

文章编号: 1002-0446(2008)02-0160-05

基于旋转子矩阵正交的 6R 机器人运动学逆解研究

程永伦, 朱世强, 刘松国

(浙江大学流体传动及控制国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 以机器人运动学方程为基础, 基于变换矩阵中旋转子矩阵正交的特性, 提出一种 6R 机器人运动学逆解算法. 通过矢量运算, 得到含有 4 个未知变量的 4 个常系数非线性方程, 辅以其它方程, 最终得到 8 组封闭解. 通过对钱江一号焊接机器人的实例求解, 验证了该算法解决逆解问题仅需 0.087 ms, 比传统的反变换法具有更优的实时性能; 平面工况的运动仿真验证了该算法的有效性. 该算法可应用于 6R 机器人的强实时在线控制系统.

关键词: 6R 机器人; 旋转子矩阵; 封闭解; 实时

中图分类号: TP24 **文献标识码:** B

Inverse Kinematics of 6R Robots Based on the Orthogonal Character of Rotation Sub-matrix

CHENG Yong-lun, ZHU Shi-qiang, LU Song-guo

(State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Based on the kinematics equation and the orthogonal character of the rotation sub-matrix in a transformation matrix, an approach to the inverse kinematics problem of 6R robots is proposed. The problem is reduced to four nonlinear constant coefficient equations including only four unknown variables through vector operation, and then eight closed-form solutions can be gained by solving the four equations and other suitable additional equations. The experimental results with QJ-1 welding robot illustrate that the proposed algorithm can solve the inverse kinematics problem in only 0.087 ms, which is faster than the traditional inverse transformation method on the same experiment platform, and simulating results on planar condition also prove the effectiveness of the proposed algorithm. The proposed algorithm can be applied to 6R robot on-line control system with a strong real-time performance.

Keywords: 6R robot; rotation sub-matrix; closed-form solution; real-time

1 引言 (Introduction)

机器人运动学逆解的求解是机器人正解的逆过程, 即在给定机器人末端位姿和结构参数的条件下, 求解各个关节变量. 它是机器人轨迹规划和控制的基础, 其实时性能对于机器人控制系统具有至关重要的意义. 现在广泛应用于工业生产的 6R 机器人大都具有封闭逆解, 而其求解方法有很多: 如传统的运用 D-H 参数建模的反变换法和几何法^[1,2], 以及其它基于旋量和指数积的子问题法^[3]和基于有理数运算的逆解算法^[4]. 通常使用反变换法, 即左乘逆矩阵代数法直接求解 6 个一元方程, 求得机器人的最多 8 组运动学逆解^[5], 需要反复左乘逆矩阵, 寻求合适的求解方

程, 计算过程复杂. 本文提出的算法利用变换矩阵中旋转子矩阵正交的特性, 只需求得机器人运动学方程 T_{End} , 通过矢量运算, 分别得到含有不同未知变量的 4 个常系数非线性方程, 再辅以其它方程, 很容易求出另外两个变量, 最终得到 6R 机器人的 8 组封闭解.

利用钱江一号焊接机器人对算法进行实例求解和运动仿真. 逆解求解实例表明该算法能够得到与反变换法相同的结果, 实现时间仅为 0.087 ms, 优于反变换法在相同条件下实现的 0.11 ms; 平面运动工况的仿真结果验证了该算法的有效性.

2 运动学逆解问题 (Inverse kinematics problem)

2.1 齐次变换矩阵

运用 D-H 方法构建 6R 机器人连杆附体坐标系, 第 i 个连杆坐标系相对于第 $i-1$ 个连杆坐标系的

4 \times 4 齐次变换矩阵可以描述为:

$$\begin{aligned} T_i &= R_z(-\theta_i) T_z(d_i) T_x(a_i) R_x(\alpha_i) \\ &= \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & a_i C_i \\ S_i & C_i & 0 & a_i S_i \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_i & I_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, 6$, $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $\alpha_i = \cos \alpha_i$ 和 $\sin \alpha_i$, R 是正交的 3×3 旋转子矩阵.

