Oscillations d'un pendule simple

Projet EDO

Alan AKSOY et Yacine BEN AMI

MACS 2 - Sup Galilée - Institut Galilée - Université Sorbonne Paris Nord

Septembre 2024

Sommaire

Pendule simple

θ vérifie l'équation :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0$$

où :
- $\theta(t)$ est l'angle du pendule par rapport à la verticale à l'instant t (en radians),
- g est la constante de la pesanteur $(\mathrm{m}/\mathrm{s}^2)$,
- l est la longueur du fil du pendule (en mètres).

Problème de Cauchy

Posons $X = \binom{\theta}{\theta'}$. Alors $X' = \binom{\theta'}{\theta''} = \binom{\theta'}{\frac{-g}{l}\sin(\theta)}$. En notant f la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y = (y_1, y_2)) \longmapsto \binom{y_2}{\frac{-g}{l}\sin(y_1)} \end{cases}$$

L'équation (1) devient :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), \forall t \geq 0 \\ X(0) = \binom{\theta_0}{0} := X_0 \end{cases}$$

Existence et unicité d'une solution

- **Théorème de Cauchy-Lipschitz** : Ce théorème garantit l'existence d'une solution maximale tant que la fonction f et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.
- **Continuité de f** : La fonction $f(t, X)$, définie par $f(t, X) = (\theta'(t), -\frac{g}{l}\sin(\theta(t)))$, est continue, tout comme ses dérivées partielles.
- **Solution unique** : Il existe donc une solution unique $X(t)$, définie sur un intervalle $[0, T^*]$ avec $T^* > 0$.
- **Estimation de la norme infinie** : Pour vérifier si la solution est globale, on estime la norme infinie de f. Cette norme est bornée par un terme constant et dépend de la solution y.
- **Solution globale** : Si $\|f(t, y)\|_\infty$ reste bornée, la solution est définie pour tout $t \geq 0$, indiquant une solution globale sur $\mathbb{R}^+$.

Résolution analytique du problème linéaire

- **Approximation pour petites oscillations** : Pour des petites oscillations, on utilise l'approximation $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$, ce qui permet de linéariser l'équation.
- **Équation linéaire** : L'équation du pendule devient alors :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0,$$

  qui est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.
- **Solution de l'équation caractéristique** : L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + \frac{g}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

- **Solution générale** : La solution générale de l'équation est donnée par :

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

  où A et B sont des constantes déterminées par les conditions

Équation non linéaire complète : L'équation du pendule sans approximation est :

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0.$$

Cette équation est non linéaire en raison du terme $\sin(\theta(t))$.

Conservation de l'énergie : En multipliant l'équation par $\theta'(t)$, on obtient l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{l}\cos(\theta(t))\right] = 0.$$

Cela montre que l'énergie totale du système est conservée.

Formulation de l'énergie totale : L'énergie totale est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}(\theta'(t))^2 + \frac{g}{l}\cos(\theta(t)).$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient l'énergie initiale E_0 :

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 + \frac{g}{l}\cos(\theta_0).$$

Résolution de l'équation énergétique

- **Résolution qualitative** : En isolant $\theta'(t)$ à partir de la conservation de l'énergie, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{g}{l}[\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)]}.$$

  Cette équation ne permet pas de solution explicite, mais offre une compréhension qualitative du comportement du pendule.

- **Utilisation des méthodes numériques** : Pour des amplitudes plus grandes, des méthodes numériques sont nécessaires pour obtenir une solution précise.

Méthode Euler Explicite

- **Principe de la méthode** : La méthode d'Euler explicite est une méthode simple pour résoudre des équations différentielles en utilisant une discrétisation temporelle.

