Análisis de la eficiencia de algoritmos

José Antonio Álvarez Ocete
Norberto Fernández de la Higuera
Javier Gálvez Obispo
Yábir García Benchakhtir

14 de marzo de 2018

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

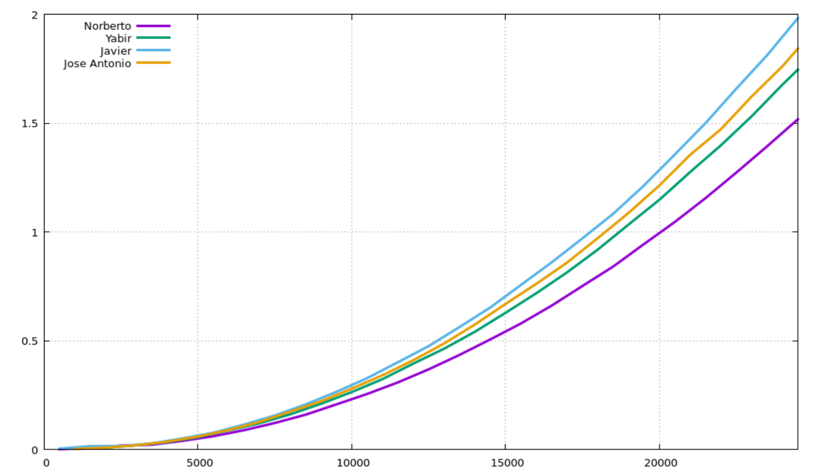
Algoritmos de ordenación $O(n^2)$

- Burbuja
- Inserción
- Selección

El análisis teórico de este algoritmo nos dice que es $O(n^2)$

$$\frac{a}{2}n^2 - \frac{3a}{2}n + a \in O(n^2)$$

Algoritmo burbuja



Algoritmo de selección

```
static void seleccion_lims(int T[], int inicial, int
     final) {
        int i, j, indice_menor;
        int menor, aux;
        for (i = inicial; i < final - 1; i++) {
                indice_menor = i;
                menor = T[i];
                for (j = i; j < final; j++) {
                        if (T[j] < menor) {
                                indice_menor = j;
                                menor = T[j];
                        }
                }
                aux = T[i];
                T[i] = T[indice_menor];
                T[indice_menor] = aux;
        };
}
```

Analizamos teóricamente este algoritmo

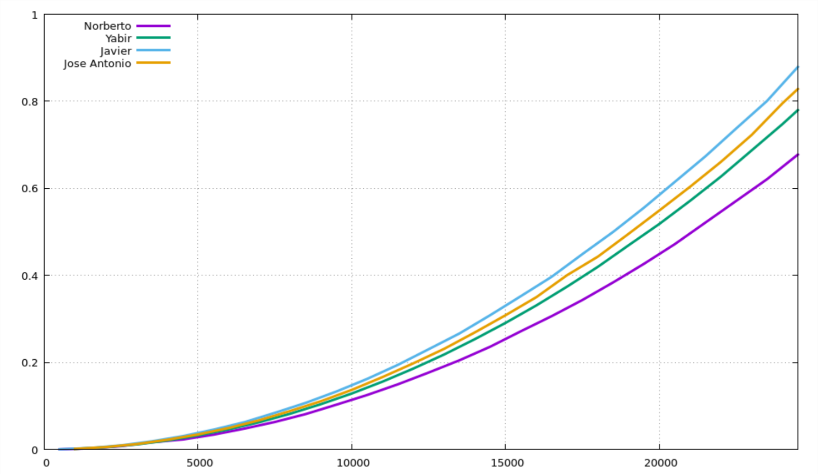
$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1}\left[a_2 + \sum_{j=i}^{n} a_1\right] &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[a_2 + a_1\sum_{j=i}^{n} 1\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_2 + a_1 \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n-1} 1 \\
&= a_2 \sum_{i=0}^{n-1} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n}(n-i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) &= a_1\left[\sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i\right] \\
&= an^2 - a\frac{(n+1)n}{2} \\
&= an^2 - \frac{an^2}{2} - \frac{an}{2}
\end{aligned}
$$

Finalmente sumando las dos partes obtenemos:

$$\frac{an^2}{2} - \frac{an}{2} + b(n-1) = \frac{a}{2}n^2 + \frac{b-a}{2}n - b \in O(n^2)$$

