in V$.
אזי,

$$||v||^2 \geq || < v, v_1 > ||^2 + ... + || < v, v_n > ||^2 = \sum_{i=1}^{n} || < v, v_i > ||^2$$

*הערה ־ אם הקבוצה הייתה בסיס אזי היה כאן ממש שוויון.

אי שיוויון קושי־שוורץ

יהי V ממ"פ נ"ס ויהיו $v, u \in V$. אזי,

$$| < u, v > | \leq ||u|| * ||v||$$

כלומר, מכפלת הנורמות גדולה מהערך המוחלט של המכפלה הפנימית.
מתי יש שוויון? כאשר v, u תלויים לינארית.

מטריצת גראם

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ויהי $B = \{v_1, ...v_n\}$ בסיס סדור של V. נגדיר $G_B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ע"י:

$$G_B = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & . & . & . & < v_1, v_n > \\ \\ < v_1, v_n > & . & . & . & < v_n, v_n > \end{pmatrix}$$

טענה: B או"נ $\iff G_B = I$.
טענה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ויהי $B = \{v_1, ...v_n\}$ בסיס של V, אזי

$$\forall v, u \in V :< v, u >= [v]_B^t G_B \overline{[u]_B}$$

העתקה צמודה

משפט ההצגה של ריס: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ותהי $T : V \to \mathbb{F}$ העתקה לינארית. אזי, קיים $\vec{a} \in V$ יחיד כך שלכל $v \in V$,

$$T(v) =< v, \vec{a} >$$

הגדרה: יהיו V, U ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ותהי $T : V \to U$ הע"ל. העתקה צמודה של T הינה העתקה לינארית $S : U \to V$ ומקיימת:

$$\forall v \in V, u \in U :< T(v), u >=< v, S(u) >$$

טענה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל F ותהי $T : V \to U$ הע"ל, אזי קיימת לT הע"ל צמודה יחידה. ונסמנה T^*.
טענה: יהיו V, U ממ"פ נ"ס מעל F. ותהי $T : V \to U$ הע"ל. יהיו B וC בסיסים או"נ לV, U בהתאמה, אזי

$$[T^*]_B^C = ([T]_C^B)^*$$

יש לשים לב שמשמאל זו אכן העתקה צמודה, ומימין מקבלים מטריצה ועושים עליה כוכב ־ צמוד טרנספוז.
במ"פ הסטנדרטית:

$$< Av, u >= (Av)^t\overline{u} = v^tA^t\overline{u}$$

$$< v, A^*u >= v^t\overline{\overline{A^t}u} = v^tA^t\overline{u}$$

כלומר ראינו כי

$$< Av, u >=< v, A^*u >$$

לכן בפרט

$$< A^*Av, v >=< A^*(Av), v >=< Av, A^{*^*}v >=< Av, Av >= ||Av||^2$$

הערה חשובה: הבסיסים הסטנדרטים הם אורתנורמליים ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תכונות העתקה צמודה:

יהיו T, S הע"ל וכן $\alpha \in \mathbb{F}$.

.1

$$(T^*)^* = T$$

.2

$$(T + S)^* = T^* + S^*$$

.3

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$$

.4

$$(ST)^* = T^*S^*$$

.5

$$Id_v* = Id_v$$

6. טענה מהתרגול: יהיו V, W ממ"פ ו$B = \{v_1, ...v_n\}$ בסיס או"נ לV. וכן תהי $T : V \to W$ הע"ל. אזי $T^*(w) = \sum_{i=1}^n \overline{< T(v_i), w >} * v_i$.

הגדרה: יהי V מ"ו ותהי T אופרטור על V. יהי ת"מ $W \subseteq V$. נאמר כי W הוא ת"מ T־אינווריאנטי אם $T[W] \subseteq W$.

זהויות פולריות

אנו יודעים בהינתן מ"פ למצוא נורמה. נרצה למצוא את הכיוון ההפוך.
א. נראה כי לכל $v \in V$ מתקיים

$$||u+v||^2 =< u+v, u+v >=< u,u > + < u,v > + < v,u > + < v,v >= ||u||^2 + 2Re(< v,u >) + ||v||^2$$

לכן מתקיים

$$Re(< v,u >) = \frac{1}{2}(||v+u||^2 - ||u||^2 - ||v||^2)$$

ב. יהי V ממ"פ. אזי $Im(< v,u >) = Re < v, iu >$.
ג. מסקנה מב': יהי V ממ"פ ויהיו $u,v \in V$ אזי

$$Im(< v,u >) = \frac{1}{2}(||v+iu||^2 - ||u||^2 - ||v||^2)$$

כעת נראה דוגמה לשימוש בתרגיל טכני. ניקח את $\mathbb{R}^2$ עם נורמה שמושרית מממ"פ $|| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} || = x^2 + y^2$. צ"ל $< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} >$.
פתרון:

$$< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} >=_{\in\mathbb{R}} Re(< \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} >) =_{defB}$$

$$\frac{1}{2}(|| \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} ||^2 - || \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} ||^2 - || \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ||^2) =$$

$$\frac{1}{2}((x+z)^2 + (y+w)^2 - z^2 - w^2 - x^2 - y^2) = xz + yw$$

כנדרש.

