Une synthèse des résultats est à rendre avant le 17 mars 2021 (23h59). Les codes, ainsi qu'un petit document descriptif sont à envoyer par mail à vos responsables de TD.

Vous pouvez vous servir des templates disponibles sur le site web eCampus du cours

1 Descriptif du cas

On considère une chaîne de $N+2$ points de masse reliés par $N+1$ ressorts. On notera (x_i, y_i), $i = 0, ..., N+1$ les coordonnées des points de masse. La masse totale de la chaîne, m, est répartie uniformément. On supposera qu'à chaque point (x_i, y_i) est attachée une masse $\mu = m/(N+2)$. Les extrémités de la chaîne sont fixées aux coordonnées $(x_0, y_0) = (\alpha_0, \beta_0)$ et $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (\alpha_f; \beta_f)$. On notera le coefficient d'élasticité de chaque ressort ω.

L'objectif du TP est de d'écrire la forme de la chaîne suspendue à l'équilibre. L'état d'équilibre de la chaîne est caractérisé comme l'état qui minimise l'énergie potentielle totale de la chaîne définie par

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} \omega \left((x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2\right) + g_0 \sum_{i=0}^{N+1} \mu y_i. \tag{1}$$

Dans la dernière expression la première somme représente l'énergie potentielle des ressorts et le second terme correspond à l'énergie potentielle gravitationnelle. La constante $g_0 = 9.81 m/s^2$.

Etant donné que les extrémités de la chaîne sont fixées, la position de la chaîne est déterminée par les coordonnées $(x_i; y_i), i = 1, ..., N$ des points de masse libres. On considère le vecteur

$$Z = (x_1, ..., x_N, y_1, ..., y_N),$$

comme variable de décision dans cette étude. Dans toute cette partie on utilisera les données suivantes :

$$m = 40.0, \mu = \frac{40.0}{N+2}, \omega = 70.0(N+1), g_0 = 9.81, (\alpha_0, \beta_0) = (-2, 1), (\alpha_f, \beta_f) = (2, 1). \tag{2}$$

Exercice 1. *(Un problème d'optimisation) En isolant dans l'expression* (1) *les composantes contenant les coordonnées des extrémités fixées* (x_0, y_0), (x_{N+1}, y_{N+1}), *on peut* *réécrire la fonctionnelle à minimiser comme suite :*

$$
\begin{aligned}
P(Z) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\omega\left((x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2\right) + g_0\sum_{i=0}^{N+1}\mu y_i \\
&= \frac{1}{2}\omega x_0^2 + \frac{1}{2}\omega x_{N+1}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} 2\omega x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1}\omega x_i x_{i+1}\right) - \omega x_0 x_1 - \omega x_N x_{N+1} \\
&+ \frac{1}{2}\omega y_0^2 + \frac{1}{2}\omega y_{N+1}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} 2\omega y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N-1}\omega y_i y_{i+1}\right) - \omega y_0 y_1 - \omega y_N y_{N+1} \\
&+ g_0\mu\left((y_0 + y_{N+1}) + \sum_{i=1}^{N} y_i\right)
\end{aligned}
$$

1. *Montrez que $P(Z)$ s'écrit sous la forme matricielle suivante :*

$$P(Z) = \frac{1}{2}\langle HZ, Z\rangle + \langle g, Z\rangle + P_0, \tag{3}$$

où P_0 est une constante, H la matrice de taille $2N \times 2N$ et définie par les blocs :

$$H = \begin{bmatrix} \omega A & 0 \\ 0 & \omega A \end{bmatrix}.$$

La matrice A, est une matrice de la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

et de taille $N \times N$. N'oubliez pas de préciser le vecteur g.

2. *Résolvez le problem d'optimisation suivante avec la méthode du gradient conjugé :*

$$\min_{Z\in\mathbb{R}^{2N}} P(Z).$$

3. *Testez la résolution numérique avec $N = 10, 100, 1000$ et tracez la représentation de la chaîne dans le plan (x, y).*

Exercice 2. *(Algorithme du Gradient Projeté) On considère la chaîne suspendue au-dessus d'un plateau à la hauteur $\frac{1}{2}$. Le problème se formule alors comme suit :*

$$
\begin{aligned}
\min_{Z\in\mathbb{R}^{2N}} \quad & P(Z) \\
s.t. \quad & Z \in K,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

avec

$$K = \left\{ Z = (x_1, ..., x_N, y_1, ..., y_N) \ : y_i \geq \frac{1}{2}, i = 1, ..., N \right\}.$$

Afin de calculer la solution du problème (4), on considère la méthode itérative suivante :

— *On choisit un vecteur* z_0*, un pas* $\rho > 0$*, et l'on pose* $k = 0$.
— *Pour* $k \geq 0$*, on pose* $z_{k+1} = P_K(z_k - \rho\nabla J(z_k))$,

où P_K *est la projection sur l'ensemble convexe* K.

