

Numerik Projekt 17

Fehlerdetektion und Gesichtserkennung

Seraphin Hungerbühler, Yael Fischer

18.04.2023

Dieser Bericht setzt sich mit verschiedenen Anwendungen der Singulärwertzerlegung auseinander. Es wird sowohl die orthogonale Regression, als auch eine einfache Implementierung einer Gesichtserkennung bearbeitet.

Aufgabe 1 und 2

In der ersten Aufgabe soll eine Gerade durch eine Punktwolke bestimmt werden. Die Gerade soll so bestimmt werden, dass die Summe der Abstandsquadrate minimal wird (orthogonale Regression). Der Abstand wird dabei rechtwinklig zur Geraden gemessen. Dies kann mithilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) erreicht werden.

Im Allgemeinen ist der erste Singulärwert (SW) viel grösser als der zweite. Wie muss die Punktwolke beschaffen sein, damit dem so ist?

Solange die Punkte nicht äquidistant verteilt sind, wird einer der beiden SW immer grösser sein. Dies ist der Fall, da jeder Punkt mit einer Linearkombination aus den Zeilenvektoren von V^T erreicht werden kann und für die Skalierung die SW verwendet werden. Da in dieser Aufgabe die Punktwolke die Form einer lang gezogenen Ellipse hat, muss einer der beiden V^T Vektoren mehr skaliert werden und so ist einer der SW grösser. Falls die Punktwolke die Form eines Kreises hätte, wären die SW gleich gross. Dies kann in der Abbildung 1 gesehen werden.

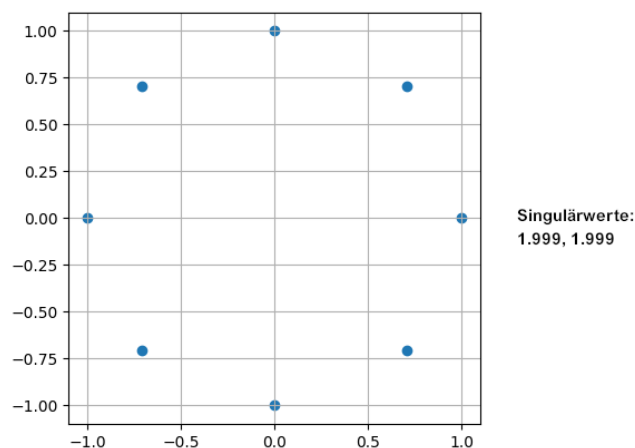


Abbildung 1: Kreisförmige Punktwolke

Wenn nun der kleinere der SW auf null gesetzt wird, liegen alle Punkte auf einer Geraden, die durch den Punktwolkenmittelpunkt und durch den ersten der V^T Vektoren definiert ist. Diese Gerade weist minimalen geometrischen Abstand zu den ursprünglichen Punkten auf. Diese Gerade und der V^T Vektor kann in der Abbildung 2 betrachtet werden. Zum Vergleich ist auch eine Gerade gezeichnet, die mithilfe der Ausgleichsrechnung bestimmt wurde.

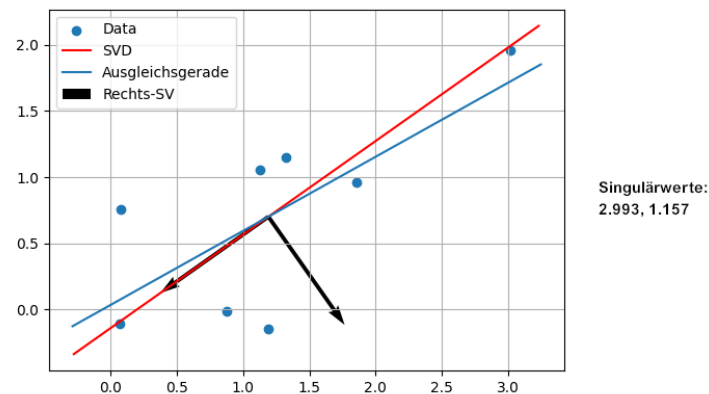


Abbildung 2: Vergleich Singulärwertzerlegung und Ausgleichsgerade

Aufgabe 4

Um den Bilderkennungsalgorithmus umzusetzen wurden zuerst alle Trainingsbilder in eine grosse Matrix zusammen gefügt, wobei ein Bild einem Spaltenvektor entspricht. Nun wurde die SVD auf diese Matrix angewendet. Aus den resultierenden Matrizen wird nur \underline{U} verwendet, da \underline{U} dem „Gesichtsraum“ entspricht. Um eine Approximation des originalen Bildes zu erstellen, wird das Original auf einen Unterraum von \underline{U} projiziert. Zur Projektion des Bildes auf den Unterraum \underline{U}_r wird die Formel 1 verwendet. Die Grösse des Unterraumes \underline{U}_r bestimmt die Genauigkeit der Approximation. Dies kann in der Abbildung 3 gesehen werden. Die in der Abbildung ersichtliche Abweichung ist die quadratische Norm der Differenz von der Bildapproximation zum Originalbild und wird mit der Formel $err = |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^2$ berechnet.

