《统计信号处理》期末复习

杨 鼎

目录

1 第一题

设观测 $z_n \overset{i,i,d}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$, 其中 μ 已知，$\sigma > 0$ 为确定性位置参数。试考虑如下问题：

(1) 求 σ 的最大似然估计及克拉美-罗下限。

(2) 是否存在 σ 的有效估计量？若存在，试给出该估计量；若不存在，试说明原因。

2 第二题

设某雷达目标 ode 散射界面 (RSC) 服从指数分布 (例如 Swerling I 型目标), 利用单个脉冲对目标进行探测时，回波幅度服从瑞利分布。单个脉冲回波信号的观测样本可以写为

$$z_n = As_n + w_n \quad, n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

其中幅度 A 的概率密度函数为

$$p(A) = \begin{cases} \frac{A}{A_0^2} \exp\{-\frac{A^2}{2A_0^2}\} & , A \geq 0 \\ 0 & , A < 0 \end{cases}$$

$w_n \overset{i,i,d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \sigma^2$ 已知，$\overline{\sigma} = 2A_0^2$ 表示目标散射截面积的平均值 (已知量)，s_n 为已知的信号波形。试根据观测样本求回波幅度 A 的最大后验估计。

3 第三题

在高斯白噪声中观测正选信号，观测模型为

$$z_n = A \cos \frac{\pi}{3} n + w_n \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

其中 $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2), w_n \overset{i,i,d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$，且 A 与 w_n 相互独立。

(1) 记 $\mathbf{h}=\left[\cos(\frac{\pi}{3}\cdot 1)\quad \cos(\frac{\pi}{3}\cdot 2)\quad \cdots\cos(\frac{\pi}{3}\cdot(N-1))\right]^T$，试求幅度 A 的线性最小均方估计 (可用 h 表示)

若 $N=2,\sigma_A^2=1,\sigma_w^2=2,z_0=1,z_1=\frac{1}{2}$，求幅度 A 的线性最小均方估计的值。(提示：矩阵求逆引理 $(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}$)

4 第四题

考虑高斯白噪声中指数信号的检测问题，信号模型为

$$\begin{array}{ll}\mathcal{H}_0: & z_n=w_n \\ \mathcal{H}_1: & z_n=Ae^{\alpha n}+w_n\end{array}\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

其中 $w_n\overset{i,i,d}{\sim}\mathcal{N}(0,\sigma_w^2),\alpha,\sigma_w^2$ 均已知，信号幅度 A 未知。

(1) 试求广义似然比检测器的判决式形式，并针对给定的虚警率 P_{FA} 确定判决门限和检测概率表达式，分析检测概率的极限性能；【提示：$Q(x)=\int_x^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}dx$ 表示标准正态分布的右尾概率函数，$Q_{\chi_N^2(\lambda)}(x)$ 表示衷心参数为 λ 的 N 自由度非中心卡方分布右尾函数，$Q_{\chi_N^2}(x)$ 表示 N 自由度卡方分布右尾函数】

(2) 画出检测器结构图。

5 第五题

考虑 SAR 图像中目标检测问题。如图 1 所示，SAR 图像中的像素包含目标 (target)、背景杂波 (clutter) 以及阴影 (shadow) 等三种类型。背景杂波区、阴影区、目标区像素灰度值 z 可用具有不同参数的瑞利分布描述，即

$$p(z;\sigma_i^2)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma_i^2}\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma_i^2}\} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases},i=0,1,2$$

其中 $\sigma_0^2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 分别表示背景杂波区、阴影区和目标区像素灰度值的分布参数，$\sigma_2^2>\sigma_0^2>\sigma_1^2>0$ 为已知参数。目标检测的基本任务是根据给定像素的灰度值 z 判断该像素所在的区域。

(1) 根据上述描述，针对像素的灰度值观测 z 建立假设模型；

(2) 假定三种假设的先验概率均相等，且 $\sigma_2^2=10\sigma_1^2,\sigma_0^2=2\sigma_1^2$，试求最小总错误概率准则下的检验判决表达式；

(3) 在第二问的条件下，试求将背景杂波区的像素误判为目标像素区像素的概率。(提示：可以利用函数的单调性判断对数似然函数之间的相对大小关系)