Méthode Euler Explicite (1/2)

- **Définition de la méthode** :
  - Méthode numérique simple pour résoudre les équations différentielles ordinaires (EDO).
- **Formulation** :
  - Pour une EDO $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

- **Application au pendule simple** :
  - Discrétisation des équations du mouvement :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h\theta'_n$$

$$\theta'_{n+1} = \theta'_n - h\frac{g}{l}\sin(\theta_n)$$

Méthode Euler Explicite (2/2)

- **Avantages** :
  - Simplicité d'implémentation.
  - Faible coût computationnel pour des petits pas de temps.
- **Inconvénients** :
  - Sensibilité à la taille du pas de temps : instabilité pour des grands pas.
  - Précision limitée : erreurs augmentent rapidement avec le temps.
- **Stabilité** :
  - Instabilité possible pour des grands pas de temps, entraînant des résultats non réalistes.
- **Comparaison avec d'autres méthodes** :
  - Moins précise et stable que Runge-Kutta d'ordre 4.

Fonction Matlab Euler Explicite

```
function [temps, solution] = euler_explicite(f,
    intervalle_temps, y0, pas)
    % Initialiser les variables
    temps = intervalle_temps(1):pas:intervalle_temps(2);
        % Generer les valeurs de temps
    n_steps = length(temps);        % Nombre de pas de
       temps
    solution = zeros(length(y0), n_steps); % Initialiser
        la solution
    solution(:,1) = y0; % Condition initiale

    % Boucle sur chaque pas de temps
    for i = 1:(n_steps-1)
        t = temps(i);
        y = solution(:,i);

        % Calculer la prochaine valeur de y en utilisant
            la methode d'Euler explicite
        solution(:,i+1) = y + pas * f(t, y);
    end
end
```

Méthode Runge-Kutta (1/2)

- **Définition de la méthode** :
  - Méthode numérique avancée pour résoudre des équations différentielles ordinaires (EDO).
- **Formulation de la méthode** :
  - La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) calcule la solution en utilisant une combinaison pondérée de plusieurs évaluations intermédiaires de la fonction $f(t, y)$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

  - Où :

$$K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(t_n + h, y_n + hK_3)$$

Méthode Runge-Kutta (2/2)

- **Avantages** :
  - Haute précision, même pour des pas de temps relativement grands.
  - Meilleure stabilité que la méthode d'Euler explicite.
- **Inconvénients** :
  - Plus complexe à implémenter que la méthode d'Euler.
  - Plus coûteuse en termes de calculs par itération.
- **Applications typiques** :
  - Utilisée pour des simulations où la précision et la stabilité sont cruciales, particulièrement pour des systèmes non linéaires.

Résultats Obtenus : Cas Linéaire (1/2)

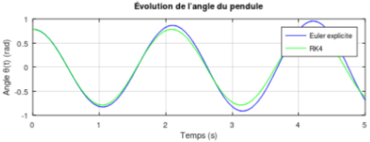
- **Comparaison des méthodes** :
  - Les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) ont été comparées avec la solution analytique du pendule simple.
- **Erreurs observées** :
  - Les erreurs obtenues pour chaque méthode sont récapitulées dans l'image suivante :

Erreurs Observées : Tableau Comparatif

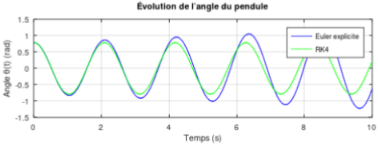
Intervalle de temps	Pas de temps	Erreur Euler Explicite	Erreur RK4
0 à 5	0.001	1.428990×10^{-2}	7.274299×10^{-12}
0 à 5	0.01	1.553750×10^{-1}	7.276432×10^{-7}
0 à 10	0.001	2.877925×10^{-2}	1.458086×10^{-11}
0 à 10	0.01	3.420118×10^{-1}	1.458202×10^{-7}
0 à 100	0.01	$4.211278 \times 10^{+1}$	1.454568×10^{-6}
0 à 100	0.1	$4.090404 \times 10^{+11}$	1.449416×10^{-2}

TABLE 1 – Comparaison des erreurs Euler explicite et RK4 pour différents pas de temps