אופרטורים מיוחדים

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.
1. נאמר כי T נורמלי אם $TT^* = T^*T$
2. נאמר כי T אוניטרי אם $TT^* = I$ (שקול ל$T^*T = I$)
3. נאמר כי T צמוד לעצמו (צל"ע) / הרמיטי אם $T = T^*$. ב $\mathbb{R}$ זה נקרא סימטריות. (כלומר, $A = A^t$... דומה לסימטרי שמכירים כבר)
4. T אנטי צלע אם $T^* = -T$

הגדרה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
1. נאמר כי A נורמלית אם $AA^* = A^*A$
2. נאמר כי A אוניטרית אם $AA^* = A^*A = I$
3. נאמר כי A צמודה לעצמה (צל"ע)/הרמיטית אם $A = A^*$ ובממשיים זה נקרא סימטרית (שלום לליני 1).

$-\heartsuit-$: אם T אוניטרי $\leftarrow$ T נורמלי.
$-\heartsuit-$: אם T צל"ע $\leftarrow$ T נורמלי.

על הקשר למטריצות מייצגות

משפט: יהי V ממ"פ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. B בסיס או"נ לV. אזי:

א. T נורמלי $\iff$ $[T]_B^B$ נורמלי

ב. T אוניטרי $\iff$ $[T]_B^B$ אוניטרי

ג. T צל"ע $\iff$ $[T]_B^B$ צל"ע

קריטריון לנורמליות

יהי V ממ"פ. ויהי $T:V\to V$ אופרטור. אזי,
T נורמלי $\iff$ לכל $v\in V$ מתקיים $||T(v)||=||T^*(v)||$
(נשים לב - אופרטור צל"ע ואוניטרי הם גם נורמליים)

קריטריון לאוניטריות

יהי V ממ"פ. $T:V\to V$ אופרטור. אזי ההבאים שקולים:

א. T אוניטרי.

ב. T שומר מ"פ : לכל $u,v\in V$ מתקיים $<v,u>=<T(v),T(u)>$

ג. T שומר נורמה: לכל $v\in V$ מתקיים $||v||=||T(v)||$

ד. T שומר מרחק: לכל $v,u\in V$ מתקיים $||v-u||=||T(v)-T(u)||$

טענה: יהי V ממ"פ ויהי אופרטור $T:V\to V$ אוניטרי. אזי T שומר זווית. כלומר, לכל $v,u\in V$ והזווית Θ שבין שני הווקטורים מתקיים

$$cos(\Theta)=\frac{<v,u>}{||v||*||u||}=\frac{<T(v),T(u)>}{||T(v)||*T(u)||}$$

(ממש בא מהקריטריון קודם שכן הוא שומר מ"פ ונורמה).
הערה: T שומר זווית לא גורר אוניטרי. למשל סטנדרטית עם $T=2I$. אכן שומר זווית (קל לבדוק) אך לא אוניטרי שכן $||\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}||=2$ וכן $||T\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}||=4$ ואין שוויון לכן לא אוניטרי.

מטריצות אוניטריות

הערה חשובה: כשאנחנו עובדים על מטריצות נעבוד תחת מכפלה פנימית סטנדרטית, ומעל העתקות נעבוד תחת כל מכפלה פנימית.

תזכורת, כאשר $I=A^*A=AA^*$. למשל - המטריצה I אוניטרית וכן $-I$. גם $A=\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}$, וכן המטריצה המעניינת $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ אוניטרית גם כן.

טענה: A אוניטרית $\iff$ A^* אוניטרית.

טענה: A אוניטרית $\iff$ A^t אוניטרית.

הערה. יש לשים לב כי אם A אוניטרית כמובן שגם $A^t\overline{A}$ שכן אם ניקח $B=A^t$ אזי אכן מתקיים $A^t\overline{A}=BB^*$ וכן A אוניטרית, לכן גם A^t (כלומר B) ולכן $BB^*=I$ כלומר $A^t\overline{A}=I$.

