裳華房
量子力学選書

「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」

坂本 眞人 著

check 解答例と補足説明

この「check 解答例と補足説明」は、教科書と一体のものとして書かれています。教科書本文中に ⟨ **check** ⟩ として与えられている問題の詳細な解答だけでなく、問題を解く上での考え方やちょっとしたテクニックについても随時コメントを加えています。もちろん、教科書本文同様、すべての式を飛ばすことなく誰もが式を追うことができるように、解答例では丁寧な導出を心掛けました。また、ページ数の制約上、教科書では割愛せざるを得なかったトピックについても解説を加えました。場の量子論の理解をより深めるためにも、教科書と合わせてこの「check 解答例と補足説明」をご活用ください。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第 1 章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2014/11/22
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 1 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 1.1 ∼ check 1.6 の解答例

check 1.1

(1.25) で与えられる $\Lambda = P, T, PT$ が、それぞれ (1.22) でのクラス (2), (3), (4) に属することを確かめよ。また、$x^\mu \to x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の変換の下で、P は空間反転 ($x'^0 = +x^0, x'^i = -x^i$)、T は時間反転 ($x'^0 = -x^0, x'^i = +x^i$)、PT は時空反転 ($x'^0 = -x^0, x'^i = -x^i$) を引き起こすことを確かめてみよう。

下記で定義される P, T, PT がそれぞれ教科書本文 (1.22) でのクラス (2), (3), (4) に属することを確かめる。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

まず、それぞれの行列の行列式を求める。

$$\begin{aligned} \det(P) &= (+1) \times (-1)^3 = -1 \\ \det(T) &= (-1) \times (+1)^3 = -1 \\ \det(PT) &= (-1)^4 = +1 \end{aligned} \tag{2}$$

また、それぞれの行列の (00) 成分は

$$\begin{aligned} (P)^0{}_0 &= +1 \\ (T)^0{}_0 &= -1 \\ (PT)^0{}_0 &= -1 \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる。したがって、P, T, PT は教科書本文 (1.22) でのクラス (2), (3) ,(4) に属することがわかる。

次に、P は空間反転、T は時間反転、PT は時空反転を引き起こすことを確かめる。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{PT} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

これらの結果から、P は空間反転、T は時間反転、PT は時空反転を引き起こすことがわかる。

!

行列表示が便利なときもあるが、行列にこだわりすぎると後で出てくるテンソルが理解できなくなる。下の 4 つの表記が同等であることを確かめ、今後は一番下の表記 (8) に慣れるようにしてほしい。

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0\, x^0 + \Lambda^0{}_1\, x^1 + \Lambda^0{}_2\, x^2 + \Lambda^0{}_3\, x^3 \\ \Lambda^1{}_0\, x^0 + \Lambda^1{}_1\, x^1 + \Lambda^1{}_2\, x^2 + \Lambda^1{}_3\, x^3 \\ \Lambda^2{}_0\, x^0 + \Lambda^2{}_1\, x^1 + \Lambda^2{}_2\, x^2 + \Lambda^2{}_3\, x^3 \\ \Lambda^3{}_0\, x^0 + \Lambda^3{}_1\, x^1 + \Lambda^3{}_2\, x^2 + \Lambda^3{}_3\, x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x^0 \;\longrightarrow\; x'^0 &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^0{}_\nu\, x^\nu + a^0 \\ x^1 \;\longrightarrow\; x'^1 &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^1{}_\nu\, x^\nu + a^1 \\ x^2 \;\longrightarrow\; x'^2 &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^2{}_\nu\, x^\nu + a^2 \\ x^3 \;\longrightarrow\; x'^3 &= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^3{}_\nu\, x^\nu + a^3 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^\mu \;\longrightarrow\; x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu\,, \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{8}$$

最後の表記 (8) で $\Lambda^\mu{}_\nu$ は（行列ではなく）単なる係数なので、他の量と順番を入れ換えてもかまわないことに注意しよう。たとえば、(8) を

$$x^\mu \;\longrightarrow\; x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} x^\nu\, \Lambda^\mu{}_\nu + a^\mu\,, \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{9}$$

と書いてもかまわない。なぜなら、

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu &= \Lambda^\mu{}_0\, x^0 + \Lambda^\mu{}_1\, x^1 + \Lambda^\mu{}_2\, x^2 + \Lambda^\mu{}_3\, x^3 \\ &= x^0 \Lambda^\mu{}_0 + x^1 \Lambda^\mu{}_1 + x^2 \Lambda^\mu{}_2 + x^3 \Lambda^\mu{}_3 = \sum_{\nu=0}^{3} x^\nu \Lambda^\mu{}_\nu \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つからである。

check 1.2

A^μ, B^μ をベクトル、$T^{\mu\nu}$ を 2 階のテンソルとしたとき、$A^\mu B_\mu$, $A_\rho T^{\rho\mu}$, $A^\mu B^\nu$ はそれぞれ、スカラー、ベクトル、2 階のテンソルの変換性をもつことを確かめてみよう。

上の結果から、変換性を知りたいときは、和の取られた添字は無視してよいことがわかる。例えば、$A_\mu B^\mu \sim A_\bullet B^\bullet$, $A_\rho T^{\rho\mu} \sim A_\bullet T^{\bullet\mu}$ と見なしてよい。

ここで示すことは、$A^\mu B_\mu$, $A_\rho T^{\rho\mu}$, $A^\mu B^\nu$ はそれぞれ、スカラー、ベクトル、2 階のテンソルの変換性をもつこと、すなわち、

$$A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu \tag{11}$$

$$A'_\rho T'^{\rho\mu} = \Lambda^\mu{}_\lambda \left(A_\rho T^{\rho\lambda}\right) \tag{12}$$

$$A'^\mu B'^\nu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda \left(A^\rho B^\lambda\right) \tag{13}$$

である。

まず、(11) を示す。教科書本文 (1.26) と (1.27) の定義から、反変ベクトル A^μ と共変ベクトル B_μ は次のように変換する。

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho A^\rho \tag{14}$$

$$B'_\mu = B_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{15}$$

(!)

ここで注意すべき点は、教科書本文 (1.26) と (1.27)、すなわち、$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ と $B'_\mu = B_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ をそのまま (11) 左辺に代入してはいけない、という点だ。なぜなら、そのまま代入してしまうと

$$A'^\mu B'_\mu = \left(\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu\right)\left(B_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\right) \qquad (\leftarrow \text{添字の使い方を間違った例})$$

となり、右辺には ν の添字が 4 つもあり、どの ν とどの ν の和がとられているのか、わからなくなってしまうからである。このようなときは、(14) のように片方の ν の添字を別の添字（(14) では ρ）に書き換えておく必要がある。初学者はこの点をよく間違えるので注意しておこう。

(14) と (15) を (11) に代入して

$$\begin{aligned} A'^\mu B'_\mu &= \left(\Lambda^\mu{}_\rho A^\rho\right)\left(B_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\right) = A^\rho B_\nu \underbrace{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho}_{\delta^\nu{}_\rho} = A^\rho \underbrace{B_\nu \,\delta^\nu{}_\rho}_{B_\rho} \\ &= A^\rho B_\rho = A^\mu B_\mu \quad \Longrightarrow \quad (11) \end{aligned} \tag{16}$$

を得る。

(!)

上の計算についてコメントしておこう。2 番目の等号では、$\Lambda^\mu{}_\rho$ および $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ は単なる係数で行列ではないので順番を自由に入れ換えても構わないことと、Λ^{-1} が Λ の逆行列であること ($(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\nu{}_\rho$) を用いた。4 番目の等号では、クロネッカーシンボル $\delta^\nu{}_\rho$ の性質 ($B_\nu\, \delta^\nu{}_\rho = B_\rho$) を用いた。最後の等号では、$\rho$ の添字を μ に置き換えた。これは ρ について和がとられているので、（他の添字と重複しなければ）任意の添字を使ってよいことを用いた。（このような添字はダミーインデックスと呼ばれる。）

次に (12) を示すために、A_ρ と $T^{\rho\mu}$ の変換性を下に与えておく。（和がとられている添字が重複しないように注意しよう。）

$$A'_\rho = A_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\rho \tag{17}$$

$$T'^{\rho\mu} = \Lambda^\rho{}_\sigma \Lambda^\mu{}_\lambda T^{\sigma\lambda} \tag{18}$$

これらを (12) の左辺に代入して、

$$\begin{aligned}
A'_\rho T'^{\rho\mu} &= \left(A_\alpha \underbrace{\left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\rho \right) \left(\Lambda^\rho{}_\sigma}_{\delta^\alpha{}_\sigma} \Lambda^\mu{}_\lambda T^{\sigma\lambda}\right) \\
&= \Lambda^\mu{}_\lambda \, A_\alpha \left(\underbrace{\delta^\alpha{}_\sigma \, T^{\sigma\lambda}}_{T^{\alpha\lambda}}\right) \\
&= \Lambda^\mu{}_\lambda \left(\underbrace{A_\alpha T^{\alpha\lambda}}_{A_\rho T^{\rho\lambda}}\right) \quad \Longrightarrow \quad (12)
\end{aligned} \tag{19}$$

