05D0à 05D1á 05D2â 05D3ã 05D4ä 05D5å 05D6æ 05D7ç 05D8è 05D9é 05DAê 05DBë 05DCì 05DDí 05DEî 05DFï 05E0ð 05E1ñ 05E2ò 05E3ó 05E4ô 05E5õ 05E6ö 05E7œ 05E8ø 05E9ù 05EAú

אינפי 2 ־ פתרונות מבחנים ד"ר אלעד עטייא

3 ביוני 2025

מצרף כאן קובץ של כל פתרונות המבחנים, פתרונות שעשיתי (וכן מבוססים על הדרייב) ־ אם מצאתם טעות עדכנו :)
גיא יער־און
הערה: אם לא מופיע במבחן מסויים שאלות כלשהם, משמע מדובר בשחזור וקיים איפשהו בקובץ השאלה כבר.

חלק I

מבחן 2025 סמסטר א מועד א

שאלה 1: חשבו את האינטגרלים הבאים
א.

$$\int e^x sin(3x)dx$$

פתרון:
נסמן $f'(x) = f(x) = e^x$ וכן נסמן $g(x) = -\frac{1}{3}cos(3x), g'(x) = sin(3x)$ ואז לפי אינטגרציה בחלקים ־

$$\int e^x sin(3x)dx = -\frac{1}{3}e^x cos3x - \int \frac{-1}{3}cos3(x)e^x = -\frac{1}{3}e^x cos3x + \frac{1}{3}\int cos3(x)e^x$$

ושוב בחלקים, נסמן $f(x) = f'(x) = e^x$ וכן נסמן $g(x) = \frac{1}{3}sin(3x), g'(x) = cos(3x)$ ונקבל כי

$$\int cos3(x)e^x = \frac{1}{3}e^x sin(3x) - \int \frac{1}{3}sin(3x)e^x$$

נציב את זה במשוואה שלמעלה,

$$\int e^x sin(3x)dx = -\frac{1}{3}e^x cos3x + \frac{1}{3}\int cos3(x)e^x = -\frac{1}{3}e^x cos3x + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}e^x sin(3x) - \int \frac{1}{3}sin(3x)e^x)$$

$$\int e^x sin(3x)dx = -\frac{1}{3}e^x cos3x + \frac{1}{9}e^x sin(3x) - \frac{1}{9}\int e^x sin(3x)$$

$$\frac{10}{9}\int e^x sin(3x)dx = -\frac{1}{3}e^x cos3x + \frac{1}{9}e^x sin(3x)$$

$$\int e^x sin(3x) = \frac{9}{10}(-\frac{1}{3}e^x cos3x + \frac{1}{9}e^x sin(3x))$$

$$\int e^x sin(3x) = -\frac{3}{10}e^x cos3x + \frac{1}{10}e^x sin(3x) + c$$

ב. חשב את $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx}+\sqrt{cosx}}dx$

פתרון: סתם נראה מפחיד. קטן עלינו - נעזר ברמז ונציב $t = \frac{\pi}{2} - x$, $dx = -dt$ וכן מה קורה בגבולות? נקבל גבולות הפוכים לגמרי כלומר:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx}+\sqrt{cosx}}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx}+\sqrt{cosx}} - dt$$

למזלנו יש מינוס, יתקזז עם ההחלפה של הגבולות ולאחר שנציב $x = \frac{\pi}{2} - t$ נקבל:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sin(\frac{\pi}{2}-t)}}{\sqrt{sin(\frac{\pi}{2}-t)}+\sqrt{cos(\frac{\pi}{2}-t)}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}}dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}-\sqrt{sin(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{\sqrt{sin(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}}dt$$

$$= [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sin(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}} = \frac{\pi}{2} - -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sin(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}}$$

מה קיבלנו?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx}+\sqrt{cosx}}dx = \frac{\pi}{2} - -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sin(t)}}{\sqrt{cos(t)}+\sqrt{sin(t)}}dt$$

תכלס, זה אותו אינטגרל בדיוק מה שכתוב בשני הצדדים, מה אכפת לי אם כתוב t או x? נכתוב חזרה x ונעביר אגף

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx}+\sqrt{cosx}}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{sinx}+\sqrt{cosx}}dx = \frac{\pi}{4}$$

טריקים שפלים, אבל סיימנו.

שאלה 2: תהי f רציפה מוגדרת בקטע $[0,\infty)$. הוכח הפרך:

א. אם $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי f חסומה.

ב. אם f יורדת והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי $lim_{x\to\infty}f(x)=0$

פתרון:

סעיף א - פונקציית המשולשים נותנת עבודה, האינטגרל מתכנס ושווה $\frac{\pi^2}{6}$, אך הפונקציה כלל אינה חסומה:

כעת נתבונן על פונקציית "משולשים" - נתארה באופן פורמלי כדקלמן - בכל קטע מהצורה $[n,n+1]$ נגדיר משולש - שווה שוקיים שהשטח שלו הוא $\frac{1}{n^2}$ ובשאר הקטע הפונקציה היא אפס - אך רציפה. נקח משולשים בגובה n עם בסיס $\frac{2}{n^3}$ונקבל כפי שרצינו.

פורמלית-

1. בקטע $[n,n+\frac{1}{n^3}]$ - הפונקציה היא קו ישר עולה.
2. בקטע $[n+\frac{1}{n^3},n+\frac{2}{n^3}]$ - הפונקציה היא קו ישר יורד.
3. 1. בקטע $[n+\frac{1}{n^3},n]$ - הפונקציה היא 0.

בחלק הראשון השיפוע הוא $m=\frac{n-0}{\frac{1}{n^3}+n-n}=n^4$ ולכן משוואת הישר היא $f(x)=n^4x-n^5$ (קו ישר...)

בחלק השני - באופן דומה השיפוע הוא $-n^4$ ונקבל $f(x)=-n^4x+n^5+2n$
וסה"כ נקבל את f באופן פורמלי כך -

$$f(x)=\left\{\begin{array}{cc} n^4x-n^5 & [n,n+\frac{1}{n^3}] \\ -n^4x+n^5+2n & [n+\frac{1}{n^3},n+\frac{2}{n^3}] \\ 0 & [n+\frac{1}{n^3},n] \end{array}\right\}$$

זו פונקציית המשולשים שלנו - האינטגרל מתכנס כפי שנראה כעת:

האינטגרל שווה לטור $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n^2}$ שמתכנס! כלומר בשורה הסופית - גם רציפה חיובית מתכנסת לא גוררת שהאיבר הכללי שואף לאפס.

מדוע לא חסומה? הגובה כל פעם נבחר להיות n משתנה - וודאי שלא חסומה.

סעיף ב - הוכחה:

ב. אם f יורדת והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אזי $lim_{x\to\infty}f(x)=0$

f יורדת, אם אם היא לא חסומה מלמטה אזי $lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, ואז האינטגרל מתבדר בסתירה. מכאן שקיים L כך ש$lim_{x\to\infty}f(x)=L$ כאשר $L\in\mathbb{R}$. נרצה להוכיח $L=0$. נניח בשלילה כי $L>0$ (בה"כ)

אזי לפי מונוטוניות האינטגרל מתקיים $f(x)\geq L \Longleftarrow \int_0^\infty f(x)dx\geq\int_0^\infty Ldx=\infty$

בסתירה, כי האינטגרל שלנו מתכנס. סה"כ בוודאות $L=0$. קללללללללל.

שאלה 3:

א. הוכח/הפרך: אם טור הפונקציות $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I, אז בהכרח קיים טור מספרים מתכנס $\sum a_n$ כך שלכל $x\in I$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $|f_n(x)|\leq a_n$.

פתרון: חרטא. נקח את טור המספרים $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$, היא קבועה וכן

$$f(x)=lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$$

לפי אפיסה כפול חסומה, הוא מתכנס במ"ש כי קבוע, האם בהכרח קיים טור מספרים שגדול ממנו? נראה כי

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

וכן זו סתירה, שכן הטור $\frac{1}{n}$ מתבדר, ולכן לפי מבחן השוואה גם $f_n(x)$ מתבדר. לכן לא קיים טור a_n כזה. באסה.

ב. בדוק האם טור הפונקציות הבא מתכנס במ"ש בקטע $[\frac{1}{2}, 2]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$$

פתרון: אנחנו עפים על טורי פונקציות. נשים לב כי נרצה לחסום עם ויירשטראס. לכן נרצה ערך מוחלט. מתקיים $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$

$$|x^n + x^{-n}| \leq |x|^n + |x|^{-n} \leq 2|x|^n \leq 2 * 2^n = 2^{n+1}$$

ולכן

$$|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})| \leq \frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$$

קיבלנו טור מספרים, ללא x־ים. אם נוכיח שהוא מתכנס (אינפי 1), אזי סיימנו ויש התכנסות במ"ש. כעת זה דורש, עצרת... נעשה מבחן המנה:

$$L = lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{\sqrt{n!(n+1)}}}{\frac{n^2 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}} = lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^2 * 2 * \sqrt{\frac{n!}{n! * n+1}} = 2 * lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 2 * 0 = 0$$

סה"כ, הגבול $L = 0 < 1$, מכאן שהטור מתכנס לפי כלל המנה של דמבלדור, ולכן סה"כ הטור מתכנס במ"ש. קלל..

שאלה 4:

חשבו את הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)}$$

ננסה לסדר אותו ולהבין מה אנחנו רוצים. ברור שהרעיון הוא לקחת את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$ ולהציב בו $\frac{1}{2}$ בסוף (אכן בתחום ההתכנסות שלנו ככה שחוקי). נראה שכנראה שהתבצעה אינטגרציה פעמיים, שכן הn ירד למטה. נתחיל מההנדסי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

נחלק באיקס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$$

כעת נשים לב כי לפי פירוק שברים חלקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

כעת נרצה למצוא את המחובר הימני

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m}$$

כעת הסכום עם m, זה בדיוק הסכום שחישבנו מעלה, פחות האיבר הראשון x ולכן

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = -ln(1-x) - x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} * -(ln(1-x) + x) = \frac{-ln(1-x) - x}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = -ln(1-x) + \frac{ln(1-x)}{x} + 1$$

נציב $x = \frac{1}{2}$ ונקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n(n+1)} = -ln(\frac{1}{2}) + 2ln(\frac{1}{2}) + 1 = 1 - ln(2)$$

שאלה 5: יש לעשות!!!!

