《统计信号处理》第七教学单元研讨题

杨鼎, 韦可雷, 高司博, 高涵博

1 研讨题 1

考虑二元假设问题

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0: &\quad z[k] = n[k] \\ \mathcal{H}_1: &\quad z[k] = s[k] + n[k] \end{aligned} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

噪声是服从 $n(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的 WGN。

(1) 若 $s[k] = A, A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$ 且与噪声独立,σ_A^2 已知，求解 NP 判决式。

参照例 5.1，由于信号服从 $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$ 的 WGN，所以在 $\mathcal{H}_0$ 条件下，$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$, 在 $\mathcal{H}_1$ 条件下，$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, (\sigma^2 + \sigma_A^2)\mathbf{I})$，

根据 NP 准则，如果似然比超过门限

$$L(\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_0)} > \gamma$$

则 NP 检测器判 $\mathcal{H}_1$。其中

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_1) &= \frac{1}{[2\pi(\sigma_A^2 + \sigma^2)]^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{2(\sigma_s^2 + \sigma^2)} \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n]\right] \\ p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n]\right] \end{aligned}$$

对数似然比可以求得

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{z}) &= \frac{N}{2} \ln(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_A^2}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma_s^2 + \sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}) \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n] \\ &= \frac{N}{2} \ln(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_A^2}) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_A^2}{(\sigma_A^2 + \sigma^2)\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n] \end{aligned}$$

如果

$$T(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{N-1} z^2[n] > 2\sigma^2(1+\frac{\sigma^2}{\sigma_A^2})\left[\ln\gamma + \frac{N}{2}\ln(1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma^2})\right] = \gamma'$$

则 $\mathcal{H}_1$ 成立。

(2) 若 $s[k] \sim Ar^k(0<r<1), A \sim \mathcal{N}(0,\sigma_A^2)$ 且与噪声独立，σ_A^2 已知，求解 NP 判决式。

若 $s[k] \sim Ar^k(0<r<1)$, 假设可以重写为线性模型

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &: \mathbf{z} = \mathbf{n} \\ \mathcal{H}_1 &: \mathbf{z} = \mathbf{H}A + \mathbf{n}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \begin{bmatrix} z[0] & z[1] & \cdots & z[N-1]\end{bmatrix}^T \\ \mathbf{n} &= \begin{bmatrix} n[0] & n[1] & \cdots & n[N-1]\end{bmatrix}^T \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 & r & \cdots & r^k\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

由于 $A \sim \mathcal{N}(0,\sigma_A^2)$ 且与噪声独立, 所以

$$\mathbf{z} \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I}) & ,\mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}(\mathbf{0},\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}) & ,\mathcal{H}_1\end{cases}$$

类似第 (**1**) 问，根据 NP 准则，如果似然比

$$L(\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z};\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{z};\mathcal{H}_0)} > \gamma$$

则 NP 检测器判 $\mathcal{H}_1$。其中

$$\begin{aligned}p(\mathbf{z};\mathcal{H}_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\det^{1/2}(\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I})}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T(\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{z}\right] \\ p(\mathbf{z};\mathcal{H}_0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\mathbf{z}^T\mathbf{z}\right)\end{aligned}$$

对数似然比可以求得

$$\begin{aligned}\ln L(\mathbf{z}) &= -N\ln(\sigma) + \frac{1}{2}\ln\det(\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I}) - \frac{1}{2}\mathbf{z}^T(\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{z} + \frac{\mathbf{z}^T\mathbf{z}}{2\sigma^2} \\ &= -N\ln(\sigma) + \frac{1}{2}\ln(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T) + \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\left[-(\sigma_A^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T+\sigma^2\mathbf{I})^{-1} + \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}\right]\mathbf{z}\end{aligned}$$

利用矩阵求逆引理

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1}=A^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$$

令 $\mathbf{A}=\sigma^2\mathbf{I},\mathbf{B}=\mathbf{H},\mathbf{D}=\mathbf{H}^T,\mathbf{C}=\sigma_A^2\mathbf{I}$, 得到

$$\begin{aligned}(\sigma_A^2\mathbf{HH}^T+\sigma^2\mathbf{I})^{-1}&=\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}-\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{IH}(\mathbf{H}^T\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{IH}+\frac{1}{\sigma_A^2}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{H}^T\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}\\&=\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}-\frac{\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H})}\mathbf{I}\\&=\frac{\mathbf{I}}{\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}}\end{aligned}$$

