אינפי 2 ־ סיכום הרצאות ממוקד למבחן

22 ביוני 2025

הסיכום נכתב תוך כדי הרצאותיו של אלעד עטייא, סמס' ב 2025.
גיא יער־און

חשוב מהקורס הקודם

*זכור כי $ln(1+t) \leq t$.
* אם $a_n \to 1$ אזי

$$a_n^{b_n} \to e^{lim(a_n-1)b_n}$$

* הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר
*בסכום אינסופי אין בהכרח חילופיות וקיבוציות!!!!!!!!!!!!!!!
*כלל הסנדוויץ'
*

$$lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

* גזירות $\Leftarrow$ רציפות

האינטגרל הלא מסויים

טענה. תהי f פונקציות ויהיו F ו־G קדומות של f. אזי, קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש־ $F-G=c$.
קבוצות הקדומות של f תסומן כך ־ $\int f(x)dx$ ותקרא ־ "האינטגרל הלא מסויים".
רשימת אינטגרלים מיידיים:

$$\int x^n dx = \left\{ \begin{matrix} n=-1 & ln|x|+c \\ otherwise & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{matrix} \right\}$$

$$\int sinxdx = -cosx + c$$

$$\int cosxdx = sinx + c$$

$$\int \frac{1}{cos^2x}dx = tanx + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctanx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsinx + c$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}arctan(\frac{x+a}{b}) + c$$

שיטות אינטגרציה:

1. אינטגרציה בחלקים - יהיו f, g פונקציות. אזי - $\int f(x) * g'(x) = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x)$

דוגמה -

$$\int xsinxdx = \begin{cases} f(x) = x & g(x) = -cosx \\ f'(x) = 1 & g'(x) = sinx \end{cases} = -xcoxs - \int -cosx = -xcosx + \int cosx = -xcosx + sinx + c.$$

דוגמה חשובה -

$$\int sin(lnx)dx = \begin{cases} f(x) = sin(lnx) & g(x) = x \\ f'(x) = \frac{cos(lnx)}{x} & g'(x) = 1 \end{cases} = xsinlnx - \int cos(lnx) \implies$$

$$\int cos(lnx) = \begin{cases} f(x) = cos(lnx) & g(x) = x \\ f'(x) = \frac{-sin(lnx)}{x} & g'(x) = 1 \end{cases} = xcoslnx + \int sin(lnx)$$

$$\implies \int sin(lnx) = xsinlnx - (xcoxlnx + \int sin(lnx)) \iff 2\int sin(lnx) = xsinlnx - xcoxlnx \iff \int sin(lnx)dx = \frac{1}{2}xsinlnx - \frac{1}{2}xcosl$$

מש"ל.

-♡- יש זהויות חשובות שיעזרו לנו כאן -

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

$$cos2x = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$$

$$sin2x = 2sinxcosx$$

$$sin^2x = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

$$cos^2x = \frac{1 + cos(2x)}{2}$$

טענה. אם $\int f(x) = F(x) + c$, אזי $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

2. שיטת ההצבה

נתבונן בדוגמה טובה שתמחיש זאת מעולה -

$$\int \frac{7arctanx}{x^2+1}dx$$

נציב $t = arctanx \Longleftarrow dt = \frac{1}{x^2+1}dx \Longleftarrow dx = dt(x^2+1)$
כלומר,

$$\int \frac{7arctanx}{x^2+1}dx = \int \frac{7t}{x^2+1} * dt(x^2+1) = \int 7tdt = 3.5t^2 = 3.5arctan^2x + c$$

דוגמה חשובה -

$$\int \sqrt{7-x^2}dx = \int \sqrt{7(1-\frac{x^2}{7})}dx = \sqrt{7} * \int \sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{7}})^2}dx|t = \frac{x}{\sqrt{7}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{7}} \Longrightarrow dx = \sqrt{7}dt| = 7\int \sqrt{1-t^2}dt|$$

$$u = arcsint \Longleftrightarrow t = sin(u) \Longrightarrow dt = cosudu|$$

$= 7\int \sqrt{1-sin^2u} * cosudu = 7\int cos^2udu = 7\int \frac{cos(2u)+1}{2}du = 3.5\int cos(2u) + 1 = 3.5(\frac{sin2u}{2} + u) = 1.75sin(2u) + 3.5u =$
$1.75sin(2arctan(t)) + 3.5arctan(t) =$
.

$$1.75sin(2arcsin(\frac{X}{\sqrt{7}}) + 3.5arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + c.$$

3. אינטגרל לפונקציה רציונלית

מדובר בפולינום חלקי פולינום. נתבונן באלגוריתם הבא -

א. נעשה חילוק פולינומים עד שהמעלה של המונה תהיה קטנה מהמעלה של המכנה. (קטנה ממש!)

ב. נעשה פירוק לשברים חלקיים.

ג. נבצע את האינטגרל באמצעות (לרוב) דברים מיידיים כמו $arctan$ או ln...

דוגמה:

$$\int \frac{x^9+6x^2}{x^4-1}dx = ?!?!$$

ממש לפי האלגוריתם - א: נבצע חילוק פולינומים

(מגבלות הליך קצת מקשות אבל זה לא קשה לעשות חילוק פולינומים...) יצא לנו כי זה שווה ל - $x^5+x+\frac{6x^2+x+6}{x^4+1}$,
כלומר:

$$\int \frac{x^9+6x^2}{x^4-1}dx = \int x^5+x+\frac{6x^2+x+6}{x^4+1}$$

כעת נפרק לשברים חלקיים -

באופן כללי נעיר קצת כי:

א. גורם ממעלה 1 אינו פריק.

ב. גורם ממעלה 2 פריק $\iff \triangle = b^2-4ac \geq 0$ (יענו, יש שורשים)

ג. גורם ממעלה גדולה שווה לשלוש, תמיד פריק.

ואיך נפרק אותו?!

לדוגמה -

$$\int \frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

כעת, נחזור לדוגמה שלנו -

$$\frac{6x^2+x+6}{x^4-1} = \frac{6x^2+x+6}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

כעת צריך לפתור מערכת משוואות עם הצבות ולמצוא את המקדמים, נחסוך זאת כאן -

סה"כ נקבל כי האינטגרל שווה ל -

$$\int x^5+x+\frac{6x^2+x+6}{x^4+1} = \int x^5+x++3.25*\frac{1}{x-1}-2.75*\frac{1}{x+1}-0.5*\frac{x}{x^2-1}dx =$$

$$\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}+3.25ln|x-1|-2.75ln|x+1|-0.25ln|x^2+1|+c.$$

*מייגע אבל קל.

***אלעד אמר שמתיש מדי ולכן לא יהיה כזה במבחן..**

4. אינטגרל לפונקציה טריגונומטרית רציונלית

טריק טוב, הצבה אוניברסלית שתפתור כל אינטגרל רציונלי של טריגונומטריות.
נציב $t = tan(\frac{x}{2})$, נקבל כי - $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
וכן -

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} sinx = \frac{2t}{1+t^2}$$

5. טריק הארקטנגס

לזכור, לשנן (ולהוכיח את זה זה לא מסובך), עבור $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctan(\frac{x}{a}) + c.$$

לא יזיק לזכור כי : $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

האינטגרל המסויים

א. חלוקה של הקטע $[a,b]$ היא קבוצת נקודות $P = \{X_0, X_1, ..., X_n\}$ המקיימת כי $a = X_0 < X_1 < ... < X_n = b$, כך נקבל תתי קטעים $[X_{i-1}, X_i]$ כאשר $1 \le i \le n$.
ב. בכל קטע $[X_{i-1}, X_i]$ נבחר נקודה C_iבקטע ונקבל סה"כ קבוצה $C = \{C_0, C_1, .., C_n\}$ שתהיה קבוצת בחירת הנקודות שלנו.
ג. כל קטע בחלוקה נותן לנו מלבן ששטחו: $S = f(c_i) * \Delta X_i$.
ד. סכום שטחי המלבנים יסומן כך - $S(f,P,C) = \sum_{i=1}^{i=n} f(c_i) * \Delta x_i$, סכום זה יקרא "סכום רימן".
ה. נסמן ב־$\lambda(P)$ את "פרמטר החלוקה" שיוגדר כך - $\lambda(P) = max\{\Delta X_i\}$.
.
נאמר כי f בקטע $[a,b]$ אינטגרבילית אם־
1. היא חסומה
2. לכל חלוקה P ולכל בחירת נקודות C סכומי רימן שואפים לאותו הגבול כאשר $\lambda(P) \to 0$., אם גבול כזה אכן קיים הוא השטח ונסמן -

$$lim_{\lambda(P) \to 0} S(f,R,C) = \int_a^b f(x)dx$$

זהו האינטגרל המסויים של f בקטע $[a,b]$.
2. הגדרה נוספת ושקולה -
נאמר כי f אינטגרבילית ב־$[a,b]$ אם לכל סדרת חלוקות המקיימת $\lambda(P) \to 0$ ולכל סדרת בחירת נקודות c_n סכומי רימן שואפים לאותו הגבול.
נגדיר - תנודה: תהי f חסומה ב־$[a,b]$, התנודה של f בקטע מוגדרת כך: $w = supf - inff$
טענה: תנאי שקול לאינטגרביליות - תהי f חסומה ב־$[a,b]$, אזי מתקיים כי
f אינטגרבילית $\Longleftrightarrow$ לכל סדרת חלוקות p_nהמקיימת $\lambda(p_n) \to 0$ מתקיים כי $\sum w_i \Delta x_i \to 0$.

טענות חשובות על אינטגרביליות ושימושים:

טענה. פונקציה מונוטונית היא אינטגרבילית.
טענה. פונקציה רציפה היא אינטגרבילית.

טענה. פונקציה חסומה שיש לה מס' סופי של נק' אי רציפות היא אינטגרבילית.
שאלה - האם פונקציה שיש לה אנסוף נק' אי רציפות אינה אינטגרבילית?
תשובה: לא!
נתבונן בדוגמה שאלעד יותר מרמז שיכניס למבחן -

האם אנסוף נקודות אי רציפות $\Longleftarrow$ f לא אינטגרבילית?

מדובר בהפרכה, חשובה, שהוזכרה כמה פעמים גם בתרגול וגם בהרצאה $\Longleftarrow$ יהיה במבחן? (אולי ואולי לא, בשביל הסיכוי שכן זה כאן).
נתבונן על הפונקציה הבאה, שיש לה אנסוף נקודות אי רציפות. נתבונן על הקטע $[0,1]$. וכעת נגדיר את הפונקציה הבאה:
$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x = \frac{1}{n} \\ 0 & x \neq \frac{1}{n} \end{array} \right\}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$.
קל לראות שיש לפונקציה אנסוף נקודות אי רציפות. ובפירוט יותר - עבור כל $x = \frac{1}{n}$ מתקיים כי -
$\lim_{x \longrightarrow \frac{1}{n}^+} f(x) = 1$ וכן $\lim_{x \longrightarrow \frac{1}{n}^-} f(x) = 0$ וכן יש אנסוף נקודות ב-$\mathbb{R}$ המקיימות $x = \frac{1}{n}$. כלומר כל אחת מהנקודות האלו היא נקודת אי רציפות קפיצה.
כעת, נוכיח שלמרות זאת, f אינטגרבילית.
הוכחה -
תהי סדרת חלוקות P_m המקיימת $\lambda(P_m) \longrightarrow^{m \longrightarrow \infty} 0$ וסדרת בחירת נקודות C_m.
בה"כ נניח כי סדרת החלוקות עולה בקטע $X_0, X_1, ..., X_m$.
נסמן ב-ℓ_k את הקצה הימני של הקטע - $[x_{\ell_k - 1}, x_{\ell_k}]$ שמכיל את הנקודה $\frac{1}{k}$.
נשים לב כי -
$\lambda(P_m) = max\{\Delta X_i\}_{1 \leq i \leq m} \to 0(m \to \infty)$
כעת מהגדרת הגבול,לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $M_k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m > M_k$ מתקיים $max\{\Delta X_i\}_{1 \leq i \leq m} < \frac{1}{k^2}$ וכן : $\forall 1 \leq i \leq m$ $\Delta X_i < \frac{1}{k^2}$.
נתבונן בסכום רימן של $f(x)$ עבור P_m, C_mעבור $m > M_k$:
f תמיד חיובית(המעבר משמאל) ולכן -
$0 \leq \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta X_i = \sum_{i=1}^{\ell_k} f(c_i)\Delta X_i + \sum_{i=\ell_k+1}^m f(c_i)\Delta X_i$
כעת נשים לב כי - $\sum_{i=1}^{\ell_k} f(c_i)\Delta X_i \leq (*) \sum_{i=1}^{\ell_k} \Delta X_i = \sum_{i=1}^{\ell_k} X_i - X_{i-1} = (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + ... + (X_{\ell_k} - X_{\ell_k - 1}) = X_{\ell_k} - X_0 \leq X_{\ell_k} \leq (**) \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$
שכן המעבר (*) נכון כיוון שמתקיים כי $f(x) \leq 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
והמעבר (**) נכון כי הקטע מכיל את $\frac{1}{k}$ ורוחב כל קטע חסום ב-$\frac{1}{k^2}$.
כעת נתבונן ב- $\sum_{i=\ell_k+1}^m f(c_i)\Delta X_i$
נשים לב כי המלבנים היחידים בהם $f(c_i) \neq 0$ הם אלו שבהם קיימים הנקודות $\frac{1}{n}$.
החל מהמלבן ה - $\ell_k + 1$ יש סה"כ $k - 1$ נקודות כאלו, ומכאן -
$\sum_{i=1}^{k-1} f(c_{\ell_i})\Delta X_{\ell_i} \leq (*) \sum_{i=1}^{k-1} \Delta X_{\ell_i} \leq (**) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$
(*)- $f(x) \leq 1$
(**)- ראינו מעלה.
סה"כ!!! קיבלנו כי לכל $m > M_k$ מתקיים כי: $0 \leq \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta X_i \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{2}{k}$
נגדיר את הסדרה הבאה -
$a_n = 1, 1, 1, 1, ..., 1, \frac{2}{1}, \frac{2}{1}, ...\frac{2}{2}, ...\frac{2}{k-1}, ...\frac{2}{k}$
כאשר $a_{M_k = } \frac{2}{k-1}$ נקבל כי $0 \leq \sum_{i=1}^m f(c_i)\Delta X_i \leq a_n$ כמו כן $a_n \to 0$ ולכן סה"כ לפי סנדוויץ' נקבל כי -
גבול סכומי רימן הינו אפס!
כלומר לכל בחירת נקודות וסדרת חלוקות הגבול של סכומי רימן הוא אפס, סה"כ f אינטגרבילית ומתקיים כי $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
כנדרש.

