《统计信号处理》讨论题一：确定性参数估计

杨鼎

考虑高斯白噪声中的指数信号参数估计问题

$$z_n = Ar^n + w_n, n = 0, 1, \ldots, N-1$$

其中 $w_n \overset{i,i,d}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), 0 < r < 1, \sigma^2 > 0$ 均为已知参数。试考虑可从哪些角度获得参数 A 的估计量？如何评价你所获得估计量的性能？

1. 获得 A 的估计量

重写为矢量形式

$$\mathbf{z} = A\mathbf{H} + \mathbf{w}$$

其中

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_{N-1} \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & r & \ldots & r^{N-1} \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_{N-1} \end{bmatrix}^T$$

由 $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ 可得，PDF$p(\mathbf{z}; A)$

$$p(\mathbf{z}; A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z} - A\mathbf{H})^T(\mathbf{z} - A\mathbf{H})\right\}$$

求一次导得到：

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; A)}{\partial A} = \frac{\mathbf{H}^T}{\sigma^2}(\mathbf{z} - A\mathbf{H})$$

显然这是一个关于未知参数 A 的线性模型，因此可以用多种方式获得参数 A 的估计。

(1)CRLB

首先验证正则条件

$$E\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};A)}{\partial A}\right]=E\left[\frac{\mathbf{H}^T}{\sigma^2}(\mathbf{z}-A\mathbf{H})\right]=\frac{\mathbf{H}^T}{\sigma^2}E\left[(\mathbf{z}-A\mathbf{H})\right]=0$$

则 Fisher 信息为

$$\begin{aligned}I(A)&=-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};A)}{\partial A^2}\right]\\&=\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}\\&=\frac{\sum_{n=0}^{N-1} r^{2n}}{\sigma^2}\\&=\frac{1-r^{2N}}{(1-r^2)\sigma^2}\end{aligned}$$

PDF 的一阶偏导数可以写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln p(\mathbf{z};A)}{\partial A}&=\frac{\mathbf{H}^T}{\sigma^2}(\mathbf{z}-A\mathbf{H})\\&=\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}((\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{z}-A)\\&=I(A)(g(\mathbf{z})-A)\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{H}^T\mathbf{H}=\sum_{n=0}^{N-1} r^{2n}=\frac{1-r^{2n}}{1-r}$, 因此 $\hat{A}=(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{z}$。方差达到 CRLB，为

$$var(\hat{A})=\frac{1}{I(A)}=\frac{(1-r^2)\sigma^2}{1-r^{2n}}$$

(2)BLUE

限定估计量 A 与数据 $\mathbf{z}$ 呈线性 $A=\mathbf{a}^T\mathbf{z}$, 在无偏的约束条件下，$E(\mathbf{z})=A\mathbf{H}$.

由于 $\mathbf{w}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2\mathbf{I})$, 协方差矩阵 $\mathbf{C}=\sigma^2\mathbf{I}$, 则 $\mathbf{C^{-1}}=\sigma^{-2}\mathbf{I}$。

BLUE 为

$$\begin{aligned}\hat{A}&=\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}}{\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}}\\&=(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{z}\end{aligned}$$

方差

$$\begin{aligned}var(\hat{A})&=\frac{1}{\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}}\\&=\frac{(1-r^2)\sigma^2}{1-r^{2n}}\end{aligned}$$

(3)MLE

求解似然方程

$$\frac{\mathbf{H}^T}{\sigma^2}(\mathbf{z} - A\mathbf{H}) = \mathbf{0}$$

解得

$$\hat{A} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{z}$$

验证二阶导数

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; A)}{\partial A^2} = -\frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2} < 0$$

因此 A 的最大似然估计为 $\hat{A} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{z}$。

(4)LSE

误差指标函数

$$\mathbf{J}(A) = (\mathbf{z} - A\mathbf{H})^T(\mathbf{z} - A\mathbf{H})$$

令其梯度 $\frac{\partial \mathbf{J}(A)}{\partial A} = 0$ 得到，LSE 为 $\hat{A} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{z}$。

2. 如何评价你所获得估计量的性能

以上四种方法求得的 A 的估计量 $\hat{A}$ 均相同，且均是无偏的。

在 (1) 中，由于达到了 CRLB, 因此它是有效估计量, 并且它也是 MVU 估计量。

根据 Neyman-Fisher 因子分解定理，由于 PDF 可以分解为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}; A) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{z} - A\mathbf{H})^T(\mathbf{z} - A\mathbf{H})\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(A^2\mathbf{H}^T\mathbf{H} - 2A\mathbf{z}^T\mathbf{H})\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\mathbf{z}^T\mathbf{z}}{2\sigma^2})\right\} \\ &= g(T(\mathbf{z}), A)h(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

因此 $T(\mathbf{z}) = \mathbf{H}^T\mathbf{z}$ 是 A 的充分统计量，$\hat{A} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}T(\mathbf{z})$ 也是 A 的充分统计量。