חלק II
2025 סמסטר ב מועד ב

שאלה 1

א. חשב את האינטגרל $\int tan^3x$. בדוק מה הקשר בין tan^2x לבין $\frac{1}{cos^2x}$
ב. בדוק האם האינטגרל $\int_0^\infty xsin(e^{2x})dx$ מתכנס
פתרון:
א. נעזר ברמז. נראה כי

$$tan^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{1-cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} - 1$$

ולכן

$$\int tan^3x = \int tanx(\frac{1}{cos^2x} - 1)dx = \int \frac{tanx}{cos^2x} - tanxdx$$

כעת כל חלק נטפל בנפרד. באגף השמאלי נציב $t = tanx$ ואז $dt = \frac{dx}{cos^2x}$ כלומר $dx = dtcos^2x$ ולכן

$$\int \frac{tanx}{cos^2x}dx = \int \frac{t}{cos^2x}dtcos^2x = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{tan^2x}{2}$$

כעת בחלק הימני נציב $t = cosx$ ואז $dt = -sinxdx$ כלומר $\frac{dt}{-sinx} = dx$ וכן

$$\int tanxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = \int \frac{sinx}{t}\frac{dt}{-sinx} = \int \frac{-1}{t}dt = -ln|t| = -ln|cosx|$$

כלומר סה"כ נקבל

$$\int tan^3xdx = \frac{tan^2x}{2} + ln|cosx| + C$$

ב.**פתרון:** נסתכל על האינטגרל $\int_0^\infty xsin(e^{2x})dx$. הוא לא חיובי לצערנו, הנקודה היחידה שבעייתית היא באנסוף. נציב $t = e^{2x}$ ואז $dt = 2e^{2x}dx$ כלומר $dt = 2tdx$ ולכן

$$dx = \frac{dt}{2t}$$

כעת באשר לגבולות, כאשר שואף לאפס נקבל $e^0 = 1$ ובאנסוף נותר כשהיה, ונראה כי האינטגרל הופך להיות שקול לאינטגרל

$$\int_1^\infty xsin(t)*\frac{dt}{2t}$$

מיהו x? נראה כי אם $t=e^{2x}$ נפעיל ln על שני הצדדים ונקבל $x=\frac{lnt}{2}$ כלומר האינטגרל הופך להיות

$$\int_1^\infty \frac{lnt}{2}*sin(t)*\frac{dt}{2t}=\int_1^\infty sint*\frac{lnt}{4t}dt$$

האינטגרל של פונקציית sin חסום

$$G(x)=\int_1^x sintdt=[_1^x-cost]=cos1-cosx$$

וכן לפי סדרי גודל $\frac{lnt}{4t}$ יורד לאפס, ולכן לפי דריכלה האינטגרל מתכנס.

שאלה 2

תהי f מוגדרת בקטע I. הוכיחו הפריכו

א. אם לf יש פונקציה קדומה בקטע, אזי f אינטגרבילית בקטע.

ב. אם f אינטגרבילית בקטע, אזי לf יש קדומה בקטע.

פתרון: שתי הטענות אינן נכונות.

עבור א נתבונן בפונקציה

$$f(x):=\left\{\begin{array}{cc} 2xsin(\frac{1}{x^2})-\frac{2}{x}cos(\frac{1}{x^2}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{array}\right\}$$

לf יש קדומה, הפונקציה הבאה:

$$F(x):=\left\{\begin{array}{cc} x^2sin(\frac{1}{x^2}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{array}\right\}$$

אך f אינה אינטגרבילית בקטע, כיוון שהיא איננה חסומה (הקוסינוס אחד חלקי איקס בריבוע משתולל מאוד) ולכן איננה אינטגרבילית.

עבור ב נתבונן בפונקציה

$$f(x):=\left\{\begin{array}{cc} 1 & x\leq 0 \\ 0 & x>0 \end{array}\right\}$$

היא אכן אינטגרבילית בקטע, כיוון שיש לה מס' סופי (אחד) של נקודות אי רציפות וכן היא חסומה, אך אין לה קדומה לפי משפט דרבו - פונקציה לא יכולה להיות נגזרת של פונקציה אם יש לה נקודת אי רציפות קפיצה.

שאלה 3

א. הוכח הפרך ־ סדרת הפונקציות $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$.
ב. השתמש בטור חזקות מתאים על מנת לתאר את $ln13$ כטור מספרים רציונליים.

פתרון:

א ־ נראה כי כאשר $0 \le x \le 1$ מתקיים $f(x) = 1$, נתבונן בקטע $[0,1]$ שמוכל בקטע הגדול ונשתמש בd_n.

$$d_n = sup_{x\in[1,0]}|\sqrt[n]{1+x^n} - 1| = (1+x^n)^{\frac{1}{n}} - 1$$

כי בקטע הערך המוחלט פשוט שווה שכן ממילא מדובר בביטוי חיובי בקטע שלנו. נרצה לגזור את הפונקציה ולמצוא sup. לשם כך ־

$$\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} * nx^{n-1} = (1+x^n)^{\frac{1}{n}-1} * x^{n-1} = 0$$

כמו כן, הנגזרת חיובית, כלומר מדובר בפונקציה עולה, פרט לנקודה 0 המקסימום יתקבל בקצה הקטע בנקודה $x = 1$, ושם ערך הנקודה יהיה

$$2^{\frac{1}{n}} - 1 \to 2^0 - 1 = 0$$

סה"כ $d_n \to 0$ ולכן ההתכנסות אכן במ"ש בקטע.

ב ־ יש לעשות!!!

שאלה 4

חשבו את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(4n+1)}$$

פתרון:
נתחיל מהטור המוכר והאהוב שלנו, נעיר מראש שזה טור חזקות וכל הפעולות שנעשה (גזירה איבר איבר כפל באיקס אינטגרציה וכו' יהיו חוקיות)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

אם ננסה לעשות אינטגרציה על שני הצדדים לא נתקדם לשום מקום. לעומת זאת, אם נשים לב כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

אזי חיינו יהיו מושלמים. למה? כי אינטגרציה איבר איבר הולכת לפתור את הבעיה בשנייה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-x^4}$$

כעת ננסה להתמודד עם האינטגרל המסריח מאוד הזה מימין. נפרק לשברים חלקיים ונרשום:

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(x^2+1)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

שקול ל

$$1 = a(1+x)(x^2+1) + b(1-x)(x^2+1) + (cx+d)(1-x^2)$$

כעת נציב מה שנרצה וננסה למצוא את הפרמטרים שלנו. למשל, נציב $x=1$ ונקבל

$$1 = a(1+1)(1+1)$$

כלומר

$$a = \frac{1}{4}$$

נציב $x=-1$ ונקבל

$$1 = b(2)(2)$$

$$b = \frac{1}{4}$$

כעת נציב $x=0$ ונקבל

$$1 = a+b+d$$

כלומר $d=\frac{1}{2}$,
עבור $x=2$ נקבל

$$1 = 15a - 5b - 3(2c+d)$$

מציבים ופותרים משוואה זו ומקבלים $c=0$
סה"כ נקבל כי האינטגרל שקול לאינטגרל

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

כלומר

$$\int\frac{1}{1-x^4}dx=-\frac{1}{4}ln|1-x|+\frac{1}{4}ln|1+x|+\frac{1}{2}arctan(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=[_0^x-\frac{1}{4}ln|1-x|+\frac{1}{4}ln|1+x|+\frac{1}{2}arctan(x)]=-\frac{1}{4}ln|1-x|+\frac{1}{4}ln|1+x|+\frac{1}{2}arctan(x)$$

כעת נחלק באיקס, נקבל כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1}=\frac{1}{4x}(-ln|1-x|+ln|1+x|+2arctan(x))$$

נותר להציב $x=\frac{1}{2}$ ולקבל את הדרוש

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(4n+1)}=\frac{1}{2}(-ln|\frac{1}{2}|+ln|\frac{3}{2}|+2arctan(\frac{1}{2}))$$

$$\frac{1}{2}(ln2+ln|\frac{3}{2}|+2arctan(\frac{1}{2}))=\frac{1}{2}(ln3+2arctan(\frac{1}{2}))$$

סה"כ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(4n+1)}=\frac{ln3}{2}+arctan(\frac{1}{2})$$

שאלה 5 - יש לעשות!!

חלק III
2024 סמסטר ב מועד ב

שאלה 1

חשב אינטגרלים הבאים.

א. $\int \frac{xsinx}{cos^2x}dx$

נעשה בחלקים כמובן. נגדיר $f = x, f' = 1$ וכן $g = \int \frac{sinx}{cos^2x}$ וכן $g' = \frac{sinx}{cos^2x}$. נרצה שניה למצוא את g ולכן נציב $t = cosx$ ואז $dt = -sinxdx$ כלומר $dx = \frac{-dt}{sinx}$ ולכ

$$g = \int \frac{sinx}{cos^2x}dx = -\int \frac{sinx}{t^2}\frac{dt}{sinx} = -\int t^{-2}dt = \frac{1}{t} = \frac{1}{cosx}$$

כעת בחלקים

$$\int \frac{xsinx}{cos^2x}dx = \frac{x}{cosx} - \int \frac{1}{cosx}dx$$

נציב $t = sinx$ ואז $dt = cosxdx$ כלומר $dx = \frac{dt}{cosx}$

$$\int \frac{1}{cosx}dx = \int \frac{1}{cosx} * \frac{dt}{cosx} = \int \frac{1}{cos^2x}dt = \int \frac{1}{1-t^2}dt = \int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}ln|1+t| - \frac{1}{2}ln|1-t| =$$

$$\frac{1}{2}ln|1+sinx| - \frac{1}{2}ln|1-sinx|$$

סה"כ האינטגרל שווה

$$\frac{x}{cosx} - \frac{1}{2}ln|1+sinx| + \frac{1}{2}ln|1-sinx| + C.$$

(הערה - בדרייב פתרו עם הצבה אוניברסלית, גם עובד)
ב. חשב את האינטגרל הבא:

$$\int ln(sinx)cos^3xdx$$

סתם נראה מפחיד. ננסה להציב $t = sinx$ ואז $dt = cosxdx$ מכאן $dx = \frac{dt}{cosx}$

$$\int ln(sinx)cos^3xdx = \int ln(t)cos^3x * \frac{dt}{cosx} = \int ln(t)cos^2xdt = \int ln(t)(1-sin^2x)dt =$$

$$\int lnt(1-sin^2(arcsint))dt = \int lnt(1-t^2)dt = \int lnt - t^2lnt$$

כעת נפתור כל צד בנפרד. באשר לשמאל בחלקים כמובן ונקבל $\int lnt = tlnt - t$ מימין נגדיר $f = lnt$ ואז $f' = \frac{1}{t}$ וכן $g = \frac{t^3}{3}$ וכן $g' = t^2$ ונקבל

$$\int t^2 lntdt = \frac{1}{3}t^3 lnt - \int \frac{1}{t}\frac{t^3}{3}dt = \frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{3}\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{9}t^3$$

סה"כ נקבל

$$\int ln(sinx)cos^3 xdx = tlnt - t - (\frac{1}{3}t^3 lnt - \frac{1}{9}t^3) = tlnt - t + \frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{3}t^3 lnt$$

הצבה חזרה ונקבל :

$$sinxln(sinx) - sinx + \frac{1}{9}sin^3 x - \frac{1}{3}sin^3 xln(sinx) + C.$$

שאלה 2

תהי f מוגדרת בקטע $[a, b]$. נניח כי קיים קבוע S כך שלכל $n \geq 1$ ולכל חלוקה $\{x_1, ...x_n\}$ של הקטע $[a, b]$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = S$$

הוכח הפרך.
א. אם f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x)dx = f(a)(b - a)$
ב. f קבועה.
פתרון:
א. **הוכחה:** מהנתון, עבור החלוקה כאשר $n = 1$ נקבל כי $x_k = b$ וכן $x_{k-1} = a$

$$\sum_{k=1}^{1} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = f(a)(b - a) = S$$

מצד שני, f אינטגרבילית ולכן עבור חלוקה $P = \{x_1, ...x_n\}$ פרמטר שואף לאפס וכן בחירת נקודות C נקבל

$$\int_a^b f(x)dx = lim \sum_{n\to\infty k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = lim_{n\to\infty} S = S$$

ולכן סה"כ

$$\int_a^b f(x)dx = S = f(a)(b - a)$$

ב. לא נכון. נקח דוגמה נגדית ־

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{array} \right\}$$

היא אינה קבועה כמובן. עבור כל חלוקה של הקטע $[0,1]$ יתקיים $x_1 = 0$ וכן $x_n = 1$ מכאן לכל $1 \leq k \leq n$ נקבל $f(x_{k-1}) = 1$ וכן $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1(1-0) = 1$, כלומר לכל חלוקה קיים קבוע, שפשוט שווה אחד.