תרגיל חשוב עם גבול וסכומי רימן

1. חשב את הגבול הבא -

$$lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

נזכור ־ לא מפחדים משום תרגיל והוא מפחד מאיתנו, והאמת שזה תרגיל קל. ראשית נראה כי ־

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}*\frac{1}{n}$$

נראה כי אנחנו רוצים לקבל את $f(\frac{i}{k})$ לכל i כלומר את $f(\frac{n}{k})$ שתקיים כך

$$f(\frac{n}{k})=\frac{n^2}{n^2+k^2}=\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

כלומר ־

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

תקיים את הדרוש. מכאן שעבור הקטע $[0,1]$ עם החלוקה $p=\{0,\frac{1}{n},...\frac{n-1}{n},1\}$ ובחירת הנקודות $C=\{\frac{1}{n},...\frac{n-1}{n},1\}$ נקבל ־

$$lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)*\triangle x_i=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[_0^1arctanx]=\frac{\pi}{4}$$

תרגיל חשוב (היה בתרגול + היה במבחנים של שנים קודמות)

הוכיחו כי למשוואה הבאה יש פתרון יחיד בקטע $[-1,1]$:

$$x=\int_0^x(sin^{100}t)dt$$

פתרון: ראשית נרצה להוכיח שיש פתרון. אח"כ נוכיח שהוא יחיד.
ניתן לעשות זאת בשתי דרכים. הראשונה תקח שורה והשנייה יותר....
א. נשים לב כי לפי ההגדרה מתקיים

$$\int_0^0(sin^{100}t)dt=0$$

ולכן $X=0$ הוא פתרון של המשוואה.
ב. נעבוד קשה ־ נשתמש בערך הביניים ונסמן:

$$f(x)=x-\int_0^x(sin^{100}t)dt$$

לפי המשפט היסודי מתקיים כי אכן $f(x)$ גזירה ולכן גם רציפה ולכן נשתמש בערך הביניים. נראה כי ־

$$f(1)=1-\int_0^1(sin^{100}tdt)$$

$$f(-1)=-1-\int_0^{-1}(sin^{100}tdt)=-1+\int_0^1(sin^{100}t)dt$$

נראה כי $\int_0^1(sin^{100}tdt) < 1$ ולכן אם $\int_0^1(sin^{100}tdt) < 1$ נקבל כי $f(1) > 0$ וכי $f(-1) < 0$
נשאלת השאלה מדוע $\int_0^1(sin^{100}tdt) < 1$ ־ בוודאות $1 < sin^{100}t$ ולכן יש מלבן חוסם את האינטגרל הנ"ל ששטחו הוא $1 = (1-0) * 1$ ולכן בוודאות האינטגרל קטן מאחד.
לכן קיבלנו שני ערכים, אחד חיובי והשני שלילי ולכן לפי ערך הביניים קיים ערך בו $f(x) = 0$ כנדרש.

כעת, נרצה להוכיח שהוא יחיד. כיצד? באמצעות רול כמובן. נעזר בהגדרת f מקודם לכן ונרצה לגזור את הפונקציה, נוכיח שהיא עולה/יורדת תמיד וסיימנו.

$$f'(x) = 1 - sin^{100}(x)$$

כעת, כיוון ש$0 \leq sin^{100}x \leq 1$ נקבל כי תמיד $f'(x) \geq 0$ ולכן הפונקציה מונוטונית עולה ומכאן שיש פתרון יחיד.
מש"ל.

תכונות האינטגרל המסויים:

יהיו f וg אינטגרביליות ב־$[a,b]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי,
א. לינאריות ־ $\int_a^b(\alpha f + g)dx = \alpha \int_a^b(f)dx + \int_a^b(g)dx$
ב. אם $f \geq g$ אזי, $\int_a^b(f)dx \geq \int_a^b(g)dx$
ג. אי שליליות: אם $f(x) \geq 0$ אזי $\int_a^b(f)dx \geq 0$
ד. א"ש המשולש ־ אם f אינטגרבילית, גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע(!) ומתקיים כי ־ $|\int_a^b(f)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx|$
ה. פירוק לתתי קטעים... כפי שראינו באריכות בהרצאה
ו. ערך הממוצע האינטגרלי: תהי f רציפה ב־$[a,b]$, אזי קיימת $c \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\int_a^b(f)dx = c(b-a)$
ז. $\int_a^a(g)dx = 0$
ח. $\int_a^b(g)dx = -\int_b^a(g)dx$
***** מה לא ? אינטגרבילית לא בהכרח גורר רציפה.**
***** מה לא ? אם $|f|$ אינטגרבילית, f לא בהכרח!**
***** לא חסומה$\Longleftarrow$ לא אינטגרבילית.**

שימושי האינטגרל הלא מסויים (והחלק המעניין ־ מה יש במבחן)

א. אם f קבועה ב־$[a,b]$ ומקיימת $f(x) = c$ אזי, $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.
ב. פונקציית דריכלה ־ חסומה אך לא אינטגרבילית!
נתבונן בפונקציה הבאה ־

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

בקטע $[10,20]$.
היא אכן חסומה אך לא מתקיים כי כל סכומי רימן הולכים לאותו הגבול.
עבור בחירת נק' אי רציונליות נקבל כי הסכום הוא אפס, ועבור בחירת נק' רציונליות נקבל כי הסכום הוא $10 = (20-10) * 1$. מכאן שהאינטגרל שלה לא קיים.
ג. פונקציית השטח ־
תהי f אינ' בקטע $[a,b]$, פונקציית השטח מוגדרת כך ־ $s(x) = \int_a^x f(t)dt$
טענה ־ פונקציית השטח רציפה. (f לא חייבת להיות רציפה!)

המשפט היסודי של החדו"א: I: תהי f רציפה, אזי S גזירה וs היא הקדומה של f. יענו, $f(x)=s'(x)$
II: תהי f אינטגרבילית ותהי F קדומתה, אזי........

$$\int_a^b (f(x))dx = F(b) - F(a).$$

ד. חישוב אורך של גרף -
אם f גזירה (ומכאן שגם רציפה) , כך שהנגזרת שלה f' רציפה, אזי אורך הגרף של f הוא -

$$L(F) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

ה. אינטגרביליות לעומת קדומה?! לא נכון בשני הכיוונים - מצורפת השאלה ממבחן : (2025 מועד ב')

2. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. (11 נק') אם ל-f יש פונקציה קדומה בקטע, אז f אינטגרבילית בקטע.

ב. (10 נק') אם f אינטגרבילית בקטע, אז ל-f יש קדומה בקטע.

<u>פתרון:</u>

כפי שהסברנו באריכות בהרצאות, בשני המקרים מדובר בהפרכה.

מצד אחד, פונקציה כמו:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

איננה אינטגרבילית כי היא לא חסומה, אך יש לה קדומה:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מצד שני, פונקציה עם נקודת אי-רציפות אחת של "קפיצה", למשל:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

* יש פונקציות כמו e^{x^2} שיש לה קדומה אך הקדומה אינה אלמנטרית, ולא ניתן למצוא עבורה ביטוי סגור.
ו. נפח גוף סיבוב -
אם נרצה לחשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר כתוצאה מסיבוב הגרף סביב ציר ה-
1. ציר האיקס:
$v = \pi\int_a^b f(x)^2dx$
2. ציר הוואי:
$v = 2\pi\int_a^b xf(xdx$
ז. נגזרת של פונקציית השטח וחישובי גבולות:
**ראשית נעיר כי אם f אינטגרבילית אזי s רציפה.
באופן כללי מתקיים כי -
$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x)) * h'(x) - f(g(x) * g'(x)$
דוגמה:

$$lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x sin(t^2)dt}{9x^3} \overset{L}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} lim_{x\to 0}\frac{sin(x^2)}{27x^2} = \frac{1}{27}$$

ח. הפונקציות הטריגונומטריות ההיפרבוליות-
$coshx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ וכן $sinhx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
שימושיות לחישובי אורך גרף וכו', טריקים שמצטמצים... ראינו גם בהרצאה וגם בתרגול.

אינטגרלים לא אמיתיים

א. סוג ראשון: קטע אינסופי

נאמר כי f אינטגרבילית ב-$[a,\infty)$ אם f אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כלומר, אם היא אינטגרבילית יתקיים כי -

$$\int_a^\infty f(x)dx=lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

אם הגבול קיים, אזי האינטגרל מתכנס. אחרת, האינטגרל מתבדר.
טענה (הוכחנו באינדוקציה בתרגול) - יהי $n\in\mathbb{N}$, אזי - $\int_0^\infty x^ne^{-x}dx=n!$ - פונקציית גאמה. מאפשרת להכליל את מושג העצרת לכל $\mathbb{R}$.
*נשים לב כי $\int_{-\infty}^\infty=\int_{-\infty}^0+\int_0^\infty$ ולכן האינטגרל מתכנס אמ"מ כל אחד מהשניים מתכנסים.
*נשים לב כי $\int_{-\infty}^\infty\neq lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b$. דוגמה נגדית - $\int_{-\infty}^\infty x^7dx$, כאן נקבל אנסוף ואם נעשה גבול נקבל אפס.(מתכנס).
טענה: אם f אי זוגית ואינטגרבילית ב-$[-a,a]$ אזי $\int_{-a}^a f(x)=0$

מבחני התכנסות של אינטגרלים:

טענה: $\int_a^\infty\frac{1}{x^p}dx$ מתכנס $\iff p>1$ (כאשר $a>1$).
$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ מתכנס $\iff p<1$

א. מבחן ההשואה -

יהיו f ו-g אינטגרביליות ב-$[a,\infty)$ כך ש-$0\le f\le g$.
אזי, $\int_a^\infty g(x)$ מתכנס $\Longleftarrow\int_a^\infty f(x)$ מתכנס
(וכמובן כיוון הגרירה השלילית נכון)

ב. מבחן ההשוואה הגבולי -

יהיו f ו-g אינטגרביליות ב-$[a,\infty)$ כך ש-$0\le f$ וכן $0\le g$.
נסמן - $L=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$
אזי,
* אם $0<L<\infty$: אזי האינטגרלים חברים
* אם $L=0$ אזי האינטגרל של g מתכנס גורר ששל f מתכנס.
*אם $L=\infty$ אז האינטגרל של f מתכנס גורר ששל g מתכנס.

ב. אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני - אינה חסומה

(כלומר, הפונקציה אינה חסומה) - יענו, יש בעיה בקצוות.
למשל - $\int_0^1\frac{1}{x}dx$
* הדיון יתמקד כאשר הבעיה היא בקצה השמאלי בפונקציה בגבול, אך הדיון דומה.
הגדרה:
פונקציה f נקראת אינטגרבילית ב-$(a,b]$ אם f אינטגרבילית בקטע מהצורה $[c,b]$ לכל $c\in(a,b]$.
למשל - $f(x)=\frac{1}{x}$ היא אינטגרבילית ב-$(0,1]$ כי היא אינטגרבילית לכל $0\le c\le1$ (מדוע? כי היא רציפה)

כעת, נגדיר:

$$\int_a^b f(x) = lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

למשל -
$\int_0^{0.5}\frac{1}{xlnx}dx$, היא בעייתית בקצה השמאלי שלה - 0.
לפי ההגדרה, $\int_0^{0.5}\frac{1}{xlnx}dx = lim_{c\to 0^+}\int_c^{0.5}\frac{1}{xlnx}dx =$
כעת נמצא קדומה - $\int \frac{1}{xlnx}dx = ln|lnx|$ (קלל עם הצבה)
ולכן -

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{xlnx}dx = lim_{c\to 0^+}\int_c^{0.5}\frac{1}{xlnx}dx = lim_{c\to 0^+}ln(ln\frac{1}{2}) - ln(lnc) = -\infty$$

כלומר - האינטגרל מתבדר.
*כעת נגדיר גם לקטע שהנקודה בעייתית היא מימין -
פונקציה f נקראת אינטגרבילית ב-$[a,b)$ אם f אינטגרבילית בקטע מהצורה $[a,c]$ לכל $c\in(a,b]$.
כעת, נגדיר:
$\int_a^b f(x) = lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$
--
♡- הערה: אם באינטגרל יש יותר מ"בעיה" אחת, מציגים אותו כסכום של אינטגרלים שבכל אינטגרל יש בעיה אחת שאיתה אנו יודעים להתמודד.
(האינטגרל עם מלא הבעיות מתכנס אמ"מ כל האינטגרלים מתכנסים)
למשל -

$$\int_0^1\frac{1}{xlnx}dx = \int_0^{0.5}\frac{1}{xlnx}dx + \int_{0.5}^1\frac{1}{xlnx}dx$$

שני הצדדים בעייתיים ולכן נפצל את האינטגרל לשניים.
ראינו כי כל אחד מהם מתבדר, ומספיק בתכלס רק אחד מהם.... ולכן האינטגרל כולו מתבדר.
דוגמה נוספת -

$$\int_3^9\frac{1}{x-7}dx = \int_3^7\frac{1}{x-7}dx + \int_7^9\frac{1}{x-7}dx$$

- כיוון שהנק' הבעייתית היא ב-$x=7$.
מי כמונו יודע, $\int\frac{1}{x-7}dx = ln|x-7|$
ולכן - $\int_3^7\frac{1}{x-7}dx = lim_{c\to 7}ln|c-7| - ln4 = -\infty$ ולכן האינטגרל כולו מתבדר.
♡- הערה: נתבונן באינטגרלים מהצורה הבאה - $\int_0^1\frac{sinx}{x}dx, \int_0^1 xlnx, \int_0^1 sin(\frac{1}{x})$ למרות שאף אחת מהן לא מוגדרת ב-0 , כולן חסומות והאינטגרלים הם אמיתיים וקיימים. (בימנית יש מס' סופי של נק' אי רציפות , האמצעי רגיל מאוד.. - אך קשה עד בלתי אפשרי למצוא את הקדומה)
טענה: $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx, \int_b^a\frac{1}{(x-a)^p}dx$ מתכנסים אמ"מ $p<1$
טענה: $\int_a^\infty\frac{1}{(x-a)^p}dx$ מתכנס אמ"מ $p>1$

מבחני השוואה עבור אינטגרלים מסוג שני:

א. מבחן ההשוואה -

יהיו f וg אינטגרביליות ב-$(a,b]$ כך ש$0 \le f \le g$.
אזי, $\int_a^b g(x)$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^b f(x)$ מתכנס

(וכמובן כיוון הגרירה השלילית נכון)
* דוגמה: $\int_0^1 \frac{1}{(arctanx)^2}dx$. נזכר כאשר $x \geq 0$ מתקיים - $arctan(x) \leq x$
כלומר $arctan^2x \leq x^2$ ולכן $\frac{1}{arctan^2x} \geq \frac{1}{x^2}$ כמו כן, $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ מתבדר כי $p=2>1$ ולכן, גם האינטגרל שלנו מתבדר.
* הוכחה - כאשר $x \geq 0$ מתקיים כי $x \geq arctanx$. שקול להוכיח: $0 \leq x - arctanx$. נקרא - $f(x) = x - arctan(x)$.
כלומר צ"ל $f(x) \geq f(0)$ - כלומר עולה.
נגזור ונקבל $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{x^2-1} \geq 0$, כלומר f עולה וסיימנו.

