Оглавление

[ВВЕДЕНИЕ 2](#_Toc325990069)

[Актуальность 2](#_Toc325990070)

[Степень теоретической разработанности темы 3](#_Toc325990071)

[Цель и задачи исследования 3](#_Toc325990072)

[Область исследования 3](#_Toc325990073)

[Объект исследования 3](#_Toc325990074)

[Предмет исследования 3](#_Toc325990075)

[Теоретическая и методологическая основа исследования 4](#_Toc325990076)

[Информационная база исследования 4](#_Toc325990077)

[Научная новизна исследования 4](#_Toc325990078)

[Практическую значимость исследования составляет 4](#_Toc325990079)

[Апробация результатов исследования 4](#_Toc325990080)

[Объем и структура работы 4](#_Toc325990081)

[Обзор БПЛА 4](#_Toc325990082)

[Виртуальный полигон 4](#_Toc325990083)

[Физика 4](#_Toc325990084)

[6-DOF тело 4](#_Toc325990085)

[Моторы и роторы 5](#_Toc325990086)

[Модель потоков газа в замкнутых пространствах 5](#_Toc325990087)

[Численное решение уравнений Навье-Стокса 6](#_Toc325990088)

[Адвекция 10](#_Toc325990089)

[Диффузия и вязкость 12](#_Toc325990090)

[Решение уравнений Пуассона 13](#_Toc325990091)

[Начальные и граничные условия 14](#_Toc325990092)

[Реализация 14](#_Toc325990093)

[CUDA реализация Навье-Стокса 14](#_Toc325990094)

[Бортовое оборудование 15](#_Toc325990095)

[Гироскоп 15](#_Toc325990096)

[Акселерометр 15](#_Toc325990097)

[Барометр 15](#_Toc325990098)

[Магнитометр 15](#_Toc325990099)

[Система глобального позиционирования 15](#_Toc325990100)

[Камеры 15](#_Toc325990101)

[Фильтры 15](#_Toc325990102)

[Средства анализа данных 15](#_Toc325990103)

[Система управления 15](#_Toc325990104)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 15](#_Toc325990105)

[БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 15](#_Toc325990106)

# ВВЕДЕНИЕ

## Актуальность

В современном мире все большее распространение получают беспилотные летательные аппараты. Беспилотный летательный аппарат (БПЛА) — летательный аппарат многоразового использования без экипажа на борту.

Возможности изучения поведения БПЛА в экстремальных ситуациях экспериментальными методами сильно ограничено, как в связи с дороговизной самого аппарата, так и дороговизной ошибки, которая может возникнуть в ходе эксперимента. Поэтому для этих целей разумно использовать компьютерные эксперименты в реальном времени. Для интерпретации его результатов привлекаются технологии виртуальной реальности, обеспечивающие «погружение» исследователя в моделируемое явление с возможностью всестороннего наблюдения и анализа воспроизводимых закономерностей реального мира. В свою очередь, это стимулирует развитие нового класса проблемно-ориентированных программных комплексов для проведения вычислительного эксперимента --- виртуальных полигонов (ВП) для поддержки принятия решений в различных областях науки и промышленности. Процесс проектирования и разработки ВП требует совокупного учета особенностей методов компьютерного моделирования в конкретной предметной области и соответствующих возможностей технологий виртуальной реальности, включая специфику аппаратной реализации. Это достигается путем адаптации математических моделей для формирования предметно-зависимых визуальных динамических сцен с высоким уровнем реалистичности и достоверности.

## Степень теоретической разработанности темы

## Цель и задачи исследования

* Анализ математических моделей динамики четырехроторных летательных аппаратов.
* Разработка метода численного моделирования динамики групп четырехроторных летательных аппаратов с учетом взаимного влияния.
* Проектирование, разработка и отладка программно-аппаратного комплекса виртуального полигона для исследования динамики групп четырехроторных летательных аппаратов с учетом взаимного влияния.

