

《统计信号处理》第一教学单元研讨题

杨鼎, 韦可雷, 高司博, 高涵博

目录

1	第一题	1
2	第二题	4
3	第三题	12
4	第四题	15

1 第一题

对于矢量形式的线型模型 $\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$, 其中 \mathbf{w} 为高斯序列, PDF 为 $N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, (1) 试问有效估计量是否存在? CRLB 等于多少? 如果有效估计量存在, 该估计量服从什么分布? (2) 对于观测模型: $z[n] = A + B \cdot n + w[n]$, $n=0, 1, \dots, N-1$, 其中 $w[n]$ 是零均值高斯白噪声, 方差为 σ^2 , A 和 B 为待估计参数, 试将此问题转化为线性模型, 确定模型的各参数, 并求出有效估计量及估计的方差阵。

(1) 有效估计量是否存在?

已知矢量线性模型 $\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, 则有

$$p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}) \right]$$

对数似然函数

$$\ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$$

对 $\boldsymbol{\theta}$ 求导有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} (\mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2\mathbf{H}^T \mathbf{z} + 2\mathbf{H}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{H}^T \mathbf{z} - \mathbf{H}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

若存在有效估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 即 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 无偏且方差达到 CRLB, 由课本定理 3.2, 则当且仅当

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$$

成立, 假定 $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$ 可逆, 于是

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{\sigma^2} \left[(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} - \boldsymbol{\theta} \right]$$

因此易知 $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{\sigma^2}$, 即 $CRLB = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma^2$, 有效估计量也存在, $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} \hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma^2)$,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\theta)]_{ij} &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\mathbf{H}^T \mathbf{H} \theta) \\
&= -\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{I}(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = -E \left[-\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{\sigma^2} \right] = \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{\sigma^2}$$

(2) 将观测模型转化为线性模型

将 $z[n] = A + Bn + w[n], n = 0, 1, \dots, N-1$ 转化为 $\mathbf{z} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$, 易知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

似然函数

$$p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [z[n] - A - Bn]^2 \right\}$$

$$\ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z[n] - A - Bn)^2$$

求导有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln p}{\partial A} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z[n] - A - Bn) \\
\frac{\partial \ln p}{\partial B} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z[n] - A - Bn) n \\
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A^2} &= -\frac{N}{\sigma^2} \\
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial B^2} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \\
\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A \partial B} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} n = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)}{2}
\end{aligned}$$

因此 Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -E\left[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial A \partial B}\right] \\ -E\left[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial B \partial A}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial B^2}\right] \end{bmatrix}$$

因为二阶导数均与 z 无关, 所以

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)}{2} \\ \frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)}{2} & \frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix}$$

逆矩阵为

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} & -\frac{6}{N(N+1)} \\ -\frac{6}{N(N+1)} & \frac{12}{N(N^2-1)} \end{bmatrix}$$

所以

$$\text{var}(\hat{A}) = \frac{2(2N-1)\sigma^2}{N(N+1)}$$

$$\text{var}(\hat{B}) = \frac{12\sigma^2}{N(N^2-1)}$$

根据, 由定理 3.2 可知

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$$

有

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)}{2} \\ \frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)}{2} & \frac{1}{\sigma^2} \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} - A \\ \hat{B} - B \end{bmatrix}$$

解得有效估计量

$$\hat{A} = \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] - \frac{6}{N(N+1)} \sum_{n=0}^{N-1} nz[n]$$

$$\hat{B} = -\frac{6}{N(N+1)} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] + \frac{12}{N(N^2-1)} \sum_{n=0}^{N-1} nz[n]$$

方差阵 $\mathbf{C}_\theta = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$

2 第二题

假定 $z[n]=A+W[n]$ ，其中 $w[n]$ 是零均值高斯白噪声，(1) 方差 σ^2 为已知量 A 的估计量为 $\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n]$ ，试用蒙特卡洛仿真的方法分析估计量的性能 (估计量的均值、方差、PDF)。(2) 如果 A 和 σ^2 均未知， A 和 σ^2 的估计量分别为 $\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n]$ 、 $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (z[n] - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n])^2$ ，试用蒙特卡洛仿真的方法分析估计量的性能 (估计量的均值、方差、PDF)，并讨论估计量的性能随 N 的变化趋势。

(1) 估计量 \hat{A} 的性能

```

1 close all
2 sigma2=1;%假设方差为1
3 sigma=sqrt(sigma2);
4 A=0.1;%预设A为0.1
5 N=1000;%每组观测产生N个z
6 M=1000;%共进行M组观测
7 %%
8 %进行蒙特卡洛模拟实验，M次观测
9 A_est=zeros(1,M);