ב. מבחן ההשוואה הגבולי -

תהיינה f וg אינטגרביליות ב-$(a,b]$ כך ש$f \geq 0$ וכן $g \geq 0$.
נסמן - $L = lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ (שואפים אל הנק' הבעייתית!!)
אזי,
* אם $0 < L < \infty$: אזי האינטגרלים "חברים"
* אם $L = 0$ אזי $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס
*אם $L = \infty$ אזי $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס
******נעיר כי כאן בניגוד לחישוב במקרים קודמים להשוות לטור שהוא חלוקה של המקדם הגבוה במונה ובמכנה זה לא יעזור. למי נשווה? למי שגורם לפונקציה להיות לא חסומה.**
דוגמה: נתבונן על $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.5}+x}dx$.נראה כי $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.5}+x}dx = \int \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx$ והבעייתי שלנו הוא דווקא x ולכן נשווה ל$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$
לעומת זאת עבור הדוגמה הבאה - $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.5}+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{1}{x^{0.5}(x+1)}$ לכן הפעם נשווה עם $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ -> נקבל כי הם חברים ולכן מתכנסים יחד כי $p = 0.5 < 1$.
*** הגדרנו כי f אינטגרבילית אם היא (תנאי הכרחי) חסומה, כעת הרחבנו את המושג גם עבור קטע אינסופי, אם היא חסומה בכל קטע סגור.
*הערה: אם רוצים אפשר לעבור בין סוגי האינטגרלים הלא אמיתיים (כלומר מהראשון לשני) באמצעות הצבה.
למשל -
$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$
נציב $t = \frac{1}{x} \Longleftarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx \Longleftarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$
וכמו כן באשר לגבולות $x=1$: $t = \frac{1}{1} = 1$ וכן כאשר $x \to 0^+ \Rightarrow t = \frac{1}{x} \longrightarrow \infty$ כלומר $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \int_\infty^1 t * \frac{-1}{t^2}dt = \int_1^\infty \frac{1}{t}dt$
(יש לשים לב למינוס שיצא שהפך את הגבולות)
כדאי לזכור כי $\frac{-\pi}{2} \leq arctanx \leq \frac{\pi}{2}$ וכן $\frac{-\pi}{2} \leq arcsinx \leq \frac{\pi}{2}$ וכן $0 \leq arccosx \leq \pi$ - שלושתן חסומות.

מבחן דריכלה (מתאים לאינטגרלים מסוג ראשון בלבד):

נרצה לחשב אינטגרלים מהצורה $\int_a^\infty f(x)g(x)$ כאשר האינטגרל לא ניתן לחישוב באופן ישיר / יש מינוס מתחלף בפנים ולא ניתן לחשב עם מבחני השוואה.
אם $f(x)$ גזירה ברציפות (הנגזרת שלה רציפה) ויורדת ל-0, ומצד שני $g(x)$ רציפה והאינטגרל שלה (הקדומה שלה) היא חסומה - כלומר $G(x) = \int_a^x g(x)dx$ חסומה, אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x)$ מתכנס.
* שימושי עבור סינוס וקוסינוס.
דוגמה: נתבונן באינטגרל $\int_1^\infty \frac{cosx}{x}dx$. נראה כי אכן $f(x) = \frac{1}{x}$ גזירה ברציפות ויורדת לאפס, כמו כן $G(x) = \int_1^x costdt = [_1^x sint] = sinx - sin1$ אכן חסומה בקטע, ולכן לפי דריכלה מדובר באינטגרל מתכנס.
דוגמה טובה יותר: נתבונן באינטגרל $\int_0^1 \frac{sin(\frac{1}{x})}{x}$ - הפונקציה $sin(\frac{1}{x})$ משתגעת כשמתקרבים לאפס. כלומר יש כאן קפיצות דומות למינוס אחד בחזקת. כלומר - מבחני השוואה לא יעזרו וגם ערך מוחלט לא. אז בואו נשתמש בדריכלה - מה הבעיה? הוא מדבר על אינטגרלים מסוג ראשון. נעבור לכזה - נציב $t = \frac{1}{x}$ ואז $dt = -\frac{1}{x^2}dx$, כלומר $dt = -t^2dx$ ולכן $dx = \frac{-1}{t^2}dt$. כאשר $x=1$ הגבול ישאר $\frac{1}{1} = 1$ וכאשר $x = 0$ נקבל $\frac{1}{0} = \infty$.
נציב - $\int_0^1 \frac{sin(\frac{1}{x})}{x}dx = \int_\infty^1 t * sint * -\frac{1}{t^2}dt = -\int_1^\infty t * sint * -\frac{1}{t^2}d = \int_1^\infty \frac{sint}{t}dt$.
כעת, קיבלנו אינטגרל שקול מסוג ראשון - נפעיל עליו מבחן דריכלה, $f(t) = \frac{1}{t}$ גזירה ברציפות ויורדת לאפס, $G(t) = \int_1^t sinzdz = cos1 - cost$ חסומה ולכן האינטגרל שלנו כולו מתכנס.
-

התכנסות בתנאי ובהחלט:

*נאמר כי אינטגרל מתכנס בהחלט אם $\int |f(x)|$ מתכנס ואז גם $\int f(x)$ מתכנס.

למשל ־ נתבונן באינטגרל $\int_9^\infty \frac{sin(3x)}{x^8}dx$. הוא מחליף סימן וקשה לטפל בו, נשים ערך מוחלט ונקבל ־ $\int_9^\infty |\frac{sin(3x)}{x^8}|dx \leq \int_9^\infty \frac{1}{x^8}dx$ שכמובן מתכנס כי $p = 8 > 1$ ולכן האינטגרל שלנו קטן ממתכנס ומתכנס בעצמו (השוואה ־ כן ניתן כעת כי מדובר בשניים חיוביים)

*אינטגרל מתכנס בתנאי הוא אינטגרל שהערך המוחלט שלו מתבדר אך $\int f(x)$ מתכנס.

* נעיר כי הכיוון ההפוך לא נכון כלומר אם $\int f(x)$ מתכנס זה לא אומר ש$\int |f(x)|$ מתכנס.

* הדרך היחידה להבדיל בין התכנסות בתנאי לבהחלט היא דריכלה.

דוגמה טובה־

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{sint}{t}dt$ מתכנס לפי דריכלה ־ אך בערך מוחלט מתקיים כי $\frac{1}{t} - \frac{cos2t}{t} = \frac{1-cos2t}{t} = \frac{sin^2t}{t} \geq |\frac{sint}{t}|$ שכן קיבלנו כי $\frac{1}{t}$מתבדר והימני מתכנס לפי אותו דריכלה ־ ולכן סכום מתכנס ומתבדר הוא מתבדר, כלומר האינטגרל שלנו גדול מאינטגרל מתבדר ולכן מתבדר בעצמו. וסה"כ התכנסות בתנאי.

תרגיל טוב מאוד ־ שהיה במבחן ־ היה בתרגול ־ ולכן ייתכן שיהיה גם במבחן שלנו:

קבע האם האינטגרל הבא מתכנס/ מתבדר / בתנאי

$$\int_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}dx$$

פתרון: ספוילר ־ הוא מתכנס בתנאי.

* עבור הערך המוחלט נקבל ־ $\int_0^\infty |(-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}|dx = \int_0^\infty 1 = lim_{b\to\infty}[_0^b x] = lim_{b\to\infty}b = \infty$שזהו אינטגרל מתבדר.

* נבדוק התכנסות בתנאי ־

נשים לב כי בכל קטע מהצורה $[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}]$ מתקיים כי $n \leq x^2 < n+1$ ולכן $f(x) = (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} = (-1)^n$

מכאן שנוכל לכתוב את האינטגרל כך ־

$$\int_0^\infty (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor}dx = \int_0^1 + \int_1^{\sqrt{2}} +.... = \sum_{n=0}^\infty \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} (-1)^n dx = \sum_{n=0}^\infty [_{x=\sqrt{n}}^{x=\sqrt{n+1}} (-1)^n x] = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

כלומר הבעיה שהומרה היא במקום האם האינטגרל מתכנס $\Longleftarrow$ האם הטור הזה מתכנס?!

אם נכפול בצמוד נקבל את הטור הבא ־ $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $\Longleftarrow$ זהו טור מתכנס לפי לייבניץ! $(-1)^n$ חסומה וכן $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ יורדת לאפס.

מכאן שסה"כ שהאינטגרל מתכנס בתנאי.

* טוב לדעת ־ האינטגרל $\int_2^\infty \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס בתנאי, אך בריבוע מתבדר.

משפט (עוד מהקורס הקודם): אינטגרל מתכנס +אינטגרל מתבדר = אינטגרל מתבדר.

לעומת זאת ־ לא ניתן לדעת כלום על אינטגרל מתבדר+מתבדר.

מבחן האינטגרל:

יהי $a \in \mathbb{R}$. ותהי f רציפה בקטע $[a, \infty)$. אם f יורדת ל־0 (וחיובית) אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ מתכנס.

למשל, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ויורדת ל־0, וכן אנחנו יודעים שהאינטגרל $\int_1^\infty f(x)$ מתכנס לכן גם הטור הנ"ל.

(לא יזיק לדעת כי $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$) ־ המבחן לא יעזור לנו לחשב את סכום הטור/אינטגרל.

־

בטורים אנחנו יודעים כי $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $a_n \to 0$. האם אותו דבר קורה באינטגרלים? לא. אבל ־ יש תנאים מעניינים.

(נשאל על כך המון!!! במבחנים ־ המון. כדאי לדעת מה שכאן בע"פ כולל דוגמאות)

1. דוגמה ראשונה ־ $\int_1^\infty sin(x^{176})dx$ ־ הפונקציה רציפה וחסומה, ומצד שני ברור כי $lim_{x\to\infty}sin(x^{176}) \neq 0$.
אנחנו לא יודעים לחשב את האינטגרל ־ והוא לא חיובי אז אי אפשר מבחני השוואה ־ ואי אפשר דריכלה!
נציב ־ $t = x^{176}$ ולכן $dt = 176x^{175}dx$ ולכן $dx = \frac{dt}{176x^{175}}$, מכאן גם ש ־ $x = \sqrt[176]{t}$ ולכן $dx = \frac{dt}{176x^{175}} = \frac{dt}{176t^{\frac{175}{176}}}$,
מה עם הגבולות? הגבולות נשארים זהים בגלל ההצבה שלנו.

$$\int_1^\infty sin(x^{176})dx = \int_1^\infty sin(t)\frac{dt}{176t^{\frac{175}{176}}}$$

כעת קיבלנו אינטגרל של פונקציה חסומה , ופונקציה יורדת לאפס - ולכן לפי דריכלה האינטגרל מתכנס. כלומר ===> זה שהאינטגרל מתכנס לא אומר שהיא שואפת לאפס.

2. בדוגמה הקודמת הפונקציה הייתה מחליפת סימן - השטחים מתקזזים ואינטואיטיבית ברור כי היא אכן מתכנסת. מה אם היא חיובית? האם אינטגרל מתכנס גורר שהגבול הוא אפס? לא. נתבונן בדוגמה -

א. פונקציה חיובית שאינה רציפה - הגבול לא אפס: נתבונן על הדוגמה הבאה -

$$f(x) := \left\{\begin{array}{cc} 1 & n \le x \le n+\frac{1}{n^2} \\ 0 & n+\frac{1}{n^2} < x < n+1 \end{array}\right\}$$

מה קורה כאן? פונקציית מלבנים - היא שווה אחד בכל הנקודות מהצורה $\frac{1}{n^2}$ ונוצרים סדרת מלבנים ששטחם בהתאמה ...$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$. זו פונקציה שתמיד חיובית - ניתן לתארה כך - $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$. מדובר בפונקציה חסומה, אינה רציפה, הגבול אינו אפס אלא הסכום מימין, באופן יותר פורמלי -

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + ... = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

הערה -

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)dx + \int_{1+\frac{1}{n^2}}^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} 1dx + \int_{1+\frac{1}{n^2}}^{n+1} 0dx = [_n^{n+\frac{1}{n^2}} x] = \frac{1}{n^2}$$

3. פונקציה חיובית שכן רציפה אך לא חסומה- ועדיין הגבול אינו אפס:

כעת נתבונן על פונקציית "משולשים" - נתארה באופן פורמלי כדקלמן - בכל קטע מהצורה $[n, n+1]$ נגדיר משולש - שווה שוקיים שהשטח שלו הוא $\frac{1}{n^2}$ ובשאר הקטע הפונקציה היא אפס - אך רציפה. נקח משולשים בגובה n עם בסיס $\frac{2}{n^3}$ונקבל כפי שרצינו. - פונקציה חיובית שגבולה אינו אפס.

פורמלית-

1. בקטע $[n, n+\frac{1}{n^3}]$ - הפונקציה היא קו ישר עולה.
2. בקטע $[n+\frac{1}{n^3}, n+\frac{2}{n^3}]$ - הפונקציה היא קו ישר יורד.
3. 1. בקטע $[n+\frac{1}{n^3}, n]$ - הפונקציה היא 0.

בחלק הראשון השיפוע הוא $m = \frac{n-0}{\frac{1}{n^3}+n-n} = n^4$ ולכן משוואת הישר היא $f(x) = n^4x - n^5$ (קו ישר...)

בחלק השני - באופן דומה השיפוע הוא $-n^4$ ונקבל $f(x) = -n^4x + n^5 + 2n$
וסה"כ נקבל את f באופן פורמלי כך -

$$f(x) = \left\{\begin{array}{cc} n^4x - n^5 & [n, n+\frac{1}{n^3}] \\ -n^4x + n^5 + 2n & [n+\frac{1}{n^3}, n+\frac{2}{n^3}] \\ 0 & [n+\frac{1}{n^3}, n] \end{array}\right\}$$

זו פונקציית המשולשים שלנו - האינטגרל מתכנס כפי שנראה כעת:
האינטגרל שווה לטור $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2}$ שמתכנס! כלומר בשורה הסופית - גם רציפה חיובית מתכנסת לא גוררת שהאיבר הכללי שואף לאפס.
*הערה - אם נרצה פונקציה שכן חסומה נבחר תמיד גובה קבוע.
--

4. פונקציה שאיננה רציפה ואיננה חסומה - נקח את המלבנים עם גובה n ובסיס $\frac{1}{n^3}$ - נקבל אינטגרל מתכנס כי גם כאן הטור של $\frac{1}{n^2}$ - למרות שאיננה חסומה כי הגובה בכל פעם הוא n.
5. פונקציה חיובית ממש רציפה - בדוגמת המשולשים, נקח את המשולשים ובמקום 0 נשים משהו כמו $\frac{1}{n^4}$שמתכנס, ונקבל סכום של שני טורים מתכנסים —> לא שואפים לאפס וכן מתכנס.
6. ואם נדרוש גזירה - זה מאוד מסריח. אך אפשרי - צריך במקום קווים ישרים לקחת פונקציות שלא יתנו לנו שפיצים למעלה - אם נקח פונקציות כמו e^{-x} - מסובך מאוד.

--
דוגמה טובה: קבע אם האינטגרל הבא מתכנס/מתבדר -

$$\int_7^{\infty}(1-\frac{1}{x})^{x^2}dx$$

היא אכן יורדת בקטע, וחיובית, וכן רציפה, ולכן שקול לבדוק האם $\sum(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ מתכנס - לשם כך נשתמש במבחן השורש - נקבל $L=(1-\frac{1}{n})^n \to e^{-1}<1$ ולכן לפי מבחן השורש הטור מתכנס ולכן גם האינטגרל.
דוגמה נוספת: האינטגרל $\int \frac{1}{xlnx}$ מתכנס כי ראינו בקורס הקודם שלפי מבחן העיבוי, הטור הזהה מתכנס.

