מבנים בדידים ־ סיכום הרצאות למבחן

20 בינואר 2026

הסיכום נכתב במהלך ההרצאות של סמס א' שנת תשפ"ו 2026, וייתכן שנפלו טעויות בעת כתיבת הסיכום ־ אז על אחריותכם.

גיא יער־און.

תוכן עניינים

1 סימונים בקורס

1. הסימון B^A הינו כל הפונקציות $f : A \to B$.
2. בקורס, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ כאשר 0 הוא בטבעיים.
3. הסימון $\mathbb{N}_{\geq 1}$ הוא המספרים הטבעיים, ללא אפס. כלומר כל הטבעיים שגדולים־שווים לאחד.
4. הסימון G/e משמעותו $G/e = (V, E/\{e\})$
5. הסימון G/v משמעותו $G/v = (V/\{v\}, E/\{e|v \in e\})$

2 יחסים

יהיו קבוצות A, B. R נקרא יחס מA לB אם $R \subseteq A \times B$. בהינתן יחס R מA לA נאמר כי R הוא יחס על A.

יחס נקרא **רפלקסיבי** אם $\forall a \in A : (a, a) \in R$
יחס נקרא **סימטרי** אם $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R$
יחס נקרא **טרנזטיבי** אם $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R$
יחס נקרא **אנטי סימטרי** אם $\forall (a, b) \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Longrightarrow a = b$

2.1 יחס שקילות

הגדרה: יהי יחס R. R הוא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזטיבי.
הגדרה: יהי R יח"ש על A.
1.עבור כל $a \in A$ נגדיר את **מחלקת השקילות** להיות:

$$[a]_R = \{b \in A|(a, b) \in R\}$$

2. נגדיר **את קבוצת המנה** של A תחת R להיות:

$$A/R = \{[a]_R|a \in A\}$$

זו קבוצה של קבוצות מחלקות השקילות.

2.2 יחסי סדר

הגדרה: יהי יחס R. R הוא **יחס סדר חלקי** אם הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזטיבי.

הגדרה: יהי יחס R. R הוא יחס סדר מלא אם הוא יחס סדר חלקי וגם $\forall a,b \in A : aRb \vee bRa$

הגדרה: יהי R יחס סדר על A.

1. נאמר כי $x \in A$ הוא מקסימלי אם $\forall a \in A : (x,a) \in R \Longrightarrow x = a$ (כלומר, היחיד שגדול ממנו - הוא בעצמו)
2. נאמר כי $x \in A$ הוא מינימלי אם $\forall a \in A : (a,x) \in R \Longrightarrow x = a$ (כלומר, היחיד שקטן ממנו - הוא בעצמו)
3. נאמר כי $x \in A$ הוא מקסימום אם $\forall a \in A : (a,x) \in R$
4. נאמר כי $x \in A$ הוא מינימום אם $\forall a \in A : (x,a) \in R$

3 פונקציות

הגדרה: יהי R יחס מקבוצה A לקבוצה B.

א. R נקרא **שלם** אם:

$$\forall a \in A, \exists b \in B : (a,b) \in R$$

ב. R נקרא **חד ערכי** אם:

$$\forall a \in A, \forall b_1, b_2 \in B : (a,b_1) \in R \wedge (a,b_2) \in R \Longrightarrow b_1 = b_2$$

ג. R נקרא **על** אם:

$$\forall b \in B, \exists a \in A : (a,b) \in R$$

ד. R נקרא **חד חד ערכי** אם:

$$\forall b \in B, \forall a_1, a_2 \in A : (a_1,b) \in R \wedge (a_2,b) \in R \Longrightarrow a_1 = a_2$$

הגדרה: יחס R שהוא שלם וחד ערכי, נקרא פונקציה מA לB. במצב זה נהוג לסמן $f : A \to B$, באשר A הוא מקור הפונקציה וB הוא טווח הפונקציה. וכן עבור $(a,b) \in f$ נסמן $f(a) = b$.

הגדרה: תהי פונקציה $f : A \to B$. נגדיר את ה**תמונה** של f להיות:

$$Im(f) = \{f(a) | a \in A\}$$

- $\heartsuit$ - פונקציה היא על $Imf = B \iff$

טענה: יהיו פונקציות $f : A \to B, g : B \to C$
א. $f \circ g$ היא חח"ע $\Leftarrow g$ היא חח"ע
ב. $f \circ g$ היא על $\Leftarrow f$ היא על

טענה: יהיו n פונקציות כדקלמן $f_1 : A_1 \to A_2, f_2 : A_2 \to A_3, ..., f_n : A_n \to A_{n+1}$ חח"ע/על.
אזי $f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2 \circ f_1$ חח"ע/על.

טענה: יהיו A, B קבוצות **סופיות.**
א. אם $|A| \geq |B|$ אזי קיימת פונקציה $f : A \to B$ חח"ע.
ב. אם $|A| \leq |B|$ אזי קיימת פונקציה $f : A \to B$ על.
ג. אם $|A| = |B|$ אזי f חח"ע $\iff f$ על

טענה: תהי $f : A \to B$ פונקציה. אזי, f הפיכה $\iff f$ חח"ע ועל.

4 מבוא לעוצמות

4.0.1 רשימת עוצמות ששווה לזכור

עוצמת הטבעיים $\mathbb{N}$: $\aleph_0$
כל ההבאים מטה שקולים לעוצמה זו -
א. $\mathbb{N}_{\geq 1}$
ב. $E_{ven} = \{n = 2k | k \in \mathbb{N}\}, O_{dd} = \{n = 2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$
ג. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
ד. $\forall n \geq 1 : \mathbb{N}^n$
ה. $\mathbb{Z}$
ו. $\mathbb{Q}$
ז. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

עוצמת הרצף $\mathbb{R}$: א. נשים לב כי א $= 2^{\aleph_0}$.
כל ההבאים מטה שקולים לעוצמה זו -
א. $(0, 1]$
ב. $(0, 1)$
ג. $(1, \infty)$
ד. $P(\mathbb{N})$
ה. $\mathbb{R}^2$
ו. $\mathbb{R}^k$

4.0.2 הגדרות בסיסיות

כיצד נוכל למדוד גודל של קבוצה? למשל, במחלקה ישנם 40 אנשים. זה מס' סופי. אפשר למדוד אותו בקלות. מה לגבי הגודל של $\mathbb{N}$? או $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$? מה עם גודל הקבוצה $\mathbb{C}$?

הגדרה: בהינתן שתי קבוצות A, B נאמר כי הן שקולות עוצמה ונסמן $A \sim B$ אם קיימת בניהן פונקצייה חח"ע ועל $f : A \to B$.

טענה: תהי קבוצה X, נסתכל על כל תתי הקבוצות שלה כלומר $P(X)$. אזי, $\sim$ ("שקולות עוצמה") בתוך תתי הקבוצות, היא יחס שקילות.

כלומר, יהיו $X_1, X_2, X_3 \in P(X)$ אזי

1. $X_1 \sim X_1$ (שקולת עוצמה לעצמה - רפלקסיביות - נבנה את פונקציית הזהות תמיד)
2. אם $X_1 \sim X_2$ אזי $X_2 \sim X_1$ (סימטריות - היא שקולת עוצמה, לכן קיימת פונקצייה חח"ע ועל $X_1 \to X_2$, הפונקציה ההופכית שלה (היא הפיכה) תתאים עבור $X_2 \to X_1$)
3. אם $X_1 \sim X_2$ וגם $X_2 \sim X_3$ אזי $X_1 \sim X_3$ (טרנזטיביות - קיימות $f : X_1 \to X_2, g :$ $X_2 \to X_3$, נגדיר $f \circ g : X_1 \to X_3$ שהיא ההרכבה ולפי בדידה 1, הרכבה של הופכיות היא הופכית בעצמה וסיימנו).

הגדרה: יהיו שתי קבוצות A, B. נאמר כי A קטנה־שוות עוצמה לB ונסמן $A \preccurlyeq B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע.

הגדרה: יהיו שתי קבוצות A, B. נאמר כי A קטנה־לא שוות עוצמה לB ונסמן $A \precnsim B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע וגם $A \nsim B$ (כלומר - הן לא שקולות עוצמה. יש פונקציה חח"ע מ$A \to B$ אבל אין פונקציה חח"ע ועל).

טענה: $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_{\geq 1}$

הוכחה: ההוכחה מתבססת על המלון של הילברט. יהי מלון, עם אנסוף חדרים ובכל חדר ממוקם איש. מגיע אורח חדש. כיצד נמקם אותו? נזיז כל אחד לחדר העוקב, ואז יתפנה החדר הראשון ואליו יכנס האדם החדש. ובאופן פורמלי, תהי $f(n) = n + 1$. המקור שלה היא כל הטבעיים, והטווח הוא $\mathbb{N}_{\geq 1}$, נוכיח כי היא הפיכה ע"י כך שנסתכל על הפונקציה ההופכית שלה $f^{-1}(n) = n - 1$ ונראה כי

$$f \circ f^{-1}(n) = f(f^{-1}(n)) = f(n-1) = n - 1 + 1 = n$$

כלומר, סה"כ $f \circ f^{-1} = I$ כנדרש.

טענה: $\mathbb{N} \sim E = \{0, 2, 4, 6, 8, ..\}$

הוכחה: באופן דומה, תהי $f(n) = 2n$. באשר המקור הוא מספרים טבעיים, אל הטווח שהוא המספרים הזוגיים. קל לראות שהיא הפיכה באמצעות הרכבה עם ההופכית $f(n) = \frac{n}{2}$

$$f \circ f^{-1}(n) = f(f^{-1}(n)) = f(\frac{n}{2}) = 2 \times \frac{n}{2} = n$$

כלומר, סה"כ $f \circ f^{-1} = I$ כנדרש.

טענה: יהיו $a < b, c < d \in \mathbb{R}$. אזי $[a, b] \sim [c, d]$.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה הבאה $f(x) = (x-a) \cdot \frac{d-c}{b-a} + c$. כאשר הרעיון הוא לדמות קו ישר במערכת הצירים, תחום ראשון יהיה $a - b$ בציר האיקס, והתחום השני $c - d$ בציר הוואי, אנחנו נחשב את משוואת הישר מן הנקודות (a, c) אל (b, d). משוואת הישר שנחשב - זוהי הפונקציה המתוארת לעיל.

נשים לב כי הפונקציה מונוטונית (נגזרת חיובית) ורציפה ולכן היא חד ערכית, כמו כן מקיימת $f(a) = c, f(b) = d$ ורציפה ולכן היא גם על. סה"כ היא חח"ע ועל כנדרש.

הערה. באופן דומה יתקיים $(a, b) \sim (c, d)$ וכן $[a, b) \sim [c, d)$ וכן $(a, b] \sim (c, d]$. לא יתקיים $[a, b] \sim (a, b)$

טענה: $(0, 1) \sim (0, 1]$

הוכחה: נסתכל על הפונקציה $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{n-1} & x = \frac{1}{n} \\ x & o.w \end{array} \right\}$, כלומר הפונקציה ממפה את הטור ההרמוני ללא 1, לטור ההרמוני כולל 1. בשאר המספרים - פונקציית הזהות.

יהיו שני מספרים x, y: אם שניהם בטור ההרמוני - נשלחים למקומות שונים. אם אחד בטור ההרמוני והשני לא: השני אכן לא נשאר בהרמוני והאחד שבהרמוני מתקדם למס' הבא. סה"כ חח"ע ועל ולכן ישנה שקילות.

טענה: $(0,1) \sim \mathbb{R}$

הוכחה: נסתכל על הפונקציה $f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}$, נשים לב כי $lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ וכן $lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, וכן הפונקציה הינה מונוטונית יורדת רציפה לכן הפונקציה חח"ע וכן לפי ערך הביניים (והאסימפטוטות) הפונקציה הינה על. סה"כ חח"ע ועל ולכן הפונקציה הפיכה ואכן הולכת מהקטע אל הממשיים.

הערה. דרך אחרת היא להשתמש בפונקציה $f(x) = tanx$ על הקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ומכאן להשתמש בטרנזטיביות: הוכחנו כי כל שני קטעים פתוחים הם שקולי עוצמה, ומכאן מטרזטיביות.

טענה: $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

הוכחה: רעיון ההוכחה יהיה כדקלמן. נסתכל על המטריצה הבאה -

65	76	88	101	115	130	146	163	181	200	220
54	64	75	87	100	114	129	145	162	180	199
44	53	63	74	86	99	113	128	144	161	179
35	43	52	62	73	85	98	112	127	143	160
27	34	42	51	61	72	84	97	111	126	142
20	26	33	41	50	60	71	83	96	110	125
14	19	25	32	40	49	59	70	82	95	109
9	13	18	24	31	39	48	58	69	81	94
5	8	12	17	23	30	38	47	57	68	80
2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67
0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

ננסה ליצור פונקציה שמקבלת זוג סדור וממפה אותו למספר, לכן נחליט כי התא השמאלי התחתון ביותר יהיה $(0,0)$ והתא הימני העליון ביותר יהיה (n,n). כעת נשים לב כיצד נתנייד במטריצה. נתחיל מ$(0,0)$, לאחר מכן נרצה לפנות בנחש ימינה, לתא הבא המתאים $(0,1)$, לאחריו אל התא $(1,0)$ וכך במסלול נחשי לקבל -

כעת נפרמל את ההוכחה.

נגדיר יחס סדר כדקלמן - $(n,m) < (n',m')$ אם $n+m < n'+m'$ או ($n+m = n'+m'$ וגם $m < m'$)

נגדיר את הכלל הבא:

$$f(n,m) = |\{(n',m') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | (n',m') < (n,m)\}|$$

כלומר, הערך המספרי של f יהיה הגודל של קבוצות כל הזוגות במכפלה הקרטזית ש"קטנים" יותר מהזוג הנוכחי ומקדימים אותם בדירוג. נוכיח כי הפונקציה $f(n,m)$ הפיכה.

1. f חח"ע. אם $(n,m) > (n',m')$ אזי בהכרח $f(n,m) > f(n',m')$.
2. f על. הוכחה באינדוקציה שנחסוך כעת.

טענה: יהיו A_1, A_2, B_1, B_2 קבוצות כך ש$A_1 \sim A_2$ וכן $B_1 \sim B_2$. אזי, $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.

הוכחה: $A_1 \sim A_2$ ולכן קיימת $f_A : A_1 \to A_2$ חח"ע ועל. בדומה, $B_1 \sim B_2$ לכן קיימת $f_B : B_1 \to B_2$ חח"ע ועל.

נגדיר את הפונקציה: $f(a,b) = (f_A(a), f_B(b))$. נשים לב כי היא אכן מוגדרת היטב.

א. $f(a,b)$ חח"ע. יהיו $f(a_1,b_1) = f(a_2,b_2)$ לפי ההגדרה של f משמעות הדבר כי

$$(f_A(a_1), f_B(b_1)) = (f_A(a_2), f_B(b_2))$$

כלומר, $f_A(a_1) = f_A(a_2)$ ומחח"ע של f_A נקבל $a_1 = a_2$ ובדומה $f_B(b_1) = f_B(b_2)$ ומחח"ע של f_B נקבל $b_1 = b_2$, סה"כ $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ חח"ע כנדרש.

ב. נוכיח $f(a,b)$ על. יהי $(x,y) \in A_2 \times B_2$, נרצה להוכיח כי קיים להם מקור. נשים לב כי לפי הגדרה של הפונקציה, הן לx והן לy קיים מקור כיוון שx הוא התמונה לאחר הפעלת $a_1 \in A_1$ כלשהו עליה. כלומר, כיוון שf_A על, קיים $a_1 \in A_1$ כך ש$x = f_A(a_1)$, בדומה עבור y. סה"כ קיבלנו מקור (a_1,b_1) וf על.

■

טענה: עבור $n \geq 1$, מתקיים $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$.
הוכחה: נשים לב כי $\mathbb{N}^n = \{(x_1,...,x_n) | \forall i, x_i \in \mathbb{N}\}$. נוכיח באינדוקציה.

בסיס: $n = 1$, מתקיים $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ לפי רפלקסיביות.
צעד: נניח כי $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$. נרצה להוכיח $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^{n+1}$. מההנחה, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$. מטענה לעיל אנו יודעים כי $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. מטרנזטיביות נקבל $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$
אם כן, נשתמש בטענה: יהיו A_1, A_2, B_1, B_2 קבוצות כך ש$A_1 \sim A_2$ וכן $B_1 \sim B_2$. אזי, $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.
נציב $A_1 = \mathbb{N}, A_2 = \mathbb{N}^n, B_1 = \mathbb{N}, B_2 = \mathbb{N}$. סה"כ נקבל $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$
קיבלנו:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \sim (*) \mathbb{N}^{n+1}$$

שכן המעבר $(*)$ דורש הסבר, כיצד נראה זוג סדור ב$\mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$? כך - $(x_1, (x_2, ..., x_{n+1}))$. קל לראות שבהינתן פונקציה

$$f(x_1, (x_2, ..., x_{n+1})) = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})$$

שהינה חח"ע ועל, מתקיים $(*)$.

4.0.3 עוצמות של קבוצות

הגדרה: קבוצה S נקראת סופית אם היא שקולת עוצמה לתת קבוצה שהיא $prefix$ של $\mathbb{N}$ (כלומר אל קבוצה $\{1, ...n\}$ בהינתן $n \in \mathbb{N}$). העוצמה של קבוצה סופית S מוגדרת להיות $|S|$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$, נסמן $I_n = \{i \in \mathbb{N}^+ | i \leq n\}$.

קבוצה A נקראת סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $A \sim I_n$. במצב כזה נאמר כי $|A| = n$.

הגדרה: העוצמה של $\mathbb{N}$ מוגדרת להיות $\aleph_0$.

הגדרה: קבוצה S נקראת בת מניה, אם היא סופית או שיש לה עוצמה $\aleph_0$.

הגדרה: העוצמה של $\mathbb{R}$ נקראת עוצמת הרצף ומסומנת $\aleph$.

טענה: אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע, אזי קיימת $g : B \to A$ שהיא על.

הגדרה: נאמר כי קבוצה היא קבוצה בת מניה אם היא סופית או אם $|A| = \aleph_0$.
קבוצה A היא בת מניה אם $A \preceq \mathbb{N}$ (כלומר קיימת $f : A \to \mathbb{N}$ חח"ע), נסמן זאת $|A| \leq \aleph_0$
קבוצה בת מניה ניתנת לסידור ע"י סדר ולכן ניתן לספור אותם.

הגדרה: קבוצה A היא אינסופית אמ"מ קיימת תת קבוצה אינסופית $B \subseteq A$ שהיא בת מניה.

טענה: אם A סופית, אזי $|A| < |\mathbb{N}|$
הוכחה: קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $A \sim I_n$ כי היא סופית, ונקבל $|A| = |I_n| = n \leq |\mathbb{N}|$
עם זאת, נוכיח כי לא יתכן פונקציה על כזו. נב"ש כי קיימת פונקציה על כזו ונסתכל על התמונות ההפוכות של $n+1$ המספרים הראשונים, כלומר:

$$f^{-1}(1), f^{-1}(2), ..., f^{-1}(n+1)$$

הפונקציה על, וכן כל הקבוצות הללו הינן קבוצות זרות (כי הפונקציה חח"ע), כלומר קיבלנו כי קיימים לפחות $n+1$ איברים בA, כי אף אחת מהקבוצות לא ריקה (על) בסתירה לכך ש$|A| = n$, מכאן יתקיים $|A| < |\mathbb{N}|$.

טענה: A קבוצה אינסופית אם ורק אם $\mathbb{N} \preceq A$
הוכחה:
$\Longrightarrow$ נניח בשלילה כי A סופית בגודל n, אזי לפי טענה קודמת $|A| < |\mathbb{N}|$ בסתירה לנתון $|A| \geq |\mathbb{N}|$.
$\Longleftarrow$ נבנה באינדוקציה סדרה בת מניה של איברים שונים מA. בשלב האינדוקציה, אם בחרנו איברים $x_0, ..., x_n$ עד כה, אפשר לבחור איבר נוסף ששונה מהם x_{n+1}, אחרת נקבל סתירה לכך שA אינסופית. מכאן, נבחר את x_{n+1} מבין $A/\{x_0, ..., x_n\}$, ונגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ ע"י $f(n) = x_n$. הפונקציה חח"ע כי בהינתן $f(n_1) = f(n_2)$ נקבל $x_{n_1} = x_{n_2}$ כלומר $n_1 = n_2$ כי בחרנו כל איברים שונים.
סה"כ קיימת f חח"ע בין הקבוצות ולכן $|\mathbb{N}| \leq |A|$

מסקנה חשובה: קיימת עוצמה אינסופית מינימלית והיא $\aleph_0$. (נובע ישירות מהטענה הקודמת, הדרך היחידה להיות קבוצה אינסופית היא להיות גדולים יותר מהטבעיים - כלומר הטבעיים הם הקבוצה האינסופית הקטנה ביותר, עם העוצמה הקטנה ביותר).

טענה: $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ (כלומר $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$)
הוכחה:
נסתכל על הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$f(n) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{-n}{2} & n\%2 = 0 \\ \frac{n+1}{2} & n\%2 = 1 \end{array} \right\}$$

חח"ע: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ונניח $f(n)=f(m)$.
אם $f(n),f(m)\le 0$ אזי $\frac{-n}{2}=\frac{-m}{2}$ אחרת יתקיים $\frac{n+1}{2}=\frac{m+1}{2}$, בכל מקרה $n=m$.
על: יהי $m\in\mathbb{Z}$.
אם $m\le 0$, נמצא $\frac{-n}{2}=m$ כלומר עבור $n=-2m\in\mathbb{N}$ מס' זוגי יתקיים $f(-2m)=m$
אם $m>0$ נראה כי $\frac{n+1}{2}=m$ כלומר $n=2m-1\in\mathbb{N}$ מס' אי זוגי ויתקיים $f(2m-1)=m$ כנדרש.

טענה: יהיו A,B קבוצות לא ריקות. אם $A\backslash B\sim B\backslash A$ אזי $A\sim B$.
הוכחה: קיימת $f:A\backslash B\to B\backslash A$ חח"ע ועל. הרעיון הוא לבנות פונקציה ששולחת איברים מהאזור המשותף לעצמם, ובשאר התחומים משתמשת בפונקציה f. נגדיר:

$$g(a)=\left\{\begin{array}{ll} a & a\in B \\ f(a) & a\notin B \end{array}\right\}$$

נשים לב כי שקולה ההגדרה ש$a\in A\cap B$ ל$a\in B$ כי $a\in A$.
נוכיח כי הפונקציה חח"ע ועל.
חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש$g(a_1)=g(a_2)$.
אם $a_1,a_2\in B$ נקבל $a_1=a_2$ מהגדרת הפונקציה.
אם $a_1,a_2\notin B$ נקבל $f(a_1)=f(a_2)$ ומחח"ע של f נקבל $a_1=a_2$.
אחרת, בה"כ $a_1\in B,a_2\notin B$ נקבל $a=f(a)$ עם זאת זה לא יתכן - כיוון ש$a\in A$ וכן $f(a)\in B/a$ כלומר $f(a)\notin a$ וקיבלנו סתירה.
על: יהי איבר $b\in B$. אם $b\in A$ נראה כי $g(b)=b$ מקור לפונקציה. אם $b\notin A$ נקבל כי $b\in B/A$ וכיוון שf על קיים a עבורו $f(a)=b$ ומכאן $g(a)=f(a)=b$.

טענה: $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}=\aleph$
השערת הרצף (לא הוכח, זו השערה בלבד): האם קיימת עוצמה גדולה מ$\aleph_0$ וקטנה מ$\aleph$? לפי ההשערה, לא קיימת קבוצה שכזו.

טענה: $|(1,\infty)|=\aleph$
הוכחה: נשתמש בכך ש$\aleph=|(0,1)|$ ונוכיח $|(0,1)|=|(1,\infty)|$ ואז מטרנזטיביות.
נבנה $f:(0,1)\to(1,\infty)$ ע"י $f(x)=\frac{1}{x}$.
f מוגדרת היטב על כל הקטע הפתוח.
חח"ע: יהיו $x,y\in(0,1)$ כך ש$f(x)=f(y)\Longleftarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\Longleftarrow x=y$.
על: יהא $y>1$ כך ש$y\in(1,\infty)$. נשים לב כי $\frac{1}{y}\in(0,1)$ ומכאן $f(\frac{1}{y})=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y$ מקור לפונקציה.

טענה: נגדיר את הקבוצה $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$. אזי, $|\mathbb{Z}[i]|=\aleph_0$.
הוכחה: נגדיר $f:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ע"י $f(a+bi)=(a,b)$.
נוכיח f חח"ע ועל.
חח"ע: יהיו $a_1+ib_1,a_2+ib_2\in\mathbb{Z}[i]$ כך ש$f(a_1+b_1i)=f(a_2+b_2i)$ אזי נקבל $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$, כלומר $a_1=a_2,b_1=b_2$ ולכן $a_1+ib_1=a_2+ib_2$.
על: יהיה $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. אזי $a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ ומקיים $f(a+bi)=(a,b)$.
סה"כ קיבלנו $|\mathbb{Z}[i]|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|$. לפי משפט כפל של עוצמות שנלמד בהמשך, נקבל כי $|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|=\aleph_0$, ומטרנזטיביות נקבל את הדרוש.

טענה: $\mathbb{N}\precneqq\mathbb{R}$

הוכחה: ראינו כי $\mathbb{N} \precneqq (0,1)$ וכי $(0,1) \sim \mathbb{R}$. מטרנזטיביות, נקבל את הדרוש.

טענה: $A \preceq B$ הוא יחס סדר.
הוכחה:
א. רפלקסיביות - $A \preceq A$, קיימת פונקציה $f : A \to A$ חח"ע שהיא פונקציית הזהות.
ב. טרנזטיביות - נניח $A \preceq B, B \preceq C$, אזי קיימות $f : A \to B, g : B \to C$ חח"ע, אם נסתכל על $f \circ g$, היא חח"ע כהרכבה של חח"ע ולכן $A \preceq C$.
ג. אנטי סימטריות - נניח $A \preceq B, B \preceq A$, אזי לפי קנטור־ברנשטיין (תכף נראה) מתקיים $A \sim B$.
ד. $\forall A, B$ נרצה להראות $A \preceq B$ או $B \preceq A$. לא ניתן להוכיח זאת (!). זוהי **אקסיומת הבחירה - נדון על כך בהמשך.** עם זאת, נניח שתחת אקסיומת הבחירה זה אכן מתקיים. סה"כ קיבלנו שאכן יחס סדר.

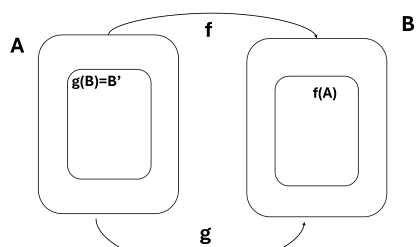
בקורס שלנו נניח כי אקסיומת הבחירה מתקיימת.

4.1 משפט קנטור־ברנשטיין

טענה: יהיו קבוצות A, B, אם $A \preceq B$ וגם $B \preceq A \Longleftarrow A \sim B$
כלומר, אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ו$g : B \to A$ חח"ע אזי קיימת $h : A \to B$ חח"ע ועל.

למה: $B \subseteq A$ וגם $A \preceq B$ אזי $A \sim B$.

אינטואיציה:
נשים לב, כך נראה המצב שלנו כרגע.



נרצה להשתמש בלמה. מכאן $B = Y, A = X$. נגדיר $Y' = g(Y)$, כמובן ש$Y' \subseteq X$.
טענה: $Y' \sim Y$, כיוון שg היא פונקציה חח"ע ועל (ניתן לצמצם תמיד את הטווח של הפונקציה אל $Im(g)$, ואז היא תהיה על.)
טענה: $Y' \sim X$, נסתכל על $g \circ f$ פונקציה חח"ע מ$X \to Y'$, אך $Y' \subseteq X$, ומהלמה $X \sim Y'$.
מכאן מטרנזטיביות $X \sim Y' \sim Y$.
כלומר - אכן הוכחנו את הדרוש. כעת נותר, להוכיח את הלמה.

(ולמעשה מה שטענו זה הדבר הבא -) נרצה להראות $A \sim B'$. מדוע זה מספיק? מתקיים $B \sim B' = g(B)$, שהרי B היא פונקציה חח"ע, אם נסתכל על הפונקציה $h : B \to Im(B)$ אזי זו פונקציה שהיא גם על. ל**מעשה, אם נקח כל פונקציה חח"ע, ונצמצם את הטווח שלה לתמונה שלה בלבד היא תהפוך גם לעל.** מכאן, שנקבל $B \sim B'$, אנו רוצים להראות $A \sim B$, אם נראה כי $A \sim B'$ מטרנזטיביות סיימנו. כעת, ניגש להוכחה של הלמה:

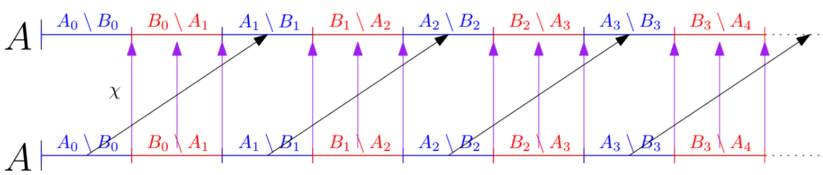
נגדיר את הקבוצה $A_0 = A$, A_1 תהיה הקבוצה של "לך תחזור"- כלומר התמונה של $g \circ f$ (הלכת אל g, חזרת אל f). A_2 תהיה המשך התהליך הזה כלומר $g(f(g(f)))$ וכן הלאה.

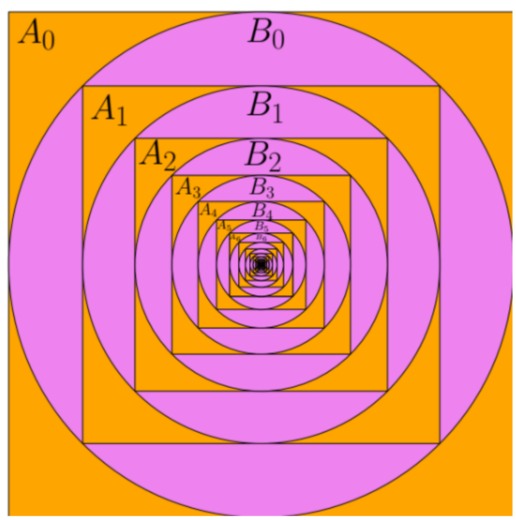
באשר לקבוצות B, באופן דומה זה גישת הלך תחזור רק מהכיוון השני.
נגדיר באופן כללי:

$$A_n = f(A_{n-1})$$

$$B_n = f(B_{n-1})$$

הרעיון יהיה דומה למועבר כאן בתמונה מטה - בכל פעם לוקחים תת קבוצה, ממנה שולחים לתת קבוצה בB, ממנה לתת קבוצה קטנה יותר בA שמוכלת בתוך הקודמת וכן הלאה. כלומר: נתחיל מפונקציה חח"ע מA_0 אל A_1, נרצה לתפוס את החלק של B_0 בשביל שהפונקציה תהיה חח"ע ועל, לכן אנחנו נאמר - נשלח את את האיברים שלהם אל עצמם.
כלומר - הכתום נשלח לכתום הבא, הסגול נשלח לעצמו.





הוכחה:
נגדיר $A_0 = A$, $B_0 = B' = g[B]$ (התמונה של B על g), $A_1 = g(f[A])$ (ללכת מA ולחזור אליה לקבוצה קטנה יותר) וכן באופן כללי $A_n = g \circ f(A_{n-1})$ וכן $B_n = g \circ f(B_{n-1})$

טענה - $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \subseteq A_n$ (סגול מוכל בכתום)
הוכחה: באינדוקציה.
בסיס: $n = 0$, נקבל $B_0 = f[B] \subseteq A = A_0$
צעד: נניח כי $B_n \subseteq A_n$, נרצה להוכיח $B_{n+1} \subseteq A_{n+1}$. נשים לב,

$$B_{n+1} = f(B_n) = f[B_n] \subseteq (*) f[A_n] = A_{n+1}$$

$(*)$- נשים לב כי כיוון ש$B_n \subseteq A_n$, יתקיים גם כי $f[B_n] \subseteq f[A_n]$.

