《统计信号处理》第二教学单元研讨题

杨鼎, 韦可雷, 高司博, 高涵博

1 第一题

什么叫做完备的充分统计量？如何利用完备的充分统计量估计未知参数？由充分统计量是否能够获得 MVUE？获得最大似然估计的途径有哪些？最大似然估计与有效估计量、充分统计量、MVUE 之间是否有联系？可举例验证你的观点。

(1) 什么叫做完备的充分统计量？

1. 充分性条件：如果 $PDFp(\mathbf{x};\theta)$ 能够分解为

$$p(\mathbf{x};\theta) = g(T(\mathbf{x},\theta))h(\mathbf{x})$$

其中 g 为只是通过 $T(\mathbf{x})$ 才与 $\mathbf{x}$ 有关的函数，h 只是 $\mathbf{x}$ 的函数，那么 $T(\mathbf{x})$ 是 θ 的充分统计量。

2. 完备性条件：如果对所有的 θ, 条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(T)p(T;\theta)dT = 0$$

只对零函数 $v(T) = 0$(对所有的 T) 满足，那么，我们就说充分统计量是完备的。

(2) 如何利用完备的充分统计量估计未知参数？

利用 RBLS 定理

如果 $\check{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，$T(x)$ 是 θ 的充分统计量，那么 $\check{\theta} = E(\theta|\check{T}(x))$ 是

1.θ 是一个适用的估计量 (与 θ 无关)；

2. 无偏的；

3. 对所有的 θ，它的方差要小于或等于 $\check{\theta}$ 的方差；

4. 特别地，当 $T(x)$ 是完备的充分统计量时，$\check{\theta}$ 是 MVU 估计量。

(3) 由充分统计量是否能够获得 MVUE？

根据 BRLS 定理，如果充分统计量 $T(\mathbf{x})$ 是完备的，那么它就是 MVUE。1. 利用 Neyman-Fisher 因子分解定理来求一个 θ 的统计量，即 $T(\mathbf{x})$;

2. 确定充分统计量是否完备，如果是，继续往下进行；否则这个方法不能使用；3. 求一个充分统计量的函数，以此来得到一个无偏估计量 $\hat{\theta} = g(T(\mathbf{x}))$，那么 $\hat{\theta}$ 就是 MVUE。或者，计算 $\hat{\theta} = E(\check{\theta}|T(\theta))$, 其中 $\check{\theta}$ 是任意无偏估计量。

(4) 获得最大似然估计的途径有哪些？

1. 写出似然函数，求出使得似然函数最大的估计量 $\hat{\theta}$

2. 已知充分统计量 $T(\mathbf{x})$, 根据 Neyman-Fisher 因子分解定理,极大似然函数最大化等价于 $g(T(\mathbf{x}, \theta))$ 的最大化，因此求得使 $g(T(\mathbf{x}, \theta))$ 关于 θ 最大化的估计量即为 MLE。

(5) 最大似然估计与有效估计量、充分统计量、MVUE 之间是否有联系？

有效估计量：无偏且达到 CRLB 的估计量。

充分统计量：包含待估计量所有信息的统计量。

MVUE：在无偏估计的前提下，使得方差最小的估计量。

MVUE 估计量和有效估计量都是无偏的，但 MVUE 不一定是有效估计量 (见教材图 3.2); 根据教材定理 7.1, 最大似然估计量可以视为渐进无偏的和渐进达到 CRLB，因此它是渐进有效的；根据 Neyman-Fisher 因子分解定理, 对于充分统计量 $T(\mathbf{x})$，PDF 可以分解为 $p(T(\mathbf{x}); \theta) = g(T(\mathbf{x}, \theta))h(\mathbf{x})$, 求 MLE 时，使似然函数最大化，等价于使 $g(T(\mathbf{x}, \theta))$ 关于 θ 求得极大值，因此，MLE 是充分统计量 $T(\mathbf{x})$ 的函数。

2 第二题

考虑高斯噪声中正弦信号参数估计问题。观测模型为

$$x_n = A \cos 2\pi f_0 n + w_n, n = 0, 1, ..., N-1$$

其中 w_n 为零均值高斯噪声。

(1) 当 $w_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$,$f_0$、$\sigma^2$ 均已知，你认为可以用哪些方法对参数 A 进行估计？

(2)$A = 1, \sigma^2 = 0.1$ 时，绘制频率参数的克拉美-罗下限曲线，并解释你观察到的现象。

(3)$A = 1, f_0 = 0.25, f_0 = 0.05$ 时，分别对频率参数的最大似然估计进行仿真，绘制参数估计性能随样本量、信噪比的变化曲线，并与克拉美-罗下限进行对比；分析验证最大似然估计的渐进性能。