סדרות של פונקציות

הגדרה: סדרות שכל איבר שלהן הוא פונקציה בעצמה. למשל: $f_n(x)=x^n$. כך נקבל סדרה:

$$f_1(x)=x, f_2(x)=x^2, f_3(x)=x^3.....$$

התכנסות נקודתית: בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ בקבוצה A, לכל $x_0\in A$ שנציב ב$f_n(x)$ נקבל סדרת מספרים, $f_n(x_0)$. את הגבול של הסדרה הזו נסמן $f(x_0)$ -לכל x_0יש את קבוצת המספרים שלו. כך נקבל פונקציה $f(x)$ שנקראת הפונקציה הגבולית ונסמן: $f_n\to f$. (הערה - A היא קטע $[a,b]$)
*הערה: זה נקרא "התכנסות נקודתית" כיוון שלכל נקודה בקטע אנחנו מקבלים סדרה אחרת שמתכנסת למקום אחר.
*הערה: כל איבר בסדרה הוא פונקציה, בפרט נקבל שהגבול הוא פונקציה.

דוגמאות:

1. $f_n(x)=x^n,[0,1]$ - לאן שואפת הסדרה בתחומינו? נחלק למקרים. עבור $0\le x<1$ נקבל כי $f_n(x)\to 0$ וכן עבור $x=1$ נקבל כי $f_n(x)=1^n=1\to 1$.
כלומר,

$$f(x):=\left\{\begin{array}{cc}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{array}\right\}$$

2. $f_n(x)=x^2+\frac{x}{n}+\frac{7}{n^2}$. כאן:

$$lim_{n\to\infty}f_n(x)=lim_{n\to\infty}x^2+\frac{x}{n}+\frac{7}{n^2}=x^2$$

כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f_n(x)\to x^2$. כלומר $f(x)=x^2$
3. $f_n(x)=\frac{n^2x^6}{n^2+x^6}$.

$$lim_{n\to\infty}f_n(x)=lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^6}{n^2+x^6}=lim_{n\to\infty}\frac{x^6}{1+\frac{x^6}{n^2}}=x^6$$

כלומר, $f_n(x)\to x^6$ ולכן הפונקציה הגבולית $f(x)=x^6$

4. $f_n(x)=\sqrt{n^2x^2+x^4}-nx$
מה נעשה כאן? נכפול בצמוד ונחלק בו.
נעיר כי אם $x=0$ אזי $f_n(x)=0$. אם $x<0$ נראה כי $f_n(x)\to\infty$
אחרת, כלומר $x>0$

$$f_n(x)=\sqrt{n^2x^2+x^4}-nx=\frac{(\sqrt{n^2x^2+x^4}-nx)(\sqrt{n^2x^2+x^4}+nx)}{(\sqrt{n^2x^2+x^4}+nx)}=\frac{x^4}{\sqrt{n^2x^2+x^4}+nx}\to 0$$

כך קיבלנו פונקציה גבולית $f(x)=0$ בתחום של $[0,\infty]$ (נעיר כי המקרה $x<0$ לא רלוונטי כי שם הפונקציה כלל לא מתכנסת.)
5. $f_n(x)=n*arctan(\frac{x}{n})$. כמובן לופיטל...

$$lim_{n\to\infty}f_n(x)=lim_{n\to\infty}\frac{arctan(\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}}=t=\frac{1}{n}\Rightarrow lim_{t\to 0}\frac{arctan(tx)}{t}=_L lim_{t\to 0}\frac{\frac{x}{1+(tx)^2}}{1}=lim_{t\to 0}\frac{x}{1+t^2x^2}=x$$

ולכן הפונקציה הגבולית שלנו היא $f(x)=x$.
6. $f_n(x)=n^2ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2}))$

$$lim_{n\to\infty}f_n(x)=lim_{n\to\infty}n^2ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2}))=lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2}))}{\frac{1}{n^2}}=lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2}))}{\frac{x^9}{n^2}}*x^9=x^9*lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2})}{\frac{x^9}{n^2}}$$

$$=x^9*lim_{n\to\infty}\frac{ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2}))}{\frac{\frac{x^9}{n^2}}{sin(\frac{x^9}{n^2})}*sin(\frac{x^2}{n^2})}=x^9*lim_{n\to\infty}\frac{sin(\frac{x^9}{n^2})}{\frac{x^9}{n^2}}+\frac{ln(1+sin(\frac{x^9}{n^2}))}{sin(\frac{x^2}{n^2})}=x^9*1*1=x^9$$

כאשר השתמשנו בשני הגבולות הידועים: $lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$ וכן $lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$
ולכן קיבלנו שהפונקציה הגבולית שלנו היא $f(x)=x^9$
7. אלעד אמר יהיה במבחן.......

$$f_n(x)=sin^{4n}(x)=(sin^4x)^n$$

.

אנו יודעים כי מתקיים:

$$f(x):=\left\{\begin{array}{ll}1 & sin^4x=1\\ 0 & sin^4x\neq 1\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll}1 & x=\frac{\pi}{2}+\pi k|k\in\mathbb{N}\\ 0 & x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k|k\in\mathbb{N}\end{array}\right\}$$

כדאי לזכור כי אם נרצה לפתור משוואה $sin^4x=1$ כלומר $sinx=\pm1$ נקבל שהפתרון הוא $x=\frac{\pi}{2}+\pi k|k\in\mathbb{N}$.
8.

$$f_n(x)=\left\{\begin{array}{ll}1 & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & otherwise\end{array}\right\}$$

בתחום $[0,1]$. ראשית, בנקודה $x=0$ לא משנה מה נציב נראה כי $f_n(x)=1\to 1$. שנית, לכל x קיים n כך ש$x>\frac{1}{n}$, ולכן החל מהשלב הזה n_x יתקיים $f_n(x)=0$ ולכן $f_n(x)\to 0$. סה"כ נקבל כי:

$$f_n(x):=\left\{\begin{array}{ll}1 & x=0\\ 0 & otherwise\end{array}\right\}$$

9. מצאו את הפונקציה הגבולית כאשר $f_n(x)=n(\sqrt[n]{x}-1)$.
כמובן שנעזר בלופיטל, מקרה קלאסי של אנסוף כפול אפס. ומכאן –

$$lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\frac{1}{n}}|t=\frac{1}{n}\Longrightarrow lim_{t\to 0}\frac{x^t-1}{t}=_L lim_{t\to 0}\frac{x^t lnx}{1}=x^0 lnx=lnx$$

כלומר, $f(x)=lnx$
כעת כדי להעיר, חישבנו גבול באמצעות לופיטל אך זה מתאים לפונקציות. לכן נעיר שהגבול יצא lnx לכל סדרה שנציב, בפרט אם נציב את הסדרה $x_n=n$ נקבל שגם אליה זה יהיה הגבול.
***הערה: כשמחשבים גבול עושים בעזרת n כי הוא הפרמטר, כשגוזרים עושים לפי x.**
שאלה: אם f_n כולן מקיימות תכונה מסויימת, האם גם f מקיימת את אותה התכונה?
א. רציפות: f_n רציפות האם גם בהכרח f רציפה? לא! רוב הדוגמאות שראינו קודם מוכיחות זאת, דוגמה 8 למשל כאן למעלה או דוגמה 1.
ב. גזירות: f_n וכן f גזירות. האם $f_n'\to f'$? לא!
נתבונן בפונקציה גזירה כלשהי (היא חייבת להיות גם רציפה) –

$$f_n(x)=\frac{sin(n^8x)}{n}\to 0$$

כי אפיסה כפול חסומה. כלומר $f(x)=0$.
עם זאת נראה כי

$$f_n'(x)=n^7cos(n^8x)$$

זה כמובן לא מתכנס, בטח לא לכל x ולא מתכנס לאפס.
ג. אינטגרביליות: f וכן f_n אינטגרביליות ב־$[a,b]$. האם בהכרח $\int_a^b f_n(x)dx\to\int_a^b f(x)dx$. לא!
דוגמה נגדית:

$$f_n(x):=\left\{\begin{array}{cc} n & 0<x\le\frac{1}{n}\\ 0 & otherwise\end{array}\right\}$$

מאותם השיקולים של דוגמה 8, $f(x)=0$
*נעיר כי זו לא אותה דוגמה כמו ב־8.....
כמו כן,

$$\int_0^1 f_n(x)=\int_0^{\frac{1}{n}}f_n(x)+\int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)=\int_0^{\frac{1}{n}}n+\int_{\frac{1}{n}}^1 0=n(\frac{1}{n}-0)=1\neq\int_0^1 f(x)=0$$

ד. תהי $f_n(x)$ סדרת פונקציות המתכנסת ל$f(x)$ בקטע $[a,b]$. נניח כי $f_n(x)$ חסומה לכל x. האם f חסומה? הפרכה! נתבונן על הקטע $[0,1]$ ובפונקציה:

$$f_n(x)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0\le x<\frac{1}{n}\\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{array}\right\}$$

אין ספק כי היא חסומה. המקסימום שלה יתקבל בנקודה $x=\frac{1}{n}$והוא n. כך שאכן היא חסומה מלמעלה. (לכל n יש חסם אחר)
כעת נמצא מיהי $f(x)$. לכל $x>0$ קיים n כך ש$x\ge\frac{1}{n}$ ולכן הסדרה $f_n(x)$ החל משלב מסויים פשוט שווה $\frac{1}{x}$ ולכן נקבל $f(x)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & x=0\\ \frac{1}{x} & otherwise\end{array}\right\}$ שוודאי שאינה חסומה בקטע.
(אלעד זרק הערה שיש דברים נוספים לשאול לתרגיל הבית, לתרגול ולמבחן....)
*הערה – הפונקציה הגבולית תפקידה משמה, להגיד מה הגבול. לכן אנסוף ומינוס אנסוף לא נחשבים כרלוונטיים. אלא רק מס' ממשי.
*הגדרה שקולה להתכנסות נקודתית, עם התכנסות הגבול: לכל $X\in A$ ולכל $\epsilon>0$ קיים $n_\epsilon>0$ כך שלכל $n>n_\epsilon$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$

התכנסות במידה שווה (במ"ש)

כפי שהערנו לעיל למעלה, העובדה ש$f_n \to f$ לא אומר לנו יותר מדי על שמירה על התכונות.
הגדרה: נניח שסדרת פונקציות $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה גבולית $f(x)$ בקטע $[a,b]$. אנו נאמר כי f_n מתכנסת במ"ש ל־f ונסמן זאת $f_n \rightrightarrows f$ אם הסדרה $d_n \to 0$ כאשר

$$d_n = sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)|$$

הגדרה שקולה: נאמר שסדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)$ בקבוצה A במידה שווה ונסמן $f_n \rightrightarrows f$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n_ϵ כך שלכל $x \in A$ ולכל $n > n_\epsilon$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

*נשאלת השאלה ־ מה ההבדל בהגדרה זו להגדרה של התכנסות נקודתית? נראה כי הכמתים לא באותו הסדר. בהתכנסות במ"ש בהינתן ϵ אנו רוצים שהחל ממנו מתקיים אי השוויון שמעלה לכל x ולא עבור x מסויים! גאומטרית זה אומר שקיים שלב החל ממנו הפונקציות נמצאות ב"פס־ϵ" (רוחב אפסילון במרחב מהפונקציה למעלה או מטה, למשל x^n בקטע $[0,1]$ תברח מהר מאוד מהפס כי כאשר $x \to 1$ מתקיים $x^n = 1$ ולכן הם יברחו מהפס די מהר......) סביב f. (לא נשתמש כמעט בהגדרה זו)
משפט: אם $f_n \rightrightarrows f$ וכל f_nרציפה אזי בהכרח f רציפה.
מסקנה: אם f_nכולן רציפות ו־f אינה רציפה, אזי ההתכנסות אינה במ"ש.
משפט: אם $f_n(x)$וכן f אינטגרביליות ב־$[a,b]$ וכן ההתכנסות היא במ"ש אזי $\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt$ובאופן כללי זה נכון לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $\int_a^x f_n(t)dt \to \int_a^x f(t)dt$. ומכאן $F_n(x) \to F(x)$ וכן מתקיים כי ההתכנסות של הפונקציות הקדומות היא במ"ש!!!

נרצה לראות דוגמה לתרגיל "הנה סדרת פונקציות, האם היא במ"ש?" ־ נראה את האלגוריתם לפתרון שאלות מסוג זה:

1. קודם כל נמצא את הפונקציה הגבולית f. אם f_n רציפות והיא לא רציפה, אזי סיימנו ־ ההתכנסות אינה במ"ש. (למשל הפונקציה $f_n(x) = x^n$ רציפה אך f אינה רציפה ולכן ההתכנסות אינה במ"ש)
2. נחפש את d_n. אם אכן f_nוf רציפות, אזי במקום sup ניתן לכתוב max ולגזור את המשוואה, להשוות לאפס, הקצוות חשודים וכו'..
אם מצאנו את d_n מעולה ־ נבדוק האם אכן $d_n \to 0$.
אחרת, נזכור שאנחנו רוצים לראות שאיפה ולכן נמצא חסמים מלמעלה ולמטה ונעזר בסנדויץ' על מנת להראות $d_n \to 0$.

דוגמה:
נתונה סדרת הפונקציות הבאה ־ $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. קבעו האם במ"ש בקטע $[0,1]$.
א. נמצא את f.
עבור $x = 0$ מתקיים כי $f_n(x) = 0$. אחרת,

$$f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) = lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$$

כלומר סה"כ $f(x) = 0$.
ב. הכל רציף ולכן ־

$$d_n = sup_{x\in[0,1]}\{f_n(x) - f(x)\} = sup_{x\in[0,1]}\{\frac{x}{1+n^2x^2} - 0)\} = max_{x\in[0,1]}\{\frac{x}{1+n^2x^2})\}$$

כעת נגזור (לפי x!) ונמצא את המקסימום. מי חשוד בנוסף? הקצוות. בקצוות נקבל, $0, \frac{1}{1+n^2}$

$$(\frac{x}{1+n^2x^2})' = \frac{1+n^2x^2-x(2xn^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-x^2n^2}{(1+n^2x^2)^2} \Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

כשנציבה בפונקציה נקבל $\frac{\frac{1}{n}}{1+n^2*(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2n}$. סה"כ קיבלנו 3 אפשרויות, $0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{1+n^2}$. הערך המקסימלי מבין השלושה הוא כמובן $\frac{1}{2n}$, כלומר $d_n = \frac{1}{2n} \to 0$ ולכן ההתכנסות אכן במידה שווה.
*הערה: כל עוד לא אמרו לי מפורשות באיזה קבוצה A אני, נוכל להניח כי $A = \mathbb{R}$.
*נזכור כי גזירות $\Longleftarrow$ רציפות.
*כשמוצאים קיצון נרצה לאסוף חשודות: את הקצוות הנקודות שהנגזרת לא מוגדרת וכן הנקודות שהנגזרת מתאפסת בהם.
*אם f וכן f_nגזירות עדיין לא בהכרח מתקיים $f'_n \to f'$. למשל - עבור $f_n(x) = \frac{sin(9nx)}{en}$ מתכנסת במ"ש ל$f(x) = 0$ בכל $\mathbb{R}$. שתי הפונקציות גזירות אך $f'_n = \frac{9ncos(9nx)}{en}$ לא מתכנסת לאפס.

-

משפט: תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ ב-A, כולן גזירות. נניח כי מתקיימים התנאים הבאים -
א. קיימת נקודה x_0 שבה הסדרה $f_n(x_0)$ מתכנסת
ב. קיימת פונקציה g כך שסדרת הנגזרות מתכנסת אליה במ"ש: $f'_n \rightrightarrows g$.
אזי, קיימת f כך ש$f_n \rightrightarrows f$ וכן $g = f'$..
(כלומר, אם סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש, אזי הפונקציה אליה מתכנסת סדרת הנגזרות היא הקדומה של g וכן גם המקורית מתכנסת במ"ש).