を得る。

最後に (13) を示す。そのために、A^μ と B^ν の変換性を下に与えておく。

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho \, A^\rho \tag{20}$$

$$B'^\nu = \Lambda^\nu{}_\lambda \, B^\lambda \tag{21}$$

ここでも、和がとられている添字が重複しないように気を付けよう。これらを (13) 左辺に代入して

$$A'^\mu \, B'^\nu = \left(\Lambda^\mu{}_\rho \, A^\rho\right) \left(\Lambda^\nu{}_\lambda \, B^\lambda\right) = \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\lambda \left(A^\rho \, B^\lambda\right) \quad \Longrightarrow \quad (13) \tag{22}$$

を得る。

check 1.3

ある慣性系で $A = B$ および $A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu}$ が成り立っていれば、任意の慣性系で $A' = B'$ および $A'^{\mu\nu} = B'^{\mu\nu}$ が成り立つことを確かめてみよう。

ここで確かめることは、

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A' = B' \tag{23}$$

$$A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad A'^{\mu\nu} = B'^{\mu\nu} \tag{24}$$

である。(23) での A, B はスカラー量、すなわち、$A' = A$, $B' = B$ なので、(23) は自明に成り立つ。

(24) を示すために、テンソル $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$ の変換性を下に与えておく。

$$\begin{aligned}
A'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\lambda \, A^{\rho\lambda} \\
B'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\lambda \, B^{\rho\lambda}
\end{aligned} \tag{25}$$

これらを用いると、

$$A'^{\mu\nu} - B'^{\mu\nu} \overset{(25)}{=} \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\lambda \left(A^{\rho\lambda} - B^{\rho\lambda}\right) \tag{26}$$

となるので、$A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu}$ （同じことだが $A^{\rho\lambda} = B^{\rho\lambda}$）が成り立てば、$A'^{\mu\nu} = B'^{\mu\nu}$ が成り立つことがわかる。逆に、$A'^{\mu\nu} = B'^{\mu\nu}$ が成り立てば $A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu}$ が成り立つことは、ローレンツ逆変換を考えれば同様に証明できる。

(!)

上の証明からわかるように、任意のテンソル型の方程式 $A^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} = B^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K}$ は任意の慣性系で成り立つことがわかる。すなわち、

$$A^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} = B^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} \iff A'^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} = B'^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} \tag{27}$$

証明は $A^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K}, B^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K}$ の変換性

$$\begin{aligned} A'^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} &= \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_N}{}_{\alpha_N} \times A^{\alpha_1\cdots\alpha_N}{}_{\beta_1\cdots\beta_K} \times (\Lambda^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\beta_K}{}_{\nu_K} \\ B'^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} &= \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_N}{}_{\alpha_N} \times B^{\alpha_1\cdots\alpha_N}{}_{\beta_1\cdots\beta_K} \times (\Lambda^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\beta_K}{}_{\nu_K} \end{aligned} \tag{28}$$

から

$$\begin{aligned} &A'^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} - B'^{\mu_1\cdots\mu_N}{}_{\nu_1\cdots\nu_K} \\ &\quad = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_N}{}_{\alpha_N}\left(A^{\alpha_1\cdots\alpha_N}{}_{\beta_1\cdots\beta_K} - B^{\alpha_1\cdots\alpha_N}{}_{\beta_1\cdots\beta_K}\right)(\Lambda^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{\beta_K}{}_{\nu_K} \end{aligned} \tag{29}$$

が成り立つことから示される。

このことから、任意のスカラーやベクトルも含めたテンソル型の方程式は、相対論的不変性を自動的に満たすことがわかる。このことは、同時に任意の慣性系で同じ方程式が成り立つことを意味する。

check 1.4

関数 $p^\mu f(p^2)$ は、$p^\mu \to -p^\mu$ の変換の下で奇関数なので、$\int d^4p\, p^\mu f(p^2) = 0$ が任意の $f(p^2)$ に対して成り立つ。この関係式を不変テンソルの観点から理解してみよう。(積分 $\int d^4p\, p^\mu f(p^2)$ は定義されているものとする。)

(1) 不変ベクトルは存在しないことを証明してみよう。
【ヒント】 任意のローレンツ変換の下で、$\Lambda^\mu{}_\nu V^\nu = V^\mu$ を満たす非自明な定数ベクトル V^μ が存在するか？

(2) 関係式 $\int d^4p\, p^\mu f(p^2) = 0$ を不変テンソルの観点から説明してみよう。

(1) 不変ベクトル V^μ の定義は、定数ベクトルなのだが、ローレンツ変換の下でベクトルの変換性をもつとみなしてもよいベクトルのことである。すなわち、

$$\Lambda^\mu{}_\nu V^\nu = V^\mu \tag{30}$$

を満たす定数ベクトルのことである。以下では、上式を満たす定数ベクトル V^μ は $V^\mu = 0$ であることを示す。

以下の証明は行列表記で行うことにする。(30) を行列表記で書くと

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

となる。ここで、$\Lambda^\mu{}_\nu$ として z 軸まわりの θ 回転を考えると

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

で与えられるので、(31) は

$$\begin{pmatrix} V^0 \\ \cos\theta\, V^1 - \sin\theta\, V^2 \\ \sin\theta\, V^1 + \cos\theta\, V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \tag{33}$$

となる。上式が任意の θ に対して成り立つためには

$$V^1 = V^2 = 0 \tag{34}$$

でなければならないことがわかる。

同様に、x 軸まわりの回転を考えることによって

$$V^2 = V^3 = 0 \tag{35}$$

が導かれる。

最後に x 軸方向のローレンツブースト変換を考えると

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\gamma(v)\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma(v)\frac{v}{c} & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{36}$$

なので、(31) に代入すると

$$\begin{pmatrix} \gamma(v)\, V^0 - \gamma(v)\frac{v}{c}\, V^1 \\ -\gamma(v)\frac{v}{c}\, V^0 + \gamma(v) V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

となり、

$$V^0 = V^1 = 0 \tag{38}$$

が導かれる。

以上の結果より、任意のローレンツ変換に対して (30) を満たす定数ベクトルは

$$V^0 = V^1 = V^2 = V^3 = 0 \tag{39}$$

となり、非自明な不変ベクトル V^μ は存在しないことがわかる。

(2) まず、

$$V^\mu \equiv \int d^4p\, p\, p^\mu\, f(p^2) \tag{40}$$

が不変ベクトルの性質 (30) を満たすことを示す。そのために、右辺を次のように変形する。

$$
\begin{aligned}
V^\mu &= \int d^4p\, p^\mu\, f(p^2) \\
&= \int d^4p'\, p'^\mu\, f(p'^2) \\
&= \int d^4p\, \Lambda^\mu{}_\nu\, p^\nu\, f(p^2) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu \int d^4p\, p^\nu\, f(p^2) \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu\, V^\nu
\end{aligned} \tag{41}
$$

ここで、2 番目の等号では積分変数 p^μ を p'^μ に書き換えた。また、3 番目の等号では $p'^\mu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu\, p^\nu$ の変数変換を行った。このとき、ローレンツ変換の性質より、$d^4p' = d^4p$, $p'^2 = p'^\mu p'_\mu = p^\mu p_\mu = p^2$ を用いた。4 番目の等号では $\Lambda^\mu{}_\nu$ は単なる定数係数なので積分の外に出した。

定義より（p^μ については積分されているので）V^μ は定数であり、かつ、(41) より不変ベクトルの性質 $V^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$ を満たさねばならない。しかしながら、非自明な不変ベクトルは存在しないことを上で証明したので、

$$
\int d^4p\, p^\mu\, f(p^2) = V^\mu = 0 \tag{42}
$$

が導かれる。

check 1.5

質量 m から、c と $\hbar$ を適当にかけることによって、長さの次元をもつ量 L を作り、(1.3) のクライン–ゴルドン方程式の質量項と比べてみよう。

【ヒント】 $L = m^p\, c^q\, \hbar^r$ とおいて両辺の次元を等しくおき、$p = q = -1$, $r = 1$ を導け。

すべての物理量の次元は、長さ $[L]$、時間 $[T]$、質量 $[M]$ の次元の組み合わせで表すことができる。たとえば、光速 c とプランク定数 $\hbar$ はそれぞれ速さと角運動量の次元をもっているので、L、T、M で表すと

$$
\begin{aligned}
[c] &= [\text{速さ}] = [\text{長さ}/\text{時間}] = [L/T] \\
[\hbar] &= [\text{角運動量}] = [mvr] = [M \times (L/T) \times L] = [ML^2/T]
\end{aligned} \tag{43}
$$

