Compléments d'analyse fonctionnelle

Eric CANCÈS

Janvier 2022

Avant-propos

L'objectif de cette partie du cours est de présenter deux outils fondamentaux d'analyse fonctionnelle jouant un rôle central dans l'étude des modèles mathématiques non-linéaires de dimension infinie. Cette catégorie de modèles contient notamment

- les modèles faisant intervenir des équations aux dérivées partielles non-linéaires ;
- ceux rencontrés dans le contrôle des systèmes dynamiques non-linéaires, où on est amené à minimiser un certain critère sur un ensemble de trajectoires.

Le premier outil est la convergence faible dans les espaces de Hilbert (Section 1), et le second les espaces de Sobolev (Section 2) dont quelques propriétés de base ont déjà été étudiées en première année. Ces deux outils seront mis en oeuvre dans la Section 3 consacrée aux problèmes aux limites elliptiques linéaires et dans la Section 4 portant sur l'étude d'un modèle physique non-linéaire.

Les énoncés, méthodes, preuves et exercices particulièrement importants sont indiqués par des étoiles rouges (★).

Certains résultats sont énoncés sans démonstration. Des références contenant les preuves - hors programme - de ces résultats sont alors fournies.

Ces notes de cours sont récentes, et contiennent certainement quelques typos, voire quelques erreurs. Merci de me les signaler.

Table des matières

1 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

Dans toute cette section, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert (réel ou complexe) de dimension finie ou infinie.

1.1 Définition

Commençons par introduire la notion centrale de convergence faible.

★ **Définition 1** (convergence faible dans un espace de Hilbert)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ et $u \in \mathcal{H}$. On dit que*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement *vers u dans $\mathcal{H}$, ce qu'on note*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$$

si

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{H}} = 0;$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement *vers u dans $\mathcal{H}$, ce qu'on note*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$$

si

$$\forall v \in H, \quad \lim_{n\to+\infty} (v, u_n)_{\mathcal{H}} = (v, u)_{\mathcal{H}}.$$

★ **Exercice 1** (convergence faible vs convergence forte)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $u \in \mathcal{H}$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u.

2. Montrer que si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u.

3. Montrer que si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger faiblement dans $\mathcal{H}$ sans converger fortement dans $\mathcal{H}$ (*indication : supposer* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *orthonormée*).

1.2 Notions de topologie générale

Si X est un ensemble quelconque, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X, autrement dit des sous-ensembles de X. La définition suivante est à la base de la branche des mathématiques appelée topologie générale.

Définition 2 (topologie)**.** *Soit X un ensemble. Un ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X est appelée une* topologie *si*

1. *$\mathcal{O}$ contient les ensembles $\varnothing$ et X ;*

2. *$\mathcal{O}$ est stable par union quelconque ;*

3. *$\mathcal{O}$ est stable par intersection finie.*

Un élément de $\mathcal{O}$ est alors appelé un ouvert *pour la topologie $\mathcal{O}$, et le complémentaire d'un élément de $\mathcal{O}$ un* fermé *pour la topologie $\mathcal{O}$. Un ensemble $\mathcal{X}$ muni d'une topologie $\mathcal{O}$ est appelé un* espace topologique.

Notons qu'un ensemble X contenant au moins deux éléments possède au moins deux topologies distinctes, la topologie grossière $\mathcal{O}_{\text{gros}} = \{\varnothing, X\}$ et la topologie discrète $\mathcal{O}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$ et que toute topologie $\mathcal{O}$ sur X vérifie $\mathcal{O}_{\text{gros}} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{\text{disc}}$.

Définition 3 (relation d'ordre partiel sur les topologies)**.** *Soit X un ensemble et $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux topologies sur X. On dit que la topologie $\mathcal{O}_2$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}_1$ si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.*

En particulier, la topologie grossière $\mathcal{O}_{\text{gros}} = \{\varnothing, X\}$ est la moins fine de toutes les topologies sur X, et la topologie $\mathcal{O}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$ la plus fine de toutes les topologies sur X.

Définition 4 (voisinage)**.** *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. Un ensemble $V_x \subset X$ contenant un ouvert $\Omega_x \in \mathcal{O}$ contenant x (i.e. $x \in \Omega_x \subset V_x$) est appelé un* voisinage de x*. Si de plus V_x est ouvert (i.e. $x \in V_x \in \mathcal{O}$), alors V_x est appelé un* voisinage ouvert de x*.*

Définition 5 (espace topologique séparé)**.** *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. La topologie $\mathcal{O}$ est dite séparée si elle vérifie l'axiome de Hausdorff : pour tous élements distincts $x \neq y$ de X, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y tels que $V_x \cap V_y = \varnothing$. Si $\mathcal{O}$ est séparée, on dit que $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique séparé.*

Notons que la topologie discrète est séparée, mais pas la topologie grossière.

Différentes topologies permettent de définir différentes notions de convergence et de continuité. Nous verrons dans la Section 4 qu'il faut souvent jongler avec plusieurs topologies pour étudier des problèmes mathématiques en dimension infinie.

Définition 6 (convergence dans un espace topologique)**.** *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ pour la topologie $\mathcal{O}$ si pour tout voisinage V_x de x, tous les éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans V_x à partir d'un certain rang.*

Dans un espace topologique séparé, une suite donnée a au plus une limite, alors que dans un espace non séparé, une suite donnée peut avoir plusieurs limites différentes.

Exercice 2. Caractériser les suites convergentes pour les topologies grossière et discrète.

Définition 7 (continuité dans des espaces topologiques)**.** *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$. On dit que*

1. *f est continue en $x \in X$ si pour tout voisinage $V_{f(x)}$ de $f(x)$ dans Y (pour la topologie $\mathcal{O}_Y$), il existe un voisinage U_x de x dans X (pour la topologie $\mathcal{O}_X$) tel que $f(U_x) \subset V_{f(x)}$;*
2. *f est continue si f est continue en tout point de X.*

Exercice 3 (caractérisation globale de la continuité)**.** Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue,
2. pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}_X$ (l'image réciproque de tout ouvert de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un ouvert de $(X, \mathcal{O}_X)$) ;

3. pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_Y$, $X \backslash f^{-1}(Y \backslash \Omega) \in \mathcal{O}_X$ (l'image réciproque de tout fermé de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un fermé de $(X, \mathcal{O}_X)$).

Si X est un espace métrique, c'est-à-dire un ensemble muni d'une distance $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :

- symétrie : $\forall (x, y) \in X \times X,\ d(y, x) = d(x, y)$;
- inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in X \times X \times X,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$;
- séparation : $\forall (x, y) \in X \times X,\ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$,

on peut définir une topologie naturelle sur X beaucoup plus intéressante que les topologies grossière et discrète.

Définition 8 (topologie métrique)**.** *Soit (X, d) un espace métrique. La topologie séparée définie par*

$$\mathcal{O}_d = \{\Omega \subset X \mid \forall x \in \Omega,\ \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \subset \Omega\}, \tag{1}$$

où $B(x, \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ pour la distance d, est appelée topologie métrique.

Notons que la boule $B(x, \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ est un ouvert de la topologie métrique (le vérifier en exercice), d'où la terminologie "boule ouverte". De même, la boule fermée $\overline{B(x, \epsilon)} := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \epsilon\}$ est bien un ensemble fermé pour la topologie métrique. En revanche, comme nous le verrons dans la section suivante, $B(x, \epsilon)$ (resp. $\overline{B(x, \epsilon)}$) peut ne pas être un ouvert (resp. un fermé) pour d'autres topologies intéressantes.

On rappelle qu'un espace vectoriel normé X est un espace métrique particulier, puisqu'on peut associer à une norme $\|\cdot\|$ une distance naturelle définie par

$$\forall (x, y) \in X \times X, \quad d(x, y) = \|y - x\|.$$

Définition 9 (topologie forte d'un espace vectoriel normé)**.** *Soit X est un espace vectoriel normé et d la distance associée à la norme. La topologie séparée définie par* (1) *est appelée* topologie de la norme *ou* topologie forte *de X ; on la notera $\mathcal{O}_{\text{forte}}$.*

Notons que les ouverts de la topologie forte d'un espace vectoriel normé X sont les ouverts "au sens usuel" : un sous-ensemble Ω de X est ouvert pour la topologie forte si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) := \{y \in X \mid \|y - x\| < \epsilon\} \subset \Omega$.

L'exercice suivant permet de retrouver ses petits : dans des espaces métriques munis leurs topologies métriques (et donc *a fortiori* dans des espaces vectoriels normés munis de leurs topologies fortes), les notions de convergence et de continuité introduites dans les Définitions 6 et 7 coïncident avec les définitions de convergence et de continuité séquentielle vues en cycle L.

Exercice 4 (continuité et continuité séquentielle coïncident dans les espaces métriques)**.**

1. Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X, et $x \in X$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie métrique (au sens de la Définition 6) si et seulement si $d(x_n, x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

2. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une fonction de X dans Y, et $x \in X$. Montrer que f est continue en x (au sens de la Définition 7) si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers x pour la topologie métrique de X, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y converge vers $f(x)$ pour la topologie métrique de Y.

Une topologie séparée permet aussi de définir une notion d'ensemble compact.

Définition 10 (ensemble compact selon Borel-Lebesgue)**.** *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et $K \subset X$. On dit que K est compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement d'ouverts de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini, autrement dit pour toute famille $(\Omega_i)_{i\in\mathcal{I}}$ telle que*

$$\forall i \in \mathcal{I},\ \Omega_i \in \mathcal{O} \qquad \textit{et} \qquad K \subset \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Omega_i,$$

il existe un sous-ensemble $I \subset \mathcal{I}$ de cardinal fini *tel que*

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i.$$

On peut montrer que la Définition 10, valable dans tout espace topologique, coïncide dans le cas particulier où X est un espace métrique muni de la topologie métrique, avec la définition bien connue suivante.

Théorème 11 (ensemble compact selon Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$. L'ensemble K est compact (au sens de la Définition 10) si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergence.*

Exercice 5 (l'image d'un compact par une fonction continue est un compact)**.** Montrer que si $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont des espaces topologiques séparés, K un sous-ensemble compact de X, et $f : X \to Y$ une fonction continue, alors $f(K)$ est un sous-ensemble compact de Y.

Nous allons voir maintenant que dans un espace de Hilbert, il est possible de définir, outre la topologie forte, une autre topologie séparée "naturelle", appelée *topologie faible*, qui n'est pas métrisable (elle ne peut pas être construire par le biais d'une distance) sauf si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, et pour laquelle la notion de convergence est la notion de convergence faible introduite à la Section 1.

A ce stade, le lecteur est en droit de se demander à quoi va servir cette topologie faible. Nous verrons plus loin qu'elle joue un rôle fondamental en analyse. Elle permet notamment de montrer l'existence d'une solution pour certains problèmes d'optimisation dans des espaces de Hilbert, ainsi que de résoudre certaines équations dans des espaces fonctionnels ayant une structure d'espace de Hilbert.

1.3 Convergence faible et topologie faible

Soit $\mathcal{Z}$ un ensemble *de cardinal fini* d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour $r > 0$, on pose

$$V_{u,r,\mathcal{Z}} = \{v \in \mathcal{H} \mid \forall w \in \mathcal{Z},\ |(w, v - u)_{\mathcal{H}}| < r\}$$

et

$$\mathcal{O}_{\text{faible}} = \{\Omega \subset \mathcal{H} \mid \forall u \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \exists \mathcal{Z} \subset \mathcal{H},\ \text{card}(\mathcal{Z}) < +\infty,\ V_{u,r,\mathcal{Z}} \subset \Omega\}.$$

Exercice 6 (topologie faible)**.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{O}_{\text{forte}}$ sa topologie forte.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ définit une topologie sur $\mathcal{H}$. Cette topologie est appelée la topologie faible de $\mathcal{H}$.

2. Montrer que $V_{u,r,\mathcal{Z}}$ est un voisinage ouvert de u pour la topologie faible.

3. Montrer que $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ est une topologie séparée.

4. Montrer que la topologie faible est moins fine que la topologie forte ($\mathcal{O}_{\text{faible}} \subset \mathcal{O}_{\text{forte}}$).

5. Montrer que la topologie faible est la topologie la moins fine assurant la continuité de toutes les formes linéaires (fortement) continues sur $\mathcal{H}$, i.e. des éléments de $\mathcal{H}'$.

6. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de $\mathcal{H}$ converge vers $u \in \mathcal{H}$ au sens de la topologie faible si et seulement si elle converge faiblement vers u au sens de la Définition 1.

7. Montrer que si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, la topologie faible coïncide avec la topologie forte ($\mathcal{O}_{\text{faible}} = \mathcal{O}_{\text{forte}}$).

8. Montrer que si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, alors $\mathcal{O}_{\text{faible}} \subsetneq \mathcal{O}_{\text{forte}}$. En particulier,
   - tout ouvert non vide de $\mathcal{O}_{\text{faible}}$ contient un sous-espace affine de dimension infinie et est donc non-borné ;
   - la boule unité ouverte de $\mathcal{H}$ pour la topologie forte $B_{\mathcal{H}}(0,1) := \{u \in \mathcal{H} \mid \|u\|_{\mathcal{H}} < 1\}$, est d'intérieur vide pour la topologie faible ;
   - la sphère unité fermée de $\mathcal{H}$ pour la topologie forte $S := \{u \in \mathcal{H} \mid \|u\|_{\mathcal{H}} = 1\}$ n'est pas fermée pour la topologie faible, et son adhérence est égale à la boule unité fermée de $\mathcal{H}$ pour la topologie forte $\overline{B_{\mathcal{H}}(0,1)} := \{u \in \mathcal{H} \mid \|u\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1\}$.

1.4 Compacité faible des suites bornées

On rappelle le résultat suivant relatif aux bases hilbertiennes (voir cours d'Analyse et Calcul Scientifique de première année).

★ **Théorème 12** (existence de bases hilbertiennes dans un espace de Hilbert séparable)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Alors il existe une famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que*

1. pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $(e_k, e_l)_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}$,

2. l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathcal{H}$, i.e. $\overline{\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}} = \mathcal{H}$.

Une telle famille est appelée une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. On a pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (e_k, u)_{\mathcal{H}} e_k \qquad \text{et} \qquad \|u\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(e_k, u)_{\mathcal{H}}|^2 \qquad \text{(formule de Parseval).}$$

Notons qu'il découle de ce théorème que tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable de dimension infinie est unitairement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ (si $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) ou $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ (si $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) via le choix d'une base hilbertienne.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

★ **Théorème 13** (compacité faible des suites bornées)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. De toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée d'éléments de $\mathcal{H}$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans $\mathcal{H}$ vers un certain $u \in \mathcal{H}$.*

★ *Preuve.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathcal{H}$. Posons $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\mathcal{H}}$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (si $\mathcal{H}$ n'est pas séparable, on travaille dans $\overline{\mathrm{Vect}(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ qui, muni du produit scalaire de $\mathcal{H}$, est un espace de Hilbert séparable). On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_k, u_n)_{\mathcal{H}} e_k,$$

avec en outre

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |(e_k, u_n)|^2_{\mathcal{H}} = \|u_n\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant C^2.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $((e_k, u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Par procédé diagonal, on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $((e_k, u_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain w_k. Il est clair que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |w_k|^2 \leqslant C^2.$$

On peut donc définir le vecteur $w = \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k e_k \in \mathcal{H}$. Soit maintenant $v \in \mathcal{H}$. On a

$$(v, u_{n_j})_{\mathcal{H}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} (e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} (v, e_k)_{\mathcal{H}} \quad \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k\, (v, e_k)_{\mathcal{H}} = (v, w)_{\mathcal{H}},$$

ce qui montre que $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers w. Noter que pour effectuer le passage à la limite dans la somme ci-dessus, on utilisé l'argument suivant : soit $\epsilon > 0$ et K assez grand pour que

$$\sum_{k>K} |(v, e_k)|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \left(\frac{\epsilon}{4C}\right)^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
|(v, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - (v, w)_{\mathcal{H}}| &= \left| \sum_{k\in\mathbb{N}} \left((e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - w_k\right)\, (v, e_k)_{\mathcal{H}} \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{k\leqslant K} \left((e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - w_k\right)\, (v, e_k)_{\mathcal{H}} \right| + \left| \sum_{k>K} \left((e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - w_k\right)\, (v, e_k)_{\mathcal{H}} \right| \\
&\leqslant \sum_{k\leqslant K} \left|(e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - w_k\right|\, |(v, e_k)_{\mathcal{H}}| + \|u_{n_j} - w\|_{\mathcal{H}} \left(\sum_{k>K} |(v, e_k)|^2_{\mathcal{H}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{k\leqslant K} \left|(e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - w_k\right|\, |(v, e_k)_{\mathcal{H}}| + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On choisit ensuite j assez grand pour que

$$\sum_{k\leqslant K} \left|(e_k, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - w_k\right|\, |(v, e_k)_{\mathcal{H}}| \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$

ce qui montre que $|(v, u_{n_j})_{\mathcal{H}} - (v, w)_{\mathcal{H}}| \leqslant \epsilon$ dès que j est assez grand. □

1.5 Quelques résultats essentiels

★ **Théorème 14.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.*

1. *Toute suite faiblement convergente dans $\mathcal{H}$ est bornée.*

2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* u *dans* $\mathcal{H}$*, alors* $\|u\|_{\mathcal{H}} \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\mathcal{H}}$.

3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* u *dans* $\mathcal{H}$ *et si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement vers* v *dans* $\mathcal{H}$*, alors* $\lim_{n\to+\infty}(v_n, u_n)_{\mathcal{H}} = (v, u)_{\mathcal{H}}$.

Preuve. La preuve de la première assertion n'est pas immédiate. Elle repose sur le théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus, qui découle lui-même sur le lemme de Baire. Le lecteur intéressé est renvoyé à la Section 5.3 (hors programme).

