

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 «Программная инженерия»
Системное и прикладное программное обеспечение

Курсовая работа
Часть 1
По дисциплине «Дискретная математика»
Вариант: 58

Выполнил:
Ясаков Артем Андреевич

Группа: Р3113

Преподаватель:
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург 2024 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $2 \leq |x_2x_3 - x_4x_5x_1| \leq 3$ и неопределенное значение при $|x_2x_3 - x_4x_5x_1| = 4$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_2x_3	$x_4x_5x_1$	$ x_2x_3 - x_4x_5x_1 $	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	2	2	1
2	0	0	0	1	0	0	4	4	d
3	0	0	0	1	1	0	6	6	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	0	1	0	1	1	2	1	0
6	0	0	1	1	0	1	4	3	1
7	0	0	1	1	1	1	6	5	0
8	0	1	0	0	0	2	0	2	1
9	0	1	0	0	1	2	2	0	0
10	0	1	0	1	0	2	4	2	1
11	0	1	0	1	1	2	6	4	d
12	0	1	1	0	0	3	0	3	1
13	0	1	1	0	1	3	2	1	0
14	0	1	1	1	0	3	4	1	0
15	0	1	1	1	1	3	6	3	1
16	1	0	0	0	0	0	1	1	0
17	1	0	0	0	1	0	3	3	1
18	1	0	0	1	0	0	5	5	0
19	1	0	0	1	1	0	7	7	0
20	1	0	1	0	0	1	1	0	0
21	1	0	1	0	1	1	3	2	1
22	1	0	1	1	0	1	5	4	d
23	1	0	1	1	1	1	7	6	0
24	1	1	0	0	0	2	1	1	0
25	1	1	0	0	1	2	3	1	0
26	1	1	0	1	0	2	5	3	1
27	1	1	0	1	1	2	7	5	0
28	1	1	1	0	0	3	1	2	1
29	1	1	1	0	1	3	3	0	0
30	1	1	1	1	0	3	5	2	1
31	1	1	1	1	1	3	7	4	d

Аналитический вид

КЛНФ:

$$\begin{aligned}
 f &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \\
 &\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \\
 &= (1, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 21, 26, 28, 30)
 \end{aligned}$$

ККНФ:

$$\begin{aligned}
 f &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5) \\
 &\quad (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \\
 &\quad (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \\
 &\quad (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee x_5) \\
 &\quad (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \\
 &\quad (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \\
 &= (0, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 29)
 \end{aligned}$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$		$Z(f)$
m_1	00001	+	m_1-m_{17}	X0001	X0001
m_2	00010	+	m_2-m_6	00X10	00X10
m_6	00110	+	m_2-m_{10}	0X010	0X010
m_8	01000	+	m_6-m_{22}	X0110	X0110
m_{10}	01010	+	m_8-m_{10}	010X0	010X0
m_{11}	01011	+	m_8-m_{12}	01X00	01X00
m_{12}	01100	+	$m_{10}-m_{11}$	0101X	0101X
m_{15}	01111	+	$m_{10}-m_{26}$	X1010	X1010
m_{17}	10001	+	$m_{11}-m_{15}$	01X11	01X11
m_{21}	10101	+	$m_{12}-m_{28}$	X1100	X1100
m_{22}	10110	+	$m_{15}-m_{31}$	X1111	X1111
m_{26}	11010	+	$m_{17}-m_{21}$	10X01	10X01
m_{28}	11100	+	$m_{22}-m_{30}$	1X110	1X110
m_{30}	11110	+	$m_{26}-m_{30}$	11X10	11X10
m_{31}	11111	+	$m_{28}-m_{30}$	111X0	111X0
			$m_{30}-m_{31}$	1111X	1111X

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Также вычеркнем столбцы — надмножества других столбцов. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы										
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
		0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
		0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
		1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
		1	6	8	10	12	15	17	21	26	28	30
A	X0001	X						X				
B	00X10		X									
C	0X010				X							
D	X0110		X									
E	010X0			X	X							
F	01X00			X		X						
G	0101X				X							
H	X1010				X					X		
I	01X11						X					
J	X1100					X					X	
K	X1111						X					
L	10X01							X	X			
M	1X110											X
N	11X10									X		X
O	111X0										X	X
P	1111X											X