כעת,

טענה - $\forall n \in \mathbb{N} : f(A_n/B_n) = A_{n+1} \backslash B_{n+1}$ (כלומר, כתום שולח אל כתום)

הוכחה:

בכיוון ראשון: יהי $x \in f(A_n \backslash B_n)$ ומכאן $\exists y \in A_n \backslash B_n$ כך ש$x = f(y)$,

$y \in A_n$ ולכן $x = f(y) \in A_{n+1}$

$y \notin B_n$ ולכן $x = f(y) \notin B_{n+1}$

סה"כ $x \in A_{n+1} \backslash B_{n+1}$

בכיוון השני: יהי $x \in A_{n+1} \backslash B_{n+1}$, קיים $y \in A_n$ כך ש$x = f(y)$. כמו כן $y \notin B_n$ כי אחרת $x = f(y) \in B_{n+1}$ בסתירה. מכאן $x = f(x) \in f(A_n \backslash B_n)$.

כעת, ניגש להגדיר את הפונקציה:

נגדיר -

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n/B_n$$

(קבוצת האזורים הכתומים)

נגדיר $h : A \to B$

$$h(x) := \left\{ \begin{array}{cc} f(x) & x \in C \\ x & o.w \end{array} \right\}$$

זו הפונקציה, נרצה להוכיח כי היא חח"ע ועל, ואז סיימנו. מצאנו פונקציה הפיכה בין A לB', ולכן $A \sim B'$ ומכאן לפי טרנזטיביות $A \sim B$.

טענה: h מוגדרת היטב. כלומר, היא מוגדרת אל B.

הוכחה: יהי $x \in A$. אם $x \in C$ אזי $f(x) \in B$. ולכן גם $h(x) \in B$.

אחרת, אם $x \notin C$, בפרט מתקיים כי $x \notin A_0/B_0$, כלומר $x \notin A/B$ וכן $x \in A$ ולכן בפרט $x \in B$.

חח"ע: יהיו $x, y \in A$.

אם $x, y \in C$ נקבל $h(x) = f(x) \neq f(y) = h(y)$ כי f חח"ע.

אם $x, y \notin C$, אזי $h(x) \neq h(y)$ כי פונקציית הזהות חח"ע.

אחרת, כלומר בה"כ $x \in C, y \notin C$. נב"ש $h(x) = h(y)$. כלומר, $f(x) = y$, $x \in C$ ולכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש$x \in A_n/B_n$ מכאן, לפי טענה לעיל נקבל $f(x) \in A_{n+1}/B_{n+1}$, כלומר $y \in A_{n+1}/B_{n+1}$, קיבלנו כי $y \in C$ כי קיים $n' = n + 1$ עבורו מתקיים הדרוש, סה"כ בסתירה לכך ש$y \notin C$.

סה"כ - $h(x) \neq h(y)$ והפונקציה חח"ע.

על: יהי $y \in B = B_0$,

אם $y \notin C$, יתקיים כי $h(y) = y$ וסיימנו, קיים מקור.

אחרת, $y \in C$, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ כך ש$y \in A_n/B_n$.

כיוון ש$y \in B_0$, $y = A_n/B_n = f(A_{n-1}/B_{n-1})$, בפרט קיים $x \in A_{n-1}/B_{n-1}$ כך ש$h(x) = f(x) = y$.

נגמר. בשעה טובה.

משפט סיכום להוכחה: הכתומים כל הזמן מתקפלים קדימה, והסגולים נשלחים אל עצמם כלומר נשארים במקום. זה האינטואיציה הכי גדולה שאפשר לקבל כאן.

$\blacksquare$.

4.2 האלכסון של קנטור

האלכסון של קנטור היא הוכחתו של גאורג קנטור משנת 1891 שהמספרים הממשיים אינם בני מניה.

הרעיון מאחורי שיטת הלכסון: תהיה קבוצה בת מניה A, וקבוצה B שאינה בת מניה. נניח בשלילה שקיימת פונקציה $f: A \to B$ שהיא על. שיטת הלכסון מאפשרת לנו לבנות איבר בטווח של B שאינו בתמונה של הפונקציה, כלומר שונה מ$f(a)$ לכל $a \in A$.

טענה: $\mathbb{N} \lneqq (0,1)$ (כלומר, $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$)

הוכחה:

ראשית, נראה כי $f(n) = \frac{1}{n+1}$ היא חח"ע כיוון ש$f(n_1) = f(n_2) \Leftarrow \frac{1}{n_2+1} = \frac{1}{n_1+1} \Leftarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Leftarrow n_1 = n_2$. סה"כ, קיימת פונקציה f חח"ע בין התחומים.

נב"ש שקיימת $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ שהיא על.

נשתמש בשיטת הוכחה שנקראת ליכסון. נראה כי:

$$f(1) = 0.\alpha_1^1\alpha_2^1.....$$

$$f(2) = 0.\alpha_1^2\alpha_2^2....$$

$$...$$

$$f(n) = 0.\alpha_1^n\alpha_2^n....$$

נגדיר מספר β כך:

$$\beta_n = \left\{ \begin{array}{cc} 7 & \alpha_n^n = 6 \\ 6 & o.w \end{array} \right\}$$

נשים לב שבאמצעות המספר שהגדרנו, לכל מספר אף אחד לא יגיע אל המספר β שיוגדר: $\beta = 0.\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4....$ ומתקיים $\beta \in (0,1)$

טענה - לכל $n \in \mathbb{N}$ יתקיים $f(n) \neq \beta$.

הוכחה -

אם $\alpha_n^n = 6$, אזי $\beta_n = 7$, ולכן $|f(n) - \beta| > 6 \times 10^{-(n+1)}$ (כיוון שהספרה ה$n+1$ של β היא לפחות 6), ובפרט משמעות הדבר שהם שונים ולא שווים.

ויותר ברור: נסמן

$$f(n) = 0.\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n.....\alpha_n^n\alpha_{n+1}^n....$$

$$\beta=0.\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5........\beta_n\beta_{n+1}$$

אם עד הספרה העשרונית הn, המספרים היו זהים (במקרה הגרוע ביותר מבחינתנו), נשים לב שכעת בספרה הn־ית, יתקיים $a_n^n=6\neq 7=\beta_n$ ונקבל $f(n)\neq\beta$.
אחרת, כלומר $\alpha_n^n\neq 6$, אזי $\beta_n=6$, ושוב באופן דומה נקבל כי המספרים $f(n)\neq\beta$.
סה"כ, מצאנו מס' $\beta\in(0,1)$ שאין לו מקור ב$\mathbb{N}$, ולכן הפונקציה איננה על. באסה.
$\blacksquare$.

מסקנה: $|\aleph_0|<|\aleph|$

הערה. זה לא היה משנה שבחרנו $6,7$. חשוב היה שלא לבחור $9,0$ כי תמיד נזכור כי יש מספרים כמו $0.999999=1$, ואז נכנס לבעיה.

4.3 משפט קנטור

המשפט: לכל קבוצה A, $A\nsim P(A)$. כלומר, אף קבוצה לא שקולת עוצמה לקבוצת החזקה שלה. (או במילים אחרות: אין פונקציה על בין קבוצה לקבוצת החזקה שלה).

הוכחה: ההוכחה תשתמש בלכסון. תהי $f:A\to P(A)$. נוכיח כי f אינה על. נגדיר את B להיות:

$$B=\{x\in A|x\notin f(x)\}$$

עבור כל $x\in A$:
אם $x\in f(x)$ אזי $x\notin B$ ומתקיים $f(x)\neq B$.
אם $x\notin f(x)$ אזי $x\in B$ ומתקיים $f(x)\neq B$ (כי $x\in B$ אבל לא ב$f(x)$)
נשים לב כי $B\in P(A)$, וסה"כ מצאנו B קבוצה עבורה $B\neq f(x)$, כלומר f אינה על.
$\blacksquare$.

מסקנה. ישנם אינסוף עוצמות:

$$\mathbb{N}\precneqq P(\mathbb{N})\precneqq P(P(\mathbb{N})\precneqq ....$$

4.4 פרדוקס הספרים (הפרדוקס של ראסל)

יהי כפר, יש בו ספר שמספר את כל מי שלא מספר את עצמו, ורק אותם. האם הספר מספר את עצמו?
אם הוא מספר את עצמו, אז זה בניגוד לכך שהוא לא מספר אנשים שמספרים את עצמם.
אם הוא לא מספר את עצמו, אז הוא כן צריך לספר את עצמו, בסתירה.
קיבלנו פרדוקס.

נסמן את הקבוצה $R=\{x|x\notin x\}$ כלומר, קבוצת כל האיברים שלא שייכים לעצמם. קיבלנו $R\notin R\Longleftrightarrow R\in R$.

מה קיבלנו כאן? המתמטיקה התחרפנה? נשים לב ־ R אינה קבוצה.

מסקנה: קבוצת כל הקבוצות, איננה קבוצה. אחרת, נקבל סתירה למשפט קנטור. מדוע? כי אחרת, אם X היא קבוצת כל הקבוצות, בהכרח נקבל כי $X = P(X)$, כי X היא הכל! לכן בהכרח $X = P(X)$ בסתירה למשפט קנטור.

4.5 טענה: $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R} = \aleph$

הוכחה: רעיון ההוכחה יהיה להוכיח את השוויון הבא -

$$P(\mathbb{N}) \preceq_{(1)} \mathbb{R} \preceq_{(2)} P(\mathbb{Q}) \preceq_{(3)} P(\mathbb{N})$$

מהלופ שקיבלנו נקבל בהכרח כי עוצמת $P(\mathbb{N})$ הינה $\aleph$ לפי קנטור ברנשטיין וטרנזטיביות.

ראשית נוכיח את (1). נמצא $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ חח"ע.

נגדיר כי בסדרה האינסופית $a_0.a_1a_2a_3....$ הספרה a_i תופיע עם 1 אמ"מ $a_i \in P(\mathbb{N})$. ננסה לפרמל רעיון זה -

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{n\in A}\frac{1}{3^n}$$

כלומר, עבור כל מספר שמופיע בקבוצה נוסיף 1 ונכפיל ב$\frac{1}{3^n}$.

נראה כי היא מוגדרת היטב:

$$\forall A \in P(\mathbb{N}) : f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{n\in A}\frac{1}{3^n} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 1.5 \in \mathbb{R}$$

חח"ע: יהיו $A \neq B \in P(\mathbb{N})$. יהי $x \in A \triangle B$ המספר הקטן ביותר בהפרש הסימטרי. בה"כ $x \in A$. הוא הראשון ששונה בשניהם!

$$f(A)-f(B) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{n\in A}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} 1_{n\in B}\frac{1}{3^n} = \sum_{n\ge x}^{\infty} 1_{n\in A}\frac{1}{3^n} - \sum_{n\ge x+1}^{\infty} 1_{n\in B}\frac{1}{3^n} \ge \frac{1}{3^x} - \sum_{n\ge x+1}\frac{1}{3^n} =$$

$$\frac{1}{3^x} - \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{x+1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3^x} > 0$$

ובפרט $f(A) > f(B)$ ולא יתכן שוויון. כנדרש.

נוכיח את (2)- $\mathbb{R} \preceq P(\mathbb{Q})$:

נגדיר $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$

$$f(x) = (-\infty, x) \cup \mathbb{Q}$$

כלומר כל הy הרציונליים כך ש$y < x$.

נוכיח כי f חח"ע.

יהיו $x,y \in \mathbb{R}$ בה"כ $x > y$. מצפיפות הרציונליים קיים $q \in f(x)\backslash f(y)$ (תמיד קיים רציונלי) ולכן $f(x) \neq f(y)$.

נוכיח את (3)**.**
נרצה להוכיח את הטענות הבאות:
א. $P(\mathbb{Q}) \preceq P(\mathbb{N})$
ב. $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$
ג. עבור כל שתי קבוצות A, B המקיימות $A \preceq B$ מתקיים $P(A) \preceq P(B)$
שילוב טענות ב'+ג' יוכיח את טענה א'.

נוכיח את ב':
נראה כי

$$\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}^2 \preceq \mathbb{N}$$

יהי $x \in \mathbb{Q}$, אזי קיימים $q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$ אזי $x = \frac{p}{q}$ וכן לא קיימים $q' \in \mathbb{Z}, p' \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$. (נקח את הייצוג הרציונלי הקטן ביותר של x).
נגדיר $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ונגדיר $f(x) = (p,q)$. אכן חח"ע. כלומר $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
לפי טענה $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ מהתרגול וכן $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ נקבל לפי טענה $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$ ובפרט $\preceq$ וכן $\mathbb{N}^2 \preceq \mathbb{N}$ הוכח כבר בהרצאה ראשונה, וסה"כ מטרנזטיביות נקבל את השוויון.

נוכיח את ג':
קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$. נרצה להגדיר $g : P(A) \to P(B)$.

$$g(X) = \{f(y) | y \in X\}$$

אכן זו פונקציה מוגדרת היטב. נוכיח חח"ע.
יהיו $X, X_2 \in P(A)$ ויהי $x \in X \backslash X_2$ בה"כ $x \in X$. מכאן $f(x) \in g(X) \backslash g(X_2)$ לפי ההגדרה, ונקבל $g(X) \neq g(X_2)$.
סה"כ אכן $A \preceq B$.

שילוב ב+ג נותן את הטענה $P(\mathbb{Q}) \preceq P(\mathbb{N})$. סה"כ כל הגרירה מתקיימת, ומכאן נקבל כי -

$$P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R} = \aleph$$

כנדרש.
$\blacksquare$.

4.6 אריתמטיקה של עוצמות

מדובר באוסף של כללים המאפשרים לחשב עוצמות של קבוצות על ידי שימוש בקבוצות שאנו יודעים את עוצמתן. **הערה חשובה:** עוצמות לא מתנהגות כמספרים רגילים ובכל מעבר באריתמטיקה של עוצמות חייבים להתבסס על הטענות שנראה. עוצמה לא מתנהגת כמספר רגיל.

טענה: כללי האריתמטיקה "הרגילים" חלים על עוצמות - אסוציאטיביות, קומוטטיביות, דיסטרביטיביות

באריתמטיקה של עוצמות, תוכן הקבוצה לא משנה אלא רק העוצמה שלהן.

חיבור: נגדיר חיבור עוצמות כדקלמן $|A+B| = |A\times\{0\}\cup B\times\{1\}|$. מדוע? בשביל שכל האיברים יהיו שונים נרצה שכל $a\in A$ נהפוך לזוג $(a,0)$ וכל איבר $b\in B$ נהפוך לזוג $(b,1)$

משפט: סכום עוצמות **סופיות** שווה לעוצמת האיחוד אם ורק אם החיתוך בין הקבוצות הוא הקבוצה הריקה.

$$|A+B| = |A\cup B| \iff A\cap B=\emptyset$$

כפל עוצמות: נגדיר מכפלת עוצמות כדקלמן.

$$|A|\times|B| = |A\times B|$$

טענה: פעולת כפל עוצמות מוגדרת היטב. עוצמת המכפלה הקרטזית תלויה רק בעוצמות של הקבוצות ולא במהותן.
הוכחה: יהיו A,B,C,D קבוצות כך ש$|A|=|C|$ וגם $|B|=|D|$. מכאן קיימות פונקציות חח"ע ועל $f:A\to C, g:B\to D$. נגדיר את הפונקציה הבאה $h:A\times B\to C\times D$ ע"י $h(a,b)=(f(a),g(b))$ שאכן חח"ע ועל כנדרש.

חזקה של עוצמות: נגדיר את פעולת החזקה על עוצמות כך:

$$|A|^{|B|} = |A^B| = |\{f:B\to A\}|$$

טענה: לכל שלוש עוצמות A,B,C מתקיים -
א. $A\times B = B\times A$
ב. $A+B=B+A$
ג. $A(B+C) = A\times B + A\times C$
ד. לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $A\times A\times A\times \dots\times A = A^n$
ה. $(A\times B)^C = A^C + B^C$
ו. $A^B\times A^C = A^{B+C}$
ז. $(A^B)^C = A^{B\times C}$
ח. $A\le A+B$

טענה: כל ההבאים מתקיימים.
א. $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$
ב. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\aleph_0 + n = \aleph_0$
ג. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$
ד. $\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$
הערה: חיסור $\aleph_0-\aleph_0$ לא מוגדר!

טענה: לכל עוצמה אינסופית A מתקיים $A+\aleph_0=A$
טענה: עוצמת המספרים האי רציונליים אינה בת מניה.

טענה: לכל קבוצה A מתקיים כי $|P(A)|=2^{|A|}$

השערת הרצף: לא קיימת עוצמה A המקיימת $\aleph_0<A<2^{\aleph_0}=\aleph$.

טענה: $\aleph\leq\aleph_0^{\aleph_0}$.

טענה: יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\geq 0$ עוצמות גדולות מאפס כך שמתקיים $\alpha_1\leq\alpha_2,\beta_1\leq\beta_2$ אזי:

$$\alpha_1^{\beta_1}\leq\alpha_2^{\beta_2}$$

מסקנה: עבור כל $0\leq a\leq\aleph_0$ מתקיים $a^{\aleph_0}=\aleph$.

מסקנה ממשפט קנטור: אם A קבוצה אינסופית אזי קבוצת כל תתי הקבוצה שלה אינה בת מניה.

מסקנה: אם A היא קבוצה כל המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ או הממשיים $\mathbb{R}$ אזי קבוצת כל הקבוצות האינסופיות של A אותה נסמן ב$p^{inf}(A)$ מקיימת $|p^{inf}(A)|>|A|$.

טענה: תהי A אינסופית שאינה בת מנייה, ותהי $B\subseteq A$ בת מניה. אזי $A\backslash B$ לא בת מניה.
הוכחה: נב"ש כי $A\backslash B$ בת מניה. אזי

$$|A|=|(A\backslash B)\cup\{B\})|=|A\backslash B|+|B|=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

בסתירה לכך שA אינה בת מניה.

השערת הרצף המוכללת: לכל עוצמה אינסופית α לא קיימת עוצמה β כך ש: $\alpha<\beta<2^{\alpha}$.

טענה: לפי השערת הרצף, ישנן $\aleph_0$ עוצמות.

חשוב: נניח כי $\alpha,\beta\geq 2$. הכלל שננסח כעת יהיה נכון לכל עוצמה מהצורה $\aleph_0,2^{\aleph_0},2^{2^{\aleph_0}},....$. נוכל לסמן $\aleph_n=2^{\aleph_{n-1}}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$. לפיכך:

$$\alpha^{\beta}=\left\{\begin{array}{cc}\alpha & \alpha>\beta\\ 2^{\beta} & \alpha\leq\beta\end{array}\right\}$$

4.7 טענות אחרונות בעוצמות (הרצאה אחרונה)

טענה: תהי קבוצה S, כך שקיימת פונקציה חד חד ערכית $f:S\to S$ שאינה על. אזי, S אינסופית.
הוכחה: תהי S כנ"ל. נמצא $g:\mathbb{N}\to S$ חד חד ערכית ואז מתקיים $\aleph_0\leq|S|$ והיא אינסופית. יהי $a\in S$ באשר $a\notin Im(S)$. נגדיר:

$$g(0)=a$$

$$g(n) = f(g(n-1)$$

נניח בשלילה כי g לא חד חד ערכית. אזי, קיימים $n \neq m$ כך ש$g(m) = g(n)$. נניח כי (m,n) הם הזוג המינימלי שזה קורה עבורם (מינימלי הכוונה שימזער את $m+n$). נבחין כי $n, m \neq 0$ אחרת נקבל $f(n) = f(m) = a$ בסתירה לכך שa לא בתמונה. מכאן,

$$f(g(n-1)) = g(n) = g(m) = f(g(m-1)$$

מכך שf חד חד ערכית, נקבל כי בהכרח $g(n-1) = g(m-1)$. ולכן נקבל סתירה לכך ש(n,m) זה הזוג המינימלי שעבורו g לא חד חד ערכית.

טענה: תהי קבוצה I בת מניה, כך שלכל $i \in I$ מתקיים כי S_i בת מניה. אזי $\bigcup_{i \in I} S_i$ בת מניה. (איחוד קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה)

הוכחה: נתון $f : I \to_{1\to 1} \mathbb{N}$ וכן נתון כי $\forall i\ g_i : S_i \to_{1\to 1} \mathbb{N}$. צריך לבנות $h : \bigcup_{i \in I} \to_{1\to 1} \mathbb{N}$. נראה כי יהיה יותר קל לבנות $h : \bigcup_{i \in I} \to_{1\to 1} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

לכל $x \in \bigcup_{i \in I}$ יהי $i_x \in I$ המינימלי ביחס לf (היא בת מניה, קיים מינימום. נראה כי יתכן כמה i_x שכן האיחוד לא זר ויתכן ששייכות לכמה קבוצות, בכל מקרה נקח את המינימום). באשר $x \in S_{i_x}$ ונגדיר

$$h(x) = (g_{i_x}(x), f(i_x))$$

כלומר, כל איבר נשלח אל הערך שg נשלחת אליו והאינדקס שלו באיחוד. ברור כי היא חד חד ערכית מחד חד ערכיות של g וf.

טענה: כל תתי הקבוצות הסופיות של הטבעיים, היא קבוצה בת מניה. (מגיע ישירות מהטענה הקודמת. כי כל תת קבוצה סופית של הטבעיים בת מניה.)

טענה: $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$

הוכחה: נבנה ראשית $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = (x, x)$ וברור שהיא חד חד ערכית. כעת נבנה $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. אם נעשה זאת לפי קנטור ברנשטיין נקבל שוויון עוצמה. נראה כי $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \leq P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$. אם נוכיח $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \leq P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \leq P(\mathbb{N}) \leq \mathbb{R}.$ סיימנו. מכאן שנותר להראות רק את אי השוויון $P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \leq P(\mathbb{N})$ כי את השאר אנחנו יודעים. נבנה $h : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ חד חד ערכית.

$$h(A,B) = \left\{ \begin{array}{cc} \{2x\} & x \in A \\ \{2x-1\} & x \in B \end{array} \right\}$$

מאיפה מגיעה האינטואיציה? נחלק את קבוצת החזקה של הטבעיים לשתיים, זוגיים ואי זוגיים. ומהם נקח את כל המספרים ובהתאם.

נטען כי h חד חד ערכית. יהיו $(A,B) \neq (A',B')$ אזי קיים בה"כ $x \in A \backslash A'$. מכאן ש$2x \in h(A,B)$ ו$2x \notin h(A',B')$ ובהכרח התמונות שונות. באופן דומה קיים $y \in B' \backslash B$ ולכן $2y-1 \in h(A,B)$ וכן $2y-1 \notin h(A',B')$ ושוב, התמונה שונה.

הבחנה: $\mathbb{R}^k \sim \mathbb{R}$ (באינדוקציה, בסיס זה הזהות, ובצעד משתמשים בטענה הקודמת)

טענה: $X \sim X \times X \Longrightarrow P(X) \sim P(X) \times P(X)$

טענה: אם קיימת פונקציה על $f : A \to B$ אזי קיימת פונקציה חד חד ערכית $g : B \to A$

4.7.1 אקסיומת הבחירה

המתמטיקאים רצו לעשות סדר במתמטיקה, ולבנות תורה סדורה. הם בנו 9 אקסיומות כך שניתן לגזור את כל המתמטיקה מהם. האקסיומות לא ניתנות להוכחה, בהינתן נכונותם אזי המתמטיקה נכונה.
אקסיומת הבחירה: אם יש לך אינסוף קבוצות לא ריקות, אפשר לבחור איבר אחד מכל קבוצה.

$$\forall X[\emptyset \notin X \Longrightarrow \exists f : X \to \cup_{A\in X} A, \forall A \in X(f(A) \in A)]$$

בתחילה האמינו כי האקסיומה נובעת מ9 האקסיומות האחרות, אך לא הצליחו להוכיח זאת.
מהאקסיומה נובעות מסקנות מעט מוזרות.

פרדוקס בנך טרסקי: בהינתן כדור תלת מימדי, ניתן לחלק אותו ל5 קבוצות סופיות, כל קבוצה תוכל להזיז ולסובב, וכתוצאה מכך תוכל לקבל שני כדורים באותו גודל של הכדור הראשון! **כמובן שזה סותר את כל המדע.** הדרך לפתור את הפרדוקס היא שלא לכל קבוצה יש נפח. ולכן טענה זו לא באמת נובעת ישירות מהאקסיומה אם לא לכל קבוצה יש נפח.

לא ניתן להוכיח את השלילה של אקסיומת הבחירה. אם נקח את כל המתמטיקה ונקח את כל האקסיומות לא נקבל סתירה למתמטיקה. עם זאת: זה שלא ניתן להוכיח את השלילה של אקסיומת הבחירה לא אומר שהיא נכונה. אם כן המתמטיקה מתחלקת ל2: המתמטיקה שמסתמכת על אקסיומת הבחירה, והמתמטיקה שלא. בקורס אנחנו מניחים שאקסיומת הבחירה נכונה.

טענה שנובעת מאקסיומת הבחירה: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A \preceq B$ או $B \preceq A$
מסקנה: $\preceq$ על A מעל $P(A)$ הוא יחס סדר מלא.

השערת הרצף: לא קיימת עוצמה בין א ל$\aleph_0$.

בקורס אנחנו לא נתייחס לקיומה או אי קיומה של השערת הרצף.

5 גרפים

5.1 הגדרות בתורת הגרפים

גרף הוא זוג סדור של קודקודים וצלעות $G = (V, E)$ באשר $E \subseteq \binom{V}{2}$. נניח במהלך הקורס כי $|V| = n, |E| = m$.
עבור קבוצה S נגדיר: $\binom{S}{k} = \{R \subset S||R| = k\}$

תהי V קבוצה סופית ולא ריקה, ותהי E קבוצה של זוגות איברים מV.
1. הזוג $G = (V, E)$ נקרא **גרף מכוון** אם הזוגות בE הינם זוגות סדורים.
2. הזוג $G = (V, E)$ נקרא **גרף לא מכוון** אם הזוגות בE הינם זוגות לא סדורים.

הגדרה: גרף $G = (V, E)$ נקרא **גרף פשוט** אם הוא לא מכוון, ללא קשתות וללא לולאות עצמיות.

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.

1. נאמר כי שני קודקודים $v,u\in V$ הם **שכנים** אם $\{v,u\}\in E$
2. לכל $v\in V$ נגדיר את **קבוצת השכנים** $\Gamma(v)=\{u\in V|(v,u)\in V\}$

טענה: יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט כך ש$|V|\geq 2$, אזי יש בV לפחות שני קודקודים מאותה הדרגה.

הדרגה של v תוגדר בהתאם להיות $deg(v)=|\Gamma(v)|$

גרף מכוון: גרף $G=(V,E)$ נקרא גרף מכוון אם הזוגות בE סדורים. נגדיר עבור גרף מכוון:

$$deg_{in}(v)=|\{u\in V:(u,v)\in E\}|$$

$$deg_{out}(v)=|\{u\in V:(v,u)\in V\}|$$

$\delta(G)$ - דרגה מינימלית בגרף, $\Delta(G)$- דרגה מקסימלית בגרף

מולטי גרף: גרף באשר קבוצת הצלעות שלו היא מולטי קבוצה - כלומר: ייתכנו שבין שני קודקודים יעברו מס' צלעות.

פסאודו גרף: גרף עם לולאות עצמיות.

טיול: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. סדרת קודקודים $(v_0,...,v_p)$ כאשר $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ לכל $1\leq i\leq p-1$ נקראת טיול.

מסלול: טיול בו אין צלע המופיעה פעמיים.

מסלול פשוט: מסלול בו אין קודקוד המופיע פעמיים.

אורך של טיול: מס' הצלעות שמופיעות בטיול.

טענה: יהיו שני קודקודים v,u. אם בין v לu קיים טיול, אזי קיים גם מסלול פשוט ביניהם.

הוכחה: יהיו שני קודקודים, v וu כך שקיים ביניהם טיול. יהי P הטיול הקצר ביותר בין שני הקודקודים. נסמן $P=(x_0,...,x_q)$, נטען כי P מסלול פשוט. אחרת, קיימים אינדקסים $i<j$ כך ש$x_i=x_j$. נתבונן ב$P'=\{x_0,...,x_i,x_{j+1},...,x_q\}$ זהו טיול (כי עדיין כל זוג קודקודים שכנים) בG, המקיים $|P'|<|P|$ וזוהי סתירה למינימליות של P.

$\blacksquare$.

טיול מעגלי: טיול $(v_0,...,v_q)$ בו מתקיים $v_0=v_q$

מעגל: מסלול שמתחיל ומסתיים באותו הקודקוד.

מעגל פשוט: מסלול, כך שהקודקוד הראשון שווה לקודקוד האחרון וכן כל קודקוד $v\neq v_0$ לא מופיע יותר מפעם אחת.

מרחק בין קודקודים: יהי P מסלול בין v לu, אזי המרחק בין v לu מוגדר להיות -

$$d_G(u,v)=min\{|P|\}$$

אם לא קיים מסלול בין השניים, נגדיר את המרחק להיות אנסוף.

קשירות: גרף נקרא קשיר אם קיים מסלול בין כל שני קודקודים בגרף.

קוטר הגרף: המרחק המקסימלי בגרף. כלומר: $diam(G) = max_{u,v\in V}\{d_G(u,v)\}$

טענה: גרף G הוא קשיר אמ"מ $diam(G) < \infty$
טענה: יחס ה"קשירות" הוא יחס שקילות. רכיבי הקשירות הם מחלקות השקילות.

רכיב קשירות: יהי $G = (V,E)$. רכיב קשירות של G הוא גרף $G' = (V', E')$ כך ש:

1. $V' \subseteq V$
2. $E' = \{(v,u) | v,u \in V', (v,u) \in E\}$
3. $\forall v,u \in V'$ מתקיים: $d(v,u) < \infty$
4. לכל $v \in V'$ ולכל $u \in V/V'$ מתקיים $d(u,v) = \infty$

טענה: אם בגרף G יש בדיוק שני קודקודים עם דרגה אי זוגית, אזי קיים מסלול בניהם.
הוכחה: נחלק את כלל הקודקודים בגרף לרכיבי קשירות זרים. נשים לב שניתן להסתכל על כל רכיב קשירות כגרף נפרד ולכן ממשפט הדרגות סכום הדרגות בכל רכיב קשירות צריך להיות זוגי. כיוון שדרגת כלל הקודקודים זוגית מלבד 2 הקודקודים המייצגים את עיר הבירה ועיר L, שני קודקודים אלה צריכים להיות באותו רכיב קשירות ומכאן שיש מסלול ביניהם.

תת גרף: יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון. $G' = (V',E')$ הוא תת גרף אם הוא גרף וכן $V' \subseteq V, E' \subseteq E$.

תת גרף ריק: גרף בו כל הקודקודים מהגרף המקורי מופיעים, ולא מופיעים בכלל קשתות.
תת גרף פורש: תת גרף של G המקיים $V' = V$, כלומר הוא מכיל את כל קודקודי G.

תת גרף מושרה: יסומן $G[A] = (A, \binom{A}{2} \cap E)$, מתקבל ע"י הסרת חלק מהצלעות לקבלת קבוצה מסוימת שהיא תת גרף של הגרף הנוכחי. (כלומר, בוחרים קבוצה של קודקודים $A \subseteq V$ ובתת גרף שכזה מחויבים לקחת את כל הצלעות שהופיעו בגרף המקורי עם הקודקודים הנ"ל). נשים לב - כל רכיב קשירות הוא תת גרף מושרה.

למת לחיצות הידיים: יהי $G = (V,E)$ גרף פשוט. אזי,

$$\sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$$

טענה: בגרף לא מכוון, סכום הדרגות חייב להיות זוגי.
טענה: כמות הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית בגרף לא מכוון הוא זוגי.

