Traitement et Estimation du signal

(FIP MTS 212)

C2 : Filtrage et filtres adaptés

Laurent Lecornu (K1 103)
Frédéric Maussang (K1 133)

Sept. 2014

Introduction

- **Détection d'un signal :** *Détecter la présence et estimer la forme d'un signal particulier noyé dans le bruit*
- **Prédire un signal :** *Estimer à partir d'observation l'état d'un système*

→ *Utilisation de l'opération de filtrage*
→ *Comment ? – Conséquence*

observation → Filtrage → *Mesure* / *Information*

$x(t)$: entrée (observable) - aléatoire

H : filtre déterministe

$x(t)$ et $y(t)$ aléatoires

$y(t)$: sortie (mesure) - aléatoire

Filtrage et stationnarité du second ordre

$x(t)$ → Filtre H → $y(t)$

$$y(t) = (x * h)(t)$$

$$Y(\nu) = X(\nu) \cdot H(\nu)$$

Filtre →

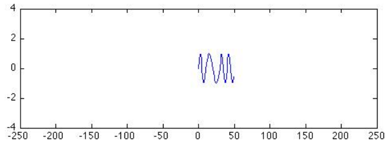
H(ν) **: Réponse fréquentielle**
h(t) **: Réponse impulsionnelle**
H(p) **: Fonction de transfert**

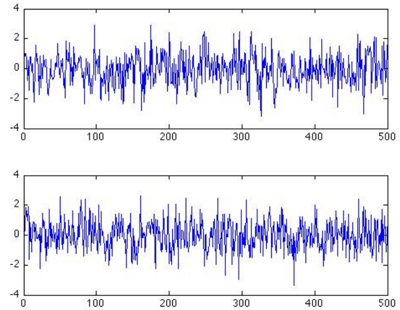
Rappel

$$H(p) = TL\left[h(t)\right]$$
$$H(\nu) = TF\left[h(t)\right]$$
$$H(\nu) = H(p)\big|_{p=j2\pi\nu}$$

Axe des imaginaires

Question : Exemple





Ou est le signal ?

Filtrage : objet

- Construire un filtre qui permet de détecter et de localiser un signal se trouvant à l'intérieur d'un signal bruité
- Attention : on verra ultérieurement comment construire un filtre qui permet d'enlever le bruit sans trop détériorer le signal

Filtres adaptés

- Connaissance *a priori* sur le signal analysé
- Comment définir la meilleure chaîne de traitement pour extraire le maximum d'information d'un signal bruité ?

➔ Critère permettant de juger l'information extraite comme pertinente

Objectif

- **Retrouver le filtre optimal pour détecter le signal et le situer dans le signal**

Système à réponse maximum

Systèmes à réponse maximum

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Filtre H ?}} \longrightarrow y(n)$$

Déterminer $h(n)$ pour que la sortie à l'instant n_0 soit maximum ?

Système à réponse maximum

$$y(n_0) = \left[(h * x)(n)\right]_{n=n_0} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(p)\,x(n_0 - p)$$
$$= TF^{-1}\left[H(\nu)X(\nu)\right]_{n=n_0}$$

$$y(n_0) = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu)X(\nu)e^{j2\pi\nu n_0}\,d\nu$$

Att. : F_e=1

Système à réponse maximum

Inégalité de Schwartz

$$\left|\int_a^b f(\alpha)g(\alpha)\,d\alpha\right|^2 \le \int_a^b \left|f(\alpha)\right|^2 d\alpha \cdot \int_a^b \left|g(\alpha)\right|^2 d\alpha$$

Egalité

$$f(\alpha) = K\, g^*(\alpha)$$

Système à réponse maximum

Inégalité de Schwartz

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(\nu)X(\nu)e^{2j\pi\nu n_0}\,d\nu$$

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} H(\nu)X(\nu)e^{2j\pi\nu n_0}\,d\nu\right|^2 \leq \int_{-1/2}^{1/2}\left|X(\nu)\right|^2 d\nu \cdot \int_{-1/2}^{1/2}\left|H(\nu)e^{2j\pi\nu n_0}\right|^2 d\nu$$