Ядро покрытия: $T = \{X0001, 10X01\}$

Получим следующую упрощенную таблицу:

Простые импликаны		0-кубы							
		0	0	0	0	0	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	1	1
		1	0	0	1	1	0	1	1
		1	0	1	0	1	1	0	1
		0	0	0	0	1	0	0	0
		6	8	10	12	15	26	28	30
A	00X10	X							
B	0X010			X					
C	X0110	X							
D	010X0		X	X					
E	01X00		X		X				
F	0101X			X					
G	X1010			X			X		
H	01X11					X			
I	X1100				X			X	
J	X1111					X			
K	1X110								X
L	11X10						X		X
M	111X0							X	X
N	1111X								X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (A \vee C) (D \vee E) (B \vee D \vee F \vee G) (E \vee I) (H \vee J) (G \vee L) (I \vee M) (K \vee L \vee M \vee N)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = ADIJL \vee AEGHM \vee AEGJM \vee CDHIL \vee \dots$$

Возможны следующие покрытия:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ H \\ I \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X 0001 \\ 10 X 01 \\ 00 X 10 \\ 010 X 0 \\ 01 X 11 \\ X 1100 \\ 11 X 10 \end{pmatrix} \\
 S_1^a &= 28 \quad S_1^b = 35 \\
 C_2 &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ I \\ J \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X 0001 \\ 10 X 01 \\ 00 X 10 \\ 010 X 0 \\ X 1100 \\ X 1111 \\ 11 X 10 \end{pmatrix} \\
 S_2^a &= 28 \quad S_2^b = 35 \\
 C_3 &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ G \\ H \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X 0001 \\ 10 X 01 \\ 00 X 10 \\ 01 X 00 \\ X 1010 \\ 01 X 11 \\ 111 X 0 \end{pmatrix} \\
 S_3^a &= 28 \quad S_3^b = 35 \\
 C_4 &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ G \\ J \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X 0001 \\ 10 X 01 \\ 00 X 10 \\ 01 X 00 \\ X 1010 \\ X 1111 \\ 111 X 0 \end{pmatrix} \\
 S_4^a &= 28 \quad S_4^b = 35 \\
 C_5 &= \begin{pmatrix} T \\ C \\ D \\ H \\ I \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X 0110 \\ 10 X 01 \\ 00 X 10 \\ 010 X 0 \\ 01 X 11 \\ X 1100 \\ 11 X 10 \end{pmatrix} \\
 S_5^a &= 28 \quad S_5^b = 35 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$\begin{aligned}
 C_{\min} &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ H \\ I \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X 0001 \\ 10 X 01 \\ 00 X 10 \\ 010 X 0 \\ 01 X 11 \\ X 1100 \\ 11 X 10 \end{pmatrix} \\
 S^a &= 28 \quad S^b = 35
 \end{aligned}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \bar{x}_5$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

Карты Карно для минимизации МДНФ:

Левая карта ($x_1=0$):

	x_4x_5			
	00	01	11	10
x_2x_3	00	1		d
	01			1
	11	1	1	
	10	1	d	1

Правая карта ($x_1=1$):

	x_4x_5			
	00	01	11	10
x_2x_3	00	1		
	01	1		d
	11	1	d	1
	10			1

Матрица C_{min} :

$$C_{min} = \begin{pmatrix} T \\ A \\ D \\ H \\ I \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & X & 0 & 1 \\ 0 & 0 & X & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X & 0 \\ 0 & 1 & X & 1 & 1 \\ X & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & X & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$S^a = 28$ $S^b = 35$

МДНФ:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4x_5 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4x_5 \vee x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5$$

Определение МКНФ

Карты Карно для минимизации МКНФ:

Левая карта ($x_1=0$):

	x_4x_5			
	00	01	11	10
x_2x_3	00	0	0	d
	01	0	0	
	11	0		0
	10	0	d	

Правая карта ($x_1=1$):

	x_4x_5			
	00	01	11	10
x_2x_3	00	0	0	0
	01	0	0	d
	11	0	d	
	10	0	0	0

Матрица C_{min} :

$$C_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ X & 0 & X & 0 & 0 \\ 1 & 0 & X & 1 & X \\ 1 & 1 & X & X & 1 \\ X & 0 & X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & X \\ X & 1 & X & 0 & 1 \\ 0 & X & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