שרשור מסלולים: חיבור שני טיולים $P = (v_0, ...v_p)$, $Q = (v_{p+1}, ..., v_q)$ לטיול אחד $(v_0, ..., v_p, v_{p+1}, .., v_q)$ נקרא **שרשור מסלולים** ומסומן $P \circ Q$.

הגדרה: יהי $G = (V,E)$ גרף. מטריצת השכנויות $A_{|V|\times|V|}$ היא הצגה של גרף באמצעות מטריצה ריבועית המוגדרת כך שלכל זוג צמתים $u,v \in V$ מתקיים:

$$A_{u,v} := \left\{ \begin{array}{cc} 1 & (u,v) \in E \\ 0 & else \end{array} \right\}$$

הגדרה: גרף מכוון נקרא **קשיר היטב**, אם לכל שני קודקודים $a,b \in V$ יש מסלול מa לb וגם מסלול מb לa.

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר. תהי $e \in E$ צלע. אזי הגרף $G/\{e\}=(V,E/\{e\})$ קשיר אמ"מ הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו בG.

הוכחה:
$\Longleftarrow$ נניח כי $G/\{e\}=(V,E/\{e\})$ קשיר.
נסמן $e=(x,y)$, אזי כיוון ש$G/\{e\}$ קשיר הוא מכיל מסלול פשוט בין x לy. נסמן את המסלול כדקלמן $P=(u_0=x,u_1,...,u_k=y)$, המסלול הזה בוודאות קיים, כיוון שהגרף קשיר, כל מה שנעשה כעת הוא להוסיף את הקשת $e=(x,y)$ למסלול, קיבלנו מעגל פשוט - כי הגרף היה קשיר וכן חסר מעגלים)כי קשיר(ולכן הצלע $e=(x,y)$ לא נמצאת במעגל שקיבלנו, ולכן הינו פשוט.
$\Longleftarrow$ נניח כי $e=(x,y)$ שייכת למעגל פשוט כלשהו בG. מעגל פשוט זה יראה כך - $C=(u_0=x,u_1,...,u_k=y,u_0=x)$.
יהיו שני צמתים $u_1,u_2 \in V$, צ"ל כי קיים מסלול בניהם בגרף $G/\{e\}$.
אם $v_1=x, v_2=y$ אזי $P_1=(u_0=x,u_1,...,u_k=y)$ מסלול בגרף G/e שמתקבל מהסרת הקשת e.
אחרת, G הינו קשיר ולכן מכיל מסלול בG: $P_2=(v_1,z_1,...,z_j,v_2)$
אם e לא נמצאת על המסלול P_2, מסלול זה בהכרח קיים גם בG/e ולכן קיים מסלול בין v_1 לv_2.
אחרת, e כן נמצאת על P_2.בה"כ קיים $1 \le i \le j-1$ כך ש$z_i=x, z_{i+1}=y$.לאחר הסרת הקשת e, נקבל כי $G/\{e\}$ מכיל את המסלול $P_2^x=(v_1,z_1,....,z_i=x)$ וכן את המסלול $P_2^y=(z_{i+1}=y,...,z_j,v_2)$.
נסתכל על שרשור המסלולים הבא: P_2^x,p_1,P_2^y (נשים לב P_1 מסלול בין x לy אכן קיים כי הם היו על המעגל בעץ הקשיר), שרשור מסלולים זה יוצר מסלול בין v_1 לv_2, ולכן סה"כ G קשיר.
$\blacksquare$.

5.2 סוגי גרפים

1. **הגרף הריק** - $G=(V,\emptyset)$. גרף ללא צלעות בכלל, רק קודקודים.

2. **הגרף המלא / קליקה** -

$$K_n=(V,\binom{V}{2})$$

3. **קבוצה בלתי תלויה** - תת קבוצה של קודקודים A כך שמתקיים $\binom{A}{2}\cap E=\emptyset$. כלומר, זו קבוצת קודקודים $A \subseteq V$ כך שאין אף צלע שמחברת בין שני קודקודים בתוך הקבוצה.

4. **הגרף המשלים:** יהי $G=(V,E)$ גרף. הגרף המשלים הינו $\overline{G}=(V,\overline{E})$ באשר $\overline{E}=\binom{V}{2}/E$

טענה: אם G לא קשיר, אזי $\overline{G}$ קשיר.
הוכחה: G לא קשיר, כלומר קיימים לפחות שני רכיבי קשירות זרים. נבחר רכיב אחד, נסמנו $v_1,...,v_k$.
לפי הגדרת הגרף המשלים, לכל v שאינו ברכיב הקשירות מתקיים $(v,v_1),...,(v,v_k)\in \overline{E}$.
כלומר, בפרט $v_1,...,v_k$ מקושרים לכל v שלא נמצא ברכיב הקשירות, וכן הם מחוברים אחד לשני (כי קיים אחד המחובר לכולם ומחבר בניהם) - ולכן סה"כ $\overline{G}$ קשיר.
$\blacksquare$.

טענה: מתקיים

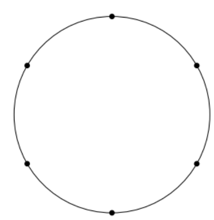
$$deg_G(v)+deg_{\overline{G}}(v)=n-1$$

טענה: $\overline{\overline{G}}=G$

טענה: A קליקה בG $\Longleftrightarrow$ A היא תת קבוצה בלתי תלויה ב$\overline{G}$

5. **גרף מסלול:** מסומן P_n, גרף בו כל הצלעות מופיעות ברצף ובין כל אחת מהם יש קשת. מתקיים $|E|=n-1$
לדוגמה:

6. **גרף מעגל:** כמו גרף מסלול, מסומן C_n רק שהתווספה צלע בין הקודקוד הראשון לאחרון. מתקיים $|E|=n$
לדוגמה:

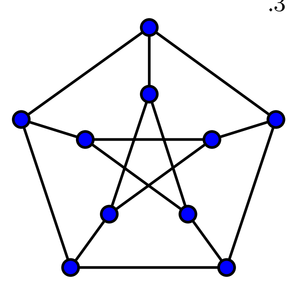


7. **גרף d־רגולרי:** גרף בו כל הקודקודים בעלי אותה דרגה.
מתקיים $|E|=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}deg(v)=\frac{nd}{2}$

הוכחה: אנו יודעים כי $2|E|=\sum_{v\in V}deg(v)$, כלומר $|E|=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}deg(v)$, מכאן שדרגת כל קודקוד בגרף תסומן d, ונקבל כי $|E|=\frac{1}{2}\times d\times n=\frac{nd}{2}$.

נשים לב ־ גרף מעגל (2 רגולרי), קליקה ופטרסן (3 רגולרי) הם גרפים רגולריים.

8. **גרף פטרסן:**
גרף מיוחד שעוד נדון בו בהמשך. נראה כמצורף מטה, הוא 3 רגולרי: כלומר דרגת כל קודקוד בו הינה 3.



9. **גרף דו צדדי:**
גרף דו צדדי הוא גרף עם n זוגי, כך שאפשר לחלק את קבוצת הקודקודים $V=(v_0,...,v_{n-1})$ לשתי קבוצות: $V_1=(v_0,...,v_{\frac{n}{2}}),V_2=(v_{\frac{n}{2}+1},...,v_{n-1})$ כך שכל צלע מחברת קודקוד מV_1 לV_2 וכן אין צלעות בתוך V_1 ובתוך V_2.

דרגה מינימלית ומקסימלית בגרף: נסמן ב$\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף וב$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית בגרף.

טענה: $\Delta(G)\geq 2\frac{|E|}{|V|}\geq\delta(G)$

הוכחה: באופן ישיר מלמת לחיצת הידיים $\frac{\sum_{v\in V}deg(v)}{|V|}=2\frac{|E|}{|V|}$ נקבל כי הסכום באמצע הוא הדרגה הממוצעת, שבפרט קטנה מהמקסימלית וגדולה מהמינימלית.

5.3 גרף הקוביה Q_n

גרף הקובייה Q_n הוא הגרף שקודקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n, ובין שני קודקודים יש צלע אמ"מ הסדרות הבינאריות שהם מייצגים נבדלות בביט יחיד. נבחין כי בגרף הקובייה ישנם 2^n קודקודים. וכן ישנן $2^{n-1}n$ צלעות. מדוע? נראה כי

$$2|E|=\sum_{v\in V}deg(v)=2^n\times n\Longrightarrow|E|=2^{n-1}\times n$$

שכן דרגת כל קודקוד הינה n בדיוק. (מדוע? אם אורך סדרה היא n יש בדיוק n סדרות בינאריות אחרות שנבדלות ממנה בביט יחיד - הרי כל השאר זהה, כל פעם בוחרים מיקום אחר של הביט).

סה"כ נכתוב זאת פורמלי

$$Q_n=(V_n,E_n)$$

$$V_n=\{0,1\}^n,E_n=\{(u,v)\in V\times V\wedge||u-v||_1=1\}$$

באשר $||x||=\sum_{i=1}^n x_i$.

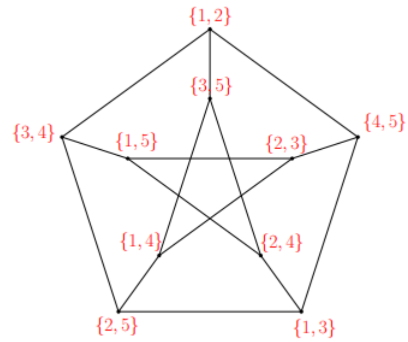
טענה: גרף הקוביה Q_n הוא דו צדדי.

5.4 גרף קנזר $(Kneser)$

יסומן $KG_{n,k}$. קבוצת הקודקודים של הגרף הינה $\binom{[n]}{k}=\{A\subseteq[n]=\{1,..,n\}||A|=k\}$, כלומר אוסף של הקבוצות של המספרים $1,...n$ בגודל k.

קיימת צלע בין קבוצה A לקבוצה B המקיימות $A,B\in\binom{[n]}{k}$ אמ"מ $A\cap B=\emptyset$.

לדוגמה: כך נראה גרף קנזר של $n=5,k=2$: $KG_{5,2}$



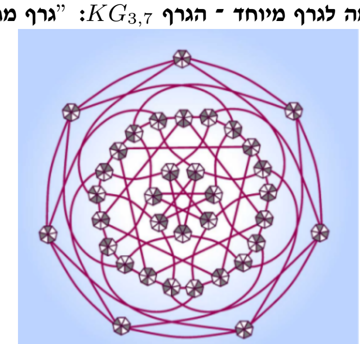
טענה: יהי גרף קנזר $KG_{n,k}$. אזי, מתקיים $|V| = \binom{n}{k}$ וכן $|E| = \frac{1}{2} \times \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{k}$
הוכחה: נשים לב, כי מס' הקודקודים בגרף הוא כל האפשרויות ליצירת תת קבוצה A של האיברים $[1, ...n]$ בגודל k. משיקולי קומבינטוריקה זה בדיוק $\binom{n}{k}$.
באשר למס' הצלעות - נשים לב כי:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg(v)$$

גרף קנזר הינו רגולרי, כל הקודקודים מהדרגה $\binom{n-k}{k}$, אנחנו למעשה מנסים לספור כמה שכנים יהיה לקודקוד v כלשהו בגרף. ובכן, נשים לב כי לאחר יצירת קבוצה עם k איברים, בשביל שיהיו שכנים נדרש למספרים זרים - אחרת לא יוכלו שני הקודקודים להיות שכנים, לכן ישנם $n-k$ מועמדים נוספים לקבוצה, n סה"כ פחות k לקבוצה שנוצרה. מהם צריך לבחור קבוצה בגודל k ולכן הדרגה הינה $\binom{n-k}{k}$. מכאן, כל שנותר הוא להכפיל ולקבל:

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg(v) = \frac{1}{2}|V| \times \binom{n-k}{k} = \frac{1}{2} \times \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{k}$$

דוגמה לגרף מיוחד - הגרף $KG_{3,7}$: "**גרף מגשי הפיצה עם 7 הסלייסים**"



טענה: אם $n \leq 2k-1$ אזי $KG_{n,k}$ הוא הגרף הריק.
הוכחה: יש לנו n איברים סה"כ. נרצה לבחור שתי קבוצות זרות בגודל k. אם A, B הינן שתי קבוצות זרות אזי $|A| = |B| = k$, סה"כ אנו זקוקים לפחות ל$2k$ איברים. אם $n < 2k$ כלומר

$n \leq 2k-1$, אזי אין מספיק איברים בשביל ליצור קשת בניהם כי אז החיתוך בוודאות לא ריק, ולכן במקרה זה נקבל את הגרף הריק.

טענה: $KG_{n,1}$ הוא קליקה (הגרף המלא).

טענה: גרף $KG_{5,2}$ הוא גרף פטרסן.

טענה: בגרף $KG_{n,k}$ יש קבוצה בלתי תלויה מגודל $\binom{n-1}{k-1}$
הוכחה: נקבע איבר אחד, בה"כ האיבר n.
נגדיר את הקבוצה

$$A = \{S \subseteq \{1, ...n\} : |S| = k \wedge n \in S\}$$

כלומר, A היא כל תתי הקבוצות בגודל k שמכילות את n.
נשים לב כי זו קבוצה בלתי תלויה, אם $S_1, S_2 \in A$, אזי: $n \in S_1, n \in S_2$ ולכן $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ (כל הקבוצות חולקות את n לפחות), סה"כ נקבל כי A קבוצה בלתי תלויה - אין בניהם צלעות.
מה גודלה של A? כל תת קבוצה בA מכילה את n ועוד $k-1$ איברים שנבחרים מתוך האיברים $\{1, ..., n-1\}$, כלומר סה"כ בוחרים $k-1$ איברים מתוך $n-1$ איברים, וזה בדיוק: $\binom{n-1}{k-1}$.

טענה: בגרף $KG_{n,k}$ יש קליקה מגודל $\lfloor \binom{n}{k} \rfloor$
הוכחה: נסתכל על הקבוצות הזרות הבאות -

$$\{1, ..., k\}, \{k+1, ..., 2k\}, ..., \{(\left\lfloor \binom{n}{k} \right\rfloor - 1)(k+1), ..., \left\lfloor \binom{n}{k} \right\rfloor k\}$$

הן קבוצות זרות לחלוטין, יש $\lfloor \binom{n}{k} \rfloor$ תתי קבוצות כאלו, ואכן כל קבוצה תחובר לכל הקבוצות האחרות כי הן זרות - ולכן קיימת קליקה בגודל זה.

5.5 עצים

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט. G נקרא עץ אם הוא קשיר וחסר מעגלים.

יער: יער הוא גרף פשוט שכל אחד מרכיבי הקשירות שלו הוא עץ. כלומר - גרף ללא מעגלים.

טענה: יהיו שני קודקודים v, u בעץ G. אזי קיים בניהם מסלול יחיד.

טענה: יהי G עץ. נסמן $|V| = n$. אזי, $|E| = n - 1$.

(אינטואיציה: גרף קשיר חסר מעגלים, זה נראה כמו עץ. לכל צומת, יש קשת אחת שמתחברת אל קודקוד אחר במעלה העץ. פרט לשורש).
הוכחה: באינדוקציה.
בסיס: $n = 1$ ברור מאליו.
צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.

בעץ קיים בדיוק מסלול אחד בין כל שני צמתים. יהי השורש r. נבחר קשת e שרירותית ונסירה. נקבל שני רכיבי קשירות שגודלם $|V_1|,|V_2|$ בהתאמה. עבורם מתקיימת הנחת האינדוקציה ומתקיים כי מס' הקשתות בהם $|V_1|-1,|V_2|-1$ בהתאמה. מכאן שסה"כ הקשתות -

$$|V_1|-1+|V_2|-1+1=n-1$$

טענה: בכל עץ בעל $n>1$ קודקודים קיים עלה.

הוכחה:

יהי עץ $G=(V,E)$. נב"ש כי בעץ אין עלה. כלומר, לא קיים קודקוד v כך ש$deg(v)=1$. בפרט, כיוון שהעץ קשיר, משמעות הדבר היא שלכל קודקוד $u\in V$ מתקיים $deg(u)\geq 2$. כלומר, $\sum_{u\in V}deg(u)\geq 2|V|$, אם כן בעץ מתקיים $|E|=|V|-1$ כלומר $|V|=|E|+1$. כלומר קיבלנו

$$\sum_{u\in V}deg(u)\geq 2|V|=2|E|+2$$

בסתירה! ללמת לחיצת הידיים שטוענת $\sum_{u\in V}deg(u)=2|E|$

משפט השלישי חינם לעצים: יהי G גרף עם n קודקודים. G הוא עץ אם הוא מקיים שניים מההבאים לפחות:

א. G קשיר

ב. G חסר מעגלים

ג. $|E|=n-1$

טענה: G הוא עץ $(1)\iff G$ הוא חסר מעגלים מקסימלי (תוסיף קשת אחת ותקבל מעגל) $(2)\iff$ G הוא קשיר מינימלי (תוריד קשת אחת תקבל שלא קשיר) (3)

הוכחה: נצטרך להוכיח את הגרירות הבאות:

$(1)\Longrightarrow(2)$. נניח כי G הוא עץ. נוכיח כי G הוא חסר מעגלים מקסימלי. נניח בשלילה כי ישנו גרף $G\prec H=(V,E')$, כלומר יותר גדול מG שהוא גם עץ. נשים לב כי G הינו עץ, בפרט הוא קשיר וחסר מעגלים. נשים לב כי $|E'|>|E|$ בוודאות ולכן קיימת $e\in E'\backslash E$, נסמן את שני קודקודיה $e=(u,v)$. קשת זו לא הייתה קיימת בגרף G, עם זאת ישנו מסלול בG מv לu כיוון שG הוא קשיר. נסמן את המסלול $P=(v,v_0,...,v_k,u)$ (הערה, בוודאות אורך המסלול הנ"ל הוא מגודל של≤ 3 קודקודים כי לא קיימת קשת $u\rightarrow v$ בG אך כן קיים מסלול בניהם) , מסלול זה מופיע גם בH, כיוון שרק הוספנו קשתות אל G וקיבלנו את H. כעת נשרשר את הקשת e לP בתוך הגרף H. נקבל את המסלול $P\circ E=(v,v_0,..,v_k,u,v)$ שהוא מעגל, בסתירה לכך שH חסר מעגלים. סה"כ סתירה, G חסר מעגלים מקסימלי.

$(1)\Longrightarrow(3)$: נניח כי G הוא עץ. נוכיח כי G הוא קשיר מינימלי. נניח בשלילה כי ישנו גרף $H=(V,E')\prec G$ ביחס להכלה. כלומר, גרף יותר קטן מG שהוא קשיר. משמעות הדבר, היא כי קיימת בG קשת שלא קיימת בH: $\exists e=(v,u)\in E/E'$. H קשיר ולכן קיים בו מסלול מv לu: $P=(v,v_0,...,v_k,u)$, נשים לב כי מתקיים כי מס' הקודקודים במסלול זה הוא לפחות 3, כי אם הוא 2 משמעות הדבר שישנה קשת בין v לu מה שלא יתכן כי אנחנו בדיוק מדברים על שני קודקודים שאין בניהם קשת בH. מסלול זה, קיים גם בG, כיוון שלא ירדו צלעות במהלך יצירת H פרט לe שלא נמצאת במסלול. נשרשר את המסלול בG: $P\circ e=(v,v_0,...,v_k,u,v)$ וקיבלנו מעגל בG, בסתירה לכך שG הוא עץ ובפרט חסר מעגלים. סה"כ אכן G הוא קשיר מינימלי.

$(1) \Longrightarrow (3)$: נניח כי G הוא קשיר מינימלי ונניח כי G הוא עץ. G קשיר מינימלי ובפרט קשיר, נרצה להוכיח שהוא חסר מעגלים. אם נוכיח זאת אזי G אכן עץ. נניח בשלילה כי קיים מעגל בG, נסמנו $C = (v_0, v_1, ..., v_k, u, v_0)$, נסמן ב$e = (u, v_0)$ ונרצה להוכיח G/e עדיין קשיר. יהיו x, y קודקודים. נרצה להוכיח כי קיים ביניהם מסלול. אם המסלול (שהיה קיים, כי G קשיר) בין הקודקודים בG לא השתמש בקשת e אזי המסלול קיים גם בG/e. אחרת, נסמן את המסלול בין הקודקודים x לy בG שהשתמש בe:

$$P = x \rightsquigarrow u, e, v_0 \rightsquigarrow y$$

וכעת נבנה את המסלול הבא:

$$P' = x \rightsquigarrow u, u \to v_k \to v_{k-1} \to .... \to v_1 \to v_0, v_0 \rightsquigarrow y)$$

(כלומר נלך אחורה במעגל), מסלול זה מוגדר בG/e כי לא כולל את הקשת e, וסה"כ G/e קשיר. בסתירה לכך שG קשיר מינימלי, שהרי $|E'| = |E| - 1 < |E|$ בסתירה.

$(1) \Longrightarrow (2)$: נניח כי G הוא חסר מעגלים מקסימלי, ונוכיח כי G הוא עץ. G חסר מעגלים, לכן אם נוכיח כי הוא קשיר הוכחנו כי הוא עץ. נב"ש כי G לא קשיר. כלומר, קיימים זוג קודקודים x, y שלא קיים מסלול ביניהם. נבנה את הגרף הבא: $G \cup e = (x, y)$, כלומר נוסיף את הקשת e לגרף G. כעת, ישנו מסלול בין x לy. נוכיח כי $G \cup e$ חסר מעגלים. נראה כי לא היו מעגלים קודם בגרף, המקום היחיד שיכל להיווצר בו מעגל הוא היכן שהוספנו את הקשת e. אם זאת, לא יתכן שנוצר שם מעגל. בין הקודקודים x וy לא היה מסלול קודם לכן, הם היו ברכיב קשירות זר. בשביל שמעגל יווצר ברכיב קשירות זה, ישנם שתי אפשרויות: להוסיף 3 קשתות בתוך רכיב הקשירות, או לחבר את הקודקודים לרכיב קשירות אחר. עם זאת, לא חיברנו אותם לרכיב קשירות אחר אלא רק הוספנו קשת אחת לגרף. מכאן, ש$G \cup e$ חסר מעגלים. נשים לב כי $|E_{G \cup e}| = |E_G| + 1 > |E_G|$, בסתירה לכך ש$G$ הוא חסר מעגלים מקסימלי.

טענה: בכל עץ כך ש$n \geq 2$ קיימים לפחות 2 עלים.

טענה: בהינתן $n = |V|$ ישנם $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים אפשריים. (יש $\binom{n}{2}$ אפשרויות לקשתות).

טענה: כל ההגדרות הבאות שקולות לעץ -
א. G קשיר ואין בו מעגל
ב. בG אין מעגל פשוט, אך אם נוסיף לו קשת אחת יווצר בו מעגל פשוט (חסר מעגלים מקסימלי)
ג. G קשיר, אך אם נוריד ממנו קשת אחת הוא כבר לא יהיה קשיר (קשיר מינימלי)
ד. בין כל שני קודקודים בG קיים מסלול יחיד
ה. G קשיר ויש בו $n - 1$ קודקודים
ו. בG אין מעגל פשוט, ויש בו $n - 1$ קודקודים.

עץ פורש: תת גרף פורש (כל הקודקודים מופיעים) של G שהוא גם עץ.

טענה: G הוא קשיר $\Longleftrightarrow$ G מכיל עץ פורש.
הוכחה:
$\Longleftarrow$ נניח כי G הוא קשיר. נסמן בH את כל תתי הגרפים הקשירים של G, שקבוצת הצמתים שלהם היא V. כמובן ש$G \in H$ ולכן $H \neq \emptyset$. לכן קיים לה יחס ההכלה - יהי $T = (V, E') \in H$

הגרף המינימלי ביחס ליחס ההכלה. T חסר מעגלים ־ אם T מכיל מעגל אזי אם נסיר כל קשת e מ־C נקבל תת גרף קשיר של G בסתירה למינימליות. מכאן ש־T גרף קשיר ללא מעגלים ולכן הוא עץ.

$\Longleftarrow$ נניח כי G מכיל עץ פורש, נוכיח כי הוא קשיר. נסמן את העץ הפורש T, T מכיל כל צומת ב־G ובפרט מכיל מסלול בין כל שני צמתים ב־G, T הוא תת גרף של G לכן מסלול זה קיים גם ב־G כנדרש.

הערה. ניתן להגדיר קודקוד שרירותי להיות **השורש** , ומכאן נוצר יחס של אב קדמון.
הערה. קודקוד בודד איננו עלה! עלה הוא קודקוד שדרגתו 1.

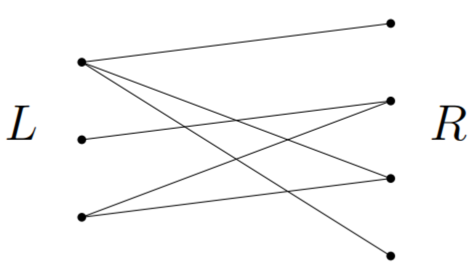
טענה: נתון גרף קשיר $G=(V,E)$ עם $n\geq 2$ קודקודים. אזי קיים קודקוד $v\in V$ כך שהגרף $G/\{v\}$ קשיר.

הוכחה: כיוון שהגרף G קשיר, הוא מכיל עץ פורש T. בכל עץ עם שני קודקודים לפחות ישנו עלה. נבחין כי המסלולים היחידים בהם עלה משתתף הם מסלולים בהם הוא קדקוד קצה)ראשון/אחרון(. לכן, אם ננתק עלה v מ־T, המסלולים בין כל זוגות הקודקודים שנותרו יישארו כפי שהיו, כלומר שאר הקודקודים ישארו מקושרים אחד לשני וכך גם בכל גרף שמכיל את $T/\{v\}$ זה ובפרט בגרף $G'=G/\{v\}$.

5.6 גרפים דו צדדיים

הגדרה: גרף $G=(V,E)$ הוא גרף דו צדדי אם V יכול להתחלק לשתי קבוצות כך ש־$V=L\sqcup R$ כך ש:

$$E\subseteq\{\{u,v\}|u\in L,c\in R\}$$



כך נראה גרף דו צדדי.

הערה. הסימון $\sqcup$ מעיד על איחוד זר.

גרף דו צדדי מלא: יסומן גרף $K_{l,r}=(V,E)$ גרף דו צדדי מלא ־ מתקיים כי $|L|=l,|R|=r$ וכן $E=\{\{u,v\}|u\in L,c\in R\}$

טענה: כל עץ הוא גרף דו צדדי.
(הסבר: נשים את כל השכבות האי זוגיות של העץ בצד ימין, הזוגיות בצד שמאל ונקבל גרף דו"צ)
טענה: כל גרף מעגל זוגי הוא דו צדדי
(הסבר: נבחר קודקוד שרירותי לשמאל, שכניו יהיו בצד ימין, השכנים שלהם בצד שמאל וכן הלאה לסירוגין. זה יבטיח גרף דו"צ, זה אפשרי רק במעגל זוגי).

♡ גרף מעגל אי זוגי הוא בהכרח לא דו"צ כי לא ניתן לחלק מס' אי זוגי ל2 (מפתיע מאוד).

כיצד נבדוק האם גרף הוא גרף דו"צ? רעיון לאלגוריתם - נתחיל בקודקוד בצד אחד, נלך אל שכניו, אם הם בצד השני מעולה, ונלך לשכנים שלהם.. כך נמשיך עד שנהיה בצד הלא נכון או שנסיים. וסה"כ נקבל אלגוריתם בעלות $O(|V|)$

5.6.1 משפט קוניג

טענה: גרף הוא דו"צ $\iff$ כל מעגל פשוט בG הוא באורך זוגי.

הוכחה:

נעזר בהוכחה בשתי למות.

למה 1. גרף הוא דו צדדי $\iff$ כל טיול מעגלי בG הוא באורך זוגי.

למה 2. כל מעגל פשוט בG הוא באורך זוגי $\iff$ כל טיול מעגלי בG הוא זוגי

חיבור שתי הלמות נותן באופן ברור את הטענה. מכאן נוכיח את הלמות:

הוכחת למה 1:

$\Longleftarrow$ נניח כי G דו"צ, אזי $V = L \cup R$. יהי טיול מעגלי בG. $(v_0, ..., v_q = v_0)$, אורך הטיול הנ"ל הוא q. בה"כ $v_0 \in L$ ומכאן $v_1 \in R$ ומכאן $v_2 \in L$ ובאופן כללי $v_{2i} \in L$ ו$v_{2i+1} \in R$. מכאן, $v_q = v_0 \in L$ ומכאן ש$q = 2i$ עבור i כלשהו, ולכן q זוגי, כנדרש.

$\Longrightarrow$ נניח כי כל טיול מעגלי הוא באורך זוגי. נרצה לחלק את קבוצת הקודקודים לשניים.

(ניתן להניח שהגרף קשיר, כי אחרת נפעיל על כל רכיב קשירות בנפרד)

בקיצור - קשיר ולכן קיים מסלול בין כל שני קודקודים. יהי $v \in V'$ כלשהו ונסמן

$\{L= V \ni u$ כך שהמסלול הקצר ביותר מv לu באורך זוגי$\}$

$\{R= V \ni u$ כל הקודקודים כך שהמסלול הקצר ביותר מv לu באורך אי זוגי.$\}$

נב"ש כי קיימת $e = (x, y)$ כך ש$x, y \in L$ (בה"כ). ישנו מסלול מx אל v זוגי, ומסלול מx אל v זוגי. אם נשרשר את המסלול מx אל v, מv אל y ומy את הצלע e, נקבל מסלול באורך אי זוגי (זוגי+זוגי+1=אי זוגי).

סה"כ אכן הקבוצות זרות.

הוכחת למה 2:

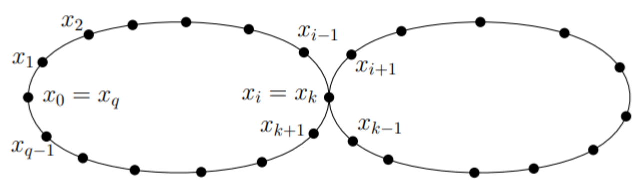
$\Longleftarrow$ אם כל טיול מעגלי הוא זוגי, בפרט כל מעגל פשוט הוא מעגלי. כי מעגל פשוט הוא טיול מעגלי.

$\Longrightarrow$ נניח כי כל מעגל פשוט באורך זוגי ונוכיח כי כל טיול מעגלי הוא באורך זוגי.

נניח בשלילה כי קיים טיול מעגלי הקצר ביותר באורך אי זוגי . יהי $C = (x_0, ., x_i = v, x_{i+1}, .., x_k = v, x_{k+1}, .., x_q = x_0)$ הטיול המעגלי הקצר ביותר באורך אי זוגי, C אינו מעגל פשוט כי הנחנו שאין מעגל פשוט מאורך אי זוגי. מכאן, ישנו קודקוד שחוזר על עצמו, נסמנו $x_i = x_k = v$.

מכאן שנקבל שני טיולים מעגליים $C_1 = (x_0, ..., x_i, x_{k+1}, .., x_q = x_0), C_2 = (x_{i,}, ..., x_k)$.

מתקיים $|C_1| + |C_2| = |C| = q$, C באורך אי זוגי ולכן בוודאות אחד משני המעגלים באורך אי זוגי, בסתירה לכך שC הוא הטיול המעגלי הקצר ביותר באורך אי זוגי.

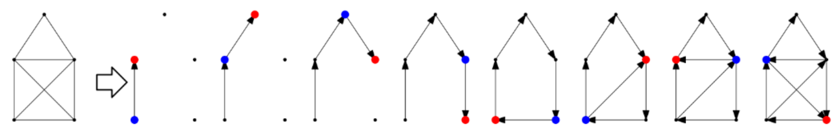


טענה: בגרף דו"צ עם n קודקודים מס' הצלעות המקסימלי הינו $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

5.7 מעגלי אוילר

הגדרה: בהינתן מולטי גרף $G=(V,E)$, מעגל אוילר הוא מעגל $C=(x_0,....,x_m)$ שעובר על כל צלע **בדיוק** פעם אחת. (במעגל רגיל זה לכל היותר פעם אחת, כאן זה בדיוק).
מסלול אוילר הוא מסלול $C=(x_0,....,x_m)$ שעובר על כל צלע פעם אחת.
נשים לב - כל מעגל אוילר הוא מסלול אוילר, אך לא להפך.