שאלה 3

א. חשב את גבול הסדרה

$$lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+nk}$$

פתרון: ננסה להגיע לאיזשהו סכום רימן. ובכן ־

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+nk} == \sum_{k=1}^{n} \frac{nk}{n^2+nk} * \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} * \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} * \frac{1}{n}$$

כלומר, אם נגדיר את הקטע $[0,1]$ עבור $p = \{0, \frac{1}{n}, ...\frac{n-1}{n}, 1\}$ ובחירת הנקודות $C = \{\frac{1}{n}, ...\frac{n-1}{n}, 1\}$ וכן הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x+1}$ נראה כי

$$lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+nk} = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{k}+1} * \frac{1}{n} = lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) * \triangle x_k = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

כעת נחשב אינטגרל זה. נגדיר $x+1 = t$ ולכן $dt = dx$ ואז

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{t-1}{t} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{t} dt = [_0^1 t - ln[t]] = [_0^1 x + 1 - ln(x+1)]$$

$$lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+nk} = [_0^1 x + 1 - ln(x+1)] = 2 - ln2 - 1 = 1 - ln2$$

סעיף ב: חשב את אורך גרף הפונקציה $f(x) = ln(cosx)$ בקטע $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.
פתרון: נשתמש בנוסחה

$$L(F) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

אפשרי כי רציפה ואלמנטרית בתחום. גם נגזרתה. נתחיל מחישוב הנגזרת

$$f'(x) = \frac{-sinx}{cosx}$$

מכאן ש

$$\sqrt{1+(-\frac{sinx}{cosx})^2} = \sqrt{1+\frac{sin^2x}{cos^2x}} = \sqrt{\frac{sin^2x+cos^2x}{cos^2x}} = \frac{1}{cosx}$$

כלומר, עלינו לחשב

$$L(f) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx}$$

נעזר בהצבה אוניברסלית, $t = tan(\frac{x}{2})$ ולכן $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ וכן $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ונציב ונקבל

$$\int \frac{1+t^2}{1-t^2} * \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}dt = ln|1+t| - ln|1-t|$$

$$= ln|1+tan(\frac{x}{2})| - ln|1-tan(\frac{x}{2})|$$

$$L(f) = [_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} ln|1+tan(\frac{x}{2})| - ln|1-tan(\frac{x}{2})|] =$$

$$ln|1+tan(\frac{\pi}{4})| - ln|1-tan(\frac{\pi}{4}) - ln|1+tan(\frac{\pi}{6})| + ln|1-tan(\frac{\pi}{6})) =$$

$$ln|1+tan(\frac{\pi}{4})| - ln|1-tan(\frac{\pi}{4}) - 1.31$$

נשים לב כי האינטגרלים משמאל שואפים לאנסוף, הם אינם אמיתיים. נחשב גבולם ונסמן $t = \frac{\pi}{4}$

$$lim_{t\to\frac{\pi}{4}} ln|1+tan(t)| - ln|1-tan(t) = \infty$$

לכן סה"כ

$$L(f) = \infty$$

שאלה 4

פתרון: עלינו לחשב את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

כאשר $x = \frac{1}{3}$. נראה דומה ל-e^x. נחלק אותו לזוגיים ואי זוגיים ונשים לב כי $(-1)^{2n+1} = -1$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + e^x$$

אם נציב $-x$ נראה כי נקבל

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

כלומר

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = e^x$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$e^x + e^{-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

נבדוק שאכן ניתן להציב $x=\frac{1}{3}$ בתחום ההתכנסות,

$$a_k=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{k!} & 2|k\\ 0 & o.w\end{array}\right\}$$

$$R=lim\frac{\frac{1}{(k+2)!}}{\frac{1}{k!}}=lim(k+1)(k+2)=\infty$$

כלומר תחום ההתכנסות הינו כל הממשיים, נציב ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n(2n)!}=\frac{e^{\frac{1}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}}{2}$$

שאלה 5 - יש לעשות!!

חלק IV
2024 סמסטר ב מועד א

שאלה 1

חשב אינטגרלים הבאים.
א.

$$\int\frac{1}{xlnxln(lnx)}dx$$

האינטגרל הכי פשוט עד כה בקובץ. פשוט מציבים $t=ln(lnx)$ ואז $dt=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}dx$ ולכן $dx=xlnxdt$ כלומר

$$\int\frac{1}{xlnxln(lnx)}dx=\int\frac{1}{xlnxt}dtxlnx=\int\frac{1}{t}dt=ln|t|=ln|ln(lnx)|+C$$

ב. $\int\frac{dx}{x(lnx-ln^2x)}$. נציב $t=lnx$ ואז $dt=\frac{1}{x}dx$ כלומר $dx=xdt$ ומכאן

$$\int\frac{dx}{x(lnx-ln^2x)}=\int\frac{xdt}{x(t-t^2)}=\int\frac{dt}{t(1-t)}$$

נחפש שברים חלקיים

$$\frac{1}{t(1-t)}=\frac{a}{t}+\frac{b}{1-t}\Longrightarrow 1=a(1-t)+bt$$

אם נציב $t=0$ נקבל $a=1$ ואם נציב $t=1$ נקבל $b=1$ וסה"כ

$$\int \frac{dx}{x(lnx-ln^2x)} = \int \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}dt = ln|t| - ln|1-t|$$

כלומר, האינטגרל סה"כ שווה ל

$$ln|lnx| - ln|1-lnx| + C$$

שאלה 2

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות.

א. אם $f(x) \geq 0$ בתחום $[0,\infty)$ והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אזי f חסומה בתחום $[1,\infty)$.

ב. אם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס והפונקציה f חסומה בתחום $[1,\infty)$ אזי $f \to 0$.

פתרון:

סעיף א - חרטא. פונקציית המשולשים חיובית (נמצאת כאן איפשהו בקובץ), האינטגרל שווה ל$\frac{\pi^2}{6}$ אך עדיין היא איננה חסומה.

סעיף ב - גם חרטא. אם לוקחים את פונקציית המלבנים שאתאר מטה: היא חסומה, האינטגרל מתכנס ושווה לאותו אחד מסעיף א אך הגבול אינו אפס:

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n \leq x \leq n+\frac{1}{n^2} \\ 0 & n+\frac{1}{n^2} < x < n+1 \end{array} \right\}$$

מה קורה כאן? פונקציית מלבנים - היא שווה אחד בכל הנקודות מהצורה $\frac{1}{n^2}$ ונוצרים סדרת מלבנים ששטחם בהתאמה $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}...$. זו פונקציה שתמיד חיובית - ניתן לתארה כך - $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$. מדובר בפונקציה חסומה, אינה רציפה, הגבול אינו אפס אלא הסכום מימין, באופן יותר פורמלי -

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + ... = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

הערה -

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)dx + \int_{1+\frac{1}{n^2}}^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} 1dx + \int_{1+\frac{1}{n^2}}^{n+1} 0dx = [_n^{n+\frac{1}{n^2}} x] = \frac{1}{n^2}$$

מדוע הפונקציה לא שואפת לאפס? אם נתבונן ב$f(n)$ לכל מס' טבעי אזי $f(n)=1$ ולכן בפרט איננה שואפת לאפס.

שאלה 3

א. חשב את גבול הסדרה:

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

פתרון. נראה כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}*\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}*\frac{1}{n}$$

כלומר -

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

תקיים את הדרוש. מכאן שעבור הקטע $[0,1]$ עם החלוקה $p=\{0,\frac{1}{n},...\frac{n-1}{n},1\}$ ובחירת הנקודות $C=\{\frac{1}{n},...\frac{n-1}{n},1\}$ נקבל -

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)*\triangle x_i=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[_0^1 arctanx]=\frac{\pi}{4}$$

סעיף ב: חשב את אורך גרף הפונקציה $f(x)=ln(sinx)$ בקטע $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.
נעזר בנוסחה ונחשב:

$$f'(x)=\frac{cosx}{sinx}=cotx$$

$$\sqrt{1+\frac{cos^2x}{sin^2x}}=\sqrt{\frac{cos^2x+sin^2x}{sin^2x}}=\frac{1}{sinx}$$

נרצה לחשב

$$\int\frac{1}{sinx}dx$$

ונעזר בהצבה אוניברסלית נציב $t=tan(\frac{x}{2})$ ונחשב - $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$ וכן $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1}{t}dt=ln|t|=ln|tan(\frac{x}{2})|$$

כעת נראה כי

$$L(f)=ln(tan(\frac{\pi}{4}))-ln(tan(\frac{\pi}{6}))=0.55$$

שאלה 5 - יש לעשות!!

חלק V
2024 סמסטר א מועד ב

שאלה 1:

חשב אינטגרלים הבאים:
א.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$$

נראה כי $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})=1-x$ ולכן

$$1+\sqrt{x}=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

ולכן

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}=\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x}$$

כלומר האינטגרל מלמעלה שקול לאינטגרל

$$\int\sqrt{\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x}}dx=\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$$

נציב $t=\sqrt{1-x}$ ונקבל $dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx$ כלומר $dt=\frac{-1}{2t}dx$ כלומר $-2tdt=dx$. מכאן -

$$\int\frac{1-\sqrt{x}}{t}*-2tdt=-2\int(1-\sqrt{x})dt$$

נראה כי $t^2=1-x$ ולכן $x=1-t^2$ כלומר $\sqrt{x}=\sqrt{1-t^2}$ ונקבל

$$-2\int(1-\sqrt{1-t^2})dt=2\int(\sqrt{1-t^2}-1)dt$$

כעת כל שנותר הוא לחשב את $\int\sqrt{1-t^2}$. איך? נציב $t=sinu$ ואז $dt=cosudu$ ונקבל

$$\int\sqrt{1-sin^2u}*cosudu=\int cos^2udu=\int\frac{cos(2u)+1}{2}du=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}sin(2u)+u)$$

$$= \frac{1}{4}sin(2u) + \frac{1}{2}u$$

כמו כן אם $t = sinu$ אזי $u = arcsin(t)$ ואז

$$\frac{1}{4}sin(2arcsin(t)) + \frac{1}{2}arcsin(t)$$

כעת נחזור לקודם, נראה כי נקבל

$$2\int(\sqrt{1-t^2}-1)dt = 2(\frac{1}{4}sin(2arcsin(t)) + \frac{1}{2}arcsin(t) - t) =$$

$$\frac{1}{2}sin(2arcsin(t)) + arcsin(t) - 2t$$

נזכר כי $t = \sqrt{1-x}$ וכל שנותר הוא להציב ולקבל:

$$\frac{1}{2}sin(2arcsin(\sqrt{1-x})) + arcsin(\sqrt{1-x}) - 2\sqrt{1-x} + C$$

ב. נחשב את האינטגרל $\int(xtan^2x)dx$
נראה מפחיד. נכתוב יפה יותר

$$\int x * \frac{sin^2x}{cos^2x}$$

ואולי נמצא איזו זהות מעניינת? ננסה -

$$\frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{1-cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} - 1$$