МКНФ:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_4 \vee x_5) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_5) \cdot (x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \cdot (\bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \bar{x}_5$$

$$S_Q = 35, \tau = 2$$

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 (x_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4) \vee \bar{x}_1 x_4 (\bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee x_2 x_5) \quad S_Q=30, \tau=4$$

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 (x_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4) \vee \bar{x}_1 x_4 (\bar{x}_2 \vee x_5) (x_2 \vee \bar{x}_5) \quad S_Q=29, \tau=4$$

$$\phi = \bar{x}_2 x_5$$

$$\bar{\phi} = x_2 \vee \bar{x}_5$$

$$f = \phi \bar{x}_4 (x_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4) \vee \bar{x}_1 x_4 (\bar{x}_2 \vee x_5) \bar{\phi} \quad S_Q=29, \tau=4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 (x_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4) \vee \bar{x}_1 x_4 (\bar{x}_2 \vee x_5) (x_2 \vee \bar{x}_5) \quad S_Q=29, \tau=4$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_5)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \quad S_Q=36, \tau=2$$

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee (x_3 \vee x_4) \bar{x}_5)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_4 \vee \bar{x}_5))$$

$$(x_2 \vee (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(x_4 \vee x_5)) \quad S_Q=34, \tau=4$$

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee (x_3 \vee x_4) \bar{x}_5)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(x_4 \vee \bar{x}_5))$$

$$(x_2 \vee \bar{x}_4 x_5 \vee x_4 \bar{x}_5) \quad S_Q=33, \tau=4$$

$$\phi = x_4 \vee \bar{x}_5$$

$$\bar{\phi} = \bar{x}_4 x_5$$

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee (x_3 \vee x_4) \bar{x}_5)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \phi)(x_2 \vee \bar{\phi} \vee x_4 \bar{x}_5)$$

$$S_Q=32, \tau=4$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 (x_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_5 (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_4) \vee \bar{x}_1 x_4 (\bar{x}_2 \vee x_5) (x_2 \vee \bar{x}_5) \quad (S_Q=29, \tau=4)$$