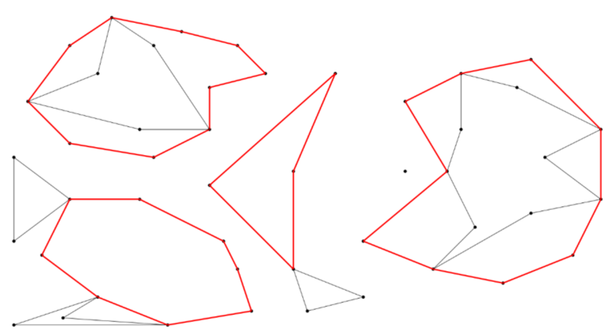
דוגמה למסלול אוילר. נשים לב כי ליצור מעגל אוילר שקול לבעיה: "כיצד נצייר גרף מבלי להרים את העט מהדף ולא אעלה על מקום בו ציירתי כבר?"



הערה. נשים לב כי במסלול רגיל אסור לעבור על אותה צלע פעמיים. אם כך, מה ההבדל? במסלול אוילר אנו מחויבים לעבור על כל הצלעות בגרף.

טענה: יהי G מולטי גרף קשיר. אזי,
בגרף G יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ כל הדרגות בG זוגיות

הוכחה:
$\Longleftarrow$ נניח כי בגרף G יש מעגל אוילר $C=(x_0,...,x_m)$. נוכיח כי $\forall v\in V: deg(v)mod2=0$.
יהי $u\in V$ כך ש$u\neq x_0$.
$u\in C$ כי C מעגל אוילר והוא קשיר, ולכן חייבים לעבור בצלע שחלה בu, ובפרט $u\in C$. יהיו $x_{i_1},.....,x_{i_k}$ כל המופעים של u במעגל C. הצלעות שחלות על u הן: $\{(x_{i_j-1},x_{i_j}),(x_{i_j},x_{i_j+1})\}$, כיוון שזהו מעגל אוילר - ספרנו את כל הקשתות בדיוק פעם אחת (לא יתכן שחזרנו על צלע כי מעגל, לא יתכן שחסרות צלעות כי אוילר). מכאן נקבל כי $deg(u)=2k$ ולכן הדרגה זוגית.
אחרת, $u=x_0$. כל מופע של $x_0\in C$ פרט לראשון והאחרון, תורם שניים (בדומה להוכחה מעלה כאן), הראשון והאחרון תורמים כל אחד 1, ולכן סה"כ $degu=2k+2=2(k+1)$ שזהו מס' זוגי.
$\Longrightarrow$ נניח כי כל דרגות הגרף זוגיות.
רעיון ההוכחה יהיה כמו בתמונה - נמצא מעגלי אוילר בתוך הגרף, ולבסוף נשרשר אותם:



פורמלית, נוכיח באינדוקציה על מס' הצלעות m, כי כל גרף קשיר עם m צלעות שכל הדרגות בו זוגיות מכיל מעגל אוילר.
בסיס: $m=0$, גרף ריק שהינו קשיר ולכן $n=1$, הדרגה שלו היא 0 שאכן זוגית ומכיל מעגל.
צעד: נניח נכונות לכל גרף עם $m'<m$ צלעות, נוכיח על גרף עם m צלעות.
יהי גרף קשיר עם m צלעות בו כל הדרגות זוגיות. מלמת לחיצות הידיים, $2m=\sum_{v\in V}deg(v)$,
נשים לב כי זהו גרף קשיר וכן הדרגות זוגיות לכן $deg(v)\geq 2$ כלומר נקבל $2m=\sum_{v\in V}deg(v)\geq$

$2n$ ובפרט נקבל $m \geq n$ כלומר ישנם יותר צלעות מקודקודים, וזהו לא עץ, ולכן בG יש מעגל.

נסמן את המעגל $C = (x_0, ..., x_j)$, נגדיר $G' = G/C$, נשים לב כי בG' מתקיים $|E'| < m$ וכן כל הדרגות בG' זוגיות כיוון שהורדנו מעגל בו כל דרגה הייתה זוגית (אינטואטיבית במעגל מכל קודקוד יש כניסה ויציאה). מתקיים $deg_G(v) = deg_C(v) + deg_{G'}(v)$, מתקיים כי $deg_G(v), deg_C(v)$ זוגיים ולכן גם $deg_{G'}(v)$ זוגית.

כמו כן, נשים לב כי בשביל להפעיל את הנחת האינדוקציה צריך להוכיח G' קשיר. אמנם, הוא לא קשיר.

יהיו $A_1, ..., A_k$ רכיבי הקשירות של G'. בכל רכיב קשירות, כל הדרגות הינם זוגיות. (לאינטואיציה, רכיבי הקשירות הם האדומים בתמונה). כל רכיב קשירות A_i הוא קשיר, מס' הצלעות בו קטן מm, ודרגותיו זוגיות, ולכן בכל אחד מרכיבי הקשירות קיים מעגל אוילר C_i.

כעת נשים לב, כיוון שG קשיר, קיים $y_i = x_{j_i} \in C_i \cap C$ (אחרת, לא ניתן להגיע מקודקודי C אל קודקודי C_i), כלומר המעגל המקורי נראה כך בה"כ: $x_0, x_1, ..., x_{j_1}, .., x_{j_2}, ..., x_{j_k}, ..., x_j$ שכן מכל רכיב קשירות יש חיתוך עם המעגל, אחרת לא ניתן להגיע בניהם בסתירה לכך שG קשיר. כעת נרצה לשרשר את המעגלים למעגל המקורי:

$$C_e = (x_0, ..., x_{j_1}, C_1, x_{j_1+1}, ..., x_{j_2}, C_2, x_{j_2+1}, ..., x_{j_k}, C_k, x_{j_k+1}, ..., x_j)$$

קיבלנו סה"כ את הגרף G, עם מעגל אוילר C_e, כנדרש.

$\blacksquare$.

טענה: יהי G גרף מכוון, קשיר חזק.
בגרף G יש מעגל אוילר $\iff \forall v \in V : deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$

טענה: יהי G גרף פשוט קשיר.
G מכיל מסלול אוילר $\iff$ G מכיל 0 או 2 קודקודים מדרגה אי זוגית.

טענה: אם בגרף 2 דרגות אי זוגיות והיתר זוגיות, מסלול אוילר הקיים (לפי טענה קודמת) מתחיל ומסתיים בקודקודים שדרגתם אי זוגית.

טענה: יהי $G = (V, E)$ גרף בעל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר (לפחות אחד). אזי, ניתן להוסיף לG קודקוד בודד ומס' צלעות ולקבל גרף חדש G' בו כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.
הוכחה: אנו יודעים כי גרף מכיל מעגל אוילר אמ"מ לכל קודקוד בו דרגה זוגית. לכן, בהכרח כל רכיב קשירות שכזה שאין בו מעגל אוילר מכיל דרגות שאינן זוגיות. נשים לב כי בכל רכיב קשירות סכום הדרגות זוגי (למת לחיצת הידיים), לכן מס' הקודקודים שדרגתם אי זוגית הוא זוגי בכל רכיב קשירות. נוסיף לG קודקוד s ממנו נחבר קודקוד לכל דרגה אי זוגית בG. נקבל גרף חדש G' בו בבירור לכל קודקוד $v \in V \cup \{s\}$ ישנה דרגה זוגית. קודקוד שקודם היה זוגי לא השתנה וקודקוד שהיה אי זוגי עלה באחד דרגתו לזוגית. כעת כיוון שמס' הקודקודים שדרגתם אי זוגית בכל רכיב קשירות הוא זוגי, נקבל כי גם מס' הקודקודים שמחוברים לs זוגי ולכן דרגת s זוגית. מכאן לכל הקודקודים בG' דרגה זוגית ולכן G מכיל מעגל אוילר בכל רכיב קשירות.

5.8 מעגלי המילטון

הגדרה: בהינתן גרף $G = (V, E)$, נאמר כי מסלול המילטון הוא מסלול פשוט $P = (x_0, ..., x_{n-1})$ שעובר על כל הקודקודים.
הבהרה. מסלול המילטון הוא כמו מסלול פשוט רגיל, רק שבניגוד למסלול פשוט הוא מחוייב לבקר בכל $v \in V$.

הבהרה נוספת. במסלול אוילר אנחנו דורשים לבקר בכל צלע פעם אחת, במסלול המילטון דורשים לבקר בכל קודקוד.

הגדרה: בהינתן גרף $G=(V,E)$, מעגל המילטון הוא מעגל פשוט (ללא צלעות שחוזרות על עצמן, וללא קודקודים שחוזרים על עצמם פרט לראשון והאחרון) $C=(x_0,...,x_n)$ שעובר על כל הקודקודים.

הערה: אין דרך מפורשת להכריע האם במעגל קיים מסלול/מעגל המילטון. זו בעיית NP- קשה. כלומר, בהינתן גרף G לא קיים אלגוריתם **יעיל** שבודק האם בG יש מעגל/מסלול אוילר.

טענה: הגרף הדו צדדי השלם $K_{p,q}$ מכיל מעגל המילטון אמ"מ $p=q$.

טענה: בגרף הדו צדדי השלם $K_{p,q}$ קיים מסלול המילטון $\iff |p-q|\leq 1$

טענה: אם $n\geq 2$ בגרף $G=(V,E)$, וסכום הדרגות של שני קודקודים הוא לפחות $n-1$ אזי יש בגרף מסלול המילטון. (הוכחה ישירה אם נקח גרף ונוסיף לו קודקוד וצלע לכל שאר הקודקודים בגרף. נקבל את המקרה של משפט אורה. ואז: אם נסיר את הקודקוד המעגל ממשפט אורה ירד בקודקוד אחד ונקבל מסלול המילטון).

5.8.1 בעיית הסוכן הנוסע

אינטואטיבית.˙ ישנה מפה של ערים, וישנו סוכן. הוא מעוניין למצוא מעגל כך שהוא מתחיל במדינה בה הוא נמצא, עובר בין כל המדינות וחוזר להיכן שהוא נמצא ומטרתו היא שאורך המסלול שלו יהיה הקצר ביותר.

הגדרה: יהי $G=(V,E,w)$ גרף ממושקל. המטרה היא למצוא מעגל המילטון עם משקל מינימלי.

מינוח. גרף ממושקל הוא גרף בו קיימת פונקציה $w:e\to\mathbb{R}$ על הקשתות. משקל על מסלול יהיה סכום המשקלים על הצלעות במסלול.

בעיית הסוכן הנוסע היא בעיית אופטימיזציה NP קשה. כלומר, לא קיים אלגוריתם יעיל בזמן פולינומי שיודע להכריע את הבעיה. **בקורס אלגוריתמים מתקדמים, נלמד אלגוריתם קירוב לבעיה.**

5.8.2 משפט אורה

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, קשיר, המקיים $n\geq 3$, כך שלכל זוג שאינם שכנים v,u מתקיים $deg_G(v)+deg_G(u)\geq n$, אזי G מכיל מעגל המילטון.

זהו תנאי מספיק למעגל המילטון - איננו תנאי הכרחי. (למשל, מעגל לא מקיים את התנאי הזה, אך יש בו מעגל המילטון. למשל גרף מעגל שיש בו מעגל המילטון אך לא מתקיים התנאי).
זה תנאי הדוק. כלומר, אם לכל שני שכנים מתקיים שסכום הדרגות גדול שווה מ$n-1$, (ולא מn) אזי לא קיים שם מעגל המילטון (כדוגמה כללית, אם נקח את $K_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}$ מתקיים לכל זוג קודקודים כי סכום הדרגות שלהם הוא $n-1$, אבל אין בו מעגל המילטון כי מכל מסלול שתקח יתחיל בצד אחד ולא יוכל לחזור לאותו קודקוד).

הוכחה:

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, אשר $n\geq 3$. כך שלכל זוג שכנים מתקיים הדרוש. נב"ש כי בG לא קיים מעגל המילטון. נניח כי G יהיה הגרף המקסימלי (ביחס להכלה), כלומר אם נוסיף לו עוד צלע הוא כבר יכיל מעגל המילטון.

יהיו $v,u\in V$ שאינם שכנים, ונסמן $e=(v,u)$, נביט ב$G'=G\cup e$

ממקסימליות, בG' קיים מעגל המילטון. נשים לב כי הצלע e נמצאת במעגל המילטון הנ"ל, כיוון שבG לא היה מעגל המילטון, והדבר היחיד ששונה בגרף הנוכחי הוא תוספת הצלע e ולכן היא בוודאות חלק מהמעגל.

נסמן את מעגל המילטון הנ"ל $C = (x_0 = u, .., x_{i-1}, x_i..., x_{n-1} = v)$, נניח כי x_i הוא שכן של u, נשים לב כי x_{i-1} איננו שכן של v, כי אם כך היה הדבר היינו יכולים לבצע את המסלול $u \to x_{i-1} \to v \to x_i \to u$ שזה מעגל בG, סתירה לכך שלא קיים בG מעגל המילטון.

כלומר - אם קודקוד x_i כלשהו הוא שכן של u, אזי הקודם לו x_{i-1} איננו שכן של v.

נעיר כי היינו זקוקים לגרף G' בשביל ההנחה הנ"ל אודות x_i, x_{i-1} **.** כעת נחזור לגרף G, נגדיר:

$$I = \{i | (u, x_i) \in E\}$$

$$I^- = \{i - 1 | i \in I\}$$

כעת, $|\Gamma_G(v)| \le n - 1 - |I^-| = n - 1 - |I|$, כיוון שדרגה של קודקוד היא לכל היותר $n - 1$, וראינו כי כל הקודמים של x_i לא יכולים להיות שכנים של v. נשים לב כי $|I^-| = |I|$. כמו כן, נשים לב כי $|I| = deg_G(u)$, וכן $|\Gamma_G(v)| = deg_G(v)$, סה"כ קיבלנו

$$deg_G(v) \le n - 1 - deg_G(u) \Longrightarrow deg_G(v) + deg_G(u) \le n - 1$$

בסתירה, לתנאי אורה.

5.8.3 משפט דיראק

יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט עם $n \ge 3$ קודקודים. אזי אם $\delta(G) = min_{v \in V} deg(v) \ge \frac{n}{2}$, אזי G מכיל מעגל המילטון.

הוכחה:

נשים לב כי זהו מקרה פרטי של משפט אורה. אם הדרגה המינימלית היא $\frac{n}{2}$, אזי בפרט סכום שני קודקודים שאינם שכנים הוא לפחות $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, וכללי משפט אורה מתקיימים = כלומר יש בG מעגל המילטון.

6 זיווגים

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף, זיווג הוא תת קבוצה של קשתות $M \subseteq E$ בלי קודקודים משותפים, זרה בקודקודים. (כלומר, כל קודקוד יכול להשתתף רק בצלע אחת).

הגדרה שקולה - זיווג הוא תת קבוצה של קשתות M אם כל קודקוד מופיע לכל היותר פעם אחת בצלע בM.

הגדרה: קודקוד v נקרא M-רווי אם הוא נמצא באחת הצלעות של M, אחרת v נקרא M-בלתי רווי

זיווג מושלם: זיווג נקרא זיווג מושלם אם כל הקודקודים בגרף רוויים, כלומר $|M| = \frac{n}{2}$ (או במילים אחרות, אם כל קודקוד $v \in V$ נמצא באחת הצלעות של הרווי).

זיווג מקסימלי: M נקרא זיווג מקסימלי $\Longleftrightarrow$ לא קיים זיווג M' כך ש$M \subset M'$. (כלומר, לא ניתן להוסיף עוד צלע לM בלי לשבור את תכונת הזיווג. כלומר כל צלע שנרחיב תהיה עם קודקוד

משותף לצלע שכבר קיימת). מקסימלי זה ביחס להכלה.

זיווג מקסימום: M נקרא זיווג מקסימום $\Longleftrightarrow$ לא קיים זיווג M' כך ש$|M'| > |M|$ (כלומר, M הוא הזיווג עם הכי הרבה צלעות שאפשר בגרף G).

דוגמה. הגרף $a-b-c-d$. הזיווג $\{b,c\}$ הוא מקסימלי, לא ניתן להוסיף עוד צלע לזיווג מבלי לשבור את תכונת הזיווג, עם זאת הוא אינו מקסימום שכן הזיווג $\{a,b\},\{c,d\}$ הוא זיווג גדול יותר.

נשים לב ־ זיווג מושלם $\Longleftarrow$ זיווג מקסימום $\Longleftarrow$ זיווג מקסימלי

נשים לב. בהינתן גרף, נרצה למצוא זיווג מקסימלי. נוכל לעשות זאת באמצעות אלגוריתם חמדן: עבור על כל קשת, והוסף קשת היכן שאתה יכול (אם שני הקצוות שלה לא מופיעים כבר). זה עובד ־ זמן הריצה יהיה לינארי.
מה באשר לזיווג מקסימום?

6.0.1 משפט ברג

מסלול אלטרנטיבי (מתחלף): בהינתן זיווג M, מסלול $(e_1,...,e_m)$ נקרא זיווג מתחלף אם הוא מכיל קודקודים בין צלעות בM לבין צלעות שאינן בM לסירוגין. .
מסלול מתחלף נקרא **מרחיב** $P=(v_0,...,v_k)$ אם $v_0 \neq v_k$ וכן שניהם לא רוויים. (לא בזיווג).

משפט ברג: בהינתן גרף $G=(V,E)$ וזיווג $M \subseteq E$. M הוא זיווג מקסימום $\Longleftrightarrow$ אין מסלול מתרחב מחליף.
אינטואיציה: המשפט למעשה אומר כי מסלול M־מרחיב P יכול לעזור לנו להרחיב את M לזיווג טוב יותר ממנו. פעולת ההרחבה היא למעשה הפרש סימטרי. בהינתן זיווג M ומסלול M מרחיב P, נוכל להרחיב את M לזיווג חדש M' שגדול יותר מM על ידי $E(P)$ (הקשתות על גבי המסלול)

$$M' = M \triangle E(P) = (M \backslash E(P)) \cup (E(P) \backslash M)$$

הוכחה:
$\Longrightarrow$ נניח בשלילה שM זיווג מקסימום אך קיים מסלול מתרחב מחליף. נסמן $P=(v_0,...,v_{2k+1})$. (בהכרח אי זוגי כי יש צלעות בזיווג וצלעות שלא, כאשר מתחילים ומסיימים בצלע שאינה בזיווג).

$$P_{odd} = \{(v_{2i}, v_{2i+1}) | i \in [0,k]\}$$

$$P_{even} = \{(v_{2i-1}, v_{2i}) | i \in [1,k]\}$$

נגדיר $M' = M \cup P_{odd} \backslash P_{even}$. נשים לב כי $|M| > |M'|$ (גדול באחד בדיוק). נוכיח שM' זיווג ואם נעשה זאת נקבל סתירה לכך שM מקסימום.
טענה: M' זיווג.
לכל $x \notin P$ הסטטוס שלו ביחס לM לא השתנה וחלה עליו לכל היותר צלע אחת.
לכל $x \in P$, אם x_i כך ש$i \notin [0,2k-1]$ אזי חלה עליו צלע אחת בM כי בM' הורדנו והוספנו צלע ומכאן חלה עליו צלע אחת בM'.
אחרת (הקצוות), קודם היה לא מסופק ועכשיו הוספנו צלע בודדת.

סה"כ סתירה לכך שM זיווג מקסימום.

$\Longleftarrow$

נניח כי אין מסלול מתרחב מחליף ונוכיח כי M זיווג מקסימום.

נניח בשלילה כי M לא זיווג מקסימום. אזי, קיים זיווג M' כך ש$|M| < |M'|$. נרצה לבנות מסלול מתרחב מחליף ולהגיע לסתירה.

נגדיר $G' = (V, M \triangle M')$. נבחין כי הדרגה המקסימלית בG' הינה 2. ומכאן G' הוא איחוד של מסלולים ומעגלים. בכל מעגל שכזה כל הקודקודים מדרגה 2 (אחרת נקבל שיש קשת בין קודקודים באותו זיווג בסתירה). ולכן כל מעגל באורך זוגי (מס' הצלעות במעגל מM וM' זהות). בדומה, לכל מסלול P בG' זהו מסלול מתחלף בG כי על כל קודקוד חלה לכל היותר צלע אחת מכל זיווג. נראה כי בכל מסלול מתחלף שכזה, וראינו כי כל המסלולים והמעגלים כאלו, או שמתקיים שוויון בין מס' הצלעות של M' לשל M או שיש לפחות מסלול מתחלף אחד בו מס' הצלעות מM' גדול יותר (ממש). אחרת, נקבל כי $|M| \leq |M'|$ בסתירה. סה"כ קיים מסלול P בG' המקיים $|M' \cap P| < |M \cap P|$. נשים לב כי P הוא מסלול מתחלף מרחיב בG, שזה נובע מכך שP מתחלף והדרך היחידה לקבל יותר צלעות מM' זה אם נתחיל ונסיים בצלעות מM' (אחרת נקבל ממש שוויון). סה"כ סתירה להנחה. לכן בהכרח M זיווג מקסימום.

משפט ברג מספק לנו אלגוריתם למציאת זיווג מקסימום בגרפים. ראשית נאתחל את M להיות הקבוצה הריקה. לאחר מכן כל עוד קיים מסלול M מתחלף מרחיב, בצע $M = M \triangle P$. עם זאת זה לא אלגוריתם יעיל ויכול להגיע לזמן ריצה אקספוננציאלי.

סופר חשוב. נשים לב שבהינתן זיווג M וזיווג מקסימום M^* אם נסתכל על $M \triangle M^*$, בהכרח ישנם $|M^*| - |M|$ מסלולים M-מרחיבים זרים בצמתים.

אזי בהכרח הצמתים בו בדרגה של לכל היותר 2 שכן כל קודקוד יכול להיות בצומת אחת מM ובצומת אחת מM^*. מכאן, שבהכרח מדובר בגרף של מעגלים ומסלולים.

ישנם כמה סוגים של רכיבי קשירות:

א. מעגלים זוגיים ומסלולים זוגיים עם מס' זוגי של קשתות. נתעלם מהם, הם מכילים מס' זהה של קשתות משני הזיווגים.

ב. מסלולים עם קשת אחת יותר מM מM^* - זה מסלול M^* מרחיב, ולא יתכן מסלול שכזה שכן M^* מקסימום.

ג. מסלולים עם קשת אחת יותר מM^* מM. אלו מסלולים M מרחיבים - אנו מעוניינים בהם.

נראה כי בהכרח ישנם $k = |M^*| - |M|$ רכיבי קשירות מהסוג השלישי, מה שנותן k מסלולים M מרחיבים זרים בצמתים. מדוע חייבים להיות כאלו? רק רכיבי קשירות מהסוג השלישי מכילים יותר קשתות מM^* מבM ובחיסור הם לא יצטמצמו (כל אחד שכזה, יניב אחד לסכום שיתאר כמה כאלו יש).

6.0.2 גרפים שיש להם זיווג מושלם

טענה. לגרף מסלול קיים זיווג מושלם אממ המסלול באורך אי זוגי (מס' קודקודים זוגי).

טענה. לגרף מעגל קיים זיווג מושלם אמ"מ המעגל באורך אי זוגי (מס' קודקודים זוגי).

טענה. בקליקה קיים זיווג מושלם אמ"מ מס' הקודקודים זוגי.

בגרף קשיר עם מס' אי זוגי של קודקודים לא קיים זיווג מושלם.

בגרף לא קשיר עם רכיב קשירות בו מס' הקודקודים אי זוגי אין זיווג מושלם.

6.0.3 משפט טאט $Tutte$

סימון: $o(H)$ הוא מס' רכיבי הקשירות האי זוגיים בגרף H.

משפט טאט: בהינתן גרף $G = (V, E)$. בG יש זיווג מושלם $\Longleftrightarrow$ עבור כל קבוצה $S \subseteq V$ מתקיים $o(G \backslash S) \leq |S|$

(אינטואיציה ־ אם יש יותר רכיבי קשירות אי זוגיים ממס' קודקודי S, אין דרך לחבר את רכיבי הקשירות לכל קודקודי S חזרה כי אין מספיק קודקודים בS ואז לא נקבל זיווג מושלם (כי אין דרך לחבר רכיב קשירות כלשהו ולשמור על תנאי הזיווג) שכן נשים לב כי בכל אחד מרכיבי הקשירות האי זוגיים אין זיווג מושלם בהכרח (פשוט לא ניתן) ואז אם נב"ש $o(G\backslash S) > |S|$ אין מספיק קודקודים בS בשביל ליצור אח"כ זיווג מושלם.

נשים לב: אם נסתכל על S כקבוצה ריקה אזי $o(G) \leq 0$ כלומר מס' רכיבי הקשירות האי זוגיים הוא אפס ולכן כל רכיב קשירות מכיל מס' זוגי של קודקודים. סה"כ בגרף שמקיים את תנאי טט יש מס' זוגי של קודקודים.

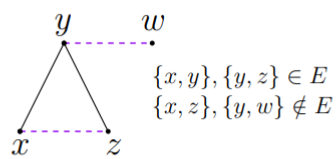
הוכחה:

$\Longleftarrow$ נניח כי קיים זיווג מושלם M ותהי $S \subseteq V$. נשים לב כי כל רכיב קשירות אי זוגי C של $G\backslash S$ חייב להזדווג אל S איכשהו (הוא רכיב קשירות אי זוגי). מכאן שM מכיל לפחות קודקוד אחד $v_c \in C$. נשים לב שכל רכיב קשירות אי זוגי מכיל מס' אי זוגי של קודקודים ובשביל לזווג את כולם יש לפחות קודקוד אחד שחייב להזדווג החוצה, ולכן בכל רכיב קשירות אי זוגי קיים לו קודקוד בS שהוא מזווג אליו. לכן בנינו פונקציה חד חד ערכית מ$o(G\backslash S)$ אל S ולכן $o(G\backslash S) \leq |S|$.

$\Longrightarrow$ נניח כי מתקיים תנאי טאט. כלומר לכל קבוצה $S \subseteq V$ אזי מתקיים $o(G\backslash S) < |S|$.

נניח בשלילה כי G הוא הגרף המקסימלי שאין בו זיווג מושלם. כלומר, הוספת קשת אחת תיצור זיווג מושלם.

בהוכחה נרצה להגיע אל המבנה הבא (מדוע? בהמשך נבין):



No perfect matching in G

נשים לב כי גרף זה אינו הקליקה כי בה יש זיווג מושלם אם היא זוגית (מקיימת את תנאי טט). נרצה לטעון שעבור כל $e \notin E$ אם נסתכל על $G' = (V, E \cup \{e\})$, נראה כי בהכרח אם נוכיח שG' מקיים את תנאי טט, בהכרח הוא מכיל זיווג מושלם.

כיצד הצלע e יכלה להשפיע?

אם $e \notin S$ אזי זה לא השפיע.

אם e מחברת בין שני רכיבי קשירות זוגיים קיבלנו רכיב קשירות חדש אי זוגי.

אם e מחברת בין שני רכיבי קשירות אי זוגיים קיבלנו רכיב קשירות חדש זוגי וירדו שני רכיבים אי זוגיים. לכן סה"כ מס' רכיבי הקשירות האי זוגיים ירד עוד, ותנאי טט ממשיך להתקיים.

סה"כ מצאנו גרף חדש G' שכל צלע שנוסיף לו תוביל אותו לזיווג מושלם בG'. (כי אמרנו שאם נוסיף צלע + מקיים תנאי טט =יש בו זיווג מושלם).

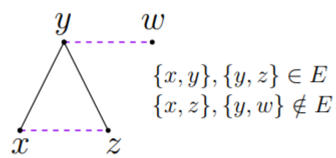
נגדיר $U = \{v | \forall u \{(u,v) \in E\}$. כלומר כל הקודקודים שהם שכנים של כולם (יתכן כי $U = \emptyset$).

נראה כי אם נסתכל על $G\backslash U$ לא יתכן כי רכיבי הקשירות שנשארו הם קליקות. אחרת, נקבל זיווג מושלם. בכל רכיב קשירות זוגי שדך אותם. בכל רכיב קשירות אי זוגי שדך את מי שאתה יכול, ומי שישאר לך שדך אותו עם קודקוד בU. את הקודקודים שנותרו בU שדך גם.

קיבלנו רכיב קשירות C שאינו קליקה לאחר הורדת U. לכן בהכרח ישנם שני קודקודים

v, z באותו רכיב קשירות שלא מחוברים (כי לא קליקה). בהכרח קיים מסלול בניהם ($v_0 =$ $v, ..., v_{q-2}, v_{q-1}, v_q = z$) ונניח שהוא הקצר ביותר. אזי נסמנם $x = v_{q-2}, y = v_{q-1}$ וכן נשים לב שקיים קודקוד w שלא שכן של y כי $y \notin U$ (הוא לא מהקודקודים שמחוברים לכולם). ולכן סה"כ מצאנו את המבנה השימושי הבא:

$\{x,y\},\{y,z\} \in E$ וכן $\{x,z\},\{y,w\} \notin E$. כלומר x שכן של y ששכן של z. וכן x לא שכן של z וy לא שכן של w.



No perfect matching in G

נראה כי כל צלע שנוסיף כעת בG תוביל לזיווג מושלם.
נשים לב כי אם נוסיף את (x,z) נקבל זיווג מושלם ונסמנו M_{XZ}. בהכרח $(x,z) \in M_{XZ}$. נראה כי אם נוסיף את הצלע (y,w) נקבל זיווג מושלם ונסמנו M_{YW} ובהכרח $(y,w) \in M_{YW}$.

נגדיר את $G' = (V, M_{XZ} \cup M_{YW})$. נראה כי הדרגות האפשריות בG' הם 1 או 2 (לא יתכן אפס כי מושלם). נראה כי 1 מתקבל אמ"מ חלה עליהם אותה צלע בM_{XZ}ובM_{YW}. דרגה 2 מתקבלת אמ"מ זה לסירוגין צלע מM_{XZ} וצלע מM_{YW} שיוצאות מאותו קודקוד (זה בהכרח מעגל מתחלף). מכאן נקבל כי G' הוא גרף של מעגלים וצלעות (שני קודקודים שבניהם כל פעם צלע אחת).

נראה כי על x חלה בM_{YW} צלע שונה מ(x,z) ולכן $deg_{G'}(x) = 2$ והוא חלק מרכיב שהוא מעגל מתחלף ובדומה $deg_{G'}(y) = deg_{G'}(z) = deg_{G'}(w) = 2$ וכל אחד מהם חלק ממעגל מתחלף.

יהי C_{XZ} וC_{YW} המעגלים שמכילים את הצלעות (x,z) ו(y,w) בהתאמה. נראה כי $C_{XZ} \neq C_{YW}$. נסתכל על

$$M = (M_{XZ} \backslash C_{XZ}) \cup (M_{YW} \backslash C_{YW})$$

נראה כי מדובר בזיווג מושלם בG, (הצלחנו לשרשר זיווגים מושלמים, והורדנו את $(x,y),(z,w)$ שלא היו בזיווג המקורי. קיבלנו זיווג בM) בסתירה להנחה.