אוקיי נראה שיש לנו לאן להתקדם -

$$\int x(\frac{1}{cos^2x} - 1)dx = \int(\frac{x}{cos^2x} - x)dx$$

כל שנותר הוא לטפל באיקס חלקי קוסינוס בריבוע. לשם כך ננסה להשתמש בשיטת ההצבה - נגדיר $g = tan(x)$ וכן $g' = \frac{1}{cos^2x}$ וכן $f = x$ וכן $f' = 1$ ואז

$$\int \frac{x}{cos^2x} = xtan(x) - \int tan(x)$$

נראה שאנחנו מתקדמים! כעת נטפל באינטגרל של $\int tanx$. נציב $t = cos(x)$ ואז $dt = -sin(x)dx$ כלומר $dx = \frac{-dt}{sin(x)}$ ומכאן

$$\int tanxdx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = \int \frac{sin(x)}{t} * \frac{-dt}{sin(x)} = -\int \frac{1}{t}dt = -ln(t) = -ln(cos(x))$$

סה"כ נקבל

$$\int \frac{x}{cos^2x} = xtan(x) + ln(cos(x))$$

ולכן

$$\int (xtan^2x)dx = \int (\frac{x}{cos^2x} - x)dx = xtan(x) + ln(cos(x)) - \frac{x^2}{2} + C$$

שאלה 2:

א. חשב את אורך הגרף של $f(x)$ בקטע $[1, e]$ כאשר $f(x) = ln(\frac{e^x+1}{e^x-1})$
פתרון: נראה כי אכן אלמנטרית ורציפה בתחומינו. נראה כי

$$f(x) = ln(\frac{e^x+1}{e^x-1}) = ln(e^x+1) - ln(e^x-1)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

כעת

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$$

סה"כ

$$L(f) = \int_1^e \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$$

נטפל באינטגרל קודם ואז נחשב גבולות,

$$\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1}dx = \int 1 + 2\int \frac{1}{e^{2x}-1}$$

כעת נטפל באינטגרל מימין. נציב $t=e^{2x}-1$ ונקבל $dt=2e^{2x}dx$ כלומר $dx=\frac{dt}{2e^{2x}}$. כמו כן נוכל לומר כי $e^{2x}=t+1$ ולכן $dx=\frac{1}{2(t+1)}dt$
מכאן

$$\int\frac{1}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{1}{t}\frac{dt}{2(t+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=\frac{1}{2}(ln(t)-ln(t+1))$$

במונחי איקס, קיבלנו

$$\int\frac{1}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}(ln(e^{2x}-1)-ln(e^{2x}))=\frac{1}{2}ln(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}})$$

נציב באינטגרל שלנו חזרה

$$L(f)=\int 1+2\int\frac{1}{e^{2x}-1}=x+ln(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}})$$

וסה"כ לאחר הצבת גבולות נקבל

$$e+ln(\frac{e^{2e}-1}{e^{2e}})-1-ln(\frac{e^{2}-1}{e^{2}})=$$

$$e+ln(e^{2e}-1)-ln(e^{2e})-1-ln(e^2-1)+ln(e^2)=$$

$$e+ln(e^{2e}-1)-2e-1-ln(e^2-1)+2=$$

$$ln(e^{2e}-1)-ln(e^2-1)+1-e$$

ב. קבע עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{R}$ האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^a(x^2)cos^bx}dx$$

פתרון: איפה הבעיות? ב0 הsin מתאפס וב$\frac{\pi}{2}$ הcos מתאפס. יש בעיות ב2 הצדדים. כמו כן בקטע הזה גם הסינוס וגם הקוסינוס לא מתאפסות בנקודה נוספת שכן $sinx^2$ תתאפס כאשר $x^2=\pi k$ וכן אין נק' כזו בקטע שכן $\frac{\pi}{2}<\sqrt{\pi}$. כלומר נפצל כך־

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^a(x^2)cos^bx}dx=\int_0^1\frac{1}{sin^a(x^2)cos^bx}dx+\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sin^a(x^2)cos^bx}dx$$

באינטגרל השמאלי הבעיה היא הסינוס, ידוע כי כאשר $t\to 0$ אזי $\frac{sint}{t}\to 1$ ולכן גם $\frac{sin^a(x^2)}{x^{2a}}\to 1$. מכאן שנשווה גבולית עם $\frac{1}{x^{2a}}$ונקבל

$$L=lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^{2a}}}{\frac{1}{sin^a(x^2)cos^bx}}=lim_{x\to 0^+}\frac{sin^a(x^2)}{x^{2a}}*cos^bx=lim_{x\to 0^+}cos^bx=cos^b0=1$$

$0<L=1<\infty$ לכן האינטגרל שלנו יהיה חבר של זה שהשוונו איתו גבולית. זה שהשווינו גבולית יתכנס אמ"מ $p=2a<1$ כלומר $a<\frac{1}{2}$

באינטגרל השמאלי מי שעושה בעיות הוא הקוסינוס, נשים לב כי זה קורה בפאי חלקי שתיים. מכאן ש־

$$lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{\frac{\pi}{2}-x}=_L lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-sinx}{-1}=sin(\frac{\pi}{2})=1$$

למה השוווינו דווקא איתו? כי הוא עושה בעיות. לכן בסה"כ נשווה עם האינטגרל $\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^b}$ בתחומינו כמובן. נראה כי

$$L=lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^b}}{\frac{1}{sin^a(x^2)cos^bx}}=lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{cosx}{\frac{\pi}{2}-x})^b*sin^a(x^2)=1sin^ax=sin^a(\frac{\pi^2}{4})>0$$

האינטגרל יהיה חבר של זה שלמעלה. זה שלמעלה יתכנס אמ"מ $b<1$. מכאן שסה"כ האינטגרל הגדול יתכנס אמ"מ $a<\frac{1}{2}$ וגם $b<1$.

שאלה 3:

א. הוכח הפרך ־ סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}$ מתכנס במ"ש ב$(0,\infty)$.

פתרון: נרצה לחשב ראשית את הפונקציה הגבולית. אם היא איכשהו לא רציפה אז סיימנו ואין התכנסות במ"ש... נבדוק

$$f(x)=lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{e^{n^2x}}=0$$

לפי סדרי גודל שכן מעריכי גדול יותר מפולינום. כעת נרצה לחשב את d_n

$$d_n=sup_{x\in(0,\infty)]}\{f_n(x)-f(x)\}=sup_{x\in(0,\infty)}\{x^ne^{-n^2x}-0)\}=max_{x\in(0,\infty)}\{\frac{x^n}{e^{n^2x}})\}$$

שכן הכל רציף לכן עברנו למקסימום. כעת נרצה לגזור (לפי איקס) ולמצוא נקודות חשודות: נסמן את הפונקציה שלנו כh ונחשב

$$h'=nx^{n-1}e^{-n^2x}+x^ne^{-n^2x}*(-n^2)=$$

$$x^n e^{-n^2x}(\frac{n}{x}-n^2)=0$$

אמ"מ

$$\frac{n}{x}=n^2\Longrightarrow x=\frac{1}{n}$$

כעת נציב ונמצא את ערך הנקודה:

$$h(\frac{1}{n})=\frac{(\frac{1}{n})^n}{e^{n^2*\frac{1}{n}}}=\frac{\frac{1}{n^n}}{e^n}=\frac{1}{(en)^n}$$

אם נחשב נגזרת שנייה (צריך אבל אני עצלן ובדקתי במחשבון) נקבל שאכן מדובר בנקודת מקסימום מקומי. מכאן כי

$$d_n=\frac{1}{(en)^n}\to 0$$

ואכן ההתכנסות במ"ש.

ב. הוכח הפרך ־ הטור $S(x)$ מתכנס במ"ש ב$(-\infty,\infty)$ כאשר

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{n^8x^2+10}$$

פתרון: נשים לב כי כאשר $n\to\infty$ אזי $f(x)=0$ וכן גם כאשר $n\to-\infty$ מתקיים $f(x)=0$. מה לעשות, החזקה למטה מנצחת. סה"כ $f(x)=0$. נרצה למצוא את

$$d_n=max_{x\in\mathbb{R}}|\frac{n^2x}{n^8x^2+10}|$$

הפונקציה הזו זוגית (בזכות הערך המוחלט). לכן מספיק שנחפש מקסימום ב$[0,\infty)$. נגזור כמובן, נשווה לאפס, נקווה שויירשטראס (טור מספרים ללא איקס גדול לכל n ולכל x) יעזור לנו:

$$\frac{n^2(n^8x^2+10)-2xn^8(n^2x)}{(n^8x^2+10)^2}=\frac{n^{10}x^2+10n^2-2x^2n^{10}}{(n^8x^2+10)^2}=\frac{10n^2-x^2n^{10}}{(n^8x^2+10)^2}$$

$$=\frac{n^2(10-x^2n^8)}{(n^8x^2+10)^2}=0$$

$$\frac{10}{n^8}=x^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{10}}{n^4}$$

נתעניין בנקודה החיובית, ונבדוק אם היא המקסימום. נציב למשל $\frac{\sqrt{11}}{n^4}$ ונקבל כי הנגזרת בנקודה (מוזמנים לבדוק) היא -1, ונציב $\frac{3}{n^4}$ משמאל ונקבל שנגזרת היא 1, סה"כ משמאל לנקודה יש עליה ומימין ירידה - זו נק' מקסימום. מה ערך הנקודה? נבדוק:

$$\frac{n^2\frac{\sqrt{10}}{n^4}}{n^8\frac{10}{n^8}+10} = \frac{\sqrt{10}}{20n^2}$$

סה"כ

$$0 < d_n < \frac{\sqrt{10}}{20n^2} \to 0$$

וההתכנסות הינה במ"ש.

שאלה 4:

א. חשב את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 sinx$$

(נראה כי יש טעות בשאלה. שכן גם במחברות וגם בפתרון של אלעד - מכוונים לטור עם $sin^n x$. אחרת - לי אין מושג איך פותרים את זה (בדוק זו לא הייתה הכוונה). בכל מקרה, הפתרון לשאלה המקורית מופיע כאן למטה בקובץ.

