

Loi de Wigner et stabilité marginale des écosystèmes

Roman Beauvallet, Yacine Klikel & Octave van Wijland

November 10, 2024

Abstract

Dans la première partie de ce rapport on explore une approche récente [1] pour déterminer les équilibres atteints par des écosystèmes composés d'un grand nombre d'espèces différentes. On commencera par reproduire numériquement l'existence d'une "transition de phase" en intégrant les équations différentielles de la dynamique par une méthode numérique, puis on mettra en évidence la nécessité de développer la théorie sur les matrices aléatoires pour l'expliquer. Dans la seconde partie on montrera donc des résultats classiques sur les matrices aléatoires de Wigner en se basant sur [2, 3]. Enfin on utilisera ces résultats pour expliquer les comportements particuliers des écosystèmes.

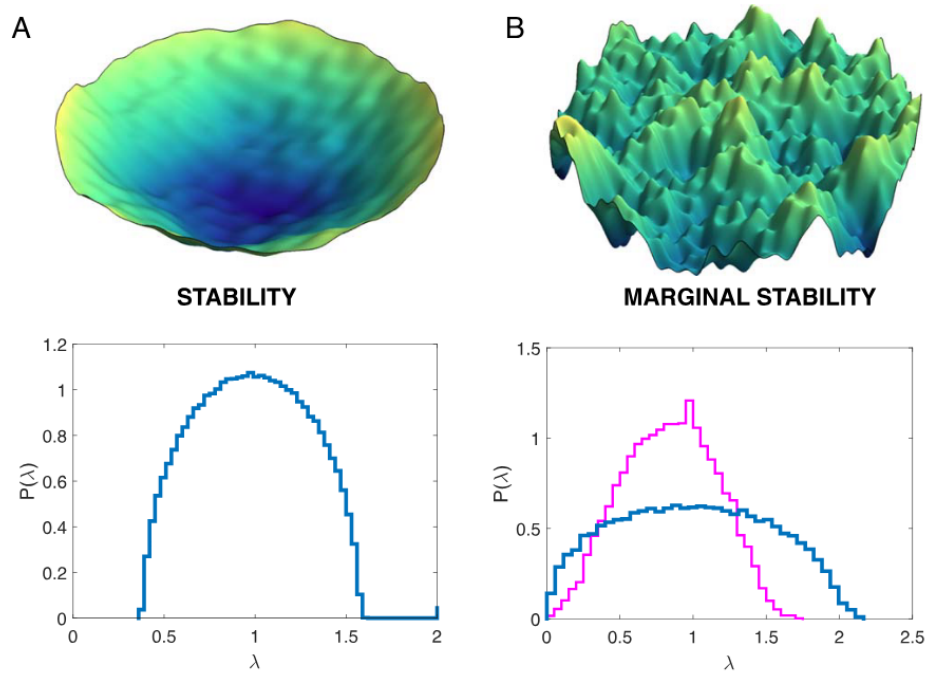


Figure 1: Figure tirée de [1] représentant les deux phases de notre écosystème.

Contents

1	Transition de phase d'un grand écosystème	3
1.1	Un modèle simplifié d'espèces en interactions	3
1.2	Mise en évidence numérique d'une brisure de symétrie	4
1.2.1	Le modèle numérique	4
1.2.2	Application à différents σ ; brisure de symétrie	4
1.3	Début d'interprétation, limite mathématique	5
1.4	Les matrices aléatoires en physique	6
2	La loi de Wigner	6
2.1	Spectre des matrices aléatoires de grande dimension	6
2.2	Vérification numérique du théorème dans différents cas	7
2.2.1	Le cas gaussien	7
2.2.2	La probabilité uniforme et la loi de Poisson	8
2.3	Estimation de l'erreur	9
3	Interprétation physique des résultats sur l'écosystème grâce à la loi de Wigner	11
	Annexe A	13
	Annexe B	15

1 Transition de phase d'un grand écosystème

On propose de s'intéresser à la stabilité des équilibres atteints par des écosystèmes formés d'un grand nombre d'espèces différentes en se basant sur le modèle détaillé dans [1] qui s'inspire des équations de Lotka-Volterra proposées dans les années 20 et 30 du XX^e siècle.

On commence par présenter le modèle ainsi que ses hypothèses. Ensuite, on reproduira les résultats de [1] en montrant numériquement qu'en intégrant les équations obtenues, il existe deux régimes. On pourra alors faire une analogie avec un système de spins à l'équilibre thermique subissant une transition de phase de l'état paramagnétique vers un état "verre de spin".

La dernière partie portera sur l'exploitation de la loi de Wigner sur nos exemples numériques afin de mettre en évidence cette transition de phase et déterminer les valeurs critiques des paramètres.

1.1 Un modèle simplifié d'espèces en interactions

Dans le modèle de Lotka-Volterra, on considère S espèces différentes de population N_i , $i = 1, \dots, S$ évoluant selon :

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{r_i}{K_i} N_i (K_i - N_i) - N_i \sum_{j, j \neq i} \alpha_{ij} N_j + \sqrt{N_i} \eta_i(t) + \lambda$$

avec :

- r_i le taux de croissance de l'espèce i et K_i la population d'équilibre sans interaction. On les prend égaux pour toutes les espèces et valant 1 (quitte à redéfinir les autres variables ; $N_i \in [0, 1]$).
- α_{ij} correspond aux interactions compétitives ($\alpha_{ij} > 0$)/mutualistes ($\alpha_{ij} < 0$) entre espèces. On suppose la matrice α_{ij} symétrique et ses coefficients de la partie triangulaire supérieure sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant une espérance et une variance.
- $\eta_i(t)$ est un bruit blanc de variance $2\omega^2$ et $\sqrt{N_i}$ prend en compte la taille de la population dans ce terme. Il est tel que si $N_i \simeq 0$ à un moment donné, il y reste.
- $\lambda = 0^+$ est un taux d'immigration, on le prend proche de zéro positivement pour s'assurer que toutes les espèces existent à un moment donné (afin d'éviter de considérer des équilibres instables sous petite immigration).

On peut se ramener à une équation de Langevin :

$$\frac{dN_i}{dt} = -N_i \left(\nabla_{N_i} V_i(N_i) + \sum_{j, j \neq i} \alpha_{ij} N_j + \frac{\lambda}{N_i} \right) + \sqrt{N_i} \eta_i(t), \quad V_i(N_i) = \frac{N_i^2}{2} - N_i$$

ce qui permet, d'après l'annexe de [1], de se ramener à un problème de physique statistique d'un système thermique désordonné de température $T = \omega^2$. Alors, les N_i sont des degrés de liberté interagissants via un couplage aléatoire α_{ij} et subissant un potentiel individuel $V_i(N_i) + (T - \lambda) \ln N_i$.