```

```

10 for s=1:M
11     a_est=observe(N,A,sigma);%产生一组观测
12     A_est(1,s)=a_est;
13 end
14 expect_A=mean(A_est);%期望
15 variance_A=var(A_est);%方差
16 fprintf('估计量A期望为%1.5f, 方差为%2.5f\n',expect_A,variance_A)
17
18 %使用正态分布估计参数
19 params=mle(A_est,'distribution','normal');
20 A_mle_mu=params(1);
21 A_mle_sigma=params(2);
22
23 figure
24 his=histogram(A_est,NumBins=50);
25 yyaxis right
26 x=linspace(0,max(A_est),200);
27 pdf=plot(x,1/(sqrt(2*pi)*A_mle_sigma)*exp(-(x-A_mle_mu).^2/(2*A_mle_sigma^2)));
28 title(['估计量A的概率密度函数, 均值为' num2str(A_mle_mu) ', 标准差为'
        num2str(A_mle_sigma)])
29 xlabel('A取值')
30 yyaxis left
31 ylabel('蒙特卡罗仿真计数')
32 yyaxis right
33 ylabel('密度函数估计分布')
34 set(gcf,'unit','normalized','position',[0.2,0.2,0.5,0.33])
35 %%
36 % 定义观测函数observe
37 function a_est=observe(N,A,sigma)
38 a_est=0;%一次估计量
39 for i=1:N
40     z=A+sigma*randn;%得到z的1次抽样结果
41     a_est=a_est+z;
42 end
43 a_est=a_est/N;%计算1次抽样的估计量
44 end

```

进行一次仿真计算, 得到 $E[\hat{A}] = 0.09941, var(\hat{A}) = 0.00095$, PDF 仿真结果如图 2.1。

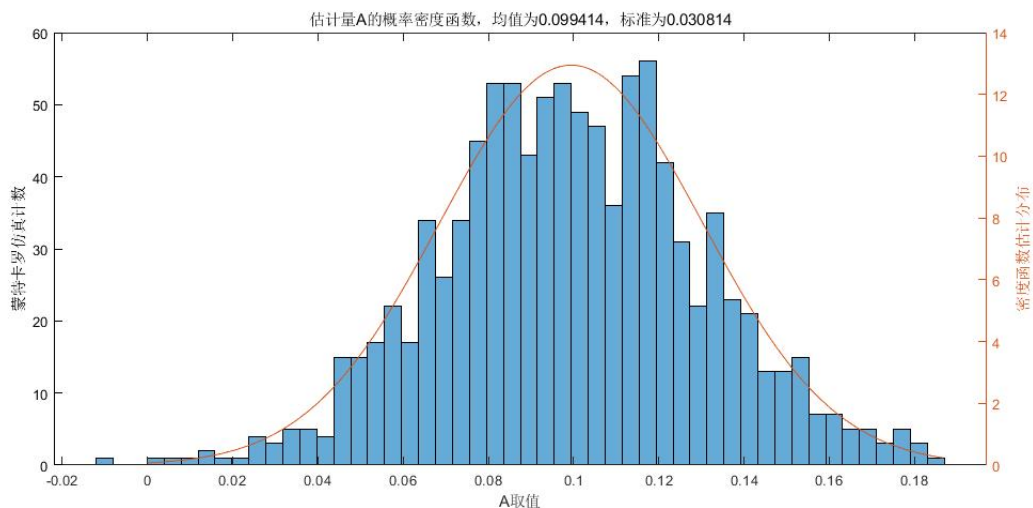


图 2.1: 估计量 \hat{A} 的 PDF

(2) 估计量 \hat{A} 和 σ^2 的性能

```

1 close all
2 sigma2=1;%假设方差为1
3 sigma=sqrt(sigma2);
4 A=0.1;%预设A为0.1
5 N=1000;%每组观测产生N个z
6 M=1000;%共进行M组观测
7 %%
8 %进行蒙特卡洛模拟实验，M次观测
9 A_est=zeros(1,M);
10 Sigma2_est=zeros(1,M);
11 for s=1:M
12     [a_est,sigma2_est]=observe(N,A,sigma);%产生一组观测
13     A_est(1,s)=a_est;
14     Sigma2_est(1,s)=sigma2_est;
15 end
16 %%
17 %分析估计量A
18 expect_A=mean(A_est);%期望
19 variance_A=var(A_est);%方差
20 fprintf('估计量A期望为%.5f，方差为%.5f\n',expect_A,variance_A)
21

```

```

22 %使用正态分布估计A服从分布的参数
23 params_A=mle(A_est,'distribution','normal');
24 A_mle_mu=params_A(1);
25 A_mle_sigma=params_A(2);
26
27 figure
28 his_A=histogram(A_est,NumBins=50);
29 yyaxis right
30 x=linspace(min(A_est),max(A_est),200);
31 pdf_A=plot(x,1/(sqrt(2*pi)/A_mle_sigma)*exp(-(x-A_mle_mu).^2/(2*A_mle_sigma^2)));
32 title(['估计量A的概率密度函数, 均值为' num2str(A_mle_mu) ', 标准为'
        num2str(A_mle_sigma)])
33 xlabel('A取值')
34 yyaxis left
35 ylabel('蒙特卡罗仿真计数')
36 yyaxis right
37 ylabel('密度函数估计分布')
38 set(gcf,'unit','normalized','position',[0.2,0.2,0.5,0.33])
39 %%
40 %分析估计量Sigma2
41 expect_sigma=mean(Sigma2_est);%期望
42 variance_sigma=var(Sigma2_est);%方差
43 fprintf('估计量期望sigma2为%1.5f, 方差为%2.5f\n',expect_sigma,variance_sigma)
44
45 %使用正态分布估计sigma2服从分布的参数
46 params_sigma=mle(Sigma2_est,'distribution','normal');
47 sigma2_mle_mu_est=params_sigma(1);
48 sigma2_mle_sigma=params_sigma(2);
49
50 figure
51 his_sigma2=histogram(Sigma2_est,NumBins=50);
52 yyaxis right
53 x=linspace(min(Sigma2_est),max(Sigma2_est),200);
54 pdf_sigma2=plot(x,1/(sqrt(2*pi)/sigma2_mle_sigma)*exp(-(x-sigma2_mle_mu_est).^2/...
55 (2*sigma2_mle_sigma^2)));
56 title(['估计量sigma2的概率密度函数, 均值为' num2str(sigma2_mle_mu_est) ', 标准为'
        num2str(sigma2_mle_sigma)])
57 xlabel('sigma2取值')
58 yyaxis left

