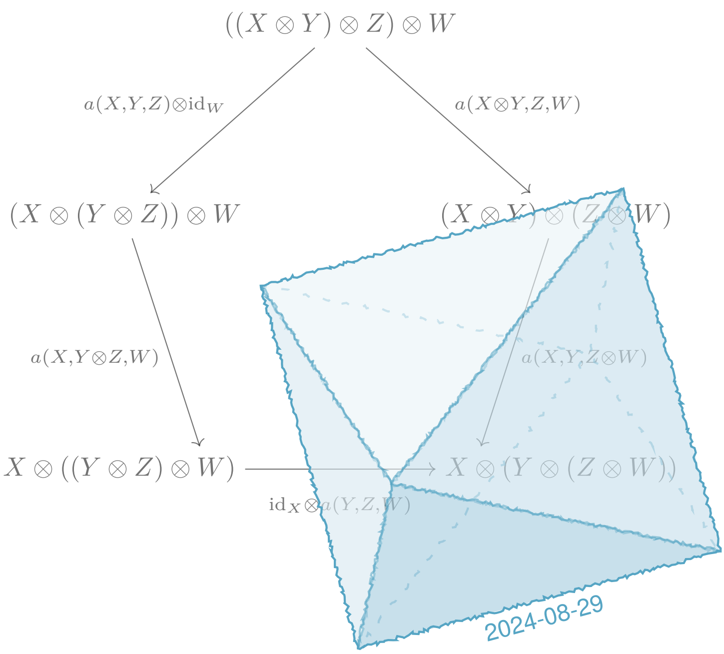
随机过程回顾

Review of Stochastic Process

龙汉　讲授
杨鼎　整理



目录

导 言

首先分享几条清华大学张颢老师的几条格言：

- No Reading, No Learning. 参考多本教程或教材可以让你理解更深刻，但一**定**要找一个教程深入学习，其他作为参考和辅助。大量的阅读是学习的重要内容。
- No Writing, No Reading(Effective Reading). 把读到的每个符号都在纸上写一遍。
- No Data, No Truth. 所有的模型都是人造的，只有数据是上帝给的，数据才是对真理最无私的反映。
- No Analytic, No Understanding. 一件事在解析上算不清楚就不叫真正理解。
- No Programing, No Cognition. 理解停留在上层，而认知需要落地。

根据费曼学习法，将学到的知识讲述出来可以加深自己的理解，同时也是一个重新整理思路的过程，这是整理这篇文档的初衷。文档中的定义、定理和证明等内容为求准确，完全与《应用随机过程 (第 6 版)》内容一致；文字描述少部分参照教材中描述，大多数是个人的理解，所以难免有偏差；习题选自教材例题和习题 (龙汉：我建议大家关注)，留出了很多空白，需要动手去完成。

本文档 LaTeX 模板来自北京大学数学科学学院李文威老师《代数学方法》(GitHub 链接)，节约了很多精力，在此作出感谢。

杨鼎

2024 年 5 月于北斗楼 309

第一章 随机过程概述

◇ 概率空间、随机变量、随机过程.
◇ 分布函数与概度函数.
◇ 均值函数、方差函数、协方差函数、自相关函数、特征函数.
◇ 独立增量过程、平稳增量过程、严格平稳过程与广义（宽）平稳过程.

1.1 随机变量

定义 1.1.1 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数。如果

(1) $P(\Omega) = 1,$

(2) $\forall A \in \mathscr{F}, 0 \le P(A) \le 1,$

(3) 对两两互不相容事件 $A_1, A_2, A_3, \ldots$(即当 $i \neq j$ 时，$A_i \cap A_j \neq \varnothing$).

有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的**概率**，$\Omega, \mathscr{F}, P$ 称为**概率空间**，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件，P(A) 称为事件 A 的概率。

定义 1.1.2 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是（完备的）概率空间，X 是定义在上取值于实数集的函数，如果 $\forall x \in \mathbb{R}, \{w : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，则称 X 是 $\mathscr{F}$ 上的随机变量，简称**随机变量**。函数

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

称为随机变量 X 的**分布函数**。

注意到，随机变量是定义在概率空间和实数集之间的函数 (映射)。**随机变量**中，**随机**指的是事件在概率空间中随机发生，**变量**指的是事件对应的函数值，这种对应关系 (即函数) 是确定的。

实际中常用的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续性随机变量。

离散型随机变量 X 的概率分布用如下分布列来描述：

$$p_k = P\{X = x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

其分布函数为：

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度函数 $f(x)$ 描述，其分布函数为：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

对于随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$，它的联合分布函数定义为：

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_d \leqslant x_d\}$$

这里 $d \geqslant 1, x_k \in \mathbb{R}\ (k = 1, 2, \ldots, d)$。

定义 1.1.3 **(1)** 取值为 s_k 的离散型随机变量的**数学期望**定义为：

$$E(X) = \sum_k s_k P\{X = s_k\} = \sum_k s_k p_k$$

如果 $\sum |s_k|\, p_k < +\infty$。

(2) 连续型随机变量 X 的**数学期望**定义为：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,dF(x)<+\infty$。这里，$F(x)$ 是 X 的分布函数，$f(x)$ 是其密度函数。利用 Riemann-Stieltjes 积分，可以对离散型随机变量和连续性随机变量的期望给出一个统一的表达式：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)$$

(3) 设 X 为随机变量，若 $E[X-E(x)]^2$ 存在，则称 $E[X-E(x)]^2$ 为 X 的**方差**，记为 Var(X), 即 $Var(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[X-E(x)]^2dF(x)$。

(4) 对两个随机变量 X，Y，若 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则称之为 X 与 Y 的**协方差**，记为 Cov(X,Y), 可知 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$。

(5) 设 X 为任一随机变量，对正整数 k，称 $c_k=E[X-E(X)]^k$ 为 X 的 k 阶**中心矩**。方差是二阶中心矩。

(6) 设 X，Y 为两个随机变量，对正整数 k，l，称 $E[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l$ 为 X 和 Y 的的 k+l 阶**混合中心矩**。协方差是二阶混合中心矩。

定义 1.1.4 **(1)** 若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则称

$$\phi(t)=E(e^{tX})=\int_{\Omega}e^{tX}P(d\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tX}dF(x)$$

为 X 的**矩母函数**。

(2) 若随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则称

$$\psi(t)=E(e^{itX})=\int_{\Omega}e^{itX}P(d\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itX}dF(x)$$

为 X 的**特征函数**。

在通常遇到的情形中，对矩母函数的变量 t 求导运算与定义1.1.4(1) 中的求期望运算可以交换次序，即求期望运算积分上下限与 t 无关。对 $\phi(t)$ 逐次求导并计算 $t=0$ 点的值就可以得到 X 的各阶矩：

$$\begin{aligned}\phi'(0)&=E(Xe^{tX})|_{t=0}=E(X)\\ \phi''(0)&=E(X^2e^{tX})|_{t=0}=E(X^2)\\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\phi^{(n)} = E(X^n e^{tX})|_{t=0} = E(X^n)$$

但有时随机变量的矩母函数不一定存在，这种情况下，更方便的是特征函数。

如果 $F(X)$ 有密度 $f(x)$，则特征函数 $\psi(t)$ 就是 $f(X)$ 的 Fourier 变换

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} f(x) dx$$

特征函数是一个实变量的复值函数，因为 $|e^{itX}| = 1$，所以它对一切实数 t 都有定义。

特征函数有几个比较重要的性质，前两个性质可以由 Fourier 变换的性质外推得到：

- ◇ 线性变换的作用：设 $Y = aX + b$, 则 Y 的特征函数是 $\psi_Y(t) = e^{ibt}\psi_X(at)$
- ◇ 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积
- ◇ 设随机变量 X 的 n 阶矩存在，则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k \leqslant n$ 时，有

$$\psi^{(n)}(0) = i^k E(X^k)$$

第三个性质是由于特征函数可作带皮亚诺型余项的 Taylor 展开：

$$\psi(t) = 1 + itE(X) + \frac{(it)^2}{2!}E(X^2) + \cdots + \frac{(it)^n}{n!}E(X^n) + o(t)$$

定义 1.1.5 设 A,B 为两个事件，若 $P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$，则称 A 与 B 独立。更一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，如果对任何 $m \leqslant n$ 以及 $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n$，有

$$P(\bigcap_{j=1}^{m} A_{k_j}) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{k_j})$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**。$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立不一定相互独立。

定理 1.1.6 (独立变量的数字特征) **(1)** 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \in \mathcal{L}^1$ 是独立的，则 $E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$。

(2) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n \in \mathcal{L}^2$ 是独立的，则 $Var\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n Var(X_k)$。

1.2 随机过程

定义 1.2.1 **随机过程**是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$, 其中 T 称为指标集或参数集。

随机过程 $\{X(t,w), t \in T, w \in \Omega\}$ 可以看成定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数。对于固定的样本点 $w \in \Omega, X(t,w)$ 就是定义在 T 上的一个函数，称为 $X(t)$ 的一条样本路径或一个样本函数；而对于固定的时刻 $t \in T, X(t) = X(t,w)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量。

定义 1.2.2 **(1)** 称 $X(t)$ 的期望 $\mu_X(t) = E[X(t)]$ 为过程的**均值函数**（如果存在的话）。

(2) 如果 $\forall t \in T, E[X^2(t)]$ 存在，则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程。此时，称函数 $\gamma(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}(t_1, t_2 \in T)$ 为过程的**协方差函数**; 称 $Var[X(t)] = \gamma(t,t)$ 为过程的**方差函数**; 称 $R_X(s,t) = E[X(s)X(t)], s, t \in T$ 为**自相关函数**。

由 Schwartz 不等式知，二阶矩过程的协方差函数和自相关函数存在，且有 $\gamma_X(s,t) = R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$。

定义 1.2.3 **(1)** 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 和任意的 h，使得 $t_i + h \in T, i = 1, 2, \cdots, n$，有 $(X(t_1+h), X(t_2+h), \cdots, X(t_n+h))$ 与 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$ 具有相同的联合分布，记为：

$$(X(t_1+h), X(t_2+h), \cdots, X(t_n+h)) \overset{d}{=} (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**严平稳过程**。

(2) 如果随机过程 $X(t)$ 的所有二阶矩都存在，并且 $E(X(t) = \mu)$，协方差函数为 $\gamma(t,s)$ 只于时间差 $t-s$ 有关，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**宽平稳过程**。

严平稳过程是比宽平稳过程要求严格地多的随机过程。宽平稳过程只要求前二阶矩的性质，但是严平稳过程要求具有相同的联合分布，也就是要求任意阶矩都相同，这在实际运用中是很少出现的。因此严格平稳过程只是作为一个标准列出，宽平稳过程是研究的更多的随机过程。

对于宽平稳过程，因为 $\gamma(s,t) = \gamma(0, t-s), s, t \in \mathbb{R}$，所以可以记为 $\gamma(t-s)$。显然对所有 t，有 $\gamma(-t) = \gamma(t)$，即 $\gamma(t)$ 的图形是关于纵轴对称的。其在 0 点的值就是 $X(t)$ 的方差，即 $\gamma(0) = Var[X(t)]$, 并且 $|\gamma(t)| \leqslant \gamma(0), \forall t \in T$。

定义 1.2.4 **(1)** 如果对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n, t \in T, t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，随机变量 $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的，则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是

独立增量过程。

(2) 如果对任意 t_1, t_2，有 $X(t_1+h)-X(t_1) \stackrel{d}{=} X(t_2+h)-X(t_2)$, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 是**平稳增量过程**。

(3) 兼有独立增量和平稳增量的过程称为**平稳独立增量过程**。

定理 1.2.5 设 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个独立增量过程，则 $X(t)$ 具有平稳增量的充分必要条件为：其特征函数具有可乘性，即

$$\psi_{X(t+s)} = \psi_{X(t)}(a)\psi_{X(s)}(a)$$

不难证明，平稳独立增量过程的均值函数一定是时间 t 的线性函数。Poisson 过程和 Brown 运动都是这类过程。

习题

1. 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一、二阶矩存在的随机过程。试证明它是宽平稳的当且仅当 $E(X(s))$ 与 $E(X(s)X(s+t))$ 都不依赖于 s。 **提示** ”当且仅当”的含义是”充要条件”，需要分两步证明，首先证明充分性，即 $E(X(s))$ 与 $E(X(s)X(s+t))$ 都不依赖于 $s \Rightarrow$ 宽平稳, 然后证明必要性，即宽平稳 $\Rightarrow E(X(s))$ 与 $E(X(s)X(s+t))$ 都不依赖于 s.