Les deux dernières assertions sont en revanche faciles à prouver une fois la première établie :

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $\mathcal{H}$, alors on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(u, u_n)_{\mathcal{H}} \leqslant \|u\|_{\mathcal{H}}\|u_n\|_{\mathcal{H}}$ la majoration

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \lim_{n\in\mathbb{N}}(u, u_n)_{\mathcal{H}} = \liminf_{n\in\mathbb{N}}(u, u_n)_{\mathcal{H}} \leqslant \|u\|_{\mathcal{H}} \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{\mathcal{H}},$$

  d'où résulte la deuxième assertion ;

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $\mathcal{H}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers v dans $\mathcal{H}$, alors

$$\begin{aligned}
|(v_n, u_n)_{\mathcal{H}} - (v, u)_{\mathcal{H}}| &\leqslant |(v_n, u_n)_{\mathcal{H}} - (v, u_n)_{\mathcal{H}}| + |(v, u_n)_{\mathcal{H}} - (v, u)_{\mathcal{H}}| \\
&= \|v_n - v\|_{\mathcal{H}}\|u_n\|_{\mathcal{H}} + |(v, u_n)_{\mathcal{H}} - (v, u)_{\mathcal{H}}| \\
&= \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \|u_m\|_{\mathcal{H}}\right) \|v_n - v\|_{\mathcal{H}} + |(v, u_n)_{\mathcal{H}} - (v, u)_{\mathcal{H}}|.
\end{aligned}$$

  Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée de par l'assertion 1, on en déduit que le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la troisième assertion.

Ceci termine la preuve du théorème. □

★ **Théorème 15** (Mazur)**.** *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* K *un sous-ensemble de* $\mathcal{H}$ *convexe et fermé pour la topologie forte. Alors,* K *est fermé pour la topologie faible. En particulier, si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* K *qui converge faiblement dans* $\mathcal{H}$ *vers un certain* $x \in \mathcal{H}$*, on a* $x \in K$.

Preuve. On peut supposer que K est non vide (sinon le résultat est évident). Posons $\Omega = \mathcal{H}\backslash K$ et montrons que Ω est ouvert pour la topologie faible. Soit $u_0 \in \Omega$. Il s'agit d'exhiber un réel $r > 0$ et une famille $\mathcal{Z}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ de cardinal fini tels que $V_{u_0,r,\mathcal{Z}} \subset \Omega$. Soit $v_0 = u_0 - P_K u_0$ où $P_K u_0$ est la projection orthogonale de u_0 sur K. Il est clair que $v_0 \neq 0$. De plus, en posant $r = \frac{1}{2}\|v_0\|_{\mathcal{H}}^2$, on vérifie facilement que $V_{u_0,r,\{v_0\}} \subset \Omega$, ce qui complète la preuve. □

★ **Théorème 16.** *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte, i.e.*

$$u_n \to u \qquad \Rightarrow \qquad J(u) \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} J(u_n).$$

Alors J *est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, i.e.*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \Rightarrow \qquad J(u) \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} J(u_n).$$

Preuve. Soit $K = \{(u,\lambda) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R} \mid J(u) \leqslant \lambda\}$ l'épigraphe de J. On munit $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ de sa structure de Hilbert canonique définie par le produit scalaire

$$((u,\lambda),(v,\mu))_{\mathcal{H}\times\mathbb{R}} = (u,v)_{\mathcal{H}} + \lambda\mu.$$

Comme J est convexe, K est un convexe de $\mathcal{H}\times\mathbb{R}$, et comme J est semi-continue inférieurement pour la topologie forte, K est fermé pour la topologie forte. Par le théorème de Mazur, K est également fermé pour la topologie faible, ce qui implique que J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. □

★ **Théorème 17.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe, continue et telle que*

$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{H}}\to+\infty} J(u) = +\infty. \tag{2}$$

Soit K un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de $\mathcal{H}$. Alors, J admet un minimiseur (global) sur K. De plus tout minimiseur local de J sur K est global, et l'ensemble des minimiseurs de J sur K est un sous-ensemble convexe fermé de K.

★ **Exercice 7.** Prouver le théorème ci-dessus.

Contrairement à ce qui se passe en dimension finie, dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension infinie, une fonction $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ continue et tendant vers $+\infty$ à l'infini n'admet pas nécessairement de miminiseur.

★ **Exercice 8** (exemple d'une fonction continue, infinie à l'infini, n'ayant pas de minimiseur)**.** Soit $\ell^2 = \{u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|u\|_{\ell^2}^2 := \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty\}$. On considère la fonction

$$f : \ell^2 \ni u \mapsto f(u) = \left(\|u\|_{\ell^2}^2 - 1\right)^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n|^2}{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la fonction f est continue (et même C^∞), tend vers $+\infty$ à l'infini, mais n'a pas de minimiseur sur ℓ^2.

1.6 Convergence faible dans L^2 et H^1

Il est clair que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $L^2(\Omega)$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers un certain $u \in L^2(\Omega)$, alors la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u a également lieu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\phi \in L^2(\Omega)$ et il vient

$$\langle u_n, \phi\rangle = (u_n,\phi)_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u,\phi)_{L^2} = \langle u,\phi\rangle.$$

Le résultat suivant est moins évident.

★ **Lemme 18.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^1(\Omega)$ qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers un certain $u \in H^1(\Omega)$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u faiblement dans $L^2(\Omega)$ (et donc aussi dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e. au sens des distributions).*

★ *Preuve.* Soit $\phi \in L^2(\Omega)$ et $w_\phi \in H^1(\Omega)$ le représentant de Riesz de la forme linéaire continue L_ϕ sur $H^1(\Omega)$ définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad L_\phi(v) := (v,\phi)_{L^2(\Omega)}.$$

On a ainsi

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad (w_\phi, v)_{H^1} = L_\phi(v) = (v,\phi)_{L^2(\Omega)},$$

et donc

$$(u_n,\phi)_{L^2(\Omega)} = (w_\phi, u_n)_{H^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (w_\phi, u)_{H^1} = (u,\phi)_{L^2(\Omega)}.$$

D'où le résultat. □

2 Espaces de Sobolev

Cette section passe en revue quelques propriétés fondamentales des espaces de Sobolev, importantes notamment pour l'étude des équations aux dérivées partielles et la théorie de l'approximation.

Outre les espaces de Sobolev, nous utiliserons dans cette section les espaces de Hölder qui sont définis de la façon suivante : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $\overline{\Omega}$ son adhérence, on pose

- pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$,
$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\},$$
où $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$;
- pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $0 < \alpha \leqslant 1$,
$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^m(\overline{\Omega}) \mid \|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} := \max_{|\beta|<m} \|\partial^\beta u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \max_{|\beta|=m} \|\partial^\beta u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty \right\},$$
où pour $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_d$ et
$$\partial^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_d^{\beta_d}}.$$

On notera l'espace vectoriel des fonctions $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact dans Ω soit $C_c^\infty(\Omega)$ (notation anglo-saxonne usuelle), soit $\mathcal{D}(\Omega)$ lorsqu'on considèrera cet espace comme l'espace des fonctions test de la théorie des distributions.

2.1 Espaces de Sobolev d'ordre entier

Le résultat suivant fournit une généralisation naturelle des espaces de Sobolev H^k vus en première année.

★ **Théorème 19.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On note $W^{k,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev*
$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leqslant k,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$
Muni de la norme définie par
$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\, |\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \qquad \text{si } 1 \leqslant p < \infty, \tag{3}$$
$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\, |\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{4}$$
$W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

★ **Exercice 9.** *Prouver le théorème ci-dessus.*

On rappelle que la condition $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^p$ tel que $|\alpha| \leqslant k$ signifie que toutes les dérivées partielles de u au sens des distributions d'ordre inférieur ou égal à k peuvent être représentées par des fonctions de $L^p(\Omega)$. Notons que $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Notons aussi qu'on pourrait choisir de munir $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme équivalente

$$\|u\| := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p,\ |\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

La raison pour laquelle nous avons choisi la norme définie par (3) est que pour $p = 2$, on a

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leqslant k,\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{5}$$

et la norme $\|\cdot\|_{W^{k,2}(\Omega)}$ est bien celle qui dérive du produit scalaire usuel sur $H^k(\Omega)$:

$$\forall (u,v) \in H^k(\Omega) \times H^k(\Omega), \quad (u,v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leqslant k} \int_\Omega \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v. \tag{6}$$

Comme $\partial^0 u = u$ et

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha|=1} \int_\Omega \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v,$$

on retrouve pour $k = 1$ la définition habituelle

$$\forall (u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Par analogie avec la définition de l'espace $H^1_0(\Omega)$ vue en première année, on définit l'espace $W^{k,p}_0(\Omega)$ de la façon suivante, qui fait sens puisque $C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $W^{k,p}(\Omega)$.

★ **Définition 20** (espace $W^{s,p}_0(\Omega)$)**.** *On note $W^{k,p}_0(\Omega)$ l'adhérence dans $W^{k,p}(\Omega)$ de l'espace $C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, autrement dit :*

$$W^{k,p}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Comme par définition $W^{k,p}_0(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $W^{k,p}(\Omega)$, c'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. De même, l'espace $H^k_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)}$.

2.2 Espaces de Sobolev d'ordre négatif

Les espaces de Sobolev d'ordre négatif sont des espaces fonctionnels qui permettent de manipuler des distributions plus singulières que des fonctions localement intégrables tout en restant dans le cadre confortable des espaces de Banach (pour les espaces $W^{-k,p}$, $p \neq 2$) ou de Hilbert (pour les espaces $H^{-k}(\Omega) = W^{-k,2}(\Omega)$). Pour simplifier la présentation, nous nous concentrons surtout dans cette section sur l'espace $H^{-1}(\Omega)$.

★ **Définition 21.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $H^{-1}(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant*

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \quad | \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leqslant C \|\phi\|_{H^1(\Omega)},$$

que l'on munit de la norme définie par

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle T, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Remarque 22. On peut déjà remarquer que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. En effet, si $f \in L^2(\Omega)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et définit donc une distribution sur Ω, et on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad |\langle f, \phi \rangle| = \left| \int_\Omega f\phi \right| \leqslant \|f\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le Théorème 25 que nous démontrerons plus loin donne une caractérisation complète des éléments de l'espace $H^{-1}(\Omega)$.

★ **Théorème 23.** *On peut identifier $H^{-1}(\Omega)$ au dual topologique de $H^1_0(\Omega)$. De plus, pour tout $T \in H^{-1}(\Omega)$,*

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u_T\|_{H^1(\Omega)},$$

où u_T est l'unique solution dans $H^1_0(\Omega)$ de l'équation $-\Delta u_T + u_T = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. La norme $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ dérive donc du produit scalaire défini par

$$(S, T)_{H^{-1}(\Omega)} = (u_S, u_T)_{H^1(\Omega)},$$

qui confère à $H^{-1}(\Omega)$ une structure d'espace de Hilbert.

★ *Preuve.* Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$. L'application linéaire

$$\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle$$

est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ *muni de la norme* H^1. Par conséquent, cette application se prolonge en une forme linéaire continue sur $H^1_0(\Omega)$, notée

$$\phi \mapsto \langle T, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)},$$

qui vérifie en particulier

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} = \langle T, \phi \rangle.$$

De plus, ce prolongement est unique car $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$ pour la norme H^1. On peut donc associer à tout $T \in H^{-1}(\Omega)$ un élément du dual topologique de $H^1_0(\Omega)$ (i.e. de l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $H^1_0(\Omega)$). On définit ainsi

$$\begin{array}{rccl} \alpha \,:\, & H^{-1}(\Omega) & \to & H^1_0(\Omega)' \\ & T & \mapsto & \langle T, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}. \end{array}$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$, α est une isométrie : pour tout $T \in H^{-1}(\Omega)$,

$$\|\alpha(T)\|_{H^1_0(\Omega)'} := \sup_{\phi \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle T, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}|}{\|\phi\|_{H^1(\Omega)}} = \sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle T, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{H^1(\Omega)}} = \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Réciproquement, soit $L \in H^1_0(\Omega)'$. Il existe une constante C telle que

$$\forall \phi \in H^1_0(\Omega), \qquad |L(\phi)| \leqslant C \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

En notant $L_{|\mathcal{D}(\Omega)}$ la restriction de L à $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$, on définit une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad |L_{|\mathcal{D}(\Omega)}(\phi)| \leqslant C \|\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Il reste à vérifier que $L_{|\mathcal{D}(\Omega)}$ est une distribution (c'est-à-dire qu'elle est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$). Soit donc K compact inclus dans Ω et $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Il vient

$$|L_{|\mathcal{D}(\Omega)}(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Or $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{|K|}\,\max_K|\phi|$ et $\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \sqrt{|K|}\,\max_K|\nabla\phi|$. Donc

$$|L_{|\mathcal{D}(\Omega)}(\phi)| \leqslant C' \max_{|\alpha|\leqslant 1,\, x\in K} |\partial^\alpha\phi|.$$

Donc $L_{|\mathcal{D}(\Omega)}$ définit une distribution (d'ordre $\leqslant 1$). On définit ainsi

$$\begin{array}{rccl} \beta\,:\, & H^1_0(\Omega)' & \to & H^{-1}(\Omega) \\ & L & \mapsto & L_{|\mathcal{D}(\Omega)}. \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que $\alpha\circ\beta = I_{H^1_0(\Omega)'}$ et que $\beta\circ\alpha = I_{H^{-1}(\Omega)}$. En particulier, α est un opérateur unitaire (i.e. une isométrie bijective) permettant d'identifier $H^{-1}(\Omega)$ au dual topologique de $H^1_0(\Omega)$.

Soit enfin $T \in H^{-1}(\Omega)$ et $u_T \in H^1_0(\Omega)$ le représentant de Riesz de la forme linéaire continue $\alpha(T) \in H^1_0(\Omega)'$. En vertu du théorème de Riesz, $\|u_T\|_{H^1_0(\Omega)} = \|\alpha(T)\|_{H^1_0(\Omega)'}$. Comme α est une isométrie, on obtient $\|u_T\|_{H^1_0(\Omega)} = \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Par définition de u_T

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \quad \int_\Omega u_T v + \int_\Omega \nabla u_T\cdot\nabla v = (u_T, v)_{H^1(\Omega)} = \langle T, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}.$$

En se restreignant aux fonctions test de $\mathcal{D}(\Omega)$, il vient

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -\Delta u_T + u_T, \phi\rangle = \int_\Omega u_T\phi + \int_\Omega \nabla u_T\cdot\nabla\phi = \langle T,\phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} = \langle T,\phi\rangle,$$

et donc $-\Delta u_T + u_T = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'unicité de la solution de cette équation dans $H^1_0(\Omega)$ résulte de la théorie des problèmes elliptiques linéaires (voir Section 3). □

Remarque 24. Il résulte des développements précédents qu'on a les inclusions

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

et on a par ailleurs pour $T \in L^2(\Omega)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T,\phi\rangle = \langle T,\phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} = \langle T,\phi\rangle_{(L^2(\Omega))',L^2(\Omega)} = (T,\phi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega T\,\phi.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est appelé *espace pivot* de ces dualités.

★ **Théorème 25** (caractérisation des éléments de H^{-1})**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une distribution T appartient à $H^{-1}(\Omega)$ si et seulement si il existe, pour tout $|\alpha| \leqslant 1$, une fonction $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ telle que*

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \partial^\alpha g_\alpha.$$

Preuve. Il est clair que si T est de la forme

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \partial^\alpha g_\alpha$$

avec $g_\alpha \in L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad |\langle T, \phi \rangle| &= \left| \langle \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \partial^\alpha g_\alpha, \phi \rangle \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} \langle g_\alpha, \partial^\alpha \phi \rangle \right| \\ &\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \|g_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \left(\sum_{|\alpha| \leqslant 1} \|g_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\phi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc $T \in H^{-1}(\Omega)$. Réciproquement, soit $T \in H^{-1}(\Omega)$ et u_T l'unique solution dans $H^1_0(\Omega)$ de l'équation $-\Delta u_T + u_T = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (cf. l'énoncé et la preuve du Théorème 23). Posons $g_0 = u_T$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = 1$, $g_\alpha = -\partial^\alpha u_T$. Comme $u_T \in H^1_0(\Omega)$, on a $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \leqslant 1$ et $T = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \partial^\alpha g_\alpha$. □

Ces résultats s'étendent aux espaces $W^{k,p}(\Omega)$ de la façon suivante.

Définition 26. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $W^{-k,p}(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant*

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \quad | \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leqslant C \|\phi\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Théorème 27. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $1 < p \leqslant \infty$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On peut identifier $W^{-k,p}(\Omega)$ au dual topologique de $W_0^{k,p'}(\Omega)$ où p' est l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Notons que le cas $p = 1$ est exclus (on rappelle que $L^1(\Omega)$ n'est pas le dual de $L^\infty(\Omega)$, alors que $L^p(\Omega)$ est le dual de $L^{p'}(\Omega)$ pour tout $1 < p \leqslant \infty$).

2.3 Espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire

La transformée de Fourier permet de définir des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour un réel s quelconque (cf. cours d'analyse de Fourier) :

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid (1 + |k|^2)^{s/2} \widehat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \right\}, \tag{7}$$

où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des distributions tempérées et $\widehat{u}$ la transformée de Fourier de u. On utilise ici la convention de normalisation donnée par

$$\forall u \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \widehat{u}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dk,$$

pour laquelle la transformée de Fourier définit un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ (en particulier $\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$). On peut vérifier facilement que l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ défini par (7), muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|^2)^s\, \overline{\widehat{u}(k)}\, \widehat{v}(k)\, dk, \tag{8}$$

est un espace de Hilbert.

Exercice 10 (nécessite des connaissances vues en cours d'analyse de Fourier)**.** Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, les espaces $H^k(\mathbb{R}^d) = W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$ définis par (5) avec $\Omega = \mathbb{R}^d$ coïncident avec les espaces $H^k(\mathbb{R}^d)$ définis par (7) et que les normes associées aux produits scalaires (6) pour $\Omega = \mathbb{R}^d$ et (8) sont équivalentes.

