ریاضیات یادگیری ماشین
(جبر خطی)

سجاد ثقفی

محمدرضا احمدی

۱.۱. مفاهیم اسکالر، بردار، ماتریس، تانسور

- اسکالر: کمیت‌هایی هستند که به طور کامل تنها با یک مقدار عددی توصیف می‌شوند. (۰ بعد)

۳۵.۷

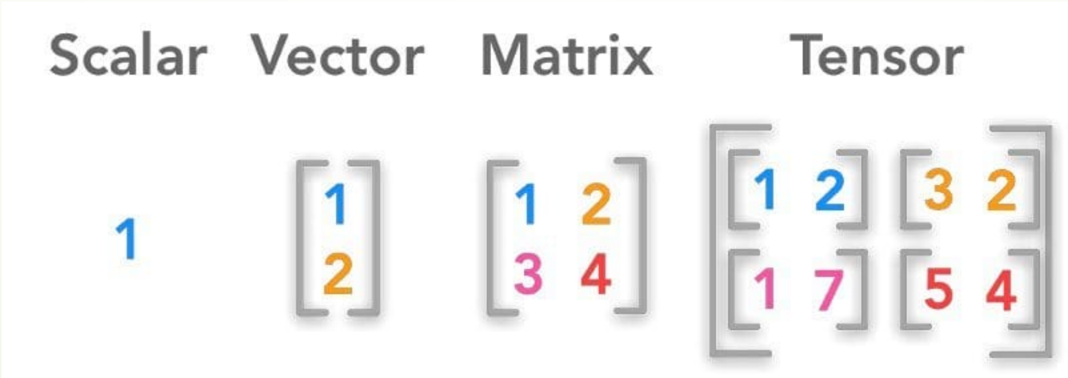
- بردار: لیست مرتبی از اعداد که مقدار به علاوه جهت را در فضا توصیف می‌کند. (۱ بعد)

X = [۷, ۱۲, ۱۹]

- ماتریس: آرایه ای اعداد منظم شده بر اساس ردیف ها و ستون ها. (دو بعد)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- تانسور: یک آرایه چندبعدی تعمیم‌یافته که اسکالر ، بردارها و ماتریس‌ها را به ابعاد بالاتر گسترش می‌دهد.



۲.۱. انواع ماتریس

ماتریس‌ها انواع مختلفی دارند که بر اساس شکل، ابعاد و ویژگی‌های عناصرشان دسته‌بندی می‌شوند. مهم‌ترین انواع شامل: ماتریس سطری، ستونی، مربعی، قطری، همانی، صفر، متقارن، متضاد متقارن، مثلثی بالا/پایین، ارتوگونال، منفرد و غیرمنفرد هستند.

دسته بندی ماتریس ها بر اساس ابعاد:

۱. ماتریس سطری (Row Matrix): ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

۲. ماتریس ستونی (Coloumn Matrix): ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

مثال: $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

۳. ماتریس مربعی (Square Matrix): ماتریسی که تعداد سطر ها و ستون هایش برابر است.

مثال: $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 99 \end{bmatrix}$

۲.۱. انواع ماتریس

دسته بندی عناصر بر اساس مقادیر عناصر:

۱. ماتریس صفر (Zero Matrix): ماتریسی که تمام عناصرش صفر است.

مثال: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲. ماتریس قطری (Diagonal Matrix): ماتریسی که فقط عناصر روی قطر اصلی غیر صفر هستند.

مثال: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

۳. ماتریس اسکالری (Scalar Matrix): ماتریس قطری که همه عناصر قطر برابرند.

مثال: $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

۴. ماتریس همانی (Identity Matrix): ماتریس اسکالر با مقدار ۱ روی قطر.

مثال: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲. عملیات روی ماتریس ها

عملیات اصلی روی ماتریس‌ها شامل جمع، تفریق، ضرب اسکالر، ضرب ماتریسی، ترانهاده، دترمینان، معکوس و تجزیه‌ها است. این عملیات پایه‌ای در جبر خطی هستند و در یادگیری ماشین برای کار با داده‌ها، وزنها و تبدیلات خطی استفاده می‌شوند.

۱.۲. جمع و تفریق ماتریس ها:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

شرط جمع و تفریق ماتریس ها این است که دو ماتریس هم اندازه باشند.

مثال

$$\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 6 & 1 \\ 13 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+5 & 7+0 \\ 6+(-2) & 1+3 \\ 13+15 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 4 & 4 \\ 28 & 6 \end{bmatrix}$$

۲.۲. ضرب ماتریس ها

برای ضرب دو ماتریس ابتدا باید بررسی شود که تعداد ستون های ماتریس اول برابر با تعداد سطر های ماتریس دوم باشد.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن ضرب دو ماتریس، حاصل ضرب سطر های ماتریس اول در ستون های ماتریس دوم را بدست می‌اوریم.

