אלגוריתמים 1 ־ הרצאה 6: רשתות זרימה

2 בדצמבר 2025

גיא יער־און

1 הרצאה 6: רשתות זרימה $(Network\ Flow)$

מעט מוטיבציה: נניח ואנחנו חברה שרוצה להעביר נפט נוזלי מנקודה A לנקודה B. בנינו מראש רשת של צינורות שמאפשרות העברה שכזו. בצינור אפשר להכניס את הנפט מצד אחד והוא יכול לצאת מן הצד השני. לכל צינור, ישנה קיבולת אחרת. וכן: לכל צינור ישנו קוטר שונה, קוטר גדול יותר מאפשר להזרים יותר נפט דרך הצינור. אפשר לדמיין את הצינור כקשת בגרף מכוון. היא יכולה לנוע בדיוק בכיוון אחד. ממקור הנפט, בנינו מערך של צינורות שונים. כמו כן, יתכן שעוברים שני צינורות בין שתי נקודות: אחד לכל כיוון. המטרה שלנו היא להעביר כמה שיותר נפט מקודקוד ההתחלה s אל קודקוד היעד t. בכל צינור, אפשר להעביר עד מס' ליטרים מסויים.

המטרה שלנו היא בהינתן רשת הצינורות, לחשב כמה "נפט" ניתן להזרים בשנייה ברשת. נשים לב כי המושג להזרים לא הוגדר היטב.

נשים לב כי בהינתן צנור כנ"ל $s \to a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to t$, אם בכל הצינורות אפשר להזרים מאה, אך בצינור $a_3 \to a_4$ אפשר להזרים רק 2 למשל, זה לא עוזר לי: אני נתקע מאחור עם 98 ליטר נפט. מערכת ה"ביוב" תתקע, אי אפשר לצבור במיקום מסויים נפט/ מים שיצטברו. לכן אסור מראש להעביר שם(!) מאה. נשים לב שצריך מראש לדעת מה כמות הליטר המקסימלית שמותר לנו להעביר במסלול, שלא יווצר מצב של להתקע.

נשים לב כי תתכן למשל רשת זרימה $s \to a_1 \to a_{2 \to a_5 \to a_6}^{\to a_3 \to a_4} \to t$ מסוג זה, באשר נקודה a_2 היא נקודת פיצול. נניח שכל הצינורות בגודל קיבולת 100, אך $a_2 \to a_3$ בקיבולת 2, וכן $a_2 \to a_5$ בקיבולת 50. במצב זה, נוכל להעביר 2 ליטר בצינורות דרך $s \to a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to t$ ונוכל להעביר עוד 50 דרך $s \to a_1 \to a_2 \to a_5 \to a_6 \to t$. וסה"כ הקיבולת ברשת הזרימה תהיה $50 + 2 = 52$.

נחדד: אין כאן משמעות לזמן, אלא בהינתן רשת זרימה, כמה אפשר להעביר בה בכל מצב שהוא.

וכן: כמות ה"נפט" שנכנס אל קודקוד ברשת הזרימה u שווה לכמות ה"נפט" שיוצא מהקודקוד u. המקום היחיד שממנו יכול להיווצר נפט הוא בs, והמקום היחיד שיכול להשאר בו/ לצאת נפט: קודקוד t.

דוגמאות לשימוש: להבין מהו קצב העברת המידע האפשרי בין שני מחשבים ברשת מחשבים בזמן העברת קובץ ענק בין המחשבים. דוגמה נוספת היא לחשב איזה מסילות רכבת ניתן להפציץ בעלות הקטנה ביותר על מנת למנוע מעבר של ציוד מנקודה אחת לשנייה.

1.1 הגדרה פורמלית של זרימה

הגדרה: רשת זרימה היא גרף מכוון $G = (V, E)$ עם קודקוד מקור $s \in V$ וקודקוד יעד $t \in V$. ופונקציית קיבולת $C : V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
באשר $(u, v) \in E \iff C(u, v) > 0$.