Pour $s > 0$ non entier, un produit scalaire équivalent sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ peut également être défini par

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = (u,v)_{H^k(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\beta|=k} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y))(\partial^\beta v(x) - \partial^\beta v(y))}{|x-y|^{d+2\alpha}}\, dx\, dy, \quad (9)$$

où $s = k + \alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$. En remplaçant $\mathbb{R}^d$ par un ouvert Ω quelconque, on peut ainsi définir des espaces $H^s(\Omega)$ pour tout $s > 0$ et tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

On peut aussi définir l'espace de Banach $W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$, d'abord pour $s > 0$ par la théorie de l'interpolation [1, Chapter 7], puis pour $s < 0$ par dualité (la Section 2.2 donne un bref aperçu de cette dernière méthode pour $s = -1$ et $p = 2$). Nous énoncerons les résultats de ce chapitre pour les espaces $H^s(\Omega)$ et $W^{s,p}(\Omega)$ avec s réel, mais seuls les résultats pour les ordres $s \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ sont au programme du cours et seront démontrés (pour certains).

2.4 Hypothèses de régularité du bord $\partial\Omega$

De nombreux modèles issus de la physique, de la mécanique ou d'autres contextes (comme la finance par exemple) font intervenir des conditions au bord posées sur la frontière du domaine d'étude (voir Section 3). La formule de Stokes, qui est l'analogue du théorème fondamental de l'analyse, et les formules d'intégration par parties en dimension d qui en découlent sont également très utilisées. Pour que ces conditions au bord ait un sens et que les formules de Stokes ou d'intégration par parties soient valides, il faut que le bord de l'ouvert Ω possède une certaine régularité. Les résultats de cette section seront énoncés avec toute la rigueur mathématique requise, mais ne seront pas démontrés pour ne pas alonger démesurément ce document.

Dans toute cette section, on note $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

★ **Définition 28** (ouverts de classe C^k, ouverts lipschitziens et uniformément lipschtiziens)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que Ω est*

- *de classe C^k si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbb{R}^d$, et un C^k-difféomorphisme $\Phi_x : \omega_1 \to V_x$, où $\omega_1 =]-1,1[^d$, tel que*

$$\Phi_x(0) = x \quad \text{et} \quad \Omega \cap V_x = \Phi_x(\{y \in \omega_1 \,|\, y_d < 0\})\,; \quad (10)$$

- *régulier*[1] *si Ω est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$;*

- *lipschitzien si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbb{R}^d$, et un homéomorphisme $\Phi_x : \omega_1 \to V$, où $\omega_1 =]-1,1[^d$, tel que Φ_x et Φ_x^{-1} soient lipschitziennes,*

$$\Phi_x(0) = x \quad \text{et} \quad \Omega \cap V_x = \Phi_x(\{y \in \omega_1 \,|\, y_d < 0\})\,;$$

[1] On utilise parfois le terme "suffisamment régulier", comme par exemple dans l'assertion "si Ω est un ouvert suffisamment régulier, on peut définir un vecteur normal sortant en tout point de $\partial\Omega$" pour signifier qu'on suppose la régularité nécessaire pour que l'assertion soit correcte.

- *uniformément lipschitzien si les constantes de Lipschitz de Φ_x et Φ_x^{-1} sont bornées uniformément en x.*

On a alors dans tous ces cas $\partial\Omega \cap V_x = \Phi_x(\{y \in \omega_1 \,|\, y_d = 0\})$. Si Ω est de classe C^k, on dit qu'une fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est dans $C^k(\overline{\Omega})$ (resp.$C^\infty(\overline{\Omega})$ si f est la restriction à $\overline{\Omega}$ d'une fonction de classe C^k (resp. C^∞) définie sur un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$.

Exemples : une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ (pour la norme euclidienne) est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe C^∞. Un carré ouvert pour $d = 2$, un cube ouvert pour $d = 3$ ne sont pas des ouverts de classe C^1, mais sont des domaines uniformément lipschitziens.

Exercice 11. Montrer qu'un ouvert borné lipschtizien de $\mathbb{R}^d$ est toujours uniformément lipschitzien, puis donner un exemple d'un ouvert (non-borné) de $\mathbb{R}^d$ lipschitzien mais pas uniformément lipschitzien.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1, son bord $\Gamma := \partial\Omega$ est une sous-variété différentielle de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ de codimension 1. Pour tout $x \in \Gamma$, l'espace tangent à Γ au point x est donné par

$$T_x\Gamma = \mathrm{Vect}(d_0\Phi_x(e_1), \cdots, d_0\Phi_x(e_{d-1})),$$

où $d_0\Phi_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ est la différentielle de Φ_x à l'origine. L'ensemble $x + T_x\Gamma$ est alors l'hyperplan affine tangent à Γ au point x, et le vecteur normal sortant au point x est l'unique vecteur $n(x)$ défini par

$$n(x) \in \mathrm{Vect}(d_0\Phi_x(e_1), \cdots, d_0\Phi_x(e_{d-1}))^\perp, \quad |n(x)| = 1, \quad d_0\Phi_x(e_d) \cdot n(x) > 0.$$

De même, si $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne[2] bornée, on peut définir son intégrale surfacique sur $\partial\Omega \cap V_x$ par

$$\int_{\partial\Omega \cap V_x} f(y)\, d\sigma(y) := \int_{]-1,1[^{d-1}} f(\Psi_x(z))\, \frac{|J_{\Phi_x}((z,0))|}{d_{(z,0)}\Phi_x(e_d) \cdot n(\Psi_x(z))}\, dz,$$

où $\Psi_x :]-1,1[^{d-1} \ni z \mapsto \Phi_x(z,0) \in \partial\Omega \cap V_x$. En utilisant une partition de l'unité de $\partial\Omega$, on peut définir l'intégrale surfacique

★ $$\int_{\partial\Omega} f(x)\, d\sigma(x), \quad \text{qu'on note aussi souvent plus simplement} \quad \int_{\partial\Omega} f(x)\, dx \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\Omega} f,$$

d'une fonction $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ borélienne bornée à support compact, et la mesure d'un borélien borné B de $\partial\Omega$ par $\sigma(B) = \int_{\partial\Omega} \mathbb{1}_B(x)\, d\sigma(x)$ où $\mathbb{1}_B : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique de B. On peut montrer que σ définit une mesure borélienne sur $\partial\Omega$ appelée mesure surfacique sur $\partial\Omega$. Cette mesure est telle que $\sigma(\partial\Omega)$ correspond, pour $d = 1$ à la longueur de la courbe fermée $\partial\Omega$, pour $d = 2$ à l'aire de la surface fermée $\partial\Omega$, etc.

On peut montrer en outre que les espaces affines $x + T_x\Gamma$ pour $x \in \partial\Omega$, le champ de vecteur $n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$, ainsi que la mesure borélienne σ sur $\partial\Omega$ sont intrinsèques : ces objets ne dépendent pas des choix des C^1-difféomorphismes Φ_x vérifiant (10).

Un résultat essentiel du calcul différentiel et intégral en dimension d est la formule de Stokes, qui affirme que si Ω est un ouvert de classe C^1 et $\phi \in C^1_c(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à support compact, on a

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, \phi(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \phi(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x).$$

[2]La topologie naturelle de $\partial\Omega$ qu'on utilise pour définir la notion de fonction borélienne sur $\partial\Omega$ est la topologie induite. Si X est un espace vectoriel topologique, et A un sous-ensemble de X, la topologie sur A induite par celle de X est définie de la façon suivante : les ouverts de A pour cette topologie sont par définition les sous-ensembles de A de la forme $A \cap U$ où U est un ouvert de X. Ainsi par exemple, si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0,1[$, les intervalles $]a,b[$ avec $0 < a < b < 1$ et $[0,b[$ avec $0 < b < 1$ sont des ouverts de A pour la topologie induite ; on parle aussi d'ouverts relatifs de A.

Exercice 12. Détailler les constructions de $T_x\Gamma$, $n(x)$ et σ et prouver la formule de Stokes dans les quatre cas suivants :

1. $\Omega = \mathbb{R}\times]0,-\infty[$;
2. $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < g(x_1)\}$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée de classe C^1 ;
3. $\Omega = \{(z,x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d < g(z)\}$ où $g : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée de classe C^1 ;
4. Ω est le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On peut étendre les constructions ci-dessus au cas lipschitzien en utilisant le fait que la différentielle au sens des distributions d'une fonction lipschitzienne est une fonction L^∞. Ceci permet notamment de définir un vecteur normal sortant en presque tout point du bord $\partial\Omega$ d'un ouvert lipschitzien.

★ **Théorème 29** (mesure surfacique, champ de vecteur normal sortant, et formule de Stokes pour un ouvert lipschitzien)**.** *Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On peut définir une mesure borélienne surfacique σ sur $\partial\Omega$ et un vecteur normal sortant $n(x)$ en presque tout $x \in \partial\Omega$ (pour la mesure σ) tel que*

$$\forall \phi \in C^1_c(\overline{\Omega};\mathbb{R}^d), \qquad \int_\Omega \operatorname{div}\phi(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \phi(x)\cdot n(x)\,d\sigma(x).$$

Ces objets coïncident avec ceux définis ci-dessus dans le cas où Ω est de classe C^1.

Terminons cette section par une notion permettant d'adapter des résultats prouvés sur $\mathbb{R}^d$ tout entier à des ouverts suffisamment réguliers. Typiquement (on verra un exemple de mise en oeuvre concrète de cette idée dans la preuve du Corollaire 45), pour qu'un résultat relatif à l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ puisse être étendu à l'espace $W^{s,p}(\Omega)$, il faut que l'ouvert Ω vérifie la propriété suivante.

Définition 30 (extensibilité$-(s,p)$)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $s \geqslant 0$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On dit que Ω vérifie la propriété dite d'extensibilité$-(s,p)$ s'il existe un opérateur de prolongement $P : W^{s,p}(\Omega) \to W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ linéaire, continu, et tel que $\forall u \in W^{s,p}(\Omega)$, $(Pu)|_\Omega = u$.*

Théorème 31 (classes d'ouverts possédant la propriété d'extensibilité$-(s,p)$)**.** *Tout ouvert lipschitzien vérifie la propriété d'extensibilité$-(s,p)$ pour tout $s \geqslant 0$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

De même que pour les espaces $H^k(\Omega)$, on a les résultats de densité suivants.

★ **Théorème 32.** *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $s \geqslant 0$ et $1 \leqslant p < \infty$.*

1. *L'espace $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ vérifiant la propriété d'extensibilité$-(s,p)$, alors $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{s,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{s,p}(\Omega)$.*

On montre la première assertion par troncature et régularisation par convolution, et la deuxième en utilisant la propriété d'extensibilité$-(s,p)$.

2.5 Théorèmes de trace

Rappelons pour commencer la notion de trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ pour un ouvert Ω régulier entrevue en première année. Si $u \in C^0(\overline{\Omega})$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma(u) \,:\, \partial\Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x). \end{array}$$

En d'autres termes, $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$. Notons que l'application trace définie sur $C^0(\overline{\Omega})$, i.e.

$$\begin{array}{rcl} \gamma \,:\, C^0(\overline{\Omega}) & \to & C^0(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & \gamma(u) \end{array}$$

est linéaire et continue pour les normes uniformes. La question qui se pose maintenant est la suivante : peut-on étendre la notion de trace à des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues au voisinage de $\partial\Omega$? Voici quelques éléments de réponse :

1. on ne peut pas définir la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$.

   Considérons en effet à titre d'exemple la fonction $u : x \mapsto \sin(1/x)$ sur $\Omega =]0, 1[$. L'ensemble $\partial\Omega$ est alors composé des deux points 0 et 1. La fonction u est continue en 1 et on peut donc définir sa trace en 1 (c'est le réel $\sin 1$) ; en revanche, l'ensemble des valeurs d'adhérence de u en 0 est l'intervalle $[-1, 1]$; il n'y a donc pas de façon naturelle de définir la trace de u (la valeur de u) en 0 ;

2. en dimension 1, une fonction qui est dans $H^1(]a, b[)$ admet un unique représentant continu dans $C^0([a, b])$. On peut donc définir la trace en a et en b d'une fonction de $H^1(]a, b[)$;

3. en dimension $\geqslant 2$, une fonction qui est dans $H^1(\Omega)$ n'admet pas nécessairement de représentant continu. On peut cependant définir la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$ comme l'affirme le résultat suivant.

★ **Théorème 33** (trace au bord d'une fonction H^1)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ uniformément lipschitzien. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 \,:\, H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & \gamma_0(u) := u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, encore notée γ_0 et appelée application trace. On a

$$\mathrm{Ker}(\gamma_0) = H^1_0(\Omega).$$

De plus, on a la formule d'intégration par parties en dimension d

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} uv(n \cdot e_i)\, d\sigma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \tag{11}$$

où dans l'intégrale sur $\partial\Omega$ u et v désignent en fait les traces de u et v sur $\partial\Omega$.

La preuve - hors programme - du Théorème 33 se fait en deux étapes (voir par exemple [2, Chapter 15]) :

1. on montre d'abord ces résultats pour l'ouvert $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-1}$ à l'aide de la transformée de Fourier ;

2. on traite le cas général en effectuant une partition du bord $\partial\Omega$ et en se ramenant par déformation au cas de l'ouvert $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^{d-1}$ pour chaque morceau de la partition.

★ **Théorème 34** (dérivée normale sortante d'une fonction H^2)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ uniformément lipschitzien. L'application*

$$\begin{aligned} \gamma_n \,:\, H^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}) &\to L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \gamma_n(u) := \frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u\cdot n \end{aligned}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, encore notée γ_n et appelée application dérivée normale sortante. De plus, on a la formule de Green

$$\forall u\in H^2(\Omega),\quad \forall v\in H^1(\Omega),\quad \int_\Omega(-\Delta u)v = -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v,$$

où dans l'intégrale sur $\partial\Omega$ v désigne la trace de v sur $\partial\Omega$.

Preuve. Soit $u\in H^2(\Omega)$. Alors $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H^1(\Omega)$ pour tout $1\leqslant i\leqslant d$, et on a

$$\gamma_n(u) = \sum_{i=1}^d \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot(n\cdot e_i)\in L^2(\partial\Omega),$$

avec

$$\|\gamma_n(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant \|\gamma_0\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);L^2(\partial\Omega))}\sum_{i=1}^d\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{H^1(\Omega)}|n\cdot e_i| \leqslant \|\gamma_0\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega);L^2(\partial\Omega))}\|u\|_{H^2(\Omega)},$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour établir la dernière inégalité. En outre, toujours en utilisant le fait que $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H^1(\Omega)$ pour tout $1\leqslant i\leqslant d$, on déduit de (11) que

$$\begin{aligned} \forall u\in H^2(\Omega),\quad \forall v\in H^1(\Omega),\quad \int_\Omega(-\Delta u)v &= -\sum_{i=1}^d\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v \\ &= -\sum_{i=1}^d\left(\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}v(n\cdot e_i)\,d\sigma - \int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\ &= -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\sigma + \int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 35. Les applications γ_0 et γ_n ne sont pas surjectives. Leur image est l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\partial\Omega)$, qui est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\partial\Omega)$. Son produit scalaire est donné par

$$(u,v)_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = (u,v)_{L^2(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^d}\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \tag{12}$$

(notons que cette définition est cohérente avec (9) puisque $\partial\Omega$ est de dimension $d-1$). On peut montrer par ailleurs que sous les hypothèses des Théorèmes 33 et 34, les applications linéaires γ_0 et γ_n vues comme des applications linéaires de $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ respectivement, à valeurs dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$, sont surjectives et continues : il existe des constantes C_0 et C_1 dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)},$$
$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \|\gamma_n u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C_1 \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

On note $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ le dual topologique de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. On a $L^2(\partial\Omega) \hookrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et

$$\forall g \in L^2(\partial\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \langle g, \gamma_0(v)\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} gv,$$

où dans l'intégrale ci-dessus, v désigne en fait la trace de v sur $\partial\Omega$.

Le résultat suivant est relatif à l'espace fonctionnel de champs de vecteurs

$$H_{\rm div}(\Omega) := \left\{\vec{v} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \operatorname{div} \vec{v} \in L^2(\Omega)\right\}$$

que l'on rencontre fréquemment en mécanique des fluides, en électromagnétisme, ainsi que dans les problèmes de diffusion. On munit $H_{\rm div}(\Omega)$ du produit scalaire défini par

$$(\vec{v}, \vec{w})_{H_{\rm div}(\Omega)} = \int_\Omega \vec{v} \cdot \vec{w} + \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{v})(\operatorname{div} \vec{w}).$$

★ **Théorème 36** (flux normal sortant d'une fonction de $H_{\rm div}$)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ uniformément lipschitzien. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \gamma_\varphi \ : & H_{\rm div}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d) & \to & H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ & \vec{v} & \mapsto & \gamma_\varphi(\vec{v}) := \vec{v} \cdot n \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H_{\rm div}(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, encore notée γ_φ et appelée application flux normal sortant. De plus, on a pour tout $\vec{v} \in H_{\rm div}(\Omega)$,

$$\forall \phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{v})\phi = -\int_\Omega \vec{v} \cdot \nabla\phi + \langle \vec{v} \cdot n, \gamma_0(\phi)\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{13}$$

Exercice 13. Le but de cet exercice est de prouver le théorème ci-dessus.

1. Montrer que $H_{\rm div}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
2. Montrer que
$$(\vec{v}, \phi) \mapsto \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{v})\phi + \int_\Omega \vec{v} \cdot \nabla\phi$$
définit une forme bilinéaire continue sur $H_{\rm div}(\Omega) \times H^1(\Omega)$.
3. En utilisant les résultats énoncés à la Remarque 58, montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et tout $v \in H_{\rm div}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$,
$$|\langle \vec{v} \cdot n, g\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)}| \leqslant C \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|v\|_{H_{\rm div}(\Omega)}.$$
4. Conclure en admettant que $H_{\rm div}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ est dense dans $H_{\rm div}(\Omega)$.

Les résultats de cette section s'étendent aux espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour des ouverts suffisamment réguliers. On a ainsi par exemple le résultat suivant (voir [2, Theorem 15.23]).