2.2 内积与矩阵乘法

若 Q 为 n 阶正交矩阵, 则 $Q^{-1} = Q^T$, 且 Q^{-1} 也是正交矩阵. 根据正交矩阵和矢量运算的性质, 对于任意的正交矩阵 Q 和任意向量 u 和 v 有:

$$Q u \cdot Q v = u \cdot v \quad (2)$$

$$Q u \cdot v = u \cdot Q^{-1} v \quad (3)$$

这对于消除计算过程中的代数条件和多余的关节变量十分有效, 是算法实现的基础.

2.3 运动学逆解

机器人运动学逆解问题就是在已知 d_i 、 a_i 和 α_i 以及给定 T_{End} 的条件下, 求解关节变量 θ_i . 当工业机器人的几何结构满足 Pieper 准则时, 即三个相邻关节轴相交于一点或三个相邻关节轴相互平行时, 可以采用封闭解法求运动学逆解问题, 且 6R 机器人最多具有 8 组封闭解^[6]. 本文探讨的算法可以快速准确地求解满足 Pieper 准则的 6R 机器人的 8 组封闭解.

3 算法实现 (Algorithmic implementation)

6R 机器人运动学方程 T_{End} 是 6 个关节变量的函数, 包含法向矢量 n 、方位矢量 o 、接近矢量 a 和位置矢量 p , 可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} T_{\text{End}} &= T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & o & a & p & R & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

由式 (4) 可以得到含有 6 个未知关节变量的 12 个常系数非线性方程. 在文 [7] 的基础上, 提出的算法充分利用内积与矩阵乘法, 根据 12 个非线性方程,

通过矢量运算, 得到含有不同未知变量的 4 个常系数非线性方程 a_z 、 p_z 、 $p \cdot a$ 和 $p \cdot p$, 辅以其它方程求得另外两个变量, 最终得到 8 组封闭解.

由式 (1), 得到矩阵 T_i 和 T_j 的乘积:

$$T_i T_j = \begin{bmatrix} R_i R_j & R_i I_j + I_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这样, 位置方程 p 和方向方程 R 可表示为:

$$p = R_1 \{ R_2 [R_3 (R_4 (R_5 I_6 + I_5) + I_4) + I_3] + I_2 \} + I_1 \quad (5)$$

$$R = R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 \quad (6)$$

式 (1) 中, $R_i^{-1} = R_i^T$, $I_i = [a_i C_i \quad a_i S_i \quad d_i]^T$, 所以:

$$R_i^{-1} I_i = [a_i \quad d_i \quad d_i]^T \quad (7)$$

$$R_i^{-1} z = [0 \quad i \quad i], \quad z = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (8)$$

在运用 D-H 方法构建的 6R 机器人连杆附体坐标系中, 由于不存在第 7 连杆, 通常取 $a_6 = a_6 = d_6 = 0$, 所以 $R_6 z = z$ 这样, 重复运用式 (2) 和 (3), 求得 a_z 、 p_z 、 $p \cdot a$ 和 $p \cdot p$ 四个方程.

a_z 方程:

$$\begin{aligned} a_z &= a \cdot z = (R_z) \cdot z \\ &= (R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 z) \cdot z \\ &= (R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 z) \cdot z \\ &= z \cdot (R_5^{-1} R_4^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} z) \end{aligned} \quad (9)$$

p_z 方程:

$$\begin{aligned} p_z &= p \cdot z \\ &= q \cdot (R_4^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1}) z \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$p = R_1 R_2 R_3 R_4 q$$

$$q = I_5 + R_4^{-1} [I_4 + R_3^{-1} (I_3 + R_2^{-1} (I_2 + R_1^{-1} I_1))]$$

$p \cdot a$ 方程:

$$p \cdot a = R_5^{-1} q \cdot z \quad (11)$$

$p \cdot p$ 方程:

$$p \cdot p = |p|^2 = q \cdot q = |q|^2 \quad (12)$$

通过式 (9) ~ (12), 可以分别计算出第 2 ~ 5 关节的关节变量, 再选择 (4) 式的其他方程很容易求出剩下的两个关节变量. 由于反复运用了内积与矩阵乘法进行矢量运算, 方程的求解简单高效, 同时更加明确地描述了逆运动学方程的结构和特性.