הבהרה. הקיבולת יכולה להיות מס' ממשי חיובי או אפס. היא אפס אם אין קשת בין הקודקודים, אחרת: היא גדולה ממש מאפס.
נפרמל,

$$C(u,v)=\left\{\begin{array}{cc} x\in\mathbb{R}^{+} & (u,v)\in E \\ 0 & (u,v)\notin E \end{array}\right\}$$

נתבונן בשתי הגדרות, שקולות עבור **זרימה**. ההגדרה הראשונה יותר אינטואטיבית, והשנייה פחות (אך תעזור לנו בהמשך עם המתמטיקה).

הגדרה ראשונה: זרימה ברשת זרימה $G=(V,E)$ עם פונקציית קיבולת C, היא פונקציה $f: V\times V\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ שמקיימת את התנאים הבאים (נדגיש ־ פונקציית הזרימה היא מה שאנו מזרימים בפועל על הרשת):

1. אילוצי קיבולת:

$$\forall u,v\in V: 0\leq f(u,v)\leq c(u,v)$$

כלומר, בהכרח הזרימה תהיה גדולה־שווה מאפס (לפי הגדרת הקיבולת, אם אין קשת היא אפס). וכן הזרימה לא תוכל לעבור לעולם את הקיבולת (כי לא נוכל לעולם להעביר את הזרימה דרך הרשת).

2. שימור זרימה: סכום הזרימה שנכנס שווה לסכום הזרימה שיוצא. חוק שימור הזרימה.

$$\forall v\in V\backslash\{s,t\}: \sum_{u\in V} f(u,v)=\sum_{u\in V} f(v,u)$$

הערך של זרימה f הוא:

$$|f|=\sum_{v\in V} f(s,v)-\sum_{v\in V} f(v,s)$$

כלומר, סכום כל ערכי הזרימה של הקודקודים שיוצאים מs, פחות כל ערכי הזרימה שנכנסים אל s. נשים לב כי יתכן שיכול לזרום חזרה אל s זרם. סה"כ ערך זה זה הערך שיצא מs, בניקוי מה שחזר. כלומר: ממש הסכום נטו שיוצא לבסוף.

הגדרה שנייה: זרימה ברשת זרימה $G=(V,E)$ עם פונקציית קיבולת C, היא פונקציה $f: V\times V\to\mathbb{R}$ שמקיימת את התנאים הבאים:

1. אילוצי קיבולת:

$$\forall u,v\in V: f(u,v)\leq c(u,v)$$

נשים לב כי בהגדרה זו, יתכן כי הזרם יהיה שלילי. הוא רק לא יכול לעבור את הקיבולת. זה מאוד מוזר מבחינה מתמטית: ההסבר לכך יהיה הסימטריה מטה.

2. סימטריה:

$$\forall u,v\in V: f(u,v)=-f(v,u)$$

נשים לב שזו הגדרה מאוד אינטואטיבית וחשובה. אם יעבור לנו בצד מסויים 6 יחידות, בצד ההפוך אליו עבר -6. באופן דומה: אם מישהו הביא לי 100 שקל, אצלי עלה 100 שקל ואצלו ירד 100 שקל.

3. שימור זרימה: בהגדרה זו אנחנו מסתכלים רק על הקשתות שיוצאות מקודקוד מסויים, ונאמר שסכום הזרימה שלהם הוא אפס.

$$\forall v \in V \backslash \{s,t\} : \sum_{u \in V} f(v,u) = 0$$

הסבר: אנו מעוניינים כי אם נכנס מצד אחד של v סכום זרם של 12 למשל, מהכיוון שנכנס אל v בצד השני של הקודקוד יזרום סכום זרם של -12. (וכן כמובן שבסוף יתכן שזרמו מאותו צד של הקודקוד סכום שהתאפס לאפס. בכל מקרה: מדובר בקשתות שנכנסות אל v). נשים לב כי עדיין ישנו שימור זרימה כמו בהגדרה הקודמת, אבל מהגדרת הסימטריה צריך לייצג זאת מתמטית קצת שונה. - ניתן לומר כי אם מסתכלים על כמה שיוצא, אם מצד אחד יוצא 15 ערך זרם, נראה שנכנס אליו גם 15 (אך בכיוון השני מאיפה שנכנס, יצא -15 בגלל סימטריות) ולכן אכן $-15+15=0$.