Théorème 37 (trace au bord d'une fonction $W^{1,p}$)**.** *Soit Ω un ouvert uniformément lipschitzien et $1 < p < \infty$. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0^{(p)} : W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) & \to & L^p(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & \gamma_0(u) := u|_{\partial\Omega} \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$, encore notée $\gamma_0^{(p)}$ et appelée application trace. On a

$$\mathrm{Ker}(\gamma_0^{(p)}) = W_0^{1,p}(\Omega) \quad et \quad \mathrm{Ran}(\gamma_0^{(p)}) = W^{1-1/p,p}(\partial\Omega).$$

De plus, on a la formule d'intégration par parties

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \forall \phi \in C_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{R}^d), \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi = \int_{\partial\Omega} u\phi(n \cdot e_i)\, d\sigma - \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

2.6 Injections continues

Soit V et W deux espaces vectoriels normés. On rappelle que la notation

$$V \hookrightarrow W$$

signifie que V s'injecte de façon continue dans W. Dans les cas qui nous intéressent dans ce chapitre, les espaces V et W seront des espaces de fonctions pour lesquels il existe une injection naturelle de V dans W. Par exemple, une fonction f appartenant à l'espace $V = W^{1,p}(\Omega)$ peut être considérée en tant que fonction de l'espace $W = L^p(\Omega)$, et on a

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte donc continûment dans l'espace $L^p(\Omega)$, ce qu'on note $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Ce résultat est évidemment trivial. Celui qui suit l'est beaucoup moins.

Théorème 38 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.** *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et p un réel tel que $1 \leqslant p < d$. On a*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^d), \tag{14}$$

avec $p_* = \dfrac{dp}{d-p}$. Plus précisément, tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ appartient à $L^{p*}(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \|u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{15}$$

Preuve. Commençons par traiter le cas $p = 1$. Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact. On a

$$|\phi(x_1, \cdots, x_d)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_d) \right| dt.$$

En notant ξ_i la fonction de la variable $\widetilde{x}_i := (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_d)$ définie par le membre de droite de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$|\phi(x_1, \cdots, x_d)|^d \leqslant \prod_{i=1}^d \xi_i(\widetilde{x}_i).$$

On peut alors appliquer l'estimation (61) démontrée au cours de l'Exercice 22 à $f_i = |\xi_i|^{\frac{1}{d-1}}$ et $g = |\phi|^{\frac{d}{d-1}}$. Il vient ainsi

$$\|\phi\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} \leqslant \prod_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \leqslant \|\nabla \phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{16}$$

On conclut en remarquant que l'ensemble des fonctions $C^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact, qui contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, est dense dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ en vertu du Théorème 32.

Considérons maintenant le cas $p > 1$. Posons $q = p\frac{d-1}{d-p}$. On remarque que $q > p > 1$, et que $p_* = \frac{dq}{d-1} = (q-1)p'$ où $p' = (1-p^{-1})^{-1}$ est l'exposant conjugué de p. Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact. La fonction $\psi = |\phi|^{q-1}\phi$ est elle-aussi de classe C^1 et à support compact et $\nabla \psi = q|\phi|^{q-1}\nabla\phi$. On déduit alors de (16) et de l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^q_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\phi|^{p_*}\right)^{\frac{q}{p_*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\phi|^{q\frac{d}{d-1}}\right)^{\frac{q}{p_*}} \\
&= \|\psi\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\nabla\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = q\||\phi|^{q-1}\nabla\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant q\||\phi|^{q-1}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\||\phi|^{q-1}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\phi|^{(q-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\phi|^{p_*}\right)^{\frac{q-1}{p_*}} = \|\phi\|^{q-1}_{L^{p_*}},$$

on obtient

$$\|\phi\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{p(d-1)}{d-p}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

On conclut, comme pour le cas $p = 1$, par un argument de densité. □

★ **Exercice 14** (méthode de *scaling*)**.** On peut retrouver la valeur du réel p_* figurant dans l'énoncé du Théorème 38 par un argument très simple de changement d'échelle (*scaling*). Soit en effet $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Pour $\sigma > 0$, on introduit la fonction $\phi_\sigma(x) = \phi(\sigma x)$.

1. Calculer $\|\phi_\sigma\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$ en fonction de $\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$, σ, d et q.
2. Calculer $\|\nabla\phi_\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ en fonction de $\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, σ, d et p.
3. Conclure.

Corollaire 39. *Soit $1 \leqslant p < d$. On a*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d) \qquad \textit{pour tout } q \textit{ tel que } p \leqslant q \leqslant \frac{dp}{d-p}. \tag{17}$$

Pour établir ce corollaire, nous aurons besoin de l'inégalité d'interpolation entre espaces L^p, qui découle de l'inégalité de Hölder et qu'on pourra démontrer en exercice.

★ **Théorème 40** (inégalité d'interpolation dans les L^p)**.** *Soit $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ et $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Alors pour tout $p \leqslant r \leqslant q$, $f \in L^r(\Omega)$ et*

$$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|^\alpha_{L^p}\,\|f\|^{1-\alpha}_{L^q}, \tag{18}$$

où α est le réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$ défini par

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Preuve du Corollaire 39. Les injections (17) sont une conséquence directe du Théorème 38 et de l'inégalité d'interpolation (18). □

En adaptant la preuve du Théorème 38, on peut attraper le cas limite $p = d$.

Corollaire 41. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $d \leqslant q < +\infty$*

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d). \tag{19}$$

Il reste à considérer le cas où $p > d$.

Théorème 42 (Morrey)**.** *Soit $1 \leqslant d < p \leqslant +\infty$ et $\alpha = 1 - \dfrac{d}{p}$. On a*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d). \tag{20}$$

★ **Remarque 43.** On rappelle qu'un élément de $L^p(\mathbb{R}^d)$, et donc *a fortiori* un élément de son sous-espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, est une classe d'équivalence de fonctions pour la relation d'équivalence d'égalité presque partout. L'assertion $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ signifie

1. que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, alors toutes les fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ qui composent la classe d'équivalence u sont bornées presque partout, et qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)};$$

2. que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe dans la classe d'équivalence u une (unique) fonction de classe $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, qu'on note encore u pour simplifier, et qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)},$$

où dans l'inégalité ci-dessus, le u qui est dans le membre de droite désigne la classe d'équivalence u, et celui qui est dans le membre de gauche l'unique repésentant de classe $C^{0,\alpha}$ de cette classe d'équivalence.

Preuve du Théorème 42. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Comme pour tout $(z', z'') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\phi(z'') - \phi(z') = \int_0^1 \nabla\phi(z' + t(z'' - z')) \cdot (z'' - z')\, dt,$$

on a

$$|\phi(z'') - \phi(z')| \leqslant |z'' - z'| \int_0^1 |\nabla\phi(z' + t(z'' - z'))|\, dt.$$

En notant $\overline{\phi}_{B(z,r)} = \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} \phi$ la moyenne de ϕ sur la boule $B(z,r) \subset \mathbb{R}^d$, on obtient pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} |\overline{\phi}_{B(z,r)} - \phi(z')| &\leqslant \frac{|z - z'| + r}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} \left(\int_0^1 |\nabla\phi(z' + t(z'' - z'))|\, dt \right) dz'' \\ &= \frac{|z - z'| + r}{r^d |B(0,1)|} \int_0^1 t^{-d} \left(\int_{z' + B(z - z', tr)} |\nabla\phi| \right) dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient pour tout $0 < t \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\int_{z'+B(z-z',tr)} |\nabla\phi| &\leqslant \|\nabla\phi\|_{L^p(z'+B(z-z',tr))}\, |z'+B(z-z',tr)|^{1/p'} \\ &= |B(0,1))|^{1/p'}\,(tr)^{d/p'}\,\|\nabla\phi\|_{L^p(z+B(z-z',tr))} \\ &\leqslant |B(0,1)|^{1/p'}\,(tr)^{d/p'}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

D'où

$$|\overline{\phi}_{B(z,r)} - \phi(z')| \leqslant \frac{(|z-z'|+r)r^{-d/p}}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{21}$$

En prenant $z = \frac{x+y}{2}$, $r = \frac{|x-y|}{2}$ et en utilisant l'inégalité ci-dessus d'abord avec $z' = x$, puis avec $z' = y$, on obtient

$$|\overline{\phi}_{B(z,r)} - \phi(x)| \leqslant \frac{2^{d/p}|x-y|^\alpha}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

et

$$|\overline{\phi}_{B(z,r)} - \phi(y)| \leqslant \frac{2^{d/p}|x-y|^\alpha}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

D'où,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant \frac{2^{1+d/p}|x-y|^\alpha}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui implique en particulier

$$\|\phi\|_{C^{0,\alpha}} \leqslant \frac{2^{1+d/p}}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{22}$$

Ecrivons maintenant (21) avec $z = z' = x$ et $r = 1$:

$$|\overline{\phi}_{B(x,1)} - \phi(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Par ailleurs, en utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|\overline{\phi}_{B(x,1)}| \leqslant \frac{1}{|B(x,1)|}\int_{B(x,1)|} |\phi| \leqslant \frac{1}{|B(0,1)|^{1/p}}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

En conséquence,

$$|\phi(x)| \leqslant |\overline{\phi}_{B(x,1)}| + |\overline{\phi}_{B(x,1)} - \phi(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\phi\|_{W^{1,p}(B(x,1))},$$

ce qui entraîne

$$\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{1}{\alpha|B(0,1)|^{1/p}}\|\phi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{23}$$

Comme $C^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, les inégalités (22) et (23) prouvent que $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ et que les injections canoniques de $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et dans $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ sont continues. $\square$

Par application répetée des Théorèmes 38 et 42, on peut étendre ces résultats aux espaces de Sobolev d'ordre entier ; les résultats relatifs aux exposants non-entiers s'obtiennent par interpolation.

Théorème 44. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $s > 0$ et $p \in [1, +\infty]$. On a*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \left| \begin{array}{ll} L^q(\mathbb{R}^d) & \text{si } 1 \leqslant p < \dfrac{d}{s} \text{ et } p \leqslant q \leqslant \dfrac{dp}{d-sp}, \\ L^q(\mathbb{R}^d) & \text{si } p = \dfrac{d}{s} \text{ et } p \leqslant q < +\infty, \\ L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d) & \text{si } p > \dfrac{d}{s} \text{ et si } m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \alpha < 1 \text{ vérifient } m + \alpha = s - \dfrac{d}{p}. \end{array} \right.$$

Preuve. On se limite ici au cas où $s = k \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par récurrence. Le résultat est vrai pour $k = 1$. Soit $k \geqslant 2$. Supposons que le résultat soit vrai jusqu'à l'ordre $k-1$. Soit $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Les fonctions u et ∇u sont dans $W^{k-1,p}(\mathbb{R}^d)$. Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que l'on est dans l'un des trois cas suivants :

1. si $1 \leqslant p < \frac{d}{k-1}$, u et ∇u sont dans $L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $r = \frac{dp}{d-(k-1)p}$. On en déduit que u est dans $W^{1,r}(\mathbb{R}^d)$. A nouveau, trois cas se présentent

   (a) si $1 \leqslant r < d$ (condition qui équivaut à $1 \leqslant p < \frac{d}{k}$), $u \in L^{r*}(\mathbb{R}^d)$ et on vérifie que $r_* = \frac{dr}{d-r} = \frac{dp}{d-kp}$; comme $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a bien $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \leqslant q \leqslant \frac{dp}{d-kp}$;

   (b) si $r = d$ (condition qui équivaut à $p = \frac{d}{k}$), $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $d \leqslant q < +\infty$; comme en outre $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a bien $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \leqslant q < +\infty$;

   (c) si $r > d$ (condition qui équivaut à $\frac{d}{k} < p < \frac{d}{k-1}$ ou encore à $0 < k - \frac{d}{p} < 1$), $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^{0,\alpha}$ pour $\alpha = 1 - \frac{d}{r} = k - \frac{d}{p}$;

2. si $p = \frac{d}{k-1}$, u et ∇u sont dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \leqslant q < +\infty$; d'où $u \in W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \leqslant q < +\infty$, et donc $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$;

3. si $p > \frac{d}{k-1}$, u (ainsi d'ailleurs que ∇u) sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Il reste à prouver que si $p > \frac{d}{k-1}$ et si $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$ vérifient $m + \alpha = k - \frac{d}{p}$, on a $C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Comme les fonctions $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sont dans $W^{k-1}(\mathbb{R}^d)$, on voit, en appliquant l'hypothèse de récurrence, que si $p > \frac{d}{k-1}$, on a $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{m-1,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, d'où l'on déduit que $u \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. □

Venons-en maintenant au cas où on travaille non plus sur l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier, mais sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

★ **Corollaire 45.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $s > 0$ et $p \in [1, +\infty]$.*

1. *On a*

$$W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow \left| \begin{array}{ll} L^q(\Omega) & \text{si } 1 \leqslant p < \dfrac{d}{s} \text{ et } p \leqslant q \leqslant \dfrac{dp}{d-sp}, \\ L^q(\Omega) & \text{si } p = \dfrac{d}{s} \text{ et } p \leqslant q < +\infty, \\ L^\infty(\Omega) \cap C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) & \text{si } p > \dfrac{d}{s} \text{ et si } m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \alpha < 1 \text{ vérifient } m + \alpha = s - \dfrac{d}{p}. \end{array} \right.$$

2. *Si Ω vérifie la propriété d'extensibilité-(s,p), alors*

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow \left| \begin{array}{ll} L^q(\Omega) & \text{si } 1 \leqslant p < \dfrac{d}{s} \text{ et } p \leqslant q \leqslant \dfrac{dp}{d-sp}, \\ L^q(\Omega) & \text{si } p = \dfrac{d}{s} \text{ et } p \leqslant q < +\infty, \\ L^\infty(\Omega) \cap C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) & \text{si } p > \dfrac{d}{s} \text{ et si } m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < \alpha < 1 \text{ vérifient } m + \alpha = s - \dfrac{d}{p}. \end{array} \right.$$

Exercice 15. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $s > 0$ et $p \in [1, d/s[$. Montrer que $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leqslant q \leqslant \frac{dp}{d-sp}$.

Preuve du Corollaire 45. On se limite ici au cas où $s = k \in \mathbb{N}^*$. Soit $L^q(\mathbb{R}^d)$ tel que l'injection $W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ ait lieu, et $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d), \qquad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \, \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{24}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\widetilde{\phi}$ le prolongement de ϕ par zéro sur $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. La fonction $\widetilde{\phi}$ est dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on a donc

$$\|\phi\|_{L^q(\Omega)} = \|\widetilde{\phi}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \, \|\widetilde{\phi}\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} = C \, \|\phi\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

On conclut en utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Supposons maintenant que Ω satisfasse la propriété d'extensibilité-(k,p). Soit P un opérateur de prolongement de $W^{k,p}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ tel que

- pour tout $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $(Pu)|_\Omega = u$;
- il existe une constante $C' \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall u \in W^{k,p}(\Omega), \qquad \|Pu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C' \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Il vient

$$\forall u \in W^{k,p}(\Omega), \qquad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \|Pu\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \|Pu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant CC' \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

On a donc $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, l'injection canonique de $W^{k,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ étant continue.

De même, soit $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1]$ tel que l'injection $W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ ait lieu. En reprenant les notations précédentes, on voit que $\widetilde{\phi} \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, que $\phi \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ et que $\|\widetilde{\phi}\|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \|\phi\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})}$. On conclut comme ci-dessus. Pour terminer la preuve, il suffit de remarquer que si $W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, $Pu \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, $u = (Pu)|_\Omega \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant \|Pu\|_{C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^d)}$. □

Remarque 46. La deuxième assertion du Corollaire 45 ne s'étend pas à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ sans une hypothèse de régularité minimale sur sa frontière. L'Exercice 23 propose la construction d'un contre-exemple.

2.7 Injections compactes

Les résultats de compacité établis dans cette section sont très utiles dans l'analyse des problèmes spectraux (cf. cours de S4 sur les problèmes d'évolution) et des problèmes non-linéaires (cf. Section 3). Nous allons montrer que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, certaines des injections canoniques entre espaces fonctionnels mises en évidence dans la section précédente sont compactes au sens de la définition suivante.

★ **Définition 47.** *Soit V et W deux espaces de Banach et $T : V \to W$ un opérateur linéaire continu de V dans W. L'opérateur T est dit compact s'il transforme les sous-ensembles bornés de V en sous-ensemble relativement compacts de W, autrement dit si*

$$\forall B \subset V \text{ borné}, \quad \overline{T(B)} \text{ est un sous-ensemble compact de } W,$$

ou de manière équivalente, si pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de V, on peut extraire de la suite $(T(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans W.

Si donc l'injection $V \hookrightarrow W$ est compacte (i.e. si $V \subset W$ et si l'injection canonique $i : V \to W$ est un opérateur compact), et si l'on dispose d'une suite bornée dans V, on peut en extraire une sous-suite qui converge fortement dans W.

Commençons par un résultat dont la preuve, relativement explicite, est basée sur des décompositions en séries de Fourier.

★ **Théorème 48** (Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.*

1. *L'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.*

2. *Si Ω est possède la propriété d'extensibilité-$(1,2)$, alors l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.*

Pour prouver ce théorème, nous allons nous baser sur un résultat fondamental de la théorie des opérateurs compacts.

★ **Théorème 49.** *Soit V et W deux espaces de Banach et $\mathcal{L}(V;W)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de V dans W, muni de la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V;W)} := \sup_{u\in V} \frac{\|Tu\|_W}{\|u\|_V}.$$

L'ensemble $\mathcal{K}(V;W)$ des opérateurs compacts de V dans W est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(V;W)$.

★ *Preuve.* Il est facile de montrer que $\mathcal{K}(V;W)$ est un espace vectoriel de $\mathcal{L}(V;W)$. Il reste à prouver qu'il est fermé. Considérons pour cela une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{K}(V;W)$ qui converge dans $\mathcal{L}(V;W)$ vers une application $T \in \mathcal{L}(V;W)$ et montrons que T est compacte. Soit donc B un borné de V, $R > 0$ un réel tel que $B \subset \{x \in V, \|x\|_V \leqslant R\}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $T(B)$; il faut montrer que de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite de Cauchy (ceci prouvera que $T(B)$ est relativement compact et donc que l'application T est compacte).

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Tw_n = u_n$. On va extraire de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de Cauchy en utilisant un procédé diagonal : posons $w_n^0 = w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et utilisons le caractère compact des applications T_k pour construire par récurrence pour tout $k \geqslant 1$ une sous-suite $(w_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(w_n^{k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(T_k w_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy. Définissons maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = w_n^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(v_n)_{n\geqslant k}$ est une sous-suite de $(w_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$; la suite $(T_k v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy.

