אלגוריתמים 1 ־ הרצאה 7: המשך זרימה

10 בדצמבר 2025

גיא יער־און

ראינו בהרצאה הקודמת את השיטה של פורד למציאת רשת זרימה בעלות של $O(|f^*| \times |E|)$ אם הקיבולות מספרים שלמים.
אלגוריתם נוסף שנראה כעת הוא אדמונס קארפ שרץ בסיבוכיות זמן $O(|V| \times |E|^2)$. ולאחר מכן נראה אלגוריתם של $Dinic$ שרץ בסיבוכיות זמן $O(|V|^2 \times |E|)$. לבסוף, נראה את $Hopcroft - Karp$ שמטפל במציאת זרימת מקסימום בגרף עם קיבולות על הצמתים.

0.1 האלגוריתם של אדמונס קארפ

האלגוריתם של אדמונס קארפ הוא צורת מימוש לשיטה של פורד־פרקלסון. בכל שלב אנחנו נמצא מסלול שיפור ברשת השיורית בעל מספר מינימלי של קשתות, מציאת המסלול מתבצעת על ידי הרצת BFS מs עד שמגיעים לt. ברור כי כל שיפור מסלול עלותו $O(|V|+|E|) = O(|E|)$ זמן (כי מניחים קשירות), ולאחר שנוכיח כי האלגוריתם מוצא את זרימת המקסימום בתוך לכל היותר $O(|E| \times |V|)$ איטרציות נקבל כי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הינה $O(|E|^2 \times |V|)$.

אלגוריתם 1 אדמונדס־קארפ$(G = (V, E), s, t, c)$

1. לכל קשת $(u, v) \in E$
   (א) $0 \to f[u, v] \to f[v, u]$
2. כל עוד קיים מסלול ברשת השיורית G_f מ־s ל־t.
   (א) הרץ BFS מ־s עד מציאת t. ויהי p המסלול שנמצא בעץ המסלולים הקצרים ביותר מ־s ל־t.
   (ב) $\min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in p\} \to c_f(p)$
   (ג) לכל קשת $(u, v) \in p$
      i. $f[u, v] - c_f(p) \to f[u, v]$
      ii. $-f[u, v] \to f[v, u]$

האלגוריתם משתמש ברעיון של פורד וממשש אותו שונה. נרצה להוכיח נכונותו.

הגדרה: נסמן $\delta_f(u, v)$ כאורך המסלול הקצר ביותר בין u לv בG_f.

למה 11: תהי f' זרימה המתקבלת מזרימה f ע"י שיפור על גבי מסלול באורך הקצר ביותר מs לt

ב-G_f. אזי לכל $u \in V$ מתקיים $\delta_f(s,u) \le \delta_{f'}(s,u)$
(כלומר, במסלול השיפור קודקודים רק מתרחקים מקודקוד המקור).

הוכחה: נניח בשלילה שזהו לא המצב. כלומר קיים קודקוד $u \in V$ המקיים $\delta_f(s,u) > \delta_{f'}(s,u)$. ייתכנו מס' קודקודים כנ"ל ובה"כ u הוא קודקוד במרחק מינימלי מ-s ב-$G_{f'}$ שעבורו זה מתקיים. יהי p מסלול קצר ביותר מ-s ל-u לאחר השיפור, כלומר ברשת $G_{f'}$. ויהי v הקודקוד הקודם ל-u ב-P. מתקיים $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1$ וכן $\delta_f(s,v) \le \delta_{f'}(s,v)$. נחלק למקרים -

א. אם $f(v,u) < c(v,u)$ אזי הקשת (v,u) קיימת גם ב-G_f. ולכן

$$\delta_f(s,u) \le \delta_f(s,v) + 1 \le \delta_{f'}(s,v) + 1 = \delta_{f'}(s,u)$$

בסתירה לכך ש-$\delta_f(s,u) > \delta_{f'}(s,u)$.

ב. אם $f(v,u) = c(v,u)$ אזי $(v,u) \notin E_f$ כלומר בהכרח השיפור שעשינו עבר בקשת (u,v) - בכיוון ההפוך ל-v,u. כיוון שהשיפור נעשה על פני מסלול p' שהוא קצר ביותר מ-s ל-t הרי כל תת מסלול שלו הוא קצר ביותר ובפרט הקשת (u,v) היא על מסלול קצר ביותר מ-s ל-u ב-G_f. לכן

$$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) - 1 \le \delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) - 1 < \delta_{f'}(s,u)$$

ושוב בסתירה להנחתנו כי $\delta_f(s,u) > \delta_{f'}(s,u)$.

מסקנה 2: תהי f' זרימה המתקבלת מזרימה f על ידי שיפור על גבי מסלול באורך קצר ביותר מ-s ל-t ב-G_f. אזי, לכל $u \in V$ מתקיים $\delta_f(u,t) \le \delta_{f'}(u,t)$

למה 13: תהי f' זרימה המתקבלת מזרימה f ע"י שיפור על גבי מסלול באורך קצר ביותר מ-s ל-t ב-G_f. אם $\delta_f(s,t) = \delta_{f'}(s,t)$ אזי כל מסלול קצר ביותר מ-s ל-t ב-$G_{f'}$ הוא גם מסלול קצר ביותר מ-s ל-t ב-G_f. (כלומר, אם יש שוויון שכזה אזי לאחר השיפור לא נוצרו מסלולים קצרים ביותר חדשים)

הוכחה: נגדיר מושג חדש של קשתות חדשות בגרף - קשת (v,u) היא קשת חדשה אם ורק אם (u,v) הייתה ב-G_f ומסלול השיפור כלל אותה. כיוון שמסלול השיפור הוא מסלול מאורך קצר ביותר מובטח כי $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$.