הערך של זרימה f הוא:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$$

כעת, ערך הזרימה יוגדר להיות כל מה שיוצא מs, ושוב נשים לב שזה שקול אינטואטיבית לבעיה הקודמת, מהסימטריה, אם נכנס חזרה 5 יחידות אל s זה כאילו יצא מs -5 (זו הסימטריה). לכן אם יצא מs 15 למשל, ונכנס 2. זה שקול לכך שיצא 15 מs ויצא -2 (מסימטריה) ולכן ערך הזרימה הוא $15-2=13$.

בקורס נשתמש רק בהגדרה השנייה. ההגדרה הראשונה לטובת אינטואיציה בלבד.

הערה. נשים לב כי הפונקציה $f=0$ היא גם פונקציית זרימה.

1.2 הגדרת הבעיה

קלט: רשת זרימה $G=(V,E)$ עם פונקציית קיבולת $C: V \times V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

פלט: זרימה f בG בעלת ערך גדול ביותר מבין כל הזרימות האפשריות. $Max\ flow$.

1.3 תכונות של זרימה

נרצה להרחיב את ההגדרה של זרימה לקבוצות.

הגדרה: יהיו $X,Y \subseteq V$. נגדיר את הזרימה בין שתי קבוצות הקודקודים כך:

$$f(X,Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$$

טענה: $f(\{s\},V) = |f|$.

הוכחה:

$$f(\{s\},V) = f(s,V) = \sum_{v \in V} f(s,v) = |f|$$

טענה 4: תהי f זרימה ברשת זרימה $G=(V,E)$. אזי,

1. $\forall X\subseteq V: f(X,X)=0$
2. $\forall X,Y\subseteq V: f(X,Y)=-f(Y,X)$
3. $\forall X,Y,Z\subseteq V\wedge X\cap Y=\emptyset$ מתקיים:
   a. $f(X\cup Y,Z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$
   b. $f(Z,X\cup Y)=f(Z,X)+f(Z,Y)$

הוכחה:

תהי f רשת זרימה. ויהיו $X,Y,Z\subseteq V$.

.1

$$f(X,X)=\sum_{x\in X}\sum_{x_2\in x}f(x,x_2)=\sum_{x\in X}0=0$$

.2

$$f(X,Y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}f(x,y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}-f(y,x)=-\sum_{y\in Y}\sum_{x\in X}f(y,x)=-f(Y,X)$$

3. נניח כי $X\cap Y=\emptyset$.

$$f(X\cup Y,Z)=\sum_{w\in X\cup Y}\sum_{z\in Z}f(w,z)=_{X\cap Y=\emptyset}\sum_{x\in X}\sum_{z\in Z}f(x,z)+\sum_{y\in Y}\sum_{z\in Z}f(y,z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$$

למה 5: תהי f זרימה ברשת זרימה $G=(V,E)$. אזי,

$$|f|=f(V,t)$$

הוכחה:

$$f(V,V\backslash\{s,t\})=-f(V\backslash\{s,t\},V)=-\sum_{x\in V\backslash\{s,t\}}\sum_{y\in V}f(x,y)=-\sum_{x\in V\backslash\{s,t\}}0=0$$

כמו כן נשים לב כי

$$V=\{s,t\}\cup(V\backslash\{s,t\})$$

וכן שתי קבוצות אלו זרות. כעת לפי טענה 4 נוכל לומר כי:

$$|f|=f(s,V)=f(V,V)-f(V\backslash\{s\},V)=0-f(V\backslash\{s\},V)=f(V,V\backslash\{s\})$$

$$=f(V,V\backslash\{s,t\})+f(V,t)=0+f(V,t)$$

וסה"כ קיבלנו $|f| = f(V,t)$ כנדרש.