但是, 由于式 (9) ~ (12) 计算过程中涉及求反正切函数和平方根, 不可避免地出现正负号的问题, 处理不好极易出现增根或封闭解求解不全的情况. 可以根据式 (5) 和 (6) 的相关限制条件和辅助方程 (13) ~ (16) 的验证筛选或补充求解来解决这个问题; 有时, 辅助方程还可以简化个别解的求解过程.

$$a_z = z \cdot (R_5^{-1} R_4^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} z) \quad (13)$$

$$a_y = R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 z \cdot y \quad (14)$$

$$p_x = \{ R_1 [R_2 (R_3 (R_4 (R_5 I_6 + I_5) + I_4) + I_3) + I_2] + I_1 \} \cdot x \quad (15)$$

$$p_y = \{ R_1 [R_2 (R_3 (R_4 (R_5 I_6 + I_5) + I_4) + I_3) + I_2] + I_1 \} \cdot y \quad (16)$$

其中, $x = [0 \ 0 \ 1]^T$, $y = [0 \ 0 \ 1]^T$.

4 求解实例 (Solving example)

以浙江大学研发的钱江一号焊接机器人为例实现算法,并与可用于实时控制系统的反变换法进行比较,验证提出算法的准确性和实时性. 焊接机器人的D-H参数见表1,可以得到其末端位姿矩阵 T_6 .

表 1 钱江一号焊接机器人 D-H参数

Table 1 D-H parameters of QJ-1 welding robot

关节	(°)	$d(\text{mm})$	$a(\text{mm})$	(°)
1	1	250	150	-90
2	2	0	550	0
3	3	0	160	-90
4	4	594	0	90
5	5	0	0	90
6	6	0	0	0

这样,由式(9)~(12)和 T_6 得到以下方程组:

$$a_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5 \quad (17)$$

$$p_z = -d_4 C_{23} - a_3 S_{23} - a_2 S_2 + d_1 \quad (18)$$

$$p \cdot a = (a_3 + a_2 C_3 + a_1 C_{23} - d_1 S_{23}) C_4 C_5 + (a_2 S_3 + a_1 S_{23} + d_1 C_{23} - d_4) C_5 \quad (19)$$

$$(p^2 - a_1^2 - d_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_4^2) / 2 = a_2 (a_3 C_3 - d_4 S_3) + a_1 (-d_4 S_{23} + a_2 C_2 + a_3 C_{23}) - d_1 (d_4 C_{23} + a_2 S_2 + a_3 S_{23}) \quad (20)$$

其中, C_{ij} 和 S_{ij} 分别表示 $i + j$ 的余弦和正弦. 下面以式(20)的求解详细过程为例,说明基于旋转子矩阵正交特性的算法简单高效. 由给定的D-H参数,可知: $I_5 = I_6 = 0$. 所以, (5)式可以简化为:

$$p = R_1 (R_2 (R_3 I_4 + I_3) + I_2) + I_1 = R_1 R_2 R_3 (I_4 + R_3^{-1} I_3 + R_3^{-1} R_2^{-1} I_2 + R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} I_1)$$

反复运用式(2)和(3),可得:

$$p \cdot p = (I_4 + R_3^{-1} I_3 + R_3^{-1} R_2^{-1} I_2 + R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} I_1) \cdot (I_4 + R_3^{-1} I_3 + R_3^{-1} R_2^{-1} I_2 + R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} I_1)$$

