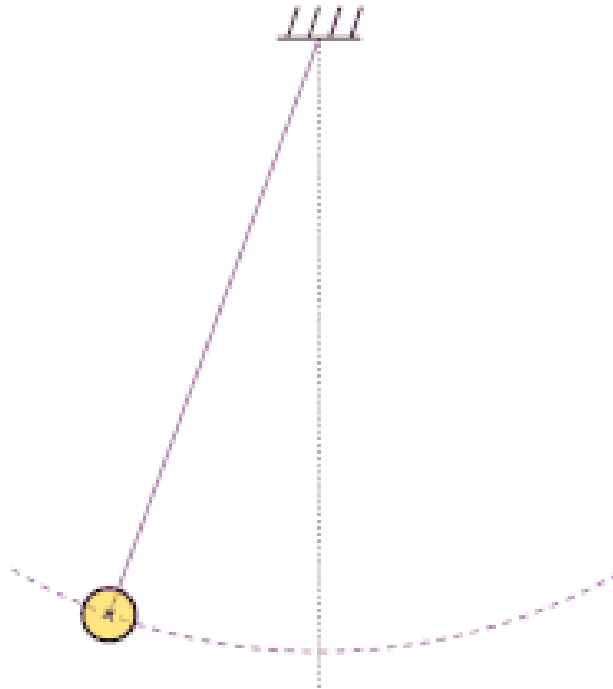


# Projet d'Équation Différentielle Ordinaire : Oscillations d'un pendule

Alan AKSOY et Yacine BEN AMI

Septembre 2024



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Étude du pendule simple</b>	<b>4</b>
1.1	Partie Théorique . . . . .	4
1.1.1	Existence et unicite d'une solution . . . . .	5
1.1.2	Résolution analytique du problème linéaire . . . . .	5
1.1.3	Résolution analytique du problème non linéaire . . . . .	6
1.2	Partie Numérique : Codes en Octave . . . . .	8
1.2.1	Méthode Euler Explicite . . . . .	8
1.2.2	Méthode Runge-Kutta . . . . .	8
1.2.3	Résultats obtenus . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Étude du pendule couplé</b>	<b>13</b>
2.1	Partie théorique . . . . .	13
2.2	Partie Numérique : Codes en Octave . . . . .	14

# Introduction

Le pendule est l'un des systèmes mécaniques les plus classiques et les plus étudiés en physique. Depuis les premières études de Galilée, il a servi de base à de nombreuses découvertes scientifiques, notamment en mécanique et en horlogerie. En raison de sa simplicité, il est souvent utilisé comme modèle pour étudier les oscillations dans des systèmes physiques plus complexes.

Dans ce projet, nous nous sommes intéressés à deux types de pendules : le pendule simple et les pendules couplés.

Le pendule simple consiste en une masse suspendue à un fil de longueur fixe, qui oscille sous l'effet de la gravité. Pour des petites oscillations, il peut être approximé par un système linéaire, mais au-delà, les comportements deviennent non linéaires, rendant l'analyse plus complexe. Nous avons donc exploré à la fois le cas linéaire et le cas non linéaire du pendule simple.

Ensuite, nous avons étendu l'analyse aux pendules couplés, où deux pendules interagissent entre eux. Ce type de système modélise des interactions dynamiques plus complexes, et nécessite des méthodes numériques robustes pour obtenir des solutions précises. Tout au long du projet, nous avons comparé deux méthodes numériques principales : Euler explicite et Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), en mettant en avant leurs avantages et inconvénients respectifs.

# 1 Étude du pendule simple

## 1.1 Partie Théorique

L'équation du pendule simple, qui modélise le mouvement d'une masse suspendue à un fil sous l'effet de la gravité, est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0$$

où :

- $\theta(t)$  est l'angle du pendule par rapport à la verticale à l'instant  $t$  (en radians),
- $g$  est la constante de la pesanteur (en m/s<sup>2</sup>),
- $l$  est la longueur du fil du pendule (en mètres).

Pour étudier cette équation, nous devons reformuler le problème sous la forme d'un problème de Cauchy.