2. 试证，若 $Z_0, Z_1, \cdots$ 为独立同分布随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，则 $X_n, n \geqslant 0$ 是独立增量过程。 **提示** 根据定义证明增量独立

3. 设 Z_1, Z_2 是独立同分布的随机变量，服从均值为 0，方差为 σ^2 的正态分布，λ 为实数。求过程 $\{X(t), t \in T\}$，其中 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$ 的均值函数和方差函数。它是宽平稳的吗？ **提示** 根据宽平稳过程的定义求方差函数、均值函数和协方差函数

第二章 Poisson 过程

- ◇ 计数过程.
- ◇ Poisson 过程的定义.
- ◇ 事件发生时间和事件发生间隔的分布.

2.1 计数过程

定义 2.1.1 计数过程 $\{N(t)\}$ 表示从 0 到 t 时刻某特定事件 A 发生的次数，则随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 称为**计数过程**

计数过程具有两个特点：

(1) $N(t) \geqslant 0$ 且取值为整数;

(2) 当 $s < t$ 时，$N(s) \leqslant N(t)$，且 $N(t) - N(s)$ 表示 $(s, t]$ 时间内事件 A 发生的次数。

上一章中的独立增量和平稳增量是某些计数过程具有的主要性质。

2.2 Poisson 过程

定义 2.2.1 计数过程 $N(t), t \geqslant 0$ 则称为参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的 **Possion 过程**，如果

(1) $N(0) = 0$

(2) 过程具有独立增量

(3) 在任意长度为 t 的时间区间中事件发生次数服从均值为 λt 的 Poission 分布，即对一切 $s \geqslant 0, t > 0$，有

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

由定义 2.2(3) 中可以发现，$N(t+s) - N(s)$ 的分布不依赖与 s, 所以该式蕴含了过程的平稳增量性。由 Poisson 分布的性质知道 $E(N(t)) = \lambda t$,λ 可以看做单位时间内发生事件的平均次数，称为 Poisson 过程的强度或速率。

定义 2.2.2 设 $N(t), t \geqslant 0$ 是一个计数过程，它满足

$(1)'$ {N(0)=0};

$(2)'$ 过程具有平稳独立增量

$(3)'$ 存在 $\lambda > 0$，当 $h \downarrow 0$ 时，有

$$P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$$

$(4)'$ 当 $h \downarrow 0$ 时，有

$$P\{N(t+h) - N(t) \geqslant 2\} = o(h)$$

则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的 **Possion 过程**。

证明定义 2.2 与定义 2.3 等价:

1. 首先证明满足定义 2.2 中条件 $(1) \sim (4)$ 的过程满足定义 2.3 中条件 $(1)' \sim (4)'$。

$(1)'$ 显然满足。

根据 (3) 中概率分布 $P\{N(t+s)-N(t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 与 s 无关，所以 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是平稳增量过程，结合 (2) 可知 $(2)'$ 满足。

(自己动手，结合 $(1)'$ 和 $(2)'$, 利用 (3) 推得 $(3)'$ 和 $(4)'$)

2. 其次证明满足定义 2.3 中条件 $(1)' \sim (4)'$ 的过程定义 2.2 中条件 $(1) \sim (4)$。

$(1),(2)$ 显然满足。

(自己动手，结合 $(1)'$ 和 $(2)'$, 利用 $(3)'$ 和 $(4)'$ 推得 (3))

利用数学归纳法, 首先求 $P\{N(t)=0\}$:

然后利用 $(3)'$ 和 $(4)'$ 得到 $P\{N(t)=n\}$ 和 $P\{N(t)=n-1\}$ 的递推关系 (微分方程);

结合 $(2)'$ 平稳独立增量的条件，利用数学归纳法得到 (3):

2.3　与 Poisson 过程相联系的分布

定义 2.3.1 **(1)** T_n 表示第 n$n = 1, 2, \cdots$ 次事件发生的时刻。规定 $T_0 = 0$.

(2) X_n 是第 n 次与第 n-1 次时间发生的时间间隔。

定理 2.3.2 X_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 服从参数为 λ 的指数分布，且相互独立。

(动手证明它)

定理 2.3.3 T_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 服从参数为 n 和 λ 的 Γ 分布。

(动手证明它)

习题

1. 完成 Poisson 过程两种不同定义等价性的证明。

2. 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数 $\lambda = 3$ 的 Poisson 过程。试求

(1) $P\{N(1) \leqslant 3\}$;

(2) $P\{N(1) = 1, N(3) = 2\}$;

(3) $P\{N(1) \geqslant 2 | N(1) \geqslant 1\}$。

3. 对于 Poisson 过程 $\{N(t)\}$，证明当 $s < t$ 时,

$$P\{N(s) = k | N(t) = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

4. 设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别是参数为 λ_1, λ_2 的 Poisson 过程，令 $X(t) = N_1(t) - N_2(t)$, 问 $\{X(t)\}$ 是否为 Poisson 过程，为什么?

第三章 Markov 链

- ◇ Markov 性，转移概率和转移矩阵.
- ◇ C-K 方程.
- ◇ 常返性和周期性.
- ◇ 平稳分布与极限分布.
- ◇ Markov 微分方程.

3.1 基本概念

定义 3.1.1 随机过程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 称为 **Markov 链**，如果如果它只取有限个或可列个值，并且对任意的 $n \geqslant 0$，以及任意状态 $i, j, i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$, 有

$$
\begin{aligned}
&P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} \\
=&P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}
\end{aligned}
$$

式中，$X_n = i$ 表示过程在时刻 n 处于状态 i，称 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 为该过程的状态空间，记为 S。

上式刻画了 Markov 链的特性，称为 Markov 性。对 Markov 链。给定过去的状态 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ 以及现在的状态 X_n，将来的状态 X_{n+1} 的条件分布与过去的状态独立，只依赖于现在的状态。

定义 3.1.2 条件概率 $P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ 为 Markov 链 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的一步转移概率，简称**转移概率**，记为 p_{ij}，它代表处于状态 i 的过程下一步转移到状态 j

的概率。

一般情况下，转移概率与状态 i, j 和时刻 n 有关。

定义 3.1.3 当 Markov 链的转移概率 $p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ 只与状态 i, j 有关，而与时刻 n 无关时，称为 **时齐 Markov 链**; 否则，称为非时齐的 Markov 链。

定义 3.1.4 通常将 $p_{ij}, i, j \in S$ 排成一个矩阵的形式，$\mathbf{P} = (p_{ij})$。称为状态转移矩阵，或简称**转移矩阵**。

转移概率具有如下性质：

(1) $p_{ij} \geqslant 0, i, j \in S$;

(2) $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S$.

3.2 C-K 方程

定义 3.2.1 称条件概率

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \quad i, j \in S; m \geqslant 0; n \geqslant 1$$

为 Markov 链的 n 步转移概率, 相应地称 $\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ 为n **步转移概率矩阵**。

n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 指的是系统从状态 i 经过 n 步后转移到状态 j 的概率，它对中间的 $n-1$ 步转移经过的状态无要求，也有可能已经经过了状态 j。

定理 3.2.2 (Chapman-Kolmogorov 方程，简称 C-K 方程) 对一切 $n, m \geqslant 0, i, j \in S$ 有

(1) $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$;

(2) $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-2)} = \cdot = \mathbf{P}^n$.

仅证明定理3.2.2(1)。

证明

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+n)} &= P\{X_{m+n} = j | X_0 = i\} \\
&= \frac{P\{X_{m+n} = j, X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}} \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P\{X_{m+n} = j, X_m = k, X_0 = i\}}{P\{X_0 = i\}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in S} \frac{P\{X_{m+n}=j, X_m=k, X_0=i\}}{P\{X_0=i\}} \cdot \frac{P\{X_m=k, X_0=i\}}{P\{X_m=k, X_0=i\}} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X_{m+n}=j|X_m=k, X_0=i\}P\{X_m=k|X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}
\end{aligned}
$$

□

3.3 Markov 链的状态分类与性质

定义 3.3.1 若存在 $n \geqslant 0$ 使得 $p_{ij}^{(n)}$，称状态 i 可达状态 $j(i,j\in S)$，记为 $i\to j$。若同时有 $j\to i$，则称 i 与 j **互通**, 记为 $i\leftrightarrow j$。

互通是一种等价关系，它具有：

(1) 自返性：$i\leftrightarrow i$;

(2) 对称性：$i\leftrightarrow j$，则 $j\leftrightarrow i$;

(3) 传递性：$i\leftrightarrow j, j\leftrightarrow k$，则 $i\leftrightarrow k$。

所以可以将两种互通状态归为一类，在同一类的状态都是互通的，而且任何一种状态不能同时属于两个不同的类。

定义 3.3.2 若 Markov 链只存在一个类，就称它是**不可约的**；否则称为**可约的**。

定义 3.3.3 若集合 $\{n: n\geqslant 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$ 非空，则称它的最大公约数 $d=d(i)$ 为状态 i 的**周期**。若 $d>1$，则称 i 是周期的；若 $d=1$，则称 i 是非周期的。此外规定，集合 $\{n: n\geqslant 1, p_{ii}^{(n)}>0\}$ 为空集时，周期为无穷大。

