טריקים ושטיקים אינפי 2

31 ביולי 2025

אם מצאתם טעות אשמח לעדכון.
גיא יער־און.

הערה: הסיכום המתומצת יתמקד בעיקר בחלק הקשה באינפי 2 ־ אינטואיציה והפרכות. לא יהיה כאן כמעט טיפים לחלק הטכני והאלגברי אלא בעיקר איך להתמודד ולגשת לשאלות ההוכח הפרך של אלעד שידועות כנוראיות.

לא לשכוח $+C$!!!!!!!!!!!!!!!!!!

1. פונקציה מונטונטית ־ אינטגרבילית, רציפה ־ אינטגרבילית, לא רציפה שיש לה מס' סופי של אי נקודות רציפות? גם אינטגרבילית.

2. משפט דרבו ־ פונקציה שיש לה נקודת אי רציפות קפיצה אינה יכולה להיות נגזרת של אף פונקציה ולכן לא ייתכן לה קדומה.

3. אינטגרבילית לא גורר רציפה.

5. אם $|f|$ אינט', זה לא אומר כלום על אינט' של f.

6. פונקציה חסומה שאיננה אינטגרבילית ־ פונקציית דריכלה.

7. אם לf יש קדומה בקטע, f לא בהכרח אינטגרבילית. למשל ־

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 2xsin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x}cos(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\}$$

לf יש קדומה, הפונקציה הבאה:

$$F(x) := \left\{ \begin{array}{cc} x^2sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\}$$

אך f איננה אינטגרבילית כי לא חסומה כי הקוסינוס משתגע.

8. אם f אינט' בקטע אזי יש לה קדוומה בקטע. למשל -

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{array} \right\}$$

היא אינטגרבילית (מס' סופי של אי רציפות) אך אין לה קדומה בקטע כי יש נק' אי רציפות קפיצה ולפי (2) -דרבו, אין לה קדומה.

9. אנסוף נקודות אי רציפות לא גורר שלא אינטגרבילית. למשל $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x = \frac{1}{n} \\ 0 & x \neq \frac{1}{n} \end{array} \right\}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$ אך f כן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ וסכומה שם פשוט 0 לפי מה שראינו בהרצאה.

10. פונקציה לא שואפת לאפס = לא גורר התבדרות. למשל:

א. פונקציה חיובית אינה רציפה כך שלא שואפת לאפס אך מתכנסת - דוגמת המלבנים

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n \leq x \leq n + \frac{1}{n^2} \\ 0 & n + \frac{1}{n^2} < x < n+1 \end{array} \right\}$$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + ... = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

הערה -

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)dx + \int_{1+\frac{1}{n^2}}^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} 1dx + \int_{1+\frac{1}{n^2}}^{n+1} 0dx = [_n^{n+\frac{1}{n^2}} x] = \frac{1}{n^2}$$

ב. פונקציה חיובית רציפה כך שלא שואפת לאפס אך מתכנסת - דוגמת המשולשים

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} n^4 x - n^5 & [n, n + \frac{1}{n^3}] \\ -n^4 x + n^5 + 2n & [n + \frac{1}{n^3}, n + \frac{2}{n^3}] \\ 0 & [n + \frac{1}{n^3}, n] \end{array} \right\}$$

נשים לב מה עשינו כאן - פונקציה שבכל קטע מהצורה לקחנו משולש שווה שוקיים **בגובה** n**, עם בסיס** $\frac{2}{n^3}$ **וגובה** n

ג. אם נרצה פונקציה שכן חסומה - נקח משולשים כמו ב' אך עם גובה 1. ואז היא חסומה ורציפה ומתכנסת אך גבול לא אפס.

11. סדרות של פונקציות:

א. f_n רציפות האם גם בהכרח f רציפה? הפרכה - $f_n(x) = x^n, [0,1]$ - לאן שואפת הסדרה בתחומינו? נחלק למקרים. עבור $0 \leq x < 1$ נקבל כי $f_n(x) \to 0$ וכן עבור $x = 1$ נקבל כי $f_n(x) = 1^n = 1 \to 1$.