Posons le vecteur d'état  $X(t)$  comme suit :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

L'équation différentielle du mouvement du pendule devient alors un système :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

Nous notons  $f$  la fonction définie par :

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1) \end{pmatrix}.$$

Le problème de Cauchy s'écrit alors :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), & \forall t \geq 0, \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

### 1.1.1 Existence et unicite d'une solution

Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence d'une solution maximale pour les équations différentielles du type que nous avons, tant que la fonction  $f$  et ses dérivées partielles sont continues sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . La fonction  $f$ , définie par :

$$f(t, X) = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

est clairement continue, et ses dérivées partielles par rapport à  $\theta$  et  $\theta'$  sont également continues. Ainsi, il existe une solution unique  $X(t)$  maximale définie sur un intervalle  $[0, T^*[$ , avec  $T^* > 0$ .

Pour vérifier si la solution est globale, c'est-à-dire définie pour tout  $t \geq 0$ , nous utilisons une méthode basée sur l'estimation de la norme infinie de la fonction  $f$ . Nous avons :

$$\|f(t, y)\|_\infty = \max \left( \left| \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) \right|, |\theta'(t)| \right).$$

Comme  $\sin(\theta)$  est bornée, nous avons l'estimation suivante :

$$\|f(t, y)\|_\infty \leq \frac{g}{l} + \|y\|_\infty.$$

Cela signifie que la norme de  $f$  est contrôlée par un terme constant et un terme qui dépend de la norme de la solution  $y$ . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, tant que  $\|f(t, y)\|_\infty$  reste bornée, la solution est définie pour tout  $t \geq 0$ , et donc définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

### 1.1.2 Résolution analytique du problème linéaire

Pour simplifier la résolution du problème, nous étudions d'abord le cas des petites oscillations. Lorsque l'angle  $\theta(t)$  est petit, nous pouvons utiliser l'approximation  $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$ . L'équation devient alors linéaire :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{g}{l} = 0.$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont :

$$r = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle est donnée par :

$$\theta(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right),$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

### 1.1.3 Résolution analytique du problème non linéaire

Dans le cas non linéaire, nous considérons l'équation complète du pendule simple sans approximation sur  $\sin(\theta(t))$  :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0.$$

Cette équation est non linéaire en raison du terme  $\sin(\theta)$ , ce qui rend la résolution analytique plus complexe que dans le cas linéaire. Cependant, en utilisant des méthodes issues de la mécanique classique, notamment la conservation de l'énergie, nous pouvons obtenir des résultats intéressants sur le comportement du système.

**Conservation de l'énergie** La conservation de l'énergie nous permet de transformer l'équation différentielle en une équation plus simple. En multipliant l'équation du mouvement par  $\theta'(t)$ , nous obtenons :

$$\theta'(t)\theta''(t) = -\frac{g}{l}\theta'(t)\sin(\theta(t)).$$

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{l} \cos(\theta(t)) \right] = 0.$$

Cela montre que l'expression entre crochets est conservée au cours du temps, c'est-à-dire que l'énergie mécanique totale du système reste constante. L'énergie totale est donc donnée par :

$$E = \frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{l} \cos(\theta(t)).$$

En utilisant les conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\theta'(0) = \omega_0$ , nous obtenons l'énergie initiale :

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 + \frac{g}{l} \cos(\theta_0).$$

La conservation de l'énergie implique que pour tout  $t \geq 0$  :

$$\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{l} \cos(\theta(t)) = \frac{1}{2}\omega_0^2 + \frac{g}{l} \cos(\theta_0).$$

**Résolution de l'équation énergétique** À partir de la conservation de l'énergie, nous pouvons isoler  $\theta'(t)$  :

$$(\theta'(t))^2 = \omega_0^2 - 2\frac{g}{l} [\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)].$$

En prenant la racine carrée des deux côtés, nous obtenons :

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{g}{l} [\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)]}.$$

Le cas non linéaire ne permet pas d'obtenir une solution explicite. Cependant, la conservation de l'énergie nous permet d'obtenir des informations qualitatives sur le comportement du pendule. Pour des amplitudes petites, le mouvement peut être bien approché par l'équation linéaire, mais pour des amplitudes plus grandes, il devient nécessaire d'utiliser des méthodes numériques.