יהי P מסלול קצר ביותר מ-s ל-t ב-$G_{f'}$. נניח בשלילה כי P לא נמצא ב-G_f. אזי P בהכרח מכיל קשת חדשה (ייתכן שיותר מאחת). תהי (v,u) קשת חדשה שהיא במסלול P.

לפי למה 1 מתקיים $\delta_{f'}(s,v) \ge \delta_f(s,v)$ ולפי מסקנה 2 נקבל כי $\delta_{f'}(u,t) \ge \delta_f(u,t)$. כיוון ש-$P$ מסלול קצר ביותר מ-s ל-t ב-$G_{f'}$ ו-$(v,u) \in P$ אזי

$$\delta_{f'}(s,t) = |P| = \delta_{f'}(s,v) + 1 + \delta_{f'}(u,t)$$

מצד שני כיוון ש-(u,v) היא קשת על מסלול השיפור שהוא מסלול מאורך קצר ביותר ב-G_f מתקיים כי $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$. ולכן:

$$\delta_{f'}(s,t) = |P| = \delta_{f'}(s,v) + 1 + \delta_{f'}(u,t) \ge$$

$$\delta_f(s,v) + 1 + \delta_f(u,t) = \delta_f(s,u) + 1 + 1 + \delta_f(u,t) =$$

$$\delta_f(s,t)+2>\delta_f(s,t)$$

וקיבלנו $\delta_{f'}(s,t)>\delta_f(s,t)$ בסתירה לכך שהם שווים.

נשים לב כי כאשר הזרימה f' מתקבלת מזרימה f ע"י שיפור של מסלול שיפור P_f מאורך קצר ביותר, אזי מסלול זה P_f לא יכול להיות קיים גם ב־$G_{f'}$ כיוון שלפחות אחת מקשתותיו נהיית רוויה. תובנה זו מובילה ללמה הבאה ־ שתאפשר לנתח את זמן הריצה של אדמונס קארפ:

למה 14: תהי G רשת זרימה ו־f זרימה כלשהי. נתבונן באלגוריתם אשר משפר על גבי מסלולים מאורך קצר ביותר מ־s ל־t רק כל עוד אורכם הוא $\delta_f(s,t)$. אזי, מרגע שקשת (u,v) נהיית רוויה ע"י האלגוריתם, קשת זאת לא תהיה בשימוש על ידי אף מסלול שיפור אחר במהלך ריצת האלגוריתם. (הוכחה זהה ללמה 13).

כעת, נסתכל על ריצת האלגוריתם אדמונס קארפ, ונסתכל על כל מסלול השיפור שאורכם ℓ. נקרא לאיטרציות ששיפרו אותם: הפאזה ה־ℓ של האלגוריתם.

כלומר: **הפאזה ה־ℓ באלגוריתם של Ek היא סדרת האיטרציות שבהן אורך המסלול הקצר ביותר הוא ℓ קשתות.** פאזה יכולה להיות ריקה.

כל מסלול שיפור בפאזה ה־ℓ ניתן לשייך לקשת אחת (לפחות) אותה הוא הפך לרוויה. לפי הלמה, מובטח שכל קשת תשוייך למסלול אחד בפאזה ה־ℓ לכל היותר. ולכן סה"כ בפאזה ה־ℓ יכולות להיות לכל היותר $|E|$ איטרציות.

מסקנה 5: יש לכל היותר $|E|$ איטרציות בכל פאזה. (בכל איטרציה בפאזה משפרים לפחות אחת, ולפי למה 14 לא משתמשים בה שוב ולכן לכל היותר במקרה הגרוע ישנם $|E|$ איטרציות פר פאזה).

בנוסף, כיוון שיש לכל היותר $|V|-1$ מרחקים אפשריים של s ו־t, מס' הפאזות הינו $O(|V|)$. מכאן סה"כ מס' האיטרציות של האלגוריתם הינו לכל היותר $O(|E|\times|V|)$. כמו כן, כל איטרציה דורשת הרצת BFS כפי שכבר אמרנו, שעלותה $O(|E|)$ ונקבל את סיבוכיות זמן הריצה: $O(|E|^2|V|)$.

נשים לב כי הנכונות של פורד פלקרסון נכונה גם כאן, לכן תמיד נוכל להריץ במקביל את האלגוריתם הזה ואת האלגוריתם הרגיל ולקחת את המינימום מבניהם.