מסקנה: ראינו כי $f(s,V) = |f|$ ומלמה 5 ראינו כי $|f| = f(V,t)$ ונקבל כי $f(V,t) = f(s,V)$.
כלומר: סך הזרם שיוצא מs שווה לזרם שנכנס אל t.

הגדרה: חתך (s,t) הוא חתך $(S,T) = (S, V\backslash S)$ כאשר $s \in S$ וכן $t \in T$. נשים לב כי G הינו מכוון ולכן קשת שחוצה את החתך היא קשת שעוברת מS אל T (הקשתות בכיוון השני לא נקראות כאלו ולא מעניינות אותנו). כמו כן בהכרח $\emptyset \neq S \subset V$.

למה 6: יהי $G = (V,E)$ רשת זרימה עם פונקציית קיבולת C. ותהי f זרימה בG. יהי (S,T) חתך (s,t) של G. אז,

$$|f| = f(S,T)$$

(כלומר, אם נסתכל על הזרימה משמאל S אל T, סכום הזרימות הללו הוא בדיוק ערך הזרימה).

הוכחה:
נשים לב כי $T \cap S = \emptyset$ וכן $S \cup T = V$. כמו כן,

$$f(S\backslash\{s\}, V) = \sum_{x\in S\backslash\{s\}} \sum_{y\in V} f(x,y) =_{(*)} 0$$

כיוון ש$x \neq s,t$, לפי חוק שימור הזרימה (3).

$$f(S,T) = f(S,V) - f(S,S) = f(S,V) - 0 = f(S,V) = f(S\backslash\{s\}, V) + f(s,V) = 0 + f(s,V) = |f|$$

כנדרש.

הגדרה: קיבולת בין קבוצות הינה

$$C(S,T) = \sum_{x\in S} \sum_{y\in T} c(x,y)$$

למה 7. יהיו S,T. אזי, מתקיים $f(S,T) \leq C(S,T)$
הוכחה:

$$f(S,T) = \sum_{x\in S} \sum_{y\in T} f(x,y) \leq \sum_{x\in S} \sum_{y\in T} c(x,y) = C(S,T)$$

מסקנה. לכל חתך גודל הזרימה זהה לפי למה 6 ולכל זרימה בחתך חסומה ע"י הקיבול של החתך, לכן כל זרימה חסומה ע"י כל החתכים ובפרט הקטן ביותר, ובפרט הזרימה הגדולה. לכן ערך הזרימה המקסימלי, יהיה בהכרח קטן שווה מהקיבול הקטן ביותר. **כלומר,** $Max\ flow \leq Min\ cut$.

1.4 שיטת פורד־פלקרסון

נניח שאנחנו מתחילים מ$f = 0$ (כפי שהערנו קודם זו אכן זרימה). כלומר: $\forall_{v,u\in V} f(u,v) = 0$. מכאן ש$|f| = 0$.

נניח שאנחנו מסתכלים על רשת זרימה $G = (V, E)$ ומצאנו מסלול כלשהו בין s לt. אזי, ברור מכאן כי הזרימה המקסימלית האפשרית באותו המסלול: הוא ערך הזרימה המינימלי שמופיע על המסלול. כלומר אם מצאנו מסלול $s \to_{100} a_1 \to_{50} a_2 \to_{14}\to t$ אזי הזרימה המקסימלית האפשרית במסלול הינה 14.