このことを用いて、質量 m から c と $\hbar$ の適当なベキをかけることによって、長さの次元をもつ量を作ることができる。すなわち、

$$
[m^p c^q \hbar^r] = [L] \tag{44}
$$

左辺の量を (43) を用いて M、L、T で表すと次のようになる。

$$
\begin{aligned}
[m^p c^q \hbar^r] &= [M^p (L/T)^q (ML^2/T)^r] \\
&= [M^{p+r} L^{q+2r} T^{-q-r}]
\end{aligned} \tag{45}
$$

これが $[L]$ に等しくならなければならないので、

$$\begin{cases} p+r=0 \\ q+2r=1 \\ -q-r=0 \end{cases} \tag{46}$$

を得る。これらを解くことによって

$$p=-1, q=-1, r=1 \tag{47}$$

が導かれる。すなわち、$\hbar/(mc)$ が長さの次元をもつことがわかる。

$$\left[\frac{\hbar}{mc}\right]=[L] \tag{48}$$

教科書本文 (1.3) で次のクライン–ゴルドン方程式

$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right\}\phi(t,\boldsymbol{x})=0 \tag{49}$$

が与えられているが、この中で質量項として $(mc/\hbar)^2$ の組み合わせで与えられている理由は、上で行った次元解析から理解できる。なぜなら、

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]=\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]=\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]=\left[\frac{1}{L^2}\right] \tag{50}$$

であり、これらの量と同じ次元をもつ量が $(mc/\hbar)^2$ なのである。

check 1.6

電磁気力が長距離力 (力の到達距離 $=\infty$) であることから、光子は質量を持たないことを考察してみよう。

【ヒント】 力の到達距離を L、力の源となる粒子の質量を m としたとき、L と m の関係は check 1.5 で与えられる。この関係は、1.10 節の後半で議論した湯川の中間子論で用いられたものだ。なお、光子が質量を持たないことは、第 3 章で詳しく議論する。もし、新しい力（第 5 の力？）が発見されたなら、その力の到達距離を知ることが重要になる。なぜなら、到達距離からその力の源となる粒子の質量が推測できるからである。

問いに答える前に 1.10 節で議論した湯川の中間子論をもう一度、復習しておこう。力の源となる粒子の質量を m としたとき、その力の到達距離 L は大ざっぱに

$$\text{力の到達距離 } L \sim \frac{\hbar}{mc} \tag{51}$$

で与えられる。これは質量 m から作られる長さの次元をもった量が (check1.5 から) $\hbar/mc$ で与えられるからである。

(51) の力の到達距離は、量子力学と相対論を用いて次のように理解することができる。まず、量子論におけるエネルギーと時間の不確定性関係 $\Delta E\cdot\Delta t\sim\hbar$ から、$\Delta t\sim\hbar/E$ が得られる。

ΔE として力の源となる粒子の静止質量 mc^2 にとると、$\Delta t \sim \hbar/(mc^2)$ の関係は、この粒子が Δt の時間の間存在できることを意味する。このとき、Δt の時間の間にこの粒子が動ける最大の移動距離は、光速 c をかけた

$$\text{粒子の移動距離} \sim c\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc} \tag{52}$$

となる。力の到達距離 L が粒子の移動距離 (52) だとみなせば、(51) の関係が得られることになる。

力の到達距離 L と粒子の質量 m との関係 (51) がわかれば、問いに答えることは簡単である。電磁気力は長距離力 (力の到達距離 $L = \infty$) であり、電磁気力の源となる粒子は光子なので、光子の質量を m_γ としたとき、(51) から

$$m_\gamma \sim \frac{\hbar}{Lc} \overset{L=\infty}{=} 0 \tag{53}$$

が得られ、光子の質量はゼロであることがわかる。実際は、光子の質量がゼロなので、電磁気力は長距離力なのである。

力の源となる粒子の質量を m としたとき、ポテンシャルエネルギーは、通常、湯川ポテンシャル $V(r) \propto \frac{1}{r}e^{-\frac{r}{L}}$ で与えられる。このとき L は力の到達距離に対応し、r は 2 粒子間の距離である。クーロン力は $V(r) \propto \frac{1}{r}$ なので、$L = \infty$ に対応することがわかる。このことからクーロン力 (電磁気力) を長距離力と呼ぶのである。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著

第２章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2014/11/22
解答例の誤植の修正。

2014/04/09
第 2 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 2.1 ～ check 2.4 の解答例
- 『「量子力学は間違っている」は間違っている』の解説

check 2.1

(2.8) を確かめてみよう。

ここでは、時空並進 + ローレンツ変換

$$x^\lambda \to x'^\lambda = \Lambda^\lambda{}_\rho x^\rho + a^\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

の下で、微分演算子 $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ が次のように変換することを証明する。

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu \tag{2}$$

$$\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{3}$$

まず、(3) の変換性を示す。微分のチェーンルールを用いて、

$$\begin{aligned}
\partial_\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial(\Lambda^\lambda{}_\rho x^\rho + a^\lambda)}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda{}_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \\
&= \underbrace{\Lambda^\lambda{}_\rho \delta^\rho{}_\nu}_{\Lambda^\lambda{}_\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}}_{\partial'_\lambda} \qquad \left(\because \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} = \delta^\rho{}_\nu,\ \text{添字}\ \rho, \nu\ \text{の上下の位置に注意}\right) \\
&= \partial'_\lambda \Lambda^\lambda{}_\nu
\end{aligned} \tag{4}$$

両辺に $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ をかけて、$\Lambda^\lambda{}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \delta^\lambda{}_\mu$ を用いると、

$$\partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \partial'_\lambda \delta^\lambda{}_\mu = \partial'_\mu \tag{5}$$

となり、(3) が得られる。したがって、$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は (ベクトルの添字 μ を下付きで書いてあるように)、共変ベクトルの変換性をもつことがわかる。

次に (2) を証明する。議論を簡単化するために、(1) で $a^\lambda = 0$ とおくことにする。これは、微分 $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ は、時空並進のもとで不変なので、(2) の証明には影響しないからである。

ローレンツ変換の下で、x_λ は共変ベクトルの変換性をもつので、

$$x'_\lambda = x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\lambda \tag{6}$$

と変換する。この関係を用いると、

$$\begin{aligned}
\partial^\nu &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x'_\lambda}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial(x_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\lambda)}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \\
&= \underbrace{\delta^\nu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\lambda}_{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\lambda} \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \qquad \left(\because \frac{\partial x_\rho}{\partial x_\nu} = \delta^\nu{}_\rho,\ \text{添字}\ \rho, \nu\ \text{の上下の位置に注意}\right) \\
&= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\lambda \partial'^\lambda
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。両辺に $\Lambda^\mu{}_\nu$ をかけると

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu \partial^\nu &= \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\lambda}_{\delta^\mu{}_\lambda} \partial'^\lambda \\
&= \partial'^\mu
\end{aligned} \tag{8}$$

となり、(2) が得られる。

check 2.2

(2.18) ～ (2.21) を確かめてみよう。

まず、教科書本文 (2.18)、すなわち、

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,, \quad j^\mu = \frac{i}{2m}\{\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi)^*\phi\} \tag{9}$$

を確かめる。

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu\left(\frac{i}{2m}\{\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi)^*\phi\}\right) \\
&= \frac{i}{2m}\big\{(\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi + \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - (\partial_\mu\partial^\mu\phi)^*\phi - (\partial^\mu\phi)^*\partial_\mu\phi\big\} \\
&= \frac{i}{2m}\big\{\phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi - (\partial_\mu\partial^\mu\phi)^*\phi\big\} \qquad \big(\because (\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi = (\partial^\mu\phi)^*\partial_\mu\phi\big) \\
&= \frac{i}{2m}\big\{\phi^*(-m^2\phi) - (-m^2\phi)^*\phi\big\} \qquad \big(\because (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0\big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

したがって、$\phi(x)$ がクライン–ゴルドン方程式 $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0$ を満たすならば、(9) で定義される j^μ は流れの保存 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすことがわかる。

次に教科書本文 (2.19)、すなわち、

$$\frac{dQ}{dt} = 0\,, \quad Q \equiv \int_V d^3\boldsymbol{x} j^0(t,\boldsymbol{x}) = \int_V d^3\boldsymbol{x}\rho(t,\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

の証明は、教科書本文 (2.13) 下で行ったものと全く同じなので、ここでは省略する。ひとつ注意してほしいことは、上式の証明で必要なことは、j^μ が流れの保存 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすことのみで、j^0 が具体的にどのような量で書かれているかの情報は必要ないという点だ。つまり、流れの保存 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすカレント j^μ が存在すれば、直ちに保存量 Q ($\frac{dQ}{dt} = 0$) が得られるということである。

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dQ}{dt} = 0\,, \qquad Q \equiv \int_V d^3\boldsymbol{x}\, j^0(t,\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

(!)

