目次

第 1 章

確率分野問題

1.1 ベイズの定理

問題 1-1. 外見から区別のつかない 2 つの箱がある。1 つの箱 R には 9 個の赤玉と 6 個の白玉が入っており、もう 1 つの箱 W には 6 個の赤玉と 9 個の白玉が入っている。2 つの箱から 1 つを無作為に選び、その箱から一度に 5 個同時に玉を取り出したところ、赤玉が 3 個、白玉が 2 個であった。このとき、選ばれた箱が R である確率は $\boxed{}$ である。

出典：2021 年度 過去問

解答

箱 R が選ばれる事象を R、箱 W が選ばれる事象を W とする。また、箱から一度に 5 個同時に玉を取り出した結果を F とする。求める確率 $P(R|F)$ はベイズの公式により次式で計算される。

$$P(R|F) = \frac{P(F|R) \cdot P(R)}{P(F|R) \cdot P(R) + P(F|W) \cdot P(W)} \tag{1.1}$$

2 つの箱から 1 つの箱を無作為に選ぶので、

$$P(R) = P(W) = \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

$P(F|R)$ は、箱 R から一度に 5 個同時に玉を取り出すとき、赤玉が 3 個、白玉が 2 個となる確率であるから、

$$P(F|R) = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{5}} \tag{1.3}$$

$P(F|W)$ は、箱 W から一度に 5 個同時に玉を取り出すとき、赤玉が 3 個、白玉が 2 個となる確率であるから

$$P(F|W) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} \tag{1.4}$$

よって、求める確率は、

$$
\begin{aligned}
P(R|F) &= \frac{\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{15}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}+\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{2}} \qquad (1.5) \\
&= \frac{\left(\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)}{\left(\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)+\left(\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{9\cdot 8}{2}\right)} \\
&= \frac{7}{7+4} = \frac{7}{11}
\end{aligned}
$$

(1.6)

(1.7)

(1.8)