周期的含义不是 d 步内就能回到初始状态，而是当步数足够大时，每过 d 步都有可能回到初始状态。属于同一类的状态周期相同。

定义 3.3.4 对任何状态 i,j, 以 $f_{ij}^{(n)}$ 记从 i 出发经过 n 步后首次到达 j 的概率，则有

$$
\begin{aligned}
&f_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} \\
&f_{ij}^{(n)} = P\{X_n=j, X_k\neq j, k=1,2,\cdots,n-1|X_0=i\}, n\geqslant 1
\end{aligned}
$$

令 $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, 若 $f_{jj}=1$，则称状态 j 为**常返状态**；若 $f_{jj}<1$, 则称状态 j 为**非常返状态**。

$f_{ij}^{(n)}$ 表示首次到达的概率，所以 $f_{ij}^{(n)}\leqslant p_{ij}^{(n)}$。$f_{jj}$ 表示所有从 j 出发，经过有限步，首次回到 j，且不路经 j 的概率之和。当 i 为常返状态时，从 i 出发，在有限步内将以概率 1 返回状态 i；当 i 为非常返状态时，过程以概率 $1-f_{ii}>0$ 不再返回到 i。

定义 3.3.5 正常返状态与零常返状态 对于常返状态 i，定义

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

，表示的是由 i 出发再返回到 i 所需的平均步数 (时间)。若 $\mu_i < +\infty$, 则称 i 为**正常返状态**; 若 $\mu_i = +\infty$ 则称 i 为**零常返状态**。

要根据转移概率矩阵对状态进行分类，需要按照如下步骤：(1) 画出状态转移图；(2) 分析状态的分类与互通性；(3) 计算各个状态分类的周期；(4) 分析常返性。

定理 3.3.6 状态 i 为常返状态当且仅当 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, 为非常返时有 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$

注意到 $\frac{1}{1-f_{ii}} = \sum_{i=o}^{\infty} (f_{ii})^n$。

3.4 极限定理与平稳分布

Markov 链的某些概念——例如零常返状态和周期的定义——不够直观，其中的内涵不容易区分，造成了理解上的困难。这时需要考虑到，实际案例中考察的 Markov 链大多不知何时开始，也不知何时结束，例如某个生态系统中种群的数量变化。这时假设系统时间足够长，初始状态的影响可以忽略，是十分合理的。

考察 Markov 链大多是考虑其长期性质，这个角度对理解 markov 链的概念、分类和性质十分有用。这节内容就是考虑当步数 (时间)n 足够大时，Mrkov 链的某些性质。

定理 3.4.1 若状态 i 是周期为 d 的常返状态，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

当 $\mu_i = \infty$ 时，$\frac{d}{\mu_i} = 0$。

首先回忆一下常返状态的概念：若 $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$，则称为状态 i 为常返状态时，若 $f_{ii} < 1$，则称态 i 为非常返状态或瞬过状态。其中 $f_{ii}^{(n)}$ 为从 i 出发经过 n 步后首次达到 i 的概率, 那么 f_{ii} 就表示从 i 出发达到 i 的概率。首次达到的条件限制了, 如果某条路径重复经过状态 i，只记第一次。常返状态中 $f_{ii} = 1$，代表从 i 出发必然会回到 i，因此称为**常返**。

再回忆一下状态互通的概念：若存在 $n \geqslant 0$ 使得 $p_{ij}^{(n)}$，称状态 i 可达状态 $j(i, j \in S)$，记为 $i \to j$。若同时有 $j \to i$，则称 i 与 j 互通, 记为 $i \leftrightarrow j$。互通的状态可归为一类。状态互通意味着，在有限步内，从 i 出发可以达到 j 或从 j 出发可以达到 i。如果这时状态 i 时一个常返状态，那么状态 j 是常返状态吗？答案是肯定的，见

课本上关于常返是一个类性质的证明。

这时再看常返状态状态转移概率的极限。周期 d 的含义是所有从 i 回到 i 的路径长度的最大公约数。当步数足够大时，所有从 i 回到 i 的路径都有可能经过，且不止经过了一次，这时已经不能区分从哪条路径回到 i，但每过 d 步，都有可能回到 i，这就是取最大公约数的原因，也是周期的含义。每过 d 步都有可能回到 i，那么这个可能的概率是多少？定理3.4.1给出了。

$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}$ 即为当 n 足够大时，每经过 d 步，回到状态 i 的概率。$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 表示从 i 出发回到状态 i 的平均步数。那么经过 d 步，回到状态 i 的概率就是 $\frac{d}{\mu_i}$。

对于周期为 d 的常返状态，可以不可以说，当 n 足够大时，每步都有 $\frac{1}{\mu_i}$ 的概率回到状态 i 呢？当 $d=1$ 时，这种说法是正确的，但当周期不为 1 时，不一定每步都有可能回到状态 i，$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}$ 中的 (nd) 限制了这一点。

对于非常返状态，即 $f_{ii} < 1$，从 i 出发不一定能够回到 i。这里容易存在误解的地方是，从 i 出发，要么能够回到 i，要么不能够回到 i，所以对于非常返状态，$f_{ii} = 0$。这种误解产生的原因是，默认若 $p_{ij} > 0$，则 $p_{ji} > 0$。一般情况下，这个条件不一定能够满足，有些状态之间转移是单向的。经过这样的转移之后，无法原路径返回，也不存在其他状态之间的转移方式，再回到原来状态，这也是非常返状态也称为瞬过状态的原因。那么当 n 足够大时，$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，这由级数 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$ 有限也可以推出。

定义 3.4.2 如果所有状态相同且均是周期为 1 的正常返状态，则称 Markov 链是遍历的。对于遍历的 Markov 链，极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad j \in S$$

称为 Markov 链的**极限分布**。

极限分布就是平稳分布，且是唯一的平稳分布。

结合平稳方程的概念，需要通过解方程 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$, 或 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ 来求极限分布。需要注意的是，方程 $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ 不同于线性方程组的表示 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$，这里 $\boldsymbol{\pi}$ 是行向量，而线性方程组的解 $\mathbf{x}$ 通常用列向量表示。这里 $\boldsymbol{\pi}$ 是左乘，而不是右乘。

由于状态转移矩阵的性质 (2) $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S$，$\mathbf{P}$ 并不是列满秩的，额外限定 $\sum_{j\in S} \pi_j = 1, \forall j \in S$，即可求出 $\boldsymbol{\pi}$。

3.5 连续时间 Markov 链

连续时间 Markov 链的状态空间仍然是离散的，但是时间是连续变化的。

定义 3.5.1 过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的状态空间 S 为离散空间，通常设 S 为 $\mathbb{Z}^+$ 或其子集。若 $\forall s, t \geqslant 0$ 以及 $i, j \in S$，有

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t+s)=j|X(s)=i, X(u)=x(u), 0 \leqslant u < s\} \\
=&P\{X(t+s)=j|X(s)=j\}
\end{aligned}
$$

成立，则称 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个**连续时间 Markov 链**。

条件概率 $P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$ 记作 $p_{ij}(s,t)$, 表示过程在时刻 s 处于状态 i，经过 t 时间后转移到 j 的转移概率，$\mathbf{P}(s,t)=(p(s,t))$ 为相应的转移概率矩阵。

定义 3.5.2 若 p_{ij} 与 s 无关，则称连续时间 Markov 链是**时齐**的。简记为 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$, 相应的 $\mathbf{P}(t)=(p_{ij}(t))$。

在没有特别指出时，通常都指时齐 Markov 链。

定理 3.5.3 设 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是连续时间 Markov 链，假定在时刻 0 过程刚刚到达状态 $i (i \in S)$。记 τ_i 为过程在离开状态 i 之前在状态 i 停留的时间，则 τ_i 服从指数分布。

回忆 2.3 节与 Possion 过程相联系的分布。X_n 表示第 n 次时间与第 $n+1$ 次事件发生的间隔，则 X_n 服从参数为 λ 的指数分布且相互独立。那么 Poisson 过程是连续时间 Markov 链吗？是的。因此可以用 Poisson 过程的结论来理解连续时间 Markov 链。

定理 3.5.4 连续时间 Markov 链的转移概率 $p_{ij}(t)$ 满足：

(1) $p_{ij} \geqslant 0$;

(2) $\sum_{i \in S} p_{ij} = 1$;

(3) $p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$.

定理3.5.4(3) 通常称为连续时间 Markov 链的 C-K 方程。

定理 3.5.5 (跳跃强度) **(1)** $\lim_{t \to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = q_{ii} \leqslant \infty$;

(2) $\lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} < \infty$.

在 (1) 中，i 时间内，从状态 i 转移到另一个状态的转移概率为 $1-p_{ii}(t)$,q_{ii} 称为跳跃强度, 表示离开状态 i 的强度。在 (2) 中，$p_{ij}(t)$ 表示 t 时间内，从状态 i 转移到

状态 j 的概率,q_{ij} 则表示从状态 i 转移到状态 j 的强度 (或理解为单位时间发生的概率)。由 $1-p_{ii}(t)$ 和 $p_{ij}(t)$ 的含义可知

$$q_{ii}=\sum_{j\neq j}q_{ij}<+\infty$$

定理 3.5.6 (Kolmogorov 微分方程) $\forall i,j\in S,t\geqslant 0$ 且 $\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_{ii}<+\infty$，有

(1) 后向方程

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t)$$

(2) 在适当的正则条件下，有前向方程

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}q_{kj}p_{ik}(t)-q_{jj}p_{ij}(t)$$

下面仅解释如何理解**前向方程**: 结合对跳跃强度3.5.5的理解，$q_{kj}p_{ik}(t)$ 是 (从状态 i 转移到状态 j 的概率) 乘以 (从状态 k 转移到状态 j 的强度), 它表示从状态 i 通过状态 $k(k\neq j)$ 再转移到状态 j 的强度。求和 $\sum_{k\neq j}q_{kj}p_{ik}(t)$ 表示从所有其他状态转移到状态 j 的强度之和，即表示状态 j **增加**的强度。$q_{jj}p_{ij}(t)$ 是转移离开状态 j 的强度乘以从状态 i 转移到状态 j 的概率，表示从状态 i 转移到状态 j 再转移离开状态 j 的强度。那么 $q_{kj}p_{ik}(t)-q_{jj}p_{ij}(t)$ 就表示从状态 i 转移到状态 j 的强度，即 $p'_{ij}(t)$。

关于为何，从状态 i 转移到状态 j 再转移离开状态 j 的强度，是从状态 i 转移到状态 j 的概率乘以转移离开状态 j 的强度，而不是转移离开状态 i 的强度乘以从状态 i 转移到状态 j 的概率。因为这个方程称为**前向方程**，而不是**后向方程**。后向方程的含义可以对照理解。

练习: 利用定理3.5.6, 证明由 Poisson 的第二个定义2.2.2可以推出第一个定义2.2.1.