当 $A = 1$ 时，极大似然函数为

$$p(\mathbf{x}; f_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - \cos 2\pi f_0 n]^2\right\}$$

使得似然函数最大，等价于使指数项

$$J(f_0)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x[n]-\cos 2\pi f_0 n\right]^2$$

最小。对于集合 $(0,1/2)$ 内的所有 f_0, 利用网格搜索法，可以求出 $J(f_0)$ 的最小值，这时的 f_0 即为 MLE。

(4) 如果 w_n 为零均值高斯色噪声，可用如下 AR 模型描述

$$w_n = aw_{n-1} + e_n$$

其中，$e_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma_e^2), a = 0.8, A = 1$，试问什么情况下能够获得更准确的频率参数估计？试与白噪声的情况进行比较（相同的噪声方差下）。

重写为矢量形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{F} + \mathbf{w}$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{e}$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\pi f_0 & \cos 2\pi f_0 * 2 & \dots & \cos 2\pi f_0 n \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}^T$$

由于 $e_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_e^2), \mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_e^2\mathbf{I})$。

由 $\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{e}$, 得到 $(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{w} = \mathbf{e}$, 显然 $\mathbf{I} - \mathbf{H}$ 可逆，所以 $\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1}\mathbf{e}$, $\mathbf{x} = A\mathbf{F} + (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1}\mathbf{e}$。

已知 $\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})(\mathbf{x} - \mathbf{F}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_e^2\mathbf{I})$ ，所以 PDF$p(\mathbf{x}; f_0)$ 为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}; f_0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma_e^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{x} - \mathbf{F})^T(\mathbf{I} - \mathbf{H})^T(\mathbf{I} - \mathbf{H})(\mathbf{x} - A\mathbf{F})\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_e^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(\mathbf{x} - \mathbf{F})^T\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{F})\right\} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{W} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^T(\mathbf{I} - \mathbf{H})$, 显然 $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$。

利用最大似然估计，使似然函数最大，等价于使指数项

$$J(f_0) = (\mathbf{x} - \mathbf{F})^T\mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{F})$$