Adaptation

$$X(\nu) = KH^*(\nu)e^{2j\pi\nu n_0}$$

Système à réponse maximum

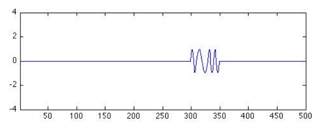
Il faut que le signal soit de la même « forme » fréquentielle que le filtre

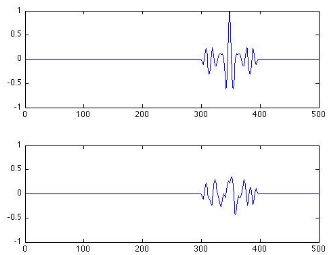
Représentation temporelle

$$h(n) = K\,x(-n+n_0)$$

Exemple

Utilisation sur les deux signaux 1 adapté (le même)
et l'autre non (composition différente) (sans bruit)





➔ Apparition d'un pic
(à la fin du signal – filtre recouvre le signal)

Maximisation du rapport Signal à Bruit

Maximisation avec critère

$$x(n) = s(n) + b(n)$$
$$y(n) = y_s(n) + y_b(n)$$

$X(n)$ → $H(\upsilon)?$ → $Y(n)$

Réduire l'influence du bruit en sortie du filtre

Idée ➔ Maximiser le rapport signal à Bruit

$$\frac{S}{N} = \frac{\left|y_s(n_0)\right|}{\sqrt{E\left\{\left|y_b(n_0)\right|^2\right\}}}$$

Maximisation du rapport Signal à Bruit

Numérateur

$$Y(n_0) = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) S(\nu) e^{j2\pi\nu n_0} \, d\nu$$

$$H(\nu)S(\nu) = \frac{S(\nu)}{\sqrt{\gamma_b(\nu)}} H(\nu)\sqrt{\gamma_b(\nu)}$$

(introduction d'un terme qui va permettre d'éliminer le dénominateur)

Maximisation du rapport Signal à Bruit

Numérateur

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{S(\nu)}{\sqrt{\gamma_b(\nu)}} H(\nu)\sqrt{\gamma_b(\nu)} e^{2j\pi\nu n_0} \, d\nu \right|^2 \leq \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{S(\nu)}{\sqrt{\gamma_b(\nu)}} \right|^2 d\nu \cdot \int_{-1/2}^{1/2} |H(\nu)|^2 \gamma_b(\nu) d\nu$$

Inégalité de schwartz

$$\Gamma_{\gamma_b}(0) = E\left\{Y_b^2(n)\right\} = \int_{-1/2}^{1/2} |H(\nu)|^2 \gamma_b(\nu) d\nu$$

Maximisation du rapport Signal à Bruit

SNR Maximal

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \leq \Gamma_{\gamma_b}(0) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|S(\nu)|^2}{\gamma_b(\nu)} d\nu$$

Cas d'un bruit blanc

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 \leq \frac{1}{N_0} \int_{-1/2}^{1/2} |S(\nu)|^2 d\nu = \frac{P_S}{N_0}$$