1. *Programmez cet algorithme et précisez le projecteur* P_K *sur l'ensemble* K*. Spécifiez également un critère d'arrêt : rappelez-vous de votre algorithme de gradient à pas fixe.*
   (a) *Choisissez* $\rho = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_{2N}}$*, comme pas pour la méthode de gradient. On se souvient ici que* $\lambda_k(A) := 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(N+1)})$, $k = 1, ..., N$*. Testez votre programme avec* $N = 10$*, un nombre maximum d'itérations de 1000 et une tolérance d'arrêt* $\eta = 10^{-5}$.
   (b) *Affichez toutes les 10 itérations :* $\|z_k - z_{k-1}\|_2$ *et la norme* $\|\nabla J(z_k)\|$.
   (c) *Affichez toutes les 10 itérations, le graphe de la solution contenue dans* z_k.
2. *On fixe toujours* $N = 100$*. On désire calculer une approximation* z_k *de* z^* *(la solution optimale) avec une précision de* 10^{-4}*. On admet l'estimation suivante :*
$$\|z_k - z^*\|_2 \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\|z_k - z_{k-1}\|_2\,,$$
   où $\gamma = \|I - \rho H\|_2 = \frac{\lambda_N-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_N}$*. Quelle tolérance* η *doit-on choisir pour s'assurer* $\|z_k - z^*\|_2 \leq 10^{-4}$*. Plottez* γ *en fonction de* N *(considérez quelques ordres de grandeurs), faites de même pour le* η *nécessaire (utilisez, par exemple, une échelle semi-log pour la partie* N*).*
3. *Faites tourner le programme pour* $N = 100$ *et un nombre maximum d'itérations à 10000. Notez le temps de calcul et le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir* $\|z_k - z_{k-1}\|_2 \leq 10^{-6}$.
4. *Quelles sont vos observations et conclusions pour ce test numérique ?*

Exercice 3. *(Algorithme de UZAWA) On considère cette fois-ci que l'ensemble des contraintes* K *est donné sous la forme suivante :*
$$K = \left\{Z \in \mathbb{R}^{2N}\ : CZ \leq f\right\},$$
avec C *une matrice* $p \times 2N$ *et* f *un vecteur de dimension* p*. On considère l'algorithme suivant :*

— *On choisit un vecteur* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$*, un pas* $\rho > 0$*, on résout en* z_0 *le système d'équations* $Hz_0 + C^\mathsf{T}\lambda_0 = -g$ *et l'on pose* $k = 0$.
— *Tant que* $\|\max\{0, Cz_k - f\}\| \geq \eta$ *ou* $\|z_k - z_{k-1}\| \geq \varepsilon$*, on calcule*
$$\lambda_{k+1} = \max\{\lambda_k + \rho(Cz_k - f), 0\}$$
$$z_{k+1}\ t.q.\ Hz_{k+1} + C^\mathsf{T}\lambda_{k+1} = -g,$$

1. *Programmez l'algorithme d'UZAWA. Servez-vous, par exemple, de l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution des systèmes linéaires.*

2. *Afin de comparer, et de tester votre algorithme, nous allons le comparer avec celui du gradient projeté. On pose alors* $p = N$, $f = (-\frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{2})$ *et* C *la matrice*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix},$$

avec I *la matrice d'identité* $N \times N$. *Justifiez tout d'abord pour quelle raison les deux algorithmes devraient retourner la même solution.*

3. *Comparez maintenant les deux algorithmes en termes d'efficacité numérique (temps de calcul, précision) pour* $N = 10, 100, 250, 500$.
4. *Désormais l'ensemble des contraintes* K *est donné par la formule suivante :*

$$K = \{Z = (x_1, ..., x_N, y_1, ..., y_N) \ : y_i - 0.1x_i \geq 0.6, i = 1, ..., N\}.$$

Montrez que cet ensemble s'écrit sous la forme générique considérée dans cet exercice en spécifiant C, f. *Résolvez le problème numériquement pour* $N = 10, 100, 1000$.

5. *Quelles sont vos observations et conclusions pour ce test numérique ?*

2 Préparation du rapport

Le rapport doit présenter la synthèse et l'analyse du problème étudiée (calcul des matrices et vecteurs) et des différents tests réalisés dans ce TP. Résumez vos résultats de manière synthétique, en utilisant, par exemple, un tableau. Soyez bref dans votre rédaction, mais précis. Il est préférable que votre rapport soit un fichier pdf, dont le nom rappelle votre nom, e.g., rapport_dupont.pdf

Vous pouvez vous servir du fichier "exportfig" pour exporter vos figures en postscript, png, jpg.