On se place à température nulle (pas de bruit blanc) et on note :

- $\sigma^2 = S \cdot \text{Var}[\alpha_{ij}]$
- $\mu = S \cdot \mathbb{E}[\alpha_{ij}]$
- avec des * les espèces qui ne se sont pas disparus
- $\frac{\partial N_i^*}{\partial \xi_i^*}$ la réponse de l'espèce i à la perturbation $V_i(N_i) \rightarrow V_i(N_i) - \xi_i N_i$
- $\phi = \frac{S^*}{S}$ la fraction d'espèce qui n'ont pas disparu (diversité)

Il s'agit alors de montrer numériquement que lorsque σ croît, on passe d'un système avec un unique équilibre global et local pour $\sigma < \sigma_c$ (= valeur critique de σ), à un système possédant un grand nombre d'équilibres locaux pour $\sigma > \sigma_c$ et mettre en évidence que c'est analogue à une transition de phase, de paramagnétique à verre de spin.

1.2 Mise en évidence numérique d’une brisure de symétrie

Pour intégrer les équations de la dynamique, on code une méthode de Runge-Kutta (qui se retrouve dans le github de l’[annexe B](#)). Ce choix est justifié par l’article [4] dans lequel il est écrit qu’un ”Runge-Kutta 45 solver” est utilisé pour intégrer ces équations différentielles couplées.

1.2.1 Le modèle numérique

On se ramène à un modèle simple pour observer numériquement la différence de comportement à petite et grande variance $\sigma^2 = S \cdot \text{Var}[\alpha_{ij}]$. Les équations différentielles que l’on considère sont celles de Lotka-Volterra à température nulle (pas de bruit blanc) et sans immigration ($\lambda = 0$). On les intègre par une méthode de Runge-Kutta d’ordre 4 sur $t = 1000$ itérations avec un pas de temps de $h = 0.1$ dans la méthode de Runge-Kutta.

On prend des conditions initiales distribuées de manière uniforme dans $[0, 1]$ pour les N_i avant d’intégrer. Pour déterminer l’influence de la variance σ , on fixe une matrice tirée aléatoirement α_{ij} de variance σ^2/S (et espérance μ/S) et on intègre $K = 10$ fois les équations différentielles à conditions initiales différentes afin d’analyser les différences entre les équilibres atteints sur ces différentes itérations. Notons que t, h et K ont été déterminés de façon à ce que le programme converge de façon à donner un résultat indépendant de ces valeurs au deuxième chiffre significatif près en un temps fini dans le cas $\sigma = 0$ où l’on s’attend toujours au même équilibre.

1.2.2 Application à différents σ ; brisure de symétrie

Afin de capturer un changement de régime on doit rendre compte l’existence de plusieurs équilibres atteignables pour un grand σ et d’un unique équilibre à petit σ .

Numériquement, on définit pour $i \in \{1, \dots, S\}$, la variance de la valeur d’équilibre atteinte par la population N_i à matrice de couplage $\alpha_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu/S, \sigma/\sqrt{S})$ fixée :

$$\mathbb{V}_i(\sigma) = \left(\frac{1}{K} \sum_{j=0}^K N_i^{\text{éq}}(\text{CI n}^\circ j)^2 \right) - \left(\frac{1}{K} \sum_{j=0}^K N_i^{\text{éq}}(\text{CI n}^\circ j) \right)^2$$

où $N_i^{\text{éq}}(\text{CI n}^\circ j)$ est la valeur d’équilibre atteinte par la population i pour les conditions initiales j

Enfin on pose :

$$\mathbb{V}(\sigma) = \frac{\mathbb{V}_1(\sigma) + \dots + \mathbb{V}_S(\sigma)}{S}$$

pour obtenir la variance moyenne sur les espèces.

Ainsi, si l’équilibre atteint par l’écosystème est indépendant des conditions initiales (et donc unique) on aura que $\mathbb{V}(\sigma)$ sera proche de 0. Au contraire, s’il existe plusieurs équilibres, les équilibres atteints par les populations dépendront fortement des conditions initiales et $\mathbb{V}(\sigma)$ s’éloignera de 0.

On doit donc intégrer sur $K = 10$ conditions initiales différentes ces équations différentielles sur $t = 1000$ itérations à différents σ pour étudier le comportement de $\mathbb{V}(\sigma)$. Il s’agit de la Figure 2. Notons que ces programmes se retrouvent dans le github de l’[annexe B](#).