-

משפט: אם $f_n \rightrightarrows f$ וכן f_n אינטגרביליות, אזי f אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int_a^x f_n(t)dt \to \int_a^x f(t)dt$$

טורים של פונקציות

מוטביציה: מכירים טורים, מכירים פונקציות - אוהבים לשלב הכל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

הגדרה: בהינתן סדרת פונקציות $f_1(x), f_2(x), ...$ נסמן את הסס"ח

$$S_N(X) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

הטור מתכנס אם הסס"ח מתכנסת.ואת הפונקציה הגבולית של סדרת הסכומים החלקיים (סס"ח):

$$lim_{N\to\infty} S_N(x) = S(X)$$

היא סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (כמובן, לא עבור כל x הסדרה תתכנס. ראה ערך טור גאומטרי לדוגמה).
קבוצת הערכים עבורו הטור מתכנס נקראת תחום ההתכנסות של הטור.
מינוח: נאמר כי הטור $S(X)$ מתכנס במ"ש אם הסס"ח $S_N(x)$ מתכנסת במ"ש.

תזכורת מבחני התכנסות לטורים (שימושי גם כאן כי־למה לא?):

1. אם $lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$ אזי הטור מתבדר.
2. השוואה והשוואה גבולית ־ כמו האינטגרלים שלנו למעלה.
3. מנה. מסמנים $L = lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ ואם $L > 1$ מתבדר ואם $L < 1$ אזי הטור מתכנס בהחלט.
4. שורש. נסמן $L = lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ואם $L > 1$ מתבדר ואם $L < 1$ אזי הטור מתכנס בהחלט.
5. עיבוי. אם a_n מונו יורדת, אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.
6. לייבניץ, אם $a_n \to 0$ מונו יורדת אזי הטור $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.

דוגמאות טכניות:

1. עבור $S_N(x) = x^n$ הפונקציה הגבולית הינה $\frac{1}{1-x}$ ויש התכנסות בקטע $(-1,1)$.
2. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור הבא

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$$

פתרון: זו יכלה להיות שאלה בקורס הקודם, עבור אילו ערכי x (פרמטר) הטור מתכנס. נשתמש במבחן המנה (כי עצרת.....)

$$L = lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n x^n}{n!}} = lim_{n\to\infty}\frac{2^n * 2 * x^n * x * n!}{x^n 2^n n!(n+1)} = lim_{n\to\infty}\frac{|2x|}{n+1}$$

נראה כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $L = 0$ ולכן תחום ההתכנסות שלנו הוא כל $\mathbb{R}$.

3. איך נמצא התכנסות במ"ש?

א. לפי ההגדרה, נבדוק האם $d_N \to 0$ כאשר $d_N = sup_{x\in I}|S(X) - S_N(X)|$

ב. אם הפונקציות $f_n(x)$ רציפות והטור $S(X)$ הוא פונקציה לא רציפה אזי הטור לא מתכנס במ"ש.

ג. להעזר במשפט ויירשטראס ־ אם קיים טור מספרים מתכנס $\sum a_n$ כך ש $|f_n(x)| \le a_n$. לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, אזי הטור מתכנס במידה שווה.

דוגמאות:

א. קבע אם הטור מתכנס במ"ש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n!x)}{n^3+n+1}$$

בקטע $[-2\pi, 2]$

פתרון: נראה כי לכל x בקטע ולכל n מתקיים $sin(n!x) \le 1$ וכן ניתן להגדיל את המכנה ולקבל

$$|\frac{sin(n!x)}{n^3+n+1}| \le \frac{1}{n^3+n+1} \le \frac{1}{n^3}$$

הטור $\sum\frac{1}{n^3}$ הוא טור מתכנס, הוא טור מספרים שאינו תלוי באיקס (ולכן הקטע אינו רלוונטי), מכאן לפי משפט ויירשטראס ־ הטור המקורי מתכנס במ"ש.

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^4+x^2}{nln^2(n)}$$

בקטע $[-7,2]$.

כעת קשה לחסום את הדברים ו"להפטר" מהאיקס.

בשביל להשתמש בויירשטראס ־ אנחנו צריכים למצוא טור מספרים מתכנס מצד אחד וכן גדול מהטור שלנו. איך נדע על איזה חסם להסתכל? בואו ננסה להסתכל על המקסימום שלה, החסם מלמעלה(סופרימום). נרצה $a_n = sup|f_n(x)|$. מהו הערך המקסימלי של $x^4 + x^2$ בקטע? נגזור ־

$$4x^3+2x=0 \Rightarrow x(4x^2+2)=0 \Rightarrow x=0$$

ב$x=0$ כלומר $(0,0)$ יש קיצון (מינימום - ע"י גזירה שניה), ולכן נסתכל על הקצוות.
ב$x=2$ נקבל $2^4+2^2=20$
ועבור $x=-7$ נקבל $(-7)^4+(-2)^2=2450$
ולכן נקבל שלכל n ולכל $x \in I$

$$|\frac{x^4+x^2}{nln^2(n)}| \leq \frac{2450}{nln^2(n)}$$

כעת צריך לבדוק האם הטור מימין מתכנס. שקול להראות האם הטור $\frac{1}{nln^2(n)}$, נשתמש במבחן העיבוי - אכן מונוטונטית יורדת ל-0. וכן הטור

$$2^n\frac{1}{2^nln^2(2^n)}=\frac{1}{(nln2)^2}=\frac{1}{ln^2(2)}\sum\frac{1}{n^2}$$

הטור הזה אכן מתכנס, ולכן גם הטור $\sum\frac{1}{nln^2(n)}$ ולכן גם הטור $\sum\frac{2450}{nln^2(n)}$ ולכן לפי משפט ויירשטראס - הטור שלנו מתכנס במ"ש.
ג. נתבונן בטור הבא בקטע $(0,\pi)$ - האם מתכנס במ"ש? (נראה ניסוי וטעייה שידגים את כל השיטות)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sinx}{(1+x)^n}$$

פתרון: אם היינו מנסים לחסום בעזרת הסינוס, היינו מקבלים

$$|\frac{sinx}{(1+x)^n}| \leq \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{(1+0)^n}=1$$

שזה מתבדר. זהו לא קטע סגור ולכן אי אפשר לחפש מקסימום אלא sup. הפונקציה בפנים רציפה ולכן הsup יהיה בקצוות או בנקודות שהנגזרת מתאפסת. בואו נגזור-

$$\frac{cosx(1+x)^n-sinx*n*(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}=0$$

$$cos(x)*(1+x)-nsinx=0$$

איך נפתור משוואה כזו? גם טריגו וגם פולינום..... מי שיודע לפתור שילך למזכירות.
טוב - גם זה לא עבד לנו.
עם זאת, אולי את הסכום שלנו נוכל לחשב עם הנוסחה לסכום הנדסי. נראה כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinx}{(1+x)^n}=sinx\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+x})^n$$

כעת, אנו צריכים לבדוק שאכן מתקיים $-1 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$, ובכן כיוון ש

$$0 < x < \pi$$

$$1 < x+1 < \pi+1$$

$$1 > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{\pi+1}$$

ובפרט מקיים את הגדרת הסכום ההנדסי. מכאן

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+x})^n = \frac{1}{1-(\frac{1}{1+x})} = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$$

כלומר!

$$S(X) = \frac{(x+1)sinx}{x}$$

בקטע שלנו ־ הפונקציה הנ"ל כן רציפה (אם לא הייתה רציפה, היינו מסיימים ואומרים שההתכנסות אינה במ"ש).
אם $x=0$ היה בקטע, היינו מקבלים שההתכנסות אינה במ"ש כי זו אינה רציפה והיינו מסיימים.
כלומר,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{sinx}{(1+x)^n}$$

ולכן

$$S(0) = 0$$

מכאן, עבור הקטע $[0,\pi)$ נקבל

$$S(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{(x+1)sinx}{x} & 0<x<\pi \\ 0 & x=0 \end{array} \right\}$$

כלומר איננה רציפה ושם איננה במ"ש.. מדוע לא רציפה? $S(0)=0$ ואילו $lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)sinx}{x} = lim_{x\to 0+}1*(0+1) = 1$.
האינטואיציה היא ־ שהפונקציה איננה מתכנסת במ"ש. מדוע? אם נקודה אחת הופכת את זה ללא במ"ש, גם בלעדיה זה לא יהיה במ"ש. כלומר ההתכנסות במ"ש הינה גלובלית ולא נקודתית. כעת צריך להוכיח את זה ־ נב"ש כי בקטע $(0,\pi)$ הטור כן מתכנס במ"ש. לפי ההגדרה כלומר

$$sup_{x\in(0,\pi)}|S(x)-S_N(x)| \to 0$$

נראה כי(שימו לב לתחום פתוח סגור),

$$sup_{x\in[0,\pi)}|S(x)-S_N(x)| = max\{sup_{x\in(0,\pi)}|S(x)-S_N(x)|, |S(0)-S_N(x)|\}$$

ראינו כי $S(0)-S_N(0)=0-0=0$, זה לא המקסימלי. כלומר

$$sup_{x\in[0,\pi)}|S(x)-S_N(x)|=sup_{x\in(0,\pi)}|S(x)-S_N(x)|\to 0$$

בסתירה, כי בקטע שכולל את אפס אין התכנסות במ"ש.
סה"כ התרגיל הארוך הזה נגמר - אין התכנסות במ"ש.

משפטים על טורי פונקציות

S_Nהיא סכום סופי ולכן אם f_n רציפות/אינטגרביליות/גזירות, גם S_N רציפות/אינטגרביליות/גזירה וכן מתקיים:

$$\int S_N=\int\sum_{n=1}^{N}f_n(x)=\sum_{n=1}^{N}\int f_n(x)$$

$$(\sum_{n=1}^{N}f_n(x))'=\sum_{n=1}^{N}f_n'(x)$$

ולכן ננסח את המשפטים הבאים (מגיעים מעולם סדרות הפונקציות)
תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות. נתבונן בטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. נניח שהטור מתכנס במ"ש. כלומר, $S_N(x)\rightrightarrows S(X)$.
(סס"ח שואפת לפונקציה הגבולית) כך ש-
1. אם f_n רציפות, אזי גם $S(X)$ רציפה.
2. אם f_n אינטגרביליות, אזי $S(X)$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int S_N(x)\to\int S(x)$$

(נראה כי האינטגרל משמאל הוא אינטגרל סופי, ומימין אנסופי!)

$$\int\sum_{n=1}^{N}f_n(x)\to\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

(המשך) נראה כי - שקול ל

$$\sum_{n=1}^{N}\int f_n(x)\to\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)$$

ולכן.....

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)dt=\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)dt$$

זה נקרא אינטגרציה איבר איבר. כלומר, במקום לחשב את האינטגרל של הסכום האנסופי, ניתן לעשות אינטגרל על כל איבר ולסכום את התוצאות! זה ממש לא טריוויאלי בסכומים אנסופיים.
דוגמה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -ln|1-x|$$

ואם נציב למשל $x=-1$ נקבל כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -ln2$$

הנה טור לייבניץ שלנו. סכום טור לייבניץ הוא $-ln2$.
ג. אם S'_N (טור הנגזרות f'_n) מתכנסת במ"ש, וכן קיימת נקודה x_0שבה הטור שלנו $\sum f_n(x)$ מתכנס, אזי ניתן לבצע גזירה איבר איבר . כלומר־

$$S'_N(x) \to S'(X)$$

וכן אם $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס במ"ש והטור המקורי מתכנס בנקודה כלשהי אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))'$$

(גזירה איבר איבר. ממש ממש לא טריוויאלי בסכום אינסופי.)
דוגמה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נכפול בx את שני הצדדים

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$$

ד. אם הפונקציות $f_n(x)$ רציפות והטור $S(X)$ הוא פונקציה לא רציפה, אזי ההתכנסות לא במ"ש.

התכנסות במידה שווה - איך מוצאים האם אכן טור מתכנס במ"ש וניגשים לשאלות?

א. לפי ההגדרה, נבדוק האם $d_N \to 0$ כאשר $d_N = sup_{x\in I}|S(X) - S_N(X)|$ - לא כדאי!

$$d_n = sup_{x\in I}|\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)| = sup_{x\in I}|f_1(x) + ... + f_n(x) - f_1(x) - ..f_n(x) - f_{n+1} - ....| = sup_{x\in I}|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)|$$

נזכיר ונעיר כי את השארית שנשארה בפנים נוכל לסמן $r_N(x)$ וזוהי השארית (או זנב הטור). כמו כן טור מתכנס אמ"מ $r_n \to 0$.
דוגמה חשובה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} x \in (-1,1)$$

בשביל לבדוק האם אכן טור זה מתכנס במ"ש נבדוק

$$sup_{x\in(-1,1)}|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| = sup_{x\in(-1,1)}|\frac{x^{N+1}}{1-x}| = \infty$$

ולכן לא מתכנס במ"ש! לעומת זאת אם היינו מסתכליםמ בקטע $[0,\frac{1}{9}]$ כן היינו מתקבלים התכנסות במ"ש..... (קל לראות)

ב. אם הפונקציות $f_n(x)$ רציפות והטור $S(X)$ הוא פונקציה לא רציפה אזי הטור לא מתכנס במ"ש.
ג. להעזר במשפט ויירשטראס
משפט ויירשטראס - יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות. אם קיים טור מספרים (ללא איקס) מתכנס $\sum a_n$ כך ש

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$, אזי טור הפונקציות מתכנס במידה שווה.
הכיוון של - האם קיים טור שמתכנס במ"ש אך לא קיים טור מספרים מתכנס שגדול ממנו - לא נכון!
נתבונן בטור הבא - כאשר הפונקציה היא תמיד קבועה

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

מדוע מתכנס במ"ש?

$$d_n = sup_{x\in\mathbb{R}}|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}|| = |\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}| \to 0$$

מדוע הורדנו את הsup? זו פונקציה קבועה! הsup הוא היא בעצמה. ומדוע שואף לאפס? כי מתכנס(אפיסה כפול חסומה) והשארית כפי שהערנו מעלה ־ שואפת לאפס.
מדוע לא קיים אחד מתכנס שגדול ממנו?
אם $|f_n(x)| \le a_n$, נקבל $\frac{1}{n} \le a_n$, הטור ההרמוני כמובן מתבדר ומהשוואה לא יתכן כי a_nיתכנס ־ אלא בהכרח יתבדר.
*הערה: אינטואיטיבית, מההתכנסות של a_n מקבלים התכנסות של $|f_n(x)|$ וזו גוררת התכנסות במ"ש של $\sum f_n(x)$ ולכן!!!!!! התכנסות בהחלט של הטור (כלומר, הטור מתכנס עם ערך מוחלט) $\Leftarrow$ הטור מתכנס במידה שווה.
*הערה ־ כל טור מספרים רגיל ללא x שהוא מתכנס ־ כמו בדוגמה כאן מעלה, מתכנס במידה שווה כי השארית תמיד תשאף לאפס כלומר $d_n \to 0$.
*הערה ־ מהדוגמה לעיל, לא ניתן להשתמש בויירשטראס כדי להוכיח שטור לא מתכנס במ"ש.

