《统计信号处理》第二教学单元研讨题

杨鼎, 韦可雷, 高司博, 高涵博

1 第一题

什么叫做完备的充分统计量？如何利用完备的充分统计量估计未知参数？由充分统计量是否能够获得 MVUE？获得最大似然估计的途径有哪些？最大似然估计与有效估计量、充分统计量、MVUE 之间是否有联系？可举例验证你的观点。

(1) 什么叫做完备的充分统计量？

1. 充分性条件：如果 $PDFp(\mathbf{x};\theta)$ 能够分解为

$$p(\mathbf{x};\theta) = g(T(\mathbf{x},\theta))h(\mathbf{x})$$

其中 g 为只是通过 $T(\mathbf{x})$ 才与 $\mathbf{x}$ 有关的函数，h 只是 $\mathbf{x}$ 的函数，那么 $T(\mathbf{x})$ 是 θ 的充分统计量。

2. 完备性条件：如果对所有的 θ, 条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(T)p(T;\theta)dT = 0$$

只对零函数 $v(T) = 0$(对所有的 T) 满足，那么，我们就说充分统计量是完备的。

(2) 如何利用完备的充分统计量估计未知参数？

利用 RBLS 定理

如果 $\check{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量，$T(x)$ 是 θ 的充分统计量，那么 $\check{\theta} = E(\theta|\check{T}(x))$ 是

1.θ 是一个适用的估计量 (与 θ 无关)；

2. 无偏的；

3. 对所有的 θ，它的方差要小于或等于 $\check{\theta}$ 的方差；

4. 特别地，当 $T(x)$ 是完备的充分统计量时，$\check{\theta}$ 是 MVU 估计量。

(3) 由充分统计量是否能够获得 MVUE？

根据 BRLS 定理，如果充分统计量 $T(\mathbf{x})$ 是完备的，那么它就是 MVUE。1. 利用 Neyman-Fisher 因子分解定理来求一个 θ 的统计量，即 $T(\mathbf{x})$;

2. 确定充分统计量是否完备，如果是，继续往下进行；否则这个方法不能使用；3. 求一个充分统计量的函数，以此来得到一个无偏估计量 $\hat{\theta} = g(T(\mathbf{x}))$，那么 $\hat{\theta}$ 就是 MVUE。或者，计算 $\hat{\theta} = E(\check{\theta}|T(\theta))$, 其中 $\check{\theta}$ 是任意无偏估计量。

(4) 获得最大似然估计的途径有哪些？

1. 写出似然函数，求出使得似然函数最大的估计量 $\hat{\theta}$

2. 已知充分统计量 $T(\mathbf{x})$, 根据 Neyman-Fisher 因子分解定理,极大似然函数最大化等价于 $g(T(\mathbf{x}, \theta))$ 的最大化，因此求得使 $g(T(\mathbf{x}, \theta))$ 关于 θ 最大化的估计量即为 MLE。

(5) 最大似然估计与有效估计量、充分统计量、MVUE 之间是否有联系？

有效估计量：无偏且达到 CRLB 的估计量。

充分统计量：包含待估计量所有信息的统计量。

MVUE：在无偏估计的前提下，使得方差最小的估计量。

MVUE 估计量和有效估计量都是无偏的，但 MVUE 不一定是有效估计量 (见教材图 3.2); 根据教材定理 7.1, 最大似然估计量可以视为渐进无偏的和渐进达到 CRLB，因此它是渐进有效的；根据 Neyman-Fisher 因子分解定理, 对于充分统计量 $T(\mathbf{x})$，PDF 可以分解为 $p(T(\mathbf{x}); \theta) = g(T(\mathbf{x}, \theta))h(\mathbf{x})$, 求 MLE 时，使似然函数最大化，等价于使 $g(T(\mathbf{x}, \theta))$ 关于 θ 求得极大值，因此，MLE 是充分统计量 $T(\mathbf{x})$ 的函数。

2 第二题

考虑高斯噪声中正弦信号参数估计问题。观测模型为

$$x_n = A\cos 2\pi f_0 n + w_n, n = 0, 1, \ldots, N-1$$

其中 w_n 为零均值高斯噪声。

(1) 当 $w_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$,$f_0$、$\sigma^2$ 均已知，你认为可以用哪些方法对参数 A 进行估计？

方法一：利用 RBLS 定理求解。观测信号的似然函数为

$$p(\mathbf{x}; A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x_n - A\cos 2\pi f_0 n)^2\right\}$$

可变换为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}; A) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x_n^2 + A^2\cos^2 2\pi f_0 n - 2x_n Acos2\pi f_0 n)\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(A^2\cos^2 2\pi f_0 n - 2x_n Acos2\pi f_0 n)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x_n^2\right\} \end{aligned}$$