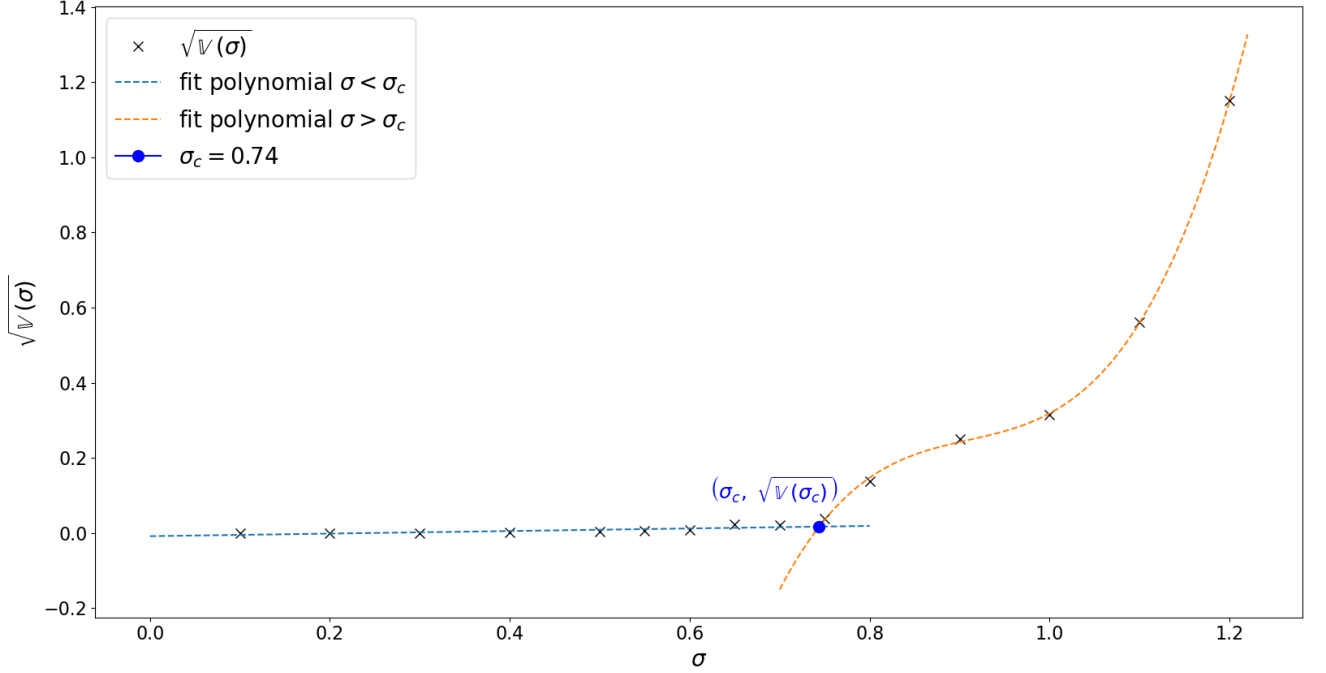


Figure 2: Comportement de \mathbb{V} en fonction de σ afin de capturer les deux régimes. Le nombre d'équilibres atteignables se met à croître pour $\sigma > \sigma_c \simeq 0.74$. On prend ici $S = 200, T = 1000, h = 0.1, \mu = 4$ et $K = 10$.

Pour $\sigma < \sigma_c$, les équilibres atteints ont une variance de l'ordre $\sqrt{\mathbb{V}_i(\sigma)} < 10^{-4}$ à comparer avec $N_i^{\text{éq}} \sim 10^{-1}, 10^{-2}$. On peut donc considérer qu'à chaque itération en changeant les conditions initiales (mais pas α_{ij}) l'équilibre atteint est le même.

Pour $\sigma > \sigma_c$, $\sqrt{\mathbb{V}_i(\sigma)} \sim 10^{-1}$ donc le système converge vers des états d'équilibre différents lorsqu'on change les conditions initiales.

On verra dans la suite que la valeur théorique de σ_c est $\sigma_c = 1/\sqrt{2} \simeq 0.71$. Cette méthode donne donc une erreur plutôt faible (de l'ordre de 4%) et reproduit le comportement qualitatif du système.

1.3 Début d'interprétation, limite mathématique

Une étude plus précise de ces états d'équilibre dans [1] met en évidence deux phases :

- $\sigma < \sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Il n'existe qu'un unique équilibre. À $\sigma = 0$ alors $\phi = \frac{S^*}{S} = 1$, et toutes les espèces coexistent. Lorsque σ croît, $\frac{\partial N_i^*}{\partial \xi_i^*}$ reste constant à travers les espèces i et croît avec σ tandis que la diversité ϕ décroît. Ce régime à un équilibre correspond à une phase paramagnétique où les valeurs des degrés de liberté N_i à température nulle sont fixées par le potentiel externe $V_i(N_i)$ et une interaction compétitive anti-ferromagnétique en champ moyen. Ceci est démontré dans la partie sur le modèle d'Ising de [1].
- $\sigma > \sigma_c$: Il existe plusieurs équilibres. Cela correspond physiquement à une transition de phase vers un état de type verre de spin. Dans cette phase, $\frac{\partial N_i^*}{\partial \xi_i^*} = 2$ reste constant par rapport à σ et est indépendant de l'espèce i . La diversité ϕ décroît avec la variance selon $\phi\sigma^2 = 1/4$.

Dans l'objectif d'étudier son spectre, on remarque que la hessienne de stabilité du système,

$$M_{ij} = \frac{\partial N_i^*}{\partial \xi_j^*}$$

est une matrice de dimension $S^* \times S^*$ telle que $M_{ij} = \alpha_{ij} + \delta_{ij}$.

Nous devons à présent réaliser l'étude du spectre de cette matrice de grande dimension.

1.4 Les matrices aléatoires en physique

La loi de Wigner est un résultat puissant d'analyse des matrices aléatoires de grande dimension. Les matrices aléatoires apparaissent partout en physique. Ici, on étudiera la loi de Wigner dans le cadre d'une problématique moderne ; l'écologie, à travers la dynamique d'un écosystème (ou de manière équivalente d'un réseau de spin couplés). Toutefois, elle a bien d'autres applications en physique. E. Wigner a développé sa théorie en s'intéressant à l'étude du chaos dans les noyaux des atomes lourds [5, 3, 2]. Il s'agissait alors de s'intéresser à l'étude du *Gaussian Unitary Ensemble* (des Hamiltoniens ayant la symétrie de renversement du temps et invariants par rotations). Ce théorème sert aussi à l'étude des réseaux [6] ; cela lui confère des applications en biologie, en physique et même en sociologie [7] ou en matière condensée pour décrire le transport mésoscopique [8].

2 La loi de Wigner

Dans cette première partie, on commence par introduire la loi de Wigner en justifiant ses hypothèses d'un point de vue physique. Il s'agit ensuite de l'illustrer dans plusieurs cas grâce à des simulations numériques. Enfin, un calcul permet d'estimer l'erreur commise dans les différentes lois étudiées du deuxième paragraphe.

La partie théorique se base sur l'article de A. Guionnet et G. Ben Arous [2] sur les matrices aléatoires, l'article de E. Wigner à ce sujet [3] ainsi qu'une partie du cours de D. Chafaï [9].

2.1 Spectre des matrices aléatoires de grande dimension

Afin de justifier les hypothèses du théorème, on suit la logique de E. Wigner lors de l'étude de ces matrices.

E. Wigner étudiait des distributions de probabilité de l'ensemble gaussien orthogonal (GOE : *Gaussian Orthogonal Ensemble*). Ces matrices, invariantes par rotations, modélisent des hamiltoniens invariants par symétrie de renversement du temps ;

$$\frac{\exp\left(-\frac{n}{2}\text{Tr}(H^2)\right)}{Z_{\text{GOE}(n)}}$$

cette distribution est générée par les $H = \frac{G+G^T}{\sqrt{2}}$ où G est une matrice de taille n dont les coefficients suivent une loi normale centrée réduite et sont indépendants.