所以对数似然函数

$$\begin{aligned}\ln L(\mathbf{z})&=-N\ln(\sigma)+\frac{1}{2}\ln(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{HH}^T)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}}+\frac{1}{\sigma^2})\mathbf{z}^T\mathbf{z}\\&=-N\ln(\sigma)+\frac{1}{2}\ln(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{HH}^T)+\frac{\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H})}\mathbf{z}^T\mathbf{z}\\&>\ln\gamma\end{aligned}$$

时，判 $\mathcal{H}_1$。

由于 σ^2,σ_A^2 均已知，可以整理为

$$\begin{aligned}T(\mathbf{z})&=\mathbf{z}^T\mathbf{z}\\&>\frac{\sigma^2(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H})}{\sigma_A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H}}(\ln\gamma+N\ln(\sigma)-\frac{1}{2}\ln(\sigma^2+\sigma_A^2\mathbf{HH}^T))\\&=\gamma''\end{aligned}$$

则 $\mathcal{H}_1$ 成立。其中 $\mathbf{H}^T\mathbf{H}=\sum_{k=0}^{N-1}r^{2k}=\frac{1-r^{2N}}{1-r^2}$。

(3) 若 $s[k]=A\cos(2\pi f_0k+\phi)$,A 已知但 ϕ 未知,若检验统计量采用 $\sum_{k=0}^{N-1}z[k]A\cos(2\pi f_0k)$，讨论大 N 情况下偏移系数及其与 ϕ 的关系。

假设 ϕ 服从均匀分布，$\phi\sim\mathcal{U}(0,2\pi)$，则 $E\left[\cos(\phi)\right]=E\left[\sin(\phi)\right]=0$

$$
\begin{aligned}
E(T;\mathcal{H}_1) &= E\left[\sum_{k=0}^{N-1} z[k]A\cos(2\pi f_0 k)\right] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{N-1} (s[k]+n[k])A\cos(2\pi f_0 k)\right] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{N-1} A^2\cos(2\pi f_0 k+\phi)\cos(2\pi f_0 k)\right] \\
&= E\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2}\left[\cos(4\pi f_0 k+\phi)+\cos(\phi)\right]\right\} \\
&= \frac{NA^2}{2}\cos(\phi) + E\left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_0 k+\phi)\right] \\
&= \frac{NA^2}{2}\cos(\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(T;\mathcal{H}_0) &= E\left[\sum_{k=0}^{N-1} z[k]A\cos(2\pi f_0 k)\right] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{N-1} n[k]A\cos(2\pi f_0 k)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

由于噪声 $n[k]\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的 WGN，所以 $E\left[n[k]n[l]\right]=\delta(k,l)\sigma^2$

$$
\begin{aligned}
Var(T;\mathcal{H}_0) &= E\left\{\left[\sum_{k=0}^{N-1} z[k]A\cos(2\pi f_0 k)\right]^2\right\} - E^2\left[\sum_{k=0}^{N-1} z[k]A\cos(2\pi f_0 k)\right] \\
&= A^2 E\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} n[k]n[l]\cos(2\pi f_0 k)\cos(2\pi f_0 l)\right] \\
&= A^2\sigma^2\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2(2\pi f_0 k) \\
&= \frac{A^2\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1} 1+\cos(4\pi f_0 k)
\end{aligned}
$$

对于大的 N 值

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos k\alpha &= \frac{1}{N}Re\left(\sum_{k=0}^{N-1}\exp(jk\alpha)\right) \\
&= \frac{1}{N}Re\left[\exp(j(N-1)\alpha/2)\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right] \\
&\approx \frac{\sin(N\alpha)}{2N\sin(\alpha/2)}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
Var(T;\mathcal{H}_0) &\approx \frac{A^2\sigma^2}{2}(N+\frac{\sin(N\alpha)}{2\sin(\alpha/2)}) \\
&\approx \frac{NA^2\sigma^2}{2}
\end{aligned}
$$

偏移系数

$$
\begin{aligned}
d^2 &= \frac{[E(T;\mathcal{H}_1)-E(T;\mathcal{H}_0)]^2}{Var(T;\mathcal{H}_0)} \\
&= \frac{NA^2}{2\sigma^2}\cos^2\phi
\end{aligned}
$$