正確には、$j^0(t,\boldsymbol{x})$ は無限遠方 ($|\boldsymbol{x}| \to \infty$) で十分速く 0 になる、すなわち $j^0(t,\boldsymbol{x}) \xrightarrow{|\boldsymbol{x}|\to\infty} 0$ を満たすものとする。(これは、無限遠方には“電荷”は存在しないという物理的要請と考えてもよい。)

次に教科書本文 (2.20) で与えられる $\phi_E(t,\boldsymbol{x})$ がクライン–ゴルドン方程式の解であることを、直接代入することによって確かめる。

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi_E(t,\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)Ne^{-iEt} \\
&= (-E^2 + m^2)Ne^{-iEt} \\
&= 0 \quad (\because E = \pm m)
\end{aligned} \tag{13}$$

最後に教科書本文 (2.21) の関係を確かめる。

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{i}{2m}\left\{\phi_E^*\frac{\partial\phi_E}{\partial t}-\frac{\partial\phi_E^*}{\partial t}\phi_E\right\} \\
&= \frac{i}{2m}\left\{(N^*e^{iEt})\frac{\partial(Ne^{-iEt})}{\partial t}-\frac{\partial(N^*e^{iEt})}{\partial t}(Ne^{-iEt})\right\} \\
&= \frac{i}{2m}\{(N^*e^{iEt})(-iENe^{-iEt})-(iEN^*e^{iEt})(Ne^{-iEt})\} \\
&= \frac{E}{m}|N|^2 \\
&\Longrightarrow\ (2.21)
\end{aligned}
$$

check 2.3

(2.23) で定義される関数 $\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ が、クライン–ゴルドン方程式、および固有値方程式 (2.24) を満たすことを確かめてみよう。また、解 $\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ の重ね合わせ $\int d^3\boldsymbol{p}\big\{a^{(+)}(\boldsymbol{p})\,\phi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})+a^{(-)}(\boldsymbol{p})\,\phi_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(t,\boldsymbol{x})\big\}$ も、クライン–ゴルドン方程式を満たすことを示してみよう、ここで、$a^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ の任意関数である。

$\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})=Ne^{\mp i(E_{\boldsymbol{p}}t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$ が、クライン–ゴルドン方程式を満たすことを以下で確かめる。そのために、$\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ が次式 (教科書本文 (2.24) に対応) を満たすことに注意しておく。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) &= \mp iE_{\boldsymbol{p}}\,\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) \\
\boldsymbol{\nabla}\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) &= \pm i\boldsymbol{p}\,\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{14}
$$

これらの関係式を用いれば、$\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ がクライン–ゴルドン方程式を満たしていることを示すことはやさしい。

$$
\begin{aligned}
(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2\right)\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) \\
&= ((\mp iE_{\boldsymbol{p}})^2-(\pm i\boldsymbol{p})^2+m^2)\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) \\
&= (-E_{\boldsymbol{p}}^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) \\
&= 0\quad(\because E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})
\end{aligned} \tag{15}
$$

次に、$\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ がクライン–ゴルドン方程式を満たせば、$\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ の重ね合わせ

$$
\phi(t,\boldsymbol{x})\equiv\int d^3\boldsymbol{p}\left\{a^{(+)}(\boldsymbol{p})\phi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})+a^{(-)}(\boldsymbol{p})\phi_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(t,\boldsymbol{x})\right\} \tag{16}
$$

もクライン–ゴルドン方程式を満たすことは、次のように確かめられる。

$$
\begin{aligned}
&(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
&\quad= (\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\int d^3\boldsymbol{p}\left\{a^{(+)}(\boldsymbol{p})\phi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})+a^{(-)}(\boldsymbol{p})\phi_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&\quad= \int d^3\boldsymbol{p}\left\{a^{(+)}(\boldsymbol{p})(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi_{\boldsymbol{p}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})+a^{(-)}(\boldsymbol{p})(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi_{\boldsymbol{p}}^{(-)}(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&\quad\overset{(15)}{=} 0
\end{aligned} \tag{17}
$$

ここで 2 番目の等号では、$a^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ のみの関数で $t,\boldsymbol{x}$ には依存しないことを用いた。

(!)

$\phi_{\boldsymbol{p}}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x})$ がクライン–ゴルドン方程式を満たせば、その重ね合わせ $\phi(t,\boldsymbol{x})$ もクライン–ゴルドン方程式を満たすことは、(計算するまでもなく) **線形方程式の一般的性質**から保証される。つまり、A を任意の微分演算子として (クライン–ゴルドン方程式の場合は $A=\partial_\mu\partial^\mu+m^2$)、$\phi_1$ と ϕ_2 が次式を満たすとき、

$$A\phi_1 = A\phi_2 = 0 \tag{18}$$

ϕ_1 と ϕ_2 の任意の重ね合わせ $\phi \equiv a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ (a_1, a_2 は任意の定数) も同じ (線形) 方程式

$$A\phi = 0 \tag{19}$$

を満たす。

check 2.4

(2.33) を導き、(2.34) を確かめてみよう。

まず、$\phi(t,\boldsymbol{x}) = e^{-i(-m)t}\chi^*(t,\boldsymbol{x})$ に対して $\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)$ を作用したものを計算しておく。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)e^{imt}\chi^* \\ &= e^{imt}\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0+im\right)\chi^* \end{aligned}\tag{20}$$

もう一度 $\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)$ を作用させて

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)^2\phi &\overset{(20)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)\left\{e^{imt}\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0+im\right)\chi^*\right\} \\ &= e^{imt}\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0+im\right)^2\chi^* \\ &= e^{imt}\Bigg\{\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)2im}_{\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0+2im\right)}-m^2\Bigg\}\chi^* \\ &= e^{imt}\Bigg\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0+2im\right)\chi^*}_{\simeq 2im\chi^*}-m^2\chi^*\Bigg\} \\ &\simeq e^{imt}\left\{2im\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)-m^2\right\}\chi^* \end{aligned}\tag{21}$$

を得る。ここで、非相対論的近似 $|m\chi| \gg \left|\frac{\partial\chi^*}{\partial t}\right|$, $|qA^0\chi|$ を仮定した。最後の行で、$-m^2\chi^*$ を取り出したのは、(21) をクライン–ゴルドン方程式に代入したときに質量項と相殺させるためである ((22) 参照)。

(21) の関係を電磁場中のクライン–ゴルドン方程式に用いることによって

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)^2-(\nabla^2-iq\boldsymbol{A})^2+m^2\right\}\phi \\
&\overset{(21)}{\simeq} e^{imt}\left\{2im\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)-m^2-(\nabla-iq\boldsymbol{A})^2+m^2\right\}\chi^* \\
&\Rightarrow \left\{2im\left(\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0\right)-(\nabla-iq\boldsymbol{A})^2\right\}\chi^*=0 \\
&\Rightarrow i\frac{\partial\chi^*}{\partial t}=\left\{\frac{1}{2m}(\nabla-iq\boldsymbol{A})^2+qA^0\right\}\chi^* \qquad (22)
\end{aligned}$$

として教科書本文 (2.33) が得られる。

次に (22) の複素共役をとると、

$$-i\frac{\partial\chi}{\partial t}=\left\{\frac{1}{2m}(\nabla+iq\boldsymbol{A})^2+qA^0\right\}\chi \qquad (23)$$

を得る。この式の両辺に -1 をかけて

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t}=\left\{-\frac{1}{2m}(\nabla-i(-q)\boldsymbol{A})^2+(-q)A^0\right\}\chi \qquad (24)$$

が導かれる。これは教科書本文 (2.34) に他ならない。

「量子力学は間違っている」は間違っている

量子力学では、座標演算子 $\widehat{x}$ と運動量演算子 $\widehat{p}$ に次の交換関係を課す。(以下では演算子にハット ^ をつける。)

$$[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar \tag{25}$$

運動量演算子 $\widehat{p}$ の固有値 k の固有状態 $|k\rangle$ を考えると、その定義から

$$\widehat{p}|k\rangle = k|k\rangle, \qquad \langle k|\widehat{p} = k\langle k| \tag{26}$$

が成り立つ。(第 2 式は $\widehat{p}$ がエルミートであることを用いた。)

さて、(25) の左辺を $\langle k|$ と $|k\rangle$ で挟むと、交換関係の定義から以下のように 0 であることがわかる。

$$\begin{aligned}\langle k|\,[\,\widehat{x}, \widehat{p}\,]\,|k\rangle &= \langle k|\left(\widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x}\right)|k\rangle = \langle k|\,\widehat{x}\widehat{p}\,|k\rangle - \langle k|\,\widehat{p}\widehat{x}\,|k\rangle \\ &\overset{(26)}{=} k\langle k|\,\widehat{x}\,|k\rangle - k\langle k|\,\widehat{x}\,|k\rangle = 0\end{aligned}$$

一方、(25) の右辺を $\langle k|$ と $|k\rangle$ で挟むと $\langle k|\,i\hbar\,|k\rangle = i\hbar\,\langle k|k\rangle \neq 0$ となり、これは明らかに矛盾である。したがって、交換関係 (25) は自己矛盾を含んでおり、量子力学は間違っている！