נוסחת טט־ברג:

עבור כל $G = (V, E)$ האורך של הזיווג המושלם בגרף שווה:

$$MM(G) = min_{U \subseteq V} \frac{|V| + |U| - o(G \backslash U)}{2}$$

באופן שקול, מס' הצמתים שלא מזווגים בזיווג מקסימום הינו

$$max_{U \subseteq V} (o(G \backslash U) - |U|)$$

נראה כי נוסחה זו גוזרת את תנאי טט.

$$MM(G) = \frac{|V|}{2} + min_{U \subseteq V} \frac{|U| - o(G \backslash U)}{2}$$

נניח ותנאי טאט מתקיים כלומר $o(G\backslash U) \leq |U|$ שקול לומר $|U| - o(G\backslash S) \geq 0$ ולכן $MM(G) = \frac{|V|}{2} + min_{U\subseteq V}\frac{|U|-o(G\backslash U)}{2} \geq \frac{|V|}{2}$. אם כן מצד שני גודל $MM(G) \leq \frac{|V|}{2}$ (הוא מקסימלי כשיש שוויון) ולכן סה"כ $MM(G) = \frac{|V|}{2}$

6.0.4 משפט החתונה של הול

יהי גרף דו צדדי $G = (V = L\cup R, E)$ כך ש$|L| = |R|$
אזי, בG יש זיווג מושלם $\Longleftrightarrow$ לכל תת קבוצה $S \subseteq L$ מתקיים $|S| \leq |\Gamma(S)|$
הערה. נשים לב כי אם $|\Gamma(S)| < |S|$, אין לנו שום סיכוי לשדך בצורה מושלמת שכן לא יהיה מספיק מקום לאן לשלוח את איברי S.

הוכחה:
$\Longleftarrow$ נניח כי בG יש זיווג מושלם M. נראה כי תנאי הול מתקיים:
תהי $S \subseteq L$. נשים לב כי

$$|\Gamma_G(S)| \geq |\Gamma_M(S)| = (*) |S|$$

כיוון ש$(*)$ נכון כי M הוא זיווג מושלם, ולכן גודל קבוצת השכנים של S הוא בגודל של S, כי כל איבר בS הולך לאיבר כלשהו אחר. (שידוך הוא כמו" פונקציה חח"ע ועל).
$\Longrightarrow$ נניח כי לכל תת קבוצה $S \subseteq L$ מתקיים תנאי הול.
נוכיח באינדוקציה על $|L| = n$.
בסיס: באשר $n = 1$, נקבל כי $|L| = |R| = 1$ ולכן הגרף מכיל 2 קודקודים, בניהם יש צלע אחת, וזה אכן זיווג מושלם.
צעד: נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n' < n$ ונוכיח עבור n.
נחלק למקרים.
מקרה 1: לכל $S \subset L$ מתקיים $|S| < |\Gamma(S)|$: תהי $e = (u,v) \in E$. באשר $u \in L$. נביט בגרף $G' = G/e$.
טענה - G' מקיים את תנאי הול. תהי $S \subseteq L\backslash\{u\}$, נראה כי $|\Gamma_{G'}(S)| = |\Gamma_G(S)\backslash\{u\}| \geq |\Gamma_G(S)| - 1 \geq |S| + 1 - 1 > |S|$ ואכן מתקיים תנאי הול. לפי הנחת האינדוקציה, הרי גרף זה מקיים $|L| = n - 1$, קיים בגרף זה שידוך מושלם M' וכן $M = M' \cup (u,v)$ הוא זיווג מושלם בG. (נשים לב שבהכרח אף אחד לא נוגע בu, v בתוך M' כי הוא זיווג בגרף דו צדדי, בהכרח מu יכול לצאת רק אל קודקודים בצד השני)
מקרה 2: קיים $S \subset L$ כך ש$|S| = |\Gamma(S)|$. נסתכל על $G_1 = G(S\cup\Gamma(S))$ (הגרף המושרה מS ושכניו) וכן $G_2 = (V\backslash S\cup\Gamma(S))$ יהיה שאר הגרף.
נראה כי G_1 וG_2 הם גרפים דו"צ.
טענה: G_1 מקיים תנאי הול. תהי $S' \subseteq S$. אזי $|\Gamma_{G_1}(S')| = |\Gamma_G(S')| \geq |S'|$. לכן מהנחת האינדוקציה קיים בS זיווג מושלם.
טענה: G_2 מקיים את תנאי הול. תהי $S' \subseteq L\backslash S$.

$$|\Gamma_{G_2}(S')| = |\Gamma_G(S\cup S')\backslash\Gamma_G(S)| = |\Gamma_G(S\cup S')| - |\Gamma_G(S)| \geq |S\cup S'| - |S| = |S'|$$

שכן המעבר נובע כי S וS' זרות.
סה"כ קיימים בG_1, G_2 זיווגים מושלמים M_1, M_2 והזיווג $M_1 \cup M_2$ זיווג מושלם בG. כנדרש.

משפט $Hall$ **המוכלל:** בגרף דו צדדי $G = (V_1, V_2, E)$ כאשר $|V_1| \leq |V_2|$ יש זיווג המרווה את V_1 אם ורק אם לכל קבוצה $S \subseteq V_1$ מתקיים $|S| \leq |\Gamma(S)|$. (הוכחה ישירה ע"י רדוקציה, מוסיפים

קודקודים לצד הקטן כך שהצדדים יהיו שווים וכן מוסיפים להם קשתות לכל הקודקודים בצד הגדול, כעת משפט הול המקורי מתקיים וגם אצלנו).

מסקנה ממשפט הול: אם גרף הוא דו צדדי d רגולרי, בהכרח שני הצדדים שווים בגודלם $|R| = |L|$ (שכן סכום הדרגות שווה) וכן בהכרח $|\Gamma(S)| \leq |S|$.

6.0.5 משפט פיטרסן

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף. נסמן ב$c(G)$ את מס' רכיבי הקשירות בG.

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף. קשת $e \in E$ נקראת קשת חתך אם $c(G \backslash \{e\}) > c(G)$. כלומר, אם היא מגדילה את מס' רכיבי הקשירות (בפרט, בגרף המקורי חיברה בין שניים כאלו)

משפט פיטרסן: בכל גרף $G = (V, E)$ שהוא 3 רגולרי וללא קשתות חתך קיים זיווג מושלם.

הוכחה: נראה כי מתקיים תנאי טאט עבור גרף שהוא 3 רגולרי וללא קשתות חתך. כלומר נוכיח לכל $S \subseteq V$ כי $o(G \backslash S) \leq |S|$.

יהי $H = (V(H), E(H))$ רכיב קשירות מסדר אי זוגי של $G \backslash S$. נסמן ב$m_{H \times S}$ את מס' הקשתות בG שקודקוד אחד שלהן הוא בH והשני הוא בS.

אזי, סכום הדרגות בגרף G של קודקודי H הוא סכום הדרגות בתת גרף H ועוד $m_{H \times S}$, מאחר וG 3 רגולרי נקבל:

$$\sum_{v \in V(H)} deg_H(v) + m_{H \times S} = \sum_{v \in V(H)} deg_G(v) = 3|V(H)|$$

לפי משפט הדרגות $\sum_{v \in V(H)} deg_H(v) = 2|E(H)|$ ולכן סכום זה הוא זוגי. מאחר וH רכיב קשירות אי זוגי אזי גם $|V(H)|$ אי זוגי ולכן גם $3|V(H)|$ אי זוגי. מכאן, $m_{H \times S} = 3|V(H)| - \sum_{v \in V(H)} deg_H(v) = 3|V(H)| - 2|E(H)|$ והוא אי זוגי כיוון שהוא חיסור של מס' זוגי ממס' אי זוגי. $(2k + 1 - 2m = 2(k - m) + 1)$. כלומר, כיוון שהוא אי זוגי אנו יודעים כי $m_{H \times S} \geq 1$. כמו כן, בהכרח $m_{H \times S} \neq 1$, אחרת, נקבל כי ישנה קשת חתך (אם מורידים אותה מG בהכרח מנתקים את H ומס' רכיבי הקשירות גדל). לכן $m_{H \times S} \geq 3$.

קיבלנו כי לכל רכיב קשירות אי זוגי ב$G \backslash S$ יש לפחות 3 קשתות בינו לבין S. נסכום את הקשתות היוצאות מקודקודים בS. מצד אחד, בגלל 3 רגולריות מס' הקשתות שיוצאות מS הוא בדיוק $3|S|$. מצד שני, ישנן לפחות 3 קשתות כאלו שיוצאות מכל רכיב קשירות כלומר מס' זה הוא $\leq 3o(G \backslash S)$. וסה"כ נקבל

$$3|S| \geq 3o(G \backslash S) \iff |S| \geq o(G \backslash S)$$

ואכן מתקיים תנאי טט, לכל קבוצה S ולכן G מכיל זיווג מושלם.

6.0.6 משפט קוניג אוורגרי

הגדרה: עבור גרף $G = (V, E)$ נסמן ב$MM(G)$ את הגודל של זיווג המקסימום בG.

הגדרה: עבור גרף $G = (V, E)$ קבוצה $A \subseteq V$ נקראת כיסוי בצמתים אם לכל צלע $\{v, u\} \in E$ לפחות אחת מבין v, u שייך לA. נסמן ב$VC(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי בצמתים של G.

משפט קוניג אווגרי: יהי $G = (V, E)$ גרף דו צדדי, אזי $VC(G) = MM(G)$.

הוכחה:

יהי גרף $G = (V, E)$ עם זיווג מקסימום $MM(G) = |M|$.

כיוון ראשון $MM(G) \leq VC(G)$ - (הצד הקל, נכון לכל גרף) לכל קשת $e = \{v, u\} \in E$ בהכרח כל כיסוי בצמתים חייב להכיל את v או u. לכן כל כיסוי קודקודים חייב להיות לפחות בגודל של $|M|$ ובפרט כיסוי קודקודים מינימלי. לכן אכן $MM(G) \leq VC(G)$.

כיוון שני $VC(G) \leq MM(G)$ - תהי A קבוצת כיסוי בצמתים מינימלית. נחלק את הגרף לשניים. $L_A = L \cap A, R_A = L \cap A$ ונגדיר את

$$H_L = G[L_A \cup (R \backslash R_A), H_R = G[R_A \cup (L \backslash L_A)$$

כעת נטען כי H_L מקיימת את תנאי הול. לכל קבוצה $S \subseteq L_A$ מתקיים $|\Gamma_{H_L}(S)| \geq |S|$. נניח בשלילה שזה לא המצב, וישנה $|S| > |\Gamma_{H_L}(S)|$ ואז בהכרח אפשר להחליף את הקבוצה S שבL_A בקבוצת השכנים שקטנה יותר (הם שכנים ולכן יש צלע) ולכן מצאנו כיסוי בצמתים בהכרח קטן יותר - אלו שהיו מכוסות קודם לכן ולא היו בS מכוסות עדיין ואלו שהיו בS מכוסות ע"י השכנים. סה"כ זו סתירה להיותו של A כיסוי מינימלי ולכן בהכרח תנאי הול מתקיים. מכאן שבהכרח ישנו זיווג מקסימום בH_L ובדומה בH_R.

מכאן שהזיווג המקסימום שמצאנו, נסמנו $M = M_1 \cup M_2$, הוא מקיים $M \subseteq A$ ולכן סה"כ אכן $VC(G) \leq MM(G)$. כנדרש.

טענה: בגרף $G = (V, E)$ קבוצת צמתים $S \subseteq V$ נקראת בלתי תלויה אם כל שני צמתים בה אינם שכנים. קבוצת צמתים $S \subseteq V$ היא בלתי תלויה אמ"מ $V \backslash S$ היא כיסוי צמתים. נסמן את גודל הקבוצה הבלתי תלויה הגדולה ביותר של G בסימון $IS(G)$.

הוכחה: אם $S \subseteq V$ היא בלתי תלויה, אזי לכל שני צמתים בS אין קשת בניהם. כלומר, לכל קשת $e = (v, u)$ לפחות אחד מ$\{v, u\}$ נמצא ב$V \backslash S$, כלומר $V \backslash S$ היא כיסוי צמתים. (אין קשתות בתוך S, לכן ישנם קשתות רק בקודקודים מחוץ לS או בקודקוד מחוץ לS כלומר ב$V \backslash S$ עם מישהו מS. לכן בהכרח לפחות אחד מכל קשת הוא ב$V \backslash S$)

אם $V \backslash S$ היא כיסוי צמתים, נניח בשלילה כי ישנם שני קודקודים $v, u \in S$ כך שישנה קשת $(v, u) \in E$. אזי נקבל עבור הקשת (v, u) כי $v \in S$ וכן $u \in S$ ובפרט $v, u \notin V \backslash S$ בסתירה להיות $V \backslash S$ כיסוי צמתים.

מסקנה: גרף $G = (V, E)$ מכיל קבוצה בלתי תלויה בגודל k אמ"מ הוא מכיל כיסוי צמתים בגודל $|V| - k$. במילים אחרות, $IS(G) + VC(G) = |V|$ (כיוון שאם גודל הקבוצה הבלתי תלויה הכי גדול הוא $|S|$ בהכרח כיסוי הצמתים הקטן ביותר הוא של $V \backslash S$ (הורדנו הכי הרבה) כלומר כיסוי צמתים מינימלי יהיה בגודל $|V| - |S|$).

6.0.7 משפט גאלאיי

הגדרה: עבור גרף $G = (V, E)$, קבוצה $E' \subseteq E$ נקראת כיסוי בקשתות אם לכל קודקוד $v \in V$ קיימת קשת $\{v, u\} \in E'$. נסמן ב$EC(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי בקשתות של G.

משפט גאלאיי: יהי $G = (V, E)$ גרף על n קודקודים ללא צמתים מבודדים, אזי $MM(G) + EC(G) = n$.

הוכחה:

נניח M זיווג מקסימום בG ונסמן $MM(G) = |M|$. נראה כי קיים כיסוי בקשתות מגודל הקטן או שווה ל$n - |M|$ ואם נראה זאת אזי ש$EC(G) \leq n - |M|$.

נבחר עבור כל קודקוד שאינו M-רווי קשת שחלה בו. קשתות אלו יחד עם קשתות M מהוות כיסוי בקשתות E' (כל קודקוד שהוא M רווי ואז הוא חל בקשת מהקבוצה הנ"ל או שאינו M-רווי ואז הוספנו קשת שחלה בו לקבוצה ולכן הוא חל בקשת בקבוצה). הכיסוי הנ"ל מוגדר לכל היותר על:

$$|E'| \leq |M| + n - 2|M| = n - |M|$$

שכן לכל היותר ישנם $n-2|M|$ קודקודים לא מזווגים. סה"כ אכן הוכחנו $EC(G) \leq n-|M|$ ואכן $MM(G)+EC(G) \leq n$.

בכיוון השני,

יהי $E' \subseteq E$ כיסוי בקשתות בגודל מינימלי $EC(G)$. נתבונן בתת הגרף $G'=(V,E')$. בG' אין משולשים שכן אחרת היה ניתן להוריד קשת אחת מהמשולש ולקבל כיסוי בקשתות, בסתירה למינימליות של E'. מאותה סיבה אין בG' מסלול באורך 3. מכאן שG' אינו מכיל מעגלים. G' הינו יער. נסמן בk את מס' רכיבי הקשירות של G', אזי מהיות G' יער יש בו $n-k$ קשתות. כלומר $|E'|=n-k$. נבחר קשת מכל רכיב קשירות ונקבל זיווג, בהכרח המקסימלי יהיה גדול או שווה לערכו ונקבל:

$$MM(G) \geq |M| = k = n-|E'| = n-EC(G)$$

סה"כ $MM(G)+EC(G) \geq n$

שני הכיוונים הוכחו ולכן זה שוויון ממש.

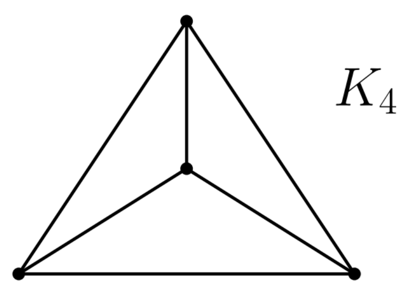
7 גרפים מישוריים

הערה כללית. נושא זה לא יהיה פורמלי כמו שאר הקורס - לגיטימי ואין בסל הכלים שלנו את הידע להוכיח כאן טענות רבות.

הערה שנייה. מדברים על גרפים לא מכוונים בלבד!

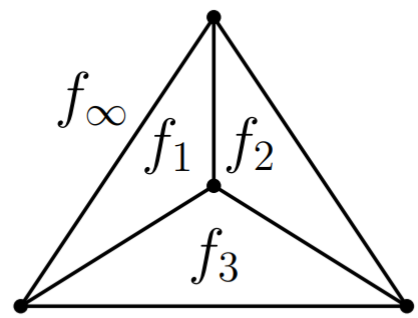
הגדרה: שיכון למישור הוא ציור של הגרף, כך שאין שתי קשתות שנחתכות בציור. גרף נקרא **מישורי**, אם קיים לו שיכון למישור.

למשל, הגרף הבא הוא מישורי - הנה שיכון למישור של הגרף:



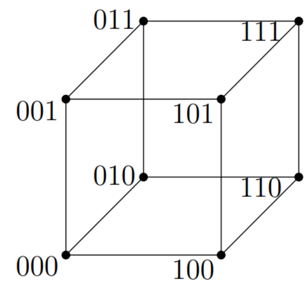
פורמלית - שיכון למישור הוא פונקציה חד חד ערכית מהקודקודים ל$\mathbb{R}^2$ ולכל צלע $(u,v) \in E$ ישנה מסילה $g_e : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ וכן $g_e(0)=u$ וכן $g_e(1)=v$ ולכל e,e' לא קיימים $\alpha,\beta \in (0,1)$ כך ש$g_e(\alpha)=g_e(\beta)$.

הגדרה: **פאה** היא אזור שתחום בין הצלעות: פאה היא מחלקת שקילות ששתי נקודות נמצאות באותה פאה אמ"מ ניתן להעביר בניהם מסילה שלא חותכת את הקשתות. כך נראות הפאות. נשים לב כי מס' הצלעות בפאות f_1,f_2,f_3 הוא 3 וכן ישנה פאה f_∞ של כל מה שמבחוץ .

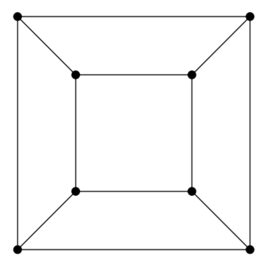


נשים לב כי פאה תלויה בכיצד ציירנו את הגרף. אם היינו מציירים באופן שונה הן היו שונות. נשים לב שמס' הצלעות המינימלי שחל על פאה הוא 3.

נשים לב ־ גרף הקובייה Q_3 הוא מישורי. דוגמה. מימין הגרף Q_3 ומשמאל השיכון למישור שלו.



Q_3



Q_3

עם זאת, גרף כמו Q_4 הוא לא מישורי. איך מוכיחים שגרף הוא לא מישורי? ננסה לפתח כמה כלים שיעזרו לנו.

7.1 נוסחת אוילר

סימון: נסמן את מס' הפאות בגרף באות f.

נוסחאת אוילר: יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי קשיר עם n קודקודים, m צלעות וf פאות. אזי,

$$n+f-m=2$$

הוכחה: נקבע את n לאורך ההוכחה. נוכיח באינדוקציה על m.

בסיס: עבור עץ, מתקיים $m=n-1$ וכן $f=1$ ולכן אכן $n+f-m=2$.

צעד: נניח שלכל גרף מישורי עם n קודקודים וm צלעות מתקיימת נוסחת אוילר. נוכיח שלכל גרף מישורי עם n קודקודים ו$m+1$ צלעות מתקיימת הנוסחה.

בהכרח קיים מעגל בגרף, מתקיים $m \geq n$ כי העץ הוא בבסיס ולכן בהכרח קיים מעגל בגרף. לכן יש לפחות n צלעות ובהכרח יש צלע e שחלה על מעגל כלשהו. נביט בגרף:

$$G' = G \backslash \{e\}$$

ברור כי G' נותר קשיר, שכן הורדנו צלע ממעגל (זה לא הורס את הקשירות) וכן G' מישורי, שכן אותו השיכון של קודם יעבוד - הורדנו צלע ולא הוספנו, לכן בהכרח צלעות לא יחתכו. מכאן, G' מקיים את הנחת האינדוקציה ומתקיים עבורו:

$$n_{G'} + f_{G'} - m_{G'} = 2$$

נשים לב כי מס' הפאות ירד ב1, כיוון שהיה מעגל ומחקנו צלע והיא הפרידה בין שתי פאות שכעת התאחדו. לכן בהכרח $f_{G'} = f - 1$, וכן $m_{G'} = m - 1$ ואם נציב בנוסחה מעלה נקבל:

$$n + f - 1 - (m - 1) = 2$$

$$n + f - m = 2$$

כנדרש.

טענה: יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי קשיר, כך שמתקיים $n \geq 3$ אזי בהכרח $m \leq 3n - 6$
הגדרה: דרגה של פאה , E_f , תוגדר להיות מס' הצלעות שחלות על הפאה f.

הוכחה:
יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי קשיר כך ש$n \geq 3$, נשים לב כי בגרף המקיים $n \geq 3$ בהכרח $E_f \geq 3$,
ומכאן: (אי השוויון משמאל מגיע כי סופרים בהכרח את מס' הצלעות ובהכרח לכל אם $E_f \geq 3$ אזי $\sum_{f \in F} E_f \geq 3f$.

$$3f \leq \sum_{f \in F} E_f \leq 2m \Longrightarrow f \leq \frac{2}{3}m$$

אם כן, $m = n + f - 2$, וכן $f \leq \frac{2}{3}m$ ולכן:

$$m \leq n + \frac{2}{3}m - 2$$

$$\frac{1}{3}m \leq n - 2 \Longrightarrow m \leq 3n - 6$$

כנדרש.

נשים לב: כל צלע בגרף מישורי חלה בלכל היותר 2 פאות.

נשים לב: כי אם אורך המעגל הפשוט הקצר ביותר הוא d, אזי דרגתה של כל פאה מקיימת $E_f \geq d$.

הכללה לנוסחת אוילר: אם G אינו קשיר, ויש לו d רכיבי קשירות. אזי מתקיים

$$n + f - m = d + 1$$

7.2 גרפים שאינם מישוריים

טענה: K_5 אינו מישורי.

הוכחה: מתקיים $n = 5$ וכן $E = \binom{5}{2} = 10$ ולא מתקיים $10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$ בסתירה לטענה הקודמת.

טענה: כל גרף מישורי בהכרח מכיל קודקוד מדרגה לכל היותר 5.

הוכחה: נב"ש כי כל הקודקודים מדרגה לפחות 6 ונקבל $2m = \sum_{v \in V} deg(v) \geq 6n$ כלומר $m \geq 3n \geq 3n - 6$ בסתירה.

טענה: $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הוכחה: נב"ש מישורי. בגרף זה מתקיים $n = 6$, וכן $m = 3^2 = 9$. מכאן לפי נוסחת אוילר $f = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$.

נזכר כי

$$\sum_{f \in F} E_f \leq 2m = 18$$

$$E_{f_1} + E_{f_2} + E_{f_3} + E_{f_4} + E_{f_5} \leq 18$$

לפי הטענה הקודמת, הממוצע הוא $\frac{18}{5} = 3.6$, נשים לב כי פאה אחת חייבת להיות קטנה מגודל לכל היותר 3. אחרת, כל הפאות בגודל גדול מ3 ולכן סכומן $5 \times 4 = 20$ בסתירה. לכן קיימת פאה המקיימת $E_f = 3$ בדיוק (לא יתכן פחות שכן $E_f \geq 3$ תמיד), וקיבלנו מעגל באורך אי זוגי, בסתירה לכך שהגרף דו צדדי , לכן בהכרח $K_{3,3}$ אינו מישורי.

7.3 גרף מינור ומשפט ונגר־ קורטובסקי

הגדרה: H הוא מינור של $G = (V, E)$ אם הוא מתקבל ע"י אחת משלושת הפעולות הבאות מG כמה פעמים שרוצים (מס' סופי של פעמים):

א. מחיקת צלע

ב. מחיקת קודקוד וכל הצלעות שחלות עליו.

ג. כיווץ של זוג קודקודים שיש בניהם צלע.

הבחנה: אם G הוא גרף מישורי, אזי גרף המינור הוא מישורי גם כן. שכן, כל הפעולות משמרות

מישוריות. (וכיוון שיהודה התעקש ־ ישנה "סגירות למינור").

הבחנה נוספת: אם גרף מכיל מינור שאינו מישורי, אזי בהכרח G אינו מישורי.

דוגמה שימושית. אם נוכיח כי G מכיל למשל את $K_{3,3}$ או את K_5 כמינור, אזי בהכרח G אינו מישורי.

משפט וגנר קרטובסקי: $G=(V,E)$ הוא מישורי אמ"מ הוא לא מכיל את $K_5, K_{3,3}$ כמינור. (תנאי מספיק והכרחי)

טענה: גרף פטרסן אינו מישורי. (אם נכווץ את כל צלעות הכוכב עם המחומש שחוסם אותו, נקבל שהוא מכיל כמינור את K_5).

הבחנה. לכל $i>5$ מתקיים כי K_i אינו מישורי שכן מכיל כמישור את $K_{5,5}$ לאחר מחיקת קודקודים $i-5$.

טענה: גרף הקובייה Q_4 אינו מישורי (מכיל את $K_{5,5}$)

7.4 הגרף הדואלי

הגדרה: הגרף הדואלי G^* של גרף מישורי G עם שיכון שלו במישור הוא פסאודו גרף (עם לולאות עצמיות) שקבוצת קודקודיו V^* הם פאות G כאשר לכל קשת e בגרף G מתאימה קשת דואלית e^* המחברת בין הפאות שe חלה בהן.

קשת e^* בגרף הדואלי היא דואלית לקשת e בגרף המקורי.

פאה בגרף הדואלי היא דואלית לצומת בגרף המקורי. (מה זה פאה כאן? מפגש של כמה פאות, מתי פאות נפגשות? בקודקוד)

צומת בגרף הדואלי היא דואלית לפאה בגרף המקורי.

נשים לב: הגרף הדואלי של גרף מישורי מאוד תלוי בשיכון שלו במישור.

טענה: הדואלי לגרף הדואלי G^* הוא גרף G.

למה (**דואליות חתך־מעגל**): יהי גרף מישורי G. מתקיימות הקורלציות הבאות:

א. אם קבוצת קשתות A היא מעגל, אזי הקשתות המתאימות בגרף הדואלי G^* מהוות חתך $(S, V\backslash S)$

ב. אם קבוצת צמתים S בגרף הדואלי G^* היא חתך מינימלי, אזי הקשתות המתאימות לקבוצת החתך שלה בגרף המקורי G מהוות מעגל פשוט.

מינוח. חתך מינימאלי הוא חתך כך שאין חתך אחר שקבוצת החתך (קבוצת קשתות החתך) שלו מוכלת ממש בשלו

אינטואיציה ללמה:

א. מעגל בG מקיף פאה אחת או יותר של G, כלומר מעגל מקיף צומת אחת או יותר בגרף הדואלי G^*. לכן, בכלל שכל הקשתות הדואליות מהצמתים הדואליים בפנים המעגל לצמתים דואליים אחרים הם בהכרח קשתות דואליות של המעגל, הקשתות הדואליות של המעגל מהוות חתך ב־ G^* , כי הוא מפריד את הצמתים הדואליים שמוכלים במעגל משאר הגרף.

ב. עבור חתך מינימלי S בגרף הדואלי G^*, קבוצת החתך שלו מורכבת מקשתות שקצה אחד שלהם בS והשני ב$V^*\backslash S$. הקשתות המתאימות בגרף המקורי G חייבות להקיף או את הפאות שמתאימות לS או את הפאות שמתאימות ל$V^*\backslash S$ והן חייבות להיות מעגל פשוט אחרת אפשר לצמצם אותן למעגל פשוט ולקבל מהטענה הקודמת חתך קטן יותר מהחתך המקורי מהטענה הראשונה בסתירה.

8 צביעה

8.1 הגדרה פורמלית

הגדרה: בהינתן גרף $G=(V,E)$, פונקציית k צביעה היא פונקציה $\chi: V \to \{1,...,k\}$ אם לכל $\{u,v\} \in E$ מתקיים $\chi(u) \neq \chi(v)$.

גרף נקרא k־צביע אם ניתן לצבוע אותו ב־k צבעים בצורה חוקית.

המס' הכרומטי של G, $\chi(G)$ הוא מס' k הצבעים המינימלי שניתן לצבוע את G בו.

הבחנה. אם נסתכל על כל הקודקודים v המקיימים $\chi(v)=i$, כלומר $X=\{v|\chi(v)=i\}$, אזי זו קבוצה בלתי תלויה (בהכרח אין ביניהם צלעות). כל קבוצה שכזו נקראת **מחלקת צבע.**

טענה: גרף $G=(V,E)$ הוא דו צדדי $\iff$ G הוא 2 צביע.
הוכחה. כמובן שמגדירים כל צד R בצבע אחד וכל L בצבע אחד.

טענה: יהי גרף $G=(V,E)$ המקיים $\Delta(G)=k$, אזי ניתן לצבוע את G ב־$k+1$ צבעים (יתכן שאפשר בפחות, אך תמיד אפשר ב־$k+1$).

הוכחה: סדר את הקודקודים בצורה שרירותי, צבע את הגרף בצורה חמדנית, בכל פעם השתמש בצבע המינימלי שאתה יכול עבור קודקוד. נרצה לטעון שלכל היותר בצביעה זו יהיו $k+1$ צבעים. בהינתן קודקוד v_i, לכל היותר הוא שכן של k קודקודים ויש לו k שכנים עם צבעים, ולכן תמיד לכל היותר מס' הצבעים שהוא מחובר אליו הוא k, ולכן תמיד יש אחד פנוי.

טענה: את הקליקה K_n ניתן לצבוע ב־n צבעים (ואי אפשר בפחות).
טענה: נסמן ב־$\omega(G)$ את גודל הקליקה הגדולה ביותר של G. מתקיים לכל גרף $\omega(G) \le \chi(G)$.

8.2 צביעה של גרף אינטרוול

הגדרה: $\omega(G)$ היא גודל הקליקה הגדולה ביותר ב־G.

האם בהכרח $\chi(G)=\omega(G)$? לא. נקח את C_7 למשל, מעגל באורך אי זוגי, גודל הקליקה הכי גדולה הוא 2 אך הוא לא דו צדדי ולכן אינו 2־צביע (מכיל מעגל אי זוגי לכן לא דו"צ).

הגדרה: גרף $G=(V,E)$ יקרא **גרף אינטרוול** כך שלכל $v_i \in V$ קיים אינטרוול $[l_i,r_i] \subset \mathbb{R}$. ישנה קשת $\{v_i,v_j\} \in E$ אמ"מ האינטרוולים נחתכים.

טענה: יהי $G=(V,E)$ גרף אינטרוול, נסמן $\omega(G)$ את גודל הקליקה המקסימלית. אזי, $\omega(G)=\chi(G)$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס: בסיס טריוואלי. ברור שניתן לצבוע בצבע אחד.

צעד: נניח שלכל גרף אינטרוול G' עם $n'<n$ קודקודים ניתן לצבוע ב־$\omega(G')$. יהי G גרף אינטרוול עם n קודקודים. יהי $v_i=(l_i,r_i)$ הקודקוד עם זמן הסיום המוקדם ביותר. יהי $G'=G\backslash v_i$, לפי הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע את קודקודי G' ב־$\omega(G') \le \omega(G)$ צבעים.

טענה: כל שכן $v_j=[l_j,r_j]$ $(j<i)$ האינטרוול שלו מכיל את r_i. כלומר,

$$l_i \le r_i \le r_j$$

מסקנה: כל שכני v_i מכילים את r_i ולכן שכנים זה של זה. בפרט $\Gamma(v_i) \cup \{v_i\}$ קליקה. מכאן, $deg(v) \le \omega(G)-1$ (מדובר בקליקה, היא לכל היותר בגודל הקליקה המקסימלית, אבל פחות אחד כי זה לא כולל את v עצמו). ולכן ישנו צבע פנוי שבו לא צבוע אף שכן של v_i, נצבע את v_i בצבע הפנוי וסיימנו. אכן ניתן לצבוע ב־$\omega(G)$ צבעים.

8.3 משפט מיצ'לסקי

משפט מיצ'לסקי: לכל מס' $k \geq 1$, קיים גרף M_k ללא משולשים כך ש$\chi(M_k) = k$. (כלומר, אם הגרף ללא משולשים, זה לא גורר חסם עליון על $\chi(G)$. נשים לב שתמיד ישנו חסם תחתון $\chi(G) \geq \omega$ אם G מכיל קליקה K_ω).