习题

1. 有 6 个车站，车站中间的公路连接情况如图 1 所示。汽车每天可以从一个站驶向与之直接相邻的车站，并在夜晚达到车站留宿，次日凌晨重复相同的活动。设每天凌晨汽车开往临近的任何车站都是等可能的，试说明很长时间后，各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定。求出这个比例以便正确地设置各站的服务规模。

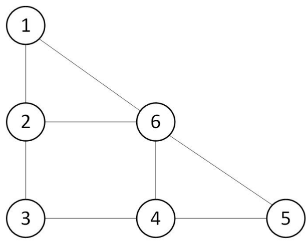


图 3.1: 车站之间公路连接情况

2. 考察某一系统运作情况（如机器运转）。如果运作正常，则认为系统处于状态 1；如果系统正在调整（例如机器维修，计算机杀毒等），则认为系统处于状态 0。系统运作一段时间后，会遇到不能正常运作的情况，此时系统需要调整。调整后又恢复运作。假定系统从开始运作直到需要调整的运作时间是随机的，服从参数为 μ 的指数分布，密度函数为 $\mu e^{-\mu t}, t > 0$。而调整期也是随机的，服从参数为 λ 的指数分布，密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t}, t > 0$。假定运作周期是相互独立的，调整期也是相互独立的。如果令 $X(t)$ 为系统在时刻 t 所处的状态，则由于在时刻 t 以后，系统所处的状态仅与在时刻 t 及其以后的剩余运作时间或剩余调整时间有关。利用指数分布的无记忆性知道，$X(t)$ 是时齐 Markov 链。利用 Kolmogorov 方程求出此 Markov 链的转移概率。

3. 设今日有雨，则明日也有与的概率为 0.7，今日无雨，明日有雨的概率为 0.5。求星期一有雨，星期三也有雨的概率。

4. 某人有 r 把伞用于上下班，如果一天的开始他在家（一天的结束他在办公室）中而且天下雨，只要有伞可取到，他将拿一把到办公室（家）中。如果天不下雨，那么他不带伞，假设每天的开始（结束）下雨的概率为 p，且与过去情况独立。

(1) 定义一个有 $r+1$ 个状态的 Markov 链并确定转移概率；

(2) 计算极限分布；

(3) 他被淋湿的平均次数所占比率是多少?（如果天下雨而全部伞在另一处，那么称他被淋湿）。

5. 若 $f_{ii}<1, f_{jj}<1$，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < +\infty$$

$$f_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}$$

6. 考虑有两个状态的连续时间 Markov 链，状态为 0 和 1，链在离开 0 到达 1 之前在状态 0 停留的时间服从参数为 λ 的指数分布，相应地在 1 停留的时间是参数为 μ 的指数变量。对此建立 Markov 微分方程，并求其解。

7. 设有一质点在 1,2,3 上做随机跳跃，在时刻 t 它位于三点之一，且在 $[t, t+h]$ 内以概率 $\frac{1}{2}+o(h)$ 分别可以跳到其他两个状态。试求状态概率满足的 Kolmogorov 方程。

第四章 鞅

◇ 鞅的定义.
◇ 停时定理.

定义 4.0.1 如果 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是一个 $\mathscr{F}$ 中的单调递增的子 σ 代数流。随机过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 称为关于 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 的**鞅**，如果 $\{X_n\}$ 是 $\{\mathscr{F}_n\}$ 适应的，$E(|X_n|) < \infty$，并且 $\forall n \geqslant 0$，有

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$$

适应列 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 称为**下鞅**，如果 $\forall n \geqslant 0$，有

$$E(X_n^+) < \infty, \quad E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) \geqslant X_n$$

上鞅可类似定义。

σ 代数的概念是在提出概率空间时引入的，它是样本空间的某些子集组成的集合组。它表示这些子集可以被我们所度量，比如我们关心事件 A 发生的概率，我们也会去关系事件 A 不发生的概率，如果还有一个事件 B，我们也会关心事件 A 和事件 B 同时发生的概率，等等。σ 代数就是所有这些事件的组合的集合，这些事件的组合应当也是样本空间的子集。严格意义上，σ 代数要满足补集运算和可数个并集运算的封闭性。

σ 域流表示随时间演化的信息流，随机变量随着时间的增加产生更多的信息。σ 域流需要满足信息随时间只增不减，以及 σ 代数的可测性。

不懂这些数学概念并不影响做题，因为通常情况下，σ 代数流的要求都可以满足。

但是需要知道，**鞅**是定义在一种规则 (或信息) 下的，在这个规则 (或信息) 下，随机过程的条件期望满足一些性质，离开了这个规则 (或信息)，鞅的定义便不存在。在鞅的定义中，条件期望所满足的条件，是用来描述这种规则 (或信息) 的。

定理 4.0.2 (停时定理) 设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一个随机变量序列，称随机函数 T 是关于 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的**停时**，如果 T 在 $\mathbb{Z}^+$ 中取值，且对每个 $n \geqslant 0, \{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$。

如果 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)\}$ 的鞅，T 是停时且满足

(1) $P\{T < \infty\}$,

(2) $E(|M_T|) < +\infty$,

(3) $\lim_{n\to\infty} E(|M_n| I_{\{T>n\}}) = 0$

则有

$$E(M_T) = E(M_0)$$

由定义可以发现 $\{T = n\}$ 或 $\{T \neq n\}$ 都应当由 n 时刻及其之前的信息完全确定，而不需要也无法借助将来的情况。借助赌博的例子，赌博者何时决定停止赌博只能以他已经赌过的结果为依据，而不能说，如果下一次要输，我现在就停止赌博，这时对停止时刻 T 的第一个要求：它必须是一个停时。

习题

1. 设 $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots$ 是一系列独立随机变量且 $E|Y_n| < +\infty, EY_n = 0$。令 $X_n = \sum_{i=0}^n Y_i, n = 0, 1, 2, \cdots, \mathscr{F}_n = \sigma\{Y_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$, 则 $\{X_n, \mathscr{F}_n\}$ 是一个鞅。

2. 设 $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 如上题假定, 另外设 $EY_n^2 = \sigma^2, n = 1, 2, \ldots,$ 令 $Z_0, Z_n = \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 - n\sigma^2$，那么 $\{Z_n, \mathscr{F}_n\}$ 是一个鞅。

3. 令 $X_0, X_1, \cdots$ 表示分支过程各代的个体数，$X_0 = 1$，任意一个个体生育后代的分布有均值 μ。证明 $\{M_n = \mu^{-n} X_n\}$ 是一个关于 $X_0, X_1, \cdots$ 的鞅。

4. 考虑一个在整数上的随机游动模型，设向右移动的概率 $p < \frac{1}{2}$, 向左移动的概率为 $1-p, S_n$ 表示时刻 n 所处的位置，假定 $S_0 = a, 0 < a < N$。

(1) 证明：$\{M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\}$ 是鞅；

(2) 令 T 表示随机游动第一次到达 0 或 N 的时刻，即

$$T = \min\{n : S_n = 0 or N\}$$

利用鞅停时定理，求出 $P\{S_T = 0\}$。

第五章 Brown 运动

- ◇ Brown 运动的定义.
- ◇ 正态增量、独立增量和路径连续性.
- ◇ Gauss 过程的特点.

定义 5.0.1 随机过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 如果满足:

(1) $X(0) = 0$;

(2) $\{X(t), t \geqslant 0\}$;

(3) 对每个 $t > 0, X(t)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2 t)$。

则称 $X(t), t \geqslant 0$ 为 **Brown 运动**, 也称为 **Wiener 过程**, 记为 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 或 $\{W(t), t \geqslant 0\}$。

Brown 运动 $\{B(t), t, \geqslant 0\}$ 具有以下性质:

(1)（正态增量过程）$\forall 0 \leqslant s < t, B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$，即 $\{B(t) - B(s)\}$ 服从均值为 0，方差为 $t-s$ 的正态分布。当 $s = 0$ 时，$B(t) - B(0) \sim N(0, t)$。

(1)（独立增量）$\forall 0 \leqslant s < t, B(t) - B(s)$ 独立于过程过去的状态 $B(u), 0 \leqslant u < s$。

(1)（路径的连续性）$\{B(t)(t \geqslant 0)\}$ 是 t 的连续函数。

不失一般性，假设 $B(0) = 0$。

定义 5.0.2 Brown 运动的**二次变差**$[B,B](t)$ 定义为当 $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ 取遍 $[0,t]$ 的分割，且其模 $\delta_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{t_{i+1}^n-t_i^n\}\to 0$ 时，依概率收敛意义下的极限

$$[B,B](t)=[B,B]([0,t])=\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)|^2$$

类似的，一次变差的定义为 $\lim\limits_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)|$。

从时刻 0 到时刻 t 对 Brown 运动的一次观察称为 Brown 运动在区间 [0,T] 上的一个路径或一个实现。Brown 运动的几乎所有样本路径 $B(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 都具有下述性质:

(1) 是 t 的连续函数;

(2) 在任意区间 (无论区间多么小) 上都不是单调的;

(3) 在任意点都不是可微的;

(4) 在任意区间 (无论区间多么小) 上都是无限变差的 (一次变差);

(5) 对任意 t, 在区间 $[0,t]$ 上的二次变差等于 t。

对任意过程，如果一次变差是有限值，那么二次变差一定是 0。对于 Brown 运动，二次变差是有限值，一次变差是无穷大。

定理 5.0.3 (多元正态分布的性质) 设 $X\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ 是相互独立的，则 $(X+Y)\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$。其中均值 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_1+mu_2)'$，协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1^2\\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2+\sigma_2^2\end{pmatrix}$。

定理 5.0.4 (Brown 运动是 Gauss 过程) Brown 运动是均值函数为 $m(t)=0$、协方差函数为 $\gamma(s,t)=\min\{t,s\}$ 的 Gauss 过程。

习题

1. 设 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动, 计算 $P\{B(2) \leqslant 0\}$ 和 $P\{B(t), \leqslant 0, t = 0, 1, 2\}$。

2. 设 $\{B(t)\}$ 是 Brown 运动，求 $B(1) + B(2) + B(3) + B(4)$ 的分布。

3. 求 $B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1)$ 的分布.

4. 求概率 $P\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\}$

第六章 随机积分

- ◇ Itô 积分.
- ◇ Itô 公式和 Itô 引理.
- ◇ 简单微分方程的解法.

定义 6.0.1 设 $f \in V(0,T)$，则 f 的 **Itô 积分**定义为:

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t(w) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega)$$

这里 $\{\phi_n\}$ 是初等随机过程的序列，使得当 $n \to \infty$ 时，有

$$E\left\{\int_0^T [f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega)]^2 dt\right\} \to 0$$

定义 6.0.2 假设对任意实数 $T > 0, X \in V^*$，那么 $\forall t \leqslant T$, 积分 $\int_0^t X(s)dB(s)$ 是适定的。因为对任意固定的 $t, \int_0^t X(s)dB(s)$ 是一个随机变量，所以作为上限 t 的函数，它定义了一个随机过程 $\{Y(t)\}$，称为 **Itô 积分过程**，其中

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$$

可以证明，Itô 积分过程存在连续的样本路径。

定理 6.0.3 (Itô 公式) 设 g 是有界连续函数,$\{t_i^n\}$ 是 $[0,t]$ 的分割,则 $\forall \theta_i^n \in (B(t_i^n), B(t_{i+1}^n))$,依概率收敛意义下的极限

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)[B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]^2 = \int_0^t g[B(s)]ds$$

定理 6.0.4 (Brown 运动的 Itô 公式) 如果 f 是二次连续可微函数,则对任意 t,有

$$f[B(t)] = f(0) + \int_0^t f'[B(s)]dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''[B(s)]ds$$

定义 6.0.5 (Itô 过程 (积分形式)) 如果过程 $\{Y(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 可以表示为:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

其中过程 $\{\mu(t)\}$ 和 $\{\sigma(t)\}$ 满足

(1) $\mu(t)$ 是适应的并且 $\int_0^T |\mu(t)|dt < \infty, a.s.$;

(2) $\sigma(t) \in V^*$.