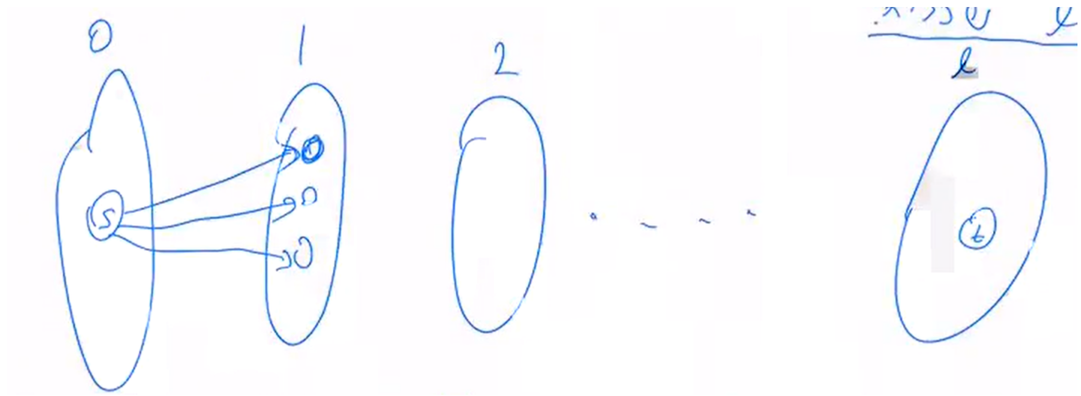
0.2 גרף השכבות

באלגוריתם של דיניץ' יש עדיין $O(|V|)$ פאזות. כל פאזה תעלה סה"כ $O(|V|\times|E|)$ זמן. ואז זמן הריצה יהיה $O(|V|^2|E|)$.

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון עם קודקוד מקור s וקודקוד יעד t, נסמן ב־ℓ את $\delta(s,t)$ (מס' הקשתות במסלול הקצר ביותר). נגדיר באמצעותו את גרף השכבות, בו יש $\ell+1$ שכבות, ובשכבה ה־i יהיו כל הקודקודים $u\in V$ כך ש־$\delta_f(s,u)=i$ וגם u נמצא על מסלול קצר ביותר מ־s אל t. (כלומר, הוא תת מסלול של מסלול קצר ביותר).

סה"כ, נקבל את השכבות $0,1,......,\ell$, נשים לב כי בהכרח בשכבה 0 ישנו את s ורק את s. כמו כן, בהכרח בשכבה ℓ ישנו את קודקוד t ורק אותו שכן $\ell=\delta(s,t)$ לפי הגדרה. שכן, נב"ש שישנו קודקוד אחר $x\in\ell$ שאינו t, אזי אורך המסלול הקצר ביותר מ־s אל x הוא ℓ וכן אם הוא שם הוא חלק ממסלול קצר ביותר מ־s אל t, בסתירה כי המסלול הקצר ביותר שהוא חל בו אל t הוא באורך $\ell+1$, ואז בהכרח זה גורר קיום שכבה $\ell+1$ בסתירה.

כך נראה גרף שכבות:



הקודקודים שנכנסים אל ℓ הם קודקודים מהשכבה $\ell - 1$ שנמצאים על המסלול הקצר ביותר בדרך אל t באורך $\ell - 1$ ואם נוסיף את הקשת שאיתה הם נכנסים אל ℓ אזי נקבל מסלול קצר ביותר באורך $\ell = \delta(s,t)$ בדיוק.

הקשתות בין השכבות הן קשתות שנמצאות על איזשהו מסלול קצר ביותר מs אל t.

נשים לב כי **לא כל הקודקודים נמצאים בגרף השכבות** - רק קודקודים שנמצאים על קשתות שנמצאות על אחד מן המסלולים הקצרים ביותר מs אל t. באופן דומה, לא כל הקשתות נמצאות בגרף השכבות אלא רק הקשתות שבאחד המסלולים הקצרים ביותר.

צומת u **נמצא בשכבה** j **באשר** i $0 \le j \le i \iff \delta_f(s,u) = j \wedge \delta_f(u,t) = i - j$. **וכן קשת** (u,v) **בגרף** L_i **באשר** $0 \le j \le i - 1 \iff$ **אם** $u \in L_{i,j}$ **וכן** $v \in L_{i,j+1}$

הרעיון באלגוריתם של דיניץ, יהיה בתחילת כל פאזה לבנות גרף שכבות L מG_f.

נזכר מהי פאזה - הסתכלנו על ריצת האלגוריתם אדמונס קארפ, וכן הסתכלנו על כל מסלולי השיפור שאורכם ℓ (יתכנו כמה כאלו). נקרא לאיטרציות ששיפרו אותם: הפאזה הℓ של האלגוריתם. כלומר: הפאזה הℓ באלגוריתם של Ek היא סדרת האיטרציות שבהן אורך המסלול הקצר ביותר הוא ℓ קשתות. פאזה יכולה להיות ריקה. **ובקצרה: בכל איטרציה אנחנו מוצאים מסלול מגדיל באמצעות** BFS **המסלול הקצר ביותר יש לו אורך** d**, כל עוד האורך הזה לא משתנה - אנחנו באותה פאזה ברגע שהאורך גדל** $(d \to d+1)$ **- פאזה חדשה מתחילה.**

לפי למה 4, שבתחילת כל פאזה, בG_f נמצאים כל המסלולים הקצרים ביותר שהאלגוריתם ימצא תוך כדי הפאזה. לכן, לפי ההגדרה של L: גרף השכבות L מכיל את כל המסלולים הקצרים ביותר מs אל t בG_f.