נרצה להגדיר פונקציית זרימה כך -

יהי מסלול P. אם $(x,y) \in P$ היא קשת עם $C(x,y) = min_{(u,v)\in P}\{C(u,v)\}$ אזי

$$f'(u,v) = \left\{ \begin{array}{cc} C(x,y) & (u,v) \in P \\ -C(x,y) & (v,u) \in P \\ 0 & o.w \end{array} \right\}$$

$$|f'| = C(x,y)$$

וכן נשים לב שאכן ערך הזרימה הינו $C(x,y)$ כי זה בדיוק ה14 עליו דיברנו קודם בדוגמה. ערך הקיבולת הקטן ביותר על המסלול הינו ערך הזרימה.

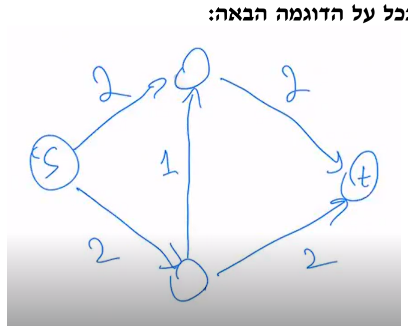
נראה כי אכן שיפרנו את הזרימה מ0 ל$C(x,y)$.

יתכן כי ישנם הרבה מסלולים זרים (בקשתות) מs לt ואז אפשר להפעיל את הרעיון שעשינו קודם על כל המסלולים. אם כן, זה לא מכסה את כל המקרים. באופן כללי יכול להיות שהיינו רוצים להשתמש בקשת אחת עבור יותר ממסלול אחד (נקודת פיצול למשל). לשם כך צריך לפתח מנגנון שיאפשר לקחת את המינימלי בכל מסלול, אך להזרים יותר בידיעה שניתן להתפצל לאורך המסלול.

הגדרה: קשת $(x,y) \in E$ תקרא רוויה תחת זרימה f אם $f(x,y) = C(x,y)$.
הערה. נשים לב כי אם קשת איננה רוויה, אזי ניתן להשתמש בקיבולת הנותרת.

רעיון: כל עוד קיים מסלול מs לt שקשתותיו אינן רוויות, "נזרים" על מסלול זה "כמה שאפשר". נשים לב שהרעיון הוא בגדר רעיון ולא מוגדר היטב. עם זאת: זה לא יעבוד.

נסתכל על הדוגמה הבאה:



נראה כי נרצה ללכת במסלול שבצורת Z מs מטה, עובר ב1 ומסיים בt. הערך המינימלי במסלול זה הינו 1. וקיבלנו כי הקשת 1 רוויה. המסלול היחיד שנותר לנו מt לs שקשתותיו אינן רוויות זה להתחיל מs מעלה, ללכת על המסלול של שתי הקשתות שערכן 2. נשים לב שעל מסלול זה נוכל להזרים

1 בלבד כי הקשת 2 שמגיעה מלמעלה אל t זרם בה כבר 1 (מהמסלול הקודם). מכאן שנסתכל על המסלול האחרון שלא כל הקשתות בו רוויות, המסלול שמתחיל בs מטה ועובר רק בקשתות שערכן 2. שוב: הקשת 2 שמגיעה מלמטה אל t השתמשה באחד ולכן ניתן להזרים במסלול זה 1. סה"כ הזרמנו 1 בכל מסלול והיו לנו 3 מסלולים וקיבלנו כי ערך הזרימה הינו $|f| = 3$. עם זאת: היה ניתן להזרים 4 במעבר ישיר של 2 מs מעלה ומטה. מסקנה: הרעיון לא טוב. והבעיה - הרבה יותר קשה משחשבנו.

1.5 הרשת השיורית

נשים לב כי הבעיה בדוגמה שהראנו קודם, היא שהאלגוריתם קודם בחר את המסלול שעובר דרך 1. אם הוא לא היה בוחר במסלול זה, או היה מנסה לבחור אותו אחרון: הפתרון כן היה עובד באשר לדוגמה הספציפית הקודמת. נראה כי אלגוריתם חמדן בוחר החלטה ואחר כך חייב לעמוד בה, הוא לא יכול להתחרט. במצב של קודם, היינו שמחים אם לאחר הבחירה במסלול שעובר ב1 הוא היה יכול להתחרט. מכאן נגיע להגדרה הבאה.

