מבנים בדידים ־ סיכום הגדרות ומשפטים 2026

30 בדצמבר 2025

גיא יער־און

חלק I

עוצמות

הגדרה 1. נסמן את עוצמת הטבעיים $\mathbb{N}$ להיות $\aleph_0$.

משפט 1. תהי עוצמת הטבעיים $\aleph_0$. אזי, כל ההבאים מטה שקולים עוצמה לעוצמה זו:
א. $\mathbb{N}_{\geq 1}$
ב. $Even = 2\mathbb{N}, Odd = \mathbb{N} \backslash Even$
ג. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ובאופן כללי $\forall n \geq 1 : \mathbb{N}^n$
ד. $\mathbb{Z}$
ה. $\mathbb{Q}$

הגדרה 2. נאמר כי עוצמת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ הינה א המקיימת $2^{\aleph_0} =$ א.

משפט 2. תהי עוצמת הממשיים א. אזי, כל ההבאים מטה שקולים עוצמה לעוצמה זו:
א. $(0, 1]$
ב. $(0, 1)$
ג. $(1, \infty)$
ד. $\mathbb{R}^k$ לכל $k \geq 1$
ה. $P(\mathbb{N})$

הגדרה 3. יהיו שתי קבוצות A, B. נאמר כי A ו־B שקולות עוצמה ונסמן $A \sim B$ אם קיימת בניהן פונקציה חד חד ערכית ועל $f : A \to B$.

משפט 3. תהי קבוצה X. אזי, $\sim$ (שקילות עוצמה) על $P(X)$ היא יחס שקילות.

הגדרה 4. יהיו שתי קבוצות A, B. נאמר כי A קטנה־שוות עוצמה ל־B ונסמן $A \preccurlyeq B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע . כמו כן, נאמר כי A לא קטנה־שוות עוצמה ל־B ונסמן $A \precnsim B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע וגם $A \nsim B$.

משפט 4. יהיו $a < b, c < d \in \mathbb{R}$. אזי $[a, b] \sim [c, d]$ וכן $(a, b) \sim (c, d)$ וכן $(a, b] \sim (c, d]$.

משפט 5. יהיו A_1, A_2, B_1, B_2 קבוצות כך ש$A_2 \sim A_1$ וכן $B_2 \sim B_1$. אזי, $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$.

הגדרה 5. יהי $n \in \mathbb{N}$. נסמן $I_n = \{i \in \mathbb{N}^+ | i \leq n\}$. קבוצה S נקראת סופית אם היא שקולת עוצמה לתת קבוצה שהיא $prefix$ של $\mathbb{N}$. במצב כזה נאמר כי $|S| = n$.

הגדרה 6. קבוצה S נקראת בת מניה אם היא סופית, או שהיא שקולה ל$\mathbb{N}$. כלומר, בעלת עוצמה $\aleph_0$.

משפט 5. יהיו A, B קבוצות. אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע, אזי קיימת $g : B \to A$ על.

משפט 6. קבוצה A היא אנסופית אמ"מ קיימת תת קבוצה אינסופית $B \subseteq A$ שהיא בת מניה. כמו כן, אם A סופית אזי $|A| < \aleph_0$.

משפט 7. תהי A קבוצה. אזי, A אנסופית $\iff$ $\mathbb{N} \preceq A$. ובמילים אחרות: $\aleph_0$ היא עוצמה מינימלית.

משפט 8. יהיו A, B קבוצות לא ריקות. אזי, $A \sim B \Longrightarrow A \backslash B \sim B \backslash A$.

משפט 9. יהיו A, B קבוצות. אזי $\preceq$, כלומר $A \preceq B$ הוא יחס סדר.

משפט 10. משפט קנטור ברנשטיין. יהיו A, B קבוצות. אזי,

$$A \preceq B \wedge B \preceq A \Longrightarrow A \sim B$$

למה. יהיו A, B קבוצות כך ש$B \subseteq A$. אזי, $A \preceq B \Longrightarrow A \sim B$.

משפט 11. מתקיים $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$

משפט 12. תהי A קבוצה. אזי, A לא שקולה ל$P(A)$. כלומר: $A \nsim P(A)$.