令

$$h(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=1}^{N-1} x_n^2\right\}$$
$$T(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos 2\pi f_0 n$$

其中

$$\begin{aligned} E[T(x)] &= \left[\sum_{n=0}^{N-1}(A\cos 2\pi f_0 n + w_n)\cos 2\pi f_0 n\right] \\ &= A\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2 2\pi f_0 n \end{aligned}$$

令

$$\hat{A} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos 2\pi f_0 n}{\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2 2\pi f_0 n}$$

则 A 的估计量 $\hat{A}$ 满足 $E[\hat{A}] = A$。

方法二：利用最大似然法求解。对观测信号的似然函数取对数

$$\ln p(\mathbf{x}; A) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x_n - A\cos 2\pi f_0 n)^2$$

求导得

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; A)}{\partial A} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x_n - A\cos 2\pi f_0 n)\cos(2\pi f_0 n)$$

令上式等于零，得

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos(2\pi f_0 n) = \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0 n) cos(2\pi f_0 n)$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos(2\pi f_0 n) = A\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2(2\pi f_0 n)$$

估计量 $\hat{A}$ 为

$$\hat{A} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos 2\pi f_0 n}{\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2 2\pi f_0 n}$$

方法三：利用 BLUE 求解。对于观测量 $x_n = A\cos(2\pi f_0 n) + w_n$

$$E[x_n] = A\cos(2\pi f_0 n)$$

令 $E[x_n] = s[n]A$，即 $s[n] = \cos 2\pi f_0 n$, 则 BLUE 为

$$\hat{A} = \frac{\mathbf{s}^T C^{-1} x}{\mathbf{s}^T C^{-1} s}$$

其中 $s = [s(1), s(2), \ldots, s(n-1)]^T$, 又因为 w_n 是方差为 σ^2 的零均值高斯噪声，则 $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}$，所以估计量可以表示为

$$\hat{A} = \frac{\mathbf{s}^T C^{-1} x}{\mathbf{s}^T C^{-1} s} = \frac{\mathbf{s}^T x}{\mathbf{s}^T s} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos 2\pi f_0 n}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2 2\pi f_0 n}$$

(2)$A = 1, \sigma^2 = 0.1$ 时，绘制频率参数的克拉美-罗下限曲线，并解释你观察到的现象。

首先计算频率的克拉美-罗下限：

$$\frac{\partial s[n; f_0]}{\partial f_0} = -2\pi n A \sin(2\pi f_0 n)$$

$$var(\hat{f}) \geq \frac{\sigma^2}{A^2 \sum_{n=0}^{N-1} 4\pi^2 n^2 \sin^2(2\pi f_0 n)} = \frac{\sigma^2}{\frac{A^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} 4\pi^2 n^2 (1 - \cos(4\pi f_0 n))}$$

由仿真结果可以看出，CRLB 在 $f_0 = 0$ 或 0.5 时趋向无穷大，这是由于分母值为零，此时估计性能最差。而随着数据长度的增加，CRLB 总体在变小，且震荡越来越剧烈，这时由于分母值与 N 有关，N 越大，信号随位置参数的变换率越大，CELB 越小，估计的精度越好。