בתחילה אנו בונים את גרף השכבות, לוקחים את G_f ובונים את גרף השכבות. כמה עולה לבנות את גרף השכבות? **זמן הבניה של גרף השכבות הוא** $O(|V| + |E|) = O(|E|)$ **- כי יש קשירות.** כיצד? מריצים BFS מs, ומריצים BFS מt על G^T. כעת, לפי טענה שקשת (u,v) נמצאת במסלול קצר ביותר אמ"מ $\delta(s,t) = \delta(s,u) + 1 + \delta(v,t)$, נוכל לבדוק לכל $(u,v) \in E$ האם מתקיים השוויון ואם כן היא על מסלול קצר ביותר מs אל t ונוסיף אותה לגרף השכבות. סה"כ בניית גרף השכבות תעלה $O(|E| + |V|)$, אך $|V| = O(|E|)$ לכן סה"כ $O(|E|)$.

0.3 מציאת מסלול

כיצד מוצאים מסלול קצר ביותר בעזרת גרף השכבות?

מתחילים מs שבשכבה 0, ואנו יודעים כי כל קשת מs תוביל אותנו לקודקוד שנמצא בשכבה הראשונה. בדומה, בשכבה 1 לא משנה איזה קשת נבחר נעבור לקודקוד בשכבה השניה. באופן כללי, אם אנו בשכבה הi, וישנו קודקוד v_i, אנו יודעים כי גם אם ישנם הרבה קשתות מהשכבה הi לשכבה ה$i+1$, לא משנה איזה קשת נבחר היא תמיד נמצאת על מסלול קצר ביותר כלשהו מs אל t. לפי הבניה של L, כל קשת $e \in L$ נמצאת על מסלול קצר ביותר מs אל t.

לכן, בחירה של קשת שרירותית שיוצאת מקודקוד u בשכבה הi בהכרח תוביל לקודקוד שנמצא בשכבה ה$i+1$.

לכן, האלגוריתם למציאת מסלול קצר ביותר כלשהו מs לt מאוד פשוט:

א. נאתחל את $s \to u$. כל עוד $u \neq t$ בחר קשת שרירותית שיוצאת מu, (u,v)

ב. נוסיף את (u,v) למסלול

ג. ועדכן $u = v$ וחזור לשלב א'.

ד. לבסוף, החזר את המסלול.

כמה זמן לוקח למצוא מסלול קצר ביותר מs לt שכזה? נראה כי אנחנו בוחרים כל אחת מהקשתות, לכן הזמן שאני משקיע בכל שכבה הינה $O(1)$ זמן. אם כן, זמן הריצה הוא מס' השכבות, אם $\ell + 1$ הוא מס' השכבות זמן הריצה יהיה $O(\ell)$.

אז מה קורה בתחילת האלגוריתם? בשלב הראשון של הפאזה, בנינו את גרף השכבות L שיעלה $O(|E|)$ זמן.

כעת, נחפש מסלול קצר ביותר מs אל t בL. אנו יודעים כי מסלול קצר ביותר מs אל t בL הוא מסלול קצר ביותר גם בG_f. זה יעלה $O(\ell) = O(|V|)$ כי אורך המסלול הוא לכל היותר $|V| - 1$.

הרעיון יהיה, להמשיך לחפש מסלולים קצרים ביותר בL. אך - ישנה בעיה. הבעיה היא שלאחר שמצאנו את המסלול הראשון, חלק מהקשתות נהיות רוויות וצריכות להמחק מגרף השכבות L. יתכן גם שצריכים למחוק קודקודים מסווימים מהגרף. למה זה חשוב לנו? אמרנו שאנחנו יכולים לבחור קשת שרירותית בעת שמצאנו מסלול קצר ביותר - למה אמרנו שניתן לבחור שרירותית? כי לא משנה איזה קשת נבחר, תמיד בצד השני יהיה קודקוד שמגיעים אליו ומשם ממשיכים, אך אם מחקנו קשת באיטרציה הקודמת יתכן (מאוד) שהגישה של לקחת שרירותית לא תעזור לנו ואנחנו נתקע - כי הקשת השרירותית אליה הלכנו, היא קשת שממנה אין להתקדם (היה באיטרציה הקודמת דרך להתקדם, אך מחקנו את הקשת).

לכן, עלינו לפתח מנגנון שיבטיח שגם לאחר מציאת מסלול, גרף השכבות יהיה גרף מעודכן שעודנו גרף שכבות (ואז כן נוכל לקחת קשת שרירותית).

0.4 עדכון גרף השכבות

נסתכל על קשת $u \to v$ שצריכה להמחק מהגרף. מה יכול לקרות?

מבחינת u, יתכן שישנה קשת נוספת שיוצאת מu , למשל (u,x) - אז המחיקה של (u,v) לא משפיעה על u כי באיטרציה הבאה ישנן דרכים אחרים להתקדם למשל דרך x. אך, מה אם הקשת היחידה שיוצאת מu היא (u,v)? אם נמחוק אותה כעת - זה אומר שאין לu איך להתקדם אל t בהמשך כי אולי יש הרבה קשתות שנכנסות אליו אך אין קשתות שיוצאות ממנו. הקושי בזה הוא שבשלב לפני u, אם נבחור בקשת אל u שרירותית אנחנו נתקע כי מu אין איך להתקדם.

