《统计信号处理》研讨题汇总

杨 鼎

目录

1 CRLB, 有效估计量

对于矢量形式的线型模型 $\mathbf{z}=\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}+\mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{w}$ 为高斯序列, PDF 为 $N(\mathbf{0},\sigma^{\mathbf{2}}\mathbf{I})$,(1) 试问有效估计量是否存在？CRLB 等于多少？如果有效估计量存在，该估计量服从什么分布？(2) 对于观测模型:z[n]=A+B • n+w[n] ,n=0,1,⋯,N-1, 其中 w[n] 是零均值高斯白噪声，方差为 σ^2,A 和 B 为待估计参数，试将此问题转化为线性模型，确定模型的各参数，并求出有效估计量及估计的方差阵。

(1) 有效估计量是否存在？

已知矢量线性模型 $\mathbf{z}=\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}+\mathbf{w}$，其中 $\mathbf{w}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2\mathbf{I})$ ，则有

$$p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})=(\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{N}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{z}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right]$$

对数似然函数

$$\ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})=-\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{z}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$$

对 $\boldsymbol{\theta}$ 求导有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}&=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{z}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right]\\&=-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{z}^T\mathbf{z}-\mathbf{z}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{z}+\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)\\&=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\mathbf{H}^T\mathbf{z}+2\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)\\&=\frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{z}-\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)\end{aligned}$$

若存在有效估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，即 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 无偏且方差达到 CRLB，由课本定理 3.2, 则当且仅当

$$\frac{\partial\ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})$$

成立，假定 $(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}$ 可逆，于是

$$\frac{\partial\ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}\left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{z}-\theta\right]$$

因此易知 $\mathbf{I}(\theta)=\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}$, 即 $CRLB=\mathbf{I}^{-1}(\theta)=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\sigma^2$, 有效估计量也存在, $\theta=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)\mathbf{H}^T\mathbf{z}$ $\hat{\boldsymbol{\theta}}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\theta},\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\sigma^2)$,

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\theta)]_{ij} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\mathbf{H}^T\mathbf{H}\theta\right) \\
&= -\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathbf{I}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z};\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] = -E\left[-\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}\right] = \frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}
$$

(2) 将观测模型转化为线性模型

将 $z[n] = A + Bn + w[n], n = 0, 1, ..., N-1$ 转化为 $\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$，易知

$$
\begin{aligned}
\theta &= \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 2 & ... & N-1 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

似然函数

$$
p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta}) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[z[n] - A - Bn\right]\right\}
$$

$$
\ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z[n] - A - Bn\right)^2
$$

求导有

$$\frac{\partial \ln p}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z[n]-A-Bn)$$
$$\frac{\partial \ln p}{\partial B} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z[n]-A-Bn)\,n$$
$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A^2} = -\frac{N}{\sigma^2}$$
$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial B^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n^2 = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)(2n-1)}{6}$$
$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A\partial B} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)}{2}$$

因此 Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -E[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A^2}] & -E[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A\partial B}] \\ -E[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial B\partial A}] & -E[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial B^2}] \end{bmatrix}$$

因为二阶导数均与 z 无关，所以

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)}{2} \\ \frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)}{2} & \frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix}$$

逆矩阵为

$$\mathbf{I}^{-1}(\theta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} & -\frac{6}{N(N+1)} \\ -\frac{6}{N(N+1)} & \frac{12}{N(N^2-1)} \end{bmatrix}$$

所以

$$var(\hat{A}) = \frac{2(2N-1)\sigma^2}{N(N+1)}$$

$$var(\hat{B}) = \frac{12\sigma^2}{N(N^2-1)}$$

根据，由定理 3.2 可知

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$$

有

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z};\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)}{2} \\ \frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)}{2} & \frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} - A \\ \hat{B} - B \end{bmatrix}$$

解得有效估计量

$$\hat{A} = \frac{2(2N-1)}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1} z[n] - \frac{6}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1} nz[n]$$

$$\hat{B} = -\frac{6}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1} z[n] + \frac{12}{N(N^2-1)}\sum_{n=0}^{N-1} nz[n]$$

方差阵 $\mathbf{C}_\theta = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$

假定 z[n]=A+W[n]，其中 w[n] 是零均值高斯白噪声，(1) 方差 σ^2 为已知量 A 的估计量为 $\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z[n]$, 试用蒙特卡洛仿真的方法分析估计量的性能 (估计量的均值、方差、PDF)。(2) 如果 A 和 σ^2 均未知，A 和 σ^2 的估计量分别为 $\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z[n]$ 、$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(z[n] - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z[n])^2$, 试用蒙特卡洛仿真的方法分析估计量的性能 (估计量的均值、方差、PDF)，并讨论估计量的性能随 N 的变化趋势。