则称 $\{Y(t)\}$ 为 **Itô 过程**.

有时也将 Itô 过程记为微分形式:

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad 0 \leqslant y \leqslant T$$

式中,函数 $\mu(t)$ 称为漂移系数,$\sigma(t)$ 称为扩散系数。

定理 6.0.6 (Itô 过程的 Itô 公式) 设 $\{X(t)\}$ 是由

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$$

给出的 Itô 过程,$g(t,x)$ 是 $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上的二次连续可微函数,则

$$\{Y(t) = g[t, X(t)]\}$$

仍为 Itô 过程,并且

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}[t, X(t)]dt + \frac{\partial g}{\partial x}[t, X(t)]dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}[t, X(t)][dX(t)]^2$$

可以简化为:

$$dY(t)dt = \{g'[X(t)]\mu(t) + \frac{1}{2}g''[X(t)]\sigma^2(t)\}dt + g'[X(t)]\sigma(t)dB(t)$$

习题

1. 求 $d(e^{B(t)})$

2. 求解 Ornstein-Uhlenbeck 方程

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t$$

。其中 μ, σ 为常数。

3. 考虑群体增长模型

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t$$

其中 N_0 已知，$a_t = r_t + \alpha B_t$，r_t 为增长率，假设为常数 r，α 为常数，B_t 为 Brown 运动。可以将其化为随机微分方程的形式

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t$$

这种类型的方程被称为集合随机微分方程，试求解它。

4. 设 $X(t)$ 具有随机微分形式

$$dX(t) = (bX(t) + c)dt + 2\sqrt{X(t)}dB(t)$$

并假定 $X(t) \geqslant 0$，试找出过程 $\{Y(t) = \sqrt{X(t)}\}$ 的随机微分形式。

5. 利用 Itô 公式证明

$$\int_0^t B^2(s)ds = \frac{1}{3}B^3(t) - \int_0^t B(s)ds$$

6. 设 $\{X(t), Y(t)\}$ 是 Itô 过程, 试证

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t) \cdot dY(t)$$

由此导出下面的分部积分公式

$$\int_0^t X(s)dY(s) = X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_0^t Y(s)dX(s) - \int_0^t dX(s) \cdot dY(s)$$

第七章 习题答案

7.1 随机变量

1. 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一、二阶矩存在的随机过程。试证明它是宽平稳的当且仅当 $E(X(s))$ 与 $E(X(s)X(s+t))$ 都不依赖于 s。

   充分性: $\gamma(t,s) = E(X(s)X(t+s)) - E(X(s))E(X(s+t))$, 由于 $\forall t, s \in T, E(X(s))$ 和 $E(X(s+t))$ 均不依赖于 s, 所以均值函数为定值，记为 μ_X，则 $\gamma(t,s) = E(X(s)X(t+s)) - \mu_X^2$ 仅与时间差 $t = t+s-s$ 有关，所以 $\{X(t), t \in T\}$ 为宽平稳过程。

   必要性: $\gamma(t,s) = E(X(s)X(t+s)) - E(X(s))E(X(s+t))$ 仅与时间差 $t+s-s = t$ 有关。由宽平稳过程可知，均值函数为定值，记为 μ_X，$E(X(s+t)) = E(X(s)) = \mu_X$，即 $E(X(s))$ 不依赖于 s。$E(X(s)X(t+s)) = E(X(s))E(X(s+t)) + \gamma(t,s) = \mu_X^2 + \gamma(t,s)$ 仅与时间差 t 有关，不依赖于 s。

2. 若 $Z_0, Z_1, \cdots$ 为独立同分布随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，则 $X_n, n \geqslant 0$ 是独立增量过程。

   由于 $Z_0, Z_1, \cdots$ 独立同分布，所以 $\{X_n - X_{n-1} = Z_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 相互独立，即 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为独立增量过程。

3. 设 Z_1, Z_2 是独立同分布的随机变量，服从均值为 0，方差为 σ^2 的正态分布，λ 为实数。求过程 $\{X(t), t \in T\}$，其中 $X(t) = Z_1 \cos\lambda t + Z_2 \sin\lambda t$ 的均值函数和方差函数。它是宽平稳的吗?

   由于 $E(Z_1) = E(Z_2) = 0, E(X(t)) = E(Z_1)\cos\lambda t + E(Z_2)\sin\lambda t = 0$。

由于 $Var(Z_1) = Var(Z_2) = \sigma^2$,

$$
\begin{aligned}
Var(X(t)) &= Var(Z_1)\cos^2\lambda t + Var(Z_2)\sin^2\lambda t \\
&= \sigma^2(\cos^2\lambda t + \sin^2\lambda t) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

由于 Z_1, Z_2 是独立的，所以 $E(Z_1Z_2) = E(Z_1)E(Z_2) = 0$。

$$
\begin{aligned}
\gamma(t,s) &= E(X(t)X(s)) - E(X(t))E(X(s)) \\
&= E\left[(Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t)(Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s)\right] \\
&= E[Z_1^2\cos\lambda t\cos\lambda s + Z_2^2\sin\lambda t\sin\lambda s \\
&\qquad + Z_1Z_2(\cos\lambda t\sin\lambda s + \cos\lambda s\sin\lambda t)] \\
&= E(Z_1^2)\cos\lambda t\cos\lambda s + E(Z_2^2)\sin\lambda t\sin\lambda s \\
&\qquad + E(Z_1Z_2)(\cos\lambda t\sin\lambda s + \cos\lambda s\sin\lambda t) \\
&= \sigma^2(\cos\lambda t\cos\lambda s + \sin\lambda t\sin\lambda s) \\
&= \sigma^2\cos\lambda(t-s)
\end{aligned}
$$

仅与时间差 $t-s$ 有关，并且 $E(X(t)) = 0$ 为定值，$\{X(t)\}$ 的一二阶矩已知，所以 $\{X(t), t\in T\}$ 是宽平稳过程。

7.2 Poisson 过程

Poisson 过程定义 1:
计数过程 $N(t), t\geqslant 0$ 则称为参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 **Possion 过程**，如果

(1) $N(0)=0$

(2) 过程具有独立增量

(3) 在任意长度为 t 的时间区间中事件发生次数服从均值为 λt 的 Poission 分布，即对一切 $s\geqslant 0, t>0$，有

$$
P\{N(t+s)-N(s)=n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots
$$

Poisson 过程定义 2:
设 $N(t), t\geqslant 0$ 是一个计数过程，它满足

$(1)'$ {N(0)=0};

(2)′ 过程具有平稳独立增量

(3)′ 存在 $\lambda>0$，当 $h\downarrow 0$ 时，有

$$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h+o(h)$$

(4)′ 当 $h\downarrow 0$ 时，有

$$P\{N(t+h)-N(t)\geqslant 2\}=o(h)$$

则 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的 **Possion 过程**。

1. 证明以上两种 Poisson 过程的定义等价。

   1) 首先证明定义 1 可以推得定义 2:

   - ◇ (1)′ 显然满足。
   - ◇ 根据 (3) 中概率分布 $P\{N(t+s)-N(t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 与 s 无关，所以 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是平稳增量过程，结合 (2) 可知 (2)′。
   - ◇ 当 $h\to 0^+$ 时，$P\{N(t+h)-N(t)=1\}=e^{-\lambda h}\lambda h=(1-\lambda h+o(h))\lambda h=\lambda h+o(h)$。
   - ◇ 当 $h\to 0^+$ 时，$P\{N(t+h)-N(t)\geqslant 2\}=\sum_{n=2}^{+\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!}=(1-\lambda h+o(h))o(h)=o(h)$。

   2) 其次证明定义 2 可以推得定义 1:

   - ◇ (1),(2) 显然满足。
   - ◇ 首先求 $P\{N(t)\}=0$:

$$\begin{aligned}
&P\{N(t+h)=0\}\\
=&P\{N(t)=0,N(t+h)-N(t)=0\}\\
=&P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}\\
=&P\{N(t)=0\}\\
&\quad(1-P\{N(t+h)-N(t)=1\}-P\{N(t+h)-N(t)\geqslant 2\})\\
=&P\{N(t)=0\}(1-\lambda t+o(h))
\end{aligned}$$

     整理得到

$$\frac{P\{N(t+h)=0\}-P\{N(t)=0\}}{h}=-\lambda P\{N(t)=0\}+o(h)$$

令 $h \to 0^+$,

$$P'\{N(t)=0\} = -\lambda P\{N(t)=0\}$$

解得 $P\{N(t)=0\} = Ce^{-\lambda t}$, 由 $P\{N(0)=0\}$ 得到 $P\{N(t)=0\} = e^{-\lambda t}$。

◇ 然后利用 $(3)'$ 和 $(4)'$ 得到 $P\{N(t)=n\}$ 和 $P\{N(t)=n-1\}$ 的递推关系 (微分方程)。

$$\begin{aligned}
&P\{N(t+h)=n\} \\
=&P\{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\} \\
&\quad + P\{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\} + o(h) \\
=&P\{N(t)=n-1\}(\lambda h + o(h)) \\
&\quad + P\{N(t)=n\}(1-\lambda h + o(h)) + o(h) \\
=&P\{N(t)=n-1\}\lambda h + P\{N(t)=n\}(1-\lambda h) + o(h)
\end{aligned}$$

整理得到

$$\frac{P\{N(t+h)=n\} - P\{N(t)=n\}}{h} = -\lambda(P\{N(t)=n\} - P\{N(t)=n-1\})$$

令 $h \to 0^+$

$$\frac{d}{dt}P\{N(t)=n\} = -\lambda P\{N(t)=n\} + \lambda P\{N(t)=n\}$$

等价于

$$\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}P\{N(t)=n\} = e^{\lambda t}P\{N(t)=n-1\}\}$$

◇ 结合 $(2)'$ 平稳独立增量的条件，利用数学归纳法得到 (3):
当 $n=0$ 时，有

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}P\{N(t)=1\}\} = e^{\lambda t}P\{N(t)=0\} = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = \lambda \\
P\{N(0)=1\} = 0
\end{cases}$$

$$\Rightarrow P\{N(t)=1\} = \lambda t e^{-\lambda t}$$

假设 $P\{N(t)=n-1\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{e^{-\lambda t}P\{N(t)=n\}\} &= \lambda e^{\lambda t}P\{N(t)=n-1\} \\
&= \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} \\
&= \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