Maximisation du rapport Signal à Bruit

Condition de maximisation

$$H(\nu) = \frac{K}{N_0} S^*(\nu) e^{-2j\pi\nu n_0}$$

Egalité lorsqu'il y a colinéarité entre $h(u)$ et $s^*(t_0\text{-}u)$

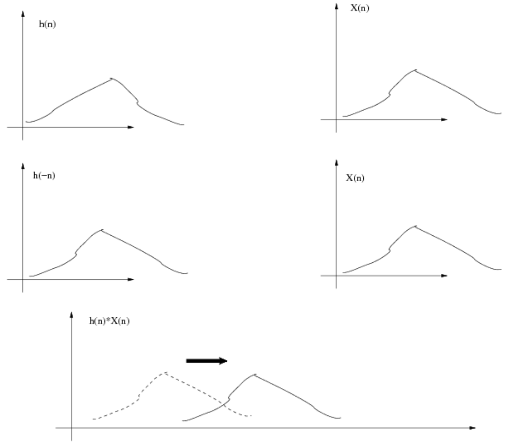
$$h(n) = K \cdot s(n_0 - n)$$

Maximisation du rapport Signal à Bruit

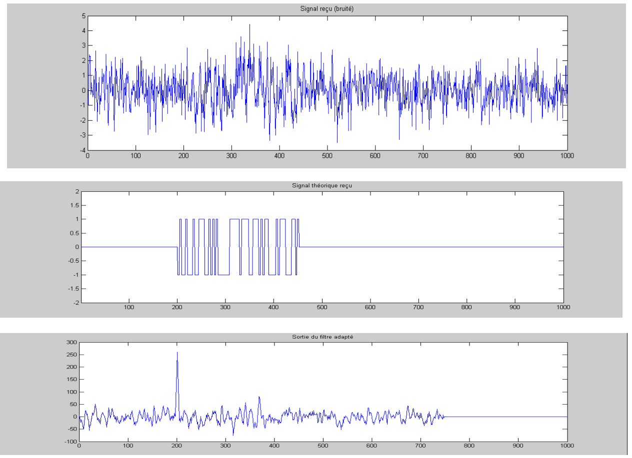
$$Y(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(n-i)X(i)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(n-i)s(i)+\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(n-i)b(i)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}Ks(n_0-n+i)s(i)}_{\text{corrélation du signal avec lui même}}+\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}s(n_0-n+i)b(i)}_{\text{filtre moyenne nulle}\Rightarrow\text{élimination du bruit}}$$