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ רשת זרימה עם פונקציית קיבולת C. ותהי f זרימה בG. הקיבולת השיורית של C תחת f היא הפונקציה

$$C_f(u, v) = C(u, v) - f(u, v)$$

כלומר: כמה עוד יש לנו להזרים בקשת מסויימת.

הגדרה: הרשת השיורית של G תחת f היא רשת זרימה $G_f = (V, E_f)$ שפונקציית הקיבולת שלה הינה C_f. וכן $E_f = \{(u, v) | C_f(u, v) > 0\}$. נשים לב כי אכן פונקציית הקיבולת מקיימת $C_f \geq 0$ שכן תמיד $C(u, v) \geq f(u, v)$ כלומר $C_f(u, v) \geq 0$.

כלומר: קבוצת הקשתות זה כל הקשתות שעוד ניתן להזרים בהן.

נשים לב כי אמרנו שתתכן זרימה שלילית. מכאן: אם בכיוון $x \to t$ זרם 2, ולא הייתה קשת בכיוון ההפוך. כלומר $f(x, y) = 2$, נראה כי בכיוון השני לא עברה זרימה ולכן $C(y, x) = 0$. מכאן נקבל כי $c_f(y, x) = C(y, x) - f(y, x) = 0 - f(y, x) = f(x, y) = 2$. כלומר, אם בכיוון מסויים ברשת זרם ערך כלשהו, 2 במקרה שלנו, בכיוון ההפוך יזרום אותו ערך ברשת השיורית. ומכאן המסקנה: יתכן כי ברשת השיורית ייתכנו קשתות נוספות שלא היו בגרף המקורי.

נראה כי כתוצאה מהרשת השיורית, כעת פיתחנו מנגנון ל"חזרה אחורה" במידה ולא מעוניינים במה שבחרנו. כעת יש את האפשרות ללכת בכיוון הנגדי ולחפש מסלול שישלים. מתי נדע לעצור? כשאין מסלול מs לt: כשכל הקשתות נכנסות מs ולא יוצאות ממנו. הרעיון יהיה לשפר מסלולים על הרשת השיורית עד שלא ניתן יהיה לעשות זאת.

הגדרה: בהינתן מסלול P ברשת השיורית G_f נגדיר (את הקיבולת השיורית המינימלית) כך:

$$C_f(P) = min\{c_f(u, v) | (u, v) \in P\}$$

1.6 שיטת פורד-פלקרסון

להלן האלגוריתם:

$\text{Ford-Fulkerson}(G = (V, E), s, t, c)$

initialize $f(u, v) = 0$ for all $u, v \in V$
$G_f \leftarrow G$, $c_f \leftarrow c$
while there exists a path P from s to t in G_f
  $c_f(P) \leftarrow \min_{(u,v)\in P}\{c_f(u, v)\}$
  for each edge $(u, v) \in P$
    $f(u, v) \leftarrow f(u, v) + c_f(P)$
    $c_f(u, v) \leftarrow c_f(u, v) - c_f(P)$
    $f(v, u) \leftarrow f(v, u) - c_f(P)$
    $c_f(v, u) \leftarrow c_f(v, u) + c_f(P)$
    update E_f
Return f

מה קורה באלגוריתם? האלגוריתם מקבל פונקציית קיבולת, רשת זרימה וקודקוד מקור ויעד. בתחילה: האלגוריתם מאתחל את פונקציית הזרימה להיות אפס עבור כל הקודקודים. כמו כן: מאתחלים את רשת הזרימה השיורית להיות בתחילה רשת הזרימה עצמה ואת הקיבולת השיורית להיות הקיבולת. לאחר מכן נכנסים אל לולאה שמתבצעת כל עוד קיים מסלול מs לt ברשת השיורית.