## 1.2 Partie Numérique : Codes en Octave

### 1.2.1 Méthode Euler Explicite

La méthode d'Euler explicite est une méthode numérique simple pour résoudre des équations différentielles comme celle du pendule simple. En considérant une discrétisation temporelle avec un pas de temps  $h$ , nous avons les itérations suivantes :

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + h\theta'_n, \\ \theta'_{n+1} &= \theta'_n - h\frac{g}{l}\sin(\theta_n).\end{aligned}$$

Cette méthode est simple à implémenter mais peut souffrir d'instabilité pour des grands pas de temps. Voici la fonction Euler Explicite :

```
1 function [temps, solution] = euler_explicite(f,  
2     intervalle_temps, y0, pas)  
3     temps = intervalle_temps(1):pas:intervalle_temps(2);  
4     % Generer les valeurs de temps  
5     n_steps = length(temps);           % Nombre de pas de  
6     temps  
7     solution = zeros(length(y0), n_steps);  
8     solution(:,1) = y0;  
9  
10    % Boucle sur chaque pas de temps  
11    for i = 1:(n_steps-1)  
12        t = temps(i);  
13        y = solution(:,i);  
14  
15        % Calcul de la prochaine valeur de y en  
16        utilisant la methode d'Euler explicite  
17        solution(:,i+1) = y + pas * f(t, y);  
18    end  
19 end
```

### 1.2.2 Méthode Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est plus stable et plus précise que la méthode d'Euler. Elle repose sur l'utilisation de plusieurs étapes in-



termédiaires pour calculer une approximation plus précise de la solution :

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

avec  $K_1, K_2, K_3, K_4$  les évaluations de la fonction  $f$  à différents points intermédiaires dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ . Voici la fonction RK4 :

```

1 function [temps, solution] = RK4(f, intervalle_temps, y0
  , pas)
2     temps = intervalle_temps(1):pas:intervalle_temps(2);
      % Generer les valeurs de temps
3     n_steps = length(temps);           % Nombre de pas de
      temps
4     solution = zeros(length(y0), n_steps);
5     solution(:,1) = y0;
6
7     % Boucle sur chaque pas de temps
8     for i = 1:(n_steps-1)
9         t = temps(i);
10        y = solution(:,i);
11
12        % Calcul de k1, k2, k3, k4
13        k1 = f(t, y);
14        k2 = f(t + pas/2, y + pas/2 * k1);
15        k3 = f(t + pas/2, y + pas/2 * k2);
16        k4 = f(t + pas, y + pas * k3);
17
18        % Calcul de la prochaine valeur de y
19        solution(:,i+1) = y + pas/6 * (k1 + 2*k2 + 2*k3
          + k4);
20    end
21 end

```

### 1.2.3 Résultats obtenus

#### Cas linéaire

Pour le cas linéaire, nous avons comparé les solutions obtenues par les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) avec la solution exacte. Les erreurs obtenues pour chaque méthode sont présentées dans

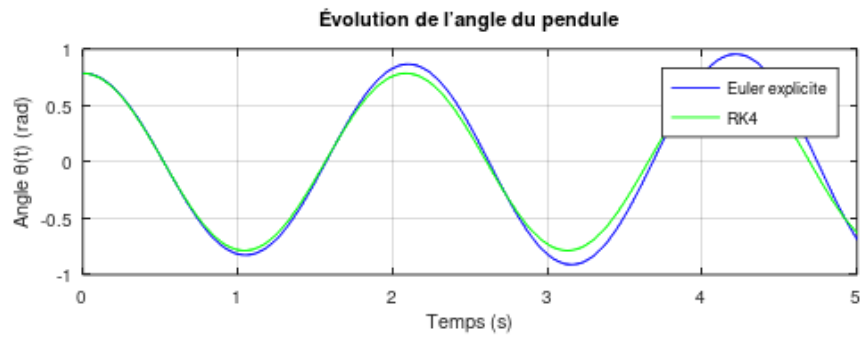
le tableau ci-dessous, mettant en évidence la différence de précision entre les deux approches.