טענה: יהיו A,B אוניטריות. אזי גם AB אוניטרית.

טענה: תהי A ריבועית. אזי A אוניטרית $\iff$ העמודות שלה הן בסיס ל$\mathbb{F}^n$ או"נ במ"פ הסטנדרטית $\iff$ השורות שלה הן בסיס או"נ במ"פ הסטדנרטית.

טענה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ויהי $T:V\to V$ אוניטרית. ויהי λ ע"ע של T אופרטור. אזי $|\lambda|=1$ (כלומר ע"ע של אוניטרית יהיה בהכרח 1 או מינוס אחד)- ההפך לא נכון

טענה: יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $T:V\to V$ צל"ע. ויהי λ ע"ע של T. אזי λ ממשי בהכרח

מסקנה: תהי A צל"ע אזי בהכרח הפ"א מל"ל מעל $\mathbb{R}$ (מעל $\mathbb{C}$ ממילא מל"ל).

טענה: יהי V ממ"פ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי נורמלי. אזי, λ ע"ע של T עם ו"ע v $\iff$ $\overline{\lambda}$ ע"ע של T^* עם ו"ע v.

טענת עזר: יהי $\alpha\in\mathbb{F}$. אזי T נורמלי אמ"מ $T-\alpha I$ נורמלי.

טענה: יהי V ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$. ויהי $T:V\to V$ אופרטור נורמלי. נניח כי λ הוא ע"ע של T עם ו"ע v. נניח כי α ע"ע של T עם ו"ע u. כמו כן מתקיים $\lambda\neq\alpha$. אזי, v,u או"ג כלומר $<v,u>=0$.
כמובן שאם אוניטרית אזי מעל הממשיים $A^t=A^{-1}$ ומעל מרוכבים $A^*=A^{-1}$.
(מונח זהה = מטריצה או"ג זה מטריצה אוניטרית בממשיים.)

שילוש אוניטרי

הגדרה: יהי V ממ"פ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נאמר כי T ניתן לשילוש אוניטרי אם קיים בסיס או"נ B לV כך ש$[T]_B^B$ משולשית.
הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר כי A ניתנת לשילוש אוניטרי אם קיימת מטריצה P אוניטרית כך ש= $P^{-1}AP$ $P^*AP=D$ כך שD משולשית.
טענה: יהי V ממ"פ. ויהי $T:V\to V$ אופרטור. אזי T ניתן לשילוש אוניטרי $\iff$ הפ"א מל"ל.
טענה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אזי A ניתנת לשילוש אוניטרי $\iff$ הפ"א של A מל"ל.
טענה: יהי V ממ"פ וכן $T:V\to V$ אופרטור וB בסיס או"נ של V.
אזי T ניתנת לשילוש אוניטרי (קיים בסיס B' או"נ כך ש$[T]_{B'}^{B'}$ משולשית) $\iff$ $[T]_B^B$ ניתנת לשילוש אוניטרי (קיימת P אוניטרית כך ש$P^{-1}[T]_B^BP$ משולשית)

לכסון אוניטרי

מדוע צריך לכסון אוניטרי? אנחנו עוברים בין מטריצות מעבר בלכסון רגיל, בלכסון רגיל אין שמירה על מרחקים מסויימים. אנחנו רוצים לעבור מהבסיס הסטנדרטי לבסיס או"נ וכך נבצע לכסון וכן המרחקים יישמרו וכן המכפלה הפנימית תשמר.
למה: יהי V ממ"פ ויהיו B,B' בסיסים של V. נסמן $C=[I]_B^{B'}$. אזי $G_{B'}=C^tG_B\overline{C}$.
מסקנה מהלמה: יהי V ממ"פ נ"ס ויהיו B,B' בסיסים או"נ לV. אזי במקרה כזה $G_B=I$ ומטענה קודמת נקבל $C^*C=I$, כלומר מטריצת המעבר בין בסיסים היא אוניטרית.

הגדרה: יהי V ממ"פ ויהי $T:V\to V$ אופרטור. נאמר כי T ניתן ללכסון אוניטרי אם קיים בסיס B או"נ לV כך ש$[T]_B^B$ אלכסונית.
הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נאמר כי A ניתנת ללכסון אוניטרי אם קיימת מטריצה P אוניטרית כך ש$P^*AP=D$ כך שD אלכסונית.
משפט: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A נורמלית ומשולשית $\iff$ A אלכסונית.
משפט הלכסון האוניטרי: יהי V ממ"פ ותהי $T:V\to V$ אופרטור. אזי T ניתן ללכסון אוניטרי $\iff$ הפ"א מל"ל וגם T נורמלית.
הגדרה: $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת ללכסון או"ג אם קיימת P או"ג (אוניטרית וממשית) כך ש$P^{-1}AP$ אלכסונית.
טענה: תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי A ניתנת ללכסון או"ג $\iff$ A סימטרית.
טענה: תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אזי A ניתנת ללכסון או"ג $\iff$ פ"א מל"ל + A נורמלית
**חשוב!!! כל בסיס שישלש אוניטרית, גם ילכסן אוניטרית.