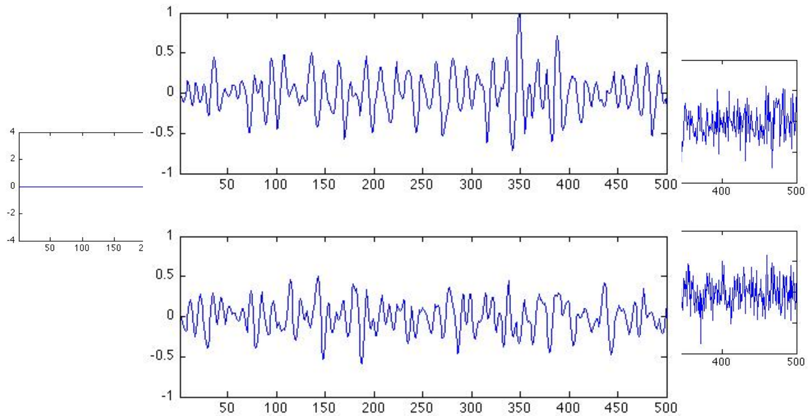
Maximisation du rapport Signal à Bruit

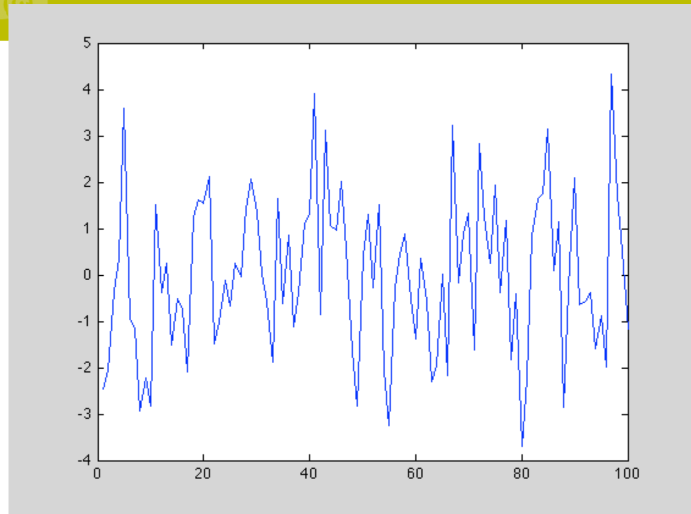


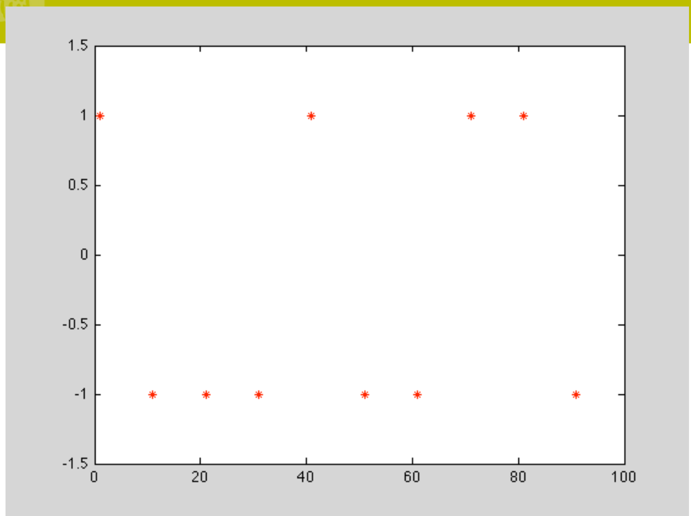
Exemple

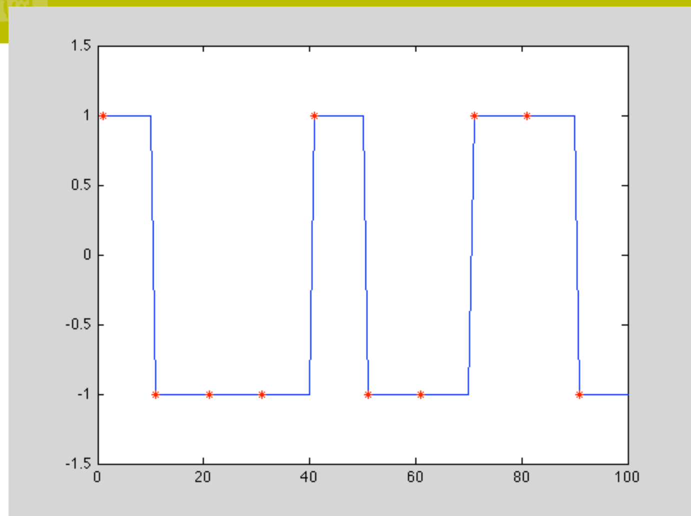


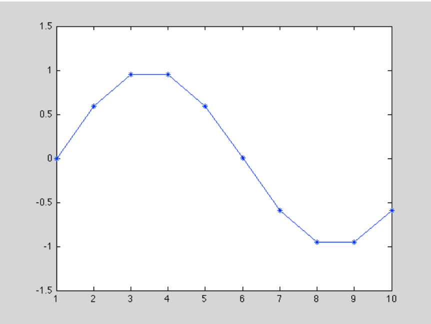
Exemple

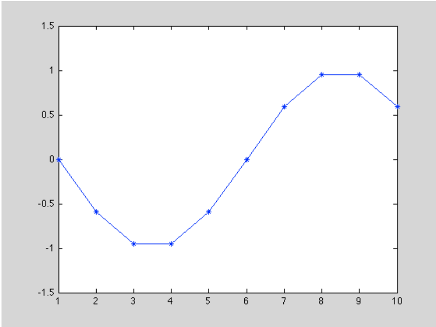


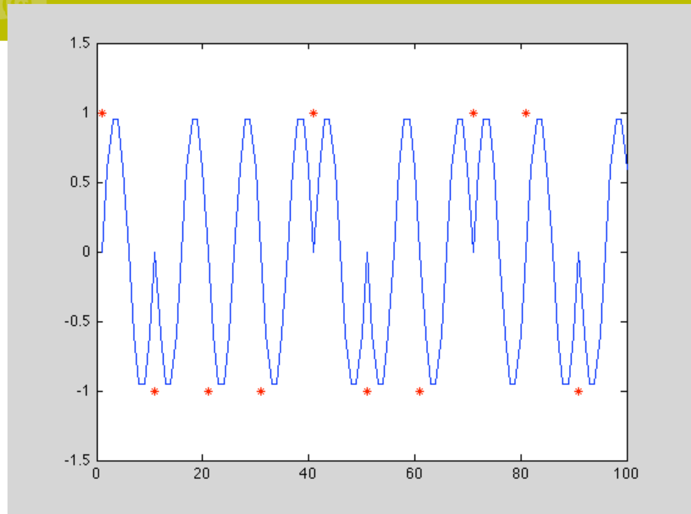

5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
20
40
60
80
100

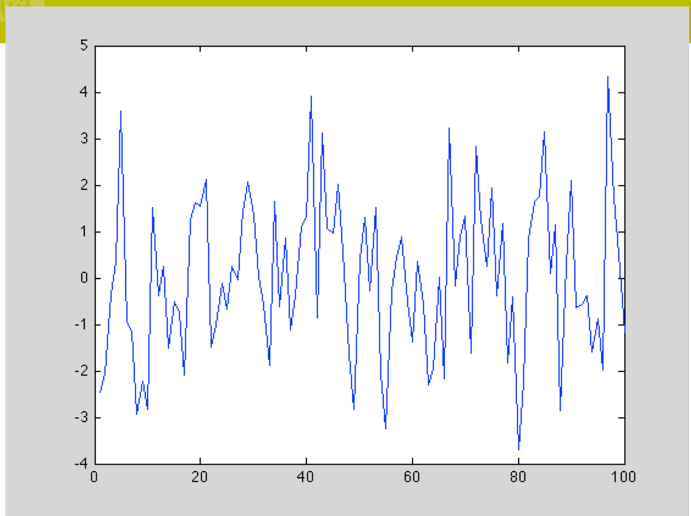

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
20
40
60
80
100


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