Posons $\widetilde{u}_n = Tv_n$. La suite $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\epsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\|T - T_k\|_{\mathcal{L}(V;W)} \leqslant \frac{\epsilon}{3R}.$$

Soit ensuite $N \geqslant 0$ tel que pour tout $q > p \geqslant N$,

$$\|T_k v_p - T_k v_q\|_W \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Il vient pour tout $q > p \geqslant N$,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{u}_p - \widetilde{u}_q\|_W &= \|Tv_p - Tv_q\|_W \\
&\leqslant \|Tv_p - T_k v_p\|_W + \|T_k v_p - T_k v_q\|_W + \|T_k v_q - Tv_q\|_W \\
&\leqslant \|T - T_k\|_{\mathcal{L}(V;W)} \left(\|v_p\|_V + \|v_q\|_V\right) + \|T_k v_p - T_k v_q\|_W \\
&\leqslant \epsilon.
\end{aligned}$$

La suite $(\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Ceci conclut la preuve. □

★ *Preuve de la première assertion du Théorème 48.* Commençons par le cas (en dimension 1) où $\Omega =]0,\pi[$. En notant $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$ le k-ième mode de Fourier, on peut caractériser (voir Exercice 17) les espaces $L^2(]0,\pi[)$ et $H^1_0(]0,\pi[)$ par

$$L^2(]0,\pi[) = \left\{ u(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} c_k\, e_k(x) \quad \middle| \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |c_k|^2 < +\infty \right\} \tag{25}$$

et

$$H^1_0(]0,\pi[) = \left\{ u(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} c_k\, e_k(x) \quad \middle| \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (1+k^2)|c_k|^2 < +\infty \right\}. \tag{26}$$

De plus, avec ces notations,

$$\|u\|_{L^2} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\|_{H^1} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} (1+k^2)|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons

$$\begin{array}{rccc}
i\ : & H^1_0(]0,\pi[) & \rightarrow & L^2(]0,\pi[) \\
& u & \mapsto & u
\end{array}$$

l'injection canonique de $H^1_0(]0,\pi[)$ dans $L^2(]0,\pi[)$ et définissons la suite d'opérateurs linéaires $(i_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\begin{array}{rccc}
i_N\ : & H^1_0(]0,\pi[) & \rightarrow & L^2(]0,\pi[) \\
& u = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} c_k e_k & \mapsto & i_N(u) = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k.
\end{array}$$

La suite $(i_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers i dans $\mathcal{L}(H_0^1(]0,\pi[);L^2(]0,\pi[))$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|i-i_N\|_{\mathcal{L}(H_0^1(]0,\pi[);L^2(]0,\pi[))} &= \sup_{u\in H_0^1(]0,\pi[)\setminus\{0\}} \frac{\|(i-i_N)(u)\|_{L^2}}{\|u\|_{H^1}} \\
&= \sup_{(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\neq 0,\ \sum(1+k^2)|c_k|^2<+\infty} \frac{\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty}|c_k|^2\right)^{\frac12}}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(1+k^2)|c_k|^2\right)^{\frac12}} \\
&\leqslant \frac{1}{1+N^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, l'opérateur i_N est de rang fini égal à N ; c'est donc un opérateur compact. Il en résulte que i est limite dans $\mathcal{L}(H_0^1;L^2)$ d'opérateurs compacts. C'est donc lui-même un opérateur compact d'après le Théorème 49.

Par la même technique, on montre que si $P=]0,\pi[^d$, l'injection canonique de $H_0^1(P)$ dans $L^2(P)$ est compacte ; il suffit de développer les fonctions $u\in L^2(P)$ dans la base tensorielle de Fourier :

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_d) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_d\in[\mathbb{N}^*]^d} c_{k_1k_2\cdots k_d}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2}\sin(k_1x_1)\,\sin(k_2x_2)\cdots\sin(k_dx_d).$$

Si maintenant, Ω est un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^d$, on peut se ramener par homothétie et translation au cas où $\Omega\subset P=]0,\pi[^d$. Il suffit alors de remarquer que l'injection i_Ω de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ peut se décomposer en

$$i_\Omega\ :\ H_0^1(\Omega)\ \overset{p}{\to}\ H_0^1(P)\ \overset{i_P}{\hookrightarrow}\ L^2(P)\ \overset{r}{\to}\ L^2(\Omega)$$

où p désigne l'opérateur linéaire qui transforme une fonction de $H_0^1(\Omega)$ en une fonction de $H_0^1(P)$ en la prolongeant par 0 dans $P\backslash\Omega$, i_P l'injection canonique de $H_0^1(P)$ dans $L^2(P)$ et r l'opérateur de restriction qui à $u\in L^2(P)$ associe la fonction $u|_\Omega$ (qui est dans $L^2(\Omega)$). Comme p et r sont des opérateurs continus et i_P un opérateur compact, il en résulte que i_Ω est lui-même un opérateur compact. En effet, si B un un borné de $H_0^1(\Omega)$, alors $p(B)$ est un borné de $H_0^1(P)$ (l'image d'un borné par une application linéaire continue est un borné), $\overline{i_P(p(B))}$ est un compact de $L^2(P)$ (puisque i_P est compacte), et donc $r(\overline{i_P(p(B))})$ aussi (puisque l'image d'un compact par une fonction continue est un compact). Comme $\overline{r(i_P(p(B)))}\subset \overline{r(\overline{i_P(p(B))})}=r(\overline{i_P(p(B))})$, $i_\Omega(B)=r(i_P(p(B)))$ est relativement compact, donc i_Ω est un opérateur compact. Ceci conclut la preuve de la première assertion du théorème. □

★ **Exercice 16.** Prouver la seconde assertion du Théorème 48.

★ **Exercice 17.** L'objectif de cet exercice est de démontrer (25) et (26). On considère les espaces de fonctions périodiques

$$L^2_{\rm per,a} := \left\{v\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R})\,|\,v \text{ impaire et } 2\pi\text{-périodique}\right\} \quad \text{et} \quad H^1_{\rm per,a} := \left\{v\in L^2_{\rm per,a}\,|\,v'\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R})\right\},$$

où v' est la dérivée de v au sens des distributions, que l'on munit respectivement des formes bilinéaires définies par

$$(u,v)_{L^2_{\rm per,a}} = \int_0^\pi uv \quad \text{et} \quad (u,v)_{H^1_{\rm per,a}} = \int_0^\pi uv + \int_0^\pi u'v'.$$

A toute fonction $u \in L^2(]0,\pi[)$, on associe l'unique fonction $Pu \in L^2_{\rm per,a}$ qui coïncide avec u sur $]0,\pi[$.

1. Montrer que $(\cdot,\cdot)_{L^2_{\rm per,a}}$ et $(\cdot,\cdot)_{H^1_{\rm per,a}}$ définissent des produits scalaires sur $L^2_{\rm per,a}$ et $H^1_{\rm per,a}$ respectivement, et que muni de ces produits scalaires $L^2_{\rm per,a}$ et $H^1_{\rm per,a}$ sont des espaces de Hilbert. Montrer ensuite que $P : u \mapsto Pu$ défini un opérateur unitaire de $L^2(]0,\pi[)$ dans $L^2_{\rm per,a}$.

2. Montrer (25) en utilisant la théorie des séries de Fourier pour les fonctions 2π-périodiques.

3. Soit $u \in H^1(]0,\pi[)$. Montrer que Pu admet un représentant continu sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ admettant des limites à gauche et à droite en tout point de $\pi\mathbb{Z}$.

4. Soit $u \in H^1(]0,\pi[)$. Calculer de deux manières différentes la dérivée de Pu au sens des distributions. En déduire l'égalité (26).

Le théorème de Rellich se généralise de la façon suivante aux espaces $W^{s,p}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. La preuve - hors programme - de ce théorème est donnée à la fin de la Section 5.2. Elle repose sur le théorème d'Ascoli et sur un résultat de compacité de Kolmogorov.

Théorème 50 (Rellich–Kondrachov)**.** *Soit $s > 0$ et $p \in [1,+\infty]$.*

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

(a) Si $p < \frac{d}{s}$, l'injection $W^{s,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in \left[p, \frac{dp}{d-sp}\right[$.

(b) Si $p = \frac{d}{s}$, l'injection $W^{s,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [p,+\infty[$

(c) Si $p > \frac{d}{s}$, l'injection $W^{s,p}_0(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ est compacte pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$ vérifiant $m+\alpha < s - \frac{d}{p}$.

2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ possédant la propriété d'extensibilité-(s,p).

(a) Si $p < \frac{d}{s}$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in \left[p, \frac{dp}{d-sp}\right[$.

(b) Si $p = \frac{d}{s}$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [p,+\infty[$

(c) Si $p > \frac{d}{s}$, l'injection $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ est compacte pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$ vérifiant $m+\alpha < s - \frac{d}{p}$.

2.8 Inégalités de type Poincaré

Rappelons tout d'abord l'inégalité de Poincaré usuelle.

★ **Théorème 51** (inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall u \in H^1_0(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{27}$$

Nous allons maitenant apporter un nouvel éclairage sur l'inégalité de Poincaré à travers la notion de compacité. Plutôt que de donner une preuve alternative de l'inégalité de Poincaré usuelle, nous allons établir de nouvelles inégalités "de type Poincaré". Comme nous le verrons à la Section 3, ces inégalités sont elles-aussi très utiles dans l'étude des problèmes aux limites linéaires elliptiques pour démontrer la coercivité de la forme bilinéaire a.

En considérant l'exemple des fonctions constantes, on voit bien que l'inégalité de Poincaré (27) n'est pas valable sur tout $H^1(\Omega)$. Nous avons cependant le résultat suivant.

★ **Théorème 52** (inégalité de Poincaré–Wirtinger)**.** *Soit* Ω *un ouvert* borné *de* $\mathbb{R}^d$*, connexe*[3] *et possédant la propriété d'extensibilité-*$(1,2)$*. Il existe une constante* C_W *telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|u - \Pi u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_W \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{28}$$

où Π *désigne le projecteur orthogonal de* $L^2(\Omega)$ *sur l'espace vectoriel des fonctions constantes, pour lequel*

$$\forall u \in L^2(\Omega), \qquad \Pi u = \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\right) \mathbb{1}_\Omega, \tag{29}$$

où $\mathbb{1}_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}$ *désigne la fonction constante égale à* 1.

★ *Preuve.* Vérifions tout d'abord que Π est effectivement défini par (29). Soit $u \in L^2(\Omega)$. La fonction Πu est caractérisée par

- Πu est une fonction constante sur Ω ;
- $u - \Pi u$ est orthogonal à toutes les fonctions constantes (pour le produit scalaire L^2).

On vérifie que la fonction constante égale à $\overline{u} = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u$ (moyenne de u sur Ω) répond bien à ces deux critères. Notons que c'est parce que Ω est borné que la constante $\overline{u}$ est bien définie.

Venons-en maintenant à la preuve proprement dite de l'inégalité de Poincaré–Wirtinger. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on puisse trouver une fonction $u_n \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_n - \Pi u_n\|_{L^2(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à remplacer u_n par $(u_n - \Pi u_n)/\|u_n - \Pi u_n\|_{L^2(\Omega)}$, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Pi u_n = 0$ et $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On obtient alors que $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $(L^2(\Omega))^d$.

En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. En utilisant le théorème de Rellich, on peut donc en extraire une sous-suite (encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour simplifier) qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $u \in L^2(\Omega)$.

Il résulte des deux points précédents que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, donc converge dans $H^1(\Omega)$ vers une certaine fonction $v \in H^1(\Omega)$. Comme $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $(L^2(\Omega))^d$, on obtient $\nabla v = 0$, ce qui fait que v est constante sur le domaine (l'ouvert connexe) Ω. Enfin, comme $\Pi u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à la limite, $\Pi v = 0$ et donc $v = 0$.

On obtient ainsi une contradiction : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite de points de la sphère unité de $L^2(\Omega)$, ne peut pas converger dans $H^1(\Omega)$, donc *a fortiori* dans $L^2(\Omega)$, vers la fonction nulle. □

[3] La connexité est une notion topologique permettant de donner un sens mathématique précis à la notion d'ensemble d'un seul tenant (i.e. formé d'un seul morceau). En topologie générale, un espace topologique X est dit connexe si les seuls sous-ensembles de X à la fois ouverts et fermés sont l'ensemble vide et l'espace X tout entier. Un sous-ensemble C d'un espace topologique X est dit connexe si les seuls sous-ensembles de C qui sont à la fois des ouverts et des fermés relatifs de C pour la topologie induite sont l'ensemble vide et C tout entier (on rappelle qu'un sous-ensemble A de C est appelé un ouvert - respectivement un fermé - pour la topologie induite si A est l'intersection de C et d'un ouvert - respectivement d'un fermé - de X). On dispose d'une caractérisation très simple et intuitive des ouverts connexes de $\mathbb{R}^d$: un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est connexe si et seulement si il est connexe par arc, autrement dit si et seulement si pour tous points x et y de Ω, il existe une fonction continue $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ telle que $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$ et $\phi(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$.

Terminons cette section en démontrant une extension de l'inégalité de Poincaré faisant intervenir les valeurs au bord de la fonction.

★ **Proposition 53** (extension de l'inégalité de Poincaré)**.** *Soit* Ω *un ouvert* borné *lipschtizien de* $\mathbb{R}^d$*. Il existe une constante* $\widetilde{C}_\Omega$ *telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_\Omega \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right), \tag{30}$$

où γ_0 *désigne l'application trace.*

★ **Exercice 18.** Prouver la proposition ci-dessus.

3 Problèmes aux limites elliptiques linéaires

Cette section est consacrée à l'étude de problèmes aux limites du type

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chercher } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que} \\ -\text{div}\,(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ + \text{ conditions limites sur le bord } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

où Ω est un ouvert borné uniformément lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, et A une fonction de $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$ telle qu'il existe $0 < m \leqslant M < \infty$ tel que

$$m|y|^2 \leqslant y^T A(x) y \leqslant M|y|^2 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^d \text{ et presque tout } x \in \Omega. \tag{31}$$

En pratique les matrices $A(x)$ sont le plus souvent symétriques et peuvent représenter physiquement un tenseur de diffusion, de permittivité diélectrique ou de conductivité thermique. Un point important est que les problèmes de ce type sont issus de modèles physiques et que le cadre fonctionnel dans lequel on va les considérer pour les étudier mathématiquement ou les simuler numériquement n'est pas fourni par les physiciens, les mécaniciens ou les biologistes qui les proposent. On se restreint ici au cadre variationnel et on renvoie à la Remarque 59 le lecteur désireux d'en savoir plus.

3.1 Construction d'une formulation variationnelle

★ Nous allons d'abord expliquer comment construire un bon cadre variationnel associé à un problème aux limites elliptique particulier sur l'exemple du problème mixte suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chercher } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que} \\ -\text{div}\,(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ (A\nabla u)\cdot n + \beta u = g \text{ sur } \Gamma_2 \end{array}\right. \tag{32}$$

où Γ_1 et Γ_2 forment une partition de $\partial\Omega$ en deux "morceaux" réguliers, et où $\beta \in \mathbb{R}_+$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+$ sont donnés.

Le but est d'aboutir à une formulation du type

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V,\ a(u,v) = b(v), \end{array}\right. \tag{33}$$

où V est un espace fonctionnel, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $b : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Pour cela, on procède en quatre étapes.

Etape 1 : manipulation formelle de l'EDP et des conditions au bord

On commence par établir une formulation variationnelle du problème (32) par un raisonnement formel, sans souci de rigueur mathématique.

On considère l'EDP $-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f$, on multiplie chaque membre par une fonction test v et on intègre sur Ω :

$$-\int_\Omega \mathrm{div}\,(A\nabla u)\, v = \int_\Omega fv.$$

On intègre ensuite par parties le membre de gauche afin

1. d'équilibrer autant que possible le nombre de dérivées sur u et sur v (ceci afin de pouvoir travailler dans un espace de Sobolev le plus grand possible, ce qui maximise les chances d'aboutir à une forme bilinéaire coercive) ;

2. d'intégrer les conditions au bord dans la formulation variationnelle.

On obtient ainsi en utilisant la formule d'intégration par parties en dimension d (écrire les détails en exercice)

$$-\int_{\partial\Omega}((A\nabla u)\cdot n)v + \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v = \int_\Omega fv.$$

Focalisons-nous maintenant sur le terme de bord

$$\int_{\partial\Omega}((A\nabla u)\cdot n)v = \int_{\Gamma_1}((A\nabla u)\cdot n)v + \int_{\Gamma_2}((A\nabla u)\cdot n)v.$$

La condition au bord sur Γ_2 peut être intégrée très naturellement à la formulation variationnelle en remplaçant tout simplement $(A\nabla u)\cdot n$ par $g-\beta u$. On ne dispose pas d'information sur la valeur du flux normal sortant $j = -(A\nabla u)\cdot n$ sur Γ_1, mais on sait en revanche que $u = 0$ sur Γ_1. On va donc imposer que toutes les fonctions $v \in V$ vérifient la condition $v = 0$ sur Γ_1 : la condition au bord $u = 0$ sur Γ_1 sera ainsi automatiquement intégrée dans la formulation variationnelle (33) via la définition de l'espace fonctionnel V, et le terme $\int_{\Gamma_1}((A\nabla u)\cdot n)v$ sera toujours nul pour $v \in V$. En regroupant dans le membre de gauche les termes bilinéaires en u et v et dans celui de droite les termes linéaires en v, on obtient

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v + \beta\int_{\partial\Omega} uv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv, \tag{34}$$

et on garde en mémoire qu'il faudra imposer $v = 0$ sur Γ_1 pour toutes les fonctions $v \in V$.