אלגוריתם ללכסון אוניטרי (עבור A נורמלית + וכן פ"א מל"ל)

1. בודקים האם A נורמלית - כלומר האם $AA^*=A^*A$. אם לא - סיימנו.
2. מחשבים פ"א. אם לא מל"ל - סיימנו. אחרת, כן ניתן ללכסן אוניטרית.
3. נחפש ע"ע וו"ע.

בטוח יש n ו"ע סה"כ שכן פ"א מל"ל + נורמלית $\Leftarrow$ לכסינה אוניטרית ובפרט לכסינה לכן קיים בסיס של וקטורים עצמיים.
נסמן ע"ע כ $\lambda_1,...\lambda_k$. לכל ע"ע יש מרחב עצמי U_i עם בסיס B_i עם a_i ו"ע כך ש$\sum_{i=1}^k a_i=n$.
לכל $1\leq i\leq k$ נפעיל גרם שמידט על B_i ונקבל $\hat{B}_i$ שהוא בסיס או"ג של מרחב עצמי.
ו"ע של ע"ע שונים במטריצה נורמלית הם או"ג ולכן לכל שני וקטורים $u\in B_i$ וכן $v\in B_j$ כך ש$i\neq j$ נקבל כי $<v,u>=0$. ובנוסף $\hat{B}_i$היא קבוצה או"נ. סה"כ גם

$$B_1\cup B_2\cup....\cup B_k$$

קבוצה או"נ. יש באיחוד (כפי שהסברנו) n וקטורים ולכן זה בסיס או"נ . **נשים לב שתוך כדי גרם שמידט במידת הצורך ננרמל!**

4. נבנה P ע"י שנסדר את n הוקטורים הנ"ל בעמודות, זו P הדרושה. יש בעמודות של P ו"ע לכן היא מלכסנת, וכן עמודותיה הן בסיס או"נ עם מ"פ סטנדרטית לכן היא אוניטרית.
סה"כ נקבל $P^*AP = D$.
**אם נרצה ללכסן או"ג, בודקים בשלב ה1 וה0 גם אם היא סימטרית והשאר כרגיל.

דוגמה: נתבונן במטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

האם לכסינה או"ג? היא ממשית, ואכן ניתן לראות כי היא סימטרית. לכן לפי משפט סימטרית+ממשית $\Longleftrightarrow$ ניתנת ללכסון או"ג, היא אכן ניתנת. נחשב ע"ע ופ"א - נחסוך זאת כאן ונקבל

$$P_A(x) = x^2(x-4)(x-8)$$

נחשב מרחבים עצמיים, נחסוך זאת שוב. נקבל

$$B_1(\lambda=0) = sp\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_2(\lambda=4) = sp\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_3(\lambda=8) = sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

נפעיל גרם שמידט על כל קבוצה. בפרט קבוצות B_2 וB_3 הינן קבוצה יחידה ולכן או"ג. נפעיל על B_1. נגדיר $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. כעת נחשב את v_2 ונקבל

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >}{< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לאחר נרמול נקבל סה"כ את הבסיסים הבאים האורתונורמליים

$$B_1(\lambda=0) = sp\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\}, B_2(\lambda=4) = sp\{\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\}, B_3(\lambda=8) = sp\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\}$$

סה"כ נקבל את המטריצות הבאות

$$P = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{Bmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פירוק SVD

בדומה לPLU נרצה בהינתן מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ למצוא מטריצות U,V,D כך ש$A=U\Sigma V^*$ כך ש:
* U מטריצה $m\times m$ אורתוגונלית
* Σ מטריצה $m\times n$ כמעט "אלכסונית" (כל האיברים במיקומים $i\neq j$ הם אפס)
* V מטריצה $n\times n$ אורתוגונלית

טענה: לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ניתן למצוא פירוק SVD.
הערה: נניח $m>n$, שכן נוכל לטפל גם במקרה $m<n$. שכן אם טיפלנו במקרה $m>n$, אזי אם $m<n$ נקבל A^* הופכת את הסדר, ולכן $A^*=U\Sigma V^*$ ולכן $A=(U\Sigma V^*)*=V\Sigma^*U^*=V\Sigma U$