La façon dont se comportent ces matrices pour $N \gg 1$ mérite un peu de réflexion. Comme H est symétrique, en notant λ_i , $i = 1, \dots, n$ ses n valeurs propres :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(H^2) &= \sum_{ij} \overbrace{(H_{ij})^2}^{O(\overline{H_{ij}^2})=O(1)} = \sum_i \lambda_i^2 \\ &\implies O(n^2) = O(n\lambda^2) \\ &\implies O(\lambda) = O(\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Ceci suggère, afin qu'une limite en $n \rightarrow \infty$ existe, de considérer $M = \frac{G+G^T}{\sqrt{2n}}$ afin que ses valeurs propres restent d'ordre 1.

La loi de Wigner se généralise en réalité à n'importe quelle distribution de probabilité admettant un moment d'ordre 2, on l'énonce dans son cas le plus général.

Considérons M_n une matrice symétrique de taille $n \times n$ dont les coefficients de la diagonale et de la partie supérieure $(X_{ij})_{i \leq j}$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que :

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{X_{ij}} = 0, \quad \overline{X_{ij}^2} = 1 + \delta_{ij}, \quad X_{ij} = X_{ji}$$

Et en définissant la densité spectrale de M_n :

$$\rho_{M_n}(\lambda) = \frac{1}{n} \text{Tr}(\delta(\lambda \mathbf{1} - M_n))$$

c'est une loi de probabilité elle-même aléatoire (pour chaque réalisation de M_n , elle définit une nouvelle loi de probabilité prenant des valeurs dépendantes du tirage aléatoire de la matrice $M_n = m_n$).

La loi de Wigner assure alors que ρ_{M_n} converge en loi vers la loi du demi-cercle (dont la densité de probabilité est notée ρ):

$$\rho_{M_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{en loi}} \rho \quad \text{où} \quad \rho(x) = \mathbf{1}_{\{|x| \leq 2\}} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}$$

Pour mettre en évidence ce que l'on appelle loi de probabilité aléatoire, on écrit la définition de la convergence en loi. Si $X_n \sim \mu_{M_n}$ et $X \sim \mu$, pour toute fonction f bornée, en notant $\lambda_i^n : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à une matrice symétrique de taille n associe sa i -ème valeur propre dans l'ordre croissant (comptées avec multiplicité : $\lambda_1^n \leq \dots \leq \lambda_n^n$).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_n)] &= \sum_{m_n} \mathbb{P}(M_n = m_n) \mathbb{E}[f(X_n) | M_n = m_n] \\ &= \sum_{m_n} \left(\mathbb{P}(M_n = m_n) \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \rho_{m_n}(x) \right) \\ &= \sum_{m_n} \left(\mathbb{P}(M_n = m_n) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i^n(m_n)) \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-2}^2 dx f(x) \rho(x) = \mathbb{E}[f(X)] \end{aligned}$$

La présence de deux sommes dans cette limite (le choix de $M_n = m_n$ puis l'application de la loi de ρ_{m_n}) se retrouvera dans la méthode d'estimation de l'erreur commise en prenant cette limite.

L'[annexe A](#) est une preuve de ce théorème dans le cadre du GOE. On se base sur une partie de [\[10\]](#) pour écrire cette preuve.

2.2 Vérification numérique du théorème dans différents cas

Ce théorème a pour seules hypothèses des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant chacune un moment d'ordre 2. On l'observe ici pour des lois différentes ; des variables gaussiennes, la probabilité uniforme et enfin une loi discrète : la distribution de Poisson.

Dans l'[annexe B](#) on trouve un lien vers un github contenant tous les programmes qui ont permis d'obtenir les résultats et les figures de cet article.

2.2.1 Le cas gaussien

Afin d'observer le théorème il s'agit de comparer la densité spectrale d'une matrice tirée aléatoirement (ici de coefficients suivant une loi gaussienne) avec la loi du demi-cercle.

La densité spectrale d'une matrice M_n de dimension n correspond à un peigne de Dirac. Pour pouvoir la comparer à une densité continue (loi du demi-cercle), on doit identifier à une même valeur les valeurs propres de M_n qui sont "proches" entre elles. En suite il s'agit de comparer l'histogramme de valeurs propres obtenues à la densité spectrale du demi-cercle. Dans la partie sur l'[estimation de l'erreur](#), on montre numériquement que la bonne échelle pour identifier les valeurs propres entre elles est $1/\sqrt{n}$. Ce sera la largeur des cases de notre histogramme qui contiendra alors environ \sqrt{n} cases.

Dans le cas d'une matrice de loi gaussienne, on trace cet histogramme pour $n = 100, 500, 1000$ et 5000 sur la Figure 3.

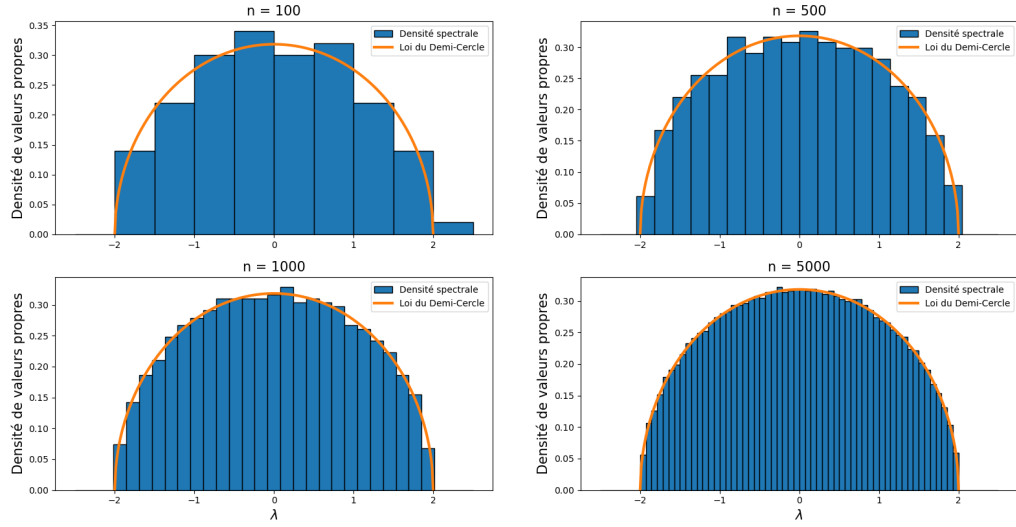


Figure 3: Mise en évidence numérique du théorème de Wigner : lorsque n croît, la densité de valeurs propres d'une matrice tirée au hasard se rapproche de la loi du demi-cercle.