## Область исследования

## Объект исследования

## Предмет исследования

Предметом исследования является технология создания виртуального полигона применительно к задачам моделирования динамики групп четырехроторных летательных аппаратов.

## Теоретическая и методологическая основа исследования

## Информационная база исследования

## Научная новизна исследования

## Практическую значимость исследования составляет

## Апробация результатов исследования

## Объем и структура работы

# Обзор БПЛА

# Виртуальный полигон

# Физика

## 6-DOF тело

Для построения модели распределения сил и моментов, действующих на квадрокоптер, летательный аппарат рассматривается как твердое тело с 6-ю степенями свободы. Введем параметры, описывающие положение летательного аппарата в пространстве. Для этого необходимо выбрать локальную систему координат. За начало системы локальных координат примем центр тяжести квадрокоптера, а оси расположим так, чтобы ось  была направлена между первым и четвертым двигателем квадрокоптера, ось  ­­- вверх, ось  - вправо (см. рис.).

Положение летательного аппарата в пространстве однозначно определяется кортежем из вектора положения центра тяжести и вектора вращения: , где , , где, в свою очередь , ,  - углы крена, тангажа и рысканья, соответственно, , ,  - глобальное положение центра тяжести летательного аппарата, а , ,  - орты глобальной системы координат.

## Моторы и роторы

## Модель потоков газа в замкнутых пространствах

Роторы летательного аппарата создают сильные потоки воздуха, которые могут влиять на полет других БПЛА или же приводить к тому, что когда ЛА подлетает достаточно близко к стене или другому крупному объекту возникает так называемый эффект подсасывания, вследствие которого ЛА начинает притягивать к этому объекту.

Для моделирования потоков газа в замкнутых пространствах обычно используют следующие методы:

* Методы решёточных уравнений Больцмана (англ. Lattice Boltzmann methods, LBM) — класс методов вычислительной гидродинамики для моделирования жидкостей. В отличие от многих других методов, метод LBM не решает уравнения Навье — Стокса, а моделирует поток ньютоновской жидкости дискретным кинетическим уравнением Больцмана. Столкновения зачастую учитываются с помощью модели Батнагара — Гросса — Крука. Методы решёточных уравнений Больцмана удобны благодаря их концептуальной и вычислительной простоте, их использование ограничено малыми скоростями и тем, что LBM обладает неустойчивым поведением на границе подвижных тел.
* Гидродинамика сглаженных частиц (англ. Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) — вычислительный метод для симуляции жидкостей и газов. Используется во многих областях исследований, включая астрофизику, баллистику, вулканологию и океанографию. Метод гидродинамики сглаженных частиц является не-сеточным (англ. mesh-free) лагранжевым методом (то есть координаты движутся вместе с жидкостью), и разрешающая способность метода может быть легко отрегулирована относительно переменных, таких как плотность.
* Прямое численное моделирование (англ. DNS (Direct Numerical Simulation)) — метод основан на численном решении системы уравнений Навье-Стокса и позволяет моделировать в общем случае движение вязких сжимаемых газов с учётом химических реакций, притом как для ламинарных, так и турбулентных случаев. DNS предъявляет высокие требования к вычислительным ресурсам.

Для использования в виртуальном полигоне было решено реализовать прямое численное моделирование, в связи с его простотой реализации на GPU. Уравнения Навье-Стокса — система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости. Уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

## Численное решение уравнений Навье-Стокса

Система уравнений Навье-Стокса состоит из двух уравнений:

* уравнения движения,
* уравнения неразрывности.

В векторном виде для несжимаемой жидкости они записываются следующим образом:

 (1)

 (2)

Где  векторное поле скорости,  постоянная плотность газа,  скалярное поле давления,  вязкость газа и  представляет любую внешнюю силу, которая может воздействовать на газ, к примеру, винты летательного аппарата.