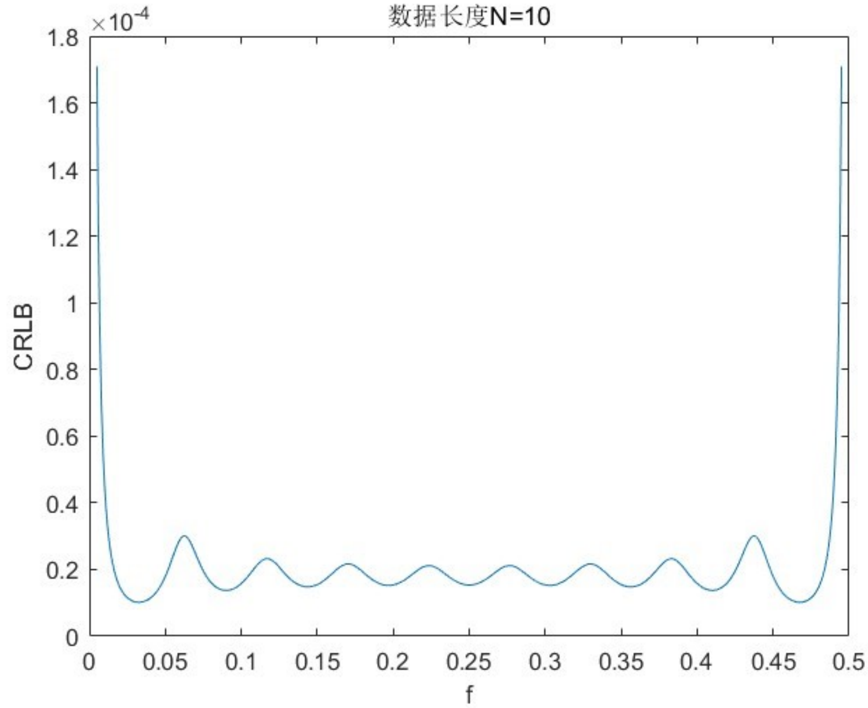

图 2.1: 数据长度 N=10 时的 CRLB

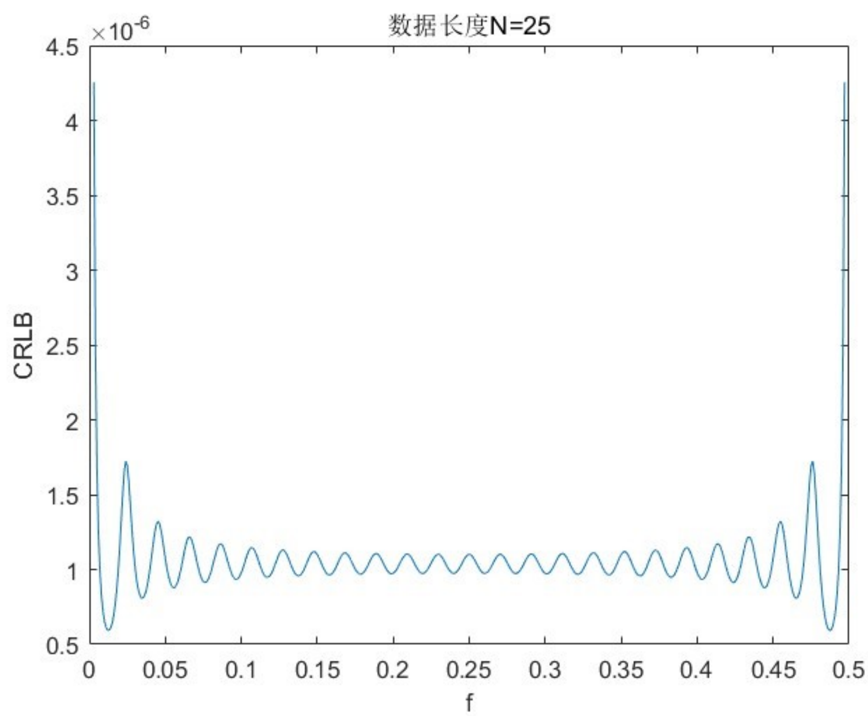

图 2.2: 数据长度 N=25 时的 CRLB

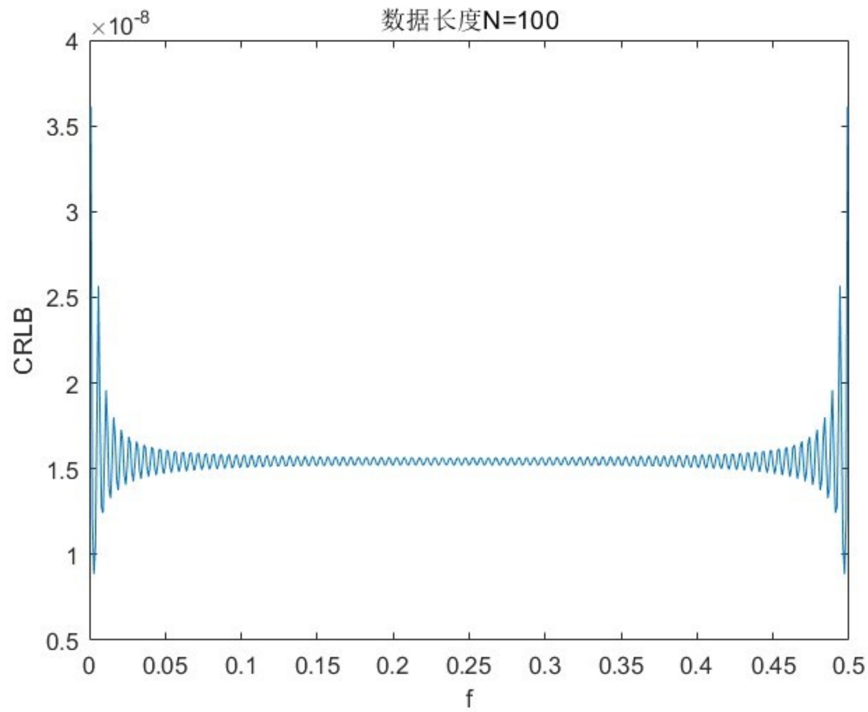

图 2.3: 数据长度 N=100 时的 CRLB

(3)$A=1, f_0=0.25, f_0=0.05$ **时，分别对频率参数的最大似然估计进行仿真，绘制参数估计性能随样本量、信噪比的变化曲线，并与克拉美-罗下限进行对比；分析验证最大似然估计的渐进性能。**