```



```

59 ylabel('蒙特卡罗仿真计数')
60 yyaxis right
61 ylabel('密度函数估计分布')
62 set(gcf,'unit','normalized','position',[0.2,0.6,0.5,0.33])
63 %%
64 % 定义观测函数observe
65 function [a_est,sigma_est]=observe(N,A,sigma)
66 Z=zeros(1,N);
67 for n=1:N
68     z=A+sigma*randn;%得到z的1次抽样结果
69     Z(1,n)=z;
70 end
71 a_est=sum(Z)/N;%计算1次观测的A估计量
72 sigma_est=sum((Z-a_est).^2)/N;
73 end

```

进行一次仿真计算，得到 $E[\hat{A}] = 0.10055, \text{var}(\hat{A}) = 0.00093$ 。估计量 \hat{A} 的 PDF 仿真结果如图 2.2。

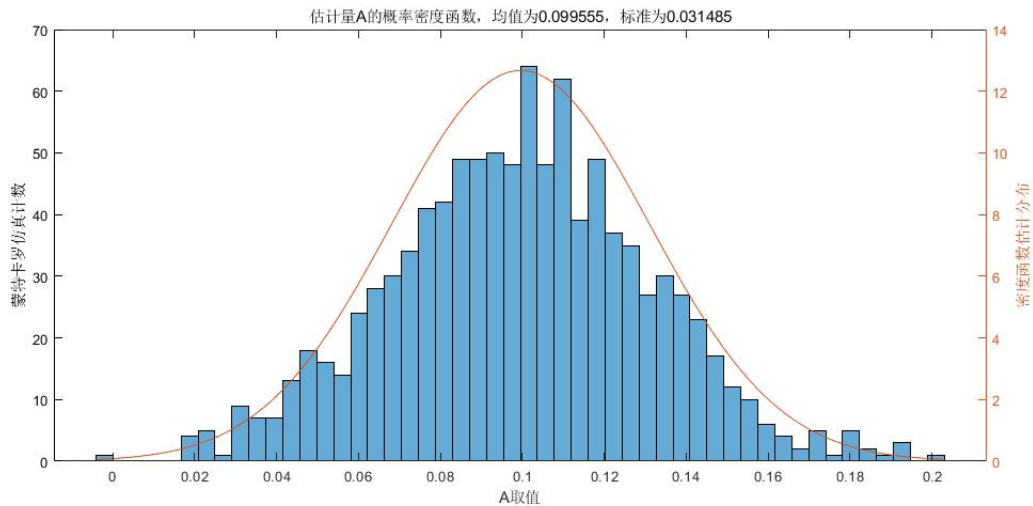


图 2.2: 估计量 \hat{A} 的 PDF

得到 $E[\sigma^2] = 1.00011, \text{var}(\sigma^2) = 0.00196$ 。估计量 σ^2 的 PDF 仿真结果如图 2.3。