Etape 2 : détermination de l'espace fonctionnel V et de la forme bilinéaire a

On examine le membre de gauche pour déterminer l'espace fonctionnel dans lequel on va travailler. Pour cela, on regarde le cas où $v = u$ pour lequel on obtient la forme quadratique

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla u + \beta\int_{\partial\Omega} u^2, \tag{35}$$

qui est une somme de deux termes positifs. Pour que le premier terme soit bien défini, il faut et il suffit que $\nabla u \in L^2(\Omega)$. En effet, on a

$$m\int_\Omega |\nabla u|^2 \leqslant \int_\Omega (\nabla u)^T A\nabla u = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla u \leqslant M\int_\Omega |\nabla u|^2$$

avec $0 < m \leqslant M < \infty$. On peut ensuite montrer (on l'admettra ici) que si Ω est un ouvert borné de classe C^1, toute distribution u telle que $\nabla u \in L^2(\Omega)$ est elle-même une fonction de $L^2(\Omega)$. Pour que le premier terme de (35) soit bien défini, il est donc nécessaire et suffisant que u soit dans $H^1(\Omega)$. Or dès que u est dans $H^1(\Omega)$, le second terme de (35) est bien défini puisque le Théorème 33 assure que $u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Enfin, toujours grâce au Théorème 33 on peut donner un sens à la condition $u = 0$ sur Γ_1 pour tout $u \in H^1(\Omega)$. Ce raisonnement conduit donc naturellement aux choix

$$V := \left\{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(v)|_{\Gamma_1} = 0\right\},$$

soit de façon plus explicite

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\right\},$$

que l'on munit du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, et

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad a(u, v) := \int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v + \beta \int_{\partial\Omega} uv.$$

En utilisant à nouveau le Théorème 33 et l'inégalité (31), on obtient que V est un espace de Hilbert (le démontrer en exercice) et que

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad |a(u, v)| \leqslant (M + \beta C_0^2)\|u\|_V \, \|v\|_V,$$

où C_0 est la constante de continuité de l'application trace, ce qui montre que la forme bilinéaire a est continue.

Etape 3 : détermination de b et des espaces fonctionnels pour les données

L'étape suivante consiste à définir les espaces fonctionnels pour f et g les plus grands possibles, autrement dit les espaces dans lesquels choisir f et g pour que le problème variationnel (33) rentre dans le cadre du théorème de Lax-Milgram (sous réserve que a soit coercive). Pour cela, on observe qu'on peut reformuler ainsi le membre de droite de (34) :

$$\forall v \in V, \quad b(v) = \langle f, v\rangle_{V',V} + \langle g, \gamma_0(v)|_{\Gamma_2}\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_2)',H^{1/2}(\Gamma_2)},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V',V}$ désigne le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V' et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_2)',H^{1/2}(\Gamma_2)}$ le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma_2)$ et son dual topologique $H^{1/2}(\Gamma_2)'$. Si donc $f \in V'$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma_2)'$, on a, en vertu de la Remarque 35,

$$\forall v \in V, \quad |b(v)| \leqslant \left(\|f\|_{V'} + C_0\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)'}\right) \|v\|_V,$$

ce qui assure que la forme linéaire b est bien continue sur V. Les espaces V' et $H^{1/2}(\Gamma_2)'$ sont en fait les plus grands espaces dans lesquels on peut choisir f et g respectivement lorsqu'on adopte une approche variationnelle pour étudier le problème (32) : si on sort de ces espaces, la forme linéaire b n'est plus continue sur V.

La question naturelle qui se pose maintenant est de caractériser les espaces V' et $H^{1/2}(\Gamma_2)'$ qui, il faut bien le dire, sont des espaces de distributions pas très explicites. Il est facile de vérifier (le faire en exercice) qu'on a

$$L^2(\Omega) \subset V' \quad \text{et} \quad L^2(\Gamma_2) \in H^{1/2}(\Gamma_2)'.$$

On peut donc adopter l'approche variationnelle pour étudier (32) dès que $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_2)$. Il est plus compliqué de donner une caractérisation précise des espaces V' et $H^{1/2}(\Gamma_2)'$ dans le cas général. On peut toutefois remarquer que

- si $\Gamma_1 = \partial\Omega$ et $\Gamma_2 = \varnothing$ (condition au bord de Dirichlet homogène), alors $V = H_0^1(\Omega)$ et $V' = H^{-1}(\Omega)$ (cf. Théorème 23) ;

- si $\Gamma_1 = \varnothing$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega$ (condition au bord de Neumann pour $\beta = 0$ et de Robin pour $\beta > 0$), alors $V = H^1(\Omega)$ et $V' = H^1(\Omega)'$ (espace qui n'a pas de caractérisation simple) et $H^{1/2}(\Gamma_2)' = H^{1/2}(\partial\Omega)' = H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (cette dernière égalité provient du fait que $\partial\Omega$ est une variété sans bord).

Etape 4 : preuve de l'équivalence entre problème aux limites et formulation variationnelle

Pour éviter les complications techniques liées à des données non-régulières, on suppose dorévavant que $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_2)$ et on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ (A\nabla u)\cdot n + \beta u = g \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \tag{36}$$

et la formulation variationnelle (33) avec

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}, \tag{37}$$

$$a(u,v) := \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v + \beta \int_{\partial\Omega} uv, \tag{38}$$

$$b(v) := \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_2} gv. \tag{39}$$

Remarque 54. Le choix de chercher u dans $H^1(\Omega)$ dans (36) résulte de manière naturelle de l'analyse ci-dessus. L'espace $H^1(\Omega)$ est en effet le plus grand espace fonctionnel dans lequel on peut espérer trouver une solution variationnelle. De plus si $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_2)$, les équation du problème aux limites (32) ont bien toutes un sens. En effet, comme $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$, le champ de vecteur $A\nabla u$ est dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, donc dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Il définit donc une distribution à valeurs vectorielle, dont on peut prendre la divergence. De plus, comme $\mathrm{div}\,(A\nabla u) = -f \in L^2(\Omega)$, on a $A\nabla u \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ et donc d'après le Théorème 36, $(A\nabla u)\cdot n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Enfin, par le théorème de trace, $u|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$. Comme $g \in L^2(\Gamma_2)$ et $u|_{\Gamma_2} \in L^2(\Gamma_2)$, les conditions au bord $u = 0$ sur Γ_1 et $(A\nabla u)\cdot n = -\beta u + g$ sur Γ_2 ont donc au moins un sens dans $L^2(\Gamma_1)$ et $L^2(\Gamma_2)$ respectivement.

On veut maintenant montrer mathématiquement l'équivalence entre les problèmes (36) et (33) avec V, a et b définis par (37)-(38)-(39).

Soit d'abord u solution de (33) avec V, a et b donnés par (37)-(38)-(39). Montrons que u est solution de (36).

Comme $u \in V$, on a bien $u \in H^1(\Omega)$ et $u = 0$ sur Γ_1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle -\mathrm{div}\,(A\nabla u), \phi\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \left\langle -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \phi \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \left\langle A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad (\text{car } A_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \\
&= \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla\phi \\
&= a(u,\phi) \qquad (\text{car } \phi \in H^1(\Omega) \text{ et } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega) \\
&= b(\phi) \\
&= \int_\Omega f\phi \qquad (\text{car } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega) \\
&= \langle f, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f$ dans Ω au sens des distributions. Il en résulte que le champ de vecteurs $A\nabla u$ est dans $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. En particulier, $(A\nabla u)\cdot n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Comme par ailleurs $u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_2)$, on peut, quitte à prolonger g par 0 sur $\partial\Omega\backslash\Gamma_2$, donner un sens à $(A\nabla u)\cdot n + \beta u - g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, en utilisant la formule (13), on obtient que pour toute fonction $\phi \in V$,

$$\begin{aligned}
&\langle (A\nabla u)\cdot n + \beta\gamma_0(u) - g, \gamma_0(\phi)\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} \\
&= \langle (A\nabla u)\cdot n, \gamma_0(\phi)\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} + \beta\int_{\partial\Omega} u\phi - \int_{\Gamma_2} g\phi \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}\,(A\nabla u)\phi + \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla\phi + \beta\int_{\partial\Omega} u\phi - \int_{\Gamma_2} g\phi \\
&= -\int_\Omega f\phi + \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla\phi + \beta\int_{\partial\Omega} u\phi - \int_{\Gamma_2} g\phi \\
&= a(u,\phi) - b(\phi) = 0.
\end{aligned}$$

On peut montrer que cela implique que $(A\nabla u)\cdot n + \beta u - g = 0$ sur Γ_2. Donc u est solution de (36).

Réciproquement, soit u solution de (36). Montrons que u est solution de (33) avec V, a et b définis par(37)-(38)-(39).

La fonction u est dans $H^1(\Omega)$ et est nulle sur Γ_1. Elle est donc dans V. En raisonnant comme ci-dessus, on voit que $A\nabla u$ est dans $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. On déduit de (13) que

$$\begin{aligned}
\forall v \in V, \quad a(u,v) &= \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v + \beta\int_{\partial\Omega} uv \\
&= -\int_\Omega \mathrm{div}\,(A\nabla u)v + \langle (A\nabla u)\cdot n, \gamma_0(v)\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} + \beta\int_{\partial\Omega} uv \\
&= \int_\Omega fv + \langle (A\nabla u)\cdot n + \beta\gamma_0(u), \gamma_0(v)\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} \\
&= \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_2} gv = b(v),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

3.2 Conditions au bord de Dirichlet, Neumann et Robin

On rappelle le résultat suivant vu en première année (on se sert de l'inégalité de Poincaré pour montrer la coercivité de la forme bilinéaire a).

★ **Théorème 55** (condition au bord de Dirichlet homogène). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$. Le problème consistant à*

$$\begin{cases} \textit{chercher } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{40}$$

est bien posé au sens de Hadamard[4].

Notons que dans (41), la condition au bord $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est encodée dans le choix de l'espace fonctionnel $H_0^1(\Omega)$.

★ **Exercice 19.** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ un champ de matrices tel qu'il existe $0 < m \leqslant M < \infty$ tel que

$$m|y|^2 \leqslant y^T A(x) y \leqslant M|y|^2 \quad \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^d \text{ et presque tout } x \in \Omega,$$

$b \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs à divergence nulle ($\operatorname{div} b = 0$ dans Ω), et $c \in L^\infty(\Omega)$ un champ scalaire. Montrer qu'il existe une constante $c_0 < 0$ telle que si $c(x) \geqslant c_0$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors le problème aux limites

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{41}$$

est bien posé (au sens de Hadamard) pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$.

★ **Théorème 56** (condition au bord de Robin). *Soit Ω un ouvert borné lipsichtzien de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\beta > 0$. Le problème consistant à*

$$\begin{cases} \textit{chercher } u \in H^1(\Omega) \textit{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g \textit{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{42}$$

est bien posé au sens de Hadamard.

★ *Preuve.* D'après l'analyse précédente, le problème (42) est équivalent à la formulation variationnelle (33) avec

$$\begin{aligned} V &:= H^1(\Omega), \\ a(u,v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \beta \int_{\partial\Omega} uv, \\ b(v) &:= \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv. \end{aligned}$$

[4]Un problème est bien posé au sens de Hadamard s'il admet une solution et une seule et si la solution (ici u) dépend continûment des données (ici f ; la solution u dépend aussi continûment de Ω si on munit l'ensemble des ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$ d'une topologie adéquate).

De plus, V est un espace de Hilbert et la fome bilinéaire a et la forme linéaire b sont continues sur $V \times V$ et V respectivement. Pour montrer la coercivité de a, on utilise la Proposition 53. Pour tout $v \in V$, on a

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant 2\widetilde{C}^2_\Omega \left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(v)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right) + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \max\left(1 + 2\widetilde{C}^2_\Omega, 2C^2_\Omega \beta^{-1}\right) a(v,v).\end{aligned}$$

La forme bilinéaire a est donc coercive. De par le théorème de Lax-Milgram, le problème (42) est bien posé au sens de Hadamard. □

★ **Théorème 57** (condition au bord de Neumann)**.** *Soit Ω un ouvert borné connexe lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$. On considère le problème consistant à*

$$\begin{cases} \textit{chercher } u \in H^1(\Omega) \textit{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g \textit{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{43}$$

1. *Si les données f et g vérifient la condition de compatibilité*

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0, \tag{44}$$

   alors le probème (43) admet une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est l'espace affine $u_0 + \mathbb{R}\mathbb{1}_\Omega$ où u_0 est l'unique solution de (43) de moyenne nulle, et $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction constante sur Ω égale à 1.

2. *Si la condition de comptabilité (44) n'est pas satisfaite, alors le problème (43) n'a pas de solution.*

★ **Exercice 20.** Le but de cet exercice est de prouver le théorème ci-dessus.

1. Montrer que si les données f et g ne vérifient pas la condition de compatibilité (44), alors (43) n'a pas de solution. Donner une interprétation physique de cette condition en considérant (43) comme la solution stationnaire d'une équation de diffusion.

   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que la condition de compatibilité (44) est satisfaite. Les résultats obtenus au début de cette section montrent que le problème (43) est équivalent à la formulation variationnelle (33) avec

$$\begin{aligned} V &:= H^1(\Omega), \\ a(u,v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \\ b(v) &:= \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv. \end{aligned}$$

2. Montrer que la forme bilinéaire a n'est pas coercive sur V.

3. Soit $W = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega v = 0 \right\}$. Montrer que W est un sous-espace de Hilbert de V et que a est coercive sur W. En déduire que le problème consistant à

$$\begin{cases} \text{chercher } u \in W \text{ tel que} \\ \forall v \in W,\ a(u,v) = b(v) \end{cases} \tag{45}$$

   admet une unique solution u_0.

4. Montrer que u_0 est l'unique solution de moyenne nulle de (43) et que l'ensemble des solutions de (43) est l'espace affine $u_0 + \mathbb{R}\mathbb{1}_\Omega$.

Remarque 58 (condition au bord de Dirichlet non homogène)**.** Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Considérons le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{46}$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \cap C^0(\partial\Omega)$ sont données. On peut montrer qu'il existe une unique fonction $u_g \in H^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u_g = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $u_g = g$ sur $\partial\Omega$ et qu'il existe une constante $C_\Omega^{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}_+$ indépendante de g telle que

$$\forall g \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad \|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_\Omega^{\mathrm{r}} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

La fonction u_g est appelée le relèvement harmonique de g dans l'intérieur de Ω. La fonction $w = u - u_g$ est alors solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } w \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta w = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{array} \right. \tag{47}$$

Pour résoudre numériquement (46), on peut donc

- soit calculer séparément u_g et w et poser $u = w + u_g$,
- soit calculer directement une approximation de u par la méthode des éléments finis en imposant qu'en tout noeud $x^{(k)}$ du maillage situé sur $\partial\Omega$, la fonction approchée recherchée prenne la valeur $g(x^{(k)})$ (on suppose ici pour simplifier que l'ouvert Ω est polyédral).

Remarque 59. Considérons pour fixer les idées le problème aux limites consistant à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que} \\ -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{48}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times d})$ vérifie (31). Pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, l'approche variationnelle permet d'exhiber une unique solution de (48) dans $H_0^1(\Omega)$. Si f est, par exemple, une fonction de $L^1(\Omega)$ qui n'est pas dans $L^2(\Omega)$ ou une somme finie de masses de Dirac, l'approche variationnelle n'est plus appropriée. Il est cependant possible de construire d'autres cadres fonctionnels assurant l'existence et l'unicité de la solution$u$ de (48) dans une certaine classe de distributions pour des seconds membres f qui ne sont pas dans $H^{-1}(\Omega)$. Ainsi par exemple, si Ω est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^3$, A est constante égale à la matrice identité, et $f = \delta_0$, l'unique solution de (48) dans cette classe sera $u(x) = \frac{1}{4\pi|x|} - \frac{1}{4\pi}$; on peut vérifier que cette fonction n'est pas de classe H^1.

4 Etude du modèle de Gross–Pitaevskii

★ Dans cette section, nous mettons en oeuvre les techniques d'analyse fonctionnelle apprises en première année et dans ce cours pour montrer un résultat d'existence et d'unicité sur un problème issu de la physique quantique (modèle de Gross-Pitaevskii pour les condensats de Bose-Einstein). Cette section est organisée sous forme de problème corrigé.

4.1 Enoncé du problème

Soit $\Omega =]0,1[^d$ avec $d = 1$, 2, ou 3, et $V \in L^\infty(\Omega)$. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$E(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega V v^2 + \frac{\beta}{2}\int_\Omega v^4 \qquad \text{et} \qquad c(v) = \int_\Omega v^2 - 1 \tag{49}$$

1. Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $E(v)$ est un réel bien défini et que la fonction $v \mapsto E(v)$ est différentiable sur $H_0^1(\Omega)$. Calculer sa différentielle.

2. On considère le problème d'optimisation sous contrainte égalité

$$I = \inf\left\{E(v),\, v \in H_0^1(\Omega),\ c(v) = 0\right\} \tag{50}$$

   consistant à minimiser la fonctionnelle d'énergie $E(v)$ sur l'ensemble des fonctions v de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant la contrainte $\int_\Omega v^2 = 1$. Montrer que le problème (50) admet un minimiseur u.

   Indication : on considèrera une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour (50), c'est-à-dire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $c(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E(u_n) \to I$ lorsque n tend vers l'infini, et on montrera que cette suite est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On montrera ensuite qu'à extraction près, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour des topologies bien choisies vers un certain $u \in H_0^1(\Omega)$, et on en déduira que cette fonction u vérifie $c(u) = 0$ et $E(u) = I$.

3. Montrer que c est convexe et différentiable sur $H_0^1(\Omega)$ et calculer sa différentielle. Soit u un minimiseur de (50). Montrer que $c'(u) \neq 0$ et en déduire que u est solution de l'équation

$$-\Delta u + Vu + \beta u^3 = -\lambda u, \tag{51}$$

   pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Indication : on utilisera le résultat assurant que si u est un minimiseur de (50) tel que $c'(u) \neq 0$, alors il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ (le multiplicateur de Lagrange de la contrainte $c(u) = 0$) tel que $E'(u) + \lambda c'(u) = 0$.

