

4、采用阵列天线对高斯噪声背景下空间电磁波的来波方向进行估计。阵列天线接收信号为： $s(t) = A\cos(2\pi ft + \varphi) + w(n)$ 。载频 $f = 5\text{GHz}$ ，阵列天线各阵元间距为 $\lambda/2$ ， λ 为来波波长。阵元数为 32。背景噪声 $w(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。

(1) 试分析来波从不同方向到达时，阵列天线来波角度估计的 CRLB，给出 CRLB 随相关参数的变化曲线图。（提示：教材例 3.15）

(2) 设阵面法向为 0 度，论证：若要对方位向 60 度的来波，角度估计精度标准偏差不超过 1 度。在信噪比为 5dB 的情况下，阵元至少需多少个？若阵元数为 8，信噪比至少需为多少？

(3) 若来波载频为 C 波段，具体值未知，试讨论阵元间距应该如何设置可使来波角度估计的 CRLB 较小？

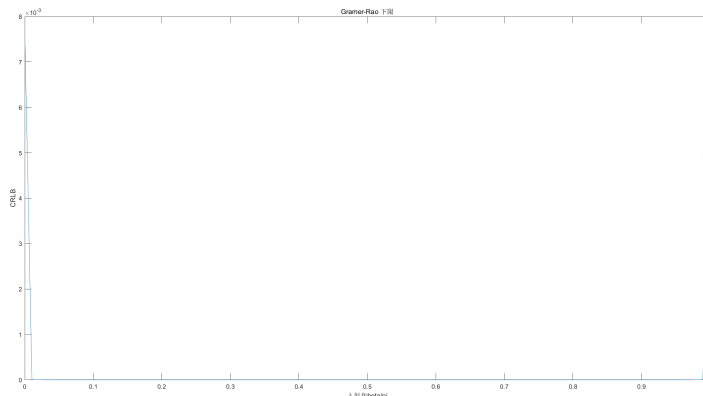


Figure 1: CRLB 和入射角之间的关系

解：(1) 由例题 3.15 可知，来波估计 β 的方差 $\text{var}(\beta)$

$$\text{var}(\beta) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 M \eta \frac{M+1}{M-1} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \sin(\beta)^2} \quad (4.1)$$

或

$$\text{var}(\beta) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 M \eta \frac{M+1}{M-1}} \frac{c^2}{F_0^2 d^2 \sin(\beta)^2} \quad (4.2)$$

其中

$$\eta = \frac{A^2}{2\sigma^2}$$

由式 4.1 可知 $\text{var}(\beta)$ 和 β 、阵元数 M 、信噪比 η 以及阵元宽度和波长之比有关，用 matlab 绘制他们之间曲线

- 设置入射角 $0 < \beta < \pi$, CRLB 和入射角之间的关系如下图 1

由图 2 可知，当 β 大于某项值时， $\text{CRLB} \rightarrow 0$ ，图像关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称，当 $\beta \rightarrow 0$ 或 π ， $\text{CRLB} \rightarrow \infty$ 这是因为靠近入射面时，测量误差很大。

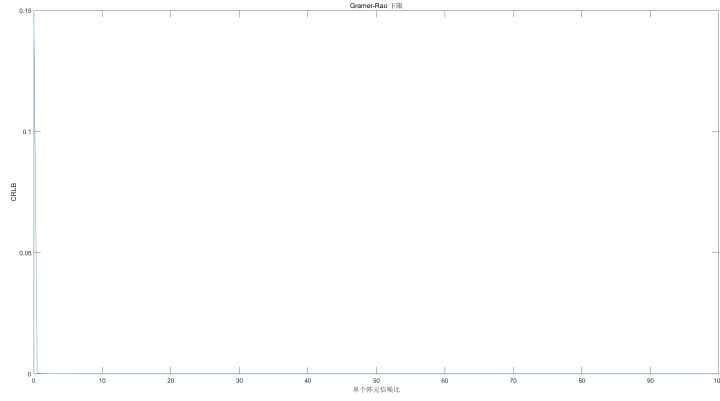


Figure 2: CRLB 信噪比 η 关系

- 当入射角固定为 30° 时, 设置信噪比 η 在 $[0.001 \ 100]$ 之间变化

由图像可知, 当信噪比 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $CRLB \rightarrow 0$, 测量误差变小

- 设置 M 从 2 至 50 之间变化, 入射角固定为 30° , 信噪比 $\eta = 5dB$ 时, RLB 和入射角之间的关系如下

由图 3 可知, 当阵元数 M 增加时, $CRLB$ 减小, 且在阵元为 2 时, 即 $CRLB$ 小于 0

- 设置阵元为 8, 入射角固定为 30° 度时, $CRLB$ 和阵元长度与波长之比之间的关系如下

有图 4 可知, 随着阵元数增加, 阵元长和 λ 之比增加, $CRLB$

(2) 相对阵面入射角度 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 信噪比 $10\log(\eta) = 5dB$ 则 $\eta = 3.1623$ β 估计偏差小于 1° , 即 $var(\beta) \leq 1$; 有上面讨论和 M 绘制的关系图发现, $M=2$ 即可满足条件。当 $M=8$ 时, 若 $var(\beta)$ 小于 1, 则求得 $\eta=0.804$