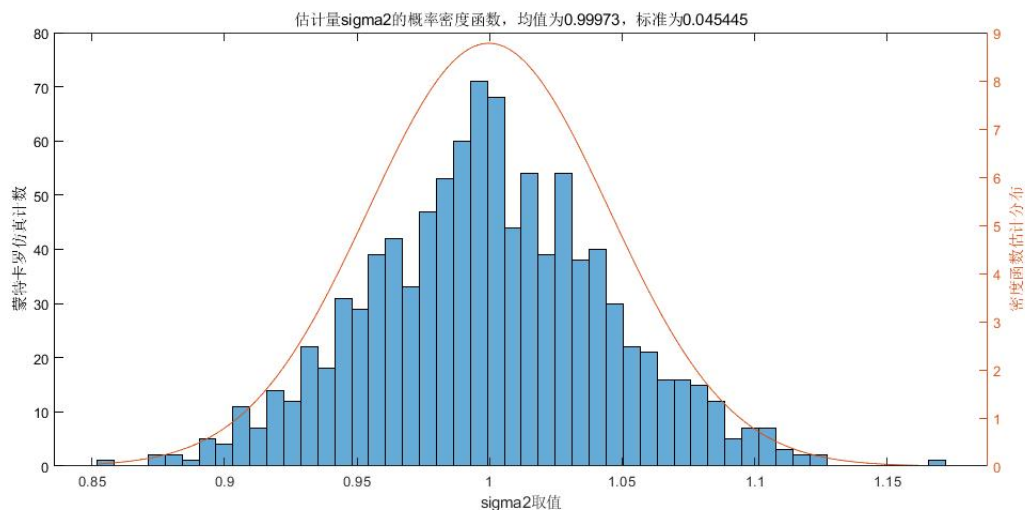


图 2.3: 估计量 σ^2 的 PDF

(3) 估计量性能随 N 的变化讨论

```

1 close all
2 sigma2=1;%假设方差为1
3 sigma=sqrt(sigma2);
4 A=0.1;%预设A为0.1
5 N=1000;%每组观测产生N个z
6 M=1000;%共进行M组观测
7 %%
8 %记录估计量A的期望、方差，估计量sigma2的期望、方差，随N的变化
9 Expect_A=zeros(1,N);%期望
10 Variance_A=zeros(1,N);%方差
11
12 Expect_sigma=zeros(1,N);%期望
13 Variance_sigma=zeros(1,N);%方差
14
15 for i=1:N
16     [expect_A,variance_A,expect_sigma,variance_sigma]=MonteCralo(M,i,A,sigma);
17     %进行一次蒙特卡洛仿真
18
19     %记录一次仿真结果
20     Expect_A(1,i)=expect_A;
21     Variance_A(1,i)=variance_A;

```

```

22
23 Expect_sigma(1,i)=expect_sigma;
24 Variance_sigma(1,i)=variance_sigma;
25 end
26
27 figure
28 x=linspace(1,N,N);
29 Exp_A=plot(x,Expect_A);
30 yyaxis right
31 Exp_sigma=plot(x,Expect_sigma);
32 title('N从1至1000, 估计量A和sigma2的期望变化曲线')
33 xlabel('N')
34 yyaxis left
35 ylabel('估计量A的期望变化曲线')
36 yyaxis right
37 ylabel('估计量sigma2的期望变化曲线')
38 set(gcf,'unit','normalized','position',[0.2,0.6,0.5,0.33])
39
40 figure
41 Var_A=plot(x,log(Variance_A));
42 yyaxis right
43 Var_sigma=plot(x,log(Variance_sigma));
44 title('N从1至1000, 估计量A和sigma2的方差对数log(var)变化曲线')
45 xlabel('N')
46 yyaxis left
47 ylabel('估计量A的方差对数变化曲线')
48 yyaxis right
49 ylabel('估计量sigma2的方差对数变化曲线')
50 set(gcf,'unit','normalized','position',[0.2,0.2,0.5,0.33])
51 %%
52 % 定义观测函数observe
53 function [a_est,sigma_est]=observe(N,A,sigma)
54 Z=zeros(1,N);
55 for n=1:N
56     z=A+sigma*randn;%得到z的1次抽样结果
57     Z(1,n)=z;
58 end
59 a_est=sum(Z)/N;%计算1次观测的A估计量
60 sigma_est=sum((Z-a_est).^2)/N;

```

```

61 end
62 %%
63 % 定义蒙特卡洛仿真函数,即以N次抽样作为一组观测,以M次观测作为计算一次仿真结果
64 function [expect_A,variance_A,expect_sigma,variance_sigma]=MonteCralo(M,N,A,sigma)
65 A_est=zeros(1,M);
66 Sigma_est=zeros(1,M);
67 for s=1:M
68     [a_est,sigma_est]=observe(N,A,sigma);%产生一组观测
69     A_est(1,s)=a_est;
70     Sigma_est(1,s)=sigma_est;
71 end
72 expect_A=mean(A_est);%期望
73 variance_A=var(A_est);%方差
74 expect_sigma=mean(Sigma_est);%期望
75 variance_sigma=var(Sigma_est);%方差
76 end

```

当 N 从 1 至 1000 变化时, 估计量 \hat{A} 和估计量 σ^2 的期望变化如图 2.4。

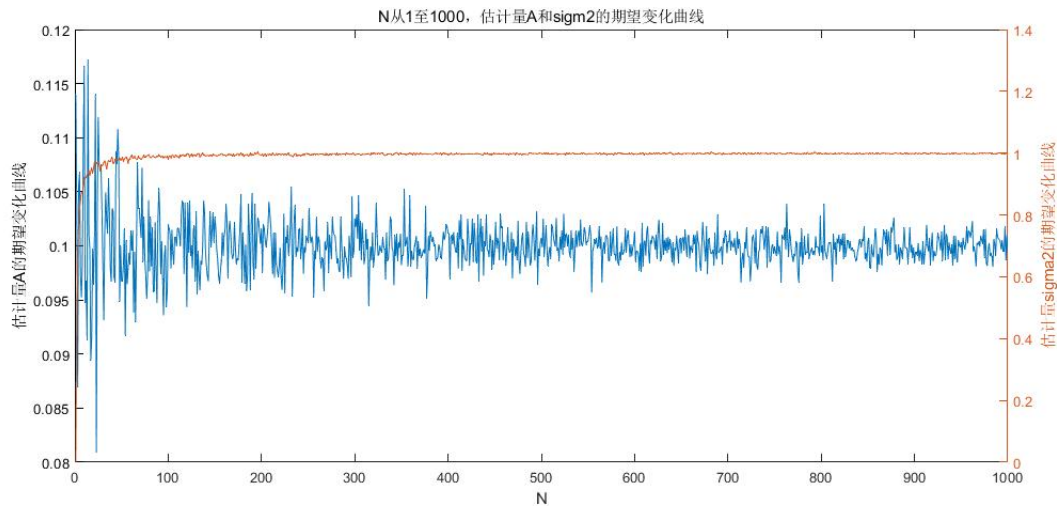


图 2.4: 估计量 \hat{A} 和 σ^2 的期望随 N 增长的变化曲线

从图 2.4 中可以看出, 当 N 等于 1000 时, 估计量 \hat{A} 和 σ^2 的期望接近于各自真值, 这说明从无偏性角度来看, 估计量 \hat{A} 和 σ^2 都应当都是无偏估计。