הערה. ישנם אנסוף עוצמות, שכן:

$$\mathbb{N} \precneqq P(\mathbb{N}) \precneqq P(P(\mathbb{N}) \precneqq ....$$

משפט 13. אריתמטיקה של עוצמות. נגדיר את הכללים הבאים:
א. חיבור עוצמות: $|A + B| = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|$
ב. כפל עוצמות: $|A| \times |B| = |A \times B|$
ג. חזקה של עוצמות: $|A|^{|B|} = |A^B| = |\{f : B \to A\}|$

משפט 14. יהיו A, B, C עוצמות. אזי,
א. $A \times B = B \times A$
ב. $A(B + C) = A \times B + A \times C$
ג. לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $A \times A \times A \times .... \times A = A^n$
ד. $(A \times B)^C = A^C + B^C$
ה. $A^B \times A^C = A^{B+C}$
ו. $(A^B)^C = A^{B \times C}$
ז. $A \leq A + B$

משפט 15. אריתמטיקה של $\aleph_0$. כל ההבאים מתקיימים:
א. $\forall n \in \mathbb{N} : \aleph_0 + n = \aleph_0$
ב. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
ג. $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

משפט 16. תהי קבוצה A. אזי, $|P(A)| = 2^{|A|}$

משפט 17. השערת הרצף. לא קיימת עוצמה A המקיימת: $\aleph = 2^{\aleph_0} > A > \aleph_0$.

משפט 18. יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ עוצמות גדולות מאפס כך שמתקיים $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$ אזי: $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$

משפט 19. מסקנה ממשפט קנטור. אם A קבוצה אינסופית אזי קבוצת כל תתי הקבוצה שלה אינה בת מניה.

משפט 20. תהי A אינסופית שאינה בת מנייה, ותהי $B \subseteq A$ בת מניה. אזי $A \backslash B$ לא בת מניה.

משפט 21. נניח כי $\alpha, \beta \geq 2$. אזי, לכל עוצמה מהצורה $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$. נוכל לסמן $\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. לפיכך:

$$\alpha^\beta = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha & \alpha > \beta \\ 2^\beta & \alpha \leq \beta \end{array} \right\}$$

משפט 22. תהי קבוצה S כך שקיימת פונקציה חד חד ערכית $f : S \to S$ שאינה על. אזי, S אינסופית.

משפט 23. תהי קבוצה I בת מניה כך שלכל $i \in I$ מתקיים S_i בת מניה. אזי, $\bigcup_{i \in I} S_i$ בת מניה.

משפט 24. $X \sim X \times X \Longrightarrow P(X) \sim P(X) \times P(X)$

משפט 25. **אקסיומת הבחירה:** יהיו אנסוף קבוצות שאינן ריקות, אזי, ניתן לבחור איבר אחד מכל קבוצה.

$$\forall X [\emptyset \notin X \Longrightarrow \exists f : X \to \cup_{A \in X} A, \forall A \in X (f(A) \in A)]$$

חלק II

מבוא לתורת הגרפים

הגדרה 1. גרף $G = (V, E)$ הוא זוג סדור של קודקודים וצלעות באשר $E \subseteq \binom{V}{2}$

הגדרה 2. תהי V קבוצה סופית שאינה ריקה ותהי E קבוצה של זוגות איברים מV.
א. הזוג $G=(V,E)$ נקרא גרף מכוון אם הזוגות בE הינם זוגות סדורים.
עבור גרף מכוון, נגדיר את המושגים הבאים:
1. דרגת הכניסה של קודקוד v מוגדרת להיות $deg_{in}(v)=|\{u\in V:(u,v)\in E\}|$
2. דרגת היציאה של קודקוד v מוגדרת להיות $deg_{out}(v)=|\{u\in V|(v,u)\in E\}|$
ב. הזוג $G=(V,E)$ נקרא גרף לא מכוון אם הזוגות בE אינם זוגות סדורים.

הגדרה 3. גרף $G=(V,E)$ נקרא גרף פשוט אם הוא לא מכוון, ללא קשתות עצמיות וללא לולאות עצמיות.