הוכחה: באינדוקציה על k.

בסיס: עבור $k = 1$ נסתכל על גרף עם קודקוד יחיד, עבור $k = 2$ נסתכל על גרף עם צלע אחת. טריוואלי.

צעד: נניח נכונות עבור k. יהי $M_k = (V, E)$ גרף עם הקודקודים $V = \{v_1, ..., v_n\}$ המקיים את הנחת האינדוקציה, כלומר המס' הכרומטי שלו הוא k. $\chi(M_k) = k$. נסתכל על M_{k+1} שיתקבל ע"י $V' = V \cup \{u_1, ..., u_n\} \cup \{w\}$, כך שלכל קודקוד u_i הוא מחובר לקשת w, וכן כל קודקוד u_i מחובר לכל שכניו של v_i.

טענה: M_{k+1} חסר משולשים. נניח בשלילה כי קיים משולש $\{x, y, z\}$. אם כן, בהכרח w לא בפנים והדרך היחידה ליצור אותו היא 2 מv ואחד u. (לא יתכן w כי כל השכנים שלו לא שכנים אחד של השני ולא יתכן 2 של u כי אז זה גורר שהיו u_i, u_j, v ומשמעות הדבר שv_i וv_j שכנים של v ואז היה משולש בגרף המקורי בסתירה). כלומר המשולש הינו $\{v_i, v_j, u_k\}$. נראה כי נקבל סתירה, כי אם u_k שכן שלהם אזי v_k היה שכן שלהם (כיוון שיש לu_k וv_k אותם שכנים) ואז קיבלנו משולש (v_i, v_j, v_k) בגרף המקורי, בסתירה.

טענה: M_{k+1} הוא $k + 1$ צביע. נבנה צביעה חוקית של כל v, ישנה כזו, $\chi_k : \{v_1, ..., v_n\} \to \{1, ..., k\}$, אם כן נצבע את כל u_i באותו הצבע של v_i (זה חוקי, כיוון שהם לא שכנים, u_i שכן רק של השכנים של v_i), כלומר $\chi_{k+1}(u_i) = \chi_{k+1}(v_i)$ - זה חוקי כי אין שכנים ביניהם, וכן w יקבל את הצבע ה$k + 1$.

טענה: לא יתכן לצבוע את M_{k+1} בk צבעים. נניח בשלילה שכן ניתן לצבוע את M_{k+1} בk צבעים, ונניח כי $\chi(w) = k$. כלומר, w צבוע בצבע האחרון. נגדיר את

$$A = \{v_i | \chi_{k+1}(v_i) = k\}$$

כלומר, קבוצת כל הקודקודים מסוג v_i שצבועים בצבע האחרון של w. (נשים לב כי אם היא קבוצה ריקה תהיה סתירה במיידי, כי אין קודקודים שצבועים בk ואז M_k הוא $k - 1$ צביע). נגדיר את פונקציית הצביעה הבאה:

$$\chi_k(v_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \chi_{k+1}(v_i) & v_i \notin A \\ \chi_{k+1}(u_i) & v_i \in A \end{array} \right\}$$

ראשית, נשים לב כי זו צביעה של $k - 1$ צבעים. אם קודקוד הוא בתוך A, נותנים לו את הצבע של u_i שהוא לא k כי u_i שכן של w. אם קודקוד הוא לא בתוך A אז הוא מקבל את הצבע של v_i שהוא בהכרח לא k לפי הגדרה. מכאן שהצביעה היא על $k - 1$ צבעים.

שנית, זו אכן צביעה חוקית, יהיו $v_i, v_j \in A$. שכנים, אזי במקרה זה לא יתכן שהם צבועים בצבע האחרון, ולכן לא יתכן שהם בA בסתירה.

אם $v_i, v_j \notin A$ אזי ברור כי הם יהיו שונים.

אם $v_i \notin A, v_j \in A$ אזי

$$\chi_k(v_j) = \chi_{k+1}(v_j) \neq \chi_{k+1}(u_i) = \chi_k(v_i)$$

סה"כ, אכן זו צביעה חוקית.

8.4 גרפים דלילים

נניח כי בגרפים מסוג זה מתקיים $m << n^2$. בגרף רגיל ניתן לצבוע בn צבעים, מה קורה בגרף דליל? האם ניתן בפחות?

למה. יהי $G = (V, E)$ גרף עם m צלעות, אזי $\chi(G) \le O(\sqrt{m})$

הוכחה. תהי $\chi : V \to \{1, ..., \chi(G)\}$ צביעה עם $\chi(G)$ צבעים. נבחין, כי $\forall i, j : E(\chi^{-1}(i), \chi^{-1}(j)) \neq \emptyset$, אחרת אם לא היה קודקוד משותף והיה אפשר לצבוע בצע אחד.

ולכן מס' הצלעות הוא לפחות מס' האפשרויות לבחור 2 מ$\chi(G)$,

$$\frac{(\chi(G) - 1)^2}{2} \le \binom{\chi(G)}{2} \le m$$

ובאופן דומה,

$$\chi(G) \le \sqrt{2m} + 1 = O(\sqrt{m})$$

כנדרש.

8.5 משפט ברוקס

משפט ברוקס: יהי $G = (V, E)$ גרף עם $\Delta(G) = k$ באשר $k \ge 3$, אזי G הוא k־צביע אלא אם כן הוא קליקה.

(כלומר, המקרה היחיד בו אפשר לצבוע רק עם $k + 1$ צבעים זה שהוא קליקה).

אם נוריד את הדרישה $k \ge 3$, אזי אם $\Delta(G) = k$, G הוא k־צביע אמ"מ הוא קשיר, אינו מעגל אי זוגי ואינו קליקה.

8.6 משפטי 4, 5 ו-6 הצבעים

משפט 6 הצבעים: כל גרף מישורי $G = (V, E)$ הוא 6־צביע.

הוכחה: יהי גרף מישורי $G = (V, E)$. באינדוקציה.

בסיס: עבור $n \le 6$ ברור כי ניתן לצבוע ב6 צבעים.

צעד: נניח נכונות לכל $n' < n$. יהי גרף עם n קודקודים, יהי v הקודקוד המקיים $deg(v) \le 5$, נוריד אותו וקיבלנו כי $G \backslash \{v\}$ הוא 6־צביע לפי הנחת האינדוקציה. כעת, כיוון שדרגת הקודקוד שהורדנו מקיימת $deg(v) \le 5$, בהכרח יש צבע אחד לפחות פנוי (יש לו רק 5 שכנים ויש 6 צבעים). ולכן הטענה אכן נכונה.

משפט 5 הצבעים: כל גרף מישורי $G = (V, E)$ הוא 5־צביע.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס: עבור $n \le 5$ ברור כי ניתן לצבוע ב5 צבעים.

צעד: נניח נכונות לכל $n' < n$. יהי גרף $G = (V, E)$ מישורי עם n קודקודים. ויהי v קודקוד מדרגה מינימלית. אם כן, בהכרח $deg(v) \le 5$. נפעיל את הנחת האינדוקציה על $G \backslash \{v\}$, ונקבל צביעה חוקית של $G \backslash \{v\}$ ב5 צבעים:

$$\chi : V \backslash \{v\} \to \{1, .., 5\}$$

נחלק למקרים.
א. $deg(v) < 5$, כלומר $deg(v) \leq 4$ וכעת ישנו צבע פנוי ונצבע את v בצבע זה. ואכן צביעה בG ב5 צבעים.
ב. אחרת, יהיו a, b, c, d, e השכנים של v שמופיעים לפי שיכון במישור בסדר הפוך לשעון.
אם שני שכנים צבועים באותו הצבע, אזי ישנו צבע פנוי וסיימנו.
אחרת, כל אחד מהקודקודים a, b, c, d, e צבועים בצבע שונה. נניח שצבועים בהתאמה ב$1, 2, 3, 4, 5$.
כלומר,

$$\chi(a) = 1, \chi(b) = 2, \chi(c) = 3, \chi(d) = 4, \chi(e) = 5$$

נגדיר $V_i = X^{-1}\{i\}$ כל הקודקודים שצבועים בגרף i. ונתבונן בגרף

$$G_{13} = G[V_1 \cup V_3]$$

כלומר, הגרף המושרה על הקודקודים שצבעם הוא 1 או 3. נשים לב שהוא 2 צביע ולכן דו צדדי.
יהי C_c וC_a רכיבי הקשירות של c וa בG_{13}.
מקרה ראשון: $C_a \neq C_c$ - במקרה זה נגדיר פונקציית צביעה חדשה:

$$\chi'(u) := \left\{ \begin{array}{cc} \chi(u) & u \notin C_c \\ 3 & u \in C_c \wedge \chi(u) = 1 \\ 1 & u \in C_c \wedge \chi(u) = 3 \end{array} \right\}$$

נשים לב כי אכן χ' צביעה חוקית של $G \backslash \{v\}$ כיוון שלכל שני קודקודים: אם הם לא היו ברכיב הקשירות של C_c נשאר כשהיה. אם הם היו ברכיב הקשירות C_c הם פשוט החליפו צבע בניהם, ולכן זה כעת חוקי (קל לראות. אם הוא היה כחול והשכן אדום כשנחליף הוא יהיה אדום והשכן כחול).
לכן כעת, שני שכניו a, c צבועים באותו הצבע, ולכן נצבע את v ב3 ונקבל צביעה חוקית של 5 צבעים בG.
מקרה שני: $C_a = C_c$,
נביט בגרף

$$G_{24} = G[V_2 \cup V_4]$$

יהיו C_b, C_d רכיבי הקשירות של d וb בהתאמה.
אם $C_b \neq C_d$ נעשה כמו קודם, כלומר נהפוך את הצבעים ונקבל צביעה חוקית.
אחרת, $C_b = C_d$ - זה לא יתכן כיוון שa וc באותו רכיב קשירות, וכן b וd באותו רכיב קשירות - כמו כן v שכן של b וd ושכן של a וc ולכן סה"כ כולם נמצאים באותו רכיב קשירות, ישנו מעגל שכולל את a, c, v, ומצד שני b נמצא בתוך המעגל (בגלל שאמרנו לפי הסדר של השעון) או שd נמצא בתוך המעגל - אך לא שניהם וכן יש מסלול בניהם ולפי משפט ז'ורדן (לא נוכיח) לא יתכן שהגרף הנ"ל יהיה מישורי - שכן יהיה התנגשות בצלעות. לכן מקרה זה ייפסל באופן מיידי.
סה"כ, כל המקרים טופלו כנדרש, אכן G הוא 5 צביע.

משפט 4 הצבעים: כל גרף מישורי $G = (V, E)$ הוא 4-צביע. (זה הדוק, אי אפשר בפחות).
לא ראינו הוכחה, נקח זאת כעובדה ומותר להשתמש במשפט.

טענה: בכל גרף מישורי ישנה קבוצה בלתי תלוי מגודל $\frac{n}{4}$. (מחלקות הצבע).

8.7 גרפים קריטים

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף. גרף G נקרא k־קריטי אם:
$\chi(G)=k$
לכל תת גרף $H\subset G$ כך ש$H\neq G$ מתקיים $\chi(H)<k$. כלומר כל תת גרף שלו צביע בפחות צבעים.

דוגמה: מעגל אי זוגי, מס' כרומטי שלו 3 וכל תת גרף שלו ניתן לצביעה בעד 2.

טענה: בכל גרף k קריטי, הדרגה המינימלית היא לפחות $k-1$.

9 צביעת קשתות

הגדרה: יהי גרף $G=(V,E)$. צביעת קשתות היא פונקציה $\chi':E\to\{1,...,k\}$ כך שלכל זוג קשתות $e_1,e_2\in E$ אם הקשתות מכילות קודקוד משותף אזי $\chi'(e_1)\neq\chi'(e_2)$.

הגדרה: יהי $G=(V,E)$. ה $Line\ Graph$ הוא גרף שהקודקודים שלו הם הקשתות. כלומר, $V(L(G))=E$ וכן בין שני קודקודים של $L(G)$ ישנה צלע אמ"מ בגרף G לצלעות ישנו קודקוד משותף. פורמלית,

$$E(L(G))=\{(e,e')|e\cap e'\neq\emptyset\}$$

טענה: $|V(L(G))|=m$ וכן $|E(L(G))|=\sum_{v\in V}\binom{deg_G(v)}{2}$

הבחנה: צביעת קשתות של הגרף המקורי, שקולה לצביעת קודקודים של $L(G)$.

הגדרה: האינדקס הכרומטי של גרף הוא מס' הצלעות המינימלי שיש לצבוע בשביל לקבל צביעה חוקית ומתקיים $\chi'(G)=\chi(L(G))$.

הבחנה: זיווג M בG הוא קבוצה בלתי תלויה ב$L(G)$. וכן, כל מחלקת צבע בG היא זיווג.

טענה: מתקיים $2\Delta(G)-1\geq\chi'(G)\geq\Delta(G)$
הסבר: נבחין כי $\chi'(G)\geq\Delta(G)$ בהכרח כי הקודקוד עם הדרגה המקסימלית מכיל $\Delta(G)$ שכנים, שכעת יש צלעות בין שכנים אלו (מהגדרת ליין גרף). כמו כן הדרגה המקסימלית בליין גרף הינה $2\Delta(G)-2$.

נבחין כי גרף כוכב מקיים $\chi'(G)=\Delta(G)$.

טענה: לכל עץ T, מתקיים $\chi'(T)=\Delta(T)$ (מכאן שזה נכון גם ליער).

משפט קוניג: לכל גרף דו צדדי $G=(V,E)$, מתקיים $\chi'(G)=\Delta(G)$.

הבחנה: צביעה בקשתות של הגרף בk צבעים היא חלוקה של הגרף לk זיווגים מושלמים.
האם תמיד מתקיים $\Delta(G)=\chi'(G)$? לא. במעגל אי זוגי, הליין גרף שלו הוא גם מעגל אי זוגי והדרגה המקסימלית היא 2 אך צביע ב3 צבעים.

משפט ויזינג: יהי G גרף, אזי מתקיים $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.
משפט ויזינג למעשה נותן לנו חלוקה של כל הגרפים בעולם לשני סוגים:

1. גרפים ממחלקה 1- כל גרף שניתן לצבוע בקשתות באופן חוקי עם $\Delta(G)$ צבעים. אלו גרפים שבהם האינדקס הכרומטי שווה לחסם התחתון במשפט. למשל: גרפים דו צדדיים.
2. גרפים ממחלקה 2- כל גרף שניתן לצבוע באופן חוקי עם $\Delta(G)+1$ צבעים ואי אפשר בפחות. אלו גרפים בהם האינדקס הכרומטי שווה לחסם העליון במשפט. למשל: גרפים r רגולריים עם מס' אי זוגי של קודקודים.

נראה כעת תנאי מספיק להיותו של גרף חלק ממחלקה 2.
טענה: יהי $G=(V,E)$ גרף. אזי, מתקיים $\chi'(G) \geq \frac{|E|}{MM(G)}$
הוכחה: תהי $f' : E \to \{1,...,\chi'(G)\}$ צביעה חוקית ב$\chi'(G)$ צבעים. נגדיר $\chi'(G)$ זיווגים באופן הבא: לכל צבע i מבין $\chi'(G)$ הצבעים נגדיר

$$M_i = \{e_i \in E | f'(e) = i\}$$

נבחין כי אלו אכן זיווגים חוקיים, שכן אם ישנן 2 צלעות עם קודקוד משותף, אזי הן בצבעים שונים. וכן, בהכרח מתקיים לכל i כי $|M_i| \leq MM(G)$. כעת,

$$|E| = \sum_{i=1}^{\chi'(G)} M_i \leq \chi'(G) \times MM(G) \Longrightarrow \chi'(G) \geq \frac{|E|}{MM(G)}$$

מסקנה: יהי גרף $G=(V,E)$. אם $|E| > MM(G) \times \Delta(G)$ אזי G ממחלקה 2.
הוכחה:

$$\chi'(G) \geq \frac{|E|}{MM(G)} > \frac{MM(GG) \times \Delta(G)}{MM(G)} = \Delta(G)$$

כלומר $\chi'(G) > \Delta(G)$ ולכן בהכרח G ממחלקה 2.

9.1 צביעה ברשימות

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף ובנוסף לכל $v \in V$ נתונה רשימה $L_V \in \mathbb{N}$ המגדירה את הצבעים בהם מותר לצבוע את הצומת v. צביעה חוקית מהרשימות $L=\{L_v\}_{v \in V}$ היא פונקציה $C : V \to \mathbb{N}$ המקיימת:
א. C צביעה חוקית של G במובן הרגיל.
ב. לכל קודקוד $v \in V$ מתקיים $C(v) \in L_v$
גרף נקרא k-בחיר או k-צביע מרשימות אם לכל משפחת רשימות $L=\{L_v\}_{v \in V} \subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל קודקוד $v \in V$ מתקיים $|L_v|=k$ וG צביע באופן חוקי מהרשימות L. מספר הבחירה הוא $ch(G)$ והוא המספר k המינימלי ביותר עבורו G k-בחיר.

טענה: תמיד מתקיים $ch(G) \geq \chi(G)$, אין בהכרח שוויון.

טענה: לכל $k \in \mathbb{N}$ אם $n=\binom{2k-1}{k}$ אזי $K_{n,n}$ אינו k-בחיר. כלומר בהכרח $ch(G) > k$.

טענה: כל גרף מישורי דו"צ הוא 3 בחיר.
טענה: כל גרף מישורי הוא 5 בחיר.

10 נוסחאות נסיגה

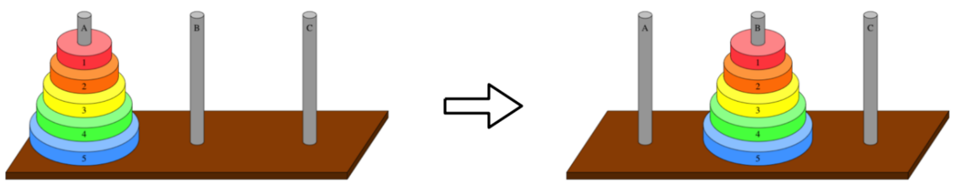
ישנם בעיות ספירה ומניה שקלות לייצוג באמצעות נוסחת נסיגה. למשל, סדרת פיבונאצ'י שניתנת לכתיבה ע"י נוסחת הנסיגה:

$$a_1 = a_2 = 1, \forall n > 2 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

נרצה ראשית לדבר על כיצד ממירים בעיה לנוסחת נסיגה, ולאחר מכן כיצד פותרים את נוסחת הנסיגה.

10.1 בעיית מגדלי האנוי

נזכר בבעיה, ישנם אריחים בגדלים שונים המסודרים מהכבד לקל בעמודה כלשהי. נרצה להעבירם לעמודה השניה, כך שסדרם ישמר ומותר לנו להשתמש בעמודה השלישית כעזר. השאלה היא, כמה צעדים ישנם לעשות בשביל לפתור את הבעיה? (כמה מעברים). נבחין כי בכל שלב טבעת קלה חייבת להיות על טבעת כבדה בלבד.



כיצד נפתור זאת? נסמן:

a_n - מס' הצעדים שצריך להעביר n טבעות ממוינות מהעמודה הA לעמודה הB.

נבחין, כאשר יש לי 0 טבעות יתקיים $a_0 = 0$ - אין לנו שום דבר להעביר. אם בידינו טבעת אחת, נצטרך מעבר אחד בדיוק: $a_1 = 1$.

מה קורה כאשר יש לנו 2 טבעות? נצטרך להעביר את העליונה לעמודה הC, את השניה לעמודה B ולבסוף שוב את העליונה מעמודה C אל B כלומר סה"כ $a_2 = 3$.

מה לגבי n כללי?

נתעלם מהטבעת האחרונה, ונצטרך לטפל בתת בעיה a_{n-1} (נותר לנו להעביר $n-1$ טבעות), אשר יועברו אל C. את הטבעת האחרונה נעביר אל עמודה B וכעת נצטרך להחזיר את $n-1$ המטבעות מC לB כלומר שוב נצטרך לפתור את תת הבעיה a_{n-1}. נבחין כי אין לנו מושג כיצד יעברו הטבעות בתחילה מA אל C אך אנו יודעים שגודלם יהיה a_{n-1}, שכן זה שקול לבעיה של "להעביר מA לB" רק שכעת זה "להעביר מA לC". וסה"כ נקבל -

$$a_0 = 0, \forall n > 0 : a_n = 2a_{n-1} + 1$$

כיצד נפתור את נוסחת הנסיגה?

1. ראשית, ננסה בתחילה לנחש את נוסחת הנסיגה. כלומר, נסתכל על ערכים ראשונים:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31...$$

נבחין כי ניתן לראות דפוס די בסיסי: $a_n = 2^n - 1$. זה יהיה הניחוש שלנו.

2. שנית, נוכיח כי מתקיים $a_n = 2^n - 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ באינדוקציה.
בסיס: עבור $n = 0$ אכן נקבל $a_0 = 2^0 - 1 = 0$ כנדרש.
צעד: נניח נכונות עבור $n - 1$. כלומר, $a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ ונראה כי:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$$

כנדרש.

10.2 תתי סדרות ללא מספרים רצופים

נתבונן בבעיה הבאה. נסתכל על כל תתי הסדרות של $\{1, ..., n\}$ ונשאל: כמה תתי סדרות ישנן בהן אין שני מספרים רצופים?
נסמן a_n - מס' תתי סדרות שאין בהן שני מספרים רצופים מבין המספרים $\{1, ..., n\}$.
נבחין כי $a_0 = 1$ כיוון שהקבוצה הריקה מקיימת זאת.
נראה כי $a_1 = 2$ כיוון שישנן שתי קבוצות - $\emptyset, \{1\}$
עבור $n = 2$ נבחין כי הקבוצות האפשרויות הינן $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ ולכן $a_2 = 3$
עבור $n = 3$ נקבל $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$ ולכן $a_3 = 5$

ומה קורה באופן כללי? נסתכל על האיבר האחרון n.
אם n בפנים, אזי מדובר בבחירה מבין $\{1, ..., n - 2\}$ איברים, שכן איננו יכולים לבחור את $n - 1$ ולכן זו תת הבעיה a_{n-2}
אם n לא בפנים, אזי זו בחירה של $\{1, ..., n - 1\}$ איברים וזו תת הבעיה a_{n-1}
לכן סה"כ נקבל כי:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, \forall n > 1 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

כיצד נפתור נוסחה זו? לנחש כמו קודם יהיה קשה יותר. בהמשך נראה שיטה כיצד לפתור זאת. זה מזכיר מאוד את פיבונאצ'י, פרט לתנאי ההתחלה $a_1 = 1$ ואצלנו $a_1 = 2$.

10.3 בעיית הריצוף

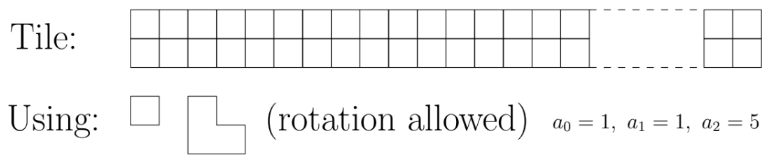
בידינו רצפה, מגודל $n \times 1$ ובידינו שני סוגי אריחים בגודל 1×1 ו2×1. כמה דרכים שונות יש לנו לרצף את הרצפה $n \times 1$?
נסמן כרגיל, a_n כמס' הדרכים השונות לריצוף הרצפה $n \times 1$.
נבחין כי $a_0 = 1$, אין לנו אפשרויות לרצף ולכן זה דרך אחת של לא לעשות כלום. עבור $a_1 = 1$ כיוון שאפשר להשתמש רק באריח 1×1. עבור $a_2 = 2$ אנחנו בוחרים האם להשתמש באיבר של ה2 ואז רק בו או בפעמיים רציף של 1×1 ולכן 2 אפשרויות.

מה קורה באופן כללי? או שנבחר להוסיף אריח של 1 בהתחלה, ואז זה למעשה תת הבעיה של a_{n-1} שכעת הורחבה לn ע"י הוספת האריח או שנרצה להוסיף אריח של 2 בהתחלה ואז זה שוב לטפל בתת הבעיה של a_{n-2} לאחר שנוסף לנו אריח של 2, ונקבל

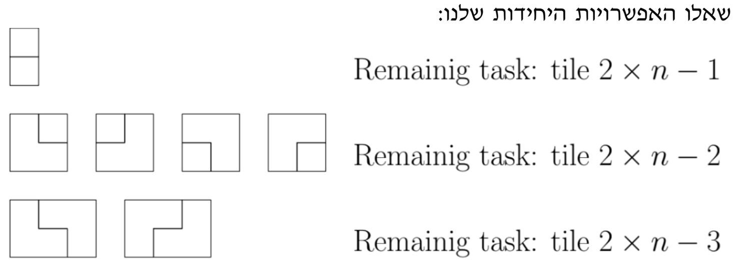
$$a_0 = a_1 = 1, \forall n > 1 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

וכעת קיבלנו בדיוק את נוסחת פיבונאצ'י. כלומר: מס' הדרכים לריצוף רצפה $1\times n$ הוא כמס' F_n.

נסתכל על בעיה קשה יותר. ומה אם הלוח הוא מגודל $2 \times n$ ובידינו שני סוגי משבצות כמו מטה בהינתן שהמשבצת שמורכבת מ3 משבצות ניתנת לסיבוב?



נסמן a_n כמס' הדרכים לרצף $2 \times n$ ונבחין כי: אם נסתכל על הדרכים לרצף את המשבצת הראשונה נקבל שאלו האפשרויות היחידות שלנו:



וכעת, לאחר שריצפנו את ההתחלה הבעיה צומצמה שכן ההתחלה נפתרה ובהמשך נפתור תת בעיה! מכאן שנקבל את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 5, \forall n > 2 : a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

שכן, יש בדיוק דרך אחת להתחיל ואז לעבור לתת בעיה של a_{n-1}, ישנם 4 דרכים להתחיל ולעבור לתת בעיה של a_{n-2} וישנם 2 דרכים להתחיל ולעבור לתת בעיה של a_{n-3}. כיצד נפתור את נוסחת הנסיגה הזו?

10.4 פתרון נוסחאות נסיגה

הגדרה. נוסחת נסיגה **לינארית** עם מקדמים קבועים היא נוסחת נסיגה מהצורה הבאה:

$$a_n = \alpha_1 \times a_{n-1} + \alpha_2 \times a_{n-2} + ... + \alpha_{n-k} \times a_{n-k} + b$$

עבור קבועים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, b \in \mathbb{R}$. בהכרח יתקיים $\alpha_k \neq 0$ (אחרת, נוריד את סדר הנוסחה). k יקרא סדר הנוסחה.

באשר $b = 0$ נאמר כי נוסחת הנסיגה הומוגנית. אם $b \neq 0$ הנוסחה אינה הומוגנית.

הערה. נוסחת נסיגה מהצורה $a_n = n \times a_{n-5} + 2a_{n-2}$ היא כן לינארית, לא עם מקדמים קבועים. נוסחת נסיגה מהצורה $a_n = a_{n-1}^2 - 3a_{n-2}$ היא לא לינארית.

כעת, נתמקד בנוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות, בהמשך נדון כיצד נפתור נוסחאות נסיגה שאינן הומוגניות (אך כן לינאריות).

טענה. בהינתן נוסחת נסיגה מסדר k עם תנאי ההתחלה $a_0, ..., a_{k-1}$, אזי הם מגדירים פתרון יחיד לנוסחת הנסיגה $\{a_n\}_{n\geq 0}$ שמייצגת את הסדרה האינסופית. אם כן, אם אין לנו תנאי התחלה אזי יתכנו פתרונות שונים.

טענה. המרחב של הסדרות האינסופיות $\{x_n\}_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ הוא מרחב וקטורי. כלומר - כל סדרה אינסופית היא וקטור ממשי בגודל $\mathbb{N}$ (וקטור עם אינסוף מיקומים).

כיצד מוגדר חיבור וכפל בסקלר במרחב הוקטורי הנ"ל?

$$\{x_n\}_{n\geq 0} + \{y_n\}_{n\geq 0} = \{x_n + y_n\}_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$\beta \times \{x_n\}_{n\geq 0} = \{\beta x_n\}_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

כלומר, חיבור סדרות אינסופיות הוא סדרה אינסופית. כפל בסקלר של סדרה אינסופית היא סדרה אינסופית.

הגדרה. מרחב הפתרונות A לנוסחת הנסיגה הוא כל הסדרות $\{x_n\}_{n\geq 0}$ שמקיימות את נוסחת הנסיגה:

$$A = \{\{x_n\}_{n\geq 0} | \forall n \geq k : x_n = \alpha_1 \times x_{n-1} + ... + \alpha_k \times x_{n-k}\}$$

טענה. A הוא תת מרחב לינארי של מרחב הסדרות האינסופיות. (סגור לחיבור וכפל בסקלר של סדרות שמקיימות את נוסחת הנסיגה).

הוכחה. יהיו $\{x_n\}_{n\geq 0}, \{y_n\}_{n\geq 0} \in A$ ותהי $\{z_n\}_{n\geq 0} = \{x_n\}_{n\geq 0} + \{y_n\}_{n\geq 0}$. אזי,

$$z_n = x_n + y_n = (\alpha_1 \times x_{n-1} + ... + \alpha_k \times x_{n-k}) + (\alpha_1 \times y_{n-1} + ... + \alpha_k \times y_{n-k}) =$$

$$\alpha_1(x_{n-1} + y_{n-1}) + ... + \alpha_k(x_{n-k} + y_{n-k}) = \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_k z_{n-k}$$

ולכן,

$$z_n = \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_k z_{n-k}$$

כלומר, אכן $z \in A$.

כעת, נוכיח כפל בסקלר. תהי $\{x_n\}_{n\geq 0} \in A$ ותהי $\beta \in \mathbb{R}$ ונגדיר $z_n = \beta \times x_n$. מכאן,

$$z_n = \beta \times (\alpha_1 \times x_{n-1} + ... + \alpha_k \times x_{n-k}) = \alpha_1(\beta \times x_{n-1}) + ... + \alpha_k(\beta x_{n-k}) = \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_k z_k$$

ומכאן שאכן $z_n \in A$.
סה"כ ישנה סגירות לכפל בסקלר וחיבור ולכן אכן תת מרחב לינארי.

טענה. המימד של A הוא k.
הסבר. ברגע שקבעת את k המיקומים קבעת סדרה כלשהי ולכן קבעת k סדרות. באופן פורמלי, נגדיר לכל $1 \leq i \leq k-1$ את $\{x_i\}^i = 1$ ואת $x_j^i = 0$ לכל $0 \leq j \leq k-1$ ששונים מi. כך למעשה בכל שלב נקבע את אחד מהמקדמים הראשונים לאחד, ואת השאר לאפס. נקבל k סדרות, ומתקיים (דרוש הוכחה) כי k הסדרות הללו גם בלתי תלויות זו בזו (ברור, סדרות שונות) וגם שהם פורשים את כל מרחב הפתרונות של נוסחת הנסיגה.

לאחר כל ההקדמה התאורטית, כיוון שמימד מרחב הפתרונות A הינו k **אנחנו יכולים לקבל רעיון למציאת פתרון סגור** לנוסחת הנסיגה. נרצה למצוא בסיס אחר עבור A שיהיה פשוט לעבוד איתו. איזה בסיס? נבחין כי הסדרות ההנדסיות $\{\lambda^n\}_{n\geq 0}$ היא סדרה שקלה לחישוב. אם בידינו היה בסיס שמורכב מסדרות הנדסיות, שכן למציאת n נצטרך $O(logn)$ צעדים - ממש כמו העלאה בחזקה במבנ"ת. וזה כבר לא $O(n)$ צעדים.
אילו היינו יכולים ליצור בסיס שמורכב מסדרות הנדסיות, זה היה נהדר לנו. נניח שיש בסיס כזה של סדרה הנדסית שהיא פתרון לנוסחת הנסיגה. זה אומר שלכל $n \geq k$ מתקיים:

$$\lambda^n = \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + ... + \alpha_k\lambda^{n-k}$$

ובאופן שקול אם נחלק את שני האגפים בλ^{n-k}:

$$\lambda^k - \alpha_1\lambda^{k-1} - \alpha_2\lambda^{k-2} - ... - \alpha_{k-1}\lambda - \alpha_k = 0$$

זה יקרה **הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה** מסדר k.