那么,

$$(p^2 - I_1^2 - I_2^2 - I_3^2 - I_4^2) / 2 = I_4 \cdot R_3^{-1} I_3 + (R_3 I_4 + I_3) \cdot R_2^{-1} I_2 + (R_2 R_3 I_4 + R_2 I_3 + I_2) \cdot R_1^{-1} I_1 \quad (21)$$

由式(7)知:

$$R_3^{-1} I_3 = [a_3 \ 0 \ 0]^T$$

$$R_2^{-1} I_2 = [a_2 \ 0 \ 0]^T$$

$$R_1^{-1} I_1 = [a_1 \ -d_1 \ 0]^T$$

代入式(21)即可得到式(20).

为了便于计算,这里引入一元方程 $aS + bC = d$ 的求解,其中 S 和 C 分别为的正余弦.

当 $a^2 + b^2 \neq d^2$ 时, 总有两个值.

$$= \text{atan2}[d, \pm \sqrt{a^2 + b^2 - d^2}] - \text{atan2}(b, a)$$

$\text{atan}(v, w)$ 的取值要根据角度 $\text{atan}(v, w)$ 所在的象限决定,主要依据 v 和 w 的符号判断.

这样,式(20)可变成:

$$(-a_2 d_4) S_3 + a_2 a_3 C_3 = A$$

其中, A 为常数.

可以求出 S_3 在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内的两个解.

将 S_3 代入式(18)就可以求出相应的 S_2 在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内的一个解.

当 S_2 和 S_3 求出之后,式(17)和(19)中只剩下 C_4 和 C_5 未知. 理论上通过以上两式解方程组可以求出两个未知变量,但是求解过程复杂. 更简单的方法是 从式(13)~(16)中选择合适的方程求解,得到:

$$a_x = C_1 C_{23} C_4 S_5 + C_1 S_{23} C_5 + S_1 S_4 S_5 \quad (22)$$

$$a_y = S_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5 - C_1 S_4 S_5 \quad (23)$$

$$p_x = C_1 (a_3 C_{23} + a_2 C_2 + a_1 - d_4 S_{23}) \quad (24)$$

$$p_y = S_1 (a_3 C_{23} + a_2 C_2 + a_1 - d_4 S_{23}) \quad (25)$$

显然,通过式(24)和(25)容易求出 S_1 在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内的两个解.

然后,联立式(24)和(25),解此方程组,得到:

$$S_4 S_5 = a_x S_1 - a_y C_1$$

$$C_4 S_5 = (a_x C_1 + a_y S_1) C_{23} - a_z S_{23}$$

当 $\sin S_5 = 0$ 时,机器人处于奇异形位,此时机器人的第4和第6关节轴重合,可以任意选取 C_4 的值,然后计算相应的 C_6 的值.

当 $\sin S_5 \neq 0$ 时,通过式(22)和(23)可以求出 C_4 在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内的两个解.

$$C_4 = \text{atan2}(S_4 S_5, C_4 S_5)$$

或者,

$$C_4 = \text{atan2}(-S_4 S_5, -C_4 S_5)$$

然后将其代入式(17),可以求出 S_5 在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内的一个解.

这样,只剩下一个未知量 C_6 . 可以通过 a_z 或者 n_z 求出 C_6 在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内的一个解.

由于在 $[-180^\circ, +180^\circ]$ 区间内, S_1 、 S_3 和 C_4 分

别有两个解,而₂、₅和₆分别只有一个解,因此我们得到了满足机器人结构的最多 8 组封闭解.

给定机器人末端位姿矩阵:

$$T_6 = \begin{bmatrix} -0.920525 & 0.014539 & 0.390413 & 59.5412 \\ 0.114746 & -0.945172 & 0.305749 & 680.559 \\ 0.373453 & 0.326248 & 0.868386 & 493.116 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据提出的算法,采用 VC++编程加以实现,求解出的 8 组运动学逆解如表 2 所示.在配置为 Pentium IV 2.4G CPU、512M DDR RAM 和 Windows 2000 操作系统的 PC 平台上,算法实现时间仅为 0.087 ms,而用反变换法在相同实验条件下实现的时间为 0.11 ms 因此,提出的算法比反变换法具有更好的实时性能,满足强实时在线控制的要求.