הגדרה 4. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט.
א. נאמר כי $v,u\in V$ הם שכנים אם $(v,u)\in E$.
ב. לכל $v\in V$ נסמן את קבוצת השכנים כ$\Gamma(v)=\{u\in V|(v,u)\in E\}$
ג. לכל $v\in V$ נגדיר את הדרגה של v להיות $deg(v)=|\Gamma(v)|$

משפט 26. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט כך ש$|V|\geq 2$. אזי, בG ישנם לפחות 2 קודקודים מאותה הדרגה.

הגדרה 5. יהי $G=(V,E)$ גרף. נסמן ב$\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף, וב$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית בגרף. מתקיים $\Delta(G)\geq 2\frac{|E|}{|V|}\geq\delta(G)$

הגדרה 6. יהי גרף $G=(V,E)$.
א. G נקרא מולטי גרף אם E היא מולטי SET - כלומר, יתכן שבין שני קודקודים יעברו מס' צלעות.
ב. G נקרא פסאודו גרף אם G מכיל לולאות עצמיות. כלומר קשתות מהצורה $(v,v)\in E$.

הגדרה 7. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון.
א. סדרת קודקודים $(v_0,....,v_p)$ באשר $\forall_{1\leq i\leq p-1}:(v_i,v_{i+1})\in E$ נקראת טיול.
ב. מסלול הוא טיול בו אין צלע שמופיעה פעמיים.
ג. מסלול פשוט הוא מסלול בו אין קודקוד שמופיע פעמיים.
ד. אורך של טיול מוגדר להיות מס' הצלעות שחלות בטיול.
ה. טיול מעגלי הוא טיול $(v_0,....,v_q)$ באשר $v_0=v_q$.
ו. מעגל הוא מסלול שמסתיים ומתחיל באותו הקודקוד.
ז. מעגל פשוט הוא מסלול, כך שהקודקוד הראשון שווה לקודקוד האחרון וכן כל קודקוד $v\neq v_0$ לא מופיע יותר מפעם אחת.

משפט 27. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$. ויהיו $v,u\in V$. אזי, אם בין v לu קיים טיול, בהכרח קיים בין u לv מסלול פשוט.

הגדרה 8. מרחק בין שני קודקודים: בהינתן מסלול $P:v\rightsquigarrow u$, נגדיר את המרחק בין שני הקודקודים להיות:

$$d_G(v,u)=\left\{\begin{array}{cc} min\{|P:v\rightsquigarrow u|\} & \exists v\rightsquigarrow u \\ \infty & o.w \end{array}\right\}$$

הגדרה 9. יהי גרף $G=(V,E)$ לא מכוון.
א. גרף G נקרא קשיר אם קיים מסלול בין כל $v,u\in V$.
ב. קוטר הגרף יוגדר להיות $diam(G)=max_{u,v\in V}\{d_G(u,v)\}$

משפט 28. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$. אזי, G קשיר $\iff diam(G)<\infty$.

משפט 29. יחס הקשירות הוא יחס שקילות, ומחלקות השקילות הם רכיבי הקשירות.

משפט 30. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$. אם ב-G יש בדיוק 2 קודקודים עם דרגה אי זוגית, אזי בהכרח קיים מסלול בניהם.

הגדרה 10. יהי $G=(V,E)$ גרף.
א. $G'=(V',E')$ הוא תת גרף של G אמ"מ $V'\subseteq V, E'\subseteq E$.
ב. G' הוא תת גרף ריק אם $V'=V$ וכן $E'=\emptyset$.
ג. תת הגרף המושרה יסומן $G[A]=(A,\binom{A}{2}\cap E)$, מתקבל ע"י הסרת חלק מהצלעות לקבלת קבוצה מסוימת שהיא תת גרף של הגרף הנוכחי. כלומר, בהינתן $A\subseteq V$ מחויבים בתת הגרף המושרה לקחת את כל הצלעות שחלו ע"י קודקודים אלו שלקחנו.