Comme prévu par le théorème, la distribution de la densité de valeurs propres se rapproche de celle du demi-cercle.

2.2.2 La probabilité uniforme et la loi de Poisson

On peut alors s'assurer numériquement que cette propriété est bien indépendante de la loi considérée. Sur la Figure 4 on observe le théorème de Wigner pour la loi uniforme centrée réduite et la loi de Poisson réduite (et translatée pour être centrée).

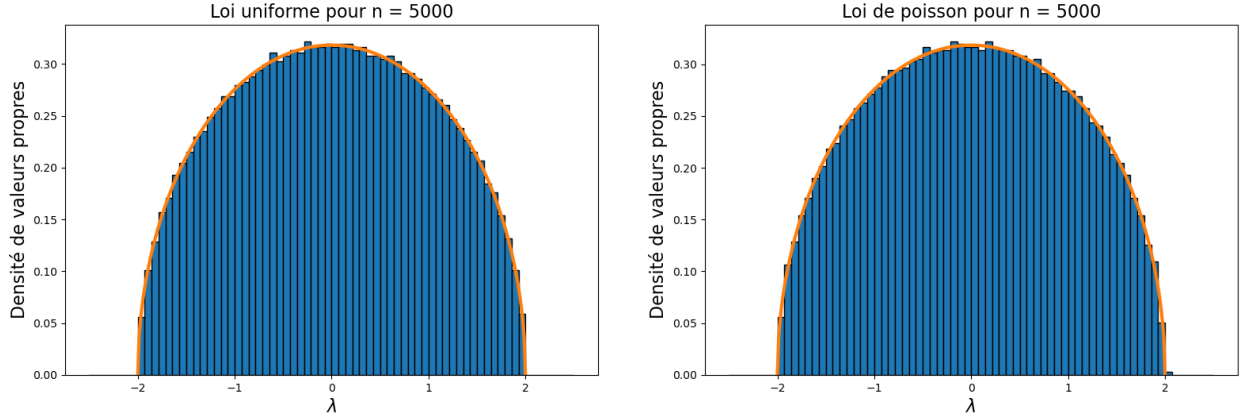


Figure 4: Mise en évidence numérique du théorème de Wigner : la distribution uniforme à gauche et la distribution de Poisson à droite. Ici, $n = 5000$.

La prochaine partie développe une méthode qu'on a mise en place pour quantifier l'erreur donnée en prenant cette limite pour la densité spectrale d'une matrice aléatoire.

2.3 Estimation de l'erreur

Si l'on parvient à définir une erreur quadratique pour une matrice donnée, il faudra moyenner cette erreur sur plusieurs matrices pour obtenir une erreur dépendant uniquement de la taille n des matrices. On retrouve le fait énoncé dans le premier paragraphe qu'il existe deux aléatoires dans la limite du théorème.

L'erreur quadratique pour une matrice donnée dépendra de la précision de l'identification des valeurs propres entre elles. On note $\alpha \geq 0$ cette précision. Elle est telle que l'on découpe notre abscisse en n^α cases afin d'identifier dans notre histogramme les valeurs propres égales entre elles à $4/n^\alpha$ près (où le 4 vient du fait que le support de la loi du demi-cercle est inclu dans $[-2, 2]$).

Notons que si la précision α est trop petite, l'écart entre la fonction escalier avec peu de marches et le demi-cercle sera grand. Si la précision α est trop grande, il n'y aura pas assez de valeur propre par case de l'histogramme pour que cet histogramme ait un sens. En raisonnant avec ces deux cas limites on intuite l'existence d'un $\alpha = \alpha_0$ optimal.

On note alors $y_\alpha^{m_n}$ la fonction en escalier (histogramme) correspondant à la densité spectrale d'une matrice m_n donnée à la précision α (c'est par exemple une des fonctions histogrammes sur la Figure 3 si $\alpha = 1/2$). On peut définir une erreur quadratique pour une matrice m_n . Pour développer les formules suivantes, dans un soucis de simplicité d'écriture, on fait l'hypothèse que le support de l'histogramme est $[-2, 2]$. Ceci n'est, en pratique, qu'une approximation qui permet d'écrire de manière concise l'erreur¹ :

$$(\epsilon_\alpha^{m_n})^2 = \int_{\mathbb{R}} dx |\rho(x) - y_\alpha^{m_n}(x)|^2 \simeq \int_{-2}^2 dx |\rho(x) - y_\alpha^{m_n}(x)|^2 = \sum_{k=0}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx |\rho(x) - C_{\alpha,k}^{m_n}|^2$$

où $y_\alpha^{m_n} \simeq \sum_{k=0}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} C_{\alpha,k}^{m_n} \cdot \mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]} ; x_k = -2 + \frac{4k}{n^\alpha}$

¹Le spectre d'une matrice aléatoire n'est pas strictement contenu dans $[-2, 2]$ ($[-2, 2]$ est le support typique). Pour les calculs numériques on ne fait pas cette approximation. On intègre sur \mathbb{R} la fonction : $x \mapsto |\mu(x) - y_\alpha^{m_n}(x)|^2$ ce qui revient à prendre pour borne inférieure de l'intégrale l'abscisse de gauche de la première case non nulle de l'histogramme et pour borne supérieure l'abscisse de droite de la dernière case non nulle de l'histogramme.

En moyennant sur K matrices m_n^1, \dots, m_n^K , on obtient une erreur quadratique pour n :

$$(\epsilon_\alpha^n)^2 = \frac{(\epsilon_\alpha^{m_n^1})^2 + \dots + (\epsilon_\alpha^{m_n^K})^2}{K}$$

Il reste donc à déterminer le meilleur α . C'est celui qui minimisera cette erreur. La valeur de α dépend a priori de n et de la loi considérée, mais les simulations numériques en faisant varier n et la loi ne changent pas la valeur de α . On se contente ici de déterminer le α optimal pour $n = 500$ et la loi gaussienne. On trace sur la Figure 5 cette erreur en fonction de la précision pour la loi gaussienne en dimension $n = 500$:

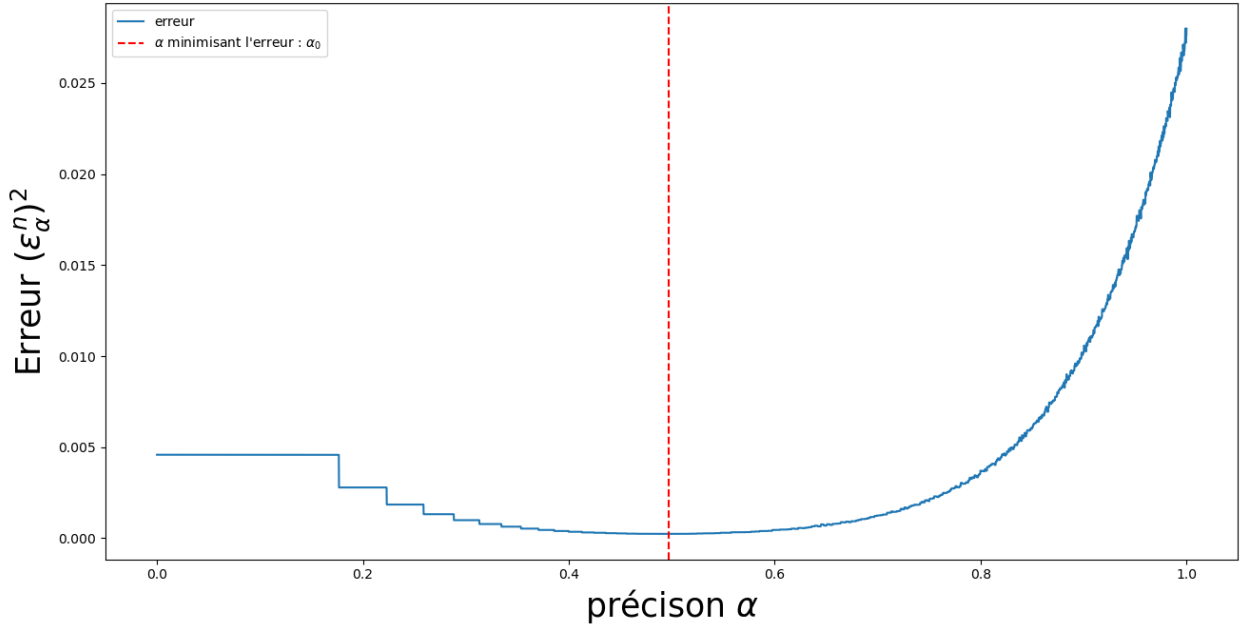


Figure 5: Ce tracé de l'erreur en fonction de la précision permet de déterminer le α qui minimise l'erreur. Ici, $n = 500$, la loi est gaussienne, et $K = 50$ (on remarque numériquement que $K = 50$ suffit largement à faire converger l'erreur quadratique pour la rendre indépendante de l'échantillon de matrices tirées). On calcule cette erreur pour 5000 valeurs de α entre 0 et 1. On remarque que pour $0 \leq \alpha \leq 0.2$ on aura $n^\alpha \simeq 1$, et toutes les valeurs propres sont dans la même case de l'histogramme.

Alors, on peut déterminer le α minimisant l'erreur : $\alpha_0 = 0.5001$. On prend donc $\alpha = 1/2$ dans la suite (d'où le choix de la largeur des cases dans l'histogramme de la Figure 3) et on note $\epsilon_n = \epsilon_{\alpha=1/2}^n$.

Ainsi définie, on peut déterminer l'erreur $(\epsilon_n)^2$ en fonction de n . On la trace sur la Figure 6 pour la loi gaussienne :

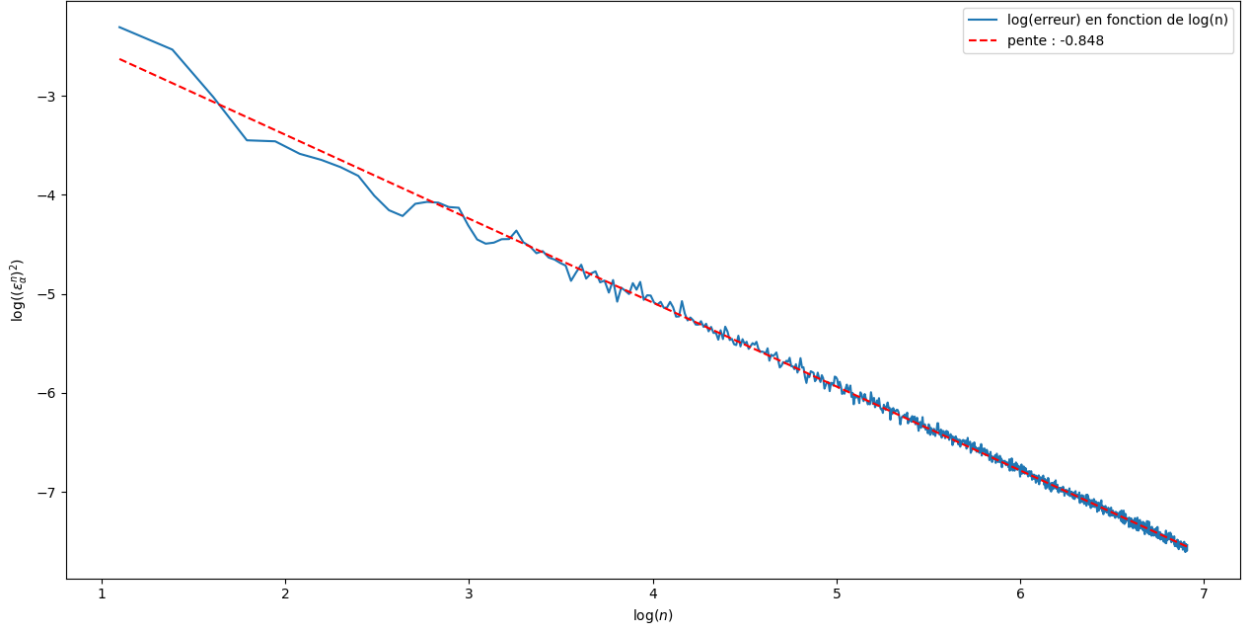


Figure 6: Tracé log-log de l'erreur quadratique en fonction de n pour la loi gaussienne et $K = 50$. Ici n prend toutes les valeurs entières de 3 à 1000. On trouve $(\epsilon_n)^2 \simeq O\left(\frac{1}{n^{0.848}}\right)$.

On trouve aussi $(\epsilon_n)^2 \simeq O(n^{-0.85})$ numériquement pour la loi uniforme (on trouve -0.825) et la loi de Poisson (pour laquelle on obtient -0.841).