ב. פתח את $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ לטור מקלורן (סביב 0)

פתרון: נראה כי

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

שקול

$$1 = a(x+2) + b(x-1)$$

נציב $x = 1$ ונקבל $a = \frac{1}{3}$. נציב $x = -2$ ונקבל $b = \frac{-1}{3}$ ומכאן:

$$f(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2})$$

אנחנו יודעים לפתח דברים מהצורה $\frac{1}{1-t}$. נתחיל מהטור הימני ונגדיר $t = \frac{-x}{2}$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2-(-x)} = \frac{1}{2} * \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-x}{2})^n =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$

באופן דומה נרצה לטפל בטור הימני.

$$\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} = -(\frac{1}{1-x}) = -\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}-x^n$$

כעת:

$$f(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}) = \frac{1}{3}(\sum_{n=0}^{\infty}-x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{3}x^n - \frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

סה"כ נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}})x^n$$

חלק VI
2024 סמסטר א מועד א

שאלה 2 - סעיף ב'

קבע אם האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_1^\infty sin(\frac{x+2}{x^3-2})dx$$

אמנם $\sqrt[3]{2}$ מאפס את המכנה אך זה לא מפריע, sin חסומה ולכן ממילא לא תהיה גדולה מ1 או קטנה מ-1. מכאן שהבעיה היחידה היא באנסוף. נראה כי אכן $\frac{x+2}{x^3-2} \to 0$ ולכן

$$lim_{x\to\infty}\frac{sin(\frac{x+2}{x^3-2})}{\frac{x+2}{x^3-2}} = 1$$

כלומר, האינטגרל שלנו והאינטגרל $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3-2}dx$ חברים טובים. כעת ננסה להבין האם הוא מתכנס או מתבדר. נראה כי לאינטגרל זה יש בעיה ב$\sqrt[3]{2}$ וכן באנסוף לכן נפצל:

$$\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3-2}dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x^3-2}dx + \int_2^\infty \frac{x+2}{x^3-2}d$$

האינטגרל משמאל רגיל לחלוטין, מתכנס. האינטגרל הימני הוא זה שנבדוק. נשווה גבולית עם $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ המתכנס כי $p = 2 > 1$. נראה כי

$$L = lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+2}{x^3-2}}{\frac{1}{x^2}} = lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^3-2} = 1$$

האינטגרלים חברים, מתכנסים ביחד ולכן $\int_2^\infty \frac{x+2}{x^3-2}dx$ מתכנס, ולכן סה"כ גם $\int_1^\infty \frac{x+2}{x^3-2}dx$ מתכנס, ולכן גם האינטגרל $\int_1^\infty sin(\frac{x+2}{x^3-2})dx$ מתכנס.

שאלה 3

א. הוכח הפרך ־ סדרת הפונקציות $f_n(x) = \sqrt{n+1}sin^n(x)cos(x)$ מתכנסת במ"ש ב$[0,\pi]$.

ננסה למצוא את הפונקציה הגבולית. $sin(\pi) = 0$ וכן $cos(\pi) = -1$. מכאן שנקבל כאשר $x = \pi$ כי $f_n(\pi) = 0$. כאשר $x = 0$ נראה כי $cos(0) = 0$. לכן $f_n(0) = 0$. כמו כן כאשר $sin(x) = \pm 1$ אזי גם $cos(x) = 0$ ולכן נקבל שהביטוי מתאפס, אחרת נסמן $sin(x) = a$ ונראה כי

$$f(x) = lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}a^n cos(x)$$

$cos(x)$ הוא קבוע, לכן שקול ל

$$f(x) = lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}a^n$$

מסדרי גודל, נקבל כי $f(x) = 0$. כעת,

$$d_n = sup|\sqrt{n+1}sin^n(x)cos(x)|$$

ננסה לחפש לפונקציה זו נקודות קיצון:

$$\sqrt{n+1} * ncos(x)sin^{n-1}x * cos(x) - sin(x) * \sqrt{n+1}sin^n(x) =$$

$$= \sqrt{n+1} * sin^{n-1}(x)(ncos^2(x) - sin^2(x)) =$$

$$= \sqrt{n+1} * sin^{n-1}(x)(ncos^2(x) - 1 + cos^2x) =$$

$$= \sqrt{n+1} * sin^{n-1}(x)(-1 + (n+1)cos^2x) = 0$$

נקבל קיצון כאשר

$$cos^2x = \frac{1}{n+1}$$

כלומר כאשר

$$cos(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

קשה לדעת מה ממש ערך הx אך אין צורך ־ נציב: נראה ראשית כי $sinx = \sqrt{1-cos^2x} = \sqrt{1-\frac{1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$

$$g(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) = \sqrt{n+1}sin^n(x)\frac{1}{\sqrt{n+1}} = sin^n(x) = (\sqrt{\frac{n}{n+1}})^n = (\sqrt{\frac{n+1}{n}})^{-n} =$$

$$(\sqrt{\frac{n+1}{n}})^{-n} = ((1+\frac{1}{n})^n)^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}}$$

זו נקודה שבה $g(x)$ לא שואפת לאפס והנגזרת מתאפסת, לכן גם המקסימום לא שואף לאפס, לכן מתקיים כי

$$d_n = sup|\sqrt{n+1}sin^n(x)cos(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

וההתכנסות אינה במ"ש.

ב. הוכח הפרך ־ הטור $S(x)$ מתכנס במ"ש ב$(0,\pi)$ כאשר $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sinx}{(1+x)^n}$

פתרון: נראה כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinx}{(1+x)^n}=sinx\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+x})^n$$

כעת, אנו צריכים לבדוק שאכן מתקיים $-1\leq\frac{1}{1+x}\leq 1$, ובכן כיוון ש

$$0<x<\pi$$

$$1<x+1<\pi+1$$

$$1>\frac{1}{x+1}>\frac{1}{\pi+1}$$

ובפרט מקיים את הגדרת הסכום ההנדסי. מכאן

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+x})^n=\frac{1}{1-(\frac{1}{1+x})}=\frac{1}{\frac{x}{x+1}}=\frac{x+1}{x}$$

כלומר!

$$S(X)=\frac{(x+1)sinx}{x}$$

בקטע שלנו ־ הפונקציה הנ"ל כן רציפה (אם לא הייתה רציפה, היינו מסיימים ואומרים שההתכנסות אינה במ"ש). אם $x=0$ היה בקטע, היינו מקבלים שההתכנסות אינה במ"ש כי זו אינה רציפה והיינו מסיימים.

כלומר,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sinx}{(1+x)^n}$$

ולכן

$$S(0)=0$$

מכאן, עבור הקטע $[0,\pi)$ נקבל

$$S(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{(x+1)sinx}{x} & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\}$$

כלומר איננה רציפה ושם איננה במ"ש.. מדוע לא רציפה? $S(0) = 0$ ואילו $lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)sinx}{x} = lim_{x\to 0+}1 * (0 + 1) = 1$.

האינטואיציה היא - שהפונקציה איננה מתכנסת במ"ש. מדוע? אם נקודה אחת הופכת את זה ללא במ"ש, גם בלעדיה זה לא יהיה במ"ש. כלומר ההתכנסות במ"ש הינה גלובלית ולא נקודתית.

כעת צריך להוכיח את זה - נב"ש כי בקטע $(0, \pi)$ הטור כן מתכנס במ"ש. לפי ההגדרה כלומר

$$sup_{x\in(0,\pi)}|S(x) - S_N(x)| \to 0$$

נראה כי(שימו לב לתחום פתוח סגור),

$$sup_{x\in[0,\pi)}|S(x) - S_N(x)| = max\{sup_{x\in(0,\pi)}|S(x) - S_N(x)|, |S(0) - S_N(x)|\}$$

ראינו כי $S(0) - S_N(0) = 0 - 0 = 0$, זה לא המקסימלי. כלומר

$$sup_{x\in[0,\pi)}|S(x) - S_N(x)| = sup_{x\in(0,\pi)}|S(x) - S_N(x)| \to 0$$

בסתירה, כי בקטע שכולל את אפס אין התכנסות במ"ש.

שאלה 4 ב' - לעשות!!

חלק VII

2023 סמסטר ב מועד ב

חלק VIII

2023 סמסטר ב מועד א

חלק IX

2023 סמסטר א מועד א (מבחן של דורון פלרמן. ללא אלעד)

שאלה 1:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x\sqrt{x}\sqrt[4]{x}(1 - x)^2dx$.

פתרון: סתם נראה מסריח צריך לפתוח יפה ולקבל:

$$\int x\sqrt{x}\sqrt[4]{x}(1-x)^2dx = \int x^{1.75}(1-2x+x^2)dx = \int x^{1.75} - 2x^{2.75} + x^{3.75}dx =$$

$$\frac{x^{2.75}}{2.75} - \frac{2x^{3.75}}{3.75} + \frac{x^{4.75}}{4.75} + C.$$

ב. $\int \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x}$

פתרון:

$$\frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} = \frac{2x^2-9x-9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3} \Longrightarrow$$

$$2x^2-9x-9 = A(x^2-9) + Bx(x+3) + Cx(x-3)$$

נציב $x=3$ ונקבל

$$18-27-9 = 18B \Longrightarrow B = -1$$

נציב $x=-3$ ונקבל

$$18+27-9 = 18C \Longrightarrow C = 2$$

נציב $x=0$ ונקבל

$$-9 = -9A \Longrightarrow A = 1$$

כלומר האינטגרל מלמעלה שקול לאינטגרל:

$$\int \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-3} + \frac{2}{x+3}dx = ln|x| - ln|x-3| + 2ln|x+3| + C.$$

ג. $\int sin(3x)cos(4x)dx$

פתרון: נעשה בחלקים ונקווה לטוב - $g = sin(3x)$ ולכן $g' = 3cos(3x)$ וכן $f' = cos(4x)$ ולכן $f = \frac{1}{4}sin(4x)$

$$\int sin(3x)cos(4x)dx = \frac{1}{4}sin(4x)sin(3x) - \frac{3}{4}\int cos(3x)sin(4x)$$

ושוב בחלקים, הפעם ל$\int cos(3x)sin(4x)$. נגדיר $g = cos(3x)$ ולכן $g' = -3sin(3x)$ וכן $f' = sin(4x)$ ולכן $f = \frac{-1}{4}cos(4x)$. נקבל

$$\int cos(3x)sin(4x) = \frac{-1}{4}cos(4x)cos(3x) - \int -3sin(3x) * \frac{-1}{4}cos(4x) =$$

$$\int cos(3x)sin(4x) = \frac{-1}{4}cos(4x)cos(3x) - \frac{3}{4}\int sin(3x)cos(4x)$$

נציב זאת במשוואה מלמעלה:

$$\int sin(3x)cos(4x)dx = \frac{1}{4}sin(4x)sin(3x) - \frac{3}{4}(\frac{-1}{4}cos(4x)cos(3x) - \frac{3}{4}\int sin(3x)cos(4x))$$

$$\int sin(3x)cos(4x)dx = \frac{1}{4}sin(4x)sin(3x) + \frac{3}{16}cos(4x)cos(3x) + \frac{9}{16}\int sin(3x)cos(4x))$$

$$\frac{7}{16}\int sin(3x)cos(4x)dx = \frac{1}{4}sin(4x)sin(3x) + \frac{3}{16}cos(4x)cos(3x)$$

$$\int sin(3x)cos(4x)dx = \frac{4}{7}sin(4x)sin(3x) + \frac{3}{7}cos(4x)cos(3x) + C.$$

שאלה 2:

קבע האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט / בתנאי / מתבדרים:

א. $\int_0^2 \frac{sin(\frac{1}{x})}{x}dx$. **פתרון:** איפה הבעיה? הסינוס מתפרע ממש. ננסה לסדר אותו. נציב $t = \frac{1}{x}$ ואז $dt = \frac{-1}{x^2}dx$ כלומר $dt = -t^2dx$ ולכן $dx = \frac{dt}{-t^2}$. כעת בגבולות נראה כי נקבל $\frac{1}{2}$ כאשר $x \to 2$ וכן כאשר $x \to 0$ נקבל ∞ ומכאן:

$$\int_0^2 \frac{sin(\frac{1}{x})}{x}dx = \int_\infty^{\frac{1}{2}} sin(t) * t * \frac{dt}{-t^2}dx = -\int_{\frac{1}{2}}^\infty sin(t) * t * \frac{dt}{-t^2}dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{sin(t)}{t}dx$$

כעת קיבלנו אינטגרל מסוג ראשון, נפעיל דריכלה (הרי מונו יורדת ופונקציה עם אינטגרל חסום) ונקבל שהאינטגרל מתכנס. מה באשר לערך המוחלט? נזכר כי $sin^2t = \frac{1-cos(2t)}{2}$ ונראה כי

$$|\frac{sin(t)}{t}| \geq \frac{sin^2t}{t} = \frac{1-cos(2t)}{2t} = \frac{1}{2t} - \frac{cos(2t)}{2t}$$

האינטגרל הימני מתכנס לפי דריכלה, ו$\frac{1}{2t}$מתבדר כמובן. סה"כ מתבדר ועוד מתכנס זה מתבדר, האינטגרל שלנו גדול מאינטגרל מתבדר ולכן מתבדר בעצמו. ולכן סה"כ קיבלנו התכנסות בתנאי.