当 N 从 1 至 1000 变化时, 估计量 \hat{A} 和估计量 σ^2 的方差的自然对数 (即 $\ln(\text{var}(\hat{A}))$ 和 $\ln(\text{var}(\sigma^2))$) 变化如图 2.5。

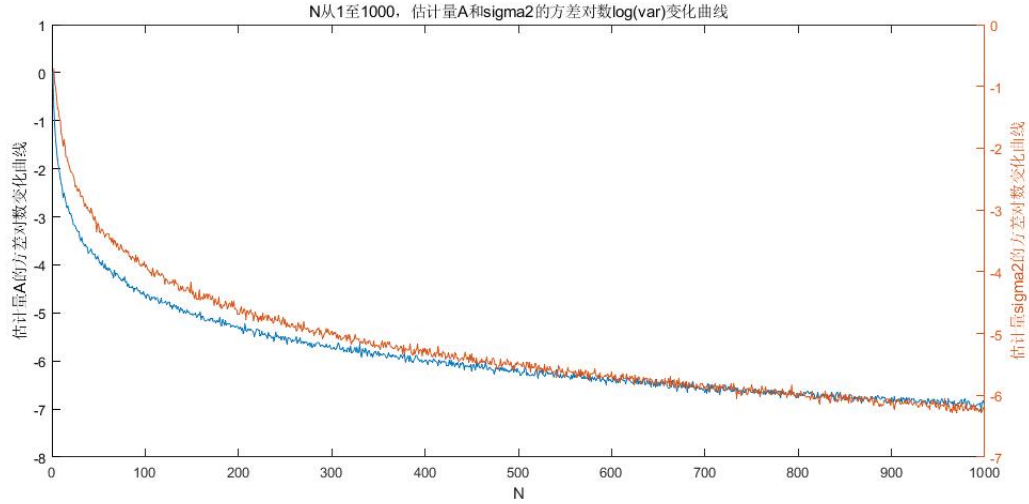


图 2.5: 估计量 \hat{A} 和 σ^2 的方差自然对数 $\ln(\text{var})$ 随 N 增长的变化曲线

由于估计量 \hat{A} 和估计量 σ^2 的收敛速度均较快，为对比明显起见，图 2.5 中纵轴均取估计量方差的自然对数。从图 2.5 可以看出，随着 N 的增大，估计量 \hat{A} 和估计量 σ^2 的方差均逐渐减小，且收敛速度接近。这说明从有效性角度来看，估计量 \hat{A} 和估计量 σ^2 有效性接近。

3 第三题

假定雷达接收信号可以表示为 $s = A\cos(2\pi fn + \varphi) + w(n), n = 1, \dots, N, N$ 为观测次数, $w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。

(1) A, σ^2 已知，均为确定参数， f 未知, $0 < f < \frac{1}{2}$ 。试推导 f 估计的 CRLB，采用 MATLAB 画出 CRLB 随频率、信噪比、观测次数的变化曲线。

(2) 若 A, φ, f 均未知，试推导 f 估计的 CRLB，采用 MATLAB 画出 CRLB 随其影响参数的变化曲线。并对比分析此时 f 估计方差的 CRLB 与第 (1) 问中 f 估计方差的 CRLB。

(3) 若噪声 $w(n)$ 服从瑞利分布，噪声平均功率与高斯分布情况下相同，试再次分析第 (1)、(2) 问中参数估计的 CRLB。并分析导致 CRLB 差异的原因。

(1) A, σ^2 已知，均为确定参数， f 未知

已知 $x[n] = s[n; \theta] + w[n]$, 其中 $s = A\cos(2\pi fn + \varphi + w(n)), n=1, \dots, N, w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。极大似然函数

$$p(\mathbf{x}; \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n; \theta])^2\right\}$$

一次求导得到

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n; \theta]) \frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta}$$

二次求导得到

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (x[n] - s[n; \theta]) \frac{\partial^2 s[n; \theta]}{\partial \theta^2} - \left(\frac{s[n; \theta]}{\theta} \right)^2 \right\}$$

取数学期望后得到

$$E \left(\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{s[n; \theta]}{\theta} \right)^2$$

将 $s = A \cos(2\pi f n + \varphi + w(n))$ 带入得到

$$E \left(\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [2\pi f n \sin(2\pi f n + \varphi)]^2$$

得到 CRLB 为

$$\text{var}(\hat{f}) \geq \frac{\sigma^2}{A^2 \sum_{n=0}^{N-1} [2\pi f n \sin(2\pi f n + \varphi)]^2} = \frac{1}{\eta^2 \sum_{n=0}^{N-1} [2\pi f n \sin(2\pi f n + \varphi)]^2}$$