Для решения численным методом операторы градиента, дивергенции и Лапласа необходимо представить в конечно-разностной форме:

* Градиент 



* Дивергенция 



* Оператор Лапласа :

 (3)

При этом если расчет ведется на сетке и все стороны ячеек этой сетки равны, то конечно-разностную форму оператора Лапласа можно упростить до:

 (3)

Уравнения Навье-Стокса можно решить аналитически только для нескольких простых физических конфигураций. Однако чтобы решить их можно использовать численные интеграционные методы. Для этого, как и любой другой алгоритм, необходимо разбить решение уравнений Навье-Стокса на несколько простых шагов. Для решения уравнений Навье-Стокса используется метод, основанный на технике “стабильных жидкостей” описанный в [Stam99]. Для начала необходимо привести уравнения к форме более подходящей для численного решения. Уравнения Навье-Стокса это три уравнения, которые мы можем решить для величин ,  и . Любой вектор  может быть разложен на несколько базовых составляющих, суммой которых будет . К примеру, векторы в декартовом пространстве обычно представляют, как три длины вдоль каждой оси: . Такой вектор так же может быть записан как , где ,  и  единичные базисные векторы, выровненные по осям декартовой сетки.

Так же как мы можем разложить вектор на сумму векторов, мы можем разложить векторное поле на сумму векторных полей. Пусть  будет областью пространства или как в нашем случае плоскостью, на котором определена наша жидкость. Пусть у этой области будут мягкие (т.е. дифференцируемые) границы  с направлением нормали . Согласно [Chorin and Marsden 1993] мы можем использовать теорему разложения Гельмгольца-Ходжа. Векторное поле  на  может быть однозначно разложено в форму

,

Где  имеет нулевую дивергенцию и параллельно ; так что  на .

Доказательство данной теоремы можно найти в [Chorin and Marsden 1993]. Эта теорема говорит о том, что любое векторное поле может быть разложено на сумму двух других векторных полей: бездивергентное векторное поле и градиент скалярного поля. Данная теория также говорит, что бездивергентное векторное поле обращается в ноль на границе.

Решение уравнений Навье-Стокса включает три вычисления для обновления скорости на каждом временном шаге: адвекция, диффузия и применение силы. Результатом будет новое поле скорости  с ненулевой дивергенцией. Но уравнение неразрывности требует, чтобы в конце каждого временного шага поле скорости было бездивергентным. Теорема разложения Гельмгольца-Ходжа говорит, что дивергенцию поля скорости можно скорректировать, если из него вычесть градиент результирующего поля давления:

. (8)

Теорема также ведет к методу расчета поля давления. Если применить оператор дивергенции к обеим сторонам уравнения (7), то можно получить:

. (9)

Но так как уравнение (2) обеспечивает соблюдение того, что , уравнение (9) упрощается до следующего вида:

, (10)

Что является уравнением Пуассона для расчета давления жидкости, так же это уравнение иногда называют уравнением давления-Пуассона. Это означает, что после того как будет рассчитано поле скорости с ненулевой дивергенцией , можно решить уравнение (10) для давления  и затем используя  и  рассчитать новое бездивергентное поле  используя уравнение (8).

Теперь необходимо рассчитать , чтобы это сделать мы можем использовать теорему разложения Гельмгольца-Ходжа, чтобы определить оператор проекции , который проецирует векторное поле  на его бездивергентную компоненту . Если мы применим  к уравнению (7), мы получим:

.

Но согласно определению , . Следовательно, . Благодаря этому можно упростить уравнения Навье-Стокса.

Вначале, применим оператор проекции к обеим сторонам уравнения (1):

.

Так как  бездивергентно, так же как и производная на левой стороне, то . И так же, , так что элемент давления выпадает. В итоге получается следующее уравнение:

. (11)

Данное уравнение символически инкапсулирует весь алгоритм симуляции потока жидкости. Сначала вычисляем то, что находиться в скобках с правой стороны. Слева на право, мы рассчитываем адвекцию, диффузию и приложенные силы. Выполнение этих трех шагов позволяет нам в результате получить дивергентное поле скоростей , к которому мы применяем оператор проекции, чтобы получить в итоге новое бездивергентное поле . Чтобы это сделать необходимо решить уравнение (10) для давления , а потом вычесть градиент  из , как показано в уравнении (8).