ב. $\int_0^1 \frac{ln(sinx)}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}}$ **פתרון:** תמיד $sinx \leq 1$ בתחום זה נקבל $ln(sinx) < 0$, כמו כן המכנה גדול מאפס (שווה אפס רק בקצה השמאלי של האינטגרל) ולכן סה"כ האינטגרל שלילי. מכאן שהאינטגרל הזה יתכנס אמ"מ $\int_0^1 \frac{-ln(sinx)}{x^{0.75}}$יתכנס. זה כבר אינטגרל חיובי. נרצה להשוות גבולית כעת, עם איזשהו p כך ש$p > \frac{3}{4}$ אך יהיה קטן מאחד, בשביל כן לנסות למצוא התכנסות. למשל $\frac{1}{x^{\frac{7}{8}}}$ המתכנס. נקבל כי

$$L = lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-ln(sinx)}{x^{0.75}}}{\frac{1}{x^{\frac{7}{8}}}} = lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{7}{8}} * -ln(sinx)}{x^{\frac{6}{8}}} = lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{8}} * -ln(sinx) =$$

$$lim_{x\to0^+}\frac{-ln(sinx)}{x^{-\frac{1}{8}}} =_L lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-cos(x)}{sin(x)}}{\frac{-1}{8}x^{\frac{-9}{8}}}$$

$$= lim_{x\to0}\frac{8cos(x)x^{\frac{9}{8}}}{sin(x)} = lim_{x\to0}8cos(x)x^{\frac{1}{8}} = 0$$

הגבול יצא $L = 0$ ולכן אם זה שלמטה מתכנס, גם זה שלמעלה, זה שלמטה מתכנס ולכן גם שלנו. סה"כ התכנסות בהחלט.

ג. חשב את $lim_{x\to0}x\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos(t)}{t^2}dt$

פתרון: נסדר את זה יפה יותר:

$$lim_{x\to0}\frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos(t)}{t^2}dt}{\frac{1}{x}}$$

כמובן שנרצה לופיטל. במכנה ברור יש אנסוף. מה במונה? $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos(t)}{t^2}dt$. נרצה להראות שהוא אפס או אנסוף - אנסוף נשמע יותר הגיוני, יענו מתבדר. נעשה מבחן השוואה עם $\frac{1}{t^2}$ המתבדר ונקבל $cos(t)$ וכאשר $t \to 0$ אזי $cos(0) = 1$ כלומר השניים חברים, מתבדרים. אז סה"כ חוקי להפעיל לופיטל, אנסוף חלקי אפס:

$$lim_{x\to0}\frac{\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos(t)}{t^2}dt}{\frac{1}{x}} =_L lim_{x\to0}\frac{-\frac{cos(x)}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = lim_{x\to0}cos(x) = 1$$

(לשים לב שגוזרים לפי הגבולות אך $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ממילא..)

שאלה 3: לעשות!!

שאלה 4: לעשות!!

שאלה 5: לעשות!!

חלק X
2023 סמסטר א מועד ב

שאלה 1

א. חשב $\int xe^x + ln(1+x)dx$
פתרון: נחלק לשניים ובסוף נחבר. נעשה בחלקים ראשית את $\int xe^x$. נגדיר $f = f' = e^x$ וכן $g = x$ אז $g' = 1$ ולכן

$$\int xe^x = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x$$

כעת נטפל ב$\int ln(1+x)dx$. שוב בחלקים, נגדיר $f = x$ וכן $g = ln(1+x)$ ואז $g' = \frac{1}{x+1}$ ונקבל

$$\int ln(x+1)dx = xln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}$$

כעת נטפל בימני עם הצבה $x+1 = t$ אזי $dx = dt$ ונקבל

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{t-1}{t}dt = \int 1 - \frac{1}{t}dt = t - lnt = x+1 - ln(x+1)$$

לכן

$$\int ln(x+1)dx = xln(x+1) - (x+1-ln(x+1)) = xln(x+1) + ln(x+1) - x - 1$$

סה"כ נקבל כי האינטגרל שווה

$$xe^x - e^x + xln(x+1) + ln(x+1) - x - 1 + C$$

ב. חשב $\int cos^{15}xdx$
פתרון: נגדיר $sinx = t$ ואז $cosxdx = dt$ כלומר $dx = \frac{dt}{cosx}$

$$\int cos^{15}xdx = \int cos^{15}x\frac{dt}{cosx} = \int cos^{14}xdt = \int (1-sin^2x)^7dt = \int (1-t^2)^7$$

כעת נזכר בבינום של ניוטון

$$= \int \sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} (-t^2)^k dt = \int \sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} (-1)^k \int t^{2k} =$$

$$\sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} (-1)^k * \frac{(sinx)^{2k+1}}{2k+1} + C$$

ג. מצאו פונקציה גזירה f שאיננה 0 כך ש $f(x)^2 = \int_0^x \frac{f(t)}{sin(t)} dt$

פתרון: אם נגזור את שני הצדדים, לפי המשפט היסודי נקבל כי

$$2f(x)f'(x) = \frac{f(x)}{sin(x)}$$

כלומר צריך למצוא איזשהי פונקציה, כך שנגזרתה $f' = \frac{1}{2sin(x)}$ ואז סיימנו.

$$\int \frac{1}{2sinx} dx$$

נעשה הצבה אוניברסלית, $t = tan(\frac{x}{2})$ ואז $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ וכן $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$
נקבל

$$\int \frac{1}{2sinx} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{2t} * \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} ln(tan(\frac{x}{2}))$$

כלומר, $f(x) = \frac{1}{2} ln(tan(\frac{x}{2}))$ תקיים את הדרוש.

שאלה 2

שאלה 3 - לעשות!

שאלה 4

שאלה 5 - לעשות!

חלק XI
2022 מועד א

שאלה 1

א. חשב $\int ln(x^x)dx$.

פתרון: שקול לחלוטין ל$\int(xlnx)dx$. ננסה לעשות בחלקים. נגדיר $f = ln(x)$ ואז $f' = x^{-1}$. כמו כן נגדיר $g = \frac{x^2}{2}$ ואז $g' = x$. מכאן לפי הנוסחה נקבל

$$\int ln(x^x) = \frac{1}{2}x^2lnx - \int \frac{1}{x} * \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{2}\int x = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{4}x^2 + C$$

ב. חשב אורך גרף בין $x = e$ לבין $x = \pi$ של $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$.
פתרון: נמצא נגזרת, נעלה בריבוע, נוסיף אחד ונשים על הכל שורש ונטנגרל לפי הנוסחה: $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$. מכאן

$$1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2})^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4x^4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4x^4}} = \sqrt{(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2})^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$$

כלומר, עלינו לחשב

$$L(f) = \int_e^\pi \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} = [\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}] \approx 1.84$$

שאלה 2

תהי f רציפה ואי שלילית שמוגדרת ב$[0, \infty)$. הוכיחו הפריכו ־ אם $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אזי f חסומה.
פתרון: חרטא. פונקציית המשולשים שלנו רציפה ואי שלילית וכן מתכנסת ל$\frac{\pi^2}{6}$. אממה ־ f לא חסומה.

שאלה 4

א. חשב את סכום הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

פתרון: נזכר בטור טיילור של e^x. נראה כי

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

כעת, נפצל לפי חזקות זוגיות ואי זוגיות:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נחסר את המשוואות ונקבל

$$e^{x}-e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נחלק ב2 ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

נציב $x=1$ וסיימנו:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{e-e^{-1}}{2}$$

ב. חשב את סכום הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n}(2n+1)!}$$

פתרון: מזל שבא סעיף א. ראינו כי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, נחלק באיקס את שני הצדדים (מותר כי טיילור) ונקבל $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x}$. כעת נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n}(2n+1)!}=\frac{e^{0.5}-e^{-0.5}}{2*\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}$$

שאלה 5 - לעשות!!

שאלה 6 - לעשות!!

חלק XII

2022 מועד ב

שאלה 1

א. חשב $\int\frac{cos(x)}{sin^{3}x+sinx}$. **פתרון:** נראה כי

$$\int \frac{cos(x)}{sin^3x + sinx} = \int \frac{cos(x)}{sinx(sin^2x+1)}$$

נציב $t = sin^2x + 1$ ואז $dt = 2sinxcosxdx$ כלומר $dx = \frac{1}{2sinxcosx}dt$ ולכן

$$\int \frac{cos(x)}{sinx * t} * \frac{1}{2sinxcosx}dt = \int \frac{1}{t * 2sin^2x}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t(t-1)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}ln|t-1| - \frac{1}{2}ln|t| = \frac{1}{2}ln|sin^2x| - \frac{1}{2}ln|sin^2x+1| + C$$

ב. תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה המקיימת $g(x) = g(y)$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$. הוכיחו כי הפונקציה

$$f(x) = \int_{-cos(x)}^{sinx} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

קבועה בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$.

פתרון: איך מראים קבועה? גוזרים ומוכיחים $f'(x) = 0$. נגזור לפי המשפט היסודי -

$$f'(x) = \frac{g(sinx)}{\sqrt{1-sin^2x}} * cosx - \frac{g(-cosx)}{\sqrt{1-cos^2x}} * sinx = g(sinx) - g(-cosx)$$

כעת נשים לב כי $g(sinx) = g(-cosx)$ כיוון ששתיהן על מעגל היחידה ומקיימות $sin^2x + (-cosx)^2 = 1$. ולכן $f'(x) = 0$.