(2) A、 φ 、 f 均未知

如果 A、 φ 、 f 均未知, 估计量 $\boldsymbol{\theta} = [A f \phi]^T$, 由于

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s[n; \boldsymbol{\theta}]}{\partial \theta_i} \frac{\partial s[n; \boldsymbol{\theta}]}{\partial \theta_j}$$

如果 f 不靠近 0 或者 1/2, 对于 $i = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^{i+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^i \sin(4\pi f n + 2\varphi) &\approx 0 \\ \frac{1}{N^{i+1}} \sum_{n=0}^{N-1} n^i \cos(4\pi f n + 2\varphi) &\approx 0 \end{aligned}$$

利用近似, 并且令 $\alpha = 2\pi f n + \varphi$, 得到

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{11} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2 \alpha = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) \approx \frac{N}{2\sigma^2} \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{12} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} A 2\pi n \cos \alpha \sin \alpha = -\frac{\pi A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} n \sin 2\alpha \approx 0 \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{13} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} A \cos \alpha \sin \alpha = -\frac{A}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sin 2\alpha \approx 0 \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{22} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} A^2 (2\pi n)^2 \sin^2 \alpha = \frac{(2\pi A)^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} n^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) \\
&\approx \frac{(2\pi A)^2}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} n^2 \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{23} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (2\pi n A)^2 \sin^2 \alpha \approx \frac{\pi A^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} n \\
[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} A^2 \sin^2 \alpha \approx \frac{N A^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi^2 A^2 \sum_{n=0}^{N-1} n^2 & \pi A^2 \sum_{n=0}^{N-1} n \\ 0 & \pi A^2 \sum_{n=0}^{N-1} n & \frac{N A^2}{2} \end{bmatrix}$$

从而得到

$$\text{var}(\hat{f}) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 \eta N (N^2 - 1)}$$

其中 $\eta = A^2/(2\sigma^2)$ 是 SNR。

(3) $w(n)$ 服从瑞利分布

假设 $w[n]$ 服从瑞利分布，分布函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_0^2} \exp -\frac{x^2}{2\sigma_0^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

期望为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0$ ，方差为 $(2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}})\sigma_0$ 。似然函数变为

$$p(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{x[n] - s[n; \theta]}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{(x[n] - s[n; \theta])^2}{2\sigma_0^2} \right\}$$

对数似然函数

$$\ln p(\mathbf{x}; \theta) = -2N \ln \sigma_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(x[n] - s[n; \theta]) - \frac{(x[n] - s[n; \theta])^2}{2\sigma^2}$$

按照 (1) 中条件, 对对数似然函数求一阶导

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{-1}{x[n] - s[n; \theta]} \frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta} + \frac{x[n] - s[n; \theta]}{\sigma_0^2} \frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta} \left[\frac{x[n] - s[n; \theta]}{\sigma_0^2} - \frac{1}{x[n] - s[n; \theta]} \right] \end{aligned}$$

二阶导为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 s[n; \theta]}{\partial \theta^2} \left[\frac{x[n] - s[n; \theta]}{\sigma_0^2} - \frac{1}{x[n] - s[n; \theta]} \right] \\ &\quad - \left(\frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta} \right)^2 \left[\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{(x[n] - s[n; \theta])^2} \right] \end{aligned}$$

由于瑞利分布的均值为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_0$, 所以

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \sigma_0 \frac{\partial^2 s[n; \theta]}{\partial \theta^2} - \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) \left(\frac{\partial s[n; \theta]}{\partial \theta} \right)^2$$

将 $s = A \cos(2\pi f n + \varphi)$ 带入上式得到

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{(2\pi n)^2 A^2}{\sigma_0^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{\sigma_0}{A} \cos(2\pi f n + \varphi) - \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) (\sin 2\pi n + \varphi)^2$$

4 第四题

采用阵列天线对高斯噪声背景下空间电磁波的来波方向进行估计。阵列天线接收信号为: $s(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi) + w(n)$ 。载频 $f = 5GHz$, 阵列天线各阵元间距为 $\lambda/2$, λ 为来波波长。阵元数为 32。背景噪声 $w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。(1) 试分析来波从不同方向到达时, 阵列天线来波角度估计的 CRLB, 给

出 CRLB 随相关参数变化的曲线图。(2) 设面阵法向为 0 度，论：要若对方位向 60 度的来波，角度估计精度精准偏差不超过 1 度。在信噪比为 5dB 的情况下，阵元至少需要多少个？若阵元数为 8，信噪比至少需为多少？(3) 若来波载频为 C 波段，具体值未知，试讨论阵元间距应该如何设置可使来波角度估计的 CRLB 较小？

(1) 分析不同方向来波时，天线角度估计的 CRLB

由例题 3.15 可知，来波估计 β 的方差 $var(\beta)$

$$var(\beta) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 M \eta \frac{M+1}{M-1} (\frac{L}{\lambda})^2 \sin(\beta)^2} \quad (4.1)$$

或

$$var(\beta) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 M \eta \frac{M+1}{M-1}} \frac{c^2}{F_0^2 d^2 \sin(\beta)^2} \quad (4.2)$$