הגדרה 11. למת לחיצות הידיים. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט. אזי, $\sum_{v\in V}deg(v)=2|E|$.

משפט 31. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. אזי,
א. סכום הדרגות זוגי.
ב. כמות הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית בגרף הוא זוגי.

הגדרה 12. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. G יקרא קשיר היטב אם לכל $a,b\in V$ קיים $a\rightsquigarrow b\wedge b\rightsquigarrow a$.

משפט 32. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון קשיר, ותהי $e\in E$ צלע. אזי, $G\backslash\{e\}$ קשיר אמ"מ e הייתה שייכת למעגל פשוט כלשהו ב-G.

חלק III

סוגי גרפים מיוחדים

הגדרה 13. הגרף הריק $G=(V,E)$ הוא גרף המקיים $E=\emptyset$.

הגדרה 14. הגרף המלא, הלוא הוא הקליקה, מוגדר להיות הגרף $K_n=(V,\binom{V}{2})$.

הגדרה 15. קבוצה בלתי תלויה היא תת קבוצה של קודקודים $A\subseteq V$ כך שמתקיים $\binom{A}{2}\cap E=\emptyset$. כלומר, קבוצת קודקודים כך שאין צלע שמחברת בין כל שני קודקודים בקבוצה.

משפט 33. יהי גרף $G=(V,E)$. הגרף המשלים יוגדר להיות $\overline{G}=(V,\overline{E})$.
א. אם G לא קשיר, אזי $\overline{G}$ קשיר.
ב. מתקיים $deg_G(v)+deg_{\overline{G}}(v)=n-1$.
ג. $\overline{\overline{G}}=G$
ד. A היא קליקה ב-$G \iff A$ היא תת קבוצה בלתי תלויה ב-$\overline{G}$.

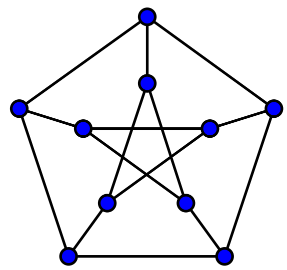
הגדרה. נגדיר:

א. גרף מסלול יסומן P_n ויוגדר להיות גרף בו כל הצלעות מופיעות ברצף ובין כל אחת מהם ישנה קשת. מתקיים $|E| = n - 1$.

ב. גרף מעגל יסומן C_n, הוא גרף מסלול שהתווספה צלע בין הקודקוד הראשון לאחרון. מתקיים $|E| = n$.

ג. גרף d רגולרי, יוגדר להיות הגרף בו $\forall v \in V : deg(v) = d$. אם כן, מתקיים $|E| = \frac{nd}{2}$

ד. גרף פטרסן הוא גרף המצורף בתמונה מטה, הוא איננו מישורי והוא 3 רגולרי.



הגדרה 16. גרף $G = (V, E)$ הוא גרף דו צדדי אם V יכול להתחלק לשתי קבוצות כך ש$V = L \sqcup R$ כך ש:

$$E \subseteq \{\{u, v\} | u \in L, c \in R\}$$

הגדרה 17. הגרף הדו צדדי המלא יסומן $K_{m,n}$ והוא הגרף המקיים $|L| = m, |R| = n$.

משפט 34. יהי $T = (V, E)$ עץ. אזי, T הוא דו צדדי.

משפט 35. יהי C_n באשר n זוגי. אזי C_n גרף דו צדדי.

משפט 36. משפט קוניג. יהי גרף $G = (V, E)$. אזי, G דו צדדי $\iff$ כל מעגל פשוט בG הוא באורך זוגי.

הגדרה 18. גרף הקוביה Q_n הוא הגרף שקודקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n, בין שני קודקודים ישנה צלע אמ"מ הסדרות הבינאריות שהם מייצגים נבדלות בביט אחד.

א. בגרף זה מתקיים $|V| = 2^n$

ב. בגרף זה מתקיים $|E| = 2^{n-1} \times n$

ג. באופן פורמלי:

$$V_n = \{0, 1\}^n, E_n = \{(u, v) \in V \times V \wedge ||u - v||_1 = 1\}$$

ד. גרף הקוביה Q_n הוא דו צדדי.