טענה. יהי χ שורש של הפולינום האופייני. אזי $\{\chi^n\}_{n\geq 0} \in A$.
הוכחה. לכל $n \geq k$ מתקיים:

$$\chi^n = \chi^{n-k} \times \chi^k = \chi^{n-k}(\alpha_1\chi^{k-1} + ... + \alpha_{k-1}\chi + \alpha_k) = \alpha_1\chi^{n-1} + ... + \alpha_k\chi^{n-k}$$

שכן, מתקיים $\chi^k = \alpha_1\chi^{k-1} + ... + \alpha_{k-1}\chi + \alpha_k$ כיוון שχ שורש של הפולינום האופייני ולכן אם מעבירים אגף אכן ערך זה יוצא אפס כי הוא שורש.

טענה. נניח כי לפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה ישנם k שורשים ממשיים שונים: $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$.
אזי, $\{\lambda_1^n\}_{n\geq 0}, ..., \{\lambda_k^n\}_{n\geq 0}$ הוא בסיס של A.
הוכחה. יהיו $\{\lambda_1^n\}_{n\geq 0}, ..., \{\lambda_k^n\}_{n\geq 0}$ ונבחין כי הם אכן בA. נוכיח כי הם בלתי תלויים. לפיכך יהיו $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\beta_1 \times \{\lambda_1^n\}_{n\geq 0} + ... + \beta_k \times \{\lambda_k^n\}_{n\geq 0} = 0$$

נבחין כי משמעות הדבר היא ש:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & .. & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & .. & \lambda_{k-1}^2 & \lambda_1^2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & .. & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ ... \\ \beta_k \end{pmatrix} = \vec{0}$$

נרצה להוכיח כי וקטור b הינו אפסים. אם כן, מטריצה משמאל הינה מטריצת ונדרמונדה שהינה הפיכה כיוון שכל המקדמים שונים, ולכן קיימת לה הופכית V^{-1}. אם נכפיל משני הצדדים נקבל כי $\vec{b} = V^{-1} \times \vec{0}$ ובמילים אחרות, $\vec{b} = 0$, כנדרש. אכן בלתי תלויים.

כעת, כיצד נשתמש בלמה הקודמת על מנת למצוא אכן נוסחת נסיגה סגורה?
כעת נדגים כיצד למצוא פתרון לנוסחת נסיגה בהינתן כל התאוריה שניתנה כאן.

10.5 פתרון נוסחת פיבונאצ'י

נרצה לפתור את הנוסחה הבאה:

$$a_0 = a_1 = 1, \forall n > 1 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

שלב ראשון: נכתוב את הפולינום האופייני:

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(מספרי הזהב).
לכן, הסדרות הבאות:

$$\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\}_{n\geq 0}, \{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}_{n\geq 0}$$

הם בסיס של $A = \{\{x_n\}_{n\geq 0} | \forall n \geq 2 : x_n = x_{n-1} + x_{n-2}\}$

שלב שני: מציאת המקדמים.
כעת, כל קומבינציה לינארית של שני אלו נמצאת במרחב הפתרונות, ויותר חשוב: ניתן לייצג כל סדרה במרחב הפתרונות כקומבינציה לינארית של שתי סדרות אלו. אנו מעוניינים בסדרה **ספציפית** ממרחב הפתרונות. כיוון שבידינו ישנם תנאי התחלה.
כל סדרה ניתנת לייצוג אם כן ע"י $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ כך:

$$\{x_n\}_{n\geq 0} = \beta_1 \times \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\}_{n\geq 0} + \beta_2 \times \{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\}_{n\geq 0}$$

לכן, באשר לתנאי ההתחלה שלנו יהיה צריך להתקיים:

$$\begin{cases} \beta_1 \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + \beta_2 \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 = a_0 = 1 & \Longrightarrow & \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \beta_1 \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + \beta_2 \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 = a_1 = 1 & \Longrightarrow & \beta_1 \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \beta_2 \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$$

נפתור את מערכת המשוואות, נקבל כי:

$$\beta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \beta_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

ולכן, סדרת פיבונאצ'י הינה:

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

ובצורה יפה יותר:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

10.6 דוגמה נוספת לפתרון נוסחת נסיגה הומוגנית

דוגמה שניה: נרצה לפתור את נוסחת הנסיגה לפתרון בעיית הריצוף -

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 5, \forall n > 2 : a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

שלב ראשון - פולינום אופייני:

$$x^3 = x^2 + 4x + 2 \Longrightarrow x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$$

בשלב ראשון לרוב במשוואות כאלו מסובכות נרצה לבדוק ערכי $x = 0, 1, 2, -1, -2$ לבדוק אם אחד מהם שורש, ואז לבצע חלוקת פולינומים כיוון שאיננו יודעים לפתור משוואה שכזו. נבחין כי $x = -1$ הוא שורש של הפולינום ע"י הצבה ונוכל לקבל ע"י חילוק פולינום כי הפולינום שקול לפולינום הבא:

$$(x+1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$(x+1)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))=0$$

ולפיכך, הפתרון הכללי באשר $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$ יהיה:

$$a_n=\beta_1\times(-1)^n+\beta_2\times(1+\sqrt{3})^n+\beta_3\times(1-\sqrt{3})^n$$

בהינתן תנאי ההתחלה, נוכל ליצור 3 משוואות ב3 נעלמים.

$$a_0=1\Longrightarrow\beta_1+\beta_2+\beta_3=1$$

$$a_1=1\Longrightarrow-\beta_1+\beta_2+\beta_2\sqrt{3}+\beta_3-\beta_3\sqrt{3}=1$$

$$a_2=5\Longrightarrow\beta_1+\beta_2\times(1+\sqrt{3})^2+\beta_3\times(1-\sqrt{3})^2=5$$

פתרון המשוואות יניב את הערכים

$$\beta_1=1,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\beta_3=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ולכן הפתרון לנוסחת הנסיגה:

$$a_n=(-1)^n+\frac{1}{\sqrt{3}}\times(1+\sqrt{3})^n-\frac{1}{\sqrt{3}}\times(1-\sqrt{3})^n$$

10.7 שורשים מרוכבים

נתבונן בנוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_0=7,a_1=9,a_2=11,\forall n>2:a_n=3a_{n-1}-4a_{n-2}+12a_{n-3}$$

ובכן, הפולינום האופייני הינו

$$x^3-3x^2+4x-12=0$$

והשורשים של משוואה זו הינם:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$$

מה עושים? השורשים שלנו יצאו מרוכבים.

טענה: מרחב הסדרות האינסופיות הינו מרחב וקטורי גם תחת $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
טענה: כל התהליך שהוגדר קודם לכן עבור $\mathbb{R}$, נכון גם עבור $\mathbb{C}$.
טענה: אם תנאי ההתחלה ממשיים, גם אם השורשים שנקבל מרוכבים אזי נוסחת הנסיגה תהיה בשלמים.

לפיכך נקבל כי:

$$a_n = \beta_1 \times 3^n + \beta_2 \times (2i)^n + \beta_3 \times (-2i)^n$$

נפתור את מערכת המשוואות עם תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\beta_1 = 3, \beta_2 = \beta_2 = 2$$

$$a_n = 3^{n+1} + 2^{n+1}(i)^n + 2^{n+1}(-i)^n$$

$$a_n = 3^{n+1} + 2^{n+1} \times i^n(1^n + (-1)^n)$$

כעת, אם $n = 2k+1$ נקבל כי $1^n + (-1)^n = 0$ ולכן $a_n = 3^{n+1}$
אם $n = 2k$, $1^n + (-1)^n = 2$ ולכן $i^{2k} = (-1)^k$ ולכן $a_n = 3^{2k+1} + 2^{2k+1} \times (-1)^k(2) = 3^{2k+1} + (-1)^k \times 2^{2k+2}$

סה"כ נקבל -

$$a_n = \left\{ \begin{array}{cc} 7 & n = 0 \\ 9 & n = 1 \\ 11 & n = 2 \\ 3^{2k+1} + (-1)^k \times 2^{2k+2} & n = 2k > 2 \\ 3^{2k+1} & n = 2k+1 > 2 \end{array} \right\}$$

10.8 אין מספיק שורשים

נתבונן בנוסחת הנסיגה הבאה עם $a_0 = 3, a_1 = 14$, וכן לכל $n > 1$:

$$a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

הפולינום האופייני הינו $x^2 = 2x - 4$ והפתרון היחיד הינו $x = 2$. מה עושים? עלינו כפי שראינו קודם להחזיק ב2 פתרונות.

טענה: נניח כי χ הוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי q. אזי, $\{\lambda^n\}_{n\geq 0}, \{n\times\lambda^n\}_{n\geq 0}, ..., \{n^{q-1}\times \lambda^n\}_{n\geq 0} \in A$.

כמו כן, ללא הוכחה: אם נקח את ערכים אלו מדובר בבסיס של A.

לכן, כעת נחזור לדוגמה שלנו קודם. הפולינום היה $(x-2)^2$, לכן הריבוי הינו 2. ולכן גם $\{n^{2-1} \times \lambda^n\}_{n\geq 0} = \{n \times \lambda^n\}_{n\geq 0}$ הינו פתרון של נוסחת הנסיגה. לפיכך, נחפש β_1, β_2 כך ש:

$$a_n = \beta_1 \times 2^n + \beta_2 \times n \times 2^n$$

אם כן,

$$a_0 = \beta_1 \times 2^0 = \beta_1 = 3$$

$$a_1 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2 \times 3 + 2\beta_2 = 14 \Longrightarrow 2\beta_2 = 8 \Longrightarrow \beta_2 = 4$$

והפתרון לנוסחת הנסיגה הינו:

$$a_n = 3 \times 2^n + 4n \times 2^n = 2^n(3 + 4n)$$

10.9 נוסחאות נסיגה שאינן הומוגניות

כיצד נפתור נוסחאות נסיגה שאינן הומוגניות? כלומר $b \neq 0$?
נניח כי A מטריצה. נתבונן במרחב הפתרונות למשוואה:

$$sol(A\vec{x} = \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n | A \times \vec{x} = \vec{b}\}$$

אם $\vec{b} = 0$, אזי $sol(A\vec{x} = \vec{b}) = ker(A)$ הוא תת מרחב לינארי מעל $\mathbb{C}^n$ כפי שראינו בלינארית. זה מה שעבדנו איתו עד כה.

אם כן, כאשר $\vec{b} \neq 0$ $sol(A\vec{x} = \vec{b})$ זהו לא תת מרחב לינארי כיוון שאינו סגור לחיבור. אם כן, ישנו מבנה למרחב הפתרונות הזה ששמו **תת מרחב אפיני**. הוא "כמעט" תת מרחב לינארי. הוא **מרחב לינארי מוזז.** כיצד נייצג אותו?

יהי $y \in sol(A\vec{x} = \vec{b})$. אזי,

$$sol(A\vec{x} = \vec{b}) = ker(A) + \vec{y} = \{\vec{x} + \vec{y} | A \times \vec{x} = 0\}$$

כלומר, כל וקטור במרחב הפתרונות ניתן לייצג באמצעות חיבור לוקטור אחר שנמצא ב$ker(A)$.

הוכחה: יהי $x \in Ker(A)$. אזי,

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + Ay = Ay = b$$

כלומר אכן וקטור זה נמצא במרחב הפתרונות $sol(A\vec{x} = \vec{b})$.

כיצד נשתמש במידע זה ובתת המרחב הנ"ל? כעת, כאשר נקח שתי פתרונות של נוסחת הנסיגה לא נקבל פתרון לנוסחת הנסיגה. לכן -

באופן כללי,

$$A = \{\{x_n\}_{n \geq 0} | \forall n \geq k, x_n = \alpha_1 x_{n-1} + ... + \alpha_k x_{n-k} + f(n)\}$$

הוא תת מרחב אפיני.

נמצא פתרון כלשהו לנוסחת הנסיגה הזו. ולאחר מכן, נתעלם ממנה.

נסתכל בשלב השני על מרחב הפתרונות ללא $f(n)$. ולאחר מכן, הפתרון הקודם בתוספת הפתרון החדש ללא $f(n)$ יפרשו את כל מרחב הפתרונות.

דוגמה:

נתבונן בנוסחת הנסיגה

$$a_0 = 4, a_1 = 5, \forall n > 1 : a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 8$$

שלב ראשון. ננחש פתרון למרחב הפתרונות הלא הומוגני $\{b_n\}_{n \geq 0}$ באשר מתעלמים מתנאי ההתחלה. נרצה למצוא למשל, סדרה קבועה באשר $a_n = \mu$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי,

$$\mu = 6\mu - 9\mu + 8 \Longrightarrow \mu = 2$$

לכן הסדרה האינסופית $\{b_n\}_{n \geq 0} = \{2\}_{n \geq 0}$ היא פתרון לנוסחת הנסיגה האינסופית ללא תנאי ההתחלה.

שלב שני. נתעלם מהמקדם 8 ונמצא את הצורה הכללית של המערכת ההומוגנית.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow (x-3)^2 = 0$$

$\lambda = 3$ מריבוי 2, ולכן $\{3^n\}_{n\geq 0}, \{n3^n\}_{n\geq 0}$ פורשים את מרחב הפתרונות ההומוגני. כלומר פתרון כללי למרחב ההומוגני הינו:

$$\{c_n\}_{n\geq 0} = \beta_1 \times \{3^n\}_{n\geq 0} + \beta_2 \times \{n3^n\}_{n\geq 0}$$

שלב שלישי. מתקיים

$$\{a_n\}_{n\geq 0} = \{b_n\}_{n\geq 0} + \{c_n\}_{n\geq 0}$$

ולכן,

$$\{a_n\}_{n\geq 0} = \beta_1 \times \{3^n\}_{n\geq 0} + \beta_2 \times \{n3^n\}_{n\geq 0} + \{2\}_{n\geq 0}$$

שלב רביעי. נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $\beta_1 = 2, \beta_2 = -1$
ולכן,

$$a_n = 2 \times 3^n - n \times 3^n + 2$$

הערה חשובה. החלק המאתגר לכאורה הוא הניחוש בהתחלה - אם סדרה קבועה לא תעבוד, ננסה לנחש $b_n = qn + p$ כסדרה לינארית כלשהו. אם גם זה לא יעבוד - אולי סדרה ריבועית.

11 השיטה ההסתברותית ותורת הגרפים האקסטרמלית

11.1 גרף תחרות

הגדרה: גרף תחרות $G = (V, E)$ הוא גרף מכוון שלכל $u, v \in V$ רק קשת אחת מבין $(u,v),(v,u) \in E$ (בהכרח אחד מן הזוגות בקשתות ורק אחד מהם).
נבחין כי גרף תחרות מקיים $|E| = \binom{n}{2}$.

הגדרה: תת קבוצה $A \subseteq V$ היא טרנזטיבית אם לכל $x, y, z \in A$ $(x,y),(y,z) \in E \Longrightarrow (x,z) \in E$. כלומר, קיים סדר כלשהו על A $(v_1, ..., v_l)$ שבו $(v_i, v_j) \in E \Longleftarrow i < j$.

טענה: יהי גרף תחרות $G = (V, E)$, באשר $|V| = n$, אזי ישנה בהכרח תת קבוצה טרנזטיבית מגודל $\lfloor log(n) \rfloor$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n.
בסיס: קל לראות עבור $n \leq 2$ (אם $n = 2$ אזי ישנה קשת אחת בלבד, ותת הקבוצה הטרנזטיבית מן הסתם בהכרח בגודל $log_2(2) = 1$)
צעד: נניח שלכל $n' < n$ מתקיים שהגרף שלה מכיל תת קבוצה טרנזטיבית בגודל $\lfloor log(n') \rfloor$.
דרגת היציאה הממוצעת הינה $\frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$ ולכן בהכרח ישנו קודקוד v_1 המקיים $deg(v_1) \geq \frac{n-1}{2}$. נסמן $V' = \{u \in V | (v_1, u) \in E\}$, אם כן לפי הנחת האינדוקציה בתת הגרף $G[V']$ ישנה תת קבוצה טרנזטיבית מגודל $\lfloor log(|V'|) \rfloor$, יחד עם v_1 נקבל תת קבוצה טרנזטיבית A באשר

$$A = A' \cup \{v_1\}$$

בגודל $\lfloor log(|V'|) \rfloor + 1$

אם $n = 2m$ אזי $|V'| \geq m$ ולכן $|A| = |A'| + 1 \geq \lfloor log(m) \rfloor + 1 = \lfloor log(2m) \rfloor = \lfloor log(n) \rfloor$

אם $n = 2m+1$ אזי $|V'| \geq m$ ולכן $|A| = |A'|+1 \geq \lfloor log(m) \rfloor + 1 \geq \lfloor log(2m+1) \geq \lfloor log(n) \rfloor \rfloor$

ולכן, בכל מקרה, הטענה נכונה.

האם זה חסם הדוק? כלומר, האם אפשר ליצור גרף שבו אין קבוצה יותר גדולה מ$\lfloor log(n) \rfloor$?

התשובה היא לא.

טענה (**משפט ארדוס**)**:** אם $\binom{n}{k} \times \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$ אזי קיים גרף תחרות $G = (V, E)$ כך ש $|V| = n$ ללא קבוצה טרנזטיבית בגודל k.

הערה. נבחין כי אם $k > 2log(n)+1$ אזי נקבל כי הוא יקיים זאת, כלומר: עבור $k > 2log(n)+1$ ניתן לבנות גרף תחרות שבו אין אף קבוצה טרנזטיבית בגודל k. כלומר, קיים גרף תחרות שבו אין קבוצה טרנזטיבית בגודל $2log(n) + 1 <$. שכן, יתקיים במקרה זה:

$$\binom{n}{k} \times \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} \leq \frac{n^k}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} \leq \frac{n^k}{2^{klogn}} = \frac{n^k}{n^k} = 1$$

הוכחה: נשתמש בשיטה ההסתברותית. נדגום גרף תחרות, ונראה שבהסתברות חיובית לא קיימת קבוצה טרנזטיבית בגודל k. שכן, אם קיים מאורע בהסתברות חיובית אזי התומך שלו (קבוצת האיברים שחלות במאורע) הם גרף התחרות שבו לא קיימת קבוצה טרנזטיבית מגודל k.

נבחין כי ישנם $2^{\binom{n}{2}}$ גרפי תחרות - שכן לכל צלע $(u, v), (v, u)$ יש הסתברות $\frac{1}{2}$ להבחר, וישנם $\binom{n}{2}$ צלעות, ולכן ההסתברות לגרף תחרות כלשהו הינה $\frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} = (\frac{1}{2})^{\binom{n}{2}}$.

עבור קבוצה $S \in \binom{S}{k}$ נגדיר את Ψ_S להיות המאורע בו S היא קבוצה טרנזטיבית. בכמה גרפי תחרות S הינה קבוצה טרנזטיבית? $k!$ (כיוון שזה מגדיר גרף תחרות לפי סדר כפי שהוסבר קודם לכן). אם כן, נבחין כי בגרף עם קבוצה טרנזטיבית, לאחר שנבחר את מיקום הקבוצה הטרנטזיבית ($k!$) אפשרויות זה ישרה לנו גרף תחרות, ישנם כעת $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ (כיוון שכבר בחרנו $\binom{k}{2}$ מיקומים עבור הקבוצה הטרנזטיבית עצמה). וסה"כ מס' גרפי התחרות שבהם S היא קבוצה טרנזטיבית הוא:

$$k! \times 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

ולכן,

$$Pr[\Psi_S] = \frac{k! \times 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$$

אם כן, ההסתברות שקיימת קבוצה טרנזטיבית בגודל k, נסמן מאורע זה A ונקבל לפי חסם האיחוד:

$$Pr[A] = Pr[\bigcup_{S \in \binom{V}{k}} \Psi_S] \leq \sum_{S \in \binom{S}{k}} Pr[\Psi_S] =_{**} \binom{n}{k} \times \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} <_{*} 1$$

$*$ מהנתון, $**$ ישנם $\binom{n}{k}$ תתי קבוצות בגודל k.

ולכן, ההסתברות שלא קיימת קבוצה טרנזטיבית בגודל k היא בהכרח חיובית, ולכן יש תת מאורע (תומך) הוא לא ריק - ולכן יש גרף כלשהו שבו אין קבוצה טרנזטיבית מגודל k.

השיטה ההסתברותית:

1. נדגום, נחשב הסתברות, ואם ההסתברות למשלים היא חיובית אזי בהכרח יש תומך (תת מאורע) - במקרה שלנו, גרף: שלא מקיים את הטענה, ולכן קיים גרף שלא מקיים.
2. אפשרות שניה היא: אם נניח שיש משתנה מקרי כך ש$\mathbb{E}[X] = \alpha$, אזי קיים ערך של X כך שהערך שלו $x \geq \alpha$ (פשוט גדול מהממוצע) והמופע שלו הוא גרף שמקיים זאת.

11.2 תת גרף דו צדדי גדול ביותר

בהינתן גרף $G = (V, E)$, לגרף זה ישנם הרבה תתי גרפים שונים. נרצה לדעת מהו גודל תת הגרף הדו צדדי הגדול ביותר של גרף מסויים. כלומר, בהינתן תת גרף H נרצה לדעת מהו היחס $\frac{|E_H|}{|E|}$ - כלומר כמה אפשר להבטיח את היחס הזה?

טענה. כל גרף $G = (V, E)$ עם m צלעות מכיל תת גרף דו צדדי עם לפחות $\frac{m}{2}$ צלעות.

הוכחה: כעת נוכיח, כי אם נניח שיש משתנה מקרי כך ש$\mathbb{E}[X] = \alpha$, אזי קיים ערך של X כך שהערך שלו $x \geq \alpha$ (פשוט גדול מהממוצע) - ואז בהכרח המופע הספציפי הזה, אם נוכיח כי התוחלת שלו היא מס' צלעות גדול שווה מ$\frac{m}{2}$ אז בהכרח קיים כזה.

נגדיר $L \subseteq V$ כך שכל קודקוד מצטרף לL בהסתברות $\frac{1}{2}$ ו$R = V \backslash L$. נגדיר:

$$G' = (V, E'), E' = \{e \in E | |e \cap L| = 1\}$$

בהכרח G' דו"צ, שכן יש צלע אמ"מ החיתוך שלה עם L הוא 1 (קודקוד אחד נמצא בה, ואין מצב ששניהם בה).

נגדיר $x = |E'|$ ונרצה להוכיח $\mathbb{E}[X] = \frac{m}{2}$. לכל $e \in E$ נגדיר משתנה מקרי X_e אינדיקטור למאורע שבו $e \in E'$.

$$\mathbb{E}[X_e] = Pr[X_e = 1] = Pr[u \in L \wedge v \in R] + Pr[u \in R \wedge v \in L] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}[X_e] = \sum_{e \in E} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

מסקנה: קיים תת גרף דו צדדי G' כך שמס' הצלעות $|E'| \geq \mathbb{E}[X] = \frac{m}{2}$ (שכן $X = |E'|$ ולכן בהכרח יש מישהו גדול שווה מהתוחלת).

האם אפשר לשפר?

טענה. יהי גרף $G = (V, E)$ כך ש$|V| = 2n$ זוגי, אזי קיים תת גרף דו צדדי בגודל $m \times \frac{n}{2n-1}$.
אם $|V| = 2n + 1$ אזי קיים בגודל $m \times \frac{n+1}{2n+1}$

הוכחה: בה"כ $|V| = 2n$. נדגום תת קבוצה L בגודל n, וH יהיה תת גרף שבו נשמרות צלעות רק בין L לבין $R = V \backslash L$. כעת, לכל צלע $\{u, v\} \in E$ נגדיר את X_e את המשתנה המקרי שבו $e \in E(H)$

$$Pr[X_e] = \frac{2 \times \binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{2n-1}$$

שכן ישנם שתי אפשרויות להשרדות הצלע - או שv נשמר או שu בL. ולאחר מכן נותרו לבחור לL עוד $n-1$ קודקודים מתוך $2n-2$. נבחין כי גודל מרחב המדגם הוא $\binom{2n}{2}$ (מס' הדרכים לספור n מתוך $2n$ באשר $|L| = n$). ולכן,

$$\mathbb{E}[|E(H)|] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}[X_e] = m \times \frac{n}{2n-1}$$

11.3 הסתברות בגרפים וגרפים מקריים

הגדרה: מודל גרף מקרי $G(n,p)$ הינה התפלגות על גרפים מעל קבוצת הקודקודים $\{1,...,n\}$ בו כל קשת אפשרית מופיעה בהסתברות $0 \leq p \leq 1$.

כלומר, ההסתברות לקבל כל גרף מקרי בודד שכזה המכיל m קשתות הינה $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$

הגדרה: גרף מקרי G מעל קבוצת הקודקודים $\{1,....,n\}$ הוא בעל התפלגות אחידה אם הוא גרף שההסתברות להגדיל אותו מבין אוסף הגרפים על הקודקודים $\{1,....n\}$ מתפלג אחיד, כלומר $Pr(G) = \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}}$. מדוע מספר הגרפים הוא $2^{\binom{n}{2}}$? ישנן לכל היותר $\binom{n}{2}$ קשתות - ולכל קשת יש שתי אפשרויות: להכנס או שלא להכנס.

טענה: (חסם האיחוד) לכל סדרת מאורעות $A_1,....,A_n$ (לא בהכרח זרים) מתקיים $Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n Pr[A_i]$

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס: $n=1$ ברור שישנו שוויון ממש. עבור $n=2$ נקבל $Pr[A_1 \cup A_2] = Pr[A_1] + Pr[A_2] - Pr[A_1 \cap A_2] \leq \sum_{i=1}^2 Pr[A_i]$ כנדרש כי הסתברות היא אי שלילית.

צעד: נניח נכונות עבור n. יהיו $n+1$ מאורעות. נבחין כי אם נסמן $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ אזי מתקיים

$$Pr[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i] = Pr[X \cup A_{n+1}] = Pr[X] + Pr[A_{n+1}] - Pr[X \cap A_{n+1}] \leq Pr[X] + Pr[A_{n+1}] \leq_* \sum_{i=1}^{n} Pr[A_i] + Pr[A_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} Pr[A$$

באשר $*$ נכון לפי הנחת האינדוקציה.

טענה: לינאריות התוחלת. עבור $X_1,....,X_n$ משתנים מקריים מתקיים $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$

השיטה ההסתברותית: השיטה ההסתברותית הינה כלי חזק בקומבינטוריקה ומטרתה להראות קיום של אובייקט שמקיים תכונה מסויימת. השיטה עובדת בצורה הבאה:

א. אנחנו רוצים להראות שאובייקט שמקיים תכונה מסוימת קיים, ולכן מוכיחים שההסתברות להגריל אובייקט שמקיים תכונה זו גדולה מאפס. באופן דומה, אם מוכיחים שההסתברות להגריל אובייקט שלא מקיים את התכונה קטן ממש מאחד, אזי חייב להיות אובייקט שמקיים את אותה התכונה.

נבחין: כי אם כל אובייקט באוסף אובייקטים מסוים לא מקיים את התכונה, אזי ההסתברות להגריל אובייקט בעל תכונה זו מאוסף זה הינה אפס.

ב. דרך שימוש נוספת בשיטה: לחשב את התוחלת של משתנה מקרי. גרסה זו עובדת כך - ניתן להבטיח שמשתנה מקרי יכול לקבל ערך הגדול או שווה לתוחלת שלו. באופן דומה להבטיח שמשתנה

מקרי יכול לקבל ערך הקטן או שווה לתוחלת שלו.

אי שוויון מרקוב: עבור כל $a > 0$, אם X מ"מ המקיים $X > 0$ אזי $Pr[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$

11.4 תת קבוצה $sum - free$ ומשפט ארדוס

הגדרה: קבוצה $X \subseteq \mathbb{Z}$ נקראת $sum - free$ אם לא קיימים $a, b, c \in X$ כך ש$a + b = c$. (יתכן $a = b$).

משפט ארדוס: בהינתן קבוצה A של שלמים ללא אפס, כך ש$n = |A|$. A מכילה תת קבוצה $sum - free$ בגודל $\frac{n}{3}$ לפחות.

הוכחה: נבחר $\theta \in (0, 1)$ ונגדיר:

$$A_\theta = \{n \in A | \theta \times n(mod1) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

נבחין כי A_θ אכן $sum - free$. יהיו $n, m \in A_\theta$. נרצה להראות כי $(n+m)(mod1) \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. $\alpha = \theta \times n(mod1)$ וכן $\beta = \theta \times n(mod1)$. נבחין כי $\alpha + \beta \in (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ כלומר $\theta(n+m)(mod1) \in [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1)$ ולכן אכן לא בקבוצה.

נבחין כי:

$$Pr[n \in A_\theta] = \frac{1}{3}$$

ולכן:

$$\mathbb{E}[A_\theta] = \sum_n Pr[n \in A_\theta] = \frac{n}{3}$$

כלומר, בהכרח קיימת קבוצה מגודל זה.

טענה: [חסם הדוק] לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה A של שלמים כך שכל קבוצה $sum - free$ שלה היא מגודל לכל היותר $n(\frac{1}{3} + \varepsilon)$.

11.5 קבוצה בלתי תלויה גדולה ביותר

טענה: נתון גרף G d רגולרי. אזי, קיימת קבוצה בלתי תלויה מגודל לפחות $IS(G) \geq \frac{n}{d+1}$. (קבוצה ב"ת גדולה ביותר היא קבוצת קודקודים שבין כל אחד מהם אין צלע).

הסבר: נניח שאתה בוחר קודקוד v לקבוצה הבלתי תלויה שלך. ברגע שבחרת אותו, אתה לא יכול לבחור אף אחד מהשכנים שלו (כי אז תהיה צלע ביניהם).מכיוון שהגרף הוא d־רגולרי, לכל קודקוד שבחרת יש בדיוק d שכנים.לכן, בחירה של קודקוד אחד "מבזבזת" או "חוסמת" לכל היותר $d + 1$ קודקודים ־ הקודקוד עצמו ועוד d השכנים שלו .אם כל בחירה "עולה" לנו לכל היותר $d+1$ קודקודים מתוך ה־n הקיימים, אנחנו חייבים להצליח לבחור לפחות $\frac{n}{d+1}$ קודקודים לפני שייגמרו לנו האפשרויות. מתמטית, על כל קודקוד שבחרנו גרענו $d+1$ קודקודים מהגרף. ולכן אם גודל הקבוצה הוא k, יתקיים בסוף בהכרח $k(d+1) \geq n$ כלומר $k \geq \frac{n}{d+1}$ (כי בהכרח הוצאנו את כל הקודקודים מהגרף).

טענה: עבור גרף כללי $G = (V, E)$, תמיד קיימת קבוצה בלתי תלויה מגודל $IS(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{deg(v)+1}$.

נבחין: עבור מעגל $IS(G)$ יהיה גדול יותר מהחסם, כלומר זה רק חסם תחתון. עבור גרף דו צדדי מלא עם $2n$ קודקודים $K_{n,n}$ נקבל כי $\sum_{v\in V}\frac{1}{n+1}=\frac{2n}{n+1}\to 2$ בערך אם כי בפועל קבוצה בלתי תלויה היא בגודל n. (אחד הצדדים).

הוכחה: נקח פרמוטציה $\pi:V\to[n]$ של קודקודים ונבנה קבוצה ב"ת $I\subseteq V$ בצורה הבאה: כל קודקוד $v\in V$ נכניס לI אם הוא מופיע בπ לפני כל השכנים שלו. כלומר לכל $u\in\Gamma(v)$ מתקיים $\pi(v)\le\pi(u)$. ברור כי I היא קבוצה בלתי תלויה (אין צלעות שלו עם השאר כי הוא נכנס אם שכניו לא הופיעו).