מגדירים את $C_f(P)$ כפי שהוגדר לעיל, עוברים על כל זוג קודקודים במסלול P, מוסיפים ל$f(u, v)$ את $c_f(P)$ שגילינו קודם לכן (כמה כעת אפשר לעבור בו) ובאופן דומה מורידים אותו מ$f(v, u)$ וכן מגדירים את הרשת השיורית באופן דומה ונגדי: מ$c_f(u, v)$ אנו מורידים את $c_f(P)$ (כי כעת יש שם פחות זרם שניתן להעביר) ואל $c_f(v, u)$ אנחנו מוסיפים את $c_f(P)$ (כי יש יותר זרם שניתן להעביר).

לבסוף: מעדכנים את הקשתות E_f (יתכן שיש קשתות כעת שמוסיפים או לחלופין מורידים). כלומר כל מי שהקיבולת השיורית שלו התאפסה צריך להעיף, מי שקודם לכן היה אפס וכעת לא: צריך להכניסו לרשת השיורית. פעולה זו היא למעשה העדכון של G_f.

הגדרה: למסלול P אנחנו נקרא "מסלול שיפור". וכן אנחנו משתמשים בP בשביל לשפר את f.

1.7 נכונות האלגוריתם וזמן הריצה

נתבונן בבעיית חתך מינימום:

קלט: גרף $G = (V, E)$ מכוון. ושני קודקודים $s, t \in V$ וכן פונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}^+$

פלט: חתך (s, t) שסכום קשתות שעוברות מS לT הוא כמה שיותר קטן.

בשביל לפתור את בעיית זרימת המינימום נרצה לפתור בעיה של זרימה ברשת שנגדיר, ועל מנת לראות שזה אכן פותר את הבעיה נוכיח את נכונות האלגוריתם של פורד (ואז כבר קיבלנו את הנכונות שרצינו).

למה 7: תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה עם פונקציית קיבולת C ותהי f רשת זרימה בG. תהי (S,T) חתך (s,t) בG. אזי, $|f|\le C(S,T)$
(כלומר, ערך הזרימה בגרף יהיה קטן־שווה מסכום הקיבולות של הקשתות שחוצות את החתך משמאל S אל ימין T)

הוכחה: תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה עם פונקציית קיבולת C ותהי f רשת זרימה בG. תהי (S,T) חתך (s,t) בG.
ראינו כבר כי $|f|=f(S,T)$ בלמה 6. לכן

$$|f|=f(S,T)=\sum_{x\in S}\sum_{y\in T}f(x,y)\le_{(*)}\sum_{x\in S}\sum_{y\in T}C(x,y)=C(S,T)$$

באשר $(*)$ זה כיוון שתמיד מתקיים כי $f(x,y)\le C(x,y)$, כלומר הזרימה היא לכל היותר בגודל הקיבולת. כנדרש.

סימון: נסמן את זרימת המקסימום $|f^*|$.
מסקנה: ערך כל זרימה שהיא $|f|$ יהיה קטן או שווה מחתך ה(s,t) המינימלי.

1.7.1 משפט $max-flow-min-cut$

משפט 8: תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה עם פונקציית קיבולת C ותהי f זרימה בG. אזי, כל התנאים הבאים שקולים:
א. f זרימת מקסימום.
ב. בG_f אין מסלול שיפור
ג. קיים חתך (s,t) שנסמנו (S,T) בG כך ש$|f|=C(S,T)$.

מסקנה: זרימת מקסימום = חתך (S,T) מינימום (!)
מסקנה שנייה: המשפט מוכיח את נכונות האלגוריתם, כיוון שא' גורר את ב' באמ"מ. אכן אם אין מסלול שיפור מצאנו את זרימת המקסימום.