其中

$$\eta = \frac{A^2}{2\sigma^2}$$

由式 4.1 可知 $var(\beta)$ 和 β 、阵元数 M 、信噪比 η 以及阵元宽度和波长之比有关，用 matlab 绘制他们之间曲线。

设置入射角 $0 < \beta < \pi$, CRLB 和入射角之间的关系如下图 4.1

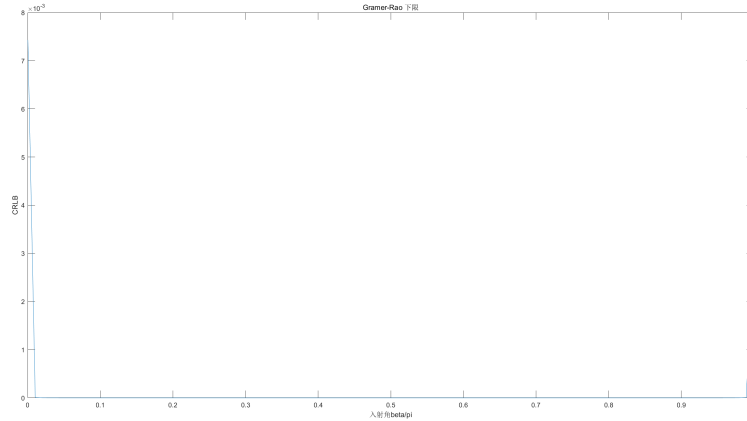


图 4.1: CRLB 和入射角之间的关系

由图 2 可知，当 β 大于某项值时， $CRLB \rightarrow 0$ ，图像关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称，当 $\beta \rightarrow 0 \pi$ ， $CRLB \rightarrow \infty$ 这是因为靠近入射面时，测量误差很大。当入射角固定为 30° 时，设置信噪比 η 在 $[0.001 \ 100]$ 之间变化