表 2 8 组运动学逆解

Table 2 Eight solutions of inverse kinematics

组号	关节	(°)	关节	(°)
1	1	85.00000000	2	-90.00000000
	3	45.00000000	4	23.00000000
	5	68.00010000	6	105.00000000
2	1	85.00000000	2	-90.00000000
	3	45.00000000	4	-157.00000000
	5	-68.00010000	6	-74.99999999
3	1	85.00000000	2	40.97483610
	3	165.1512301	4	77.79373511
	5	158.2443251	6	19.07619403
4	1	80.00000000	2	40.97483610
	3	165.1512301	4	-102.2062649
	5	-158.2443251	6	-160.9238059
5	1	-95.00000000	2	-118.9241612
	3	-158.7890756	4	21.79541971
	5	-102.6501358	6	-89.03971462
6	1	-95.00000000	2	-118.9241612
	3	-158.7890756	4	-158.2045803
	5	102.6501358	6	90.96028538
7	1	-95.00000000	2	151.4590524
	3	8.940071867	4	-85.63230956
	5	158.6951235	6	1.27833286
8	1	-95.00000000	2	151.4590524
	3	8.940071867	4	94.36769044
	5	-158.6951235	6	-178.7216672

5 运动仿真 (Movement simulation)

为了验证算法的合理性和有效性,以钱江一号焊接机器人为例,在平面工况下,对半径为 150 mm 的圆弧进行运动仿真.仿真的步骤是:在笛卡儿空间中设定的路径上选取足够多的点(称为节点),分别将它们转换成对应的关节坐标,然后在关节空间用某种方式进行拟合形成关节轨迹.在实际控制过程中,只需让各关节沿其对应的轨迹运动即可.

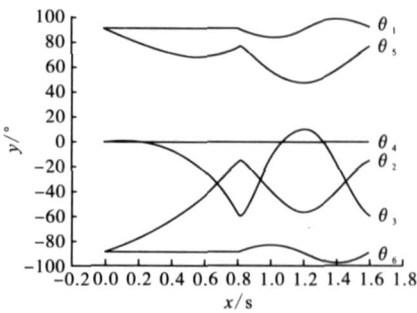


图 1 机器人各关节角位移曲线

Fig 1 Angular-displacement curves of robot's joints

根据圆弧上点的变化规律,每隔一定距离取一次末端位姿,求解 8 组封闭逆解,通过比较相邻点间的最短距离来选取最优解,使求得的各个关节变量是连续的,可用于运动仿真时设定各关节的运动情况.选取 500 组数据,设定工作时间为 1.6 s,则求得在关节空间各关节角位移曲线如图 1 所示.

实际焊接时,通过对机器人进行示教得到运动轨迹,然后经过求解运动学逆解,进行轨迹规划,通过主控制器控制机器人完成焊接作业.按照上述运动工况,机器人实际模拟焊接效果如图 2 所示.

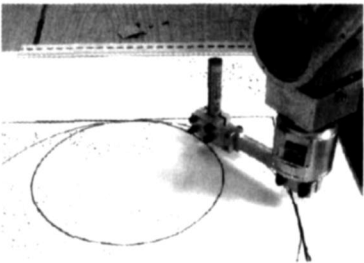


图 2 钱江一号机器人模拟焊接效果图

Fig 2 Simulation welding result of QJ-1 robot

利用 Solid Works 简化得到钱江一号焊接机器人虚拟样机模型,在 Cosmos motion 中对 6 个关节的旋转约束副进行定义.设置相关参数后,进行仿真,并在结果中选择对焊枪末端点的轨迹跟踪.末端运动轨迹