由 $e^{\lambda t}P\{N(t)=n\}|_{t=0}=0$, 得到 $e^{\lambda t}P\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}$,$P\{N(t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$,所以 $P\{N(t)=n\}=P\{N(t+0)-N(t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

2. 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数 $\lambda=3$ 的 Poisson 过程。试求

1) $P\{N(1)\leqslant 3\}$;

1) $P\{N(1)=1,N(3)=2\}$;

1) $P\{N(1)\geqslant 2|N(1)\geqslant 1\}$。

1)

$$
\begin{aligned}
P\{N(1)\leqslant 3\} &= P\{N(1)=0\}+P\{N(1)=1\}+P\{N(1)=2\}+P\{N(1)=3\} \\
&= e^{-\lambda}(1+\lambda+\lambda^2/2!+\lambda^3/3!) \\
&= 13e^{-3}
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
P\{N(t)=1,N(3)=2\} &= P\{N(1)=1,N(3)-N(1)=1\} \\
&= P\{N(1)=1\}P\{N(3)-N(1)=1\} \\
&= P\{N(1)=1\}P\{N(2)=1\} \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{-2\lambda}2\lambda \\
&= 2\lambda^2e^{-3\lambda} \\
&= 18e^{-9}
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
P\{N(1)\geqslant 2|N(1)\geqslant 1\} &= \frac{P\{N(1)\geqslant 2,N(1)\geqslant 1\}}{P\{N(1)\geqslant 1\}} \\
&= \frac{P\{N(1)\geqslant 2\}}{P\{N(1)\geqslant 1\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 - P\{N(1) \leqslant 1\}}{1 - P\{N(1) = 0\}} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \\
&= \frac{1 - 4e^{-3}}{1 - e^{-3}}
\end{aligned}
$$

3. 对于 Poisson 过程 $\{N(t)\}$，证明当 $s < t$ 时,

$$
P\{N(s) = k | N(t) = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n
$$

$$
\begin{aligned}
P\{N(s) = k | N(t) = n\} &= \frac{P\{N(s) = k, N(t) = n\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{P\{N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{P\{N(s) = k\} P\{N(t) - N(s) = n - k\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{P\{N(s) = k\} P\{N(t - s) = n - k\}}{P\{N(t) = n\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}} \cdot \frac{\lambda^k \lambda^{n-k}}{\lambda^n} \cdot \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \left(\frac{s}{t}\right)^k
\end{aligned}
$$

4. 设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别是参数为 λ_1, λ_2 的 Poisson 过程，令 $X(t) = N_1(t) - N_2(t)$, 问 $\{X(t)\}$ 是否为 Poisson 过程，为什么?

由于 $N_1(t) \sim Poisson(\lambda_1 t), N_2(t) \sim Poissin(\lambda_2 t)$。

方法一:

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[N_1(t)] - E[N_2(t)] = (\lambda_1 - \lambda_2)t \\
Var[X(t)] &= Var[N_1(t)] + Var[N_2(t)] = (\lambda_1 + \lambda_2)t
\end{aligned}
$$

由于 $E[X(t)] \neq Var[X(t)]$, 所以 $X(t)$ 不服从 Poisson 分布, $\{X(t)\}$ 不是 Poisson 过程。

方法二：

由 $N_1(t) \sim Poisson(\lambda_1 t)$ 知 $P\{N_1(t)=n\} = e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!}$, 对应的特征函数为

$$\begin{aligned}
\psi_{N_1}(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{irn} P\{N_1(t)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{irn} e^{(-\lambda_1 t)} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\lambda_1 t)} \frac{(e^{ir}\lambda_1 t)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda_1 t e^{ir}} e^{-\lambda_1 t} \\
&= e^{(e^{ir}-1)\lambda_1 t}
\end{aligned}$$

同理可以得到 $\psi_{N_2}(r) = e^{(e^{ir}-1)\lambda_2 t}$,$\psi_{-N_2}(r) = \psi_{N_2}(-r) = e^{(e^{-ir}-1)\lambda_2 t}$, 所以

$$\begin{aligned}
\psi_X(r) &= \psi_{N_1}(r)\psi_{-N_2}(r) \\
&= e^{(e^{ir}-1)\lambda_1 t} e^{(e^{-ir}-1)\lambda_2 t} \\
&= \exp\left[e^{ir}\lambda_1 t + e^{-ir}\lambda_2 t - (\lambda_1+\lambda_2)t\right]
\end{aligned}$$

由特征函数的唯一性定理知 $X(t)$ 不服从 Poisson 分布，$\{X(t)\}$ 不是 Poisson 过程。

7.3 Markov 链

1. 有 6 个车站，车站中间的公路连接情况如图1所示。汽车每天可以从一个站驶向与之直接相邻的车站，并在夜晚达到车站留宿，次日凌晨重复相同的活动。设每天凌晨汽车开往临近的任何车站都是等可能的，试说明很长时间后，各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定。求出这个比例以便正确地设置各站的服务规模。

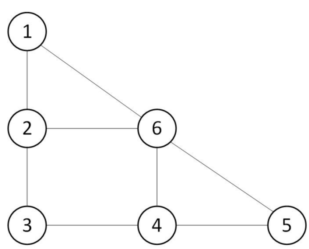


图 7.1: 车站之间公路连接情况

记 X_n 为第 n 天某辆汽车留宿的车站号。由于每天凌晨汽车开往临近的任何车站都是等可能的，所以 $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ 是一个时齐 Markov 链。记 $p_{ij}^{(n)}$ 为第 n 天汽车从 i 站开往 j 站的概率，则状态转移矩阵可以写为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\pi}=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6\end{pmatrix}$ 为平稳概率分布。

方法一： 解方程 $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}=\boldsymbol{\pi}$:

$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P}=\boldsymbol{\pi} \Rightarrow \mathbf{P}^T\boldsymbol{\pi}^T=\boldsymbol{\pi}^T \Rightarrow (\mathbf{P}^T-\mathbf{I})\boldsymbol{\pi}^T=\mathbf{0}$。

其中 $(\mathbf{P}^T-\mathbf{I})$ 的前五行记为 $\mathbf{A}$, 可以写为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

对 $\mathbf{A}$ 进行初等行变换:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/2*r_1+r_2\to r_2}\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \\ & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/5*r_2+r_3\to r_3}\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -4/5 & 1/3 & 0 & 3/20 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{8*(5/8*r_3+r_4)\to r_4}\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -4/5 & 1/3 & 0 & 3/20 \\ 0 & 0 & 0 & -19/3 & 4 & 11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{19/15*(1/19*r_4+r_5)\to r_5}\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & -4/5 & 1/3 & 0 & 3/20 \\ 0 & 0 & 0 & -19/3 & 4 & 11/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/19*(4*r_4+r_3)\to r_3}\begin{pmatrix}-1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 3/4\\ 0 & 0 & -4/5 & 1/3 & 0 & 3/20\\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/2*r_5+r_4\to r_4}\begin{pmatrix} & & \cdots & & & \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & -4/5 & 1/3 & 0 & 3/20\\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5/2*(r_4+r_3)\to r_3}\begin{pmatrix} & & \cdots & & & \\ 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 3/4\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1/5*(1/2*r_3+r_2)\to r_2}\begin{pmatrix}-1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1\to r_1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

得到 $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & 1/2 & 3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \pi_6$, 再结合 $\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$，得到 $\pi_6 = 1/4$，所以 $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/16 & 1/8 & 3/16 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$。

方法二： 由于每天凌晨汽车开往临近的任何车站都是等可能的，概率只与公路拓扑有关。观察图1, 发现 1 车站与 5 车站对称，2 车站与 4 车站对称, 因此 $\pi_1 = \pi_5, \pi_2 = \pi_4$,$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ 可以简化为 $\mathbf{B}\boldsymbol{\pi}'^T = \mathbf{0}$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_6 \end{pmatrix}$$

简化以后的方程很容易计算得到 $\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \pi_6$,

所以 $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 & 1/2 & 3/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \pi_6$, 再结合 $\sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$，得到 $\pi_6 = 1/4$，所以 $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/16 & 1/8 & 3/16 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$。

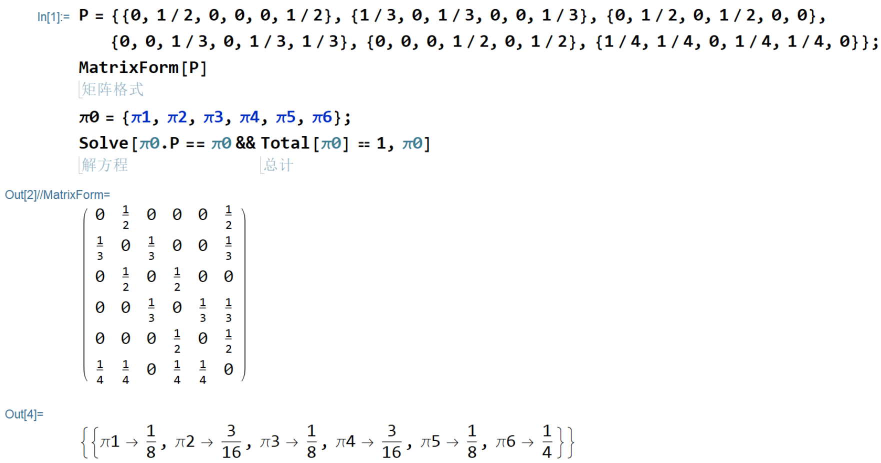


图 7.2: 利用 Mathematica 软件验证计算结果

2. 考察某一系统运作情况（如机器运转）。如果运作正常，则认为系统处于状态 1；如果系统正在调整（例如机器维修，计算机杀毒等），则认为系统处于状态 0。系统运作一段时间后，会遇到不能正常运作的情况，此时系统需要调整。调整后又恢复运作。假定系统从开始运作直到需要调整的运作时间是随机的，服从参数为 μ 的指数分布，密度函数为 $\mu e^{-\mu t}, t > 0$。而调整期也是随机的，服从参数为 λ 的指数分布，密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t}, t > 0$。假定运作周期是相互独立的，调整期也是相互独立的。如果令 $X(t)$ 为系统在时刻 t 所处的状态，则由于在时刻 t 以后，系统所处的状态仅与在时刻 t 及其以后的剩余运作时间或剩余调整时间有关。利用指数分布的无记忆性知道，$X(t)$ 是时齐 Markov 链。利用 Kolmogorov 方程求出此 Markov 链的转移概率。

$$
\begin{aligned}
p_{01}(\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\
q_{01} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{01}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda \\
p_{00}(\Delta t) &= 1 - p_{01}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\
q_{00} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{01}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda
\end{aligned}
$$

同理可得 $q_{10} = \mu, q_{11} = \mu$

$$
p'_{00}(t) = -q_{00} p_{00}(t) + q_{10} p_{01}(t)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t) \\
&= -\lambda p_{00}(t) + \mu(1 - p_{00}(t)) \\
&= -(\lambda + \mu) p_{00}(t) + \mu
\end{aligned}
$$