במצב כזה, אם $deg_{out}(u) = 0$, נרצה למחוק את u מL ולמחוק את כל הקשתות (w,u) שנכנסות אל u. ומה, אם היה קודקוד x שיש לו קשת (x,u), וכעת מחקנו את u, והדרך היחידה לצאת מx הייתה דרך הקשת (x,u), כעת מחקנו את (x,u) כי היא נכנסת אל u ומחקנו את u - אז כעת אנחנו צריכים למחוק גם את x והקשתות שיוצאות ממנו: ומכאן שזה יכול להיות תהליך ארוך מאוד, כל המחיקה הזו ברקורסיה שנפטרת מכל המבויים הסתומים.

מה באשר לv בקשת $u \to v$ שמחקנו? יתכן כעת שהקשת היחידה שנכנסת אל v הייתה (u,v), במצב זה יתקיים כי $deg_{in}(v) = 0$, ולפי הגדרת גרף השכבות נצטרך למחוק את v ואת צלעותיו.

נגדיר זאת פורמלי:

הגדרה:

1. מבוי סתום הוא מצב של קודקוד $t \neq v$ כך ש$deg_{out}(v) = 0$.
2. מבוי סתום הוא מצב של קודקוד $s \neq v$ כך ש$deg_{in}(v) = 0$.

עדכון של L בעקבות מחיקה של קשת: כל עוד קיים מבוי סתום כלשהו, מחק אותו ואת כל קשתותיו.

כמה זמן לוקח הטיפול במבוי סתום?

הבחנה: כל קודקוד נהיה מבוי סתום פעם אחת בדיוק לכל היותר בפאזה. כיוון, שברגע שנמחוק אותו הוא לא יחזור להיות מבוי סתום. בנוסף, כל קשת נמחקת לכל היותר פעם אחת.

מכאן שסה"כ ישנם $O(|V|)$ קודקודים שנמחקו ו$O(|E|)$ קשתות שנמחקו. אם כן, ההחלטה כיצד למחוק היא לוקאלית - אין צורך בסריקה נוספת של הגרף בעת שמצאנו מבוי סתום, אנחנו מוחקים את השכנים ומי שקרוב אליו, אין לנו סיבה לסרוק את כל הגרף לחפש את הבעיה הבעיה לוקאלית.

לכן, סה"כ עלות כל העדכונים של L בפאזה אחת עולה $O(|E| + |V|) = O(|E|)$ זמן.

0.5 האלגוריתם של $Dinic$

להלן האלגוריתם של דיניק:

```
DINIC(G = (V, E), s, t, c)
    initialize f(u, v) = 0 for all u, v ∈ V
    while there exists a path from s to t in G_f
        build layer graph L
        while there exists a path P from s to t in L
            augment f on P
            update L by continuously removing dead-ends
```

הסבר על האלגוריתם:

בדומה לשיטה של פורד-פרקלסון, מאתחלים בהתחלה את הזרימה להיות $f = 0$. ההבדל בין האלגוריתמים של פורד-פרקלסון לשל דיניץ' יהיה במציאת מסלול השיפור שכאן תהיה מאוד מסויימת.

לאחר מכן, נכנסים ללולאת $while$ כל עוד ישנו מסלול מs לt בG_f (בדיקה באמצעות BFS) , בדומה לתנאי של EK.

בכל פאזה של האלגוריתם:

א. בונים גרף שכבות L

ב. מתחילים איטרציה: כל עוד קיים מסלול P מs אל t בL:

1. אם מצאנו - משפרים את f על המסלול. (זהה לתהליך שקורה אצל פורד פרלקסון). מבצעים את הפעולות הבאות -

$c_f(P) \leftarrow \min_{(u,v)\in P}\{c_f(u,v)\}$

for each edge $(u,v) \in P$

$\quad f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(P)$

$\quad c_f(u,v) \leftarrow c_f(u,v) - c_f(P)$

$\quad f(v,u) \leftarrow f(v,u) - c_f(P)$

$\quad c_f(v,u) \leftarrow c_f(v,u) + c_f(P)$

$\quad$ update E_f

2. לאחר ששיפרנו ־ מעדכנים את L כמו שאמרנו קודם לכן: מורידים את המבויים הסתומים.

נכונות האלגוריתם ־ נובעת ישירות מפורד פרקלסון. נשים לב שלפי אדמונס קארפ יהיו לנו לכל היותר $|V|-1$ גרפי שכבות.

מה באשר לזמן הריצה?

האתחול עלותו $O(|V|^2)$. ישנם $O(|V|)$ פאזות ולכן שלב ב' יתבצע $O(|V|)$ פעמים. כל שלב שכזה:

בניית גרף שכבות עלותו $O(|E|)$

לאחר מכן נכנסים ללולאת $while$ של איטרציות. כל איטרציה עולה לבדיקה האם קיים מסלול ב$O(|V|)$ + שיפור על המסלול ב$O(\ell)$ זמן, וכן עדכון גרף השכבות עלותו $O(|E|)$ על כל הפאזה (!) ־ לא כל איטרציה.