偏移系数与 ϕ 有关，当 $\phi=0,\pi$ 时，检测性能最佳，当 $\phi=\pi/2,3\pi/2$ 时，检测性能最差。

这是由于检验统计量 $\sum_{k=0}^{N-1}z[k]A\cos(2\pi f_0 k)$ 不能构成单一的充分统计量。

由于 $s[n]=A\cos(2\pi f_0 k+\phi)$,

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{z};\mathcal{H}_1) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}[z[n]-A\cos(2\pi f_0 k+\phi)]^2\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\Bigg\{-\frac{1}{2\sigma}\Bigg[\sum_{k=0}^{N-1}z^2[n]-2A\left(\sum_{k=0}^{N-1}z[n]\cos 2\pi f_0 k\right)\cos\phi \\
&\qquad +2A\left(\sum_{k=0}^{N-1}z[n]\sin 2\pi f_0 k\right)\sin\phi\Bigg]+\sum_{k=0}^{N-1}A^2\cos^2(2\pi f_0 k+\phi)\Bigg\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{k=0}^{N-1}A^2\cos(2\pi f_0 k+\phi)-2T_1(\mathbf{z})\cos\phi+2T_2(\mathbf{z})\sin\phi\right]\right\} \\
&\qquad \cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}z^2[n]\right] \\
&\qquad = g(T(\mathbf{z}),T_2(\mathbf{z}),\phi)\cdot h(\mathbf{z})
\end{aligned}
$$

其中

$$T_1(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{N-1} Az[n]\cos 2\pi f_0 k$$
$$T_2(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{N-1} Az[n]\sin 2\pi f_0 k$$

根据 Neyman-Fisher 因子分解定理，$T_1(\mathbf{z})$ 和 $T_2(\mathbf{z})$ 共同构成充分统计量，单一的 $T_1(\mathbf{z})$ 并没有包含进行 NP 假设检验的所有信息。

2 研讨题 2: 雷达信号检测问题。

考虑二元假设检验问题

$$\begin{array}{ll} H_0: & z(k) = n(k) \\ H_1: & z(k) = s[k] + n(k) \end{array} \quad k = 0, 1, \cdots N-1$$

其中噪声 $n(k)$ 是服从 $n(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的 WGN。

1、若 $s[k] = Ar^k, r$ 已知且 $0 < r < 1, A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2), \sigma_A^2$ 未知且与噪声 A 独立，求 GLRT 判决式

(2) 若 $s[k]$ 是广义平稳随机过程，其功率谱密度

$$P_s(f; P_0) = \begin{cases} 2P_0 & 0 \leqslant f \leqslant 1/4 \\ 0 & 1/4 < f \leqslant 1/2 \end{cases}$$

其中 P_0 未知，求 GLRT 判决式。

3 研讨题 3

高斯噪声中已知信号的分析与仿真，考虑二元假设

$$\begin{array}{ll} H_0: & z(k) = n(k) \\ H_1: & z(k) = s[k] + n(k) \end{array} \quad k = 0, 1, \cdots N-1$$

噪声是服从 $n(k) \sim \mathcal{N}(0, 5)$ 的 WGN，信号为零均值高斯随机信号，协方差矩阵 $[\mathbf{C}]_{ij} = c[i-j], j = 0, 1, \ldots, N-1$, 其中 $c[k] = \frac{1}{1-0.9^2} 0.9^{|k|}$，若 $N = 100$, 虚警概率设定为 0.01，试通过计算机模拟分析检测门限及检测概率。

4 研讨题 4

能量检测器的分析与仿真：考虑二元假设

$$\begin{array}{ll} H_0: & z(k)=n(k) \\ H_1: & z(k)=s[k]+n(k) \end{array} \quad k=0,1,\cdots N-1$$

噪声是服从 $n(k)\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 的 WGN，σ^2 已知。

(1) 若 $s(k)$ 是完全未知确定信号，假定 $\sigma^2=1,N=10$，虚警概率设定为 0.01，分析检测门限，能得到检测概率吗？

若 $s(k)$ 是完全未知确定信号，则使用最大似然估计 $\hat{s}(k)=z(k)$，似然比为

$$\Lambda(\mathbf{z})=\frac{p(\mathbf{z}|\hat{s}[0],\hat{s}[2],\ldots,\hat{s}[N-1],\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{z}|\mathcal{H}_0)}$$

化简可以得到检测统计量与检测门限为能量检测器的形式：

$$T(\mathbf{z})=\sum_{n=0}^{N-1}z^2[n]=\sum_{n=0}^{N-1}z[n]z[n]=\sum_{n=0}^{N-1}z[n]\hat{s}[n]>\gamma$$