כדי למצוא את המטריצות נעבוד לפי השלבים הבאים:
א. נסתכל על המטריצה A^*A, זו מטריצה סימטרית (קל לראות) ולכן יש לה ערכים עצמיים ממשיים וניתן להראות גם שהם אי שליליים. נסמנם בסדר יורד: $\lambda_1\geq...\geq\lambda_n\geq 0$.
ב. מלכסנים אורתוגונלית את A^*A, את הו"ע נשים בעמודות וזו המטריצה V
ג. בשביל Σ נשים באלכסון את השורשים $\sqrt{\lambda_1}$ במיקום 11 וכן הלאה $\sqrt{\lambda_i}$ במיקום $[i,i]$.
ד. בשביל U, נחזור אל הו"ע משלב 2 ונתעלם מכל הוקטורים שמתאימים לערך העצמי 0, את הוקטורים שנשארו נסמן $u_1,...u_r$. מהם נבנה וקטורים חדשים: $v_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Au_i$. את הוקטורים $v_1,...v_r$ נשלים לבסיס או"נ, נשים בעמודות וזו המטריצה V.
ה. לקינוח, לא יזיק להכפיל ולבדוק כי $A=U\Sigma V^*$

דוגמה: בצע פירוק SVD למטריצה הבאה:

$$A=\left\{\begin{array}{cc}3&-1\\6&-2\\6&-2\end{array}\right\}$$

נתחיל לפי השלבים. אנחנו מעל הממשיים ונשים לב לכך.

$$A^tA=\left\{\begin{array}{ccc}3&6&6\\-1&-2&-2\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cc}3&-1\\6&-2\\6&-2\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{cc}81&-27\\-27&9\end{array}\right\}$$

נחשב ע"ע

$$P_A(x)=\left|\begin{array}{cc}x-81&27\\27&x-9\end{array}\right|=(x-81)(x-9)-27^2=x^2-90x=x(x-90)$$

כלומר ע"ע הם 0 וכן 90. מסדרים מהגדול לקטן - $\lambda_1=0,\lambda_2=90$.
נרצה ללכסן או"ג:
ו"ע עבור 0 יהיה $(x,3x)$ לכן אם ננרמל נקבל $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$. ו"ע עבור 90 יהיה $(-3y,y)$ ולכן אם ננרמל $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$.
כעת קיבלנו את V:

$$V=\frac{1}{\sqrt{10}}\left\{\begin{array}{cc}-3&1\\1&3\end{array}\right\}$$

את Σ ניתן לקבל ע"י שורש על הע"ע ולקבל

$$\Sigma=\left\{\begin{array}{cc}\sqrt{90}&0\\0&0\\0&0\end{array}\right\}$$

נראה כי בשורות שיוותרו לנו לאחר האלכסון, נשים אפסים גם כן. זו כאילו "אלכסונית".
כעת לשלב האחרון - נוותר על הוקטור שמתאים לע"ע 0 , ונקבל את הוקטור $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$. נבנה ממנו את הוקטור הבא

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A u_i = \frac{1}{\sqrt{90}} * \left\{ \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{array} \right\} * \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{c} -3 \\ 1 \end{array} \right) = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

אכן קיבלנו וקטור מנורמל. כעת נרצה להשלים לבסיס או"נ בגודל m, לכן ניקח את $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואת $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ למשל, נבצע גרם שמידט. אפשרות אחרת היא לנסות להבין מה הפתרון הכללי של הוקטורים שיהיו מאוכנים אל הוקטור שלנו, ואז "לנחש" ידנית. כלומר ־

$$< \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0 \Longrightarrow x = -2y - 2z$$

אם נציב $z = 0$ ו $y = 1$ נקבל $x = -2$ כלומר וקטור $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ מאונך לוקטור הקודם. כעת נרצה למצוא וקטור שיהיה מאונך לשני הוקטורים שיש לנו:

$$< \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0 \Longrightarrow -2x + y = 0 \Longrightarrow y = 2x$$

כלומר נרצה $x = -2y - 2z \wedge y = 2x$ כלומר $x = -4x - 2z$ כלומר $5x = -2z$ כלומר $z = -2.5x$. אם ניקח את הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2.5 \end{pmatrix}$ או כי אוהבים מס' שלמים $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ שיהיה מאונך לשניהם. כעת ננרמל כל אחד מהוקטורים שהוספנו (הראשון כבר מנורמל) ונקבל

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

מדובר בבסיס או"נ, וכעת נקבל

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$$

סה"כ

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix} * \left\{ \begin{array}{cc} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right\}^*$$