(1) 估计量 $\hat{A}$ 的性能

进行一次仿真计算，得到 $E[\hat{A}] = 0.09941$,$var(\hat{A}) = 0.00095$，PDF 仿真结果如图 2.1。

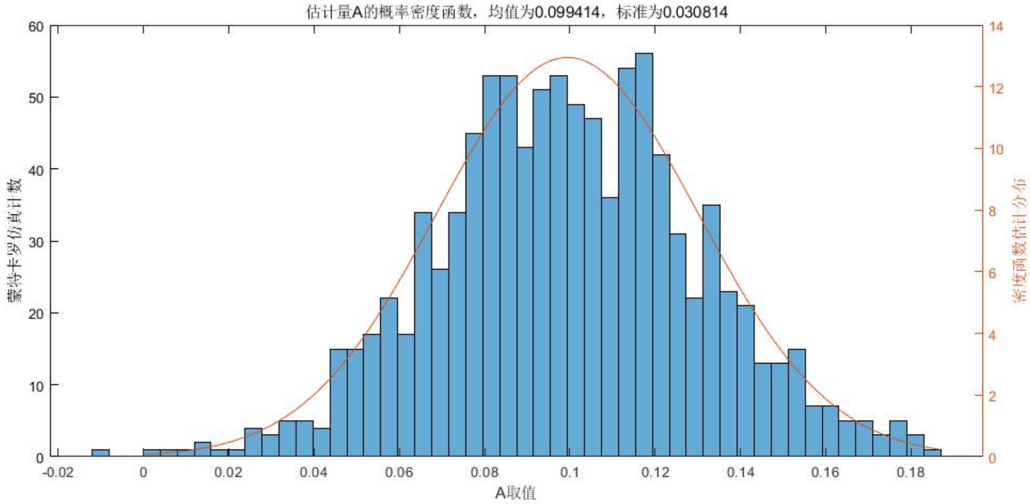

图 1.1: 估计量 $\hat{A}$ 的 PDF

(2) 估计量 $\hat{A}$ 和 σ^2 的性能

进行一次仿真计算，得到 $E[\hat{A}] = 0.10055$,$var(\hat{A}) = 0.00093$。估计量 $\hat{A}$ 的 PDF 仿真结果如图 2.2。