כמה איטרציות ישנן בכל פאזה? נניח שמס' זה הוא k. אם ישנן k איטרציות בפאזה ־ אזי כל פאזה תעלה $O(|E|+k\times\ell)$ באשר ℓ הוא מס' השכבות כאשר $\ell = O(|V|)$. כמו כן, ישנם $O(|V|)$ פאזות, ונקבל כי זמן הריצה הוא:

$$|V|\times(|E|+k\times\ell) \le |V|\times(|E|+|E||V|) = O(|V|^2|E|)$$

כיוון ש$\ell \le |V|-1$ וכן $k \le |E|$ (שכן ברגע שקשת נהיית רוויה בפאזה מסוימת, היא לעולם לא תהיה חלק ממסלול שיפור נוסף. לכן בהכרח ישנם לכל היותר $|E|$ מסלולי שיפור בכל פאזה ־ איטרציות).

0.6 האלגוריתם של $Hopcroft - Karp$

קלט: רשת זרימה עם פונקציית קיבול על הצמתים. נגדיר פונקציה $b: V\backslash\{s,t\} \to \mathbb{R}^+$, ונגדיר לכל צומת $b(u)$ את הקיבול על הצומת.

כלומר, נניח ויש לנו קודקוד u עם קיבול 7, ונכנסות אליו קשתות עם קיבול 6 ו10 בהתאמה, נוכל להזרים למשל 3 מתוך 6 ו4 מתוך 10 וכך אכן הוזרם 7.

פלט: כיצד נפתור זרימה מקסימלית באשר ישנו קיבול על הקודקודים?

מה שנעשה יהיה להגדיר גרף חדש:

$$G' = (V', E')$$

$$V' = \{S_{out}, S_{in}\} \cup \{u_{in}, u_{out} | u \in V\}$$

באשר, כל צומת תפוצל ל2 צמתים: u_{in} וu_{out}, באשר הקיבול על הקשת $u_{in} \to u_{out}$ יוגדר להיות $b(u)$. כעת, כל מה שנכנס אל u כלומר בגרף החדש אל u_{in}, יוכל לעבור דרך הקשת $u_{in} \to u_{out}$ עם אילוץ הקיבול המתאים.

כמו כן, נגדיר:

$$C'(u_{in}, u_{out}) = b(u), C'(u_{out}, v_{in}) = c(u, v)$$

מתקיים,

$$|V'| = 2|V| - 2$$

$$|E'| = |E| + |V| - 2$$

הסבר: נראה כי $|V'| = 2|V| - 2$ כי הכפלנו לכל צומת את הצומת עם צומת תואם, חוץ משני הצמתים s, t. וכן: $|E'| = |E| + |V| - 2$ שכן הקשתות בגרף המקורי עודם קיימות, וכן נוספו $|V| - 2$ קשתות - קשת לכל קודקוד בגרף המקורי, פרט לשני הקודקודים s, t.

מסקנה: בגרף החדש G' מתקיים $O(E') = O(E)$ וכן $O(V') = O(V)$.

באופן ישיר ממסקנה זו, נראה כי אם נריץ את דיניץ' על גרף G' , שכעת הוא גרף עם קיבולות על הקשתות בלבד, נקבל זמן ריצה על גרף זה של $O(|V|^2|E|)$. זה מתבסס על הטענה הבאה:

טענה: זרימה מקסימלית בגרף G' היא זרימה מקסימלית בגרף G עם הקיבולות על הצמתים.

תוספת: אם כן, אם הקיבולים שלמים ו$\forall_{u \in V \setminus \{s,t\}} b(u) = 1$, אזי נוכל למצוא אלגוריתם טוב יותר, אותו נרצה לפרט כעת.

למה 17. אם אורך המק"ב בG מs אל t הוא x, אזי חסם על הזרימה הגדולה ביותר הוא לכל היותר $\frac{|V|-2}{x-1}$.

הוכחה שאינה פורמלית (**בכיתה לא ניתנה הוכחה, הוכחה שלי**). מהי הזרימה שלנו כעת? אם לכל קודקוד ישנו קיבול $b(u) = 1$, אזי כל זרימה היא אוסף של מסלולים זרים בצמתים. ומכאן, שכל קודקוד יכול להשתתף במסלול אחד בלבד. כמה קודקודים שורף כל מסלול? מסלול באורך x עובר דרך $x - 1$ קשתות, כך: $s \to u_1 \to ... \times u_{x-1} \to t$, אלו $x - 1$ קודקודים פנימיים, ולכן כל מסלול שורף $x - 1$ קודקודים שלא נוכל להשתמש בהם במסלולים אחרים. ישנם $|V| - 2$ קודקודים פרט לs, t ולכן אם יש לנו t מסלולים, כל מסלול שורף $x - 1$ קודקודים והמסלולים זרים אזי מתקיים

$$t \times (x - 1) = |V| - 2$$

ובמילים אחרות,

$$t = \frac{|V|-2}{x-1}$$

מכאן, שערך הזרימה הוא בדיוק מס' מסלולים זה, שכן בכל מסלול זורם ערך של 1. כנדרש.

נשים לב כי דיניץ' מקרה פרטי של פורד פרקלסון ולכן החסם של $O(|f^*||E|)$ תקף. אם כן, $|f^*| \leq |V|$ כיוון שברשת זו הזרימה יכולה להיות לכל היותר $|V|$, ומכאן לפי דיניץ' הממומש את אדמונס קארפ זמן הריצה הינו $O(|E||V|)$. אם כן - נרצה לשפר.