ה. גרף הקוביה Q_n אינו מישורי לכל $n > 3$.

הגדרה 19. גרף קנזר יסומן $KG_{n,k}$ ויוגדר כך:

א. בוצת הקודקודים של הגרף הינה $\binom{[n]}{k} = \{A \subseteq [n] = \{1,..,n\} | |A| = k\}$, כלומר אוסף של הקבוצות של המספרים $1,...n$ בגודל k.

ב. קיימת צלע בין קבוצה A לקבוצה B המקיימות $A, B \in \binom{[n]}{k}$ אמ"מ $A \cap B = \emptyset$.

ג. מתקיים $|V| = \binom{n}{k}$ וכן $|E| = \frac{1}{2} \times \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{k}$

משפט 37. יהי גרף קנזר $KG_{n,k}$.

א. גרף קנזר $\binom{n-k}{k}$ רגולרי.

ב. אם $n \leq 2k-1$ אזי $KG_{n,k}$ הוא הגרף הריק.

ג. $KG_{n,1}$ הוא קליקה.

ד. $KG_{5,2}$ הוא גרף פטרסון.

ה. בגרף $KG_{n,k}$ ישנה קבוצה בלתי תלויה בגודל $\binom{n-1}{k-1}$

ו. בגרף $KG_{n,k}$ ישנה קליקה מגודל $\left[\binom{n}{k}\right]$.

הגדרה. יהי גרף פשוט $G = (V, E)$.

א. G נקרא עץ אם הוא קשיר וחסר מעגלים.

ב. יער הוא גרף פשוט שכל אחד מרכיבי הקשירות שלו הוא עץ. כלומר, גרף ללא מעגלים.

משפט 38. יהי G עץ.

א. מתקיים $|E| = |V| - 1$

ב. יהיו שני קודקודים v, u בעץ. אזי, קיים ביניהם מסלול יחיד.

ג. בכל עץ עם $n \geq 2$ קיימים שני עלים.

משפט 39. משפט השלישי חינם. יהי גרף G עם n קודקודים. G הוא עץ אם הוא מקיים שניים מההבאים לפחות:

א. G חסר מעגלים

ב. G קשיר

ג. $|E| = n - 1$.

משפט 40. יהי $G = (V, E)$. אזי, התנאים הבאים באמ"מ:

א. G הוא עץ

ב. G הוא חסר מעגלים מקסימלי

ג. G הוא קשיר מינימלי

משפט 41. בהינתן $|V| = n$ ישנם $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים אפשריים. ישנם $\binom{n}{2}$ אפשרויות לקשתות, ובכל פעם בוחרים אם לקחת אותם או שלא.

הגדרה 20. תת גרף פורש של G שהוא עץ נקרא עץ פורש.

משפט 42. G הוא קשיר $\Longleftrightarrow$ G מכיל עץ פורש.

חלק IV

מעגלי אוילר והמילטון

הגדרה 21. בהינתן מולטי גרף $G = (V, E)$, מעגל אוילר הוא מעגל $C = (x_0, ..., x_m)$ שעובר על כל צלע בדיוק פעם אחת. מסלול אוילר הוא מסלול $C = (x_0, ..., x_m)$ שעובר על כל צלע פעם אחת. נשים לב - כל מעגל אוילר הוא מסלול אוילר, אך לא להפך.

משפט 43. יהי G מולטי גרף קשיר. בG יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ כל הדרגות בG זוגיות.

משפט 44. יהי גרף G מכוון, קשיר חזק. אזי, בG יש מעגל אוילר $\Longleftrightarrow$ $\forall v \in V : deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$

משפט 45. יהי G גרף פשוט קשיר.G מכיל מסלול אוילר $\Longleftrightarrow$ G מכיל 0 או 2 קודקודים מדרגה אי זוגית.

משפט 46. יהי $G = (V, E)$ גרף בעל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר (לפחות אחד). אזי, ניתן להוסיף לG קודקוד בודד ומס' צלעות ולקבל גרף חדש G' בו כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.