Intervalle de temps	Pas de temps	Erreur Euler Explicite	Erreur RK4
0 à 5	0.001	$1.428990 \times 10^{-2}$	$7.274299 \times 10^{-12}$
0 à 5	0.01	$1.553750 \times 10^{-1}$	$7.276432 \times 10^{-7}$
0 à 10	0.001	$2.877925 \times 10^{-2}$	$1.458086 \times 10^{-11}$
0 à 10	0.01	$3.420118 \times 10^{-1}$	$1.458202 \times 10^{-7}$
0 à 100	0.01	$4.211278 \times 10^{+1}$	$1.454568 \times 10^{-6}$
0 à 100	0.1	$4.090404 \times 10^{+11}$	$1.449416 \times 10^{-2}$

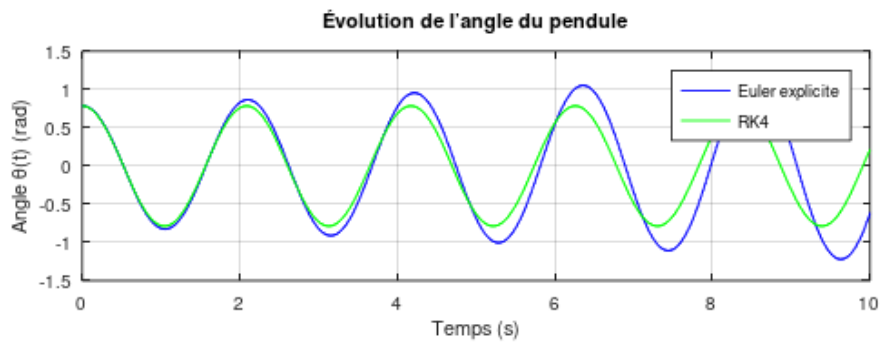
TABLE 1 – Comparaison des erreurs Euler explicite et RK4 pour différents pas de temps

### Cas non linéaire

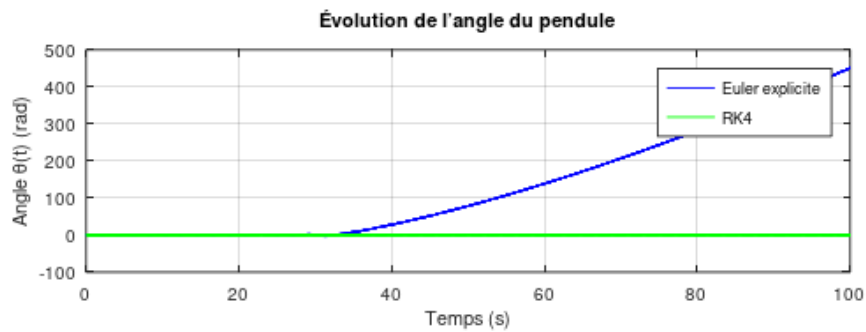
Pour le cas non linéaire, nous avons simulé le comportement du pendule sur différentes périodes de temps et comparé les solutions obtenues avec la méthode d'Euler explicite et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Voici les graphiques obtenus :



(a) Évolution sur 5 secondes



(b) Évolution sur 10 secondes



(c) Évolution sur 100 secondes

FIGURE 1 – Comparaison de l'évolution de l'angle du pendule à différents intervalles de temps

### Conclusion : Analyse des résultats

Après avoir examiné les résultats du tableau et les graphiques pour le cas non linéaire, il est clair que les deux méthodes présentent des comportements

bien différents.

Tout d'abord, la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)** se montre bien plus précise que celle d'**Euler explicite**. Pour tous les pas de temps testés, RK4 produit des erreurs extrêmement faibles, de l'ordre de  $10^{-12}$  à  $10^{-7}$ . En revanche, les erreurs associées à Euler explicite augmentent rapidement, surtout lorsque le pas de temps devient plus grand.