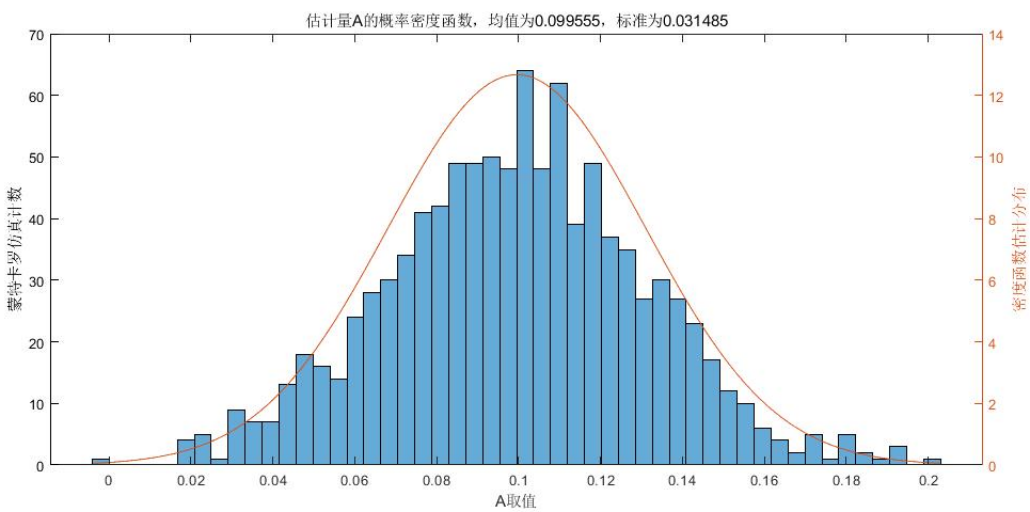

图 1.2: 估计量 $\hat{A}$ 的 PDF

得到 $E[\sigma^2] = 1.00011$,$var(\sigma^2) = 0.00196$。估计量 σ^2 的 PDF 仿真结果如图 2.3。

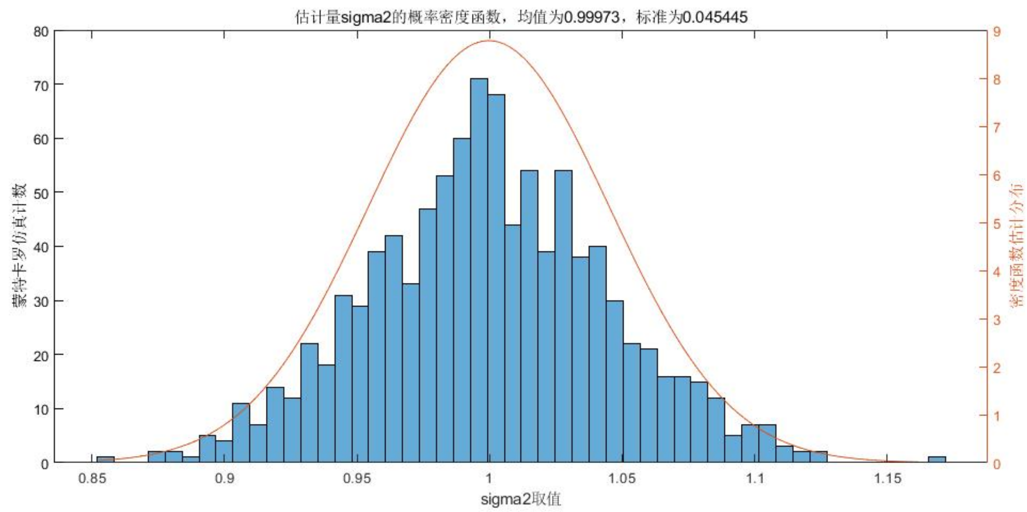

图 1.3: 估计量 σ^2 的 PDF

(3) 估计量性能随 N 的变化讨论

当 N 从 1 至 1000 变化时，估计量 $\hat{A}$ 和估计量 σ^2 的期望变化如图 2.4。

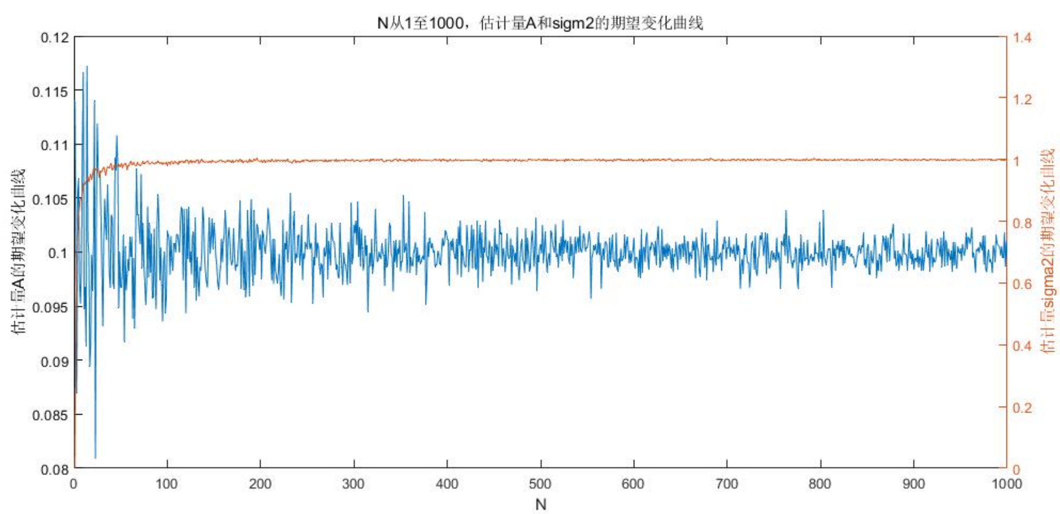

图 1.4: 估计量 $\hat{A}$ 和 σ^2 的期望随 N 增长的变化曲线

从图 2.4 中可以看出，当 N 等于 1000 时，估计量 $\hat{A}$ 和 σ^2 的期望接近于各自真值，这说明从无偏性角度来看，估计量 $\hat{A}$ 和 σ^2 都应当都是无偏估计。

当 N 从 1 至 1000 变化时，估计量 $\hat{A}$ 和估计量 σ^2 的方差的自然对数 (即 $\ln(\mathrm{var}(\hat{A}))$ 和 $\ln(\mathrm{var}(\sigma^2))$) 变化如图 2.5。