若要得到其检测性能，必须限定一个大前提，即大数据量，小信噪比的时候，近似有

$$P_D\approx Q[Q^{-1}(P_F)-d^2]$$

其中 $d^2=\frac{(\epsilon/\sigma^2)^2}{2N}$，$\epsilon/\sigma^2$ 为信噪比。

虚警概率为 0.01 的检测概率仿真图如下，其中第一张图是不限定信噪比的检测概率，考虑到检测性能前提，画出了信噪比低于 0dB 条件下的检测概率曲线，可以看出，检测概率较小。

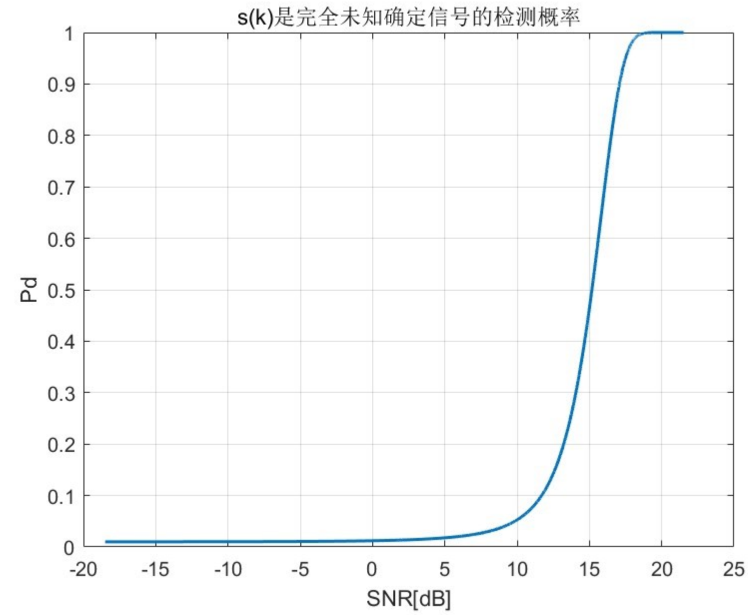

图 4.1: $s(k)$ 是完全未知确定信号的检测概率

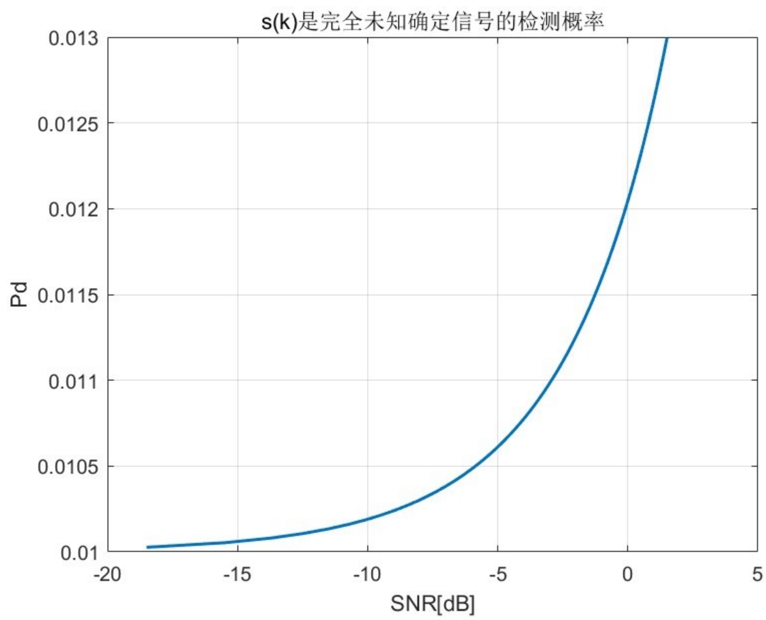

图 4.2: $s(k)$ 是完全未知确定信号的检测概率

(2) 若 $s(k)$ 是均值为零方差为 σ_s^2 的白高斯信号，假定 $\sigma^2=\sigma_s^2=1, N=100$，虚警概率设定为 0.01，试分析检测门限及检测概率并仿真。

若 $s(k)$ 是均值为零，方差为 $\sigma_s^2=1$ 的高斯白噪声，为典型的高斯白噪声的高斯白噪声随机信号检测，似然比为

$$\Lambda(\mathbf{z})=\frac{p(\mathbf{z}|\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{z}|\mathcal{H}_0)}>\eta$$