仿真结果如图 3所示。

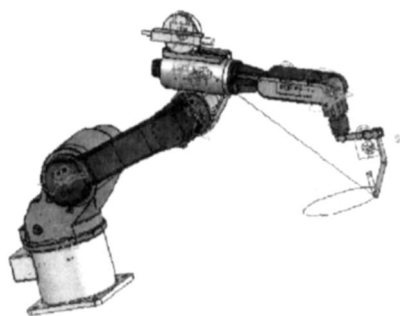


图 3 钱江一号虚拟样机焊接仿真结果

Fig 3 Welding emulation result of QJ-1 virtual model

对照图 2和图 3,显而易见:模拟焊接结果和仿真轨迹相符合,从而验证了逆运动学算法是合理有效的。

6 结论 (Conclusion)

在机器人运动学方程 T_{End} 的基础上,根据变换矩阵中旋转子矩阵正交的特性,提出一种 6R 机器人逆运动学封闭解的有效算法,通过内积与矩阵乘法,简化求解方程,最终得到 8 组封闭解。该算法避免了无效解的出现,具有计算准确高效、实时性能高的特点。利用该算法对钱江一号焊接机器人进行实例求解和运动仿真,得到满足机器人的 8 组封闭逆解仅需 0.087 ms,比相同条件下利用反变换法所需的时间快了 0.023 ms,能够满足强实时在线控制的要求,从而验证了算法的准确性和实时性;平面运动工况的模拟焊接结果和虚拟样机仿真轨迹相符合,验证了该算法的

合理有效性。该算法不但适合满足 Pieper 准则的 6R 机器人,而且对于求解其他机器人封闭解也有借鉴意义。

参考文献 (References)

- [1] 熊有伦,丁汉,刘恩沧. 机器人学 [M]. 北京:机械工业出版社, 1993.
- [2] 付京逊,冈萨雷斯 R C,李 C S G. 机器人学:控制·传感技术·视觉·智能 [M]. 北京:中国科学技术出版社, 1989.
- [3] 王卫忠,赵杰,吕常青,等. 基于旋量和臂形标志的机器人运动学逆解计算 [J]. 机械与电子, 2006, (4): 53 - 56.
- [4] 于艳秋,廖启征. 基于有理数运算的一般 6R 机器人位置逆解算法 [J]. 机械工程学报, 2005, 41 (3): 229 - 233.
- [5] 朱世强,王宣银. 机器人技术及其应用 [M]. 杭州:浙江大学出版社, 2001.
- [6] Low K H, Dubey R N. Comparative study of generalized coordinates for solving the inverse-kinematics problem of a 6R robot manipulator [J]. The International Journal of Robotics Research, 1986, 5 (4): 69 - 88.
- [7] Tsai L W, Morgan A P. Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1985, 107 (2): 189 - 200.

作者简介:

- 程永伦 (1980-),男,硕士生. 研究领域:机器人运动与控制。
- 朱世强 (1966-),男,博士,教授. 研究领域:机电系统,计算机控制系统。
- 刘松国 (1980-),男,博士生. 研究领域:机器人智能,机电控制。

(上接第 159 页)

- [5] Rooney C F B, O Donoghue R P S, Duffy B R, et al. The Social Robot Architecture: Towards Sociality in a Real World Domain [R]. Manchester, UK: Manchester University, 1999.
- [6] 刘海波,顾国昌,沈晶. 基于 Agent 面向群体合作的 AUV 体系结构 [J]. 机器人, 2005, 27 (1): 1 - 5.
- [7] 谭民,王硕,曹志强. 多机器人系统 [M]. 北京:清华大学出版社, 2005.
- [8] 江志斌. Petri 网及其在制造系统建模与控制中的应用 [M]. 北京:机械工业出版社, 2004.