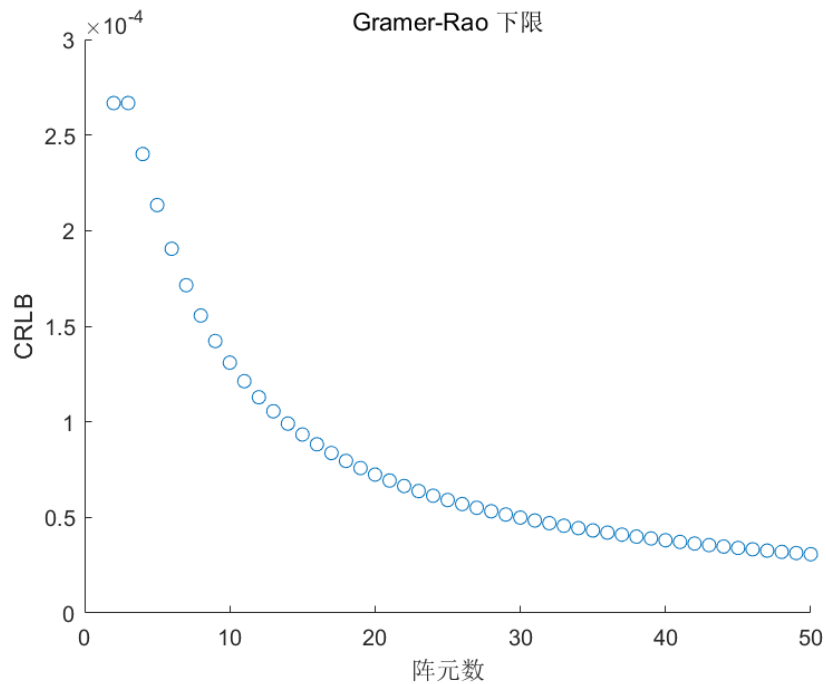


图 4.3: CRLB 和阵元 M 之间关系

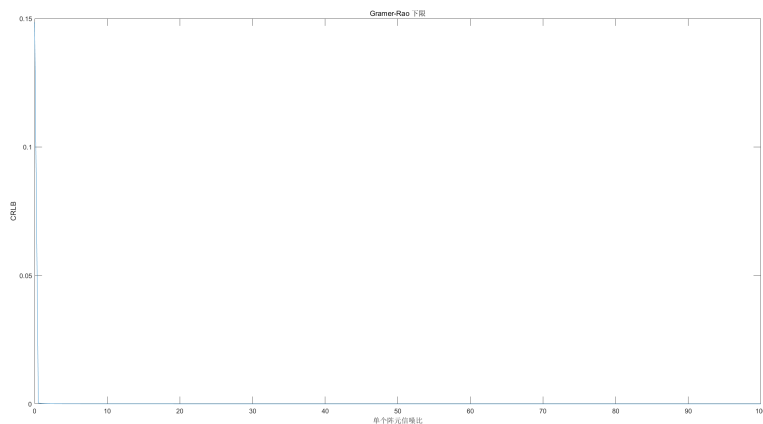


图 4.2: CRLB 信噪比 η 关系

由图像可知，当信噪比 $\eta \rightarrow \infty$ 时， $CRLB \rightarrow 0$ ，测量误差变小

- 设置 M 从 2 至 50 之间变化，入射角固定为 30，信噪比 $\eta = 5dB$ 时，RLB 和入射角之间的关系如下

由图 4.3 可知，当阵元数 M 增加时， $CRLB$ 减小，且在阵元为 2 时，即 $CRLB$ 小于 0

- 设置阵元为 8，入射角固定为 30 度时，CRLB 和阵元长度与波长之比之间的关系如下

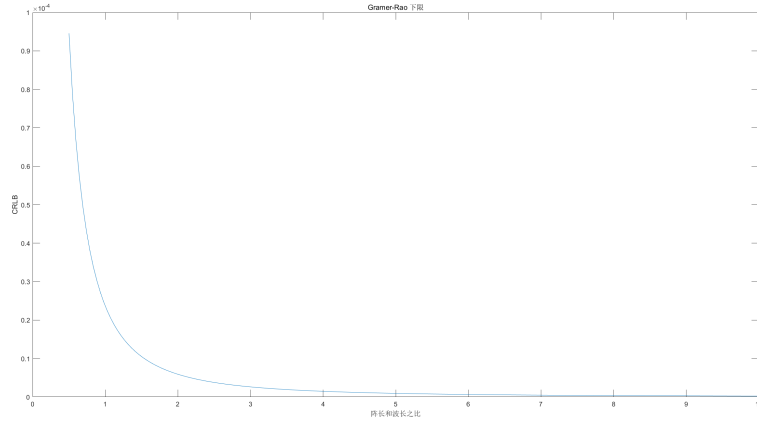


图 4.4: CRLB 和阵元长度和波长之比关系

有图 4.4 可知，随着阵元数增加，阵元长和 λ 之比增加， $CRLB$

(2) 阵元与信噪比讨论

相对阵面入射角度 $\beta = \frac{\pi}{6}$ ，信噪比 $10\log(\eta) = 5dB$ 则 $\eta = 3.1623$ β 估计偏差小于 1° ，即 $var(\beta) \leq 1$ ；有上面讨论和 M 绘制的关系图发现， $M=2$ 即可满足条件。当 $M=8$ 时，若 $var(\beta)$ 小于 1，则求得 $\eta=0.804$

(3) 阵元间距设置

若来波为 C 波段，则中心频率 f_0 在 4-8GHz，若使 $var(\beta)$ ，由式 4.2 可知 F_0 越大， d 越大，或 $\frac{\lambda}{d}$ 越小 (λ 越小， d 越大)，则 $var(\beta)$ 越小，即

$$0 < \frac{F_0 d}{c} \cos \beta = \frac{d}{\lambda} \cos \beta < \frac{1}{2}$$

则 d 最大取 $\frac{\lambda}{2}$ ， λ 对应为 8GHz 时最小，此时 $\lambda=0.0375m$

附：matlab 代码

```
1 close all
2 %按照题目所给数据设置仿真参数
3 c=3e8;
4 f0 = 5e9;%中心频率 5G
5 M = 32;%阵元数 32
6 A=1;
7 sigma2 = 0.01;
8 eta= 0.5*A^2/sigma2^2; %信噪比
9 beta=linspace(0.001,3.14,100);%入射角
```

```

10 lambda = c/f0;%入射信号波长
11 d = 0.5*lambda;%孔径间距
12 L_lambda = (M-1)*d/lambda;%L/lambda 之比, L阵的长度(M-1)d
13
14 %CRLB of beta 入射角的CRLB
15 y1=4*pi^2*M*eta*(M+1)/(M-1)*L_lambda^2.*sin(beta).^2;
16 y=12./y1;
17 %绘制CRLB和入射角之间的图形
18 figure(1)
19 plot(beta/pi,y)
20 xlabel('入射角beta/pi');
21 ylabel('CRLB');
22 title('Gramer-Rao 下限')
23
24 %%当入射角为60度(相对阵面方向为30度)时CRLB和信噪比eta 的关系
25 beta=pi/6;%入射角为30°
26 eta=linspace(0.001,100,200);
27 y1=4*pi^2*M*eta*(M+1)/(M-1)*L_lambda^2.*sin(beta).^2;
28 y=12./y1;
29 figure(2)
30 plot(eta,y);
31 xlabel('单个阵元信噪比');
32 ylabel('CRLB');
33 title('Gramer-Rao 下限')
34
35 %%当入射角为60度(相对阵面方向为30度)时CRLB和阵元数量M 的关系
36 beta=pi/6;%相对阵面方向为30度
37 M = 2:1:50;
38 eta=3.1623%信噪比即为5dB;
39 y1=4*pi^2.*M*eta.*(M+1)./(M-1)*L_lambda^2.*sin(beta).^2;
40 y=12./y1;
41 figure(3)
42 scatter(M,y);
43 xlabel('阵元数');
44 ylabel('CRLB');
45 title('Gramer-Rao 下限')
46
47 %%当入射角为60度(相对阵面方向为30度)时CRLB和阵的长度和波长之比L_lambda 的关系
48 beta=pi/6;%入射角设定为30°

```

```

49 L_lambda=linspace(0.5,15,200);
50 eta= 0.5*A^2/sigma2^2; %信噪比
51 M=8;
52 y1=4*pi^2*M*eta*(M+1)/(M-1).*L_lambda.^2.*sin(beta).^2;
53 y3=12./y1;
54 figure(4)
55 plot(L_lambda,y3);
56 xlabel('阵长和波长之比');
57 ylabel('CRLB');
58 title('Gramer-Rao 下限')

```