טורי חזקות

הגדרה: טור פונקציות מהצורה $\sum_{i=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ כאשר a_n אינו תלוי בx, נקרא טור חזקות סביב a.
גם הטור ההנדסי הינו טור חזקות. למשל $a_n = 1$ וכן $a = 0$ יתן $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
לדוגמה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

גם כאן זהו טור חזקות, למרות שהמעריך הינו $2n$ ולא n. הרי ניתן לכתוב את הטור ככה ־

$$a_n = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & n=2k-1 \\ \frac{(-1)^k}{2k!} & n=2k \end{array} \right\}$$

מסקנה: גם אם המעריך הוא תת סדרה של n, זהו עדיין טור חזקות כי ניתן לכתוב אותו בצורה שחלק מהמקדמים אפסים.

תחום ההתכנסות של טור חזקות:

תחום ההתכנסות של סדרת פונקציות הוא קבוצת ערכי הx עבורם הסדרה מתכנסת (נקודתית).
טענה: יהי $\sum a_n(x-a)^n$ טור חזקות. אזי, תחום ההתכנסות של הטור יכול להיות אחד מבין השלושה הבאים:
1. כל $\mathbb{R}$. למשל ־ $\sum \frac{x^n}{n!}$ (באמצעות מבחן המנה־

$$L = lim \frac{\frac{x^{n+1}}{n!n+1}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \to 0$$

2. רק בנקודה a־ $\{a\}$. למשל ־

$$\sum n! x^n$$

3. קטע סימטרי סביב a. $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. למשל, עבור הטור הגאומטרי סביב $a=0$ אכן מדובר בהתכנסות בקטע סימטרי $(-1,1)$.

שים לב: נניח שנסתכל על $[0,\infty)$ או $\{2,4\}$ או $[3,9]\cup[13,16]$ לא יכולים להיות תחום התכנסות של טור חזקות.

דוגמאות:
1.

$$\sum sin^{2n}(x)$$

אנחנו יודעים ש$-1 \le sin^2 \le 1$ כלומר כאשר $sinx \neq \pm 1$ כלומר $x \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi k$ ולכן תחום ההתכנסות הינו

$$\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

ולכן איננו טור חזקות.
טענה שקולה: לטור חזקות קיים מספר R שנקרא רדיוס ההתכנסות כך שלכל x בתחום

$$a - R < x < a + R$$

הטור מתכנס, ולכל x המקיים:

$$x > a + R$$

או

$$x < a - R$$

הטור מתבדר.
* למשל בטור ההנדסי $R = 1$.
*אם תחום ההתכנסות הוא כל הממשיים אזי $R = \infty$. אם תחום ההתכנסות הוא נק' בודדת אזי $R = 0$.
*הרעיון המעניין כאן הוא שבטור חזקות ההתכנסות היא רציפה , דהיינו לא תהיה התכנסות בנקודות שונות אלא בקטע רציף (או נקודה בודדת).
טענה: יהי $\sum a_n(x-a)^n$ טור חזקות. נניח שהטור מתכנס בנק' $x = b$, אזי הטור מתכנס בכל נקודה $X = c$ המקיימת $|a - c| < |a - b|$.
דהיינו, הטור מתכנס בכל נקודה שמרחקה מהמרכז קטן יותר ־ אין "חורים" באמצע.
לפי אלעד ־ טורי חזקות, אם הם מתכנסים, בפרט זה התכנסות בהחלט ולכן התכנסות במידה שווה. לכן אפשר לגזור ולטנגרל את האגפים השונים.

מציאת רדיוס ההתכנסות

בהינתן טור חזקות $\sum a_n(x-a)^n$
1. הוכחת מבחן המנה:

$$L = lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n}| = |(x-a)| * lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = m * (x - a)$$

וכעת אם זה קטן מ־1 הטור מתכנס, ואם גדול מ־1 מתבדר. דהיינו,
$|x - a| < \frac{1}{m}$ אמ"מ טור מתכנס, ו$|x - a| > \frac{1}{m}$אמ"מ טור מתבדר.
לכן ניתן לרשום:
הטור יתכנס אמ"מ $a - \frac{1}{m} < x < a + \frac{1}{m}$, ומכאן מגיע מבחן המנה שלנו:

$$a - \frac{1}{lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|} < x < a + \frac{1}{lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$$

ולכן $R = \frac{1}{lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$.
דוגמה:
נתבונן בטור

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{70^n}{n^{70}}(x-70)^n$$

$$lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = lim_{n\to\infty}\frac{70^n * 70 * n^{70}}{(n+1)^{70}70^n} = 70lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{70} = 70$$

$$R = \frac{1}{lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \frac{1}{70}$$

מכאן שתחום ההתכנסות יהיה

$$70 - \frac{1}{70} < x < 70 + \frac{1}{70}$$

מה קורה בקצוות? $x = 70 + \frac{1}{70}$ נבדוק התכנסות באופן ידני, יש להציב בטור ולראות אם מקבלים טור מתכנס או שלא.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{70^n}{n^{70}}(70 + \frac{1}{70} - 70)^n = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{70^n}{n^{70}}(\frac{1}{70})^n = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^{70}}$$

שכמובן מתכנס כי $p = 70 > 1$
באופן דומה, $x = 70 - \frac{1}{70}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{70^n}{n^{70}}(70 - \frac{1}{70} - 70)^n = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{70^n}{n^{70}}(\frac{-1}{70})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{70}}$$

וגם כאן, מתכנס לפי לייבניץ'.
סה"כ, תחום ההתכנסות של הטור:

$$[70 - \frac{1}{70}, 70 + \frac{1}{70}]$$

מבחן שורש:

מאותם שיקולים, ניתן להגיע לכך ש

$$R = lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

אם נקבל שהגבול של המנה/שורש הוא אפס, אזי

$$R = \frac{1}{"0"} = \infty$$

אם הגבול הוא אנסוף, אזי $R = 0$.

בעיה:

נתבונן בטור איתו פתחנו.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

כל מקדם עם אינדקס אי זוגי הוא אפס. לכן וודאי שלמנה אין גבול. מה נעשה?
1. ננסח יותר טוב את המנה/שורש - עם גבול עליון/תחתון.
2. ניתן לנסח דרך מעט שונה למציאת רדיוס עבור טור שבו המעריך איננו n אלא bn. כאשר bn תת סדרה של n: נעשה

$$\frac{1}{R} = lim_{n\to\infty} \sqrt[bn]{|a_n|}$$

התכנסות במידה שווה של טור חזקות

ראינו כבר כי אם טור החזקות $\sum a_n(x-a)^n$ מתכנס בb, אזי הוא מתכנס בהחלט בכל נקודה c כך ש $|c-a| < |b-a|$
כך, אפשר לומר כי בקטע סגור מהצורה $[a-r, a+r]$ כאשר $r < R$, הטור מתכנס בהחלט.
לפי ויירשטראס, התכנסות בהחלט גוררת התכנסות במ"ש. לכן אפשר לומר שבכל קטע סגור בתחום ההתכנסות שלא מכיל את הקצוות, הטור מתכנס במ"ש.
מכאן שעל טור חזקות, אין צורך לנמק את הפעולות (גזירה או אינטגרציה איבר איבר, כפל באיקס וכדומה) אם אנחנו לא נמצאים בקצוות. כלומר - לקטע סגור שמוכל בתחום ההתכנסות ניתן לבצע כל אלו באופן "אוטומטי". עם כן - לאחר שעשינו גזירה / אינטגרציה - קיבלנו טור אחר. מי אמר שעל הטור הבא הזה ניתן להמשיך לגזור ולטנגרל? הטענה - גזירה ואינטגרציה וכפל באיקס וכדומה לא משנה את תחום ההתכנסות, ולכן ניתן להמשיך עם הפעולות גם עם הטור החדש שקיבלנו.
טענה: גזירה/אינטגרציה איבר איבר של טור חזקות לא משנה את תחום ההתכנסות שלו. לכן ניתן לבצע איבר איבר שלא על הגבולות כמה פעמים שנרצה.
טענה: אם הטור המקורי מתבדר בקצה מסוים, אז טור הנגזרות מתבדר שם גם.
טענה: אם הטור המקורי מתכנס בקצה מסויים, אזי טור האינטגרלים גם הוא מתכנס שם.
(ומה שלא נאמר - לא נכון. כלומר,
אם טור מקורי מתבדר, יש מצב שטור האינטגרלים שלו מתכנס. וכו')
למשל, הטור ההנדסי מתבדר בקצוות, אך

$$\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

כן מתכנס ב$x=-1$, כי $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ מתכנס לפי לייבניץ'.
טענה: טור חזקות מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור שמוכל בתחום ההתכנסות שלו, גם אם הקטע כולל את הקצוות!

טורי טיילור

דרך תנאים מסויימים שנדון בהם בהמשך ניתן למצוא טור חזקות ששווה לפונקציה, כך ש-

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

טור זה נקרא טור טיילור. כאשר $a=0$ זה נקרא טור מקלורן.
אנחנו נצמצם את הדיון לפונקציות שגזירות אנסוף פעמים בa (כל האלמנטריות כאלו).
תרגיל לדוגמה: פתח את sin^2x לטור טיילור סביב 0.

$$sin^2x = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

איך נקבל טור של $cosx$? נגזור את הטור של $sinx$ איבר איבר!

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} * (2n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$sin^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - ..... + ..) = \frac{1}{2}(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - ... + ...)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$sin^2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

ותחום ההתכנסות יהיה כל $\mathbb{R}$.
תרגיל שני: פתח את $\frac{1}{x+17}$ לטור חזקות סביב 0.
מזכיר לנו את הטור ההנדסי. נרצה משהו בסגנון של $\frac{1}{1-t}$ ולכן

$$\frac{1}{x+17} = \frac{1}{17-(-x)} = \frac{1}{17} * \frac{1}{1-(\frac{-x}{17})} = \frac{1}{17}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-x}{17})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(17)^{n+1}}$$

השתשמנו בנוסחה של הנדסי, הוא מתכנס כאשר $|t| < 1$ ולכן אצלנו

$$-1 < \frac{-x}{17} < 1$$

$$-17 < x < 17$$

זהו תחום ההתכנסות.

למה אנחנו צריכים את זה? בתוך תחום ההתכנסות אפשר לשחק עם הטור כרצוננו. כלומר גזירה איבר איבר, אינטגרציה איבר איבר וכדומה.

איך נמצא את המקדמים $a_0, a_1, ...a_n$? נראה כי

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ...$$

$$a_0 = f(a)$$

נגזור ונקבל

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + ////$$

$$a_1 = f'(a)$$

ושוב:

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2$$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

ושוב:

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x-a) + ..$$

$$f'''(a) = 6a_3$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

ומכאן שניתן לראות (תוכיחו באינדוקציה.......) כי

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

טענה ־ טורי טיילור המוכרים:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

טענה: טור טיילור הינו יחיד.
טענה: הטורים המוכרים מלמעלה מתכנסים בכל $\mathbb{R}$.
הערה: אמנם זו לא התוכנית הראשונה אך במידת הצורך ניתן לנסות ולמצוא את הטור "ידנית" באמצעות הנגזרות והחוקיות מלמעלה כמו שמצאנו לe^x.... לא מומלץ אבל לכו תדעו. למשל לקרב את $\sqrt{2}$ באמצעות הפונקציה $f(x) = \sqrt{1+x}$
הערה: אם אנחנו מכירים פונקציה שגזירה אנסוף פעמים בa ושווה לטור חזקות, אזי בהכרח $f^{(n)}(a) = n!a_n$. למשל ־

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (while|x| < 1)$$

ונרצה למצוא את $g^{(69420)}$ של $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$t = -x^2$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

למה שווה a_k?

$$a_k := \left\{ \begin{array}{cc} (-1)^n & k = 2n \\ 0 & k = 2n-1 \end{array} \right\}$$

ולכן

$$g^{(69420)}(0) = 69420! * (-1)^{69420:2} = 69420!$$

קירובים באמצעות טיילור:

הערה: קירוב באמצעות טיילור הוא טוב רק כאשר a קרוב לx שנרצה להציב. למשל אם נרצה למצוא $\sqrt{80}$, ונפתח טור טיילור של $\sqrt{x}$ סביב 0 זה לא יקדם אותנו. טור סביב 81 למשל, קרוב ל80 ויתן קירוב טוב.
בגדול,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

אזי

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

לחלק הימני נקרא השארית של הטור ("זנב הטור") ונסמנו $R_k(x)$. לחלק השמאלי נקרא פולינום טיילור (של הפונקציה f סביב הנקודה a מסדר k) שמסומן $P_k(x)$.
לדוגמה: $f(x)=e^x$.

$$P_6(x)=\sum_{n=0}^{6}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+..+\frac{x^6}{6!}$$

כאשר הטור מתכנס, השארית שואפת לאפס, כלומר $R_k(x)\to 0$. ככל שנגדיל את k, כך נספק קירוב יותר טוב לפונקציה. כלומר,

$$f(x)\approx P_k(x)$$

כמובן שערכים שונים של x יניבו תוצאות שונות.
אנחנו נקבע מראש מה רמת הדיוק שנרצה. למטרות שונות יהיה רצון לרמת דיוק שונה. כעת נתמודד עם השאלה הבאה ־ אמרו לנו לקרב $\frac{1}{1000}$, כמה איברים בפולינום יש לחשב בשביל לקרב כך בדיוק? הרי כמובן שאפשר לחשב טריליון איברים. בהצלחה..... מה מס' האיברים המינימלי שיש לחשב בשביל להגיע לרמת דיוק שכזו.
יש קשר בין השגיאה לסדר של הפולינום מקלורן/טיילור:
בטור מתחלף $(-1)^n$ אנו יודעים כי $|R_k(x)|\le a_{k+1}$
דוגמה: חשבו את $\frac{1}{e}$ בדיוק של $\frac{1}{900}$.
כמובן ש$f(x)=e^x$.

$$|R_k(x)|\le\frac{1}{900}$$

$$R_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}<\frac{1}{900}$$

$$|R_k(x)|=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!}<\frac{1}{900}$$

מספיק כי $a_{k+1}\le\frac{1}{900}$

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{900}$$

$$900 \leq (k+1)!$$

טענה זו נכונה לכל $k \geq 6$, ולכן עבור $k = 6$ נקבל כי

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{n!}$$

שארית לגראנז'

(מיועד לשארית בטור לא מתחלף): תהי f פונקציה כך שf גזירה $N+1$ פעמים בa. במצב כזה P_N (פולינום טיילור) מוגדר ואז $R_N = f - P_N$. אזי, לכל x קיימת $a < c < x$ כך ש

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

השארית שווה לאיבר הבא בטור, עם הבדל אחד - במונה יש c ולא a. תכלס, סה"כ צריך לדרוש כי f תהיה גזירה בסביבה של a ולדבר על x מהסביבה הזו.

דוגמה: נקרב את $\sqrt{2}$ באמצעות פולינום מקלורן של $f(x) = \sqrt{x+1}$ מסדר 3 , ונעריך את השגיאה.