שאלה 2

א. הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{sin(x)}{(x+1)^2}dx = \int_0^\infty \frac{cos(x)}{x+1}dx$(כלומר שניהם מתכנסים לאותו ערך או ששניהם מתבדרים)

פתרון: האינטגרלים לא מתבדרים כיוון שלפי דריכלה בשניהם יש לנו אפיסה כפול פונקציה שנגזרתה חסומה. לכן נצטרך להוכיח כי ממש הם מתכנסים לאותו הערך. נשמע מסובך אבל זה פולינום וטריגו ולכן כנראה בחלקים - נגדיר $f'(x) = cos(x)$ ולכן $f(x) = sinx$ וכן $g = \frac{1}{x+1}$ ולכן $g' = \frac{-1}{(x+1)^2}$ ונקבל

$$\int \frac{cosx}{x+1}dx = \frac{sinx}{x+1} + \int \frac{sinx}{(x+1)^2}$$

מעניין. הצלחנו לקבל את שני האינטגרלים שלנו, להוכיח שוויון שלהם זה להוכיח גם שהפרש הוא אפס. לכן

$$\int \frac{cosx}{x+1} - \frac{sinx}{(x+1)^2}dx = \frac{sinx}{x+1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{cosx}{x+1} - \frac{sinx}{(x+1)^2}dx =_0^{\infty} [\frac{sinx}{x+1}] =$$

$$lim_{a\to\infty}\frac{sin(a)}{a+1} - \frac{sin(0)}{1} = 0$$

וסה"כ קיבלנו אכן שוויון אינטגרלים.
ב. קבע עבור כל אחד מהאינטגרלים מסעיף א' האם מתכנס בתנאי או בהחלט או מתבדר.
פתרון: הסברנו כבר בסעיף א' מדוע שניהם מתכנסים בתנאי (דריכלה). נותר לראות האם גם יש התכנסות בהחלט. באשר ל$\int_0^{\infty} \frac{cos(x)}{x+1}$ נראה

$$|\frac{cos(x)}{x+1}| \geq \frac{cos^2x}{x+1} = \frac{1+cox(2x)}{2x+1} = \frac{1}{2x+1} + \frac{cos(2x)}{2x+1}$$

האינטגרל מימין מתכנס (שוב, דריכלה). האינטגרל משמאל מקיים

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{x}$$

ולכן הוא קטן ממתבדר ומתבדר בעצמו (שכן הוא חיובי). סה"כ קיבלנו שהאינטגרל שלנו המקורי גדול מסכום של מתכנס ומתבדר=מתבדר, ולכן מתבדר בעצמו. סה"כ $\int_0^{\infty} \frac{cos(x)}{x+1}$ מתכנס בתנאי בלבד.
באשר ל$\int_0^{\infty} \frac{sin(x)}{(x+1)^2}$, נראה כי

$$|\frac{sin(x)}{(x+1)^2}| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$$

נעשה השוואה גבולית עם $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}$ונקבל $\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$ ולכן השניים חברים מתכנסים. סה"כ סכום של שני אינטגרלים מתכנסים הוא אינטגרל מתכנס, האינטגרל החיובי שלנו קטן מאינטגרל מתכנס ולכן מתכנס בעצמו לפי השוואה! **סה"כ התכנסות בהחלט.**

שאלה 3

את סעיף ב' יש כאן איפשהו בקובץ. נפתור כאן את א':
הוכח הפרך - סדרת הפונקציות $f_n(x) = nxe^{-n^2x}$ מתכנסת במ"ש ב$(0,\infty)$.
פתרון: נראה כי הפונקציה הגבולית היא אפס

$$f(x) = lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{n^2x}} = 0$$

לפי סדרי גודל. כעת נרצה לחשב את

$$d_n = max\{nxe^{-n^2x}\}$$

נגזור למצוא חשודות לקיצון

$$ne^{-n^2x} + nxe^{-n^2x} * (-n^2) = ne^{-n^2x}(1 - n^2x) = 0$$

כלומר יש חשד לקיצון כאשר $x = \frac{1}{n^2}$. גוזרים שוב, מציבים ומגלים שמדובר בנקודת מקסימום מקומי, הפונקציה גזירה וזו נק' הקצון היחידה ולכן המקסימום המוחלט מתקבל בה. מה הערך בו זה קורה?

$$n * \frac{1}{n^2} e^{-n^2 * \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{1}{ne} \to 0$$

ואכן ההתכנסות במ"ש.

שאלה 4

א. חשב את סכום הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{2^n}$$

פתרון: כמעט כמו תמיד נתחיל עם ההנדסי ובסוף נציב $x = \frac{1}{2}$ שבתחום ההתכנסות. נעיר מראש כי כל הפעולות הולכות להיות חוקיות שכן נשמור על טור חזקות, ואם נחלק באיקס זה שונה מאפס:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

נכפיל באיקס את שני הצדדים ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

כעת נגזור ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נכפול את שני הצדדים בx^3

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+3} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

שוב נגזור

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^{n+2} = \frac{3x^2(1-x)^2 + 2x^3(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{3x^2(1-x) + 2x^3}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

כלומר קיבלנו

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^{n+2} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

נחלק באיקס בריבוע

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^{n} = \frac{(3-x)}{(1-x)^3}$$

נציב $x = \frac{1}{2}$ ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{2^n} = 20$$

ב. במהלך סעיף א' הגעתם לטור מקלורן של הפונקציה $f(x) = \frac{(3-x)}{(1-x)^3}$. חשבו את $f^{(1000)}(0)$

פתרון: במהלך סעיף א' קיבלנו $\frac{(3-x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$. נזכר כי בטור מקלורן $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

נראה כי מצד אחד, המקדם של x^{1000}יהיה $a_{1000} = 1001 * 1003$. מצד שני, לפי אותה הגדרה הוא יהיה $\frac{f^{(1000)}(0)}{1000!}$

נשווה ונקבל

$$\frac{f^{(1000)}(0)}{1000!} = 1001 * 1003 \Longrightarrow f^{(1000)}(0) = 1001! * 1003$$

שאלה 5 - לעשות!!

שאלה 6 - לעשות!!

חלק XIII
מבחן לדוגמה 2021

שאלה 1 - לעשות!!

שאלה 2 - חשב אינטגרלים הבאים:

1. $\int sin\sqrt{x}dx$

פתרון: נציב $t = \sqrt{x}$ ואז $dt = \frac{1}{2t}dx$ ואז $2tdt = dx$ וכעת

$$\int sin\sqrt{x}dx = 2\int t * sin(t)dt$$

מכאן נאלץ לעשות בחלקים. נגדיר $f = t, f' = 1, g' = sint, g = -cost$

$$\int t * sin(t)dt = -tcost - \int -cost = -tcost + \int cost = -tcost + sint$$

$$\int sin\sqrt{x}dx = 2sint - 2tcost = 2sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}cos\sqrt{x} + C$$

ב.

$$\int cos^3xln(sinx)dx$$

נעשה הצבה. נציב $t = sinx$ ואז $dt = cosxdx$ ואז $dx = \frac{dt}{cosx}$

$$\int cos^3xln(sinx)dx = \int cos^3xln(t) * \frac{dt}{cosx} = \int cos^2xln(t)dt$$

$$= \int (1-t^2)ln(t) * dt = \int ln(t) - t^2lnt$$

כעת נטפל בכל אחד מהם בנפרד. נתחיל מהשמאלי. נגדיר $f = t$ וכן $g = lnt$ ונקבל

$$\int lnt = tlnt - \int t * \frac{1}{t} = tlnt - t$$

נטפל בימני ונגדיר $g = \frac{t^3}{3}$ ונקבל

$$\int t^2lnt = \frac{t^3}{3}lnt - \int \frac{t^3}{3} * \frac{1}{t} = \frac{t^3}{3}lnt - \frac{1}{3}\int t^2 = \frac{t^3}{3}lnt - \frac{t^3}{9}$$

$$\int ln(t) - t^2lnt = tlnt - t - (\frac{t^3}{3}lnt - \frac{t^3}{9}) = tlnt - t - \frac{t^3}{3}lnt + \frac{t^3}{9}$$

סה"כ לאחר הצבה חזרה האינטגרל שווה:

$$sinxln(sint) - sinx - \frac{sin^3x}{3}ln(sinx) + \frac{sin^3(x)}{9} + C$$

שאלה 3:

א. קבע האם האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_0^\infty (\frac{\pi}{2} - arctan(x))dx$$

יש נק בעייתית באנסוף, לכן נפצל כי למה לא?

$$\int_0^\infty (\frac{\pi}{2} - arctan(x))dx = \int_0^1 (\frac{\pi}{2} - arctan(x))dx + \int_1^\infty (\frac{\pi}{2} - arctan(x))dx$$

השמאלי אחלה, אפשר לחשב אותו מפורשות, הוא מתכנס.
הימני, מעניין יותר. כיוון ש$arctanx \le \frac{\pi}{2}$ אזי $-arctan(x) \ge \frac{-\pi}{2}$ ולכן $\frac{\pi}{2} - arctan(x) \ge 0$. כלומר, זהו אינטגרל חיובי. ניתן להשתמש במבחני ההשוואה. ננסה לבדוק אם מתבדר ע"י השוואה עם $\int \frac{1}{x}$, אם לא יעבוד ננסה אחד אחר:

$$L = lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - arctan(x)}{\frac{1}{x}} =_{L:"\frac{0}{0}"} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{-1-x^2} = 1$$

כלומר האינטגרלים חברים, חברים מתבדרים ביחד, ולכן סה"כ האינטגרל כולו מתבדר.

שאלה 4 - לעשות!!

שאלה 5:

חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^\infty n^2 sin^n x$. ייאלה, נתחיל מההנדסי שמקיים:

$$\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

מכאן ש

$$\sum_{n=1}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

נגזור:

$$\sum_{n=1}^\infty nx^{n-1} = \frac{1(1-x)+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נכפיל את שני הצדדים בx, נקבל ש

$$\sum_{n=1}^\infty nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

נגזור שוב:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2+2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

נכפיל באיקס ונקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

נעיר כעת כי כל הפעולות היו חוקיות ושמרו על תחום ההתכנסות של הטור. כמו כן, נראה כי הוא מתכנס עבור $-1 < x < 1$, לכן נציב $sinx$ שנמצא בתחומים אלו. נקבל -

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2sin^nx = \frac{sinx(1+sinx)}{(1-sinx)^3}$$

מתי לא יתכנס? כאשר $sinx = \pm 1$, כלומר עבור $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ זה תחום ההתכנסות. שכן רדיוס ההתכנסות הינו $a_n = n^2$ ולכן

$$\frac{1}{R} = lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

לכן $R = 1$, וזה התכנסות סביב אפס שלא כוללת את הקצוות.

חלק XIV
2021 מועד א

שאלה 1 - לעשות!!

שאלה 2

חשב את האינטגרלים הבאים.

א. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$

נציב $t = \sqrt{x}$ ואז $dx = 2tdt$ וכן

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx = \int \frac{t}{t^2+4} * 2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2+4} = 2\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4} = 2(\int 1dt - 4\int \frac{1}{t^2+4}dt)$$

שניהם קלים לפתרון, נזכר כי $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + c.$ ולכן

$$2(t - 4 * \frac{1}{2}arctan(\frac{t}{2})) =$$

$$2(t-2arctan(\frac{t}{2}))=2t-4arctan(\frac{t}{2})=$$

$$2\sqrt{x}-4arctan(\frac{\sqrt{x}}{2})+C$$

ב. $\int\frac{sin(x)}{cos^8(x)}dx$. קליל. נציב $t=cos(x)$. מכאן $dt=-sinxdx$ ולכן $dx=\frac{-dt}{sinx}$ וכעת

$$\int\frac{sin(x)}{cos^8(x)}dx=\int\frac{sin(x)}{t^8}\frac{-dt}{sinx}=-\int\frac{1}{t^8}dt=-\int t^{-8}dt=-t^{-7}*\frac{-1}{7}=\frac{1}{7t^7}$$

$$=\frac{1}{7cos^7x}$$

שאלה 3

א. מצא את אורך גרף הפונקציה $f(x)=(x-2)^{1.5}$ בין הנקודות $(2,0)$ ו$(6,8)$.
פתרון: הפונקציה רציפה וכן גם נגזרתה (אלמנטרית) ולכן נשתמש במשפט $L(F)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ כאשר $b=6,a=2$. כעת נחשב קודם את הנגזרת:

$$f'(x)=1.5(x-2)^{0.5}$$

וכן:

$$\int\sqrt{1+(1.5(x-2)^{0.5})^2}=$$

$$\int\sqrt{1+2.25(x-2)}=\int\sqrt{1+2.25x-4.5}=\int\sqrt{2.25x-3.5}$$

$$=\int\sqrt{\frac{9}{4}x-\frac{14}{4}}=\frac{(\frac{9}{4}x-\frac{14}{4})^{1.5}}{\frac{3}{2}*\frac{9}{4}}=\frac{8}{27}(\frac{9}{4}x-\frac{14}{4})^{1.5}$$

לאחר שנציב בגבולות:

$$L(F)=|_{x=2}^{x=6}\frac{8}{27}(\frac{9}{4}x-\frac{14}{4})^{1.5}|=\frac{8}{27}((10)^{1.5}-1)\approx 9.07$$

סעיף ב: תהי f רציפה חיובית, כך שהאינטגרל $\int_0^\infty f(X)$ מתכנס, אזי $f\to 0$.
פתרון: חרטא. ראינו את כל השטויות האלו כבר בהרצאה. הפתרון הוא פונקציית המשולשים, שכן היא חיובית, אינטגרל מתכנס ושווה $\frac{\pi^2}{6}$', היא רציפה אך לא שואפת לאפס.