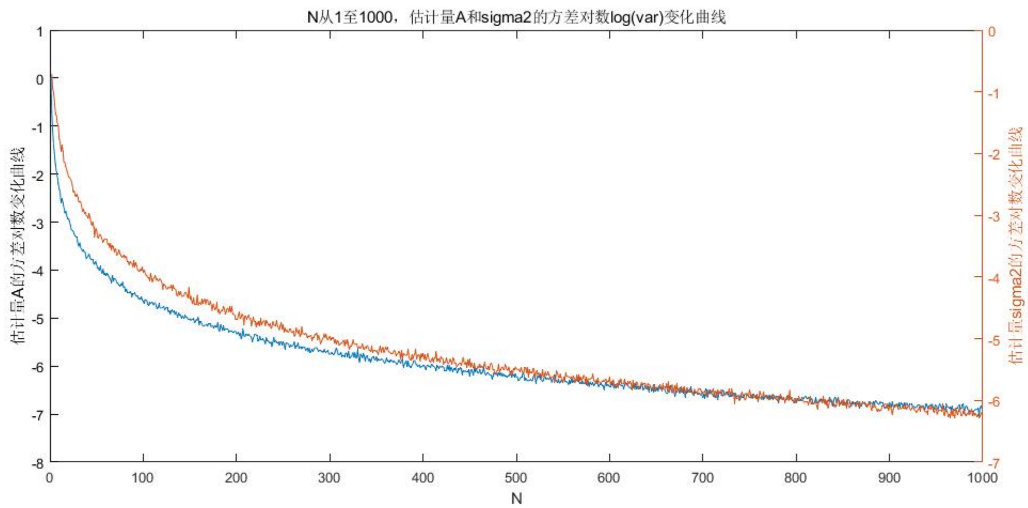

图 1.5: 估计量 $\hat{A}$ 和 σ^2 的方差自然对数 ln(var) 随 N 增长的变化曲线

由于估计量 $\hat{A}$ 和估计量 σ^2 的收敛速度均较快，为对比明显起见，图 2.5 中纵轴均取估计量方差的自然对数。从图 2.5 可以看出，随着 N 的增大，估计量 $\hat{A}$ 和估计量 σ^2 的方差均逐渐减小，且收敛速度接近。这说明从有效性角度来看，估计量 $\hat{A}$ 和估计量 σ^2 有效性接近。

2 正弦信号参数估计 CRLB

假定雷达接收信号可以表示为 $s = Acos(2\pi fn + \varphi) + w(n), n = 1, ..., N$,N 为观测次数,$w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。

(1)A、σ^2 已知，均为确定参数，f 未知,$0 < f < \frac{1}{2}$。试推导 f 估计的 CRLB ，采用 MATLAB 画出 CRLB 随频率、信噪比、观测次数的变化曲线。

(2) 若 A、φ、f 均未知，试推导 f 估计的 CRLB，采用 MATLAB 画出 CRLB 随其影响参数的变化曲线。并对比分析此时 f 估计方差的 CRLB 与第 (1) 问中 f 估计方差的 CRLB。

(3) 若噪声 $w(n)$ 服从瑞利分布，噪声平均功率与高斯分布情况下相同，试再次分析第 (1)、(2) 问中参数估计的 CRLB。并分析导致 CRLB 差异的原因。

(1) A、σ^2 已知，均为确定参数，f 未知

已知 $x[n] = s[n; \theta] + w[n]$, 其中 $s = Acos(2\pi fn + \varphi + w(n))$, n=1,⋯,N，$w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。极大似然函数

$$p(\mathbf{x}; \theta) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{\frac{N}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n] - s[n; \theta])^2\}$$

一次求导得到

$$\frac{\partial p(\mathbf{x};\theta)}{\partial \theta}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-s[n;\theta])\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial \theta}$$

二次求导得到

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{x};\theta)}{\partial \theta}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\{(x[n]-s[n;\theta])\frac{\partial^2 s[n;\theta]}{\partial \theta^2}-\left(\frac{s[n;\theta]}{\theta}\right)^2\}$$

取数学期望后得到

$$E\left(\frac{\partial^2 p(\mathbf{x};\theta)}{\partial \theta}\right)=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{s[n;\theta]}{\theta}\right)^2$$

将 $s=Acos(2\pi fn+\varphi+w(n))$ 带入得到

$$E\left(\frac{\partial^2 p(\mathbf{x};\theta)}{\partial \theta}\right)=-\frac{A^2}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[2\pi fn\sin(2\pi fn+\varphi)\right]^2$$

得到 CRLB 为

$$var(\hat{f})\geq\frac{\sigma^2}{A^2\sum_{n=0}^{N-1}\left[2\pi fn\sin(2\pi fn+\varphi)\right]^2}=\frac{1}{\eta^2\sum_{n=0}^{N-1}\left[2\pi fn\sin(2\pi fn+\varphi)\right]^2}$$