זו לא פונקציה מהידועות. אך אין צורך לחשב פולינום מקלורן כללי אלא מספיק את 4 הנגזרות הראשונות.

$$f^{(0)}(x) = f(x) = f(0) = 1, f^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-1.5} = f(0) = \frac{-1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-2.5} = f(0) = \frac{3}{8}$$

ולכן

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

לכן אם נרצה לקרב את $\sqrt{2}$ נציב $x = 1$ ונקבל

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16}$$

כעת נעריך את השגיאה: לפי לגראנז' קיימת c בין x לבין a כך ש $R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$. יודעים הכל פרט ל-$c$. $a = 0$ כי מקלורן, $x = 1$ כי הצבנו בסוף $x = 1$ וכן $N = 3$, לכן נרצה להעריך את

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{24}(1-0)^4 = \frac{f^{(4)}(c)}{24}$$

אם נחשב נגזרת רביעית נקבל $f'(c) = \frac{-15}{16}(c+1)^{-3.5}$

$$R_3(x) = \frac{\frac{-15}{16}(c+1)^{-3.5}}{24}$$

כמו כן $a < c < x$ ולכן $0 < c < 1$. נרצה לחשב את

$$R_3(1) = |\frac{\frac{-15}{16}(c+1)^{-3.5}}{24}| = \frac{15(c+1)^{-3.5}}{16 * 24} = \frac{5}{128(c+1)^{3.5}}$$

נרצה חסם הדוק מלמעלה לשגיאה, מדובר בפונקציית שגיאה שיורדת (קל לראות) ולכן $c = 0$ נותן את החסם העליון לשגיאה, ולכן סה"כ השגיאה תהיה

$$R_3(1) = \frac{5}{128(0+1)^{3.5}} = \frac{5}{128}$$

כלומר סה"כ קיבלנו כי $\sqrt{2} = \frac{23}{16}$ עם שגיאה $\frac{5}{128}$.
אלעד יותר מרמז שבמבחן הוא יבקש מאיתנו לחשב את הנגזרות באופן כללי (מקלורן) של $\sqrt{x+1}$. והתשובה היא

$$f^{(n)}(c) = \frac{1 * 3 * 5 * 7 * ..... * (2n-3)}{2^n}(c+1)^{\frac{-2n-1}{2}}$$

הערה: אפשר להשתמש תמיד בלגראנז' לא רק בטור שאינו מתחלף אלא גם במתחלף.

אנליטיות

נניח כי f גזירה אנסוף פעמים. אם f שווה לטור חזקות, אזי הוא בהכרח טור טיילור. (ראינו את זה שגזרנו כל פעם וקיבלנו את המקדמים). התכונה הזו - "שווה לטור חזקה" נקראת אנליטיות. כלומר - פונקציה אנליטית היא פונקציה ששווה לטור חזקות.
אם כן,

$$f(x) = P_N(x) + R_N(x)$$

כאשר $N\to\infty$ הP_N שואף לטור וf נשארת f, ולכן במצב זה בשביל "f=טור" נרצה כי $R_N(x)\to 0$.
אם כן, $R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$. אם לא היה f היינו מקבלים מעריכית חלקי עצרת ־ העצרת מנצחת ושואפים לאפס. אם כן, בשביל ש$R_N(x)$ ישאף לאפס, נרצה כי כל הנגזרות של f יהיו חסומות, ואז נקבל אפיסה כפול חסומה שווה 0. לכן ננסח:
כלל טיילור: אם כל הנגזרות חסומות בA, אז בוודאות הפונקציה שווה לטור שלה בA.
למשל, עבור $f(x)=sinx$ הנגזרות תמיד חסומות (פעם sin פעם cos) תמיד מתקיים $|f^{(N+1)}(c)|\leq 1$ ולכן הפונקציה שווה לטור שלה, בכל $\mathbb{R}$.
אם כך נשאל מה באשר לe^x? שהרי איננה חסומה. במצב כזה, מעריכית כפול מעריכית עדיין יתן מעריכית ואז חלקי עצרת תנצח. הסבר שקול ־ הנגזרת תמיד תהיה $f^{(N+1)}(c)=e^c$, לכן לכל c נקבל $|f^{(N+1)}(c)|\leq e^c$ ולכן תמיד הנגזרות חסומות ע"י הנגזרת בנק' גדולה מהם.
עם זאת, לא כל פונקציה שגזרה אנסוף פעמים שווה לטור שלה. למשל:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{cc} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{array}\right\}$$

ניתן לחשב לפי הגדרה.

$$f'(0)=lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

נציב $t=\frac{1}{h}$ ונקבל

$$lim_{t\to\infty}te^{-t^2}=0$$

לפי סדרי גודל. כלומר הנגזרת

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{cc} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{array}\right\}$$

באופן כללי

$$f^{(n)}(x)=\left\{\begin{array}{cc} P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{array}\right\}$$

כאשר מדובר באיזשהו פולינום ככופל. כלומר סה"כ הפונקציה ב0 גזירה אנסוף פעמים. כך:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$$

שכן כל הנגזרות באפס הן אפס, ואין שום סביבה של 0 בה הטור e הזה שווה לפונקציה 0.

תרגיל טוב (הופיע בתרגול + במבחנים בעבר)

חשב את האינטגרל $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ בדיוק של 10^{-4}.
פתרון: ראשית נמצא את הפונקציה כסכום. נראה כי $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, ולכן

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$

כעת,

$$\int_0^1 e^{-t^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} [_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)*(n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!(2n+1)}$$

כלומר האינטגרל שווה לטור. נראה שמדובר בטור מתחלף ־ עם סדרה שיורדת לאפס ־ לכן מתכנס לפי לייבניץ. כלומר מתקיים $|R_k| \leq |a_{k+1}|$. נחפש k מינימלי כך ש$|a_{k+1}| \leq 10^{-4}$ (כלומר שארית הטור גם כן תהיה קטנה ממנו). ובכן ־

$$|a_{k+1}| = \frac{1}{(k+1)!(2k+3)} \leq \frac{1}{10^4}$$

$$10^4 \leq (k+1)!(2k+3)$$

מכאן צריך לבדוק ידנית. $k=4$ יתן $5! * 11 = 1320$. לא טוב. $k=5$ יתן $6! * 13 = 9360$, מתקרב. $k=6$ יתן $7! * 17 = 85,680$ ־ וזה כבר מקיים את זה. כלומר $k=6$ יתן הדרוש, ולכן לקירוב האינטגרל לפי דרישות השאלה נצטרך

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{(n)!(2n+1)} = number...$$

פונקציות בשתי משתנים

נדבר על פונקציות שמקיימות $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. כמובן שאפשר להכליל את הרעיון ל$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. בשביל לצייר פונקציה של משתנה אחד נזדקק לשני מימדים, עבוא פונקציות של שני משתנים, נזדקק שלושה מימדים. שלושה משתנים? ארבעה מימדים. וכן הלאה. כלומר לצייר פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נזדקק $n+1$ מימדים. לא נזדקק לצייר גרפים של פונקציות כאלו שכן זה קשה מחשבתית.

גבולות ורציפות

במשתנה אחד, גבול שווה L כלומר הגבולות משני הצדדים שווים. אצלנו, בכל מסלול שבו נתקדם אל הנקודה נקבל את אותו הגבול. באופן כללי, גם כאשר f פונקציה של כמה משתנים

$$lim_{x \to a} f(x) = L$$

(x, a) וקטורים, פירושו שבכל מסלול שמתקרבים לנקודה מקבלים את אותו הגבול. עם זאת נראה כי יש לנו אנסוף דרכים להגיע לאותה נקודה (ולא רק 2 משמאל ומימין כמו בפונקציות רגילות). לפיכך, הרבה יותר קל להוכיח שאין גבול. להראות שאם ניקח שני דרכים שונים, נקבל גבולות שונים. ואז אין גבול.

דוגמאות:

.1

$$lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

אינטואיטביית, במשתנה אחד: אם המעלה של המונה גבוהה יותר שמתקרבים ל0 אזי הגבול הוא אפס . למשל $lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}$. אך אם קטנה יותר, אזי לא קיים. איך נתחיל לשלול גבול? נציב $x=y$ או $y=x$ וננסה לשלול, נוכל גם להציב e^x, x^2 וכדומה.
במסלול $y=0$ נקבל

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(y=0)\Longrightarrow lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(x=0)\Longrightarrow lim_{y\to0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

גבולות שונים במסלולים שונים, ולכן אין גבול.
2. $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$. גם כאן נוכל להפריך

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}(y=0)\Longrightarrow lim_{x\to0}\frac{x*0}{x^2+0^2}=0$$

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}(x=y)\Longrightarrow lim_{y\to0}\frac{y^2}{2y^2}=\frac{1}{2}$$

יכולנו להציב $x=0$ אבל היינו מקבלים גם אפס, לכן יש לנסות מסלול אחר.. קיבלנו גבולות שונים במסלולים שונים ולכן אין גבול.
3. $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^6+y^2}.$.

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^6+y^2}.(y=0)\Longrightarrow lim_{x\to0}\frac{x^30}{x^6+0}=0.$$

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^6+y^2}.(y=x^3)\Longrightarrow lim_{x\to0}\frac{x^6}{x^6+x^6}=\frac{1}{2}$$

ושוב, אין גבול.

--
רציפות כאן, מוגדרת בדיוק כמו במשתנה אחד. f רציפה בa אם

$$lim_{x,y\to a}f(x,y)=f(a,a)$$

וכרגיל, אם אפשר להציב נציב. למשל $lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)}\frac{x^2+y+z}{sinx+y^2+z^2}=\frac{0^2+1+0}{sin0+1^2+0^2}=1$.
כמובן, אם הצבה תתן לנו גבול של משתנה אחד נציב. למשל (כאשר $||x||$ זה הנורמה שלו)

$$lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{-1}{||x||^2}}}{||x||^2}=lim_{(x_1,...x_n)\to(0,...,0)}\frac{e^{-\frac{1}{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}}{x_1^2+...+x_n^2}=lim_{t\to0}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}=_{u=\frac{1}{t}}$$

$$=lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}=0$$

הוכחת קיום גבול

אינטואיטיבית, יש גבול כאשר מעלת המונה גבוהה יותר. במצב כזה הוא יהיה אפס. כדי להוכיח זאת נוכל להשתמש בסנדוויץ'. לדוגמה ־

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

צד אחד קל ־ נשים ערך מוחלט. אם ערך מוחלט יתכנס גם ברגיל. מהצד השני, נסתכל על ביטוי גדול יותר. נשתמש באי שוויון המשולש

$$0\leq|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}|=|\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{x^2+y^2}|\leq|\frac{x^3}{x^2+y^2}|+|\frac{y^3}{x^2+y^2}|\leq|\frac{x^3}{x^2}|+|\frac{y^3}{x^2}|=|x|+|y|\to 0$$

סה"כ לפי סנדוויץ', הגבול הוא 0.
דוגמה נוספת: $lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^5+z^6}{x^4+z^4}*sin(y+z+2)$

$$lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^5+z^6}{x^4+z^4}*sin(y+z+2)=sin(2)*lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^5+z^6}{x^4+z^4}$$

$$0\leq|\frac{x^5+z^6}{x^4+z^4}|=|\frac{x^5}{x^4+z^4}+\frac{z^6}{x^4+z^4}|\leq|\frac{x^5}{x^4+z^4}|+|\frac{z^6}{x^4+z^4}|\leq|\frac{x^5}{x^4}|+|\frac{z^6}{z^4}|=|x|+z^2\to 0$$

לפי סנדוויץ' קיבלנו 0, לכן סה"כ הגבול הוא $0sin(2)=0$.
דוגמה אחרונה:

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}$$

נשתמש באי"ש הממוצעים ונזכר כי $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, שקול לגמרי להסתכל על $a=x^6,b=y^6$ ואז

$$0\leq|\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}|\leq|\frac{x^6+y^6}{2(x^4+y^4)}|=|\frac{x^6}{2(x^4+y^4)}+\frac{y^6}{2(x^4+y^4)}|\leq|\frac{x^6}{2(x^4+y^4)}|+|\frac{y^6}{2(x^4+y^4)}|$$

$$\leq|\frac{x^6}{x^4}|+|\frac{y^6}{y^4}|=x^2+y^2\to 0$$

נגזרות חלקיות:

נרצה להכליל את מושג הנגזרת לפונקציה של כמה משתנים. אין בפונקציות של כמה משתנים מושג "פשוט" שמכליל את הנגזרת של משתנה אחד. הנגזרת החלקית של f לפי משתנה מסויים x_i מסומנת f_{x_i} ומוגדרת כך:

$$f_{x_i}(a)=lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}$$

נשים לב כי e_i זה אותו וקטור מלינארית. כלומר שגוזרים לפי משתנה מסויימים מוסיפים h לרכיב שמתאים לו. למשל, כשגוזרים פונקציה עם שני משתנים

$$f_x(a,b) = lim_{h\to 0}\frac{f((a,b)+h(1,0)) - f((a,b))}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f((a+h,b)) - f(a,b)}{h}$$

גוזרים פונקציה מפוצלת בנקודת הפיצול לפי ההגדרה. אחרת, נשתמש בחוקי גזירה.
דוגמה:

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x^3-9y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{array} \right\}$$

דרך אחרת לרשום $(x,y)=(0,0)$ היא $x^2+y^2=0$. זו פונקציה מפוצלת לכן נגזור לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f((a+h,b)) - f(a,b)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f((0+h,0)) - f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f((a,b+h)) - f(a,b)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f((0,0+h)) - f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{-9h^3}{h^2}}{h} = -9$$

הערות:
א. אם נגזרת של x קיימת זה לא אומר ששל y קיימת ולהפך. כמובן שאינן חייבות להיות שוות אם שתיהן קיימות.
ב. ייתכן כי פונקציה תהיה לא רציפה בנק' מסויימת, אך ייתכן שהנגזרות החלקיות בנקודה יהיו שוות ואפילו שוות לערך בנקודה, אך זה לא גורר רציפות הפעם (בניגוד לקורס הקודם). כלומר גזירות לא גוררת רציפות.

גזירה לפי חוקי גזירה

כאשר גוזרים לפי משתנה מסויים, מתייחסים אל האחרים כמספרים קבועים.
א. דוגמה ראשונה: $f(x,y) = x^2+y^3+5x^2y$

$$f_x = 2x+10xy, f_y = 3x^2+5x^2$$

ב. דוגמה שנייה: $f(x,y) = ysin(xy)$

$$f_x = ycos(xy)*y = y^2cos(xy)$$

$$f_y = 1*sin(xy) + ycos(xy)*x = sin(xy) + xycos(xy)$$

ג. דוגמה שלישית: $f(x,y) = x^y$

$$f_x = yx^{y-1}$$

$$f_y = (e^{ylnx})' = e^{ylnx}*1lnx = x^ylnx$$

סימון נוסף לנגזרת לפי משתנה x_i בנקודה a היא $f_{x_i}(a)'$ וכן $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. אנחנו נסמן f_x, f_y - אך אם נתקל בתרגילים שנדע.

נגזרות מסדר גבוה:

כמו במשתנה אחד, גם כאן ניתן לגזור יותר מפעם אחת. מכיוון שיש כמה משתנים לגזור לפיהם כי לנו כמה וכמה נגזרות מסדר גבוה.

למשל, לפונקציה $f(x,y)$ יש לכאורה 4 נגזרות חלקיות: $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{yx}$. באופן כללי עבור n משתנים יש $\binom{n}{2}$ נגזרות חלקיות (כולל מקרים $f_{xy} = f_{yx}$).

דוגמה: $f(x,y) = x^2 + y^3 + 5x^2y$. $f_x = 2x + 10xy, f_y = 3y^2 + 5x^2$.

$$f_{xx} = 2 + 10y$$
$$f_{xy} = 10x$$
$$f_{yy} = 6y$$
$$f_{yx} = 10x$$

קיבלנו $f_{xy} = f_{yx}$. משפט שוורץ: אם הנגזרות החלקיות עצמן הן רציפות, אזי סדר הגזירה איננו משנה וניתן לשנותו. כלומר, אם f_{xy}, f_{yx} הן רציפות אזי בהכרח $f_{xy} = f_{yx}$ (ובאלמנטריות קורה כל הזמן).