以下で、このパラドックスのどこに問題があったのか、そして、どのように解決されるのかを詳しく議論することにしよう。

このパラドックスの問題箇所は、同じ運動量固有値 k の固有状態 $\langle k|$ と $|k\rangle$ で交換関係をはさんだことにある。

運動量の固有値 k は連続変数なので、規格直交関係はディラックのデルタ関数を使って

$$\langle k|q\rangle = \delta(k-q) \tag{27}$$

で与えられる。このため、$q = k$ としてしまうと右辺は $\delta(0)$ となり発散してしまい意味を持たない。つまり、**$\langle k|k\rangle$ という量は数学的に意味をもたない**のである。

そこで、交換関係を $\langle k|$ と $|k\rangle$ ではなく、$\langle k|$ と $|q\rangle$ ではさむことによって矛盾が生じるか考察してみよう。

$$\begin{aligned}\langle k|[\,\widehat{x}, \widehat{p}\,]|q\rangle &= \langle k|(\widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x})|q\rangle \\ &= \langle k|\widehat{x}\widehat{p}|q\rangle - \langle k|\widehat{p}\widehat{x}|q\rangle \\ &= q\langle k|\widehat{x}|q\rangle - k\langle k|\widehat{x}|q\rangle \\ &= (q-k)\langle k|\widehat{x}|q\rangle \end{aligned} \tag{28}$$

ここで 3 番目の等号では、$\langle k|$ と $|q\rangle$ が運動量演算子 $\widehat{p}$ の固有状態であること、すなわち、$\langle k|\widehat{p} = k\langle k|$、$\widehat{p}|q\rangle = q|q\rangle$ を用いた。

一見すると、(28) の最後の表式で $q \to k$ とおくと、右辺は 0 となって、再びパラドックスが生じるように見えるが、実はそうではない。そのことを以下で示そう。

そのために次の公式を証明しておく。

$$e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\ \widehat{p}\ e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} = \widehat{p} + a \tag{29}$$

ここで、a は任意の実数である。これを証明するためには、$f(a) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\ \widehat{p}\ e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}$ と定義して、a で微分することによって

$$\begin{aligned} \frac{df(a)}{da} &= \frac{de^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}}{da}\ \widehat{p}\ e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} + e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\ \widehat{p}\ \frac{de^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}}{da} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{x}\right)\widehat{p}e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} + e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\widehat{p}\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{x}\right)e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\underbrace{\left(-\frac{i}{\hbar}\right)[\widehat{x},\widehat{p}]}_{1}e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{30}$$

を得る。また、$a = 0$ とおいて

$$f(0) = \widehat{p} \tag{31}$$

が得られる。したがって、$f(a)$ は方程式 $\frac{df(a)}{da} = 1$ および $f(0) = \widehat{p}$ を満たす関数であることがわかる。これは簡単に解けて、$f(a) = \widehat{p} + a$ が解、すなわち (29) が得られたことになる。

(29) から

$$\widehat{p}\,e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} = e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}(\widehat{p} + a) \tag{32}$$

が導かれるので、次の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \widehat{p}(e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}|k\rangle) &\overset{(32)}{=} e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}\underbrace{(\widehat{p} + a)|k\rangle}_{(k+a)|k\rangle} \\ &= (k + a)(e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}|k\rangle) \end{aligned} \tag{33}$$

上の関係から、状態 $e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}|k\rangle$ は $\widehat{p}$ の固有値 $k + a$ をもつ固有状態、すなわち、

$$e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}|k\rangle = |k + a\rangle \tag{34}$$

であることがわかる。(ここでは右辺の比例係数を 1 にとった。)

ここで a を無限小量だと思って $e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}$ をテイラー展開した式 $e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} = 1 + \frac{i}{\hbar}a\widehat{x} + \cdots$ を用いると、(34) を次のように変形できる。

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}}|k\rangle = |k + a\rangle &\implies (e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} - 1)|k\rangle = |k + a\rangle - |k\rangle \\ &\implies \frac{e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} - 1}{a}|k\rangle = \frac{|k + a\rangle - |k\rangle}{a} \\ &\implies \lim_{a\to 0}\underbrace{\frac{e^{\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}} - 1}{a}}_{\frac{(1+\frac{i}{\hbar}a\widehat{x}+\cdots)-1}{a}}|k\rangle = \underbrace{\lim_{a\to 0}\frac{|k + a\rangle - |k\rangle}{a}}_{\frac{\partial}{\partial k}|k\rangle\ \text{の定義式}} \\ &\implies \frac{i}{\hbar}\widehat{x}|k\rangle = \frac{\partial}{\partial k}|k\rangle \end{aligned} \tag{35}$$

両辺のエルミート共役をとると

$$\frac{i}{\hbar}\widehat{x}|k\rangle = \frac{\partial}{\partial k}|k\rangle \xrightarrow{\text{エルミート共役}} \langle k|\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{x}\right) = \frac{\partial}{\partial k}\langle k|$$

すなわち、

$$\langle k|\widehat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\langle k| \tag{36}$$

を得る。ここで、$\widehat{x}^\dagger = \widehat{x}$、$(|k\rangle)^\dagger = \langle k|$ を用いた。(36) を用いると

$$\begin{aligned}\langle k|\widehat{x}|q\rangle &\overset{(36)}{=} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\langle k|\right)|q\rangle \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\langle k|q\rangle \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\delta(k-q)\end{aligned} \tag{37}$$

が成り立つことがわかり、これを (28) に代入すると

$$\langle k|[\widehat{x},\widehat{p}]|q\rangle = (q-k)i\hbar\frac{\partial}{\partial k}\delta(k-q) \tag{38}$$

の関係を得る。

さて、最後にデルタ関数の次の公式

$$x\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta(x)\right) = -\delta(x) \tag{39}$$

を用いる。これを証明するには、任意のテスト関数 $f(x)$ を両辺にかけて積分して、次の等号

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta(x)\right)f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x)f(x) \tag{40}$$

が成り立つことを確かめればよい。(上式の左辺で部分積分と公式 $x\delta(x) = 0$ を用いればよい。)

公式 (39) を (38) 右辺に用いることによって最終的に

$$\langle k|[\widehat{x},\widehat{p}]|q\rangle = i\hbar\delta(k-q) \tag{41}$$

を得る。上式右辺は、交換関係 $[\widehat{x},\widehat{p}] = i\hbar$ の右辺を $\langle k|$ と $|q\rangle$ ではさんだもの、すなわち、

$$\langle k|i\hbar|q\rangle = i\hbar\langle k|q\rangle = i\hbar\delta(k-q) \tag{42}$$

に他ならないので、矛盾は全く生じていないことがわかる。

★★★

パラドックスが解決したところで、再び次のパラドックスに挑戦してもらいたい。内容は元のパラドックス問題と似ているが、その解決法は全く異なる。答は与えないので、読者自身の手で解決を試みてもらいたい。

今度は、半径 R の１次元円周上の自由粒子の量子力学系を考えることにする。このとき粒子は円周上に束縛されているので、運動量 $\widehat{p}$ の固有値 k は離散的な値をとる。

$$\widehat{p}|k_n\rangle = k_n|k_n\rangle\,, \quad k_n = \frac{n\hbar}{R} \quad (n \text{ は任意の整数}) \tag{43}$$

(なぜ運動量の固有値が離散的な値をとるのか忘れていたら、もう一度量子力学の教科書を読み返そう。)

このとき、固有値 k_n は離散的なので、規格直交条件はディラックのデルタ関数ではなく、クロネッカーシンボルを用いて

$$\langle k_m|k_n\rangle = \delta_{m,n} \quad (m, n \text{ は整数}) \tag{44}$$

で与えられる。したがって、$m = n$ とおいても $\langle k_n|k_n\rangle = 1$ で発散したりしないので、今度は安心して、交換関係 $[\widehat{x}, \widehat{p}] = i\hbar$ を $\langle k_n|$ と $|k_n\rangle$ ではさむことができる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\langle k_n|[\widehat{x}, \widehat{p}]|k_n\rangle &= \langle k_n|(\widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x})|k_n\rangle \\
&= \langle k_n|\widehat{x}\,\underbrace{\widehat{p}|k_n\rangle}_{k_n|k_n\rangle} - \underbrace{\langle k_n|\widehat{p}}_{\langle k_n|k_n}\,\widehat{x}|k_n\rangle \\
&= k_n\langle k_n|\widehat{x}|k_n\rangle - k_n\langle k_n|\widehat{x}|k_n\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{45}$$

一方、

$$\langle k_n|i\hbar|k_n\rangle = i\hbar\langle k_n|k_n\rangle = i\hbar \tag{46}$$

となり矛盾する。

読者の課題は、上の推論のどこが間違っているのかを明確な形で指摘することである。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第３章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2014/11/22
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 3 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 3.1 $\sim$ check 3.8 の解答例

check 3.1

任意の（3次元）ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x)$ およびスカラー関数 $A^0(x)$ に対して、$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0$，$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}A^0) = \boldsymbol{0}$ が成り立つことを確かめてみよう。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &(1)\\ \boldsymbol{A} &= (A_x, A_y, A_z) &(2)\end{aligned}$$