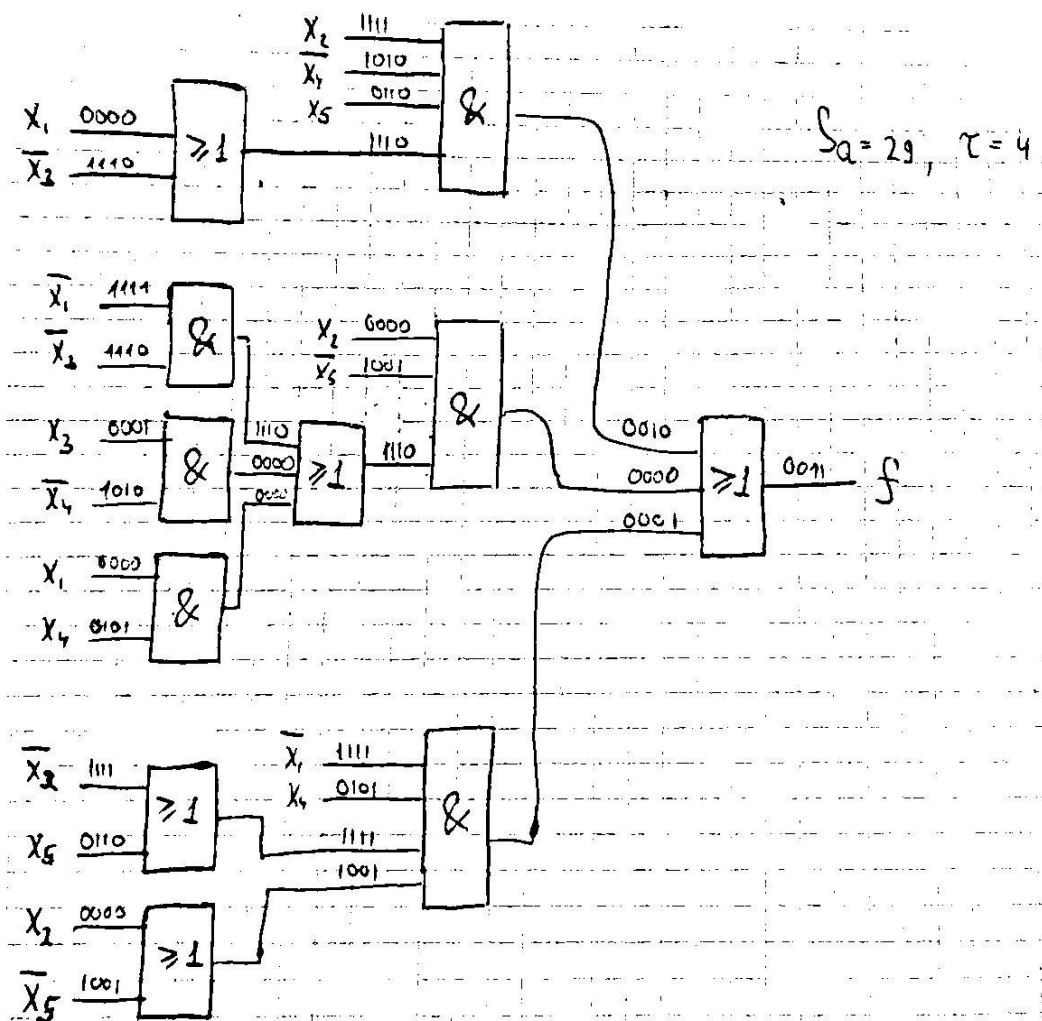
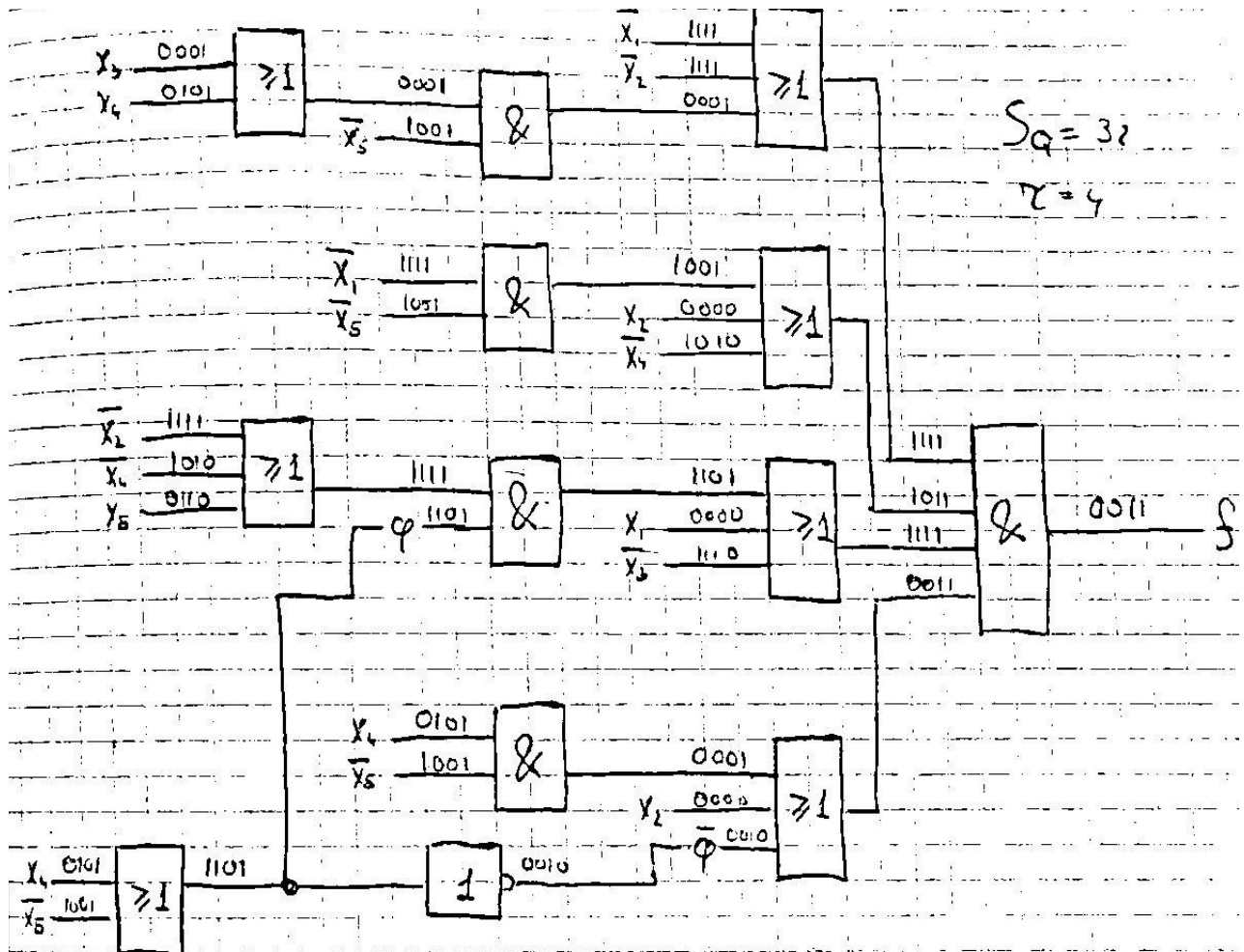