מה קורה בפאזה של דיניץ'? בעת שמצאנו מסלול משפר, נמחקה קשת אחת. כאן, נמחקות יותר קשתות. כל מסלול שנבחר יהיה מהצורה:

$$s \to .. \to .. \to .. \to t$$

כל קשת בקיבול 1 בין (u_{in}, u_{out}) תמחק לאחר הזרמה באיטרציה. ולכן - כל המסלול עצמו נמחק באיטרציה הזו (!). דרגה יוצאת של $u_{in} = 0$ ודרגה נכנסת של $u_{out} = 0$ ולכן הצמתים נמחקים וגם הקשתות שנוגעות בהם ומכאן שכל המסלול ימחק. כלומר: בדיניץ' רגיל, סך הזמן שלוקח בפאזה הינו $O(|V||E|)$ שכן בדיניץ' רגיל אנו מזרימים דרך מסלול, רק הקשת עם הקיבול הכי קטן נשרפת לגמרי ושאר הקשתות נשארות עם קיבול שיורי. הן יכולות להשתתף בהרבה מסלולים לאורך הפאזה. לכן פאזה אחת עולה שם $O(|E||V|)$. אם כן, כאן כל הקשתות במסלול נשרפות לגמרי - ולכן כל המסלול עצמו נמחק. המשמעות היא שכל קשת יכולה להשתתף במסלול אחד בדיוק בפאזה, ולכן כל קשת נבדקת פעם אחת בדיוק בפאזה - מה שעולה לפאזה $O(|E|)$. אם כן, מס' הפאזות הינו $O(|V|)$, ולכן סה"כ זמן הריצה יהיה $O(|V||E|)$. לכאורה - לא שיפרנו כלום, הרי: האלגוריתם של פורד פרקלסון עובד ב$O(|E||V|)$ כפי שהסברנו. אז מדוע התעכבנו?

הערה. חשוב מאוד לשים לב - בגלל הגדרת הגרף, המסלולים הינם זרים. ולכן מחיקת קשת משפיעה על מסלול כולו, וכאן בדיוק קשת תהיה פעם אחת בפאזה ואז לא תהיה שוב. בניגוד לדיניץ' ששם היא יכולה להופיע שוב.

הרעיון שיעבוד

נרצה להריץ את דיניץ' רק על חלק מהפאזות. נסמן את מס' הפאזות הראשונות שנריץ כP. אם כן, זמן הריצה יהיה $O(P \times |E|)$ לחלק זה של האלגוריתם.

מה קורה לאחר P פאזות? אורך המק"ב מs אל t בG_f, הוא לפחות P. מדוע? בכל פאזה, המסלול הקצר ביותר גדל (לפי למה 11), ולכן אורך המק"ב יהיה לפחות p. אם כן, כמה זרימה נותרה לנו להזרים? לפי למה 17, אם אורך המק"ב הכי גדול הוא x אזי נותרו להזרים לכל היותר $O(\frac{|V|}{p})$ יחידות זרימה. כלומר, בG_f כעת מתקיים $|f^*| \leq \frac{|V|}{p}$. אם כן - למה שלא נריץ כעת את פורד פרקלסון? ראינו כי זמן הריצה שלו יהיה $O(|f^*||E|)$, ולכן אצלנו חלק זה יעלה $O(\frac{|V||E|}{p})$.

אם כן, זהו האלגוריתם. מה זמן הריצה שלו? ובכן - זה תלוי בP עצמו! נגדיר את זמן הריצה כפונקציה של P, כדקלמן:

$$T(P) = O(FK) + O(Dinic) = P \times |E| + \frac{|V| \times |E|}{P}$$

אם כן, נרצה למצוא את זמן הריצה המינימלי, כלומר את P עבורו $T(P)$ מקבלת ערך מינימלי. ולכן, נגזור:

$$T'(P) = |E| - \frac{|V| \times |E|}{P^2} = 0$$

$$P^2 = |V| \Longrightarrow P = \sqrt{|V|}$$

וזהו אכן ערך מינימלי. אם כן, נציע את האלגוריתם הבא:

$Hopcroft - Karp(G = (V, E), b, c, s, t)$:

א. נגדיר את הגרף החדש G' כפי שתואר לעיל.

ב. נריץ את דיניץ' על $\sqrt{|V|}$ פאזות ראשונות.

ג. נריץ את פורד פרקלסון על שאר הפאזות.

זמן הריצה: $O(\sqrt{|V|} \times |E|)$.

שימוש טוב. כפי שנראה בדוגמה מטה, ניתן לבצע רדוקציה מזרימת מקסימום לזיווג מקסימום בגרף דו צדדי, ע"י הוספת קיבולות של 1 לצמתים.

0.7 זיווג מקסימום בגרף דו צדדי

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. תת קבוצה $M \subseteq E$ היא זיווג (או התאמה) של G אמ"מ $deg_M(v) \leq 1$ לכל $v \in V$ כאשר $deg_M(v)$ מסמל את הדרגה של v בגרף המושרה ע"י M: $G' = (V, M)$. קודקוד v שדרגתו $deg_M(v) = 1$ נקרא קודקוד מזווג, ואילו קודקוד v שדרגתו $deg_M(v) = 0$ נקרא קודקוד לא מזווג.