として、$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{\nabla}A^0$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) &(3)\\ \boldsymbol{\nabla}A^0 &= \left(\frac{\partial A^0}{\partial x}, \frac{\partial A^0}{\partial y}, \frac{\partial A^0}{\partial z}\right) &(4)\end{aligned}$$

これらを用いて $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0$ および $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}A^0) = \boldsymbol{0}$ を直接確かめる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\right)A_x + \left(-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\right)A_y + \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right)A_z\\ &= 0 \qquad (\because \text{微分は可換}) &(5)\\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}A^0) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A^0}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A^0}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A^0}{\partial z}\right),\right.\\ &\qquad \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A^0}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x}\right)\right)\\ &= (0, 0, 0) &(6)\end{aligned}$$

≪ **別解** ≫

別解を以下に示す。今後はこちらの証明に慣れてほしい。

ベクトルの外積は、3 階完全反対称テンソル ε^{ijk}

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ が } (123) \text{ の偶置換}\\ -1 & (ijk) \text{ が } (123) \text{ の奇置換}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases} \tag{7}$$

を用いて、次のように表すことができる。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} a^j b^k \quad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

また、ベクトルの内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i \tag{9}$$

である。これらを用いると $\nabla^i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1,2,3)$ として

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}A^k\right)\\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}A^k\\
&\overset{i\leftrightarrow j}{=} \sum_{i,j,k=1}^{3}\underbrace{\varepsilon^{jik}}_{-\varepsilon^{ijk}}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}A^k\\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}A^k\\
&= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) \qquad (10)
\end{aligned}$$

ここで上から 3 番目の等号では、添字を $i\to j$、$j\to i$ と置き換えた。4 番目の等号では、$\varepsilon^{jik}=-\varepsilon^{ijk}$、および $\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$ を用いた。(10) から

$$\begin{aligned}
(10) &\implies 2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0\\
&\implies \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0 \qquad (11)
\end{aligned}$$

が得られる。

同様にして

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}A^0))^i &= \sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}A^0\right)\\
&\overset{j\leftrightarrow k}{=} \sum_{j,k=1}^{3}\underbrace{\varepsilon^{ikj}}_{-\varepsilon^{ijk}}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j}}_{\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}}A^0\\
&= -\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}A^0\right)\\
&= -(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}A^0))^i\\
&\implies (\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}A^0))=0 \qquad (12)
\end{aligned}$$

を得る。

check 3.2

マクスウェル方程式の最初の 2 式（(3.1a) と (3.1b)）は、(3.5) と等価であることを証明せよ。また、(3.3) を (3.5) の左辺に代入すると、恒等的にゼロになることを確かめてみよう。

【ヒント】 問題の前半に対しては、$M^{\rho\mu\nu}\equiv\partial^\rho F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\rho}+\partial^\nu F^{\rho\mu}$ と定義したとき、$M^{\rho\mu\nu}$ は $(\rho\mu\nu)$ に関して完全反対称であることをまず確かめよ。これが確かめられたなら、完全反対称性から (μ,ν,ρ) =$(0,1,2)$, $(0,2,3)$, $(0,3,1)$, $(1,2,3)$ の 4 つの場合を具体的に確かめれば十分である。（なぜか？）このとき、(3.4) の関係を用いよ。

まず、ヒントにしたがって

$$M^{\rho\mu\nu} \equiv \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \tag{13}$$

を定義する。初めに $M^{\rho\mu\nu}$ が完全反対称 (となり合う 2 つの添字の入れ替えに対して反対称) であることを示す。

まず初めに、$M^{\mu\rho\nu} = -M^{\rho\mu\nu}$ を示す。

$$\begin{aligned} M^{\mu\rho\nu} &\overset{(13)}{=} \partial^\mu \underbrace{F^{\rho\nu}}_{-F^{\nu\rho}} + \partial^\rho \underbrace{F^{\nu\mu}}_{-F^{\mu\nu}} + \partial^\nu \underbrace{F^{\mu\rho}}_{-F^{\rho\mu}} \qquad (\because\ F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}) \\ &= -(\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu}) \\ &\overset{(13)}{=} -M^{\rho\mu\nu} \end{aligned} \tag{14}$$

次に、$M^{\rho\nu\mu} = -M^{\rho\mu\nu}$ を示す。

$$\begin{aligned} M^{\rho\nu\mu} &\overset{(13)}{=} \partial^\rho \underbrace{F^{\nu\mu}}_{-F^{\mu\nu}} + \partial^\nu \underbrace{F^{\mu\rho}}_{-F^{\rho\mu}} + \partial^\mu \underbrace{F^{\rho\nu}}_{-F^{\nu\rho}} \\ &\overset{(13)}{=} -M^{\rho\mu\nu} \end{aligned} \tag{15}$$

したがって、$M^{\rho\mu\nu}$ はとなり合う 2 つの添字の入れ替えに対して反対称なので、完全反対称である。

(!)

となり合う 2 つの添字の入れ替えに対して反対称ならば、任意の 2 つの添字の入れ替えに対して反対称となる。したがって、完全反対称性の証明は、となり合う 2 つの添字の入れ替えに対する反対称性を確かめれば十分である。

完全反対称性から、$M^{\rho\mu\nu}$ は $(\rho\mu\nu)$ の中に同じ添字が 2 つ以上あれば 0 となる。すなわち、

$$M^{\rho\mu\nu} = 0 \qquad \text{if}\ \ \rho = \mu\ \ \text{or}\ \ \mu = \nu\ \ \text{or}\ \ \nu = \rho. \tag{16}$$

したがって、$M^{\rho\mu\nu}$ として $(\rho\mu\nu)$ の値がすべて異なる場合を考えれば十分である。たとえば、ρ, μ, ν が 0, 1, 2 からなるときは可能性として

$$(\rho, \mu, \nu) = (0, 1, 2),\ (0, 2, 1),\ (1, 0, 2),\ (1, 2, 0),\ (2, 0, 1),\ (2, 1, 0) \tag{17}$$

の 6 通りあるが、本質的に $(\rho, \mu, \nu) = (0, 1, 2)$ のみを考えれば十分である。なぜなら、$M^{\rho\mu\nu}$ の完全反対称性から

$$M^{012} = -M^{021} = -M^{102} = M^{120} = M^{201} = -M^{210} \tag{18}$$

の関係が成り立つからである。したがって、$M^{\rho\mu\nu}$ としては、次の 4 通りを考えれば十分である。

$$M^{012}, M^{023}, M^{031}, M^{123} \tag{19}$$

では、上記の 4 つの場合について、以下で具体的にどのような量を与えているかを書き下してみよう。

$$
\begin{aligned}
M^{012} &= \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(-B^3) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\right) E^2 + \left(-\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(-E^1) \\
&= -\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)^{\text{第 3 成分}} \\
M^{023} &= \partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(-B^1) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^2}\right) E^3 + \left(-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(-E^2) \\
&= -\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)^{\text{第 1 成分}} \\
M^{031} &= \partial^0 F^{31} + \partial^3 F^{10} + \partial^1 F^{03} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(-B^2) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^3}\right) E^1 + \left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\right)(-E^3) \\
&= -\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)^{\text{第 2 成分}} \\
M^{123} &= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial x^1}\right)(-B^1) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(-B^2) + \left(-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(-B^3) \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}
\end{aligned} \tag{20}
$$

したがって、次の対応があることがわかった。

$$
\begin{aligned}
(M^{023}, M^{031}, M^{012}) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \\
M^{123} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0
\end{aligned} \tag{21}
$$

上の計算では、$c = 1$ としていることと、$\partial^i = \partial/\partial x_i = -\partial/\partial x^i$ $(i = 1, 2, 3)$ に注意しよう。

最後に $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を (13) に代入して恒等的に 0 になることを確かめる。

$$
\begin{aligned}
&\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \\
&\quad = \partial^\rho(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\mu(\partial^\nu A^\rho - \partial^\rho A^\nu) + \partial^\nu(\partial^\rho A^\mu - \partial^\mu A^\rho) \\
&\quad = \underbrace{(\partial^\rho\partial^\mu - \partial^\mu\partial^\rho)}_{0} A^\nu + \underbrace{(-\partial^\rho\partial^\nu + \partial^\nu\partial^\rho)}_{0} A^\mu + \underbrace{(\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)}_{0} A^\rho \\
&\quad = 0
\end{aligned} \tag{22}
$$

check 3.3

交換関係の定義 $[A, B] \equiv AB - BA$ より、任意の量 A, B, C に対して次の関係が恒等的に成り立つことを証明してみよう。

$$
[\,A\,,\,[\,B\,,\,C\,]\,] + [\,B\,,\,[\,C\,,\,A\,]\,] + [\,C\,,\,[\,A\,,\,B\,]\,] = 0 \tag{23}
$$

この式は**ヤコビの恒等式 (Jacobi identity)** とよばれる。

交換関係の定義にしたがって、ヤコビの恒等式を証明する。

$$
\begin{aligned}
&[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] \\
&\quad = [A, BC-CB]+[B, CA-AC]+[C, AB-BA] \\
&\quad = A(BC-CB)-(BC-CB)A \\
&\qquad +B(CA-AC)-(CA-AC)B \\
&\qquad +C(AB-BA)-(AB-BA)C \\
&\quad = \underbrace{ABC}_{①}-\underbrace{ACB}_{②}-\underbrace{BCA}_{③}+\underbrace{CBA}_{④} \\
&\qquad +\underbrace{BCA}_{③}-\underbrace{BAC}_{⑤}-\underbrace{CAB}_{⑥}+\underbrace{ACB}_{②} \\
&\qquad +\underbrace{CAB}_{⑥}-\underbrace{CBA}_{④}-\underbrace{ABC}_{①}+\underbrace{BAC}_{⑤} \\
&\quad = 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

したがって、任意の A, B, C に対して次式 (ヤコビの恒等式) が恒等的に成り立つ。

$$
[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0 \tag{25}
$$

!