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee (x_3 \vee x_4) \bar{x}_5)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5) \phi)(x_2 \vee \bar{\phi} \vee x_4 \bar{x}_5)$$

$$\phi = x_4 \vee \bar{x}_5 \quad (S_Q=32, \tau=4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

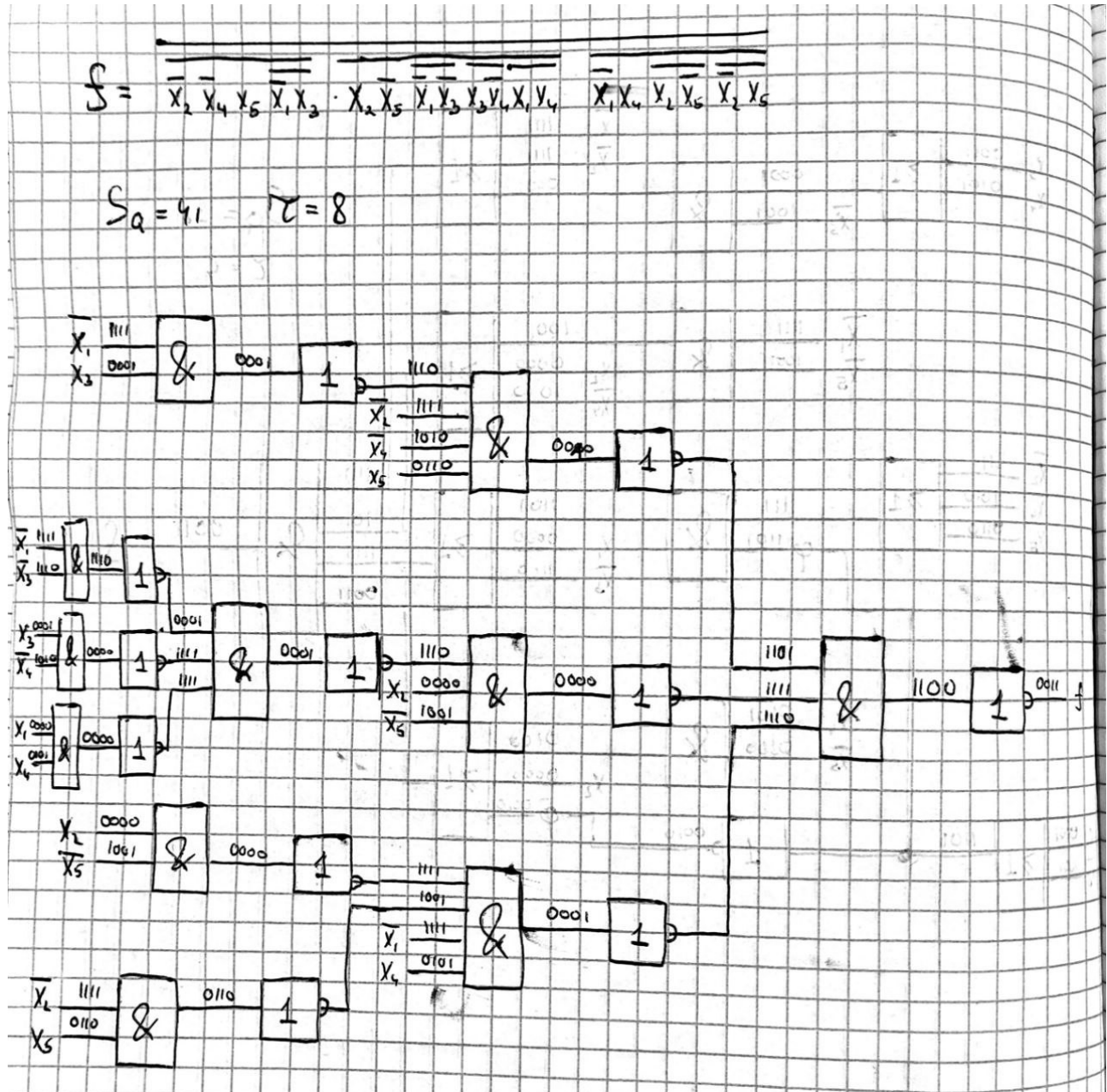
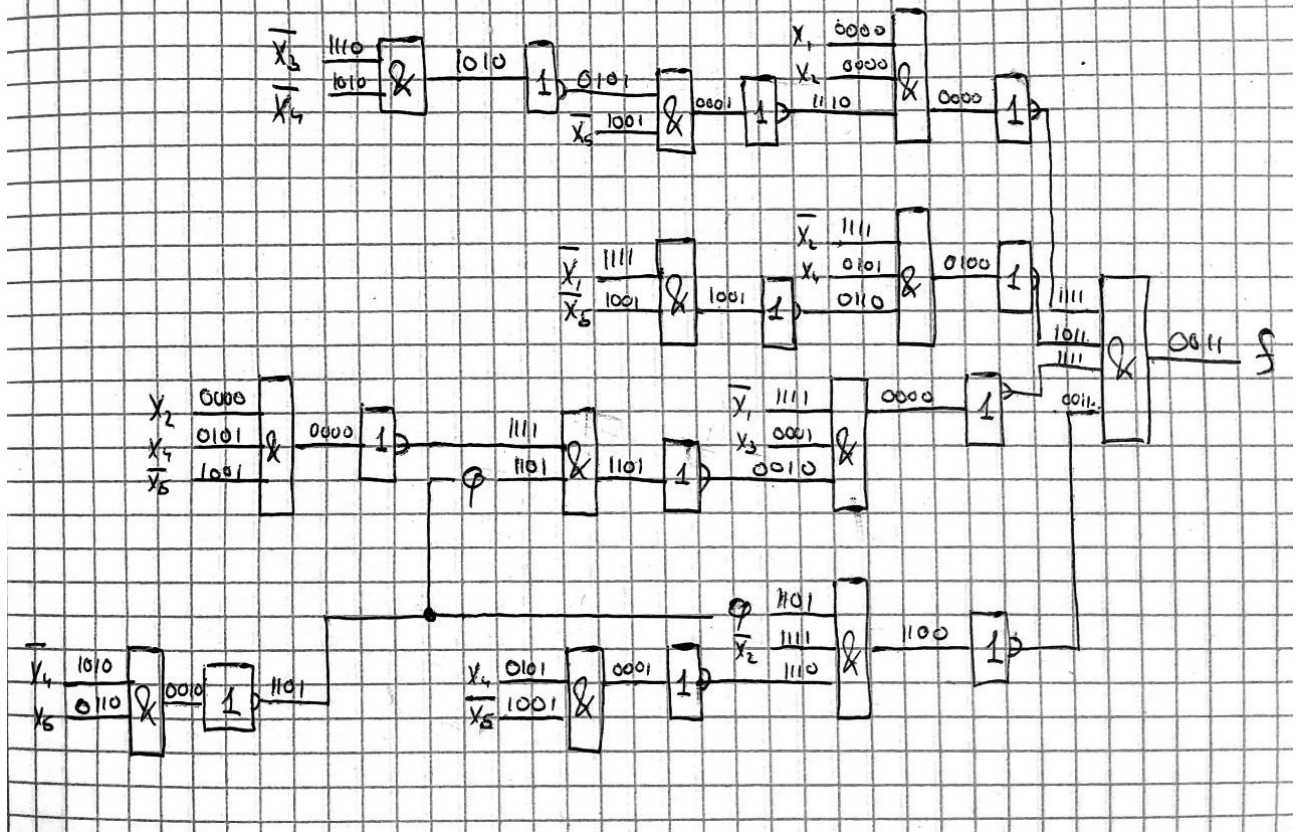


