《统计信号处理》讨论题零：随机变量函数

杨鼎

1 第一题

已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 且 $Y = X$, 则 X 和 Y 的联合概率密度 $f_{XY}(x, y) =$?

随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，则其概率分布函数为

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

, 由 $Y = X$ 可知，Y 的概率分布函数 $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$.

X 和 Y 的联合概率分布函数为 $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, 由于 $X = Y$,

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \leq \min(x, y), Y \leq \min(x, y)) \\ &= P(X \leq \min(x, y)) \\ &= P(Y \leq \min(x, y)) \end{aligned}$$

于是 X 和 Y 的联合概率分布函数为

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq \min(x, y)) = \int_{-\infty}^{\min(x,y)} f_X(t)dt$$

注意到 $\min(x, y)$ 可以写为 $\frac{x+y-|x-y|}{2}$,X 和 Y 的联合概率密度函数

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{\min(x,y)} f_X(t)dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{\frac{x+y-|x-y|}{2}} f_X(t)dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f_X(\frac{x+y-|x-y|}{2}) \cdot \frac{1}{2}(1 + \frac{|x-y|}{x-y}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f_X(\frac{x+y-|x-y|}{2}) u(x-y) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f_X(y) u(x-y) \right] \\ &= f_X(y) \delta(x-y) \end{aligned}$$

或

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{XY}(x,y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_{-\infty}^{\frac{x+y-|x-y|}{2}} f_X(t)dt \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_X(\frac{x+y-|x-y|}{2}) \cdot \frac{1}{2}(1-\frac{|x-y|}{x-y}) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_X(\frac{x+y-|x-y|}{2}) u(y-x) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_X(x) u(y-x) \right] \\
&= f_X(x)\delta(y-x)
\end{aligned}
$$

2 第二题

已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，且 $Y=g(X)$，其中 $g(\cdot)$ 为确定性的函数，则 X 和 Y 的联合概率密度 $f_{XY}=?$

随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，则其概率分布函数为

$$
F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt
$$

X 和 Y 的联合概率密度函数为 $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$,$f_X(x)$ 已知，下面计算 $f_{Y|X}(y|x)$。

由于 $Y=g(X)$, 所以若 $y<g(x), P(Y<y|x)=0$, 若 $y>g(x), P(Y<y|x)=1$, 即

$$
\begin{aligned}
F_{Y|X}(y|x) &= P(Y<y|x) \\
&= \begin{cases} 1 & , y \ge g(x) \\ 0 & , y < g(x) \end{cases} \\
&= u(y-g(x))
\end{aligned}
$$

所以

$$
f_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F_{Y|X}(y|x)}{\partial y} = \delta(y-g(x))
$$

于是 $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = f_X(x)\delta(y-g(x))$。