עבור קודקוד v נסמן x_v את האינדיקטור לכך ש$v\in I$. נבחין כי $Pr[x_v]=\frac{1}{deg(v)+1}$. ולפי לינאריות התוחלת: $\sum_{v\in V}\frac{1}{deg(v)+1}$. לכן, לפי השיטה ההסתברותית, בפרט קיימת קבוצה ב"ת לפחות בגודל זה.

טענה: כל גרף $G=(V,E)$ מכיל קליקה מקסימלית מגודל $MC(G)\ge\sum_{v\in V}\frac{1}{n-deg_G(v)}$

הוכחה: נבחין כי קליקה בגרף, הוא קבוצה ב"ת בגרף המשלים:

$$MC(G)=IS(\overline{G})\ge\sum_{v\in V}\frac{1}{deg_{\overline{G}}(v)+1}=\sum_{v\in V}\frac{1}{n-1-deg_G(v)+1}=\sum_{v\in V}\frac{1}{n-deg_G(v)}$$

11.6 קבוצה שולטת

בהינתן גרף $G=(V,E)$, קבוצה $U\subseteq V$ נקראת קבוצה שולטת אם לכל קודקוד ב$V\backslash U$ ישנו שכן בU.

אלגוריתם חמדני: בחר קודקוד, הוסף אותו לU, הורד את כל שכניו. והמשך הלאה. זמן ריצה לינארי. נבחין כי פתרון זה ממש לא אופטימלי, כלומר הוא לא מוצא את הקבוצה הקטנה ביותר.

טענה: כל גרף $G=(V,E)$ עם דרגה מינימלית δ מכיל קבוצה שולטת מגודל $\frac{ln(\delta+1)+1}{\delta+1}\times n\ge$.

הוכחה: תהי קבוצה $A\subseteq V$ קבוצה שנכניס אליה כל קודקוד בהסתברות p. תהיה $B\subseteq V$ קבוצת כל הקודקודים שאינם בA ושאין להם שכן בA. נבחין כי $A\cup B$ היא קבוצה שולטת (כל מי ששכן של A מטופל, וכל מי שלא, מטופל באמצעות B). נבחין כי ההסתברות להיות בB היא שאני לא נבחרתי וגם לא שכניי, כלומר $(1-p)^{deg_G(v)+1}$.

$$Pr[v\in A\cup B]=Pr[v\in A]+Pr[v\in B]=p+(1-p)^{deg_G(v)+1}\le p+(1-p)^{\delta+1}$$

נעזר באי השוויון: $e^{-x}\ge 1-x$.

$$\le p+e^{-p(\delta+1)}$$

כעת נגדיר $p=\frac{ln(1+\delta)}{1+\delta}$

$$=\frac{ln(1+\delta)}{1+\delta}+e^{-ln(1+\delta)}=\frac{ln(1+\delta)}{1+\delta}+\frac{1}{\delta+1}=\frac{ln(1+\delta)+1}{1+\delta}$$

כעת, מלינאריות התוחלת: $\mathbb{E}[A\cup B]=\sum_{v\in V}Pr[v\in A\cup B]\le n\times\frac{ln(1+\delta)+1}{1+\delta}$

11.7 מספר חיתוכים

מונוטוניות התוחלת: בהינתן זוג משתנים מקריים X,Y כך ש$X\le Y$, אזי מתקיים $\mathbb{E}[X]\le\mathbb{E}[Y]$.

הגדרה: עבור גרף $G=(V,E)$, מס' החיתוך של הגרף ($crossing\ number$) הוא מס' החיתוכים המינימלי מבין השיכונים של G במישור (כלומר השיכון עם ערך החיתוכים הקטן ביותר). אותו נסמן ב$cr(G)$. כל זוג קשתות שנחתכות, נחשבות כחיתוך אחד.

טענה. גרף G הוא מישורי $\Longleftrightarrow cr(G)=0$.

למת החיתוכים. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט כך ש$|V|=n,|E|=m$. אם $m\ge 4n$ אזי מתקיים $cr(G)\ge\frac{m^3}{64n^2}$

טענה. לכל גרף פשוט $G=(V,E)$ מתקיים $cr(G)\ge|E|-3|V|$.

11.8 צביעת היפר גרפים

היפר גרף K יוניפורמי (K גרף) הוא זוג $H=(V,E)$ כאשר V היא קבוצת קודקודים סופית וE היא קבוצת צלעות כך שכל $e\in E$ היא תת קבוצה של קודקודים בגודל k. כלומר $e\subseteq V$ וכן $|e|=k$.

נאמר כי k גרף H הוא r־צביע אם ניתן לצבוע באופן חוקי את הקודקודים שלו על ידי r צבעים (כלומר אין קודקודים סמוכים באותו צבע, מה שאומר שאין קשת מונכרומנטית).

נסמן ב$m(k)$ את המספר המינימלי של צלעות שיכולות להיות בk גרף שהוא לא 2 צביע. לדוגמה: עבור $k=2$ מדובר בגרף פשוט רגיל, נוכל לקחת משולש (מעגל אי זוגי) ולכן לא דו"צ והוא לא 2 צביע. לכן $m(2)=3$.

נבחין כי גרף רגיל שהכרנו עד היום הוא גרף בו $k=2$. **קשת מונכרומנטית** היא קשת שכל k הקודקודים שלה נצבעו באותו הצבע.

משפט ארדוס: $m(k)\ge 2^{k-1}$ לכל $k\ge 2$.
כלומר: כל k גרף עם פחות מ2^{k-1} קשתות, הוא כן 2 צביע.

הערה חשובה. צביעה בהיפר גרף אינה צביעה בגרף רגיל. גרף הוא r צביע אם ניתן לצבוע את קודקודיו בr צבעים כך שאין קשת שכל קודקודיה צבועים באותו הצבע.

12 תורת הגרפים האקסטרמלית

ענף של קומבינטוריקה שלומד כמה גרפים יכולים להיות דלילים בהינתן תכונה כלשהי.

12.1 מספרי רמזי

טענה: בהינתן קבוצה של 6 אנשים, בהכרח ישנם 3 אנשים שמכירים אחד את השני או 3 אנשים שלא מכירים אחד את השני.

הוכחה: נתבונן בגרף הכרויות, 6 קודקודים עם כל הצלעות ביניהם ($K_{n,n}$). אם הם מכירים אחד את השני נשים צלע כחולה, ואם לא מכירים נשים צלע אדומה. נוכיח כי תמיד יש משולש כחול או משולש אדום. בהמשך יובהר מדוע.

הגדרה: מספר רמזי $s,t\in\mathbb{N}$ יסומן $R(s,t)$ הוא המספר המינימלי כך ש**בכל** צביעה של קשתות K_R באדום וכחול, יש לפחות קליקה אדומה K_s או קליקה כחולה K_t כתת גרף. נבחין כי ההגדרה

שקולה לקחת כתת גרף את הקשתות האדומות, ואז קליקה אדומה בגרף המקורי היא קליקה בגרף החדש, וקליקה כחולה בגרף המקורי היא קבוצה בת"ל בגרף החדש.

במילים אחרות, מס' רמאזי הוא גודל הגרף המינימלי (מס' הקודקודים המינימלי) בו יש קליקה מגודל s או קבוצה בלתי תלויה מגודל t.

הטענה הקודמת שקולה לטענה $R(3,3) \leq 6$. נבחין כי ישנו גרף שבו $R(3,3) > 5$ ולכן בהכרח $R(3,3) = 6$.

טענה: $R(3,3) = 6$.

טענה: לכל $s, t \geq 1$ מתקיים $R(s,1) = R(1,t) = 1$ (מדוע? תמיד יש קליקה בגודל 1, קודקוד יחיד).

טענה: $R(s,t) = R(t,s)$.

טענה: $R(s,2) = s$, לכל $s > 1$

הסבר: עבור חסם עליון, אם ישנה צלע כחולה, אזי המס' הנדרש הוא $s \leq 2$. אחרת: חייבים לקחת קליקה בגודל s. ולכן $R(s,2) \leq s$. עבור החסם התחתון: אם נניח בשלילה כי $s - 1$ צריך, נבנה גרף עם $s - 1$ קודקודים וצלעות אדומות בהם. לא יתכן שישנה כאן קליקה אדומה בגודל s, כי ישנם רק $s - 1$ קודקודים. ולכן $R(s,2) > s - 1$. ולכן סה"כ $R(s,2) = s$.

טענה: $\forall s, t \geq 2 : R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$

טענה (**משפט ארדוס שזקרס**)**:** לכל $s, t \geq 1$ $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

הוכחה: באינדוקציה על $s + t$.

בסיס: אם $s = 1$ או $t = 1$ אזי בהכרח $R(s,1)$ או $R(1,t)$ שווה ל1, ובפרט זה קטן שווה מ1 $= \binom{s+1-2}{1-1}$.

צעד: נניח נכונות ל$s + t = n$, נוכיח עבור $s + t = n + 1$.

לפי הלמה הקודמת והנחת האינדוקציה,

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \binom{s-1+t-2}{s-2} + \binom{s+t-1-2}{s-1} =$$

$$\binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1}$$

לפי נוסחת פסקל: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, כלומר ערך זה שווה ל:

$$= \binom{s+t-2}{s-1}$$

כנדרש.

טענה: $R(4,4) = 18$ וכן $R(4,5) = 25$. $R(3,4) = 9$.

טענה: (משפט מאנטל). יהי G גרף בעל n קודקודים ללא משולשים. אזי בG יש לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ צלעות.

נוסחת סטרלינג: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \times (\frac{n}{e})^n$

טענה: $R(n,n) \leq 4^n$
הוכחה:

$$R(n,n) \leq \binom{2n-2}{n-1} < \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} \leq \frac{\sqrt{4\pi n} \times (\frac{2n}{e})^{2n} \times (1 + O(\frac{1}{n}))}{2\pi n (\frac{n}{e})^{2n}} = O(4^n)$$

מסקנה: בכל גרף עם n קודקודים ישנה קבוצה בלתי תלויה או קליקה בגודל $log_4(n) = \frac{1}{2}log(n)$.

טענה: (**משפט ארדוס**) $R(n,n) \geq 2^{\frac{n}{2}}$
הוכחה: נשתמש בגישה ההסתברותית.
למה: אם $\binom{m}{n} \times 2^{1-\binom{n}{2}} < 1$ אזי $R(n,n) > m$.
ניקח את K_m ונצבע את הצלעות בכחול ובאדום בהסתברות $\frac{1}{2}$ כל אחת.
יהי X המאורע שקיימת קליקה מונוכרומטית בגודל n. לכל $A \subseteq V$ כך ש$|A| = n$ יהי X_A המאורע כי A מונוכרומטית.
כמובן כי:

$$X = \bigcup_{A \subseteq \binom{|V|}{n}} X_A$$

נבחין כי מס' הצביעות שמעניינות אותנו הוא בדיוק 2 (הכל אדום או הכל כחול), ישנן סה"כ $2^{\binom{n}{2}}$ צביעות אפשריות (2 צבעים לכל צלע) ולכן:

$$Pr[X_A] = \frac{2}{2^{\binom{n}{2}}} = 2^{1-\binom{n}{2}}$$

$$Pr[X] = \bigcup_{A \subseteq \binom{|V|}{n}} X_A \leq \binom{m}{n} \times 2^{1-\binom{n}{2}} < 1$$

סה"כ מצאנו כי המאורע הנ"ל קטן מאחד, ולכן המאורע המשלים, בהכרח גדולה מאפס: כלומר ההסתברות שלא קיימת קליקה מונוכרומטית כלל בגרף היא חיובית ולכן קיימת צביעה כזו. מכאן $R(n,n) > m$.
כמסקנה מהלמה, נראה כי:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \leq \frac{m^n}{n!}$$

$$2^{1-\binom{n}{2}} = \frac{2}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{2^{1+\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n^2}{2}}}$$

אם $m = 2^{\frac{n}{2}}$ נראה כי:

$$\binom{m}{n} \times 2^{1-\binom{n}{2}} \leq \frac{m^n}{n!} \times \frac{2^{1+\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n^2}{2}}} = \frac{2^{\frac{n^2}{2}}}{n!} \times \frac{2^{1+\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n^2}{2}}} = \frac{2^{1+\frac{n}{2}}}{n!} <_* 1$$

שכן $*$ נכון לכל $n \geq 3$.

מסקנה: $2^{\frac{n}{2}} < R(n,n) < 4^n$

12.2 מספרי טוראן

בהינתן גרף H, מהו המספר המקסימלי של צלעות שיכולות להיות בגרף עם n קודקודים כך שH לא תת גרף של G?

הגדרה: יהי $G = (V,E)$ גרף עם n קודקודים שלא מכיל קליקה K_r, מהו המספר המקסימלי של צלעות שאפשרי בגרף? מספר טוראן.

עבור $r = 2$ אין קליקה K_2 כלומר אין קשתות ולכן מס' טוראן עבורה הוא אפס. עבור $r = 3$ מדובר בגרף ללא משולשים ולפי מנטל מס' טוראן הוא $\frac{n^2}{4}$ ($K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$).

מעט אינטואיציה לחסם עליון: נגדיר את $K_{n_1},.....,n_{r-1}$ שמכיל $r-1$ קבוצות של קודקודים בגודל n_i כך שקיימת קשת מקודקוד $u \in V_i$ לקודקוד $v \in V_j$ (u,v) אמ"מ $i \neq j$ (כלומר הקשתות הולכות מהקליקות החוצה, מדובר בגרף $r-1$ צדדי).

נבחין כי מכל קודקוד יוצאות $n - n_i$ צלעות (צלע אל כל קודקוד שאינו בתוך הקבוצה שלו):

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r-1} n_i(n-n_i) = \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{r-1} n_i^2)$$

מס' הצלעות המקסימלי מתקבל כאשר $\sum_{i=1}^{r-1} n_i^2$ מינימלי, וזה קורה כאשר n_i כולם שווים. במקרה שכזה, נניח כי $r-1$ מחלק את n ולכן מתקיים לכל i: $n_i = \frac{n}{r-1}$. ונקבל כי צלעות הגרף הינם $K_{\frac{n}{r-1},.....,\frac{n}{r-1}}$ ומס' הצלעות בגרף זה הינו:

$$|E| = \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{r-1}(\frac{n}{r-1})^2) = \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r-1})$$

כלומר, מה שראינו הוא המספר המקסימלי שניתן. ברור שאין קליקה K_r בגרף זה, ומכאן נסיק כי זהו החסם העליון. כמובן זו אינה הוכחה. נתבונן במשפט טוראן:

משפט טוראן: אם גרף $G = (V,E)$ לא מכיל קליקה K_r כתת גרף עבור $r \geq 2$ אזי מתקיים $|E| \leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r-1})$.

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס: $n \leq r-1$ מס' הצלעות הוא לכל היותר $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{n}) \leq \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{r-1})$, כפי שרצינו.

צעד: נניח כי לכל גרף $n' < n$ קודקודים וללא K_r כתת גרף מתקיים החסם על מס' הצלעות.

יהי G גרף עם $n \geq r$ קודקודים ללא קליקה K_r. יהי $G \subseteq G'$ מקסימלי. (נוסיף לG צלעות כל עוד לא ניתן להוסיף צלע כך שלא יהיה K_r). כלומר, נוכיח כעת את הטענה על K_r שכן אם החסם עליו נכון גם החסם נכון על G שמוכל בו.

נבחין כי G' מכיל את K_{r-1} כתת גרף. שכן אם לא, היינו יכולים להוסיף צלע $\{u,v\}$. אם בשלילה היינו מקבלים K_r בקבוצה A אזי $A\backslash\{v\}$ זהו K_{r-1} בG'. (שכן אם הוספנו צלע וקיבלנו K_r ברור שהיה כבר K_{r-1} בסתירה לכך שהנחנו שלא).

נסמן A כקבוצה ש$G'[A] = K_{r-1}$. נגדיר $B = V\backslash A$.

נסמן E_A כצלעות בין קודקודי A וכן E_B הן צלעות בין קודקודי B וכן E_{AB} הן צלעות מהצורה הבאה:

$$E_{AB} = \{(x,y)|x \in A, y \in B\}$$

(כמובן שהגרף לא מכוון). נראה כי $|E_A| = \binom{r-1}{2}$. מהנחת האינדוקציה, $|E_B| \le \frac{|B|^2}{2}(1-\frac{1}{r-1}) = \frac{(n-(r-1))^2}{2}(1-\frac{1}{r-1})$. (כיוון שמס' הצלעות ב$B$ הינו: $|B| = |V| - |A| = n-(r-1)$).
נבחין כי $|E_{A,B}| \le |B| \times (r-2)$ (אחרת היינו מקבלים K_r, שכן כל קודקוד בB יכול להיות שכן לכל היותר של $r-2$ קודקודים מ$A = K_{r-1}$ שכן אם הוא שכן של $r-1$ קודקודים שם, נקבל קליקה K_r בין הצדדים).
סה"כ

$$|E| \le |E_{G'}| = |E_A| + |E_B| + |E_{A,B}| = ... = \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{r-1})$$

כנדרש.

אי שוויון קושי שוורץ: $|<u,v>|^2 \le ||u||^2||v||^2$. ובגרסה אחרת: $(\sum_{i=1}^n a_ib_i)^2 \le (\sum_{i=1}^n a_i^2) \times (\sum_{i=1}^n b_i^2)$.

נראה כעת הוכחה אחרת. נבחין כי לפי משפט בכל גרף קיימת קליקה מקסימלית מגודל $MC(G) \ge \sum_{v\in V} \frac{1}{n-deg_G(v)}$. נבחין כי נרצה כי $r-1 \ge MC(G) \ge \sum_{v\in V}\frac{1}{n-deg(v)}$.
נגדיר:

$$a_i = \sqrt{n-d_i}, b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}$$

נראה כי:

$$n^2 = (\sum_{i=1}^n a_ib_i) \le (\sum_{i=1}^n(\sqrt{n-d_i})^2) \times (\sum_{i=1}^n(\frac{1}{\sqrt{n-d_i}})^2) \le (n^2-2|E|) \times MC(G)$$

ולכן:

$$n^2 \le (n^2-2|E|) \times (MC(G))$$

סה"כ

$$2|E| \le n^2 - \frac{n^2}{MC(G)}$$

$$|E| \leq \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{MC(G)}) \leq \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{r-1})$$

כנדרש.

13 מניית עצים, קוד פרופר ומשפט קיילי

עץ מתוייג הוא עץ על הקודקודים $\{1,....,n\}$ באשר כל קודקוד מקבל מספר ייחודי משלו. צלעות שונות = עץ שונה (גם אם המבנה זהה).

משפט קיילי: מספר העצים המתוייגים על n קודקודים הוא n^{n-2}.

נראה התאמה בין עצים מתוייגים לבין מחרוזות מעל $\{1,..,n\}$ באורך $n-2$. שכן קל לספור מחרוזות באורך $n-2$. ישנם n^{n-2} כאלו. כל שנצטרך להראות הוא את ההתאמה בניהם. להתאמה קוראים קוד פרופר. כל עץ מקבל קוד. יהי τ_n. נראה: $f_e(T) : \tau_n \to \{1,...n\}^{n-2}$.

להלן קוד פרופר:

Input: Labeled n vertex tree T
Output: Prüfer sequence $f_e(T)$
for $i \in \{1,2,\ldots,n-2\}$ **do**
  $v \leftarrow$the leaf with the smallest label
  $s_i \leftarrow$the label of the only neigbor of v
  $T \leftarrow T \setminus v$
return $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-2})$

להלן אותו אלגוריתם בדיוק ברקורסיה:

Algorithm 1: Prüfer encode(Laeled Tree $T=(V,E)$)
if $|V| \leq 2$ **then**
  return $\emptyset$
$v \leftarrow$the leaf with the smallest label
$s \leftarrow$the label of the only neighbor of v
return $s \circ Prüfer(T \setminus v)$

הרעיון: בכל פעם מוחקים את העלה עם המספר הקטן ביותר, ומוסיפים לקוד הפרופר את השכן היחיד שלו בעץ. עוצרים כאשר נותרו 2 קודקודים עם קשת בניהם.

אבחנה: לכל $i \in [n]$ מדרגה d_i, הקודקוד יופיע $d_i - 1$ ב$f_e(T)$.

נראה כי מכאן נקבל כי מס' המופעים בקוד פרופר הינו: $\sum_{v \in V} d_i - 1 = 2|E| - n = 2(n-1)-n = n-2$ ואכן אורך קוד פרופר הוא $n-2$.

אבחנה: לכל $i \in [n]$ שמופיע p_i פעמים בקוד פרופר, אזי הוא מדרגה $p_i + 1$.

כעת נתבונן באלגוריתם ההפוך, שבהינתן קוד פרופר בונה את העץ:

Algorithm 1: Prüfer Decode$(s_1, s_2 \dots, s_{n-2})$

Input: Sequence $S = (s_1, s_2, \dots, s_{n-2}) \in \{1, 2 \dots, n\}^{n-2}$
Output: Labeled n vertex tree T
$P \leftarrow \{1, 2, \dots, n\}$
$T \leftarrow (P, \emptyset)$ empty graph over P
for $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ **do**
  $v \leftarrow$ minimum, element in P not in $(s_i, s_{i+1}, \dots, s_{n-2})$
  Add edge to T from s_i to v
  $P \leftarrow P \setminus \{v\}$
Add to T an edge between the two remaining vertices in P
return T

למעשה הרעיון הוא להסתכל על קוד הפרופר, ובכל שלב להסתכל על הקודקוד הנמוך ביותר שלא מופיע, ולהסיק מיהו השכן היחיד שלו באמצעות קוד פרופר.

טענה: פרופר $Decode$ הוא פונקציה $f_d : \{1, 2, ..., n\}^{n-2} \to \tau_n$.
הוכחה: ברור שהוא מוסיף $n-1$ צלעות. עלינו להוכיח רק כי הוא קשיר או לחלופין חסר מעגלים. עם זאת ־ נוכיח את זה באינדוקציה. הרעיון די פשוט: בהינתן עץ, אם הוספנו לו עלה, הוא אכן נשאר עץ.

טענה: $ProferEncode$ ו$ProferDecode$ הם פונקציות חח"ע.
מסקנה: מתקיים $|\tau_n| = |\{1, ..., n\}^{n-2}| = n^{n-2}$ (לפי קנטור ברנשטיין, כיוון שקיימת פונקציה חח"ע מכל אחד מהצדדים).

14 בעיית השידוך היציב

14.1 מוטביציה

דוגמה לשימוש: יהיו n גברים וn נשים. כל אחד רוצה לצאת לדייט עם אדם מהמין השני. כל גבר מעדיף נשים מסוימות על פני אחרות, והוא מתאר העדפות אלו ע"י דירוג הנשים מהטובה ביותר עד לגרועה ביותר בעיניו. באופן דומה, גם לאישה יש תעדופים משלה. כיצד נזווג את הגברים והנשים כך ששום זוג של גבר ואישה יעדיפו אחד את השנייה על פני מי שמזווג להם?
נבהיר ־ יתכן כי גבר שובץ לאישה השנייה ברשימתו, אך (!) היא תהיה תפוסה. ולכן: לא תיווצר בעיה.

14.2 הגדרה פורמלית

יהי $G = (V = M \cup W, E)$ גרף דו"צ ששני צדדיו שווים ובפרט $|M| = |W| = n$. M זו קבוצה של גברים וW זו קבוצה של נשים.
לכל גבר $m \in M$ ישנו דירוג $<_m$ על פני הנשים. $x_1 >_m x_2 >_m x_3$ גורר כי הגבר הכי מעדיף את אישה x_1.
באופן דומה, לכל אישה $w \in W$ ישנו דירוג $<_w$ על פני הגברים.
המטרה שלנו היא למצוא זיווג מושלם ויציב (שידוך יציב):
שידוך יציב מזווג כל גבר לאישה ייחודית, כך ששום זוג של גבר m ואישה w לא יעדיפו זה את זו על פני ההתאמות הנוכחיות שלהם (זוג כזה נקרא זוג חוסם). כלומר: בשידוך יציב אין זוגות חוסמים.
זיווג מושלם S יאופיין ע"י פונקציה $\mu : V \to V$ כך שלכל גבר $m \in M$ מתקיים $\mu(m) \in W$ וכן לכל אישה $w \in W$ מתקיים $\mu(w) \in M$. כמו כן, $\mu(m) = w$ אמ"מ $\mu(w) = m$.
זוג חוסם הוא זוג של גבר ואישה (m, w) כך ש$\mu(m) >_m w$ וכן $\mu(w) >_w m$ [כלומר הן הגבר מעדיף מישהי אחרת, והן האישה מעדיפה מישהו אחר. במצב כזה: הגבר יבגוד באישה שלו והאישה

תבגוד בגבר שלה].

מטרה: זיווג מושלם, יציב, ללא זוגות חוסמים.

14.3 אלגוריתם גייל־שפלי

תמיד קיים שידוך יציב. ישנו אלגוריתם איטרטיבי שעובד כך. כל איטרציה מורכבת מ:

א. שלב הצעה ־ בו כל גבר שעוד לא מזווג מציע לאישה הכי מועדפת עליו מבין אלו שלא דחו אותו עד כה.

ב. שלב דחייה ־ בו אישה מייצרת זיווג עם הגבר במידה והיא לא מזווגת כרגע או שהיא מעדיפה אותו על פני הזיווג הנוכחי שלה. אחרת: היא דוחה את הגבר.

אלגוריתם גייל־שפלי: הצעת גברים $(MPDA)$

בסבב הראשון:

1. כל גבר פנוי מציע נישואין לאישה המועדפת עליו ביותר.
2. כל אישה משיבה "אולי" לגבר המועדף עליה ביותר מבין אלו שהציעו לה, ו"לא" לכל יתר המציעים.
3. לאחר מכן, היא הופכת ל"מאורסת" זמנית לגבר המועדף עליה ביותר עד כה, וגבר זה הופך באופן דומה למאורס לה זמנית.

בכל סבב עוקב:

1. כל גבר שאינו מאורס מציע נישואין לאישה המועדפת עליו ביותר מבין אלו שעדיין לא הציע להן (ללא קשר לשאלה האם האישה כבר מאורסת).
2. כל אישה משיבה "אולי" אם היא אינה מאורסת כרגע, או אם היא מעדיפה את הגבר הנוכחי על פני בן הזוג הזמני שלה.
3. במקרה האחרון (בו היא מעדיפה את החדש), היא דוחה את בן זוגה הזמני הנוכחי, שהופך שוב לפנוי (לא מאורס).
4. האופי הזמני של האירוסין שומר לאישה שכבר מאורסת את הזכות "להשתדרג" לבן זוג רצוי יותר, ובכך לסיים את אירוסיה הקודמים ולעזוב את בן זוגה הקודם.

תהליך זה חוזר על עצמו עד שכולם מאורסים.

14.4 תכונות של האלגוריתם

1. ככל שהאלגוריתם מתקדם, הגבר אליו משודכת האישה רק יכול להיות מועדף עליה יותר. כלומר: השידוכים של הנשים רק משתפרים ככל שהאלגוריתם מתקדם.

א. בסבב מסויים של האלגוריתם, אם גבר אחד או יותר מציעים לאישה כלשהי w היא אומרת אולי רק לגבר אחד m ודוחה את האחרים.

ב. האישה w תמיד תשאר מזווגת לm כל עוד לא יהיה גבר m' כך ש$m' >_w m$

2. ככל שהאלגוריתם מתקדם, האישה המשודכת לכל גבר רק יכולה להיות פחות מועדפת עליו: כלומר, השידוכים של הגברים רק מדרדרים ככל שהאלגוריתם מתקדם.

א. בסבב מסויים, יהי m גבר שהציע לאישה המועדפת עליו w מבין אלו שהוא לא הציע להן עד כה וw אמרה לו אולי. הגבר m ישאר מזווג לw רק אם לא יגיע גבר m' בסבב עתידי שהיא מעדיפה אותו על פני m. כלומר, $m' >_w m$. אם מגיע גבר m' כנ"ל, אזי w תגיד לm' אולי ותדחה את m. לפיכך, בסבב הבא של האלגוריתם הגבר m יציע לאישה w' המועדפת עליו ביותר שהוא לא הציע לה עד כה, אבל היא בהכרח פחות מועדפת עליו מw כלומר $w >_m w'$. (אחרת, הוא היה צריך להציע לw' בסבב קודם).

טענה: האלגוריתם תמיד מחזיר זיווג מושלם כאשר הוא עוצר.

הוכחה: נב"ש כי הזיווג שמוחזר איננו מושלם. מס' הגברים שווה למס' הנשים לכן קיימים $m \in M, w \in W$ שלא מזווגים. אישה המשודכת עקב הצעה שהיא מקבלת נשארת משודכת. לכן, w לעולם לא קיבלה הצעה ממישהו. בפרט: היא עוד לא קיבלה הצעה מm. ולכן: האלגוריתם ימשיך לאיטרציה נוספת, בסתירה לכך שהוא עצר.

טענה: זמן הריצה של האלגוריתם הינו $O(n^2)$

הוכחה: בכל איטרציה, אם האלגוריתם לא עצר גבר כלשהי מציע למישהי שלא הציע לה בעבר. ישנם n גברים וכל גבר יכול להציע לn נשים ולכן סה"כ ישנן n^2 הצעות.

טענה: ישנן לכל היותר $n(n-1)$ דחיות. [לכל גבר ישנן לכל היותר $n-1$ דחיות. בשלילה כי יש גבר עם n דחיות, אזי כל הנשים דחו אותו, ובהכרח תהיה מישהי לא מזווגת בסתירה].

טענה: האלגוריתם תמיד מחזיר זיווג יציב באשר הוא עוצר.

14.5 סוגי זיווגים יציבים

יהי $G = (V, E)$ גרף. נסמן בς_G את קבוצת כל הזיווגים היציבים בG.

הגדרה:

1. פרטנרית תקינה: לכל גבר m, אישה w היא פרטנרית תקינה אם קיים זיווג יציב S בו הם מזווגים. כלומר: $(m, v) \in S$.
2. פרטנרית תקינה הכי טובה: לכל גבר m, אישה w היא פרטנרית תקינה הכי טובה אם היא פרנטרית תקינה וכן m מעדיף אותה על כל פרטנרית תקינה אחרת. נסמנה ב$best(m)$.
3. פרטנרית תקינה הכי גרועה: לכל גבר m, אישה w היא פרטנרית תקינה הכי גרועה אם היא פרטנרית תקינה וכן m מעדיף כל פרטנרית תקינה אחרת על גביה. נסמנה $worst(m)$.
4. זיווג S הוא אופטימלי לגברים אם כל גבר מזווג לפרנטרית הכי טובה שלו.
5. זיווג S הוא פסימילי לגברים אם כל גבר מזווג לפרטנרית הכי גרועה שלו.

$*$ ניתן להכליל את כל ההגדרות גם לנשים.

טענה: כל הרצה של האלגוריתם מחזירה זיווג יציב שהוא אופטימלי לגברים (כל גבר מקבל את הפרטנרית הטובה ביותר עבורו).

טענה: כל הרצה של האלגוריתם מחזירה זיווג יציב שהוא פסימילי לנשים (כלומר כל אישה מקבלת את הפרטנר הגרוע ביותר שלה).

טענה: בכל הרצה של $MPDA$ בה הגברים מציעים לנשים, לגברים אין אינטרס לשקר. (אין לו סיבה לדווח על דירוג שונה מהדירוג האמיתי שלו). עם זאת, לנשים כן יש אינטרס לשקר.

טענה: אין אלגוריתם לבעיית השידוך היציב שבו לשני הצדדים אין אינטרס לשקר.

הערה. נבחין כי אם הנשים יציעו לגברים בסה"כ נהפוך את התפקידים ונקבל גרסה אופטימלית לנשים ופסימלית לגברים. כמו כן, במקרה זה לנשים אין אינטרס לשקר ולגברים יש.

טענה: קיים שידוך יציב יחיד אמ"מ (נריץ את האלגוריתם כאשר הגברים מציעים לנשים ונסמן S, נריץ את האלגוריתם כאשר הנשים מציעים לגברים ונסמנו S') $S = S'$.