הגדרה 22. יהי גרף $G = (V, E)$. נאמר כי מסלול המילטון הוא מסלול פשוט $P = (x_0, ..., x_{n-1})$ שעובר על כל הקודקודים. מעגל המילטון הוא מעגל פשוט שעובר על כל הקודקודים.

משפט 47. יהי הגרף הדו צדדי השלם $K_{p,q}$.

א. $K_{p,q}$ מכיל מעגל המילטון אמ"מ $p = q$.

ב. $K_{p,q}$ מכיל מסלול המילטון אמ"מ $|p - q| \leq 1$.

משפט 48. אם $n \geq 2$ וסכום הדרגות של כל שני קודקודים הוא לפחות $n - 1$ אזי בגרף ישנו מסלול המילטון.

משפט 49. משפט אורה. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט, המקיים $n \geq 3$, כך שלכל זוג קודקודים v, u שאינם שכנים מתקיים $deg_G(v) + deg_G(u) \geq n$, אזי G מכיל מעגל המילטון.

משפט 50. משפט דיראק. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט עם $n \geq 3$. אזי, אם $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ אזי G מכיל מעגל המילטון.

חלק V

זיווגים

הגדרה 23. יהי גרף $G = (V, E)$. זיווג הוא תת קבוצה של קשתות $M \subseteq E$, בלי קודקודים משותפים זרה בקודקודים.

א. קודקוד v נקרא M־רווי אם הוא נמצא באחת הצלעות של M, אחרת v נקרא M־בלתי רווי.

ב. זיווג נקרא זיווג מושלם אם כל הקודקודים בגרף רווים, כלומר $|M| = \frac{n}{2}$

ג. M נקרא זיווג מקסימלי אם לא קיים זיווג M' כך ש$M \subset M'$ (לא ניתן להוסיף צלע מבלי לשבור את תכונת הזיווג).

ד. M נקרא זיווג מקסימום אם לא קיים זיווג M' כך ש$|M| < |M'|$

ה. זיווג מושלם $\Longleftarrow$ זיווג מקסימום $\Longleftarrow$ זיווג מקסימלי

הגדרה 24. יהי זיווג M. מסלול $(e_1, ..., e_m)$ נקרא זיווג מתחלף אם הוא מכיל קודקודים בין צלעות בM לבין צלעות שאינן בM לסירוגין. מסלול מתחלף נקרא מרחיב אם $P = (v_0, ..., v_k)$ אם P מסלול מתחלף, וכן $v_0 \neq v_k$ ושניהם לא רווים.

משפט 51. משפט ברג. יהי $G = (V, E)$ גרף ויהי M זיווג. אזי, M הוא זיווג מקסימום $\Longleftrightarrow$ אין מסלול מתרחב מחליף בגרף.

משפט 52. יהי $G=(V,E)$.

א. אם $G=P_n$ אזי גרף המסלול מכיל זיווג מושלם אמ"מ המסלול באורך אי זוגי (מס' הקודקודים זוגי)

ב. אם $G=C_n$ אזי גרף המעגל מכיל זיווג מושלם אמ"מ המעגל באורך אי זוגי (מס' קודקודים זוגי)

ג. בקליקה $G=K_n$ יש זיווס מושלם אמ"מ מס' הקודקודים זוגי.

ד. בגרף קשיר עם מס' אי זוגי של קודקודים לא קיים זיווג מושלם.

ה. בגרף לא קשיר עם רכיב קשירות בו מס' הקודקודים אי זוגי אין זיווג מושלם.

סימון: נסמן $o(H)$ מס' רכיבי הקשירות האי זוגיים בגרף H.

משפט 53. משפט טאט. יהי גרף $G=(V,E)$. אזי, G מכיל זיווג מושלם $\Longleftrightarrow$ לכל $S\subseteq V$ מתקיים $o(G\backslash S)\leq |S|$.