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underline{U}_r \underline{U}_r^\top \mathbf{x} \quad (1)$$

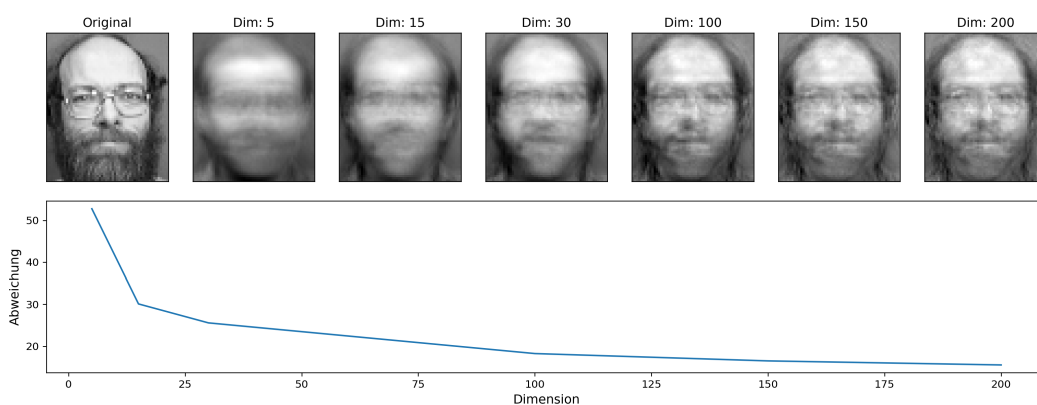


Abbildung 3: Rekonstruktion eines unbekannten Gesichtes in verschiedenen Dimensionen

In Abbildung 4 wurden aus dem Training bekannte Personen vor eine Skyline gesetzt. Von den Personen wurden neun Bilder im Training verwendet. Das zehnte Bild wird für die Detektion verwendet. Dem Algorithmus werden also bekannte Gesichter, allerdings keine bekannten Bilder vorgeführt. Das horizontale Bild wird Pixel für Pixel von links nach rechts abgefahren und die berechnete Abweichung im Graphen unten dargestellt. Dies wird für einen Unterraum verschiedener Dimensionen durchgeführt. Wenn sich ein Gesicht im Bildausschnitt befindet, verringert sich die Abweichung und auch die Streuung der verschiedenen Dimensionen nimmt ab. Links im Bild befindet sich eine Tulpe. Die Graphen schlagen bei dieser nicht, oder nur schwach aus.

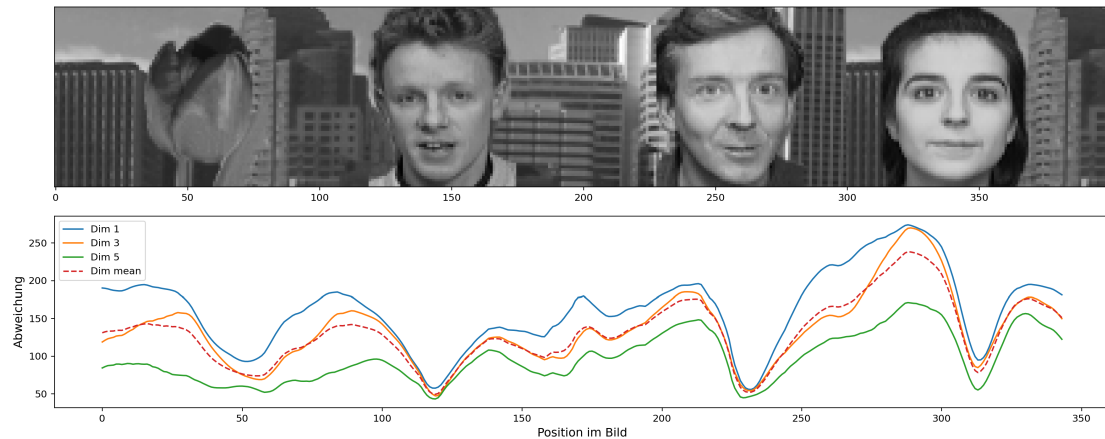


Abbildung 4: Skyline mit bekannten Gesichtern

Nun wurde der oben beschriebene Ablauf auch auf eine Skyline mit für den Algorithmus unbekannten Personen angewendet. Die erhaltenen Daten können in der Abbildung 5 betrachtet werden.