כלומר,

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{array} \right\}$$

ב. גזירות: f_n וכן f גזירות. האם $f'_n \to f'$? לא!
נתבונן בפונקציה גזירה כלשהי (היא חייבת להיות גם רציפה) ־

$$f_n(x) = \frac{sin(n^8 x)}{n} \to 0$$

כי אפיסה כפול חסומה. כלומר $f(x) = 0$.
עם זאת נראה כי

$$f'_n(x) = n^7 cos(n^8 x)$$

זה כמובן לא מתכנס, בטח לא לכל x ולא מתכנס לאפס.
ג. אינטגרביליות: f וכן f_n אינטגרביליות ב־$[a,b]$. האם בהכרח $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$. לא!
דוגמה נגדית:

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{cc} n & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{array} \right\}$$

ומתקיים $f(x) = 0$
ד. תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המתכנסת ל$f(x)$ בקטע $[a,b]$. נניח כי $f_n(x)$ חסומה לכל x. האם f חסומה?
הפרכה! נתבונן על הקטע $[0,1]$ ובפונקציה:

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

אין ספק כי היא חסומה. המקסימום שלה יתקבל בנקודה $x = \frac{1}{n}$והוא n. כך שאכן היא חסומה מלמעלה. (לכל n יש חסם אחר)
כעת נמצא מיהי $f(x)$. לכל $x > 0$ קיים n כך ש$\frac{1}{n} \leq x$ ולכן הסדרה $f_n(x)$ החל משלב מסויים פשוט שווה $\frac{1}{x}$ ולכן נקבל $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & otherwise \end{array} \right\}$ שוודאי שאינה חסומה בקטע.

12. נזכיר כי גזירות $\Longleftarrow$ רציפות אך ההפך לא נכון.

13. יהי טור שמתכנס במ"ש ,אזי קיים טור מספרים מתכנס שגדול ממנו ־ לא נכון!
נתבונן בטור הבא ־ כאשר הפונקציה היא תמיד קבועה

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

מדוע מתכנס במ"ש?

$$d_n = sup_{x\in\mathbb{R}}|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}|| = |\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}| \to 0$$

מדוע הורדנו את הsup? זו פונקציה קבועה! הsup הוא היא בעצמה. ומדוע שואף לאפס? כי מתכנס(אפיסה כפול חסומה) ו

מדוע לא קיים אחד מתכנס שגדול ממנו?

אם $|f_n(x)| \le a_n$, נקבל $\frac{1}{n} \le a_n$, הטור ההרמוני כמובן מתבדר ומהשוואה לא יתכן כי a_nיתכנס - אלא בהכרח יתבדר.

14. לשים לב - טור מספרים ללא x (כמו ב13 למשל) תמיד יתכנס במ"ש.

15. זכור בע"פ:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

לא קשה בכלל להגיע לטור של $arctanx$ - בצע לפי טור הנדסי טור ל$\frac{1}{1+x^2}$ ואז תטנגרל את שני הצדדים. תקבל

$$arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

16. כאשר טור מתכנס - השארית שלו שואפת לאפס. כמו כן בטור מתחלף $|R_k(x)| \le a_{k+1}$.

17. שארית לגראנז' - לזכור בע"פ: תהי f פונקציה כך שf גזירה $N+1$ פעמים בa. במצב כזה P_N (פולינום טיילור) מוגדר ואז $R_N = f - P_N$. אזי, לכל x קיימת $a<c<x$ כך ש

$$R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

18. **כלל טיילור:** אם כל הנגזרות של פונקציה חסומות באיזשהי קבוצה A (למשל $f=sinx$ תקיים שנגזרות חסומות ב$\{sinx,cosx\}$) אזי בוודאות הפונקציה שווה לטור חזקות שלה. אם פונקציה שווה לטור חזקות ־ הוא בהכרח טור טיילור.
האם פונקציה שגזירה אינסוף פעמים שווה לטור חזקות שלה? לא בהכרח!

ניתן לחשב לפי הגדרה.

$$f'(0)=lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=lim_{h\to0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

נציב $t=\frac{1}{h}$ ונקבל

$$lim_{t\to\infty}te^{-t^2}=0$$

לפי סדרי גודל. כלומר הנגזרת

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{array}\right\}$$

באופן כללי

$$f^{(n)}(x)=\left\{\begin{array}{cc}P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{array}\right\}$$

כאשר מדובר באיזשהו פולינום ככופל. כלומר סה"כ הפונקציה ב0 גזירה אנסוף פעמים. כך:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$$

שכן כל הנגזרות באפס הן אפס, ואין שום סביבה של 0 בה הטור e הזה שווה לפונקציה 0.