ヤコビの恒等式は群論で重要になる (check 7.4 参照)。

check 3.4

∂^ρ と $F^{\mu\nu}$ の積から作られるベクトルは本質的に $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ しかないことを示してみよう。

【ヒント】 ∂^ρ と $F^{\mu\nu}$ の積から作られる反変ベクトルの候補として、$\partial_\mu F^{\mu\nu}$, $\partial_\mu F^{\nu\mu}$, $\partial^\nu F_\mu{}^\mu \equiv \partial^\nu(\eta_{\rho\mu}F^{\rho\mu})$ の 3 つがある。このとき、$\partial_\mu F^{\mu\nu}=-\partial_\mu F^{\nu\mu}$, $\partial^\nu F_\mu{}^\mu=0$ を満たすことを確かめよ。

∂^ρ と $F^{\mu\nu}$ の積 $\partial^\rho F^{\mu\nu}$ は 3 階のテンソルなので、これからベクトル量を得るためには、3 つの添字のうち 2 つをつぶす (縮約する) 必要がある。3 つの添字のうち 2 つを縮約する方法は 3 通りある。

$$
\begin{aligned}
\eta_{\rho\mu}(\partial^\rho F^{\mu\nu}) &= \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (\rho\mu\text{について縮約}) \\
\eta_{\rho\nu}(\partial^\rho F^{\mu\nu}) &= \partial_\nu F^{\mu\nu} \quad (\rho\nu\text{について縮約}) \\
\eta_{\mu\nu}(\partial^\rho F^{\mu\nu}) &= \partial^\rho F_\nu{}^\nu \quad (\mu\nu\text{について縮約})
\end{aligned}
\tag{26}
$$

比較しやすいように縮約されている添字を μ で表し、浮いている添字を ν としておくと、上の 3 つは

$$
\partial_\mu F^{\mu\nu} \ , \quad \partial_\mu F^{\nu\mu} \ , \quad \partial^\nu F_\mu{}^\mu \tag{27}
$$

となる。

まず、2 番目の $\partial_\mu F^{\nu\mu}$ は $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ と本質的に同等である。なぜなら、$F^{\mu\nu}$ の反対称性より $F^{\nu\mu}=-F^{\mu\nu}$ なので、$\partial_\mu F^{\nu\mu}=-\partial_\mu F^{\mu\nu}$ だからである。

次に3番目の $\partial^\nu F_\mu{}^\mu$ は恒等的に0になることを以下に示す。

$$\begin{aligned}
\partial^\nu F_\mu{}^\mu &= \partial^\nu(\underbrace{\eta_{\rho\mu}}_{\eta_{\mu\rho}}\underbrace{F^{\rho\mu}}_{-F^{\mu\rho}}) = -\partial^\nu(\eta_{\mu\rho}F^{\mu\rho}) \\
&= -\partial^\nu \underbrace{F_\rho{}^\rho}_{F_\mu{}^\mu} = -\partial^\nu F_\mu{}^\mu \\
&\Longrightarrow \partial^\nu F_\mu{}^\mu = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

したがって、∂^ρ と $F^{\mu\nu}$ の積から作られるベクトルは本質的に $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ しかないことがわかる。

(!)

4階完全反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ を用いてよいとすると、∂^ρ と $F^{\mu\nu}$ の積から作られるベクトルの候補として、もう1つ $\varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma}$ がある。しかしながら、$F_{\beta\gamma} = \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta$ を代入すると、この量は恒等的にゼロになることが以下のように示される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} &= \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\left(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta\right) \\
&= \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma - \partial_\alpha\partial_\gamma A_\beta\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで最後の等号では、$\varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\beta = 0 = \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma$ を用いた。

check 3.5

任意の3次元ベクトル $\boldsymbol{k}$ に対して $\omega^2 = \boldsymbol{k}^2c^2$ ならば、$\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ が (3.15) の解となることを確かめよ。その結果から、この解が $\boldsymbol{k}$ 方向に光速 c で進む波を表すことを確かめてみよう。

【ヒント】 速度 $\boldsymbol{v}$ で伝わる波に対して、同じ速度 $\boldsymbol{v}$ で動く系 $\left(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t\right)$ に移れば、その波は止まって見えるはずだ。(そのとき、波の解は $\cos(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}')$ の形となる。) それと、$\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|^2)t)$ の変形を考えてみよ。

まず初めに、$\omega^2 = \boldsymbol{k}^2c^2$ ならば $\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ が

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = 0 \tag{29}$$

を満たすことを示す。$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k_x x + k_y y + k_z z$ であることに注意して以下の計算を行う。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial}{\partial t}\big(-\omega\sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\big) \\
&= -\omega^2\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\ , \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(+k_x\sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\big) \\
&= -(k_x)^2\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\ , \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) &= -(k_y)^2\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\ , \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) &= -(k_z)^2\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\ ,
\end{aligned} \tag{30}$$

以上の結果から、$\omega^2 = ((k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2)c^2$ ならば、(29) が成り立つことがわかる。

次に、解 $\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{k}$ 方向に光速 c で進む波を表すことを確かめる。いろいろな示し方があるが、ここではヒントにしたがって、関数 $\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{k}$ 方向に速さ $v\equiv\sqrt{\omega^2/\boldsymbol{k}^2}$ (以下では $\omega^2=\boldsymbol{k}^2c^2$ の関係を仮定しない) で進む波であることを示す。

一般に波が速度 $\boldsymbol{v}$ で進んでいるならば、波と同じ速度 $\boldsymbol{v}$ で動く系 ($\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t$) に移れば、その波は止まって見える (時間 t の依存性をもたない) はずだ。このことを念頭に置いて、$\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ を次のように変形する。

$$\begin{aligned}\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) &= \cos\left(-\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{x}-\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}t\right)\right)\\ &\equiv \cos(-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t))\end{aligned}\tag{31}$$

ここで、$\boldsymbol{v}\equiv\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}$ および

$$\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=\omega\tag{32}$$

を用いた。

したがって、$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t$ の系に移れば、この波は (t 依存性をもたず) 止まって見えることになる。すなわち、

$$\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})=\cos(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}')\tag{33}$$

となる。

このとき、$\boldsymbol{v}$ の定義 $\boldsymbol{v}=\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{k}$ より $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{k}$ 方向を向き、その大きさは $|\boldsymbol{v}|=\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|^2}|\boldsymbol{k}|=\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$ である。したがって、解 $\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{k}$ 方向へ速さ $v=\frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|}$ で進む波を表すことがわかる。

check 3.6

(3.25) を確かめよ。また、(3.28) から、ソレノイドの全磁束が

$$\Phi=\frac{2\pi\hbar c}{e}n\qquad(\,n\text{ は任意の整数}\,)\tag{34}$$

のとき、電子はソレノイドの存在を（たとえ $\Phi\neq0$ であっても）知ることはできないことを確かめてみよう。上式は**磁束の量子化 (magnetic flux quantization)** とよばれる条件式で、量子論における磁束の特殊性を表す関係式である。

教科書本文 (3.28) の波動関数は

$$\psi(t,\boldsymbol{x})=e^{i\frac{e}{\hbar c}\varphi_{\mathrm{I}}}\left\{\psi_0^{\mathrm{I}}(t,\boldsymbol{x})+e^{i\frac{e}{\hbar c}\Phi}\psi_0^{\mathrm{II}}(t,\boldsymbol{x})\right\}\tag{35}$$

で与えられるので、第 2 項の位相は $\Phi=\frac{2\pi\hbar c}{e}n$ (n は整数) のとき、

$$\begin{aligned}\exp\left\{i\frac{e}{\hbar c}\Phi\right\} &= \exp\left\{i\frac{e}{\hbar c}\frac{2\pi\hbar c}{e}n\right\}\\ &= \exp\{i2\pi n\}\\ &= 1\quad(\because n\text{ は整数})\end{aligned}\tag{36}$$