由此可以化简得到检验统计量与门限

$$T(\mathbf{z})=\sum_{n=0}^{N-1}z^2[n]>\gamma$$

与确定性信号不同的是，由于信号和噪声均分从高斯分布，则有

$$\chi_N^2\sim\begin{cases}\frac{T(\mathbf{z})}{\sigma^2} & ,\mathcal{H}_0\\ \frac{T(\mathbf{z})}{\sigma^2+\sigma_s^2} & ,\mathcal{H}_1\end{cases}$$

因此虚警概率与检测门限分别为

$$\begin{aligned}P_F&=Pr\{T(\mathbf{z})>\gamma|\mathcal{H}_0\}=Pr\left\{\frac{T(\mathbf{z})}{\sigma^2}>\frac{\gamma^2}{\sigma^2}|\mathcal{H}_0\right\}=Q_{\chi_N^2}(\frac{\gamma}{\sigma^2})\\ \gamma&=\sigma^2Q_{\chi_N^2}^{-1}(P_F)\end{aligned}$$

检测概率为

$$\begin{aligned}P_D&=Pr\left\{T(\mathbf{z})>\gamma|\mathcal{H}_1\right\}\\ &=Pr\left\{\frac{T(\mathbf{z})}{\sigma^2+\sigma_s^2}<\frac{\gamma}{\sigma^2+\sigma_s^2}|\mathcal{H}_1\right\}\\ &=Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\gamma}{\sigma^2+\sigma_s^2}\right)\\ &=Q_{\chi_N^2}\left(\frac{\sigma^2Q_{\chi_N^2}^{-1}(P_F)}{\sigma^2+\sigma_s^2}\right)\\ &=Q_{\chi_N^2}\left(\frac{Q_{\chi_N^2}^{-1}(P_F)}{\sigma_s^2/\sigma^2+1}\right)\end{aligned}$$

由卡方右尾函数性质可知，当信噪比 σ_s^2/σ^2 增加，检测概率增减，限定虚警概率为 0.01 条件下，仿真检测性能曲线如下

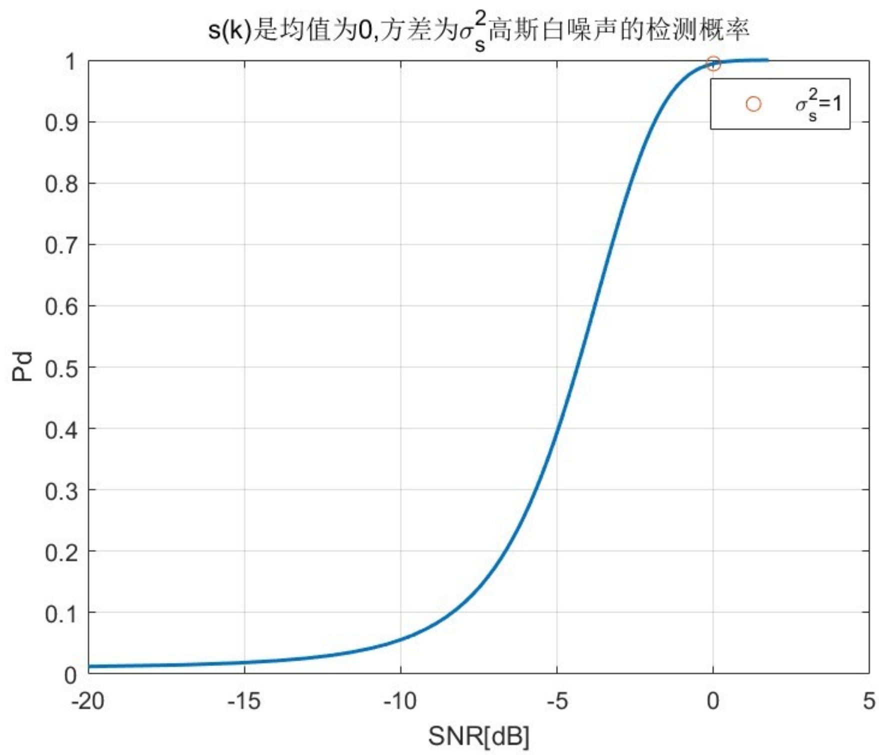

图 4.3: $s(k)$ 是均值为 0，方差为 σ_s^2 高斯白噪声的检测概率

其中当 $\sigma^2 = \sigma_s^2 = 1$ 时，门限为 135.8067，检测概率 $P_D = 99.42\%$