В типичной реализации, разные компоненты не вычисляются и н суммируются вместе, как в уравнении (11). Вместо этого, уравнение решается следующим образом: каждая компонента это шаг, на вход которого поступает поле и в результате на выходе получается новое поле. Мы можем определить оператор , который эквивалентен решению уравнения (11) за единичный временной шаг. Этот оператор определяется как последовательность операторов адвекции (), диффузии (), приложенных сил () и проекции ():

. (12)

Таким образом, алгоритм на каждом шаге симуляции можно выразить следующим образом , операторы выполняются справа налево; сначала адвекция, потом диффузия, приложенные силы и проекция. Здесь время опущено для большей ясности, но на практике, время шага должно быть использовано при расчетах каждого оператора.

### Адвекция

Адвекция это процесс, благодаря которому скорость газа транспортирует себя и другие величины в газе. Чтобы рассчитать адвекцию величины, мы должны обновлять эту величину в каждой ячейке сетки. Потому что мы вычисляем, как величина движется вдоль поля скоростей, можно представить, что каждая ячейка сетки это частица. Первым желанием рассчитать результат адвекции может быть попытка обновлять сетку также как и систему частиц. Просто двигать позицию  каждой частицы вперед по направлению скорости и дистанция, которую он пройдет за время :

.

Что является Эйлеровским методом; это простой метод для явной (или прямой) интеграции обыкновенных дифференциальных уравнений.

У данного подхода есть две проблемы. Первая заключается в том, что симуляция, которая использует прямые методы для адвекции, нестабильна для больших временных шагов, такая симуляция может “взорваться” если величина  будет больше чем размер ячейки сетки. Вторая проблема заключается в особенностях реализации данного метода на GPU. В случае если вся симуляция происходит на пиксельных шейдерах, то такие шейдеры не могут изменить позицию пикселя в который они записывают результат. Метод прямой интеграции требует возможность “двигать” частицы, что невозможно осуществить на текущих графических процессорах.

Решение состоит в том, чтобы инвертировать проблему и использовать неявный метод, предложенный в [Stam99]. Вместо того чтобы осуществлять процесс адвекции путем расчета перемещения частицы за текущий временной шаг, мы можем отследить траекторию частицы из каждой ячейки сетки обратно во времени до текущей позиции и копировать значения данной позиции в стартовую ячейку сетки. Чтобы обновить значение  (это может быть скорость, плотность, температура или любая другая величина, переносимая в газе) можно использовать следующее уравнение:

. (13)

Данный метод можно легко реализовать на GPU, но и как было показано в [Stam99] данный метод стабилен для произвольных временных шагов и скоростей. Рисунок 999 иллюстрирует данный метод для вычисления адвекции.

### Диффузия и вязкость

Вязкие жидкости имеют определенное сопротивление потоку, что приводит к диффузии (или рассеиванию) скорости. Частное дифференциальное уравнение для диффузии вследствие вязкости выглядит следующим образом:

. (14)

Наиболее явным подходом для решения данного уравнения является формулировка явной, дискретной формы для того чтобы разработать простой алгоритм:

.

В этом уравнении  дискретная форма оператора Лапласа (3). Как и явный Эйлеровский метод для расчета адвекции, этот метод нестабилен для больших значений  и . В [Stam99] для решения уравнения (14) предлагается неявная формулировка уравнения (14):

, (15)

где  это единичная матрица. Данная формулировка стабильна для произвольных значений временного шага и скорости. Данное уравнение является уравнением Пуассона для скорости. Это уравнение как и уравнение (10) можно решить с помощью итерационного метода релаксации.