Par exemple, lorsque l'intervalle de temps est de 0 à 100 secondes avec un pas de 0.1, l'erreur d'Euler explicite atteint  $4.090404 \times 10^{+11}$ , ce qui montre une divergence spectaculaire. En comparaison, RK4 ne fait quasiment aucune erreur avec une valeur de seulement  $1.449416 \times 10^{-2}$ .

Les graphiques illustrent également un autre point : la méthode d'Euler explicite, bien qu'elle fonctionne pour des petits intervalles de temps, devient instable sur des périodes plus longues. En particulier, après 100 secondes, la solution obtenue avec Euler explose complètement, tandis que RK4 reste stable et très proche de la solution exacte.

Cette divergence est typique des méthodes simples comme Euler explicite, en particulier lorsqu'il s'agit d'équations non linéaires comme celles qui décrivent le pendule.

Lorsque le pas de temps est très petit (par exemple 0.001 ou 0.01), l'erreur d'Euler explicite est plus acceptable, mais elle reste tout de même plus grande que celle de RK4. Cela montre qu'Euler explicite peut être utilisé, mais au prix d'une augmentation considérable du nombre de calculs nécessaires, ce qui rend RK4 plus efficace dans la plupart des situations.

En résumé, la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)** est largement supérieure à celle d'**Euler explicite**, que ce soit en termes de précision, de stabilité ou d'efficacité. Bien que la méthode d'Euler soit simple à mettre en œuvre, elle est très sensible au choix du pas de temps et devient rapidement instable si ce dernier est trop grand. De son côté, RK4 permet d'obtenir des résultats fiables et stables, même avec des pas de temps plus grands, ce qui en fait un choix plus robuste pour résoudre des équations différentielles complexes.

## 2 Étude du pendule couplé

### 2.1 Partie théorique

Les pendules couplés constituent un exemple fascinant de système dynamique, où deux pendules simples sont reliés par un ressort. Cette configuration crée un lien entre les mouvements des deux pendules, provoquant des échanges d'énergie entre eux et rendant l'étude du système complexe et riche en comportements oscillatoires. L'analyse mathématique de ces systèmes implique la formulation d'un système d'équations différentielles non linéaires.

#### Modélisation mathématique

Dans le cas de deux pendules couplés, les équations de mouvement peuvent être formulées de la manière suivante :

$$\theta_1''(t) + \frac{g}{l_1} \sin(\theta_1(t)) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = 0,$$

$$\theta_2''(t) + \frac{g}{l_2} \sin(\theta_2(t)) + k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0,$$

où  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$  représentent les angles des deux pendules par rapport à la verticale,  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs des pendules,  $g$  est l'accélération due à la gravité, et  $k$  est la constante de couplage qui représente la force exercée par le ressort reliant les deux pendules.

#### Existence et unicité des solutions

Le système des pendules couplés peut être reformulé sous la forme d'un problème de Cauchy. Considérons deux pendules avec des angles  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ , ainsi que leurs dérivées angulaires respectives  $\dot{\theta}_1(t)$  et  $\dot{\theta}_2(t)$ . Le système d'équations peut être écrit sous la forme d'un vecteur d'état  $\mathbf{X}(t)$  :

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Les équations différentielles du système prennent alors la forme suivante :

$$\mathbf{X}'(t) = f(t, \mathbf{X}(t)),$$

où la fonction  $f$  est définie par :

$$f(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ -\frac{g}{l_1} \sin(\theta_1(t)) - k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ -\frac{g}{l_2} \sin(\theta_2(t)) - k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Le problème de Cauchy est alors défini par :

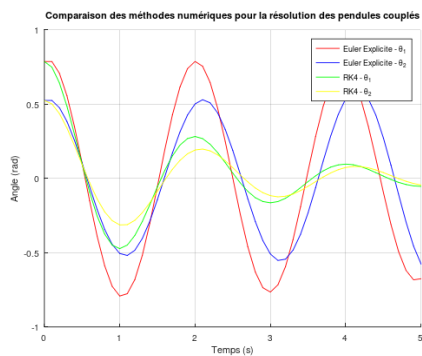
$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = f(t, \mathbf{X}(t)), \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases}$$

où  $\mathbf{X}_0$  représente les conditions initiales du système, à savoir les valeurs initiales des angles et des vitesses angulaires des deux pendules.