Notons pour conclure qu'un choix différent pour la définition de l'erreur n'aurait pas donné la même vitesse de convergence. En posant :

$$(\widetilde{\epsilon_\alpha^{m_n}})^2 = \frac{4}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} |\rho(x_k) - C_{\alpha,k}^{m_n}|^2$$

on trouve, pour $\alpha = 1/2$, que $(\widetilde{\epsilon_n})^2 = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$. Toutefois, cette erreur semble avoir moins de sens car sa précision minimisante correspond à $\alpha = 0$ (histogramme à un seul bloc) où l'erreur est nulle.

3 Interprétation physique des résultats sur l'écosystème grâce à la loi de Wigner

Rappelons que l'on s'intéressait à la hessienne de stabilité de notre système :

$$M_{ij} = \alpha_{ij} + \delta_{ij}, \quad \alpha_{i < j} \sim \mathcal{N}\left(\mu/S, \sigma/\sqrt{S}\right) \text{ i.i.d.}$$

On peut à présent déterminer le spectre de cette matrice pour deux jeux de paramètres différents. Pour approximer S^* dans les deux cas, on utilise les équilibres calculés par méthode de Runge-Kutta, où l'on considère que $N_i = 0$ si $N_i < 10^{-4}$ afin de déterminer le nombre d'espèces non disparues S^* (on trouve pour $\sigma = 0.9$ que $S^* = 71$, à comparer avec la valeur théorique $S^* = S/(4\sigma^2) = 61$). C'est la Figure 7.

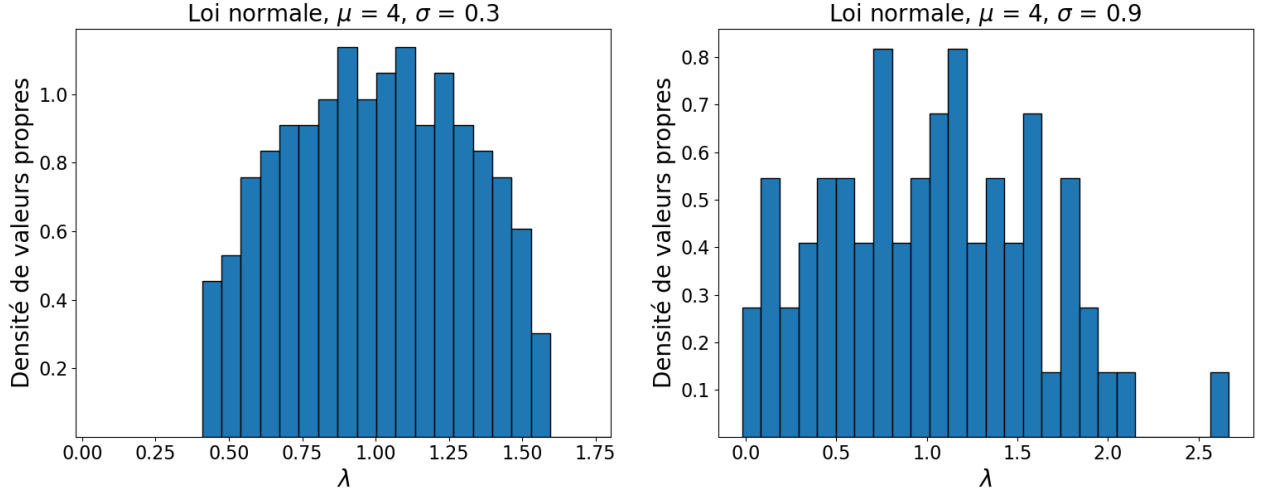


Figure 7: À gauche, le spectre de la hessienne de stabilité pour le jeu de paramètres $\mu = 4, \sigma = 0.3$ et $S = S^* = 200$. À droite, ce même spectre avec cette fois $\mu = 4, \sigma = 0.9, S = 200$ et $S^* = 71$.

On voit apparaître la distribution en demi-cercle. L'article [11] montre (dans le cadre des verres de spin) que pour S^* grand, le spectre de M_{ij} est le même que celui d'une matrice dont les coefficients au dessus de la diagonale sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de mêmes paramètres que α_{ij} . On est exactement dans le cadre des hypothèses du théorème de Wigner;

La densité spectrale de M_{ij} suit une loi du demi-cercle de support $\left[1 - 2\sigma\sqrt{\phi}, 1 + 2\sigma\sqrt{\phi}\right]$, $\phi = \frac{S^*}{S}$

Il existe donc bien deux comportements :

- $\sigma < \sigma_c$: Le support de la hessienne de stabilité ne touche pas 0 (voir à gauche sur la Figure 7) donc "l'énergie" du système est strictement convexe. Il n'existe qu'un unique équilibre et cet équilibre est stable.
- $\sigma > \sigma_c$: La borne de gauche touche la valeur propre 0 (voir à droite sur la Figure 7), il peut à présent exister plusieurs équilibres. On remarque que la décroissance de ϕ avec σ dans ce régime est donnée par la condition de ne pas avoir de valeur propre strictement négative ; notre système est marginalement stable, pas chaotique.

On rationalise ainsi les résultats du modèle numérique, et on retrouve les résultats de [?] (voir Figure 1).

La loi de Wigner permet dans ce cas de retrouver les résultats numériques. Notons que lorsqu'on change la forme du potentiel individuel, ce résultat n'est plus vrai ; [1] discute de l'influence de la forme du potentiel individuel sur cette transition de phase. Il y est aussi discuté ce qu'on peut en déduire dans le cas de la température non nulle, c'est à dire en présence de bruit, dans le cas d'une croissance dépendante de l'espèce ($r_i \neq 1$), et dans le cas d'une matrice d'interaction asymétrique. Ce modèle alimente de nombreuses pistes de réflexion pour des cas plus généraux.

Annexe A

On note $M = M_n$ une matrice aléatoire symétrique réelle de taille n et $\lambda_i = \lambda_i^n(M_n)$ ses valeurs propres (qui sont donc des variables aléatoires).

Soit :

$$G_n(z) = \frac{1}{n} \sum_i \frac{1}{z - \lambda_i} = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\frac{1}{z\mathbf{1} - M} \right)$$

Alors, comme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{u - i\epsilon} = \text{vp} \left(\frac{1}{u} \right) + i\pi\delta(u)$$

on remarque que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Im(G_n(\lambda - i\epsilon)) &= \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\Im \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda - i\epsilon - M} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\Im \left(\underbrace{\text{vp} \left(\frac{1}{\lambda - M} \right)}_{\in \mathbb{R}} + i\pi\delta(\lambda - M) \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \text{Tr}(\delta(\lambda - M)) \end{aligned}$$

d'où ;

$$\rho_M(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Im(G_n(\lambda - i\epsilon))$$

Il s'agit à présent de trouver une équation pour $G_n(z)$.