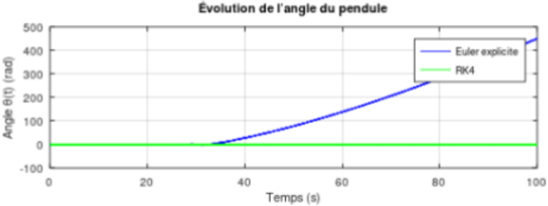
Schémas des erreurs observées



(a) Évolution sur 5 secondes



(b) Évolution sur 10 secondes



(c) Évolution sur 100 secondes

Résultats Obtenus : Cas Non Linéaire (2/2)

- **Simulation du comportement du pendule** :
  - Les simulations ont été effectuées pour différentes périodes de temps en utilisant les méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4).
- **Observations** :
  - Pour de longues périodes, la méthode d'Euler explicite devient instable, tandis que RK4 reste stable et proche de la solution exacte.
  - RK4 est plus précise pour les petits et grands pas de temps, montrant une supériorité générale par rapport à Euler explicite.
- **Conclusion** :
  - La méthode RK4 est recommandée pour les systèmes non linéaires sur des longues périodes, en raison de sa précision et de sa stabilité.

Étude Théorique : Pendule Couplé (1/2)

- **Introduction au Pendule Couplé** :
  - Les pendules couplés sont un exemple classique de système dynamique où deux pendules simples sont reliés par un ressort.
  - Ce couplage crée une interaction entre les mouvements des deux pendules, entraînant des échanges d'énergie et des comportements oscillatoires complexes.

Étude Théorique : Pendule Couplé (2/2)

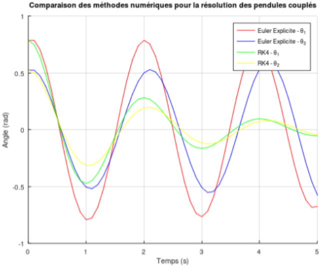
- **Modélisation Mathématique** :
  - Les équations de mouvement pour deux pendules couplés sont données par :

$$\theta_1''(t) + \frac{g}{l_1}\sin(\theta_1(t)) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = 0$$

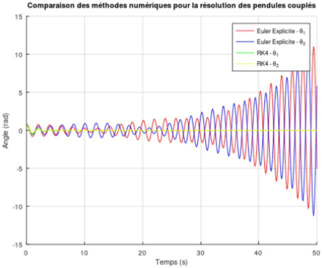
$$\theta_2''(t) + \frac{g}{l_2}\sin(\theta_2(t)) + k(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = 0$$

  - Où $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ représentent les angles des pendules, l_1 et l_2 sont les longueurs, et k est la constante de couplage.

Schémas des Équations du Pendule Couplé



(a) Comparaison sur 5 secondes



(b) Comparaison sur 50 secondes

Résumé des Comparaisons

- La méthode d'Euler explicite montre des signes d'instabilité sur de longues périodes, avec des oscillations irréalistes.
- La méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) maintient une solution stable et précise sur toute la durée de la simulation.
- Ces résultats soulignent la supériorité de RK4 pour les systèmes non linéaires en termes de précision et de stabilité.

Conclusion

- L'étude du pendule simple a révélé les limites des approximations linéaires et les défis des systèmes non linéaires.
- La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) a démontré sa supériorité sur la méthode d'Euler explicite, en termes de précision et de stabilité.
- Pour les pendules couplés, l'analyse a offert un aperçu des dynamiques complexes, soulignant le potentiel pour des recherches futures.

Références

- Nicolas Vauchelet, *Cours d'Équations différentielles ordinaires*, Université de Paris 13, Macs 1, 2024.
- Pascal Omnes, *Cours de TP EDO* MACS1, 2023.
- Wikipedia, *Pendule simple*, disponible sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple`.
- CultureSciences Physique, *Les pendules couplés et les solitons*, disponible sur `https://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/pdf/pendules-couples-soliton.pdf`.
- Université de Nantes, *TP sur les pendules couplés*, disponible sur `https://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/jacques_charrier/tp/pendc/pendc4.html`.