مثال

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 21 & 44 \\ 20 & 26 & 57 \\ 43 & 12 & 36 \end{bmatrix}$$

$$(7 * 2) + (0 * 1) + (2 * 4) \to a_{11} \quad (7 * 3) + (0 * 2) + (2 * 0) \to a_{12} \quad \ldots$$

۲.۲. ضرب ماتریس ها

- نکته مهم: ضرب ماتریس ها جابجایی پذیر نیست.

$$AB \neq BA$$

- اگر $A(m\times n)$ باشد و $B(n\times p)$ باشد، آنگاه $AB(m\times p)$ است.

۳.۲. ضرب اسکالر

- در ضرب اسکالر، هر عنصر ماتریس در یک عدد ثابت ضرب می‌شود.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} k \, . \, a_{11} & k \, . \, a_{12} \\ k \, . \, a_{21} & k \, . \, a_{22} \end{bmatrix}$$

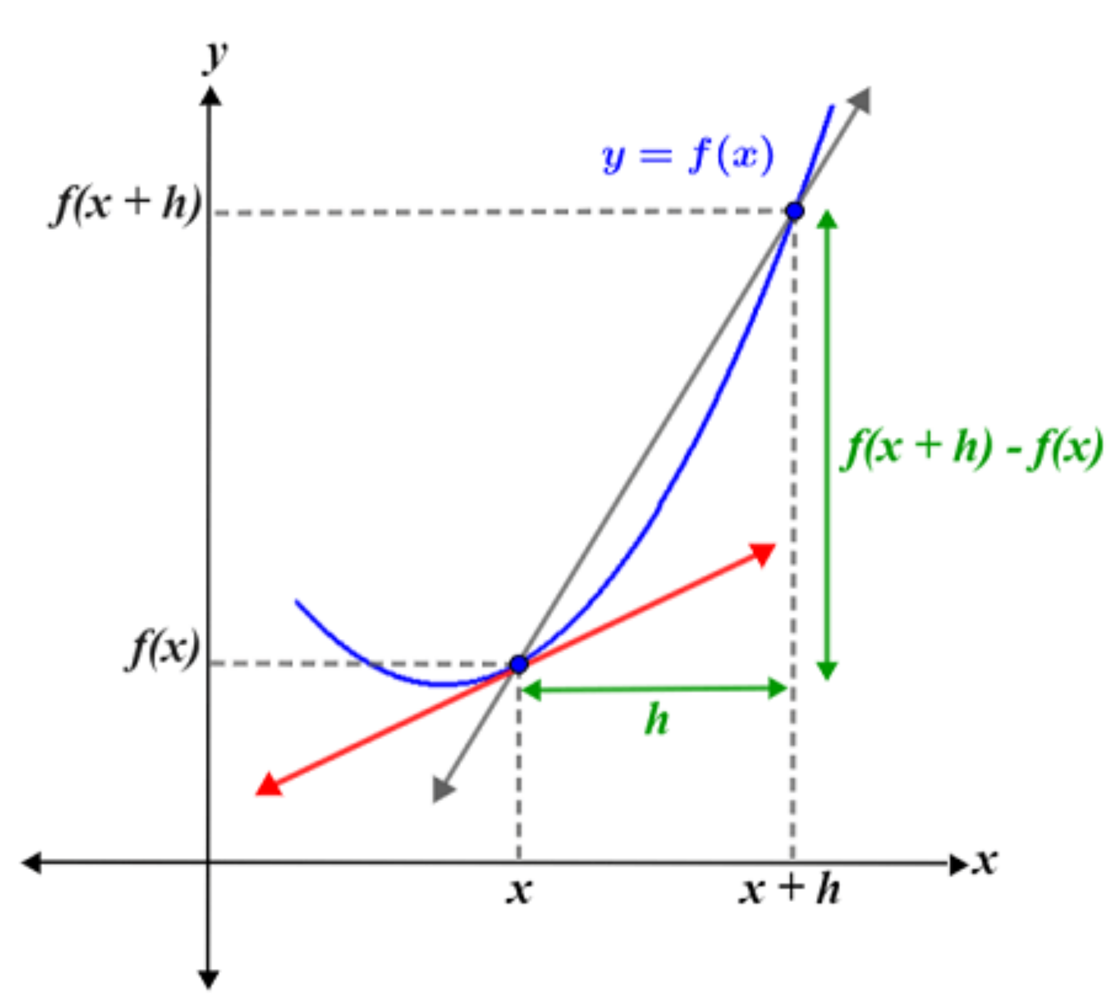
۴.۲. ترانهاده ماتریس ها

- ترانهاده یک ماتریس یعنی جایگزین کردن سطر و ستون

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

۳. مفهوم مشتق



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Calcworkshop.com

۴. گرادیان

گرادیان یعنی جهت و شدت بیشترین افزایش یک تابع

اگر مشتق را برای توابع یک بعدی داشته باشیم، گرایان نسخه چند بعدی مشتق است.

برای تابعی مثل:

$$f(x, y, z)$$

گرادیاذ یک بردار است:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$