### Решение уравнений Пуассона

Необходимо решить два уравнения Пуассона: уравнение для расчета давления (10) и уравнение для расчета диффузии скорости вследствие вязкости (15). Для решения уравнений Пуассона мы воспользуемся итерационной техникой, которая начинает с аппроксимированного решения и улучшает его на каждой итерации.

Уравнение Пуассона это матричное уравнение следующего вида , где  это вектор значений, для которых мы решаем уравнения ( или  в нашем случае),  это вектор констант, а  это матрица. В нашем случае  неявно представляет собой оператор Лапласа. Итерационная техника, которую мы используем, начинается с первоначального «предположения» для решения  и с каждым шагом  мы получаем улучшенное решение , здесь индекс указывает на номер итерации. Простейшая итерационная техника называется методом итераций Якоби.

Более сложные методы, такие как сопряженные градиенты и многосеточные методы, сходятся быстрее, но мы используем итерации Якоби из-за его простоты и легкости его реализации.

Уравнения (10) и (15) выглядят по-разному, но оба могут быть дискретизированы, используя уравнение (3) и приведены к следующей форме:

, (16)

где  и  это константы. Значения , ,  и  разные для двух уравнений. В уравнении Пуассона для давления,  представляет ,  представляет \. , и . Для уравнения диффузии за счет вязкости оба  и  представляют , , и .

Чтобы решить уравнения (10) и (15) мы просто запускаем несколько итераций, в которых мы решаем уравнение (16) для каждой ячейки сетки, используя результаты предыдущей итерации как входные данные. Из-за того что итерации Якоби медленно сходятся, необходимо выполнить много итераций. Итерации Якоби достаточно дешевы для выполнения на GPU, так что можно выполнить множество итераций за очень короткий промежуток времени.

### Начальные и граничные условия

Проблема любого дифференциального уравнения определенного на конечной области заключается в том что необходимо определить граничные условия для того чтобы оно было корректным. Граничные условия определяют, как мы будем вычислять значения на границах области, в которой происходит симуляция. Так же для расчета развития потока в течение времени, мы должны знать его начальное состояние. Для нашей симуляции потоков газа, мы полагаем, что газ изначально имел нулевую скорость и нулевое давление по всему пространству. Граничные условия требуют чуть более пристального внимания.

В течение каждого временного шага, мы решаем уравнения для двух величин: скорость и давление, и нам необходимы граничные условия для каждого из них. Благодаря тому, что наш газ рассчитывается на прямоугольной сетке, мы можем представить, что это газ в “коробке”, и он не может выйти за границы этой “коробки”. Для скорости мы используем условие прилипания, которое определяет, что скорость становится нулевой на границах. Корректное решение уравнения Пуассона для давления требует чистые граничные условия Неймана: , это означает, что на границах скорость изменения давления в направлении нормали равна нулю.

# Реализация

## CUDA реализация Навье-Стокса

Моделирование потоков воздуха происходит в трехмерной декартовой сетке, размер которой может варьироваться.

## Бортовое оборудование

### Гироскоп

### Акселерометр

### Барометр

### Магнитометр

### Система глобального позиционирования

## Камеры

## Фильтры

## Средства анализа данных

# Система управления

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. James F. Roberts, Timothy S. Stirling. Quadrotor Using Minimal Sensing For Autonomous Indoor Flight. 2007.

2. Haomiao Huang, Gabriel M. Hoffmann. Aerodynamics and Control of Autonomous Quadrotor Helicopters in Aggressive Maneuvering.

3. Anders Friis Sorensen. Autonomos Control of a Miniature Quadrotor Following Fast Trajectories. 2010.

4. Jorge Bardina, T. Rajkumar. Intelligent Launch and Range Operations Virtual Test Bed.

5. Qimi Jiang, Daniel Mellinger, Christine Kappeyne, Vijay Kumar. Analysis and Synthesis of Multi-Rotor Aerial Vehicles. 2011.

6. Stam, J. 1999. "Stable Fluids." In Proceedings of SIGGRAPH 1999.