4. On pose maintenant

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega) \mid c(v) \leqslant 0\right\}.$$

   Expliquer brièvement pourquoi E admet un minimiseur $u_\star$ sur K. Vérifier que K est convexe, et en déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par $u_\star$. *Indication : on distinguera les cas $c(u_*) = 0$ et $c(u_*) < 0$.*

4.2 Correction détaillée

1. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla v \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ par définition de $H^1(\Omega)$ et en outre $v \in L^4(\Omega)$ puisque $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ pour $d \leqslant 3$ (injections de Sobolev). Comme en outre $V \in L^\infty(\Omega)$, les fonctions $|\nabla v|^2$, Vv^2 et v^4 sont donc toutes intégrables sur Ω, ce qui prouve que E est bien définie sur $H_0^1(\Omega)$. Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et tout $h \in H_0^1(\Omega)$, on obtient en développant et en regroupant les termes constants, linéaires et d'ordre supérieur en h,

$$E(v+h) = E(v) + L_v(h) + R_v(h)$$

avec

$$L_v(h) = 2\int_\Omega (\nabla v\cdot\nabla h+Vvh+\beta v^3h) \quad \text{et} \quad R_v(h) = \int_\Omega |\nabla h|^2+\int_\Omega Vh^2+\frac{\beta}{2}\int_\Omega (6v^2h^2+4vh^3+h^4).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les injections de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leqslant q \leqslant 6$ et $d \leqslant 3$, et l'inégalité $\max(\|h\|_{L^2}, \|\nabla h\|_{L^2}) \leqslant \|h\|_{H^1}$, on obtient, en notant C_p ($p = 4$ ou $p = 6$) la constante de Sobolev telle que $\|w\|_{L^p} \leqslant C_p\|w\|_{H^1}$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |L_v(h)| &\leqslant 2\left(\|\nabla v\|_{L^2} + \|V\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2} + \beta\|v\|_{L^6}^3\right)\|h\|_{H^1} \\ |R_v(h)| &\leqslant (1 + \|V\|_{L^\infty} + 3\beta C_4^2\|v\|_{L^4}^2)\|h\|_{H^1}^2 + 2C_6^3\beta\|v\|_{L^2}\|h\|_{H^1}^3 + \frac{\beta}{2}C_4^4\|h\|_{H^1}^4 = O(\|h\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

Ceci prouve que E est différentiable en tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\forall h \in H_0^1(\Omega), \quad \langle E'(v), h\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 2\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla h + Vvh + \beta v^3 h).$$

2. On a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $c(v) = 0$,

$$E(v) \geqslant \|\nabla v\|_{L^2}^2 - \|V\|_{L^\infty} = \|v\|_{H_0^1}^2 - \|V\|_{L^\infty}.$$

Pour n assez grand $E(u_n) \leqslant I + 1$ et donc $\|u_n\|_{H_0^1}^2 \leqslant I + 1 + \|V\|_{L^\infty}$. La suite $(u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $u \in H_0^1(\Omega)$, faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$ et dans $L^4(\Omega)$ (injectons compacte de Sobolev). Pour montrer que les limites sont les mêmes, on utilise le résultat vu en cours disant que la convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$ ainsi que la convergence dans $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entraînent la convergence au sens des distributions et que la topologie des distributions est séparée : une suite ne peut avoir qu'une seule limite. Comme

$$u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{H_0^1} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_{H_0^1},$$

il vient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2.$$

Par ailleurs,

$$u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} u \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u_{n_k}^2 \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \int_\Omega u^2, \quad \int_\Omega V u_{n_k}^2 \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \int_\Omega V u^2,$$

et

$$u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} u \text{ dans } L^4(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u_{n_k}^4 \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \int_\Omega u^4.$$

En conséquence, $c(u) = 0$ et $E(u) \leqslant \liminf_{k\to\infty} E(u_{n_k}) = I$. Donc u est un minimiseur de (50).

3. Comme $c(v + h) = c(v) + 2(v, h)_{L^2} + \|h\|_{L^2}^2$, avec $|2(v, h)_{L^2}| \leqslant 2\|v\|_{L^2}\|h\|_{H^1}$ et $\|h\|_{L^2}^2 = O(\|h\|_{H^1}^2)$, c est différentiable sur $H_0^1(\Omega)$ et $\langle c'(v), h\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 2(v, h)_{L^2}$. On a donc pour tout v, w dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\langle c'(v) - c'(w), v - w\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 2\|v - w\|_{L^2}^2 \geqslant 0,$$

ce qui assure que c est convexe sur $H_0^1(\Omega)$. Si u est un minimiseur de (50), alors $\|u\|_{L^2} = 1$, et donc $\langle c'(u), u\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 2$. En particulier $c'(u) \neq 0$, et on peut donc appliquer le théorème d'optimalité sous contrainte scalaire égalité : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $E'(u) + \lambda c'(u) = 0$. Cette relation implique que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$,

$$0 = \langle E'(u)+\lambda c'(u), \phi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 2\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla\phi + Vu\phi + \beta u^3\phi + \lambda u\phi\right) = \langle -\Delta u+Vu+\beta u^3+\lambda u, \phi\rangle.$$

Donc $-\Delta u + Vu + \beta u^3 = -\lambda u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4. On remarque d'abord que K est non-vide car il contient en particulier la fonction nulle. On obtient l'existence d'un minimiseur u_* en procédant exactement comme dans la question 2. Comme c est convexe, K est convexe et comme c est différentiable, donc continue, sur $H_0^1(\Omega)$, K est un convexe fermé non-vide. Si $u_\star$ est tel que $c(u_*) < 0$, u_* est un point intérieur à K et la condition d'optimalité s'écrit $E'(u_*) = 0$, c'est-à-dire $-\Delta u_* + Vu_* + \beta u_*^3 = 0$. Si $c(u_*) = 0$, u_* est aussi un minimiseur de (50) et vérifie donc l'EDP $-\Delta u_* + Vu_* + \beta u_*^3 = -\lambda u_*$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inéquation d'Euler, on obtient que pour tout $v \in K$,

$$0 \leqslant \langle E'(u_*), v - u_*\rangle_{H^{-1},H_0^1} = -\lambda\int_\Omega u_*(v-u_*) = \lambda\left(1 - \int_\Omega u_* v\right).$$

En prenant $v = 0$, on obtient $\lambda \geqslant 0$.

5 Compléments (hors programme)

5.1 Caractérisation de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Pour un ouvert Ω générique, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact n'est pas dense dans $W^{1,p}(\Omega)$. Nous avons en revanche le résultat suivant. On rappelle que si ω et Ω sont deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, la notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que $\overline{\omega}$ est un compact inclus dans Ω.

Théorème 60 (Friedrichs)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty[$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$ telle que la suite $(\nabla\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∇u dans $L^p(\omega)$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.*

Preuve. Notons $\widetilde{u}$ le prolongement de u par zéro en dehors de Ω. Clairement $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d}\chi = 1$, et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'approximation de l'identité définie par

$$\chi_n(x) = n^d\chi(nx).$$

Soit par ailleurs $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi = 1$ sur la boule unité et

$$\psi_n(x) = \psi(x/(n+1)).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la suite de fonctions $\phi_n = \psi_n(\widetilde{u}\star\chi_n)$ convient. $\square$

A l'aide du Théorème 60, on peut établir le résultat suivant, qui fournit une caractérisation utile des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p \leqslant \infty$.

Théorème 61. *Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors,*

$$\forall\phi \in C_c^\infty(\Omega), \qquad \left|\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right| \leqslant \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

et

$$\forall \omega \subset\subset \Omega, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d, \quad \Big(|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)\Big) \quad \Rightarrow \quad \left(\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \, |h|\right).$$

Réciproquement, si $u \in L^p(\Omega)$ pour un certain $1 < p \leqslant +\infty$ (le cas $p = 1$ étant exclu) et s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ pour laquelle l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leqslant C \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \tag{52}$$

$$\forall \omega \subset\subset \Omega, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d, \quad \Big(|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)\Big) \quad \Rightarrow \quad \left(\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant C\, |h|\right), \tag{53}$$

alors la fonction u est dans $W^{1,p}(\Omega)$

Preuve. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On a pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| = |\langle u, \partial_{x_i} \phi \rangle| = |\langle \partial_{x_i} u, \phi \rangle| \leqslant \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi \right| \leqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \, \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$(\tau_h \psi - \psi)(x) = \psi(x + h) - \psi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\psi(x + th))\, dt = \int_0^1 \nabla \psi(x + th) \cdot h \, dt.$$

D'où

$$|(\tau_h \psi - \psi)(x)|^p \leqslant |h|^p \int_0^1 |\nabla \psi(x + th)|^p \, dt,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\|\tau_h \psi - \psi\|_{L^p(\omega)} &\leqslant |h| \left(\int_\omega \left(\int_0^1 |\nabla \psi(x + th)|^p \, dt \right) dx \right)^{1/p} \\
&\leqslant |h| \left(\int_0^1 \left(\int_\omega |\nabla \psi(x + th)|^p \, dx \right) dt \right)^{1/p} \\
&\leqslant |h| \left(\int_0^1 \left(\int_{\tau_{-th}\omega} |\nabla \psi(y)|^p \, dy \right) dt \right)^{1/p} \\
&= |h| \left(\int_0^1 \|\psi\|^p_{L^p(\tau_{-th}\omega)} \, dt \right)^{1/p} \\
&\leqslant |h| \sup_{t \in [0,1]} \|\psi\|_{L^p(\tau_{-th}\omega)}.
\end{aligned}$$

Soit $\omega \subset\subset \Omega$ et $|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)$. L'ouvert $\omega_h = \cup_{t \in [0,1]} \tau_{-th}\omega$ est tel que $\omega \subset \omega_h \subset\subset \Omega$ et

$$\|\tau_h \psi - \psi\|_{L^p(\omega)} \leqslant |h| \, \|\psi\|_{L^p(\omega_h)}. \tag{54}$$

Soit maintenant $u \in W^{1,p}(\Omega)$. En vertu du Théorème 60, on peut construire une suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers u dans $L^p(\Omega)$ telle que $(\nabla \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ∇u dans $L^p(\omega_h)$. Comme chaque fonction ψ_n vérifie (54), on obtient, en passant à la limite,

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant |h| \, \|u\|_{L^p(\omega_h)} \leqslant |h| \, \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Réciproquement, soit $1 < p \leqslant \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$ vérifiant (52). On a alors

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad |\langle \partial_{x_i} u, \phi \rangle| = |\langle u, \partial_{x_i} \phi \rangle| = \left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leqslant C \|\phi\|_{L^{p'}}. \tag{55}$$

Comme $1 \leqslant p' < \infty$, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p'}(\Omega)$, et il résulte donc de (55) que $\partial_{x_i} u \in (L^{p'}(\Omega))' = L^p(\Omega)$. Donc $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Soit enfin $1 < p \leqslant \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$ vérifiant (53). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\mathrm{Supp}(\phi) \subset \omega$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)$. On a

$$|\langle \tau_h u - u, \phi \rangle\rangle| = \left| \int_\omega (\tau_h u - u)\phi \right| \leqslant \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \|\phi\|_{L^{p'}(\omega)} \leqslant C\,|h|\,\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Mais par ailleurs

$$\langle \tau_h u - u, \phi \rangle = \langle u, \tau_{-h}\phi - \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\,(\phi(x+h) - \phi(x))\,dx.$$

En particulier, en prenant $h = t\,e_i$ où e_i est le vecteur directeur de l'axe x_i et t un réel positif suffisamment petit, on obtient

$$\left| \int_\Omega u(x)\, \frac{\phi(x - te_i) - \phi(x)}{t}\, dx \right| \leqslant C\,\|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient à l'aide du théorème de convergence dominée, que la condition (53) est vérifiée, et qu'en conséquence, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

5.2 Théorème d'Ascoli et critère de compacité de Kolmogorov

Les résultats présentés ci-dessous sont des lemmes techniques de première importance : on les utilise rarement sous cette forme, mais ce sont sur eux que reposent les preuves des théorèmes d'injections compactes de Sobolev (Section 2.7).

Théorème 62 (Ascoli)**.** *Soit V un espace vectoriel normé sur (réel ou complexe) et A un sous-ensemble compact de V. Soit B un sous-ensemble de $C^0(A)$, l'espace vectoriel des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$, muni de sa norme usuelle ($\|f\|_{C^0(A)} = \max_{x\in A} |f(x)|$). On suppose que B est* uniformément équicontinu*, autrement dit que*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall f \in B,$$
$$(\forall (x,y) \in A \times A,\ \|x - y\|_V \leqslant \delta) \ \Rightarrow\ (|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon). \tag{56}$$

Alors, $\overline{B}^{C^0(A)}$ est compact dans $C^0(A)$.

Preuve. Posons pour simplifier les notations $\overline{B} = \overline{B}^{C^0(A)}$. On vérifie facilement que l'ensemble $\overline{B}$ est uniformément équicontinu et borné dans $C^0(A;R)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{B}$. Nous devons en extraire une sous-suite qui converge vers un certain élément de $\overline{B}$ pour la topologie de $C^0(A;R)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut recouvrir l'ensemble compact A par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{n}$. On désigne par $\{y_{n,1}, \ldots, y_{n,i_n}\}$ l'ensemble des centres de ces boules. Par construction, $i_n < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{y_{n,1}, \ldots, y_{n,i_n}\}$ est un ensemble dénombrable de points de A. Par commodité, on renumérote les éléments de cet ensemble en une suite unique de points $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que l'on désigne par X. Par construction, l'ensemble X est dense dans A.

Par hypothèse, la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut donc extraire de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite notée $(f_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite réelle $f_n^{(0)}(x_0)$ converge. Puis, on extrait de la suite $(f_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle sous-suite $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions qui converge simplement au point x_1. On définit ainsi les suites extraites $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, puis on introduit la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{B}$ en posant $g_n = f_n^{(n)}$ (procédé diagonal). La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(g_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite que l'on notera $g(x_i)$.

De l'hypothèse d'uniforme équicontinuité, on déduit que la fonction g est uniformément continue sur l'ensemble X. Cet ensemble étant dense dans A, on peut invoquer la Proposition 63 ci-dessous qui assure l'existence d'une fonction $\widetilde{g} \in C^0(A)$ qui prolonge g. Enfin, on vérifie sans peine que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\widetilde{g}$ dans $C^0(A)$, ce qui complète la preuve. $\square$

Proposition 63. *Soit V un espace vectoriel normé (réel ou complexe), A un sous-ensemble de V et X un sous-ensemble de A dense dans A. Soit g une application uniformément continue de X dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe une unique application uniformément continue de A dans $\mathbb{R}$ qui coïncide avec g sur X.*

Preuve. Soit $x \in A$. Puisque X est dense dans A, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X convergeant vers x. Cette suite est donc de Cauchy dans V et puisque l'application g est uniformément continue, la suite réelle $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (le vérifier en exerice). La suite $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers une certaine limite $y \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que cette limite ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, ce qui permet de poser $y = \widetilde{g}(x)$. L'application $\widetilde{g} : X \to \mathbb{R}$ est clairement un prolongement de g. De plus, $\widetilde{g}$ est uniformément continue. En effet, soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in X \times X$, $\|x_1 - x_2\|_V \leqslant \alpha$ implique $|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. Par conséquent, pour tout $(y, z) \in A \times A$ avec $\|y - z\|_V \leqslant \frac{\alpha}{3}$, on peut choisir N suffisamment grand pour trouver $(y_N, z_N) \in X \times X$ tels que $\|y - y_N\|_V \leqslant \frac{\alpha}{3}$, $|\widetilde{g}(y) - g(y_N)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$, $\|z - z_N\|_V \leqslant \frac{\alpha}{3}$ et $|\widetilde{g}(z) - g(z_N)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. On en déduit par inégalité triangulaire que $\|y_N - z_N\|_V \leqslant \alpha$ si bien que

$$|\widetilde{g}(y) - \widetilde{g}(z)| \leqslant |\widetilde{g}(y) - g(y_N)| + |g(y_N) - g(z_N)| + |\widetilde{g}(z) - g(z_N)| \leqslant \epsilon,$$

ce qui montre l'uniforme continuité de $\widetilde{g}$ sur A. Enfin, l'unicité du prolongement uniformément continu est évidente. $\square$

Exercice 21. Soit A un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d$. Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, on rappelle que

$$C^{0,\alpha}(A) := \left\{ f \in C^0(A) \mid \exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall (x,y) \in A \times A,\ |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha \right\}$$

désigne l'espace des fonctions Hölderiennes de A dans $\mathbb{R}$, muni de sa norme usuelle définie par

$$\forall f \in C^{0,\alpha}(A), \quad \|f\|_{C^{0,\alpha}(A)} = \sup_{x,y\in A,\ x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Notons que $C^{0,1}(A)$ correspond à l'espace des fonctions lipschitziennes de A dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$, l'injection canonique $C^{0,1}(A) \hookrightarrow C^0(A)$ est compacte.

Théorème 64 (critère de compacité de Kolmogorov)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $1 \leqslant p < \infty$. Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la fermeture est un compact inclus dans Ω (ce qu'on note $\omega \subset\subset \Omega$) et B un sous-ensemble de $L^p(\Omega)$ tel que*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists 0 < \delta < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega), \quad \textit{tel que} \quad \forall f \in B, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d, \quad (|h| \leqslant \delta) \Rightarrow \left(\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leqslant \epsilon \right).$$

Alors, l'ensemble $B_\omega = \{ f|_\omega \,,\ f \in B\}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Preuve. L'idée de la preuve consiste à régulariser par convolution les fonctions de B et à utiliser le théorème d'Ascoli dans $C^0(\overline{\omega})$ sur l'ensemble des fonction régularisées. Pour régulariser par convolution les fonctions de B, il faut auparavant les prolonger sur $\mathbb{R}^d$.

On peut sans perte de généralité supposer Ω borné et prolonger toute fonction f de B en une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\widetilde{f}(x) = \left| \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega. \end{array} \right.$$

L'ouvert Ω étant supposé borné, $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|\widetilde{f}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ et $\|\widetilde{f}\|_{L^1} \leqslant |\Omega|^{1/p'} \|f\|_{L^p}$ où p' est l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Il en résulte que l'ensemble $\widetilde{B} = \left\{ \widetilde{f},\ f \in B \right\}$ est borné dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$.

Régularisation par convolution des fonctions de $\widetilde{B}$

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive à support dans $B(0,1)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \chi = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\chi_n(x) = n^d \chi(nx)$. La fonction χ_n est une fonction C^∞ positive à support dans $B(0, 1/n)$ d'intégrale égale à 1.