הוכחה:
א $\Longleftarrow$ ב: נניח כי f זרימת מקסימום. נניח בשלילה כי f זרימת מקסימום ובG_f יש מסלול שיפור P. מכאן, ניתן להשתמש בP על מנת להגדיל את ערך הזרימה ולכן f אינה זרימת מקסימום, בסתירה.
ב $\Longleftarrow$ ג: נניח כי בG_f אין מסלול שיפור. נגדיר את (S,T) כדקלמן:

$$S=\{v\in G_f|\exists P=(s,...,v)\}$$

$$T=\{v\in G_f|not\exists P=(s,...v)\}$$

כלומר T היא קבוצת הקודקודים שקיים מסלול מs אליהם, וT זו הקבוצה שלא קיים מסלול מs אליהם.
נראה כי אכן קיים מסלול מs אל s ולכן $s\in S$ ולכן לא קיים מסלול מs אל t כי אין מסלולי שיפור ולכן $t\in T$. ולכן אכן (S,T) שהוגדר חתך (s,t).
טענה 9: לכל $u\in S$ ו$v\in T$ מתקיים $f(u,v)=C(u,v)$

הוכחה: מצד אחד תמיד מתקיים $f(u,v) \leq C(u,v)$. נניח בשלילה כי $f(u,v) < C(u,v)$. כלומר,

$$C_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) > 0$$

ומכאן קיבלנו כי $(u,v) \in E_f$. ע"פ הגדרת S, יש מסלול מs לu בG_f. מסלול זה יחד עם הקשת $(u,v) \in E_f$ יוצר מסלול מs לv בG_f בסתירה לכך ש$v \notin S$.
כעת,

$$|f| = f(S,T) =_{def} \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} f(x,y) =_{Lemma9} \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} C(x,y) = C(S,T)$$

ג $\Longleftarrow$ א: נניח שקיים חתך (s,t) שנסמנו (S,T) בG כך ש$|f| = C(S,T)$. אז, נניח בשלילה כי f אינה זרימת מקסימום. כלומר, קיימת פונקציית זרימה f' כך ש$|f| < |f'|$. מכאן ש$|f'| > |f| = C(S,T)$ בסתירה ללמה 7. מכאן שבהכרח f זרימת מקסימום.

כנדרש.

1.7.2 סיבוכיות זמן הריצה (פורד פרקלסון)

באופן כללי, השיטה של פורד פרקלסון עלולה שלא להסתיים לעולם. עם זאת, אם כל הקיבולות הם מספרים שלמים: האלגוריתם כן יסתיים.
מכאן נובע, שבכל איטרציה הזרימה תשתפר בלפחות אחד. ולכן, אם הזרימה המקסימלית הינה $|f^*|$ אזי לכל היותר לאחר $|f^*|$ איטרציות האלגוריתם יסיים.
נראה כי בכל איטרציה אנו נדרשים למצוא מסלול - למשל באמצעות dfs. זה יעלה $O(|E_f|) = O(|E|)$ וכן מתבצעים עדכונים על המסלול שעלותם $O(|V|)$ סה"כ כל איטרציה עולה $O(|E|+|V|)$.
הנחה: נניח כי כל הקודקודים בV נמצאים על מסלול כלשהו מs לt בגרף המקורי. אחרת, אפשר בזמן לינארי להוציא את אלו שלא נמצאים ונקבל מכאן כי $|V|-1 \leq |E|$ ולכן כל איטרציה עלותה $O(|E|+|V|) \leq O(|E|)$.
מכאן נקבל כי זמן הריצה הינו: $O(|f^*| \times |E|)$

למה 10: תהי רשת זרימה $G=(V,E)$ עם פונקציית קיבולת C וזרימה f, אזי מתקיים
f' זרימה בG_f $\Longleftrightarrow$ $f+f'$ זרימה בG.
מסקנה: f' זרימת מקסימום בG_f $\Longleftrightarrow$ $f+f'$ זרימת מקסימום בG.