20
40
60
80
100

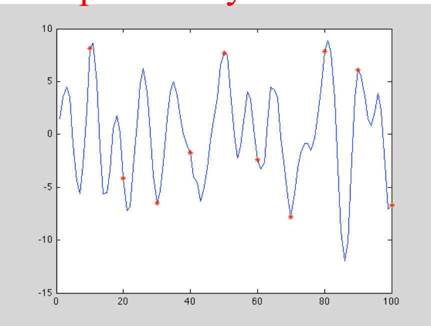

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

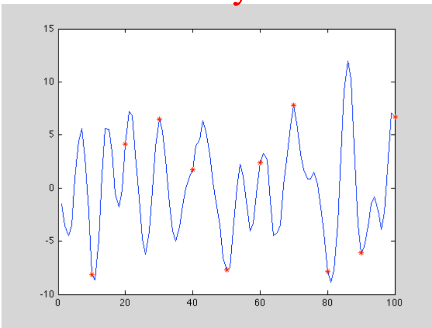

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 20 40 60 80 100

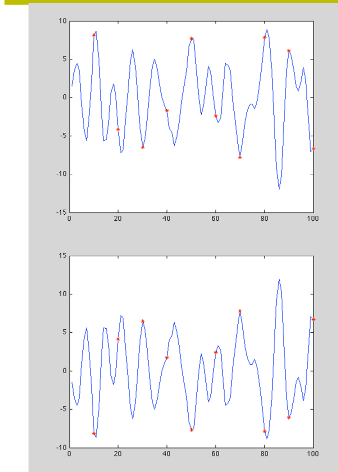

5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0 20 40 60 80 100

Filtrage adapté
au premier symbole

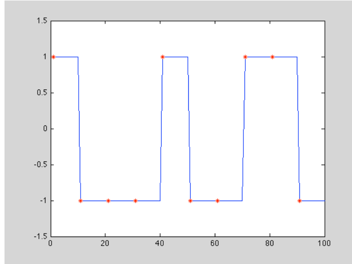


Filtrage adapté
au second symbole





Choix du symbole selon
à partir de la réponse qui
est maximale



Des Questions ?