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a donc

$$\begin{aligned} \left| (\widetilde{f} \star \chi_n)(x) - \widetilde{f}(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(x-y)\, \chi_n(y)\, dy - \widetilde{f}(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(x-y)\, \chi_n(y)\, dy - \widetilde{f}(x) \int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(y)\, dy \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left| \widetilde{f}(x-y) - \widetilde{f}(x) \right| \chi_n(y)\, dy \\ &= \int_{B(0,1/n)} \left| \widetilde{f}(x-y) - \widetilde{f}(x) \right| \chi_n(y)\, dy \\ &\leqslant \left(\int_{B(0,1/n)} \left| \widetilde{f}(x-y) - \widetilde{f}(x) \right|^p \chi_n(y)\, dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière inégalité, on a appliqué l'inégalité de Hölder $\|gh\|_{L^1} \leqslant \|g\|_{L^p} \|h\|_{L^{p'}}$ avec $g = \left| \widetilde{f}(x - \cdot) - \widetilde{f}(x) \right|$ et $h = 1$ dans l'espace probabilisé $(B(0, 1/n), \mathcal{T}_L, \chi_n(y)\, dy)$. En élevant à la puissance p l'inégalité ainsi obtenue, et en l'intégrant sur ω, on obtient

$$\left\| (\widetilde{f} \star \chi_n) - \widetilde{f} \right\|_{L^p(\omega)}^p \leqslant \int_{B(0,1/n)} \|\tau_y \widetilde{f} - \widetilde{f}\|_{L^p(\omega)}^p \chi_n(y)\, dy.$$

Il en résulte que pour $\widetilde{f} \in \widetilde{B}$ et $n \geqslant 1/\delta$,

$$\left\| (\widetilde{f} \star \chi_n) - \widetilde{f} \right\|_{L^p(\omega)} \leqslant \epsilon.$$

Application du théorème d'Ascoli dans $C^0(\overline{\omega})$

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{B}_n = \left\{ \left(\widetilde{f} \star \chi_n\right)\Big|_{\overline{\omega}},\ \widetilde{f} \in \widetilde{B} \right\}$. Les fonctions $\widetilde{f} \star \chi_n$ étant continues (elles sont en fait de classe C^∞), $\widetilde{B}_n$ est un sous-ensemble de $C^0(\overline{\omega})$. On a par ailleurs pour tout $\widetilde{f} \in \widetilde{B}$,

$$\left\| \widetilde{f} \star \chi_n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \, \|\chi_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit que $\widetilde{B}_n$ est borné dans $C^0(\overline{\omega})$ (la borne dépendant de n).

En outre, pour tout $\widetilde{f} \in \widetilde{B}$ et tout $(x, y) \in \overline{\omega} \times \overline{\omega}$,

$$\begin{aligned} \left| (\widetilde{f} \star \chi_n)(x) - (\widetilde{f} \star \chi_n)(y) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(z) \left[\chi_n(x - z) - \chi_n(y - z) \right] dz \right| \\ &\leqslant L_n \, \|\widetilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \, |x - y| \end{aligned}$$

où L_n désigne la constante de Lipschitz de χ_n. L'ensemble B_n est donc équicontinu dans $C^0(\overline{\omega})$.

En appliquant le théorème d'Ascoli (avec $A = \overline{\omega}$ et $B = B_n$), on obtient que B_n est relativement compact dans $C^0(\overline{\omega})$, et donc *a fortiori* dans $L^p(\omega)$.

Fin de la preuve. Pour montrer la compacité relative de B_ω, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir B_ω par un nombre fini de boules de $L^p(\omega)$ de rayon ϵ.

Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que

$$\forall f \in B, \quad \|(\widetilde{f} \star \chi_n) - f\|_{L^p(\omega)} \leqslant \epsilon/2. \tag{57}$$

Soit $n \geqslant 1/\delta$. L'ensemble B_n étant relativement compact dans $L^p(\omega)$, on peut le recouvrir d'un nombre fini de boules de $L^p(\omega)$ de rayon $\epsilon/2$, i.e.

$$B_n \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left\{ g \in L^p(\omega),\ \|g - g_i\|_{L^p(\omega)} < \epsilon/2 \right\}$$

où les g_i sont des fonctions de $L^p(\omega)$. En rapprochant de (57), on obtient

$$B_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left\{ g \in L^p(\omega),\ \|g - g_i\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \right\},$$

ce qui conclut la preuve. □

Le théorème ci-dessus fournit de la compacité dans $L^p(\omega)$ pour $\omega \subset\subset \Omega$. Si on veut récupérer de la compacité forte sur $L^p(\Omega)$, il faut contrôler de manière uniforme le comportement des fonctions de B au voisinage du bord de Ω (et à l'infini si Ω est non borné). On peut ainsi prouver le résultat suivant.

Corollaire 65. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $1 \leqslant p < +\infty$. Soit B un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ tel que*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega, \quad \exists 0 < \delta < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega), \quad \textit{tel que} \quad \forall f \in B, \quad \forall h \in \mathbb{R}^d,$$
$$(|h| \leqslant \delta) \ \Rightarrow \ \left(\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leqslant \epsilon \right),$$

et

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \omega \subset\subset \Omega, \quad \textit{tel que} \quad \forall f \in B, \quad \|f\|_{L^p(\Omega \backslash \omega)} \leqslant \epsilon.$$

L'ensemble B est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$ tel que

$$\forall f \in B, \quad \|f\|_{L^p(\Omega\backslash\omega)} \leqslant \epsilon/2.$$

Il résulte du Théorème 64 que $B_\omega = \{f|_\omega,\ f \in B\}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. On peut donc recouvrir B_ω d'un nombre fini de boules de $L^p(\omega)$ de rayon $\epsilon/2$, i.e.

$$B_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left\{g \in L^p(\omega),\ \|g - g_i\|_{L^p(\omega)} < \epsilon/2\right\}$$

où les g_i sont des fonctions de $L^p(\omega)$. Soit $\widetilde{g}_i$ le prolongement de g_i par zéro sur $\Omega\backslash\omega$. Les fonctions $\widetilde{g}_i$ sont dans $L^p(\Omega)$ et il vient

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left\{g \in L^p(\Omega),\ \|g - \widetilde{g}_i\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon\right\}.$$

La compacité relative de B dans $L^p(\Omega)$ s'en déduit. □

Terminons cette section en donnant une preuve du Théorème de Rellich–Kondrachov pour $k = 1$.

Preuve du Théorème 50 pour $s = 1$. Commençons par prouver la deuxième assertion. Soit B un sous-ensemble borné de $W^{1,p}(\Omega)$.

Si $p > d$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, ce qui fait que B est un borné de $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Cela signifie qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in B$,

$$\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leqslant C,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}, |u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha. \tag{58}$$

Comme Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $\overline{\Omega}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$, et (58) implique que l'ensemble B rentre dans le cadre d'application du théorème d'Ascoli. On en conclut que B est précompact dans $C^0(\overline{\Omega})$.

Considérons maintenant le cas $p < d$. Comme $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{p_*}(\Omega)$, B est un sous-ensemble borné de $L^{p_*}(\Omega)$. Nous allons montrer que pour tout $1 \leqslant q < p_*$, B vérifie les hypothèses du Corollaire 65 du théorème de compacité de Kolmogorov, et est donc relativement compact dans $L^q(\Omega)$. Soit donc $1 \leqslant q < p_*$, $\epsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$. En utilisant l'inégalité d'interpolation (18), on obtient que pour tout $|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d\backslash\Omega)$, et tout $u \in B$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\omega)} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p_*}(\omega)} \quad \text{où} \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{p_*}.$$

En utilisant la proposition 61, il vient ensuite

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant \|u\|_{L^1(\omega)} |h|.$$

D'où l'existance d'une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $u \in B$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant C |h|^\alpha.$$

Il existe donc un réel $0 < \delta < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)$ tel que pour tout

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \quad (|h| \leqslant \delta) \quad \Rightarrow \quad \left(\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant \epsilon\right).$$

L'ouvert Ω étant borné, on a par ailleurs pour tout $\omega \subset\subset \Omega$,

$$\forall u \in B, \quad \|u\|_{L^q(\Omega\backslash\omega)} \leqslant \|u\|_{L^{p*}(\Omega\backslash\omega)} \|1\|_{L^{1-q/p*}(\Omega\backslash\omega)} \leqslant \|u\|_{L^{p*}(\Omega)} |\Omega\backslash\omega|^{1-q/p*}.$$

On conclut en remarquant que comme B est borné dans $L^{p*}(\Omega)$, on peut toujours trouver, pour tout $\epsilon > 0$ un ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ tel que pour tout $u \in B$, $\|u\|_{L^p(\Omega\backslash\omega)} \leqslant \epsilon$.

Le cas $p = d$ se ramène au cas précédent, puisque Ω étant borné, tout élément de $W^{1,d}(\Omega)$ est dans $W^{1,r}(\Omega)$ pour tout $1 \leqslant r \leqslant d$.

Prouvons maintenant la première assertion. Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset\subset B_R(0)$ où $B_R(0)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ centrée à l'origine. Comme $W_0^{k,p}(\Omega)$ est par définition la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$, le prolongement par zéro sur $B_R(0)\backslash\Omega$ de toute fonction de $W_0^{k,p}(\Omega)$ définit une fonction de $W^{k,p}(B_R(0))$ de même norme L^q et $W^{k,p}$ que la fonction d'origine. On conclut en appliquant le théorème 50 à l'ouvert borné $B_R(0)$, qui possède la propriété d'extensibilité-(k,p) pour tout k et tout p. □

5.3 Lemme de Baire et théorème de Banach-Steinhaus dans les Banach

Nous démontrons dans cette section deux résultats généraux d'analyse, le lemme de Baire et le théorème de Banach-Steinhaus dans les Banach, qui permettent de montrer des résultats importants d'analyse fonctionnelle. Nous prouverons ainsi à la fin de cette section la première assertion du Théorème 14 affirmant que toute suite faiblement convergente dans un Hilbert est bornée.

Le lemme ci-dessous montre que tout espace de Banach vérifie la propriété topologique de Baire[5].

Lemme 66 (Baire)**.** *Soit V un espace de Banach.*

1. *Toute réunion dénombrable de fermés de V d'intérieur vide est un ensemble d'intérieur vide.*

2. *Toute intersection dénombrables d'ouverts denses de V est un ensemble dense.*

Preuve. L'équivalence entre la propriété relative aux fermés et celle relative aux ouverts est évidente par passage au complémentaire. Montrons celle relative aux ouverts. Soit $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans V. Montrons que l'ensemble $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans V. Soit $v \in V$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $l \in B_V(v,\epsilon) \cap O$. Puisque O_1 est dense dans V, $B_V(v,\epsilon) \cap O_1 \neq \varnothing$. Par conséquent, il existe $v_1 \in V$ et $0 < \epsilon_1 < \frac{\epsilon}{2}$ tels que $\overline{B_V(v_1,\epsilon_1)}^V \subset B_V(v,\epsilon) \cap O_1$. Par récurrence, on construit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V et une suite de réels $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $0 < \epsilon_{n+1} < \frac{\epsilon_n}{2}$ et

$$\overline{B_V(v_{n+1},\epsilon_{n+1})}^V \subset B_V(v_n,\epsilon_n) \cap O_{n+1}.$$

On vérifie facilement que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans V ; elle converge donc vers $l \in V$. Par construction, $v_{n+p} \in B_V(v_n,\epsilon_n)$ pour tout $p \geqslant 1$, si bien que $l \in \overline{B_V(v_n,\epsilon_n)}^V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $l \in B_V(v,\epsilon) \cap O$, ce qui complète la preuve. □

[5]On dit qu'un espace topologique X est vérifie la propriété de Baire si dans X, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est un ensemble d'intérieur vide, ou de façon équivalente si dans X, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est un ensemble d'intérieur vide

Le théoème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus joue un rôle fondamental en analyse fonctionnelle. Nous en donnons ici une version dans les espaces de Banach. Il en existe une version plus générale dans les espaces dit de Fréchet, dont on déduit un résultat très pratique de la théorie des distributions : si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(\langle T_n, \phi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l_ϕ, alors la forme linéaire $\phi \mapsto l_\phi$ est une distribution (i.e. vérifie la propriété de continuité qui caractérise les distributions).

Théorème 67 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit V et W deux espaces de Banach et $(T_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'éléments de $\mathcal{L}(V;W)$. On suppose que*

$$\forall x \in V, \quad \exists c_x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \|T_i x\|_W \leqslant c_x \|x\|_V. \tag{59}$$

Alors il existe une constante c (ne dépendant pas de x) telle que

$$\forall x \in V, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \|T_i x\|_W \leqslant c \|x\|_V.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$X_n = \{x \in V, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \|T_i x\|_W \leqslant n\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est un fermé et il découle de (59) que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = V.$$

En utilisant le lemme de Baire, on obtient l'existence d'un n_0 pour lequel X_{n_0} est d'intérieur non vide. Soit donc $x_0 \in X_{n_0}$ et $r_0 > 0$ tel que $B_V(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, i.e. tel que

$$\forall y \in B_V(0,1), \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \|T_i(x_0 + r_0 y)\|_W \leqslant n_0.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in V, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \|T_i x\|_W \leqslant \frac{1}{r_0}\left(n_0 + c_{x_0}\|x_0\|_V\right) \|x\|_V,$$

ce qui complète la preuve. □

Corollaire 68. *Soit V et W deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(V;W)$ telle que pour tout $x \in V$, la suite $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans W vers une limite notée Tx. Alors,*

1. *la suite $(\|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $T \in \mathcal{L}(V;W)$ et $\|T\|_{\mathcal{L}(V;W)} \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)}$;*
2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de V qui converge vers x, alors la suite $(T_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tx dans W.*

Preuve. Preuve de (i). Il est clair que T est linéaire. Par ailleurs, pour tout $x \in V$, la suite $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans W, donc est *a fortiori* bornée dans W. La condition (59) est donc satisfaite par la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De par le théorème 67 de Banach–Steinhaus, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \in V, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n x\|_W \leqslant c \|x\|_V, \tag{60}$$

ce qui implique

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} < +\infty.$$

En faisant tendre n vers l'infini dans (60), on obtient $T \in \mathcal{L}(V;W)$. Enfin, en remarquant que
$$\forall x \in V, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n x\|_W \leqslant \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} \|x\|_V,$$
il vient pour tout $x \in V$,
$$\|Tx\|_W = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_W \leqslant \left(\liminf_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} \right) \|x\|_V,$$
d'où $\|T\|_{\mathcal{L}(V;W)} \leqslant \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)}$.

Preuve de (ii). On a
$$\begin{aligned} \|T_n x_n - Tx\|_W &\leqslant \|T_n x_n - T_n x\|_W + \|T_n x - Tx\|_W \\ &\leqslant \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} \right) \|x - x_n\|_V + \|T_n x - Tx\|_W, \end{aligned}$$
et on conclut en observant que les deux termes du membre de droite convergent vers zéro puisque $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(V;W)} < +\infty$. □

Comme annoncé, nous terminons cette section par la preuve de la première assertion du Théorème 14. Pour montrer qu'une suite faiblement convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est bornée, il suffit d'appliquer le Corollaire 68 avec $V = \mathcal{H}$, $W = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et $T_n = (u_n, \cdot)_{\mathcal{H}}$. On a bien $T_n \in \mathcal{H}'$ et pour tout $v \in \mathcal{H}$, $(T_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $Tv = (v, u)_{\mathcal{H}}$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $\mathcal{H}'$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans $\mathcal{H}$ en vertu du théorème de représentation de Riesz.

Exercices

Exercice 22. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$ et soit $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \in (L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1}))^d$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $1 \leqslant i \leqslant d$, on note $\widetilde{x}_i = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_d)$. On cherche à montrer que la fonction
$$g(x) = \prod_{i=1}^{d} f_i(\widetilde{x}_i)$$
est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et vérifie
$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \prod_{i=1}^{d} \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}. \tag{61}$$

1. Vérifier que le résultat est vrai pour $d = 2$.
2. On va montrer par récurrence que le résultat est vrai pour tout $d \geqslant 2$. Soit $d \geqslant 3$. On suppose que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $d - 1$.

   (a) Montrer que pour presque tout $x_d \in \mathbb{R}$,
$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |g(x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d)| \, dx_1 \cdots dx_{d-1} \leqslant \|f_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{\frac{d-1}{d-2}} \, dx_1 \cdots dx_{d-1} \right)^{\frac{d-2}{d-1}}.$$

(b) En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que pour presque tout $x_d \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} |f_i(\widetilde{x}_i)|^{\frac{d-1}{d-2}}\, dx_1 \cdots dx_{d-1} \leqslant \prod_{i=1}^{d-1} \|f_i(\cdot, x_d)\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-2})}^{\frac{d-1}{d-2}}.$$

et de là que

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |g(x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d)|\, dx_1 \cdots dx_{d-1} \leqslant \|f_d\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \prod_{i=1}^{d-1} \|f_i(\cdot, x_d)\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-2})}.$$

(c) Conclure en intégrant par rapport à x_d l'inégalité ci-dessus.

Exercice 23. L'objectif de cet exercice est de construire un contre-exemple afin d'illustrer le fait que les conclusions du Corollaire 45 ne peuvent pas s'étendre à tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ sans une hypothèse de régularité minimale sur sa frontière. Soit $\alpha > 1$ et soit $p \in [1, 2[$. On pose $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x^\alpha\}$.

1. Qu'implique l'hypothèse $\alpha > 1$ quant à la frontière de Ω ? Est-ce que la frontière de Ω est lipschitzienne ?
2. Soit $\beta \in]1 - \frac{1+\alpha}{p}, 0[$. On pose $u(x, y) = x^\beta$. Montrer que $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
3. Montrer que $u \in L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p_\alpha[$ avec $\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1}{p} - \frac{1}{1+\alpha}$.
4. On pose $\epsilon = \frac{\beta-1}{1+\alpha} + \frac{1}{p}$. Vérifier que $\epsilon > 0$ et montrer qu'on peut choisir β de sorte que ϵ soit arbitrairement petit.
5. On pose $\frac{1}{p_\beta} = \frac{1}{p_\alpha} - \epsilon$. Vérifier que si ϵ est suffisamment petit, $p_\alpha < p_\beta < \frac{2p}{2-p}$.
6. Montrer que $u \notin L^q(\Omega)$ pour $q \in [p_\beta, \frac{2p}{2-p}]$. Conclure.

Références

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2nd edition, Academic Press, 2003.

[2] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, American Mathematical Society, 2009.