הערה ־ אם גוזרים סה"כ m פעמים, k_i פעמים לפי המשתנה x_i אזי אפשר לסמן זאת כך: $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \ldots\ldots \partial x_n^{k_n}}$.

הכללת מושג הנגזרת ליותר ממשתנה אחד

הנגזרת התמימה אומרת המון על הפונקציה במשתנה אחד. נסביר איך מכלילים זאת ליותר ממשתנה אחד.

א. הנגזרת מתארת את קצב השינוי הרגעי של הפונקציה ־ אם חיובית פונקציה עולה ואם שלילית פונקציה יורדת. יתר על כן, אם הנגזרת היא 5 אזי העלייה תלולה יותר מאשר נגזרת שהיא 2. נשתמש במושג שנקרא נגזרת כיוונית על מנת להבין את קצב השינוי הרגעי. לפני כן נרשום מה עוד נגזרת עושה.

ב. נגזרת נותנת משיק וקירוב לינארי לפונקציה f בנקודה a. הישר המשיק לגרף הפונקציה שמשוואתו היא $y = f'(x)(x-a) + f(a)$. נשים לב כי הישר המשיק הוא פולינום טיילור מסדר 1. כדי להכליל זאת ליותר ממשתנה אחד ־ נזקק למושג של מישור משיק . (לא נדבר על כך בקורס ככל הנראה)

ג. מבחינה אנליטית, יש קירוב לפונקציה ע"י פולינום ממעלה ראשונה: $f(x) \approx f'(x)(x-a) + f(a)$. כדי להכליל זאת ליותר ממשתנה אחד, נזדקק למושג דיפרנציאביליות.

נגזרת כיוונית

במשתנה אחד, יש בגדול רק כיוון אחד להתקדם בו ־ ימינה. ביותר ממשתנה אחד, מנקודה a ניתן להתקדם באנסוף כיוונים שונים ובכל אחד מהם יכול להיות שינוי אחר על גרף הפונקציה. קצב השינוי מושפע משלושה גורמים ־ פונקציה f, נקודה a וכן הכיוון u בו אנחנו משנים את הפונקציה. (הן a והן u הינם וקטורים). קצב השינוי נקרא הנגזרת הכיוונית של f בנקודה a בכיוון u ומסומן $f_u(a)$.

$$f_u(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu) - f(a)}{h||u||}$$

כאשר $||u||$ זו הנורמה על המכפלה הסטנדרטית. מדוע מחלקים בנורמה? בשביל להתחשב בכיוון בלבד של הוקטור ולא בגודלו. נשים לב שהנגזרת החלקית שדיברנו עליה קודם היא הנגזרת הכיוונית בכיוון e_i.

דוגמה: נחשב את קצב השינוי של הפונקציה $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ בנק' $(0,0)$ בכיוון $(3,4)$.

$$f_{(3,4)}(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f((0,0) + h(3,4)) - f(0,0)}{h\sqrt{3^2+4^2}} = lim_{h\to 0}\frac{f(3h,4h) - 100}{5h} =$$

$$lim_{h\to 0}\frac{100 - 25h^2 - 100}{5h} = lim_{h\to 0} - 5h = 0$$

כלומר, קצב השינוי בנקודה הוא 0. יענו, הפונקציה לא משתנה כשזזים בכיוון זה. כלומר הגרף שטוח ־ מקומית.

גרדיאנט:

מבין אנסוף כיוונים בהם אפשר להתקדם, מהו הכיוון בו הירידה היא התלולה ביותר? (או, העליה היא התלולה ביותר). כך למשל, אפשר לבקש ממחשב להתקרב למינימום של פונקציה שרוצים למזער, גם אם מציאת נקודת הקיצון איננה אפשרית מבחינה אנליטית (כי הפונקציה לא גזירה כי יש לה מיליארד משתנים וכו') - שיטה זו נקראת מורד הגרדיאנט ובלמידת מכונה נלמד על כך.

הגדרה: בהינתן פונקציה f, הגרדיאנט בנקודה a מסומן $\nabla f(a)$ וזהו וקטור שרכיביו הם הנגזרות החלקיות של f בנקודה a. כלומר,

$$\nabla f(a) = (f_{x_1}(a), f_{x_2}(a), ..., f_{x_n}(a))$$

למשל: עבור $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ נקבל

$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y) = (-2x, -2y)$$

תחת תנאים מסויימים עליהם נפרט בהמשך (מספיק נגזרות חלקיות רציפות - פונקציה דפרנציאבילית), אפשר להראות שאת הנגזרת הכיוונית של f בנקודה a ניתן לחשב באופן הבא:

$$f_u(a) = \frac{u * \nabla f(a)}{||u||}$$

כאשר המכפלה הפנימית היא המכפלה הסטנדרטית. הכיוון u שבו העלילה היא התלולה ביותר הוא הגרדיאנט $\nabla f(a)$, ולכן אם נציבו

$$f_u(a) = \frac{\nabla f(a) * \nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} = \frac{||\nabla f(a)||^2}{||\nabla f(a)||} = ||\nabla f(a)||$$

באופן שקול, כיוון u בו הירידה היא התלולה ביותר הוא $-\nabla f(a)$ וקצב השינוי יהיה $f_u(a) = -||\nabla f(a)||$. הוכחת הטענה (בקלות - באמצעות אי שוויון קושי שוורץ).

דפרנציאביליות:

מבוא ואינטואיציה: במשתנה אחד, הנגזרת נותנת קירוב לינארי לפונקציה f, כלומר $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$. כמובן שקול $f'(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. כאשר $x \to a$ הקירוב טוב יותר, ולכן $f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \to 0$. נרצה לדעת האם גם $\frac{f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)}{x-a} \to 0$ שזה יתן לנו האם הקירוב מספיק טוב כלומר כמה מהר זה שואף לאפס.
והתשובה היא כן:

$$lim_{x\to a}\frac{f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)}{x-a} = lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$$

כלומר, נוכל לרשום גם $h = x - a$ ולקבל שאותו קירוב ממעלה ראשונה אותו הנגזרת נותנת - פולינום טיילור ממעלה ראשונה - מקיים

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f'(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

כלומר קיבלנו

$$lim_{x\to a}\frac{R_1(x)}{x-a} \to 0$$

ובאופן כללי גם מתקיים

$$lim_{x\to a}\frac{R_k(x)}{(x-a)^k}\to 0$$

את זה, נרצה להכליל ליותר ממשתנה אחד, אם אכן זה מתקיים - ההפרש בין הפונקציה לבין הקירוב הלינארי שלה שואף לאפס גם אם מחלקם אותו בגורם ממעלה ראשונה - אז הפונקציה נקראת דפרנציבאלית.
הגדרה: תהי f פונקציה, נאמר כי f דפרנציאבילית בנקודה a אם מתקיים

$$lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\nabla f(a)*h}{||h||}\to 0$$

זה אומר, גאומטרית, שבנקודה הזו לפונקציה יש קירוב לינארי. זה אומר שיש כאן הקבלה ל"גזירה" של משתנה אחד. כלומר, במשפטים שהתנאי בהם הוא "גזירה", אנחנו נדרוש כאן "דפרנציאבלית". למשל, כדי שיתקיים $f_u(a)=\frac{u*\nabla f(a)}{||u||}$, אזי הפונקציה צריכה להיות דפרנציאבילית.
דוגמה: האם הפונקציה הבאה דיפ' בנקודה $(0,0)$?

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{array}\right\}$$

נראה כי $h=(h_1,h_2)$ כי יש שני משתנים. נזדקק לערך של f בנקודה, כלומר $f(0,0)=0$. וכן נזדקק לגרדיאנט. בשבילו, נזדקק לנגזרות חלקיות. כיצד נמצא אותם? נגזור לפי הגדרה -

$$f_X(0,0)=lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$f_Y(0,0)=lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

לכן הגרדיאנט, $\nabla f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))=(1,1)$. כעת,

$$lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{f(a+(h_1,h_2)-f(a)-\nabla f(a)*(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2||}$$

$$lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{f((0,0)+(h_1,h_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)*(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2||}$$

$$lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{f(h_1,h_2)-(1,1)*(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-h_1-h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{\frac{h_1^3+h_2^3-(h_1+h_2)(h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=$$

$$lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{-h_1h_2^2-h_2h_1^2}{(h_1^2+h_2^2)^{1.5}}$$

כעת, המעלה של המונה והמכנה על פניו נראות זהות והן 3. בפרט בשביל שהגבול יהיה אפס נרצה שהמעלה של המונה תהיה גדולה יותר. לכן ננסה להפריך את קיום הגבול, כלומר להראות שבפרט אינו אפס ולכן לא דפרנציאבילית.

$$h_1=h_2\Longrightarrow lim_{h_1\to 0}\frac{-2h_1^3}{2^{1.5}h_1^3}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

סה"כ מצאנו מסלול בו הגבול איננו אפס, ולכן הגבול כולו איננו אפס, כלומר הפונקציה איננה דפרנציאבילית.

טענות על דפרנציאביליות

1. דיפרנציאביליות גוררת קיום של נגזרות חלקיות, ההיפך לא נכון.
2. דפרנציאביליות גוררת רציפות, ההפך לא נכון.
3. אם הנגזרות החלקיות כולן רציפות בנקודה, אזי הפונקציה דיפ' אך שוב, ההפך לא נכון.

כלל השרשרת בהרבה משתנים

f הינה פונקציה של n משתנים $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. במקום כל אחד מהמשתנים נשים פונקציה g_i שהיא פונקציה של m משתנים בעצמה, למשתנים שלה נקרא $x_1,...x_m$. כלומר הסיטואציה היא כזו

$$f(g_1(x_1,...x_m),....,g_n(x_1,...x_m))$$

למשל, עבור $f(x,y,z)=x^2+y+z$ נניח שנציב

$$x(u,v)=u^3+v, y(u,v)=cos(uv), z(u,v)=u-v^2$$

ואז נקבל

$$f(x,y,z)=f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

כעת ניתן לגזור לפי u ולפי v. כלל השרשרת עושה זאת ישירות באופן כללי, מבלי שנצטרך לרשום את f כביטוי מפורש של הפנימיים: כאשר f וg_i כולן דיפ', אזי מתקיים:

$$f_{x_j}=\sum_{i=1}^{n}f_{g_i}g_{x_j}$$

אצלנו

$$f_u=f_xx_u+f_yy_u+f_zz_u=2x*3u^2+1*(-sin(uv)v)+1*1$$

נקודות קיצון של פונקציות בשתי משתנים

נקודות קיצון מקומיות

כמו במשתנה אחד. נגזור, ונשווה לאפס. אצלנו יש כמה נגזרות. לכן נפתור את מערכת המשוואות $\nabla f = 0$.
אחרי שנמצא את החשודות, צריך לסווג אותן. בכל נקודה, במשתנה אחד אנחנו בודקים האם זו נק' מינימום/מקסימום/ לא קיצון בכלל (אולי פיתול?). מה נעשה כאן? נוכל להשתמש בנגזרות השניות, נזכיר שיש כמה כאלו.
עבור פונקציה f נגדיר את **מטריצת הסיאן (או הסה)** שתסומן בH_f, זו מטריצה שאיבריה הם הנגזרות השניות של f. כלומר ־ האיבר הij שלה הוא הנגזרת השנייה לפי המשתנים x_i וx_j. בפרט עבור שני משתנים יתקיים:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

ועבור שלושה משתנים:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

עבור כל נקודה חשודה, נציב את ערכי הנקודה במטריצה H_f. נשתמש במטריצה שקיבלנו על מנת לסווג את הנקודה.
נסמן בM_i את המטריצה ה$i \times i$ בפינה השמאלית העליונה של המטריצה H_f. למשל, עבור $i = 3$

$$M_1 = (f_{xx}), M_2 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}, M_3 = H_f$$

נחשב את הדטרמיננטות שלהם.
א. אם כל הדטרמיננטות חיוביות, אזי הנקודה היא נק' מינימום.
ב. אם הדטרמיננטה הראשונה שלילית, השנייה חיובית וכן הלאה מחליפות סימן לסירוגין, אזי זו נקודת מקסימום.
ג. אחרת, כלומר אם אחת מהדטרמיננטות היא עם סימן שלא מתאים לאחד מהדפוסים בסעיפים הקודמים, למשל $|M_2| < 0$, אזי הנקודה היא נקודת אוכף (המקבילה של פיתול ליותר ממשתנה אחד).
ד. אם חלק מהדטרמיננטות מתאפסות , אבל אף אחת מהן לא עושה בעיות כמו בסעיף ג', אזי אנחנו לא יודעים לסווג את הנקודה באמצעות השיטה הזו. ־ כך כותבים גם במבחן, אם קורה מצב כזה.
דוגמה:
מצא נקודות קריטיות של

$$f(x,y) = 3(x^2 + y^2) + x^3 + 4y$$

$$f_x = 6x + 3x^2, f_y = 6y + 4$$

נשווה לאפס:

$$6x + 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0, -2$$

$$6y + 4 = 0 \Longrightarrow y = \frac{-2}{3}$$

כלומר יש לנו שתי חשודות: $(0, \frac{-2}{3}), (-2, \frac{-2}{3})$.

$$f_{xx}=6+6x, f_{xy}=f_{yx}=0, f_{yy}=6$$

$$H_f=\begin{pmatrix}6+6x & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Longrightarrow H_{(0,\frac{-2}{3})}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Longrightarrow |M_1|=6>0, |M_2|=36>0$$

שתי הדטרמיננטות גדולות מאפס, ולכן $(0,\frac{-2}{3})$ היא נקודת מינימום.

$$H_f=\begin{pmatrix}6+6x & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Longrightarrow H_{(-2,\frac{-2}{3})}=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Longrightarrow |M_1|=-6>0, |M_2|=-36<0$$

בפרט M_2 שלילית, ולכן זו נקודת אוכף.
הערה: במשתנה אחד כאשר פונקציה גזירה (ואז רציפה), יש קשר בין מס' נק המינימום למקסימום. כלומר לא יתכן מצב בו יש שתי נק' מינימום ואין מקסימום בניהן. כאן - לא צריך לחפש דברים כאלו. ייתכן שיהיו מליון נקודות מקסימום ואף לא מינימום אחת.
דוגמה שנייה:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+yz-xz-4x+6y+2z$$

נרצה למצוא לה קריטיות.

$$f_x=2x-y-z-4, f_y=2y-x+z+6, f_z=2z+y-x+2$$

כעת צריך לפתור את מערכת המשוואות שקיבלנו ע"י השוואה $f_x=f_y=f_z=0$. נפתור (עם דירוג מטריצה או לבודד ולהציב) ונקבל $y=-3$, $x=1$ וכן $z=1$.
כלומר, ישנה נקודת קיצון חשודה אחת $(1,-3,1)$. ניצור מטריצת הסיאן

$$H_f=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

כעת, לא נדרש אפילו להציב את ערך הנקודה כיוון שמטריצה הסיאן תמיד קבועה. נחשב -

$$|M_1|=2>0, |M_2|=5>0, |M_3|=4>0$$

כל דטרמיננטות חיוביות, לכן זו נק' מינימום.