当 $A=1$ 时，极大似然函数为

$$p(\mathbf{x}; f_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x[n]-\cos 2\pi f_0 n\right]^2\right\}$$

使得似然函数最大，等价于使指数项

$$J(f_0) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[x[n]-\cos 2\pi f_0 n\right]^2$$

最小。对于集合 $(0, 1/2)$ 内的所有 f_0, 利用网格搜索法，可以求出 $J(f_0)$ 的最小值，这时的 f_0 即为 MLE。

(4) 如果 w_n **为零均值高斯色噪声，可用如下 AR 模型描述**

$$w_n = aw_{n-1} + e_n$$

其中，$e_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0,\sigma_e^2), a=0.8, A=1$，试问什么情况下能够获得更准确的频率参数估计？试与白噪声的情况进行比较（相同的噪声方差下）。

根据递推关系，$w_n = aw_{n-1}+e_n$，可知 $E(w_n)=aE(w_{n-1})$,$var(E_n)=a^2var(E_{n-1})+\sigma_e^2$, 当 n 足够大时，$E(w_n)=\frac{0}{1-a}=0$,$var(w_n)=\frac{\sigma_e^2}{1-a^2}=\frac{\sigma_e^2}{0.36}$。

根据中心极限定理可知，当 n 足够大时，$w_n \sim \mathcal{N}(0,\frac{\sigma_e^2}{0.36})$。由 e_n 相互独立可知 w_n 相互独立。

问题等价于，当 $w_n \overset{i,i,d}{\sim} \mathcal{N}\left(0,\left(\frac{\sigma_e}{0.6}\right)^2\right)$ 时，求 $x_n=\cos 2\pi f_0 n + w_n$ 更准确的频率估计。

似然函数为

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x};f_0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}[x[n]-\cos 2\pi f_0 n]^2\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]-2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos 2\pi f_0 n+\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2 2\pi f_0 n\right]\right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n]\right]\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos 2\pi f_0 n+\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2 2\pi f_0 n\right]\right\}
\end{aligned}
$$

其中，$\sigma=\frac{\sigma_e}{0.6}$。由于有 $\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos 2\pi f_0 n$ 项，且其中 f_0 是未知的，所以不能用 Neyman-Fisher 因子分解定理，即无法求出 f_0 的充分统计量，这时应使用最大似然估计。要使似然函数

$$
p(\mathbf{x};f_0)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}[x[n]-\cos 2\pi f_0 n]^2\right\}
$$

最大，等价于使指数项 $J(f_0)=\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\cos 2\pi f_0 n)^2$ 最小。对于集合 $(0,1/2)$ 内的所有 f_0, 利用网格搜索法，可以求出 $J(f_0)$ 的最小值，这时的 f_0 即为 MLE。

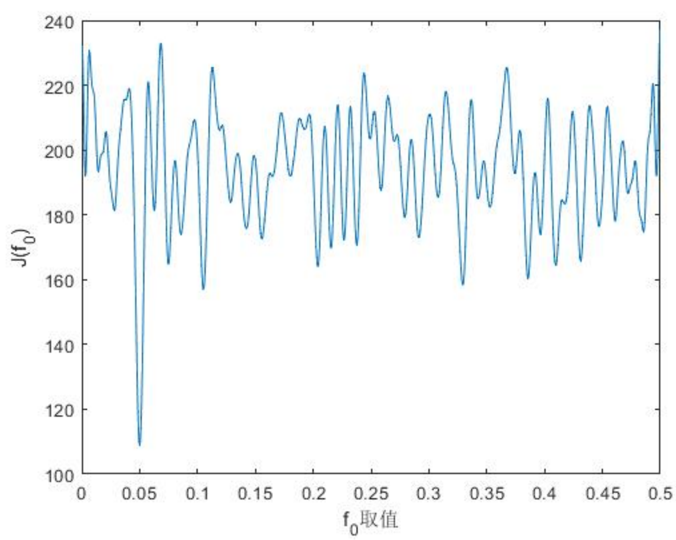

图 2.4: 通过 J 的最小值寻找 f_0 的 MLE

根据频率的 CRLB 可知

$$\begin{aligned} var(\hat{f}) &\geq \frac{\sigma^2}{\frac{A^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1} 4\pi^2 n^2 (1-\cos(4\pi f_0 n))} \\ &= \frac{(\frac{\sigma_e}{0.6})^2}{\frac{A^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1} 4\pi^2 n^2 (1-\cos(4\pi f_0 n))} \end{aligned}$$

色噪声与白噪声相比，CRLB 变小，估计精度变高。