(2) A、φ、f 均未知

如果 A、φ、f 均未知, 估计量 $\boldsymbol{\theta}=[Af\phi]^T$，由于

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ij}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\partial s[n;\boldsymbol{\theta}]}{\partial \theta_i}\frac{\partial s[n;\boldsymbol{\theta}]}{\partial \theta_j}$$

如果 f 不靠近 0 或者 1/2，对于 $i=0,1,2$

$$\frac{1}{N^{i+1}}\sum_{n=0}^{N-1}n^i\sin(4\pi fn+2\varphi)\approx 0$$
$$\frac{1}{N^{i+1}}\sum_{n=0}^{N-1}n^i\cos(4\pi fn+2\varphi)\approx 0$$

利用近似，并且令 $\alpha=2\pi fn+\varphi$，得到

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{11} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2\alpha = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) \approx \frac{N}{2\sigma^2} \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{12} &= -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}A2\pi n\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{\pi A}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n\sin 2\alpha \approx 0 \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{13} &= -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}A\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{A}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sin 2\alpha \approx 0 \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{22} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}A^2(2\pi n)^2\sin^2\alpha = \frac{(2\pi A)^2}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) \\
&\approx \frac{(2\pi A)^2}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n^2 \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{23} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(2\pi nA)^2\sin^2\alpha \approx \frac{\pi A^2}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}A^2\sin^2\alpha \approx \frac{NA^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Fisher 信息矩阵为

$$
\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \frac{N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi^2A^2\sum_{n=0}^{N-1}n^2 & \pi A^2\sum_{n=0}^{N-1}n \\ 0 & \pi A^2\sum_{n=0}^{N-1}n & \frac{NA^2}{2} \end{bmatrix}
$$

从而得到

$$
var(\hat{f}) \geq \frac{12}{(2\pi)^2\eta N(N^2-1)}
$$

其中 $\eta = A^2/(2\sigma^2)$ 是 SNR。

(3) $w(n)$ 服从瑞利分布

假设 $w[n]$ 服从瑞利分布，分布函数为

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_0^2}\exp -\frac{x^2}{2\sigma_0^2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}
$$

期望为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0$，方差为 $(2-\sqrt{\frac{\pi}{2}})\sigma_0$。似然函数变为

$$p(\mathbf{x};\theta)=\prod_{n=0}^{N-1}\frac{x[n]-s[n;\theta]}{\sigma_0^2}\exp\left\{-\frac{(x[n]-s[n;\theta])^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

对数似然函数

$$\ln p(\mathbf{x};\theta)=-2N\ln\sigma_0+\sum_{n=0}^{N-1}\ln(x[n]-s[x,\theta])-\frac{(x[n]-s[n;\theta])^2}{2\sigma^2}$$

按照 (1) 中条件，对对数似然函数求一阶导

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln p(\mathbf{x};\theta)}{\partial\theta}&=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{-1}{x[n]-s[n;\theta]}\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial\theta}+\frac{x[n]-s[n;\theta]}{\sigma_0^2}\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial\theta}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial\theta}\left[\frac{x[n]-s[n;\theta]}{\sigma_0^2}-\frac{1}{x[n]-s[n;\theta]}\right]\end{aligned}$$

二阶导为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\ln p(\mathbf{x};\theta)}{\partial\theta^2}=&\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\partial^2 s[n;\theta]}{\partial\theta^2}\left[\frac{x[n]-s[n;\theta]}{\sigma_0^2}-\frac{1}{x[n]-s[n;\theta]}\right]\\&-\left(\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial\theta}\right)^2\left[\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{(x[n]-s[n;\theta])^2}\right]\end{aligned}$$

由于瑞利分布的均值为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0$，所以

$$E\left[\frac{\partial^2\ln p(\mathbf{x};\theta)}{\partial\theta^2}\right]=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{n=0}^{N-1}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{2}{\pi}})\sigma_0\frac{\partial^2 s[n;\theta]}{\partial\theta^2}-(\frac{2}{\pi}+1)\left(\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial\theta}\right)^2$$

将 $s=A\cos(2\pi fn+\varphi)$ 带入上式得到

$$E\left[\frac{\partial^2\ln p(\mathbf{x};\theta)}{\partial\theta^2}\right]=\frac{(2\pi n)^2A^2}{\sigma_0^2}\sum_{n=0}^{N-1}(\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\sqrt{\frac{\pi}{2}})\frac{\sigma_0}{A}\cos(2\pi fn+\varphi)-(\frac{2}{\pi}+1)(\sin 2\pi n+\varphi)^2$$