שאלה 4 ־

סעיף א ־ קבע לאילו ערכי x הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x+4)^{3n+1}}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}$$

אם נציב $t=(2x+4)^3$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}(2x+4)$$

וכן המחובר $2x+4$ הוא קבוע ולא משפיע על התכנסות, ולכן נבדוק מתי הטור הזה מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}t^n$$

זה טור חזקות שרץ על t, נבדוק מה הרדיוס שלו:

$$\frac{1}{R}=lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}}=lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}}=\frac{1}{8}$$

כלומר הטור חזקות שלנו עם רדיוס $R=8$ סביב 0 ולכן יתכנס כאשר $-8<t<8$. מה בקצוות? נבדוק ידנית ־

1. כאשר $t=8$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}8^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n}}$$

שמתכנס, מדוע? לפי לייבניץ (יורדת לאפס ו$(-1)^n$)

2. כאשר $t=-8$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}(-8)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+n}*8^n}(-1)^n8^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$$

חיובי, נערוך לו השוואה גבולית עם הטור המתבדר $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ כי $p<1$, ונקבל כי הגבול יצא 1, כלומר הם חברים מתבדרים.

מכאן שסה"כ תחום ההתכנסות הינו

$$-8<t\leq 8$$

נמיר חזרה:

$$-8 < (2x+4)^3 \leq 8$$

$$-2 < 2x+4 \leq 2$$

$$-6 < 2x \leq -2$$

$$-3 < x \leq -1$$

זהו תחום ההתכנסות.

סעיף ב - קבע האם האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_2^\infty \frac{x+7}{\sqrt{x^5-16x}}$$

שקול ל:

$$\int_2^\infty \frac{x+7}{\sqrt{x(x^2+4)(x-2)(x+2)}}$$

יש לנו שתי בעיות, אחת היא 2 והשנייה היא באנסוף. לכן נפצל:

$$\int_2^\infty \frac{x+7}{\sqrt{x^5-16x}} = \int_2^3 \frac{x+7}{\sqrt{x^5-16x}} + \int_3^\infty \frac{x+7}{\sqrt{x^5-16x}}$$

האינטגרלים חיוביים, את האינטגרל הימני אפשר לפתור בקלות עם השוואה גבולית כמו שהיינו עושים עם טורים, השוואה גבולית עם $\int_3^\infty \frac{1}{x^{1.5}}$ המתכנס תניב מנה של 1, ולכן הם חברים מתכנסים. באשר לימני, נשווה גבולית עם האינטגרל שגורם לפונקציה להיות לא חסומה, מיהו? $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ שחיובי גם כן. האם מתכנס? נראה כי $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{0.5}}$ וכן אינטגרלים כאלו מתכנסים עבור $p<1$ אזי זה טוב לנו. מכאן נקבל -

$$L = lim\frac{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{\frac{x+7}{\sqrt{x^5-16x}}} = lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x(x^2+4)(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}(x+7)} = lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x(x^2+4)(x+2)}}{x+7} = \frac{\sqrt{2*8*4}}{9} = \frac{8}{9}$$

קטן מאחד, לכן לפי השוואה מתכנס, ולכן סה"כ שני האינטגרלים מתכנסים ולכן האינטגרל כולו מתכנס. כנדרש.

שאלה 5 - לעשות!!

2021 מועד ב

שאלה 1 - לעשות!!

שאלה 2

א. מצא אינטגרל הבא:

$$\int (1+\frac{1}{x})(x+ln(x))dx$$

פתרון: נפתח יפה ונסדר כי תחושה שניסו לבלבל אותנו -

$$\int (x+ln(x)+1+\frac{lnx}{x})dx$$

ניסו לבלבל אותנו ובגדול כי מכאן זה קל כל אחד מהם בנפרד. נראה כי אם נרצה לחשב $\int \frac{lnx}{x}dx$ נציב $lnx=t$ ואז $\frac{1}{x}dx=dt$ כלומר $dx=xdt$ ולכן $\int \frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{ln^2x}{2}$
כמו כן גם האינטגרל $\int lnx$ קל. נראה בחלקים כי $f=x$ וכן $f'=1$ וכן $g=lnx$ וכן $g'=1$ ונקבל $\int lnxdx=xlnx-\int \frac{1}{x}*x=xlnx-x$
מכאן שסה"כ האינטגרל שווה

$$\int (x+ln(x)+1+\frac{lnx}{x})dx=\frac{x^2}{2}+xlnx-x+x+\frac{ln^2x}{2}=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{ln^2x}{2}+xlnx+C.$$

ב. מצא אינטגרל הבא: $\int \frac{1}{1+sin^2x}dx$
פתרון: כשרואים מנה של טריגו עושים אוניברסלי. $t=tan(\frac{x}{2})$ ואז $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ וכן $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$.
אבל עוד לפני כן נראה כי

$$cos(2x)=1-2sin^2x \Longrightarrow sin^2x=\frac{1-cos(2x)}{2}$$

$$\int \frac{1}{1+sin^2x}dx=\int \frac{1}{1+\frac{1-cos(2x)}{2}}dx=\int \frac{1}{\frac{3-cos(2x)}{2}}dx=\int \frac{2}{3-cos(2x)}dx$$

נציב $u=2x$ ואז $du=2dx$ כלומר $dx=\frac{1}{2}du$ ואז

$$\int \frac{2}{3-cos(2x)}dx = \int \frac{1}{3-cos(u)}du$$

נציב $t = tan(\frac{u}{2})$ ואז $du = \frac{2dt}{1+t^2}$ וכן $cosu = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. נציב ונראה כי:

$$\int \frac{1}{3-cos(u)}du = \int \frac{1}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}} * \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{3(1+t^2)-(1-t^2)}{1+t^2}} * \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{2}{3(1+t^2)-(1-t^2)}dt = \int \frac{2}{4t^2+2}dt = \int \frac{1}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} * \sqrt{2}arctan(\sqrt{2} * t)$$

$$= \frac{1}{2} * \sqrt{2}arctan(\sqrt{2} * tan(\frac{u}{2})) = \frac{1}{\sqrt{2}}arctan(\sqrt{2} * tan(x)) + C$$

שאלה 3

א. חשב אורך של גרף פונקציה $f(x) = ln(cosx)$ בקטע $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
פתרון: נשתמש בנוסחה

$$L(F) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

אפשרי כי רציפה ואלמנטרית בתחום. גם נגזרתה. נתחיל מחישוב הנגזרת

$$f'(x) = \frac{-sinx}{cosx}$$

מכאן ש

$$\sqrt{1+(-\frac{sinx}{cosx})^2} = \sqrt{1+\frac{sin^2x}{cos^2x}} = \sqrt{\frac{sin^2x+cos^2x}{cos^2x}} = \frac{1}{cosx}$$

נעזר בהצבה אוניברסלית, $t = tan(\frac{x}{2})$ ולכן $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ וכן $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ונציב ונקבל

$$\int \frac{1+t^2}{1-t^2} * \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}dt = ln|1+t| - ln|1-t|$$

$$= ln|1+tan(\frac{x}{2})| - ln|1-tan(\frac{x}{2})|$$

כלומר, עלינו להציב בגבולות ולקבל

$$L(f)=|_0^{\frac{\pi}{4}}ln|1+tan(\frac{x}{2})|-ln|1-tan(\frac{x}{2})||=0.88$$

ב. האם האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x+x^4}$ מתכנס? מתבדר? האם האינטגרל $\int_{-\infty}^{0}\frac{sinx}{x+x^4}$ מתכנס? מתבדר?

פתרון: נתחיל מהאינטגרל הימני. $x+x^4\geq 0$ וכן שווה אפס אמ"מ $x=0$. אך, כיוון שמדובר בסינוס למעלה, לא יהיה השתוללויות ולכן הערך בנקודה יהיה סופי. כלומר, פרט לאנסוף אין נקודות בעייתיות. כעת נראה כי $G(x)=\int_0^x sin(t)dt=cos(0)-cos(x)$ ומדובר בפונקציה חסומה! כמו כן, $\frac{1}{x+x^4}\to 0$ וכן גזירה ברציפות ולכן סה"כ לפי דריכלה, האינטגרל מתכנס.

באשר לאינטגרל משמאל, נראה כי כאשר $x\to-\infty$ אזי $\frac{sin(x)}{x+x^4}\to\infty$. כלומר יש נקודה בעייתית במינוס אנסוף. כמו כן, תהיה לנו בעיה כאשר $x=-1$, שם המכנה יתאפס. בנוסף יש בעיה באפס ונקבל אפס חלקי אפס, לכן נפצל:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{sinx}{x+x^4}=\int_{-1}^{0}\frac{sinx}{x+x^4}+\int_{-2}^{-1}\frac{sinx}{x+x^4}+\int_{-\infty}^{-2}\frac{sinx}{x+x^4}$$

יותר מדי אינטגרלים. אינטואיציה אומרת שיש כאן אחד מתבדר, ואז הכל יתבדר לנו. נרצה להשתמש במבחן השוואה איפשהו. נראה כי כאשר $-1\leq x\leq 0$ אזי $sinx\leq 0$ וכן $x+x^4<0$ בתחום זה. סה"כ הוא חיובי, נפעיל השוואה ונראה כי:

$$\int_{-1}^{0}\frac{-1}{x+x^4}\leq\int_{-1}^{0}\frac{sinx}{x+x^4}$$

גם משמאל כעת הוא חיובי (שלילי חלקי שלילי), לכן עליו נפעיל מבחן השוואה עם האינטגרל המתבדר $\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x+1)^1}$ ונקבל

$$L=lim_{x\to-1}\frac{\frac{-1}{x+x^4}}{\frac{1}{1+x}}=lim_{x\to-1}\frac{-1-x}{x+x^4}=_L lim_{x\to-1}\frac{-1}{1+4x^3}=\frac{-1}{1-4}=\frac{1}{3}$$

הם חברים, מתבדרים יחדיו, לכן סה"כ האינטגרל שלנו גדול מאינטגרל מתבדר, מתבדר בעצמו לפי השוואה.

שאלה 4 - לעשות!!

שאלה 5 - לעשות!!!

2020 מבחן לדוגמה

2020 מועד א

2020 מועד ב

2019 מבחן לדוגמה

2019 מועד א

2019 מועד ב