On suppose que la loi sur M est de la forme $p(\text{Tr}(M^2))$ (on a en tête $\exp(-n\text{Tr}(M^2)/2)$ du GOE). Alors, si A ne dépend que des valeurs propres de M ,

$$\langle A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle = \int dM_{11} \dots dM_{nn} \prod_{i < j} dM_{ij} A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) p(\text{Tr}(M^2))$$

Comme M est symétrique réelle, on a $R \in O(n)$ telle que

$$M = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} R^T = R \Lambda R^T$$

où les éléments de R sont aussi aléatoires. Comme $O(n)$ est généré par les matrices antisymétriques, espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$, R possède $n(n-1)/2$ éléments indépendants. On les note $(r_{ij})_{i < j}$

On peut donc faire le changement de variable :

$$dM_{11} \dots dM_{nn} \prod_{i < j} dM_{ij} \longrightarrow J \cdot d\lambda_1 \dots d\lambda_n \prod_{i < j} dr_{ij}$$

où des deux côtés, on a $n + n(n-1)/2$ éléments indépendants, et J correspond au jacobien du changement de variable.

Pour calculer J , on remarque que :

$$\begin{aligned} M &= R \Lambda R^T \\ \implies dM &= R(d\Omega \Lambda - \Lambda d\Omega + d\Lambda)R^T = R dM' R^T \\ \text{où } d\Omega &= R^T dR \end{aligned}$$

donc le jacobien de M par ce changement de variable est le même que celui de M' par ce même changement de variable.

Or

$$\frac{\partial M'_{ij}}{\partial \lambda_k} = 0 - 0 + \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial \lambda_k} = \delta_{ij} \delta_{ik}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial M'_{ij}}{\partial \Omega_{kl}} &= \sum_m \frac{\partial \Omega_{im}}{\partial \Omega_{kl}} \lambda_j \delta_{mj} - \sum_m \lambda_i \delta_{im} \frac{\partial \Omega_{mj}}{\partial \Omega_{kl}} + 0 \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} (\lambda_j - \lambda_i) \end{aligned}$$

donc la jacobienne est diagonale et son déterminant :

$$J = \prod_{i < j} |\lambda_j - \lambda_i|$$

donc

$$\langle A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rangle = \int d\lambda_1 \cdots d\lambda_n A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i < j} |\lambda_j - \lambda_i| p(\text{Tr}(M^2)) \underbrace{\int \prod_{i < j} dr_{ij}}_{=\text{constante}}$$

On peut alors identifier la mesure sur les λ_i ;

$$\begin{aligned} \rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\propto \exp \left(-\frac{n}{2} \sum_i \lambda_i^2 + \sum_{i < j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \right) \\ &\propto \exp(-n^2 H(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \\ \text{où } H(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{2n} \sum_i \lambda_i^2 - \frac{1}{2n^2} \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \end{aligned}$$

Alors, par la méthode du col, lorsque $n^2 \rightarrow \infty$, il faut déterminer la configuration de λ_i qui minimise H pour connaître la configuration des λ_i qui contribuera de façon dominante :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = 0 \tag{1}$$

$$\implies \lambda_i = \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \tag{2}$$

alors en appliquant $\sum_i \frac{1}{n(z - \lambda_i)} \cdot (2)$, on obtient;

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_i \frac{\lambda_i(-z + z)}{z - \lambda_i} &= \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{1}{z - \lambda_i} \\ \implies -1 + zG_n(z) &= \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{z - \lambda_j} \frac{1}{z - \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{1}{z - \lambda_j} \right) \\ \implies -1 + zG_n(z) &= \frac{1}{2} G_n^2(z) + \frac{1}{2n} G'_n(z) \end{aligned}$$

Et en prenant la limite $n \rightarrow \infty$,

$$G_\infty^2(z) - 2zG_\infty(z) + 2 = 0 \implies G_n(z) = z \pm \sqrt{z^2 - 2}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Im(G_\infty(\lambda - i\epsilon)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Annexe B

Les programmes permettant d'obtenir les courbes et les résultats de ce projet sont dans le github https://github.com/octavevw/Theoreme_de_Wigner.

Il est composé de deux parties correspondant aux deux parties de ce projet.

Un premier programme **Le_theoreme_de_Wigner.py** contient toutes les fonctions permettant de retrouver tous les résultats de la première partie. Un second **rk_sigma.py** intègre par méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 les équations différentielles couplées de la seconde partie à différents σ afin d'obtenir la Figure 2.

Notons que ces deux programmes prennent en moyenne 45 minutes pour finir de tourner et peuvent mettre jusqu'à plusieurs heures, avec les paramètres utilisés dans le projet.

References

- [1] Giulio Biroli, Guy Bunin, and Chiara Cammarota. Marginally stable equilibria in critical ecosystems. *New Journal of Physics*, 20(8):083051, 2018.
- [2] G Ben Arous and Alice Guionnet. Wigner matrices. *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, pages 433–451, 2011.
- [3] Eugene P. Wigner. Random matrices in physics. *SIAM Review*, 9(1):1–23, 1967.
- [4] Guy Bunin. Ecological communities with lotka-volterra dynamics. *Physical Review E*, 95(4):042414, 2017.
- [5] HA Weidenmüller and GE Mitchell. Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear structure. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):539–589, 2009.
- [6] Fernando L Metz and Jeferson D Silva. Spectral density of dense random networks and the breakdown of the wigner semicircle law. *Physical Review Research*, 2(4):043116, 2020.
- [7] Stefan Bornholdt and Heinz Georg Schuster. Handbook of graphs and networks. *From Genome to the Internet, Willey-VCH (2003 Weinheim)*, 2001.
- [8] Konstantin Efetov. *Supersymmetry in disorder and chaos*. Cambridge university press, 1999.
- [9] Djalil Chafaï. Introduction aux matrices aléatoires. *Journées mathématiques X-UPS*, pages 93–129, 2013.
- [10] Giacomo Livan, Marcel Novaes, and Pierpaolo Vivo. Introduction to random matrices theory and practice. *Monograph Award*, 63:54–57, 2018.
- [11] Alan J Bray and Michael A Moore. Evidence for massless modes in the 'solvable model' of a spin glass. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 12(11):L441, 1979.