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \cdot \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_5} \cdot \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \phi \cdot \overline{x_2} \phi \overline{x_4} \overline{x_5}$$

$$\varphi = X_4 \vee \overline{X_5} = \overline{\overline{\varphi}} = \overline{\overline{X_4 X_5}}$$

$$S_a = 42, \bar{U} = 7$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов(2):

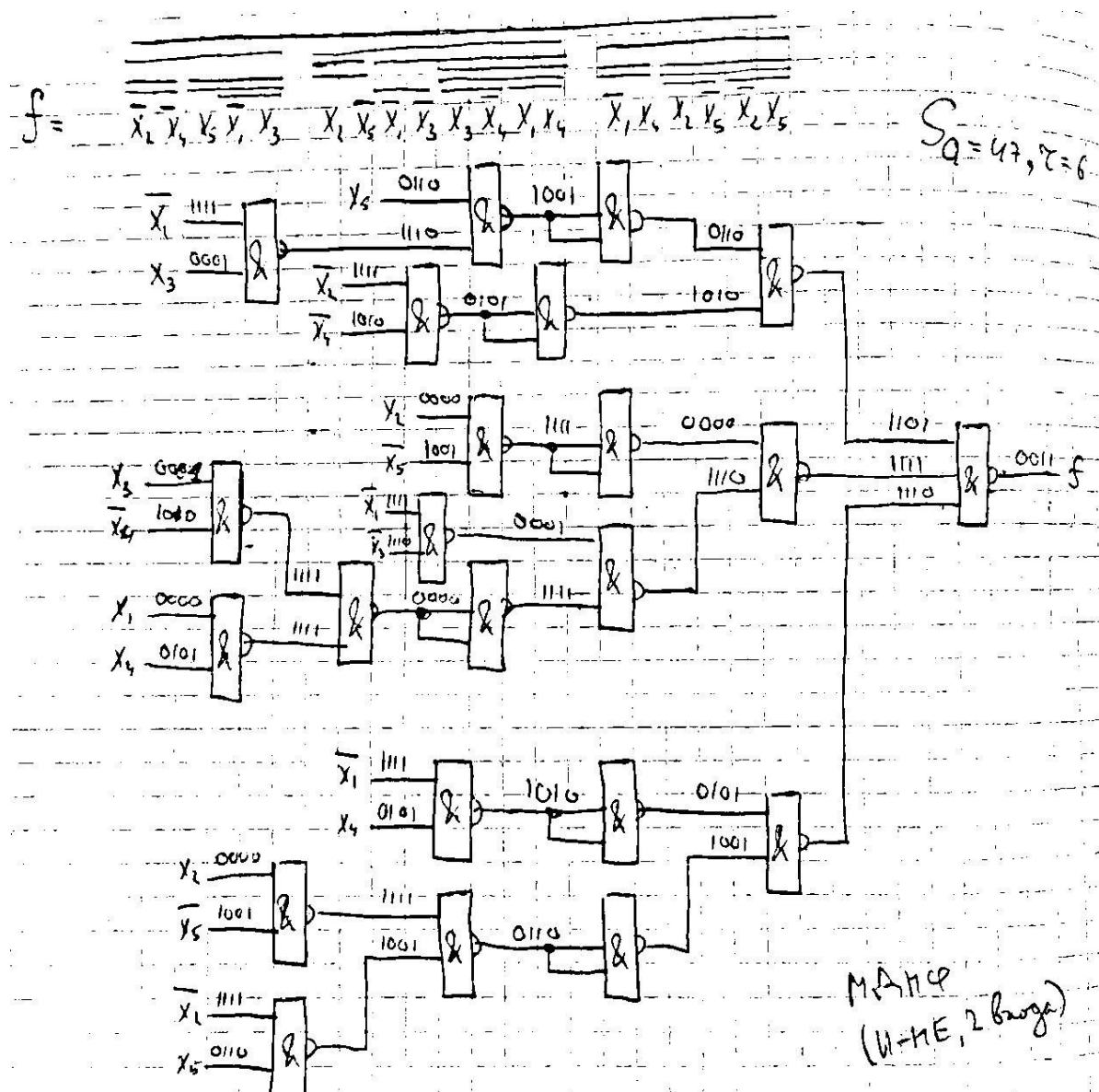


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов(2):