משפט 54. נוסחת טט־ברג. יהי גרף $G=(V,E)$. אורך זיווג מושלם בגרף הינו

$$MM(G)=min_{U\subseteq V}\frac{|V|+|U|-o(G\backslash U)}{2}$$

משפט 55. משפט החתונה של הול. יהי גרף דו צדדי, $G=(V=L\cup R,E)$ כך ש$|L|=|R|$. אזי, G מכיל זיווג מושלם אמ"מ לכל קבוצה $S\subseteq L$ מתקיים $|\Gamma(S)|\leq|S|$. **משפט $Hall$ המוכלל:** בגרף דו צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ כאשר $|V_1|\leq|V_2|$ יש זיווג המרווה את V_1 אם ורק אם לכל קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$.

הגדרה 25. יהי $G=(V,E)$ גרף. נסמן ב$c(G)$ את מס' רכיבי הקשירות בG.

הגדרה 26. יהי $G=(V,E)$ גרף. קשת $e\in E$ נקראת קשת חתך אם $c(G\backslash\{e\})>c(G)$. כלומר, אם היא מגדילה את מס' רכיבי הקשירות (בפרט, בגרף המקורי חיברה בין שניים כאלו)

משפט 56. משפט פיטרסן. בכל גרף $G=(V,E)$ שהוא 3 רגולרי ללא קשתות חתך, קיים זיווג מושלם.

משפט 57. משפט קוניג אוורגרי. יהי $G=(V,E)$ גרף דו צדדי, אזי $VC(G)=MM(G)$.

הערה. עבור גרף $G=(V,E)$ קבוצה $A\subseteq V$ נקראת כיסוי בצמתים אם לכל צלע $\{v,u\}\in E$ לפחות אחת מבין v,u שייך לA. נסמן ב$VC(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי בצמתים של G.

משפט 58. משפט גאלאיי. יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים ללא צמתים מבודדים. אזי, $MM(G)+EC(G)=n$.

הערה. עבור גרף $G=(V,E)$, קבוצה $E'\subseteq E$ נקראת כיסוי בקשתות אם לכל קודקוד $v\in V$ קיימת קשת $\{v,u\}\in E'$. נסמן ב$EC(G)$ את הגודל המינימלי של כיסוי בקשתות של G.

חלק VI

גרפים מישוריים

הגדרה 27. שיכון למישור הוא ציור של הגרף, כך שאין שתי קשתות שנחתכות בציור. כמו כן, חיתוך בקודקודים לא נחשב חיתוך. גרף נקרא מישורי, אם קיים לו שיכון למישור. פורמלית: שיכון למישור הוא פונקציה חד חד ערכית מהקודקודים ל$\mathbb{R}^2$ ולכל צלע $(u,v) \in E$ ישנה מסילה $g_e : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ וכן $g_e(0) = u$ וכן $g_e(1) = v$ ולכל e, e' לא קיימים $\alpha, \beta \in (0,1)$ כך ש$g_e(\alpha) = g_e(\beta)$.

הגדרה 28. פאה היא אזור שתחום בין הצלעות: פאה היא מחלקת שקילות ששתי נקודות נמצאות באותה פאה אמ"מ ניתן להעביר בניהם מסילה שלא חותכת את הקשתות.

משפט 59. נוסחת אוילר. יהי $G = (V,E)$ גרף מישורי קשיר עם n קודקודים, m צלעות וf פאות. אזי, $n + f - m = 2$.

משפט 60. יהי $G = (V,E)$ גרף מישורי קשיר כך ש$n \geq 3$. אזי, $m \leq 3n - 6$.

הגדרה 29. דרגה של פאה, E_f תוגדר להיות מס' הצלעות שחלות על פאה.
א. כל צלע בגרף מישורי חלה בלכל היותר 2 פאות. כלומר, $\sum_{f \in F} E_f \leq 2m$.
ב. אם אורך המעגל הפשוט הקצר ביותר הוא d, דרגתה של כל פאה מקיימת $E_f \geq d$.

משפט 61. הכללה לנוסחת אוילר. אם G מישורי ובעל d רכיבי קשירות מתקיים $n + f - m = d + 1$.