结合 $p_{00}(0) = 1$，解得 $p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$

$$
\begin{aligned}
p'_{11} &= q_{01} p_{10}(t) - q_{11} p_{11}(t) \\
&= \lambda(1 - p_{11}(t)) - \mu p_{11}(t) \\
&= -(\lambda + \mu) p_{00}(t) + \lambda
\end{aligned}
$$

结合 $p_{11}(0) = 1$，解得 $p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$。

3. 设今日有雨，则明日也有雨的概率为 0.7，今日无雨，明日有雨的概率为 0.5。求星期一有雨，星期三也有雨的概率。

   记有雨的状态为 1，无雨的状态为 0。则一步状态转移矩阵为

$$
\mathbf{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}
$$

   则两步转移矩阵为

$$
\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix}
$$

   所以 $P\{$ 星期一有雨，星期三也有雨 $\} = p_{11}^{(2)} = 0.64$。

4. 某人有 r 把伞用于上下班，如果一天的开始他在家（一天的结束他在办公室）中而且天下雨，只要有伞可取到，他将拿一把到办公室（家）中。如果天不下雨，那么他不带伞，假设每天的开始（结束）下雨的概率为 p，不下雨的概率为 q，且与过去情况独立。

   (1) 定义一个有 $r+1$ 个状态的 Markov 链并确定转移概率；

   (1) 计算极限分布；

   (1) 他被淋湿的平均次数所占比率是多少？（如果天下雨而全部伞在另一处，那么称他被淋湿）。

   解答：

(1) 以 X_n 表示第 n 天此人身边的雨伞数，则 $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ 构成一个状态空间为 $\{0,1,2,\cdots,r\}$ 的时齐 Markov 链。

若此人没身边没有伞，所有的 r 把伞都在另一个地方，无论是否下雨，他都不会带伞到另一个地方，所以 $p_{0,r}^{(1)}=1$; 若此人身边有 i 把伞 $0<i\leqslant r$, 若不下雨，他不会带伞到另一个地方，所以 $p_{i,r-i}^{(1)}=q$，若下雨，他会带一把伞到另一个地方，所以 $p_{i,r-i+1}^{(1)}=p$。

(2) 根据 (1)，得到一步状态转移矩阵为

$$\mathbf{P}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & q & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

平稳方程为

$$\begin{cases} \pi_0=\pi_r q \\ \pi_j=\pi_{r-j}p+\pi_{r-j+1}q, \quad j=1,2,\ldots,r-1 \\ \pi_r=\pi_0+\pi_1 p \end{cases}$$

规范性条件为 $\sum_{i=0}^{r}\pi_i=1$。

注意到状态 $j=1,2,\ldots,r-1$ 的转移规律相同，所以其极限概率 $\pi_j(j=1,2,\ldots,r-1)$ 相等。所以有 $\pi_0=\pi_r q, \pi_0+r\pi_r=1$。解得

$$\pi_0=\frac{q}{r+q}$$
$$\pi_j=\frac{1}{r+q}, \quad j=1,2,\ldots,r$$

(3) P{此人被淋湿}=P{此人身边雨伞数为 0，下雨}=P{此人身边雨伞数为 0}·P{下雨}= $\pi_0 p=\frac{pq}{r+q}$。

5. 若 $f_{ii}<1, f_{jj}<1$，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < +\infty$$

$$f_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}}{1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}$$

由 $f_{ii}<1, f_{jj}<1$ 知,状态 i,j 都为非常返状态,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$,$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{jj}}$。根据转移概率的首达分解定理:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \sum_{n=l}^{\infty} p_{jj}^{(n-l)} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \sum_{m=0}^{\infty} p_{jj}^{(m)} \\
&= f_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} p_{jj}^{(m)} \\
&= f_{ij} + f_{ij} \sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}^{(m)}
\end{aligned}$$

整理得到 $f_{ij} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}}{1-\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}}$。

6. 考虑有两个状态的连续时间 Markov 链，状态为 0 和 1，链在离开 0 到达 1 之前在状态 0 停留的时间服从参数为 λ 的指数分布，相应地在 1 停留的时间是参数为 μ 的指数变量。对此建立 Markov 微分方程，并求其解。

同第 (2) 题

7. 设有一质点在 1,2,3 上做随机跳跃，在时刻 t 它位于三点之一，且在 $[t, t+h]$ 内以概率 $\frac{1}{2}+o(h)$ 分别可以跳到其他两个状态。试求状态概率满足的 Kolmogorov 方程。

记 X 为质点所处状态,$P\{x(t+h)=2|X(t)=1\} = P\{x(t+h)=3|X(t)=1\} =$

$\frac{h}{2}+o(h)$,$P\{x(t+h)=1|X(t)=1\}=1-h+0(h)$, 可以求得

$$\begin{aligned} q_{21}=q_{31}&=\lim_{h\to 0}\frac{p_{i1}(t)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}+o(h)}{h}\\ &=\frac{1}{2}\\ q_{11}&=\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{11}(h)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1-(1-h+o(h))}{h}\\ &=1 \end{aligned}$$

利用 Kolmogorov 前向方程:

$$\begin{aligned} p_{12}'(t)&=q_{32}p_{13}(t)+q_{12}p_{11}(t)-q_{22}p_{12}(t)\\ &=\frac{1}{2}p_{13}(t)+\frac{1}{2}p_{11}(t)-p_{12}(t)\\ &=\frac{1}{2}(1-p_{12}(t))-p_{12}(t)\\ &=-\frac{3}{2}p_{12}(t)+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

结合 $p_{12}(0)=0$ 解得，$p_{12}(t)=\frac{1-e^{-3t/2}}{3}$。同理得 $p_{13}(t)=\frac{1-e^{-3t/2}}{3}$,$p_{11}(t)=1-p_{12}(t)-p_{13}(t)=\frac{2e^{-3t/2}+1}{3}$。

7.4 鞅

1. 设 $Y_0,Y_1,Y_2,\cdots$ 是一系列独立随机变量且 $E|Y_n|<+\infty,EY_n=0$。令 $X_n=\sum_{i=0}^{n}Y_i,n=0,1,2,\cdots,\mathscr{F}_n=\sigma\{Y_i,i=0,1,2,\cdots,n\}$, 则 $\{X_n,\mathscr{F}_n\}$ 是一个鞅。

证明：由于 $X_n=\sum_{i=0}^{n}Y_i,n=0,1,2,\cdots$, 显然 X_n 是 $\sigma\{Y_i,i=0,1,2,\cdots,n\}$ 可测的。

$$E|X_n|\leqslant\sum_{n=0}^{n}|Y_i|<+\infty$$

且

$$E[X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n]=E[X_n+Y_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n]$$

$$
\begin{aligned}
&= E[X_n|Y_0, Y_1, \cdots, Y_n] + E[Y_{n+1}|Y_0, Y_1, \cdots, Y_n] \\
&= X_n + E[Y_n] \\
&= X_n
\end{aligned}
$$

所以 $\{X_n, \mathscr{F}_n\}$ 是一个鞅。

2. 设 $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 如上题假定，另外设 $EY_n^2 = \sigma^2, n = 1, 2, \ldots$，令 $Z_0 = 0, Z_n = \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 - n\sigma^2$，那么 $\{Z_n, \mathscr{F}_n\}$ 是一个鞅。

证明：由于 $Z_n = (\sum_{i=0}^n Y_i)^2 - n\sigma^2, n = 0, 1, 2, \cdots$，显然 Z_n 是 $\sigma\{Y_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$ 可测的。

$$E|Z_n| = E|(\sum_{i=0}^n Y_i)^2 - n\sigma^2| \leqslant 2n\sigma^2 < +\infty$$

$$
\begin{aligned}
&E[Z_{n+1}|Y_0, Y_1, \cdots, Y_n] \\
=&E[(\sum_{i=0}^{n+1} Y_i)^2 - (n+1)\sigma^2|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] \\
=&E[(\sum_{i=0}^{n} Y_i + Y_{n+1})^2 - (n+1)\sigma^2|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] \\
=&E[(\sum_{i=0}^{n} Y_i)^2 + Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1}\sum_{i=0}^{n} Y_i - (n+1)\sigma^2|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] \\
=&E[(\sum_{i=0}^{n} Y_i)^2 - n\sigma^2 + Y_{n+1}^2 - \sigma^2 + 2Y_{n+1}\sum_{i=0}^{n} Y_i|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] \\
=&E[(\sum_{i=0}^{n} Y_i)^2 - n\sigma^2|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] + E[Y_{n+1}^2 - \sigma^2|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] \\
&+ E[2Y_{n+1}\sum_{i=0}^{n} Y_i|Y_0, Y, 1, \cdots, Y_n] \\
=&E[Y_{n+1}^2 - \sigma^2] + 2E[Y_{n+1}]\sum_{i=0}^{n} Y_i + (\sum_{i=0}^{n} Y_i)^2 - n\sigma^2 \\
=&Z_n
\end{aligned}
$$

所以 $\{Z_n, \mathscr{F}_n\}$ 是一个鞅。

3. 令 $X_0, X_1, \cdots$ 表示分支过程各代的个体数，$X_0 = 1$，任意一个个体生育后代的分布有均值 μ。证明 $\{M_n = \mu^{-n}X_n\}$ 是一个关于 $X_0, X_1, \cdots$ 的鞅。

证明： 由于 $M_n = \mu^{-n}X_n, n = 0, 1, 2, \cdots$, 显然 M_n 是 $\sigma\{X_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$ 可

测的。

$$E|M_n| = E|X_n|\mu^{-n} = \mu^n\mu^{-n} = 1 < \infty$$

$$\begin{aligned}
E[M_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n] &= E[\mu^{-n-1}X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n] \\
&= \mu^{-n-1}E[X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n] \\
&= \mu^{-n-1}E[X_{n+1}|X_n] \\
&= \mu^{-n-1} \cdot \mu X_n \\
&= \mu^n X_n \\
&= M_n
\end{aligned}$$

所以 $\{M_n = \mu^{-n}X_n\}$ 是一个关于 $X_0, X_1, \cdots$ 的鞅。

4. 考虑一个在整数上的随机游动模型，设向右移动的概率 $p < \frac{1}{2}$, 向左移动的概率为 $1-p, S_n$ 表示时刻 n 所处的位置，假定 $S_0 = a, 0 < a < N$。