(3) 若来波为 C 波段, 则中心频率 f_0 在 4-8GHz, 若使 $var(\beta)$, 由式 4.2 可知 F_0 越大, d 越大, 或 $\frac{\lambda}{d}$ 越小 (λ 越小, d 越大), 则 $var(\beta)$ 越小, 即

$$0 < \frac{F_0 d}{c} \cos \beta = \frac{d}{\lambda} \cos \beta < \frac{1}{2}$$

则 d 最大取 $\frac{\lambda}{2}$, λ 对应为 8Ghz 时最小, 此时 $\lambda=0.0375m$

附: matlab 代码

```
close all;
clc
%按照题目所给数据设置仿真参数
c=3e8;
f0 = 5e9;%中心频率 5G
M = 32;%阵元数 32
A=1;
sigma2 = 0.01;
eta= 0.5*A^2/sigma2^2; %信噪比
beta=linspace(0.001,3.14,100);%入射角
```

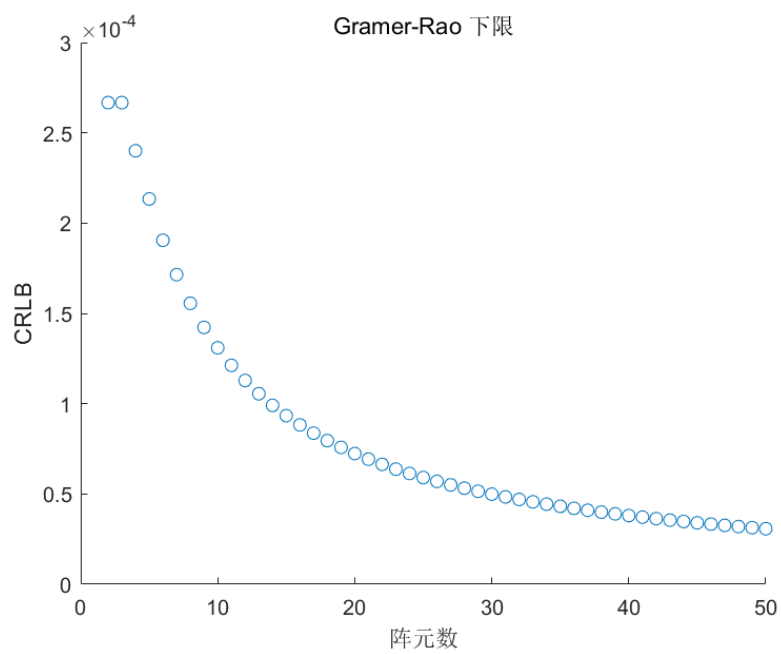


Figure 3: CRLB 和阵元 M 之间关系

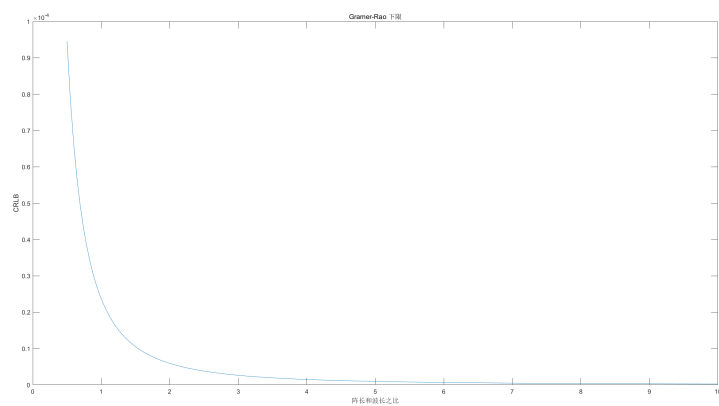


Figure 4: CRLB 和阵元长度和波长之比关系

```

lambda = c/f0;%入射信号波长
d = 0.5*lambda;%孔径间距
L_lambda = (M-1)*d/lambda;%L/lambda 之比, L阵的长度 (M-1)d

%CRLB of beta 入射角的CRLB
y1=4*pi^2*M*eta*(M+1)/(M-1)*L_lambda^2.*sin(beta).^2;
y=12./y1;
%绘制CRLB和入射角之间的图形
figure(1)
plot(beta/pi,y)
xlabel('入射角 beta/pi');
ylabel('CRLB');
title('Gramer-Rao 下限')

%%当入射角为 60度 (相对阵面方向为 30度) 时CRLB和信噪比 eta 的关系
beta=pi/6;%入射角为 30°
eta=linspace(0.001,100,200);
y1=4*pi^2*M*eta*(M+1)/(M-1)*L_lambda^2.*sin(beta).^2;
y=12./y1;
figure(2)
plot(eta,y);
xlabel('单个阵元信噪比');
ylabel('CRLB');
title('Gramer-Rao 下限')

%%当入射角为 60度 (相对阵面方向为 30度) 时CRLB和阵元数量M 的关系
beta=pi/6;%相对阵面方向为 30度
M = 2:1:50;
eta=3.1623%信噪比即为 5dB;
y1=4*pi^2.*M*eta.*(M+1)./(M-1)*L_lambda^2.*sin(beta).^2;
y=12./y1;
figure(3)
scatter(M,y);
xlabel('阵元数');
ylabel('CRLB');
title('Gramer-Rao 下限')

%%当入射角为 60度 (相对阵面方向为 30度) 时CRLB和阵的长度和波长之比 L_lambda 的关系
beta=pi/6;%入射角设定为 30°
L_lambda=linspace(0.5,15,200);
eta= 0.5*A^2/sigma2^2;%信噪比

```

```

M=8;
y1=4*pi^2*M*eta*(M+1)/(M-1).*L_lambda.^2.*sin(beta).^2;
y3=12./y1;
figure(4)
plot(L_lambda,y3);
xlabel(' 阵长和波长之比 ');
ylabel('CRLB');
title('Gramer-Rao 下限 ')

```