作者简介:

- 许真珍 (1980-),女,博士生. 研究领域:多水下机器人系统体系结构、协调规划。
- 李一平 (1963-),女,研究员. 研究领域:水下机器人控制。
- 封锡盛 (1941-),男,研究员,博士生导师,中国工程院院士. 研究领域:水下机器人总体技术,多水下机器人控制、导航等。

word版下载: <http://www.ixueshu.com>

免费论文查重: <http://www.paperyy.com>

3亿免费文献下载: <http://www.ixueshu.com>

超值论文自动降重: http://www.paperyy.com/reduce_repetition

PPT免费模版下载: <http://ppt.ixueshu.com>

阅读此文的还阅读了:

1. [《图形的旋转》课例研究](#)
2. [基于遗传算法的机器人运动学逆解](#)
3. [水轮机修复专用机器人运动学逆解及仿真](#)
4. [基于转速信号的旋转机械故障诊断方法研究](#)
5. [基于PSO的6R机械手逆解研究](#)
6. [6自由度解耦机器人运动学逆解优化的研究](#)
7. [基于Maya表达式的粒子矩阵动画的实现](#)
8. [基于混合GA的抗旋转图像快速匹配算法研究](#)
9. [基于几何法的机器人运动学逆解](#)
10. [基于移动智慧校园的自动旋转匹配算法研究](#)
11. [基于共形几何代数的6-DOF机器人运动学逆解](#)
12. [基于Labview的旋转机械阶次分析系统研究](#)
13. [基于旋量和臂形标志的机器人运动学逆解计算](#)
14. [基于极端学习机的并联机器人运动学研究](#)
15. [机器人运动学旋转变换通式研究](#)
16. [基于四元数的6R串联机器人运动学逆解应用](#)
17. [基于旋转子矩阵正交的6R机器人运动学逆解研究](#)
18. [基于神经网络的机器姿态逆解](#)
19. [改进末端跟随运动的超冗余蛇形臂机器人运动学逆解](#)
20. [机器人运动学逆解及奇异和多解的处理](#)
21. [基于ANSOFT有限元软件的旋转磁场的仿真研究](#)
22. [模块化6轴机器人运动学的一种逆解算法](#)
23. [焊接机器人运动学正逆解](#)
24. [同伦算法在6R机器人运动学逆解上的应用](#)
25. [基于神经网络的冗余机械臂运动学逆解研究](#)

- [26. 例说以“问题”逆解诗词](#)
- [27. 函数性质的逆解例析](#)
- [28. 基于D-H坐标系法的机器人运动学研究](#)
- [29. 基于LabVIEW的旋转机械在线监测系统研究](#)
- [30. 基于BP网络判据的工业机器人运动学逆解](#)
- [31. 基于COSMOSMotion与MATLAB的机器人运动学仿真](#)
- [32. 函数性质的逆解例析](#)
- [33. 基于旋转机械振动信号时频研究](#)
- [34. 一种求两足机器人运动学逆解的解析方法](#)
- [35. 基于四元数向量的机器人运动学逆解研究](#)
- [36. 基于前置坐标系的PUMA机器人运动学方程的研究](#)
- [37. 旋转传输技术研究](#)
- [38. 软实时环境下机器人运动学逆解研究](#)
- [39. 基于Matlab的Staubli TX200机器人运动学研究](#)
- [40. 基于ANSOFT有限元软件的旋转磁场的仿真研究](#)
- [41. 基于“旋转”的教学示例](#)
- [42. 旋转传输技术研究](#)
- [43. 基于MATLAB的6R关节型机器人运动学仿真研究](#)
- [44. 基于BP神经网络的机器人运动学逆解新算法](#)
- [45. 基于井眼轨迹控制的防旋转装置的相关研究](#)
- [46. 基于BP网络的MOTOMAN机器人运动学逆解研究](#)
- [47. 基于运动轨迹的机器人运动学逆解研究](#)
- [48. 基于平行机构的简便机器人运动学逆解算法](#)
- [49. 基于机器人运动学的调试方法研究](#)
- [50. 基于ADAMS的新型工业码垛机器人运动学仿真研究](#)