最小。对于集合 $(0, 1/2)$ 内的所有 f_0, 利用网格搜索法，可以求出 $J(f_0)$ 的最小值，这时的 f_0 即为

MLE。

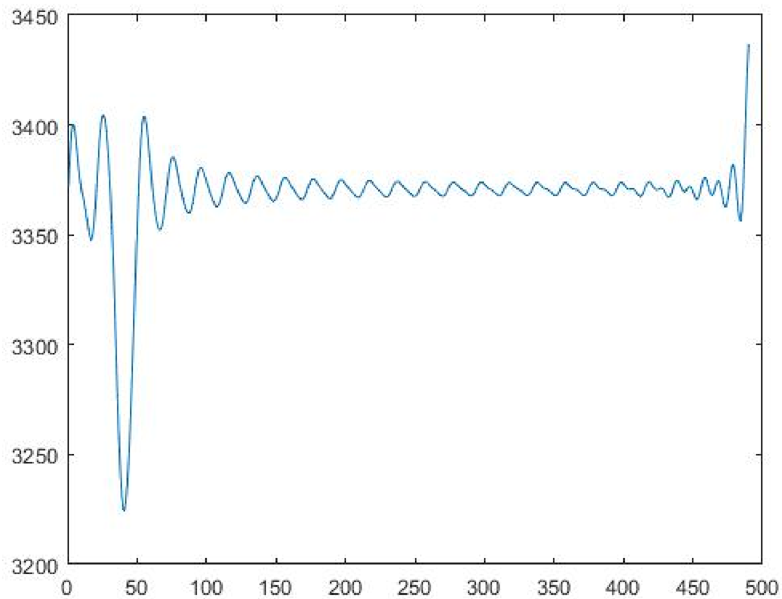

图 2.1: 通过 J 的最小值寻找 f_0 的 MLE 原理图

图 2.1 显示了通过网格搜索法求 MLE 的过程，$J(f_0)$ 对应 f_0 值即为 MLE。

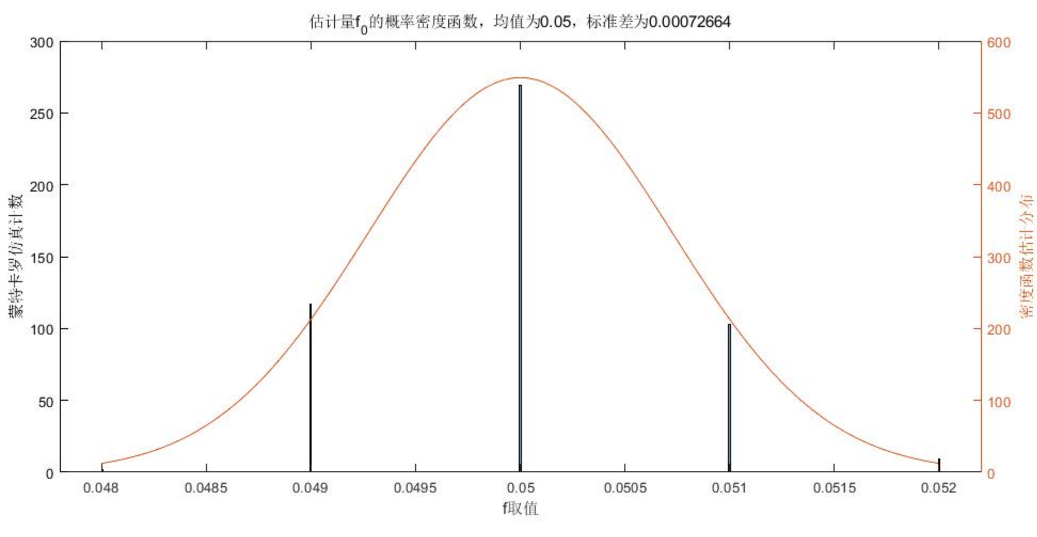

图 2.2: 蒙特卡洛仿真求得 f_0 的 MLE 的分布图

图 2.2 显示了 N=50 时，利用蒙特卡洛仿真 100 次，求得 f_0 的 MLE 的分布直方图与拟合曲线。图中 f_0 分离的取值是由利用网格搜索算法时 f_0 的步进长度决定的。从图中可以看出，蒙特卡洛仿真结果近似服从正态分布，这与最大似然估计的渐渐特性相符。

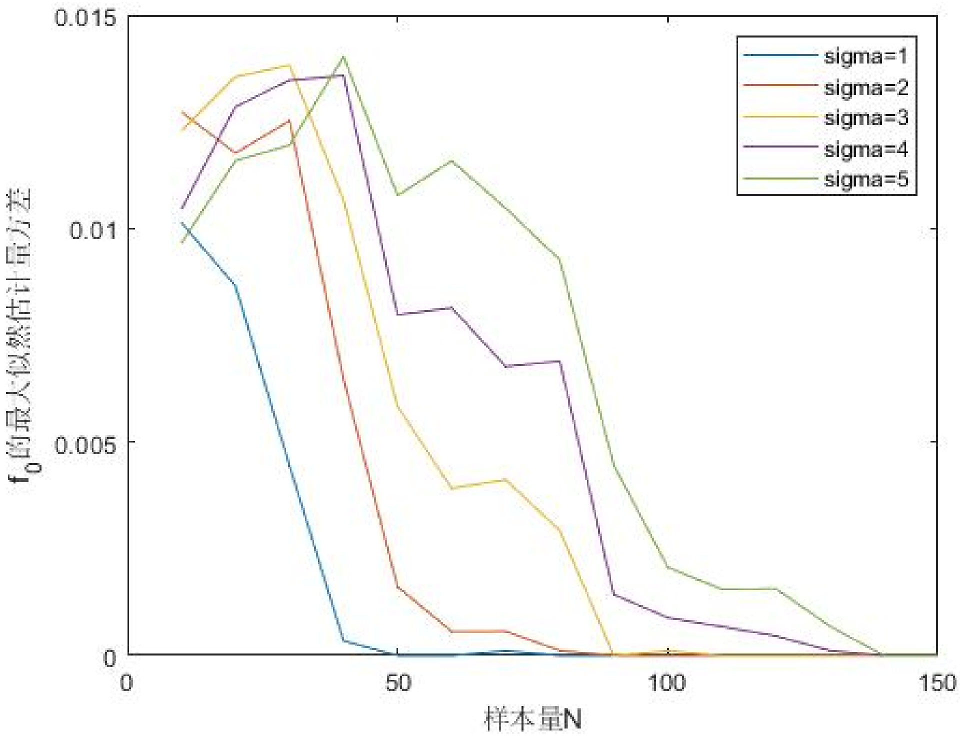

图 2.3: 不同噪声 σ 下，f_0 的 MLE 的方差随样本长度 N 变化图

图 2.3 显示了不同噪声标准差 σ 下，随着样本量增加，f_0 的 MLE 的方差变化曲线。随着样本长度增加，方差逐渐变小，MLE 逐渐趋向于真值。信噪比越低，对应噪声标准差 σ 越大，MLE 的收敛速度越慢。