משפט 62. א. K_5 אינו מישורי.
ב. כל גרף מישורי בהכרח מכיל קודקוד מדרגה לכל היותר 5.
ג. $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הגדרה 30. H הוא מינור של $G = (V,E)$ אם הוא מתקבל ע"י אחת משלושת הפעולות הבאות מG כמה פעמים שרוצים (מס' סופי של פעמים):

א. מחיקת צלע
ב. מחיקת קודקוד וכל הצלעות שחלות עליו.
ג. כיווץ של זוג קודקודים שיש בניהם צלע.

משפט 63. משפט וגנר קרטובסקי. יהי $G = (V,E)$. אזי, G מישורי אפ"מ הוא לא מכיל את $K_5, K_{3,3}$ כמינור.

חלק VII

צביעה

הגדרה 31. יהי גרף $G = (V,E)$. פונקציית k צביעה היא פונקציה $\chi : V \to \{1, ..., k\}$ אם לכל $\{u,v\} \in E$ מתקיים $\chi(u) \neq \chi(v)$. גרף נקרא k צביע אם ניתן לצבוע אותו בk צבעים בצורה חוקית. המס' הכרומטי של הגרף, $\chi(G)$ הוא מס' k הצבעים המינימלי שניתן לצבוע את G בו.

משפט 64. נסתכל על כל הקודקודים המקיימים $X = \{v | \chi(v) = i\}$, אזי X בלתי תלויה.

משפט 65. גרף $G=(V,E)$ הוא דו צדדי $\iff G$ הוא 2 צביע.

משפט 66. יהי $G=(V,E)$ המקיים $\Delta(G)=k$, אזי ניתן לצבוע את G ב$k+1$ צבעים.

משפט 67. את הקליקה K_n ניתן לצבוע בn צבעים (ואי אפשר בפחות).

משפט 68. אם גרף G מכיל קליקה K_q, אזי בהכרח $\chi(G)\geq q$

הגדרה 32. $\omega(G)$ היא גודל הקליקה הגדולה ביותר בG. נבחין כי $\omega(G)\neq\chi(G)$ (יתכן שוויון, אך זה לא בהכרח).

הגדרה 33. גרף $G=(V,E)$ יקרא גרף אינטרוול כך שלכל $v_i\in V$ קיים אינטרוול $[l_i,r_i]\subset\mathbb{R}$ וכן ישנה קשת $\{v_i,v_j\}\in E$ אמ"מ האינטרוולים נחתכים.

משפט 69. יהי $G=(V,E)$ גרף אינטרוול, אזי $\chi(G)=\omega(G)$.

משפט 70. משפט מיצ'לסקי. לכל מס' $k\geq 1$, קיים גרף M_k ללא משולשים כך ש$\chi(M_k)=k$. (כלומר, אם הגרף ללא משולשים, זה לא גורר חסם עליון על $\chi(G)$. נשים לב שתמיד ישנו חסם תחתון $\omega\leq\chi(G)$ אם G מכיל קליקה K_ω).

הגדרה 34. גרף יקרא דליל אמ"מ מתקיים $m<<n^2$.

משפט 71. יהי $G=(V,E)$ גרף עם m צלעות. אזי, $\chi(G)\leq O(\sqrt{m})$

משפט 72. משפט ברוקס. יהי $G=(V,E)$ גרף עם $\Delta(G)=k$ באשר $k\geq 3$, אזי G הוא k-צביע אלא אם כן הוא קליקה.

(כלומר, המקרה היחיד בו אפשר לצבוע רק עם $k+1$ צבעים זה שהוא קליקה).

משפט 73. משפט 6 הצבעים. כל גרף מישורי $G=(V,E)$ הוא 6-צביע.

משפט 74. משפט 5 הצבעים. כל גרף מישורי $G=(V,E)$ הוא 5-צביע.

משפט 75. משפט 4 הצבעים. כל גרף מישורי $G=(V,E)$ הוא 4-צביע.

חלק VIII

צביעת קשתות

הגדרה 35. יהי גרף $G=(V,E)$. צביעת קשתות היא פונקציה $\chi':E\to\{1,...,k\}$ כך שלכל זוג קשתות $e_1,e_2\in E$ אם הקשתות מכילות קודקוד משותף אזי $\chi'(e_1)\neq\chi'(e_2)$.