(1) 证明：$\{M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\}$ 是鞅；

(1) 令 T 表示随机游动第一次到达 0 或 N 的时刻，即

$$T = \min\{n : S_n = 0 or N\}$$

利用鞅停时定理，求出 $P\{S_T = 0\}$。

(1) **证明：** 易知 $\{M_n\}$ 关于 $\sigma(S_0, S_1, \cdots, S_n)$ 可测的。

$$\begin{aligned}
E|M_n| &= E\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right| \\
&= E\left[\frac{1-p}{p}\right]^{S_n} \\
&\leqslant \left(\max\left\{\frac{1-p}{p}, \frac{p}{1-p}\right\}\right)^{a+n} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E[M_{n+1}|S_0, S_1, \ldots, S_n] \\
&= E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n+1}}|S_0, S_1, \ldots, S_n\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}|S_0,S_1,\ldots,S_n\right]\\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}|S_0,S_1,\ldots,S_n\right]\\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right]\\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}(\frac{1-p}{p}\cdot p+\frac{p}{1-p}\cdot(1-p))\\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\\
&= M_n
\end{aligned}
$$

所以 $\{M_n=\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\}$ 是关于 $\{S_0\}$ 鞅。

(2) 显然 T 是关于 $\{M_n,n=0,1,2,\ldots,\}$ 的停时，并且由 (1) 知 $\{M_n<+\infty\}$，若 $P\{T<\infty\}=1$，由停时定理

$$
E(M_T)=E(M_0)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^a
$$

即

$$
\begin{aligned}
E[M_T]=1\times P\{M_T=1\}+\left(\frac{1-p}{p}\right)\times P\{S_T=N\}\\
=E[M_0]=\left(\frac{1-p}{p}\right)^a
\end{aligned}
$$

并且

$$
P\{S_T=0\}+P\{S_T=N\}=1
$$

解得

$$
\begin{aligned}
PS_T=0=\frac{(\frac{1-p}{p})^a-(\frac{1-p}{p})^N}{1-(\frac{1-p}{p})^N}\\
=\frac{p^N(1-p)^a-p^a(1-p)^N}{p^{N+a}-p^a(1-p)^N}
\end{aligned}
$$

7.5 Brown 运动

1. 设 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动, 计算 $P\{B(2) \leqslant 0\}$ 和 $P\{B(t), \leqslant 0, t = 0, 1, 2\}$。

$B(2) \sim \mathcal{N}(0, 2)$，由正态分布函数的对称性可知 $P\{B(2) \leqslant 0\} = 1/2$。

$$\begin{aligned}
P\{B(t) \leqslant 0, \leqslant 0, t = 0, 1, 2\} &= P\{B(1) \leqslant 0, B(2) \leqslant 0\} \\
&= P\{B(1) \leqslant 0, B(1) + B(2) - B(1) \leqslant 0\} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} P\{B(2) - B(1) \leqslant -x\} f(x) dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(-x) d\Phi(x) \\
&= 3/8
\end{aligned}$$

2. 设 $\{B(t)\}$ 是 Brown 运动，求 $B(1) + B(2) + B(3) + B(4)$ 的分布。对于标准 Brown 运动 $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$。

$$\begin{aligned}
&B(1) + B(2) + B(3) + B(4) \\
&\quad = 4B(1) + 3(B(2) - B(1)) + 2(B(3) - B(2)) + B(4) - B(3) \\
&\quad \sim \mathcal{N}(0, 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1) \\
&\quad = \mathcal{N}(0, 30)
\end{aligned}$$

3. 求 $B(\frac{1}{4}) + B(\frac{1}{2}) + B(\frac{3}{4}) + B(1)$ 的分布。

$$\begin{aligned}
&B(1/4) + B(1/2) + B(3/4) + B(1) \\
&\quad = 4B(1/4) + 3(B(1/2) - B(1/4)) + 2(B(3/4) - B(1/2)) + B(1) - B(3/4) \\
&\quad \sim \mathcal{N}(0, \frac{4^2 + 3^2 + 2^2 + 1}{4}) \\
&\quad = \mathcal{N}(0, \frac{15}{2})
\end{aligned}$$

4. 求概率 $P\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\}$。

$$\begin{aligned}
Var\left[\int_0^1 B(t)dt\right] &= Cov\left[\int_0^1 B(t)dt, \int_0^1 B(s)ds\right] \\
&= E\left[\int_0^1 B(t)dt \int_0^1 B(s)ds\right] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E[B(t)B(s)]dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 Cov[B(t)B(s)]dtds \\
&= \int_0^1 \min\{t,s\}dtds \\
&= \int_0^1 dt \int_0^t sds + \int_0^1 ds \int_0^s tdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 t^2dt + \frac{1}{2}\int_0^1 s^2ds \\
&= 1/3
\end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 B(t)dt \sim \mathcal{N}(0,1/3)$，所求概率为

$$\begin{aligned}
P\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\} &= P\{\sqrt{3}\int_0^1 B(t)dt > 2\} \\
&= 1-\Phi(2) \\
&\approx 0.023
\end{aligned}$$

5. 设 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 为标准 Brown 运动，求 $B(1)+B(2)+\cdots+B(n)$ 的分布，并验证 $\{X(t) - tB(\frac{1}{t})\}$ 仍为 $[0,+\infty)$ 上的 Brown 运动。

$$\begin{aligned}
&B(1)+B(2)+\cdots+B(n) \\
&\quad = nB(1)+(n-1)(B(2)-B(1))+\cdots+2(B(n-1)-B(n-2))+B(n)-B(n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=1}^{n} n^2)\\&= \mathcal{N}(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})\end{aligned}$$

由于 $X(t) = tB(\frac{1}{t})$, 所以 $X(0) = 0(?)$

$\forall 0 < s < t < +\infty$

$$\begin{aligned}&X(t) - X(s)\\=&tB\left(\frac{1}{t}\right) - sB\left(\frac{1}{s}\right)\\=&tB\left(\frac{1}{t}\right) - sB\left(\frac{1}{t}\right) + sB\left(\frac{1}{t}\right) - sB\left(\frac{1}{s}\right)\\=&(t-s)B\left(\frac{1}{t}\right) - s\left[B(\frac{1}{t}) - B(\frac{1}{s})\right]\end{aligned}$$

由于 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动，所以 $X(t) - X(s)$ 服从正态分布，

$$\begin{aligned}&E[X(t) - X(s)] = 0\\&Var[X(t) - X(s)] = (t-s)^2\frac{1}{t} + s^2(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}) = t - s\end{aligned}$$

所以 $X(t) - X(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$，所以 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是标准 Brown 运动。

7.6 随机积分

1. 求 $d(e^{B(t)})$。

$$dB(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

$$\begin{aligned}d(e^{B(t)}) &= e^{B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dB(t)^2\\&= e^{B(t)}(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dt\\&= e^{B(t)}(\mu(t) + \frac{1}{2})dt + e^{B(t)}dW(t)\end{aligned}$$

2. 求解 Ornstein-Uhlenbeck 方程

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dB_t$$

其中 μ, σ 为常数。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[e^{\mu t}X(t)] &= \mu e^{\mu t}X(t)dt + e^{\mu t}dX(t)\\ &= e^{\mu t}\sigma dB(t)\end{aligned}$$

等式两边积分得到

$$e^{\mu t}X(t)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{\mu s}dB(s)$$

整理得到

$$X(t) = X(t_0)e^{\mu(t_0-t)} + e^{-\mu t}\int_{t_0}^{t} e^{\mu s}dB(s)$$

3. 考虑群体增长模型

$$\frac{dN_t}{dt} = a_tN_t$$

其中 N_0 已知，$a_t = r_t + \alpha B_t$，r_t 为增长率 (假设为常数 r)，α 为常数，B_t 为 Brown 运动。可以将其化为随机微分方程的形式。

$$dN_t = rN_tdt + \alpha N_tdB_t$$

这种类型的方程被称为集合随机微分方程，试求解它。

解答： 由题意得到

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t$$

则

$$\begin{aligned}d\ln N_t &= \frac{1}{N_t}dN_t - \frac{1}{2}\frac{1}{N_t^2}dN_t^2\\ &= rdt + \alpha dB_t - \frac{(\alpha N_t)^2dB_t^2}{2N_t^2}\\ &= (r - \frac{\alpha^2}{2})dt + \alpha dB_t\end{aligned}$$

等式两端积分得到

$$\ln N_t - \ln N_0 = (r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_t$$

其中用到了 $B(0) = 0$。整理得到

$$N_t = N_0 \exp\left[(r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_t\right]$$

4. 设 $X(t)$ 具有随机微分形式

$$dX(t) = (bX(t) + c)dt + 2\sqrt{X(t)}dB(t)$$

并假定 $X(t) \geqslant 0$，试找出过程 $\{Y(t) = \sqrt{X(t)}\}$ 的随机微分形式。

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{X(t)}}dX(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{4X^{3/2}(t)}dX^2(t) \\ &= \frac{(bX(t)+c)dt + 2\sqrt{X(t)}dB(t)}{2\sqrt{X(t)}} - \frac{4X(t)dB^2(t)}{8X^{3/2}(t)} \\ &= \frac{b}{2}\sqrt{X(t)}dt + \frac{c}{2\sqrt{X(t)}}dt + dB(t) - \frac{dt}{2\sqrt{X(t)}} \\ &= (\frac{b}{2}\sqrt{X(t)} + \frac{c+1}{2\sqrt{X(t)}})dt + dB(t) \\ &= (\frac{b}{2}Y(t) + \frac{c+1}{2Y(t)})dt + dB(t) \end{aligned}$$

即所求随机微分形式为 $dY(t) = (\frac{b}{2}Y(t) + \frac{c+1}{2Y(t)})dt + dB(t)$。

5. 利用 Itô 公式证明

$$\int_0^t B^2(s)ds = \frac{1}{3}B^3(t) - \int_0^t B(s)ds$$

证明： 利用 Itô 公式

$$\begin{aligned} d(B^3(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}B^3(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B^3(t)dB^2(t) \\ &= 3B^2(t)dt + \frac{6B(t)}{2}dB^2(t) \\ &= 3B^2(t)dt + 3B(t)dt \end{aligned}$$

等式两端积分得到

$$B^3(s)\Big|_0^t = 3\int_0^t B^2(s)ds + 3\int_0^t B(s)dB(s)$$

利用 $B(0)=0$，整理得到

$$\int_0^t B^2(s) = \frac{1}{3}B^3(t) - \int_0^t B(s)ds$$

6. 设 $\{X(t), Y(t)\}$ 是 Itô 过程, 试证

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)\cdot dY(t)$$

由此导出下面的分部积分公式

$$\int_0^t X(s)dY(s) = X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_0^t Y(s)dX(s) - \int_0^t dX(s)\cdot dY(s)$$

证明:

$$\begin{aligned}
&d(X(t)Y(t)) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial t}(X(t)Y(t))dt + \frac{\partial(X(t)Y(t))}{\partial X(t)}dX(t) + \frac{\partial(X(t)Y(t))}{\partial Y(t)}dY(t) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(X(t)Y(t))}{\partial X^2(t)}dX^2(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(X(t)Y(t))}{\partial Y^2(t)}dY^2(t) \\
&\qquad + \frac{\partial^2(X(t)Y(t))}{\partial X(t)\partial Y(t)}dX(t)dY(t) \\
&= Y(t)dX(t) + X(t)dY(t) + dX(t)\cdot dY(t)
\end{aligned}$$