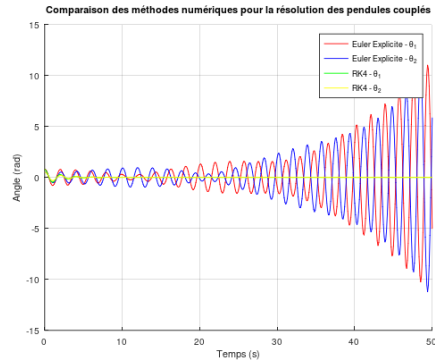
Puisque la fonction  $f(t, \mathbf{X}(t))$  est composée de termes continus, tels que  $\sin(\theta_1(t))$ ,  $\sin(\theta_2(t))$ , et des termes linéaires en  $\theta_1(t) - \theta_2(t)$ , elle est continue par rapport à  $t$  et à  $\mathbf{X}(t)$ . De plus, ces termes satisfont localement la condition de Lipschitz. Par conséquent, selon le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution unique à ce système sur un intervalle de temps donné.

## 2.2 Partie Numérique : Codes en Octave

Pour le cas des pendules couplés, nous avons procédé à une analyse similaire à celle du pendule simple, en comparant les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Le système des pendules couplés est modélisé par un ensemble d'équations différentielles non linéaires, qui décrit l'interaction dynamique entre les deux pendules.



(a) Comparaison sur 5 secondes



(b) Comparaison sur 50 secondes

FIGURE 2 – Comparaison des méthodes numériques pour la résolution des pendules couplés sur différentes périodes de temps.

Ces graphiques comparent les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) pour la résolution des équations différentielles non linéaires modélisant le système. À l'instar du pendule simple, la méthode d'Euler explicite montre rapidement des signes d'instabilité sur des périodes de temps plus longues, avec des oscillations croissantes et irréalistes. En revanche, la méthode RK4 maintient une solution stable et fidèle à la dynamique du système sur l'ensemble de la durée de la simulation.

Ces résultats confirment l'efficacité supérieure de la méthode RK4 pour les systèmes non linéaires, en termes de précision et de stabilité, par rapport à la méthode d'Euler explicite.

## Conclusion

L'étude des oscillations du pendule simple nous a permis de mieux appréhender les comportements dynamiques de ce système mécanique classique. À travers l'analyse théorique et les simulations numériques, nous avons constaté les limites des approximations linéaires pour les petites oscillations et les défis plus complexes que présente le cas non linéaire.

La comparaison entre la méthode d'Euler explicite et celle de Runge-Kutta d'ordre 4 a clairement montré la supériorité de cette dernière, tant en termes de précision que de stabilité, notamment sur des périodes de temps plus longues. Ces résultats mettent en évidence l'importance de sélectionner la méthode numérique adéquate selon la nature du problème à résoudre.

En ce qui concerne les pendules couplés, l'analyse que nous avons présentée reste succincte, mais elle offre un premier aperçu des dynamiques spécifiques à ce type de système. Même si nous n'avons fait qu'effleurer le sujet, les résultats obtenus illustrent certains comportements intéressants, notamment l'interaction entre les deux pendules. Une étude plus approfondie permettrait d'explorer ces phénomènes en détail. Ce travail ouvre ainsi la voie à de futures recherches pour mieux comprendre ces systèmes dynamiques complexes.

## Références

- [1] Nicolas Vauchelet, *Cours d'Équations différentielles ordinaires*, Université de Paris 13, Macs 1, 2024.
- [2] Pascal Omnes, *Cours de TP EDO*, MACS1, 2023.
- [3] Wikipedia, *Pendule simple*, disponible sur [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule\\_simple](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple).
- [4] CultureSciences Physique, *Les pendules couplés et les solitons*, disponible sur <https://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/pdf/pendules-couples-soliton.pdf>.
- [5] Université de Nantes, *TP sur les pendules couplés*, disponible sur [https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/jacques\\_charrier/tp/pendc/pendc4.html](https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/jacques_charrier/tp/pendc/pendc4.html).