Algoritmo de selección

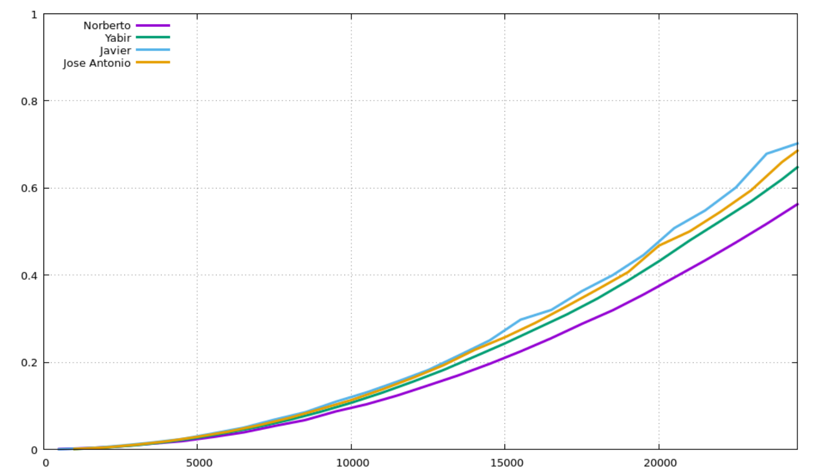


Algoritmo de inserción

```
static void insercion_lims(int T[], int inicial, int
    final)
{
        int i, j;
        int aux;
        for (i = inicial + 1; i < final; i++) {
                j = i;
                while ((T[j] < T[j-1]) && (j > 0)) {
                        aux = T[j];
                        T[j] = T[j-1];
                        T[j-1] = aux;
                        j--;
                };
        };
}
```

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a = ... = a \cdot (\frac{n^2}{2} + 2n) \in O(n^2)$$

Algoritmo de inserción



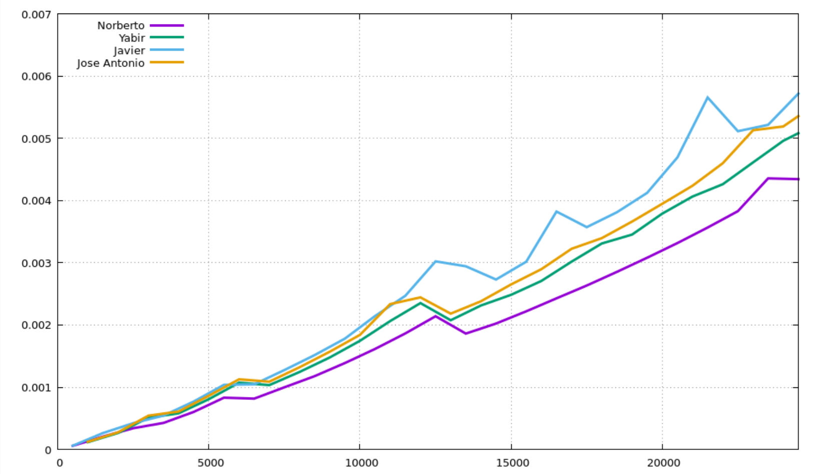
Algoritmos de ordenación $O(nlog(n))$

- mergesort
- heapsort
- quicksort

Algoritmo mergesort

Como se ha visto en teoría la eficiencia de este algoritmo es:

$$c_1 n + c_2 nlog_2(n) \in O(nlog_2(n))$$



Norberto
Yabir
Javier
Jose Antonio
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
0
5000
10000
15000
20000

Algoritmo heapsort

```
static void reajustar(int T[], int num_elem, int k)
    {
        int j;
        int v;
        v = T[k];
        bool esAPO = false;
        while ((k < num_elem/2) && !esAPO) {
            j = k + k + 1;
            if ((j < (num_elem - 1)) && (T[j] <
                T[j+1]))
                    j++;
            if (v >= T[j])
                    esAPO = true;
            T[k] = T[j];
            k = j;
        }
        T[k] = v;
}
```

Acotamos el interior del bucle por una constante c_1 y $t = n - k$

$$R(n-k) = R(\frac{n-k}{2}) + c_1 \leftrightarrow R(t) = R(\frac{t}{2}) + c_1$$

y aplicando el cambio de variable $t = 2^m \leftrightarrow log_2 t = m$ obtenemos:

$$R(2^m) = R(2^{m-1}) + c_1$$

Cuya solución es:

$$X_m = c_2 + c_1 * m$$

Donde c_2 es otra constance. Deshaciendo el cambio de variable obtenemos finalmente:

$$R(2^m) = R(t) = c_2 + c_1 * log_2(t) \in O(log(n))$$

A partir de la eficiencia de la función **Reajustar** es relativamente sencillo obtener la del algoritmo completo:

$$\sum_{i=0}^{n/2} R(i) + \sum_{i=1}^{n-1} (R(i) + c_3)$$

Como el logarítmo es una función creciente, acotamos los valores interiores de los bucles por el mayor valor alcanzado:

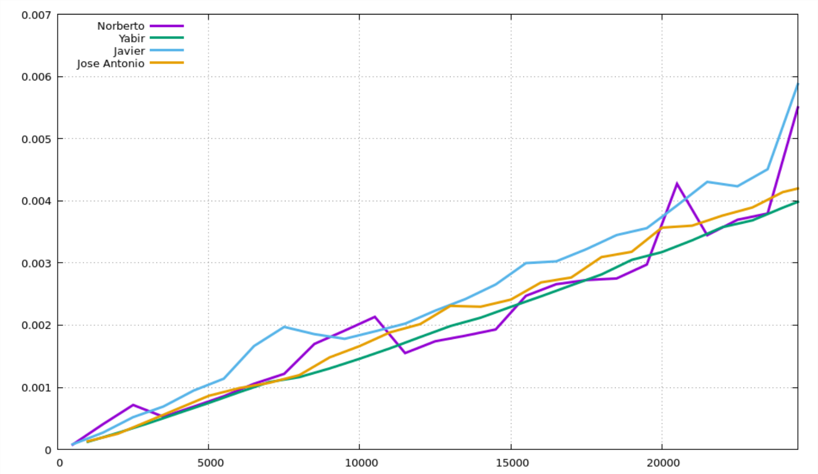
$$\sum_{i=0}^{n/2} R(i) + \sum_{i=1}^{n-1}(R(i) + c_3) \leq \sum_{i=0}^{n/2} R(n/2) + \sum_{i=1}^{n-1}(R(n-1) + c_3) =$$

$$= (n/2) \cdot R(n/2+1) + (n-1) \cdot R(n-1) + c_3(n-1) =$$

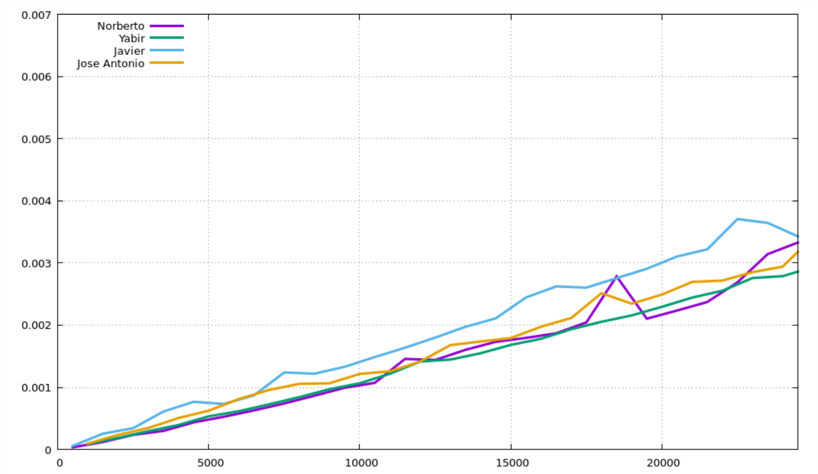
$$= (n/2) \cdot R(n/2+1) + (n-1) \cdot R(n-1) + c_3(n-1)$$

Como el orden de eficiencia de **Reajustar** es de $O(log(n))$, podemos concluir que el algoritmo tiene una eficiencia de $O(nlog(n))$

Algoritmo heapsort



Algoritmo quicksort

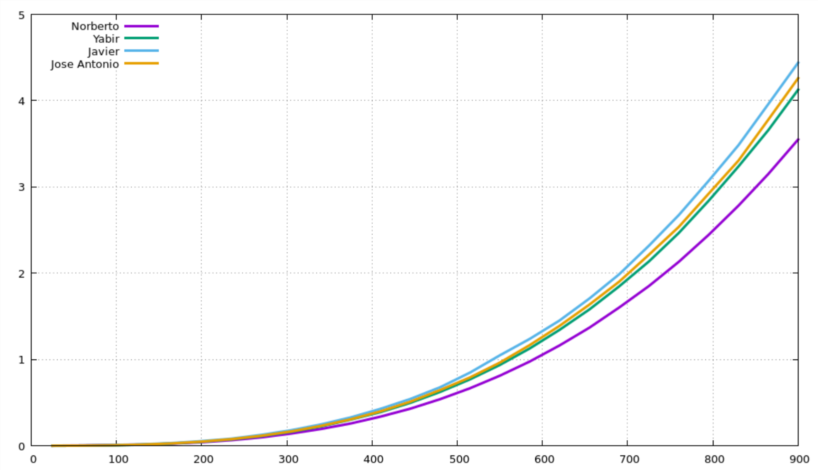


Algoritmo de Floyd

```
void Floyd(int **M, int dim) {
  for (int k = 0; k < dim; k++)
  for (int i = 0; i < dim;i++)
  for (int j = 0; j < dim;j++){
    int sum = M[i][k] + M[k][j];
    M[i][j] = (M[i][j] > sum) ? sum : M[i][j];
  }
}
```

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a = an^3 \in O(n^3)$$

Algoritmo floyd



Algoritmo Hanoi

```
void hanoi (int M, int i, int j) {
  if (M > 0) {
    hanoi(M-1, i, 6-i-j);
    hanoi (M-1, 6-i-j, j);
  }
}
```

$$Hanoi(n) = 2 \cdot Hanoi(n-1)$$

$$X_{n+1} = 2 \cdot X_n$$

$$X_n = C \cdot 2^n \in O(2^n)$$

Algoritmo floyd