הגדרה: נאמר כי M זיווג מקסימלי - אם לא ניתן להוסיף לו קשתות. כלומר, לא קיים $M \subset M'$.

הגדרה: נאמר כי M זיווג מקסימום - אם לכל זיווג M' מתקיים $|M'| \leq |M|$.

אלגוריתם פשוט למציאת זיווג מקסימלי: מתחילים עם הזיווג הריק, עוברים על כל קשת $(v, u) \in E$. אם שני הצמתים פנויים מוסיפים את הקשת, אחרת לא מוסיפים. אלגוריתם חמדני ופשוט מאוד שירוץ בזמן לינארי.

בעיית זיווג מקסימום היא בעיית NP. לכן, נתמקד בבעיית זיווג מקסימום בגרף דו צדדי.

נרצה לתאר **רדוקציה מבעיית זיווג מקסימום לבעיית זרימת מקסימום בגרף**.

יהי $G = (L, R, E)$ גרף לא מכוון דו צדדי. נבנה רשת זרימה $G' = (V', E')$ באופן הבא:

$$V' = V \cup \{s, t\}$$

$$E' = \{(s, u) | u \in L\} \cup \{(u, v) | (u, v) \in E, u \in L, v \in R\} \cup \{(v, t) | v \in R\}$$

כמו כן, נגדיר את הקיבולת $\forall (u,v) \in E'$ להיות $C(u,v) = 1$ ולכל $(u,v) \notin E'$ כמובן $C(u,v) = 0$.

למה 8. אם M הוא זיווג בG אזי קיימת בG' זרימה f בעלת ערכים שלמים שערכה $|f| = |M|$.
ומצד שני, אם f היא זרימה בערכים שלמים בG' אזי קיים בG זיווג M כך ש$|M| = |f|$.
הוכחה:

נוכיח צד ראשון. נניח כי M זיווג בG. נסתכל על הזרימה בה מכוונים את כל הקשתות בM משמאל לימין, בנוסף לכל קודקוד $u \in L$ שמזווג ע"פ M נשים 1 בזרימה על הקשת (s,u) ובאופן דומה לקודקודים מזווגים $v \in R$ נשים 1 בזרימה על הקשת (v,t). בצורה זו הזרימה תשתמש בכל הקשתות המתאימות לM ורק בהם. הזרימה נטו דרך החתך $(\{s\} \cup L, \{t\} \cup R)$ היא בדיוק $|M|$ כי כל הקשתות 1 ולכן $|f| = |M|$.

בכיוון ההפוך, נסתכל על זרימה בשלמים f המוגדרת על רשת G' ונגדיר:

$$M = \{(u,v) | f(u,v) > 0, u \in L, v \in R\}$$

נשים לב כי לכל $u \in L$ נכנסת רק קשת אחת בG' וקיבולה 1 ולכן כיוון שהזרימה בשלמים מובטח שהזרימה שנכנסת אל u היא אפס או אחד. משימור הזרימה, אנו יודעים כי קיבולת הזרימה הנכנסת אל u היא 1 אמ"מ קיבול הזרימה היוצאת מu היא 1 וכיוון שכל קשת היוצאת מu מגיעה לקודקוד כלשהו בR, אנו יודעים שהזרימה העוברת דרך u היא 1 אמ"מ קיים $v \in R$ כך ש$f(u,v) = 1$. לכן הדרגה של u בM היא לכל היותר 1. באופן סימטרי הדרגה של כל $v \in R$ היא אחד לכל היותר, לכן זה אכן זיווג. מכאן,

$$|M| = f(L,R) = f(L,V') - f(L,L) - f(L,s) - f(L,t) = 0 - 0 + f(s,L) - 0 = f(s,L) =$$

$$f(s,V') - f(s,R) - f(s,t) = f(s,V') - 0 - 0 = f(s,V') = |f|$$

הלמה הקודמת טוענה על שקילות בין זיווג לזרימות בערכים שלמים. כעת נטען, כי לרשת זרימה עם קיבולות בשלמים קיימת זרימת מקסימום בה הזרימה העוברת על כל קשת היא ערך שלם.

למה 9. אם לכל $(v,u) \in E$ מתקיים $c(u,v) \in \mathbb{N}$ אזי קיימת זרימת מקסימום בה לכל $(u,v) \in V \times V$ מתקיים $f(u,v) \in \mathbb{Z}$.

הוכחה: זרימת המקסימום שנמצאת ע"י שיטת פורד פרקלסון היא כזאת וזאת באינדוקציה על האיטרציות, והבחנה שכל מסלול שיפור הוא בערכים שלמים ושסכום של ערכים שלמים הוא ערך שלם בשל סגירות לחיבור וחיסור.

לכן, כיוון שיש התאמה בין זיווגים לזרימות, בפרט זרימת מקסימום בG' מתאימה לזיווג מקסימום בG ולהפך. מכאן, נוכל למצוא זיווג מקסימום בG ע"י מציאת זרימת מקסימום בG'.

זמן הריצה: לפי שיטת פורד פרקלסון זמן הריצה הינו $O(|f^*||E|)$, כיוון שאצלנו $|f^*| = |M| \leq |L| \leq |V| = O(|V|)$ זמן הריצה הינו $O(|E||V|)$.