19. לזכור: אם המטריצות H_i כולן חיוביות ־ נק' מינימום, אם פעם שלילית פעם חיובית ־ נק' מקסימום, אחרת: אוכף.

20. דפרנציאבליות גוררת רציפות ־ ההפך לא נכון. דיפרנציאביליות גוררת קיום של נגזרות חלקיות, ההיפך לא נכון.
אם הנגזרות החלקיות כולן רציפות בנקודה, אזי הפונקציה דיפ' אך שוב, ההפך לא נכון.

21. הוכח הפרך - אם f אינטגרבילית רימן כך ש$\int_0^\infty f(x)$ מתכנס בהחלט אזי $\int_0^\infty f^2(x)$ מתכנס בהחלט.
זו הפרכה. נקח פונקציה

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} n & x \in [n, n+\frac{1}{n^3}], n \in \mathbb{N} \\ 0 & o.w \end{array} \right\}$$

קל לראות כי סכום האינטגרל הוא טור באזל המוכר, אם נסתכל על f^2 נקבל את $\sum \frac{1}{n}$ המתבדר.

22. לשים לב אם מבקשים במשולשים שיתחיל ב0 ולא באחד, אפשר להגדיר משהו כזה:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} n^4x + n - n^5 & [n - \frac{1}{n^3}, n] \\ -n^4x + n^5 + n & [n, n + \frac{1}{n^3}] \\ 0 & [n + \frac{1}{n^3}, n+1] \end{array} \right\}$$

טענות מונפצות שאלעד לדעתי רוצה שנזכור:

1. כדאי לזכור כי $\frac{-\pi}{2} \le arctanx \le \frac{\pi}{2}$ וכן $\frac{-\pi}{2} \le arcsinx \le \frac{\pi}{2}$ וכן $0 \le arccosx \le \pi$ - שלושתן חסומות.
2. אם $x \ge 0$ אזי $x \ge arctanx$
3. לא אתפלא אם ישים את זה בגלל המלשין - **נפח גוף סיבוב -**
אם נרצה לחשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר כתוצאה מסיבוב הגרף סביב ציר ה-
   1. ציר האיקס:
   $v = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$
   2. ציר הוואי:
   $v = 2\pi \int_a^b x f(x dx$
4. לא אתפלא אם יהיה $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
5. לזכור בע"פ הצבה אוניברסלית $t = tan(\frac{x}{2})$, נקבל כי - $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} sinx = \frac{2t}{1+t^2}$
6. $ln(x+1) \le x$
7. אינפי 1: $lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
8. א"ש הממוצעים: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$
9. פונקציות בשתי משתנים - אני בספק שיהיה משהו שהוא לא קיצון אבל! לשנן בע"פ מה שכתוב כאן שיהיה איך לגשת לזה במבחן ולא לקפוא כי לא מכירים את הנוסחה:
   א. הנגזרת החלקית של f לפי משתנה מסויים x_i מסומנת f_{x_i} ומוגדרת כך:

$$f_{x_i}(a) = lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_i) - f(a)}{h}$$

נשים לב כי e_i זה אותו וקטור מלינארית. כלומר שגוזרים לפי משתנה מסויימים מוסיפים h לרכיב שמתאים לו.

ב. קצב השינוי של פונקציה בכיוון נקרא הנגזרת הכיוונית של f בנקודה a בכיוון u ומסומן $f_u(a)$.

$$f_u(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu)-f(a)}{h||u||}$$

אם פונקציה דפרינציאבלית בנקודה הנגזרת הכיוונית של f בנקודה a ניתן לחשב באופן הבא:

$$f_u(a) = \frac{u * \nabla f(a)}{||u||}$$

הכיוון u שבו העלילה היא התלולה ביותר הוא הגרדיאנט $\nabla f(a)$,באופן שקול, כיוון u בו הירידה היא התלולה ביותר הוא $-\nabla f(a)$. הנגזרת הכיוונית המקסימלית תהיה ממש שווה ל$||\nabla f(a)||$.

ג.תהי f פונקציה, נאמר כי f דפרנציאבילית בנקודה a אם מתקיים

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\nabla f(a) * h}{||h||} \to 0$$