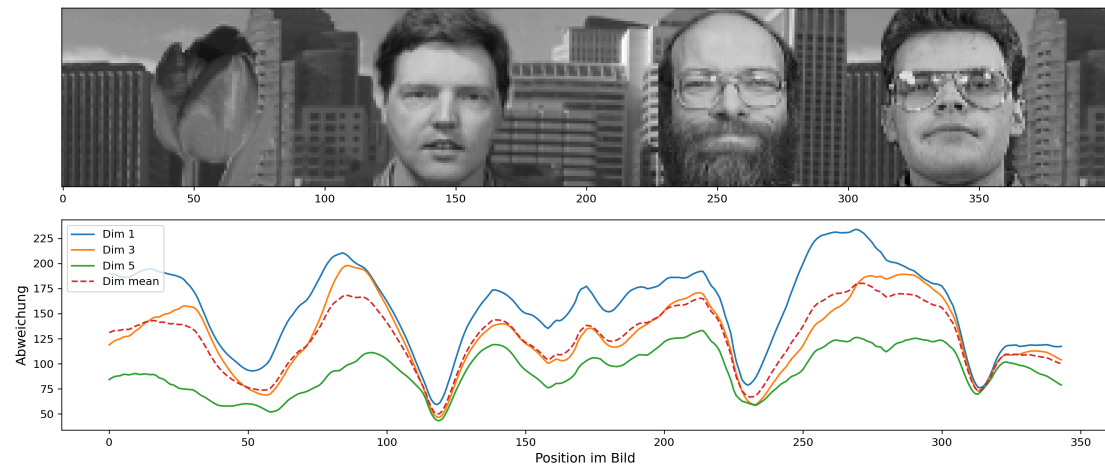


Abbildung 5: Skyline mit unbekannten Gesichtern

Obwohl die verwendeten Gesichter dem Algorithmus unbekannt sind, ist ein klarer Ausschlag im Graphen ersichtlich. Diese Stellen könnten mithilfe der Varianz der verschiedenen Dimensionen und lokalen Minima gefunden und markiert werden. In Abbildung 6 wurden die gefundenen Gesichter weiss markiert.

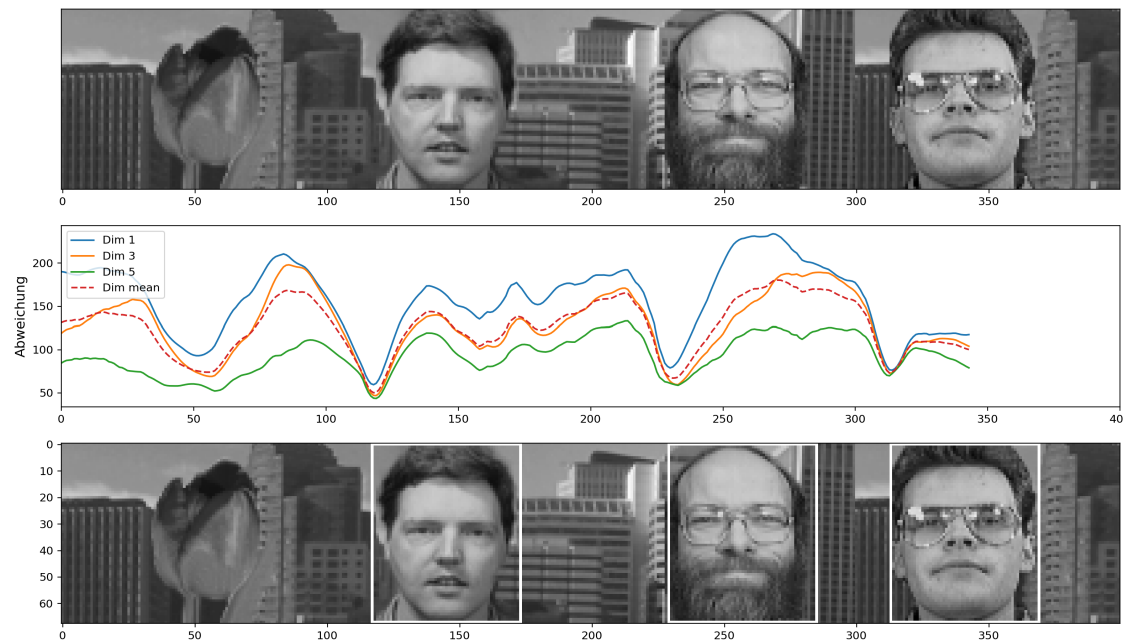


Abbildung 6: Skyline mit markierten Gesichtern