となり、位相は自明な値 1 となってしまう。このとき、ソレノイドがない場合と同じ結果を与えることになる。

このように、アハロノフ–ボーム効果は磁場の特異性をあぶり出してくれる。古典的には、磁場あるいは磁束の大きさが大きくなれば、その効果はより大きくなると期待される。しかしながら、量子論的には必ずしもそうではないということだ。特に、アハロノフ–ボーム効果では磁束に周期性が現れ、$\frac{2\pi\hbar c}{e}n$ (n は整数) だけ異なる磁束は現象としては全く同じものとして観測され、区別できないことになる。

(34) の関係式は一般に磁束の量子化 (magnetic flux guantization) とよばれ、**超伝導状態**の系や**単磁極 (monopole)** の系にも現れる重要な性質である。

check 3.7

プロカ方程式 (3.30) は、ゲージ変換 $A^\nu(x) \to A^\nu(x) + \partial^\nu\Lambda(x)$ の下で不変ではないことを確かめ、ゲージ不変性の要求は $m=0$、すなわち、質量項 m^2A^ν を禁止することを示してみよう。

$A^\mu(x)$ がプロカ方程式

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2A^\nu = 0 \tag{37}$$

を満たすとき、$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x)$ が同じプロカ方程式を満たすかどうか、確かめる。

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu(\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) + m^2A'^\nu \\
&\quad= \partial_\mu(\partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu\Lambda) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu\Lambda)) + m^2(A^\nu + \partial^\nu\Lambda) \\
&\quad= \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \underbrace{\partial^\mu\partial^\nu\Lambda - \partial^\nu\partial^\mu\Lambda}_{0}) + m^2A^\nu + m^2\partial^\nu\Lambda \\
&\quad\overset{(37)}{=} m^2\partial^\nu\Lambda
\end{aligned} \tag{38}$$

任意関数 $\Lambda(x)$ に対して一般に $\partial^\nu\Lambda(x) \neq 0$ なので、$A'^\mu(x)$ はプロカ方程式を満たさないことがわかる。つまり、プロカ方程式はゲージ変換 $A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x)$ の下で不変ではない。また、(38) の結果から、ゲージ不変性の要求は、$m=0$ を導くことがわかる。

check 3.8

(i), (ii), (iii) の要請から可能な候補は、$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu$, $\partial_\mu\partial^\nu A^\mu, A^\nu$ の線形結合 $\alpha\partial_\mu\partial^\mu A^\nu + \beta\partial_\mu\partial^\nu A^\mu + \gamma m^2 A^\nu$ で与えられることを示し、ゲージ不変性の要求から、$\alpha = -\beta, \gamma = 0$ となることを確かめてみよう。

(i), (ii), (iii), (iv) の要請はそれぞれ

(i) 右辺と同じベクトル量
(ii) ゲージ場の 1 次式
(iii) 時空座標の 2 階微分まで含む
(iv) ゲージ不変性

である。

(!)

(ii) の要請は、自由場の要請と思ってもらってよい。なぜなら、ゲージ場の 2 次以上を方程式に含むと線形性がなくなるため、一般に解の重ね合わせが成り立たないからである。このため、場の 2 次以上の項は相互作用を表す。(iii) の要請は、運動方程式は時間の 2 階微分までを含むことから来ている。

さて、(ii) と (iii) の要請から可能な量は

$$\partial^\mu \partial^\nu A^\rho, \quad \partial^\mu A^\nu, \quad m^2 A^\nu \tag{39}$$

である。(i) の要請からベクトル量がほしいので、$\partial^\mu A^\nu$ は候補から排除される。これは $\partial^\mu A^\nu$ からベクトル量を作ることができないからである。

$\partial^\mu \partial^\nu A^\rho$ からは、3 つの添字のうち 2 つを縮約することによってベクトルを作ることができる。そのとき、本質的に独立なものは、$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$ と $\partial_\mu \partial^\nu A^\mu$ の 2 つである。したがって、(39) から作られるもっとも一般的なベクトル量は

$$V^\nu \equiv \alpha \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \beta \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + \gamma m^2 A^\nu \tag{40}$$

である。

最後にゲージ不変性の要請 (iv) を課す。すなわち、$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ の変換の下で V^ν が不変 $(V'^\nu = V^\nu)$ を要請する。

$$\begin{aligned}
V^\nu &= \alpha \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \beta \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + \gamma m^2 A^\nu \\
\longrightarrow V'^\nu &= \alpha \partial_\mu \partial^\mu A'^\nu + \beta \partial_\mu \partial^\nu A'^\mu + \gamma m^2 A'^\nu \\
&= \alpha \partial_\mu \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) + \beta \partial_\mu \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) + \gamma m^2 (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) \\
&= V^\nu + (\alpha + \beta) \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu \Lambda + \gamma m^2 \partial^\nu \Lambda
\end{aligned} \tag{41}$$

任意の関数 $\Lambda(x)$ に対して $V'^\nu = V^\nu$ が成り立つためには、

$$\alpha + \beta = 0 \text{ かつ } \gamma = 0 \tag{42}$$

が成り立たなければならない。したがって、(i) $\sim$ (iv) の要請を満たすためには、比例係数を除いて

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{43}$$

で与えられることが示されたことになる。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」

裳華房、坂本眞人著

第４章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2014/11/22
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 4 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 4.1 ∼ check 4.10 の解答例

check 4.1

γ 行列 γ^μ が反交換関係 (4.7) を満たすならば、(4.4) が成り立つことを確かめてみよう。

【ヒント】p_ν と γ^μ、および、p_ν と p_μ は可換である。(4.4) 右辺では μ,ν の添字について和がとられているので、$\mu\to\nu$, $\nu\to\mu$ と添字をおきかえてもよい。このことから $(\gamma^\nu p_\nu)(\gamma^\mu p_\mu)=\gamma^\nu\gamma^\mu p_\nu p_\mu=\frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu+\gamma^\mu\gamma^\nu)p_\nu p_\mu=p_\mu p^\mu I_N$ を導け。

以下では、γ 行列が、

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}I_N \tag{1}$$

を満たすならば、次式が成り立つことを確かめる。

$$(p_\mu p^\mu-m^2)I_N=(\gamma^\mu p_\mu+mI_N)(\gamma^\nu p_\nu-mI_N) \tag{2}$$

(2) の右辺から出発する。

$$\begin{aligned}
&(\gamma^\mu p_\mu+mI_N)(\gamma^\nu p_\nu-mI_N)\\
&\quad= \gamma^\mu p_\mu\gamma^\nu p_\nu+m(\underbrace{\gamma^\nu p_\nu}_{\gamma^\mu p_\mu}-\gamma^\mu p_\mu)-m^2I_N\\
&\quad= p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu-m^2I_N \quad (\because p_\mu,\,p_\nu\text{は単なる数なので}\gamma^\mu,\gamma^\nu\text{とは可換})
\end{aligned} \tag{3}$$

上式右辺第 1 項を計算する。

$$p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu \overset{\mu\leftrightarrow\nu}{=} \underbrace{p_\nu p_\mu}_{p_\mu p_\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu=p_\mu p_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ p_\mu p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu &\overset{(4)}{=} p_\mu p_\nu\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)\\
&= p_\mu p_\nu\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\\
&\overset{(1)}{=} p_\mu p_\nu\frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}I_N\\
&= p_\mu p^\mu I_N
\end{aligned} \tag{5}$$

これを (3) に代入すれば、(2) が成り立つことがわかる。

check 4.2

γ^0 の固有値は ±1 で、（縮退度も考慮した）γ^0 の固有値の和は 0 であることを証明せよ。また、このことからも γ 行列のサイズ N は偶数でなければならないことを示してみよう。

【ヒント】問題を解くのに必要な関係式は、$(\gamma^0)^2=I_N$ と $\mathrm{tr}(\gamma^0)=0$ である。$\mathrm{tr}(\gamma^0)=0$ を示すには、$(\gamma^1)^2=-I_N$ $\gamma^0\gamma^1=-\gamma^1\gamma^0$ および $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ を用いて、$\mathrm{tr}(\gamma^0)=-\mathrm{tr}(\gamma^0(\gamma^1)^2)=+\mathrm{tr}(\gamma^1\gamma^0\gamma^1)=+\mathrm{tr}(\gamma^0(\gamma^1)^2)=-\mathrm{tr}(\gamma^0)$ を導けばよい。後は、γ^0 の固有値の和と $\mathrm{tr}(\gamma^0)$ がどのような関係にあるかを考えよ。

行列 γ^0 の固有値 λ に属する固有ベクトルを $\vec{u}_\lambda$ としておくと、定義より

$$\gamma^0\vec{u}_\lambda=\lambda\vec{u}_\lambda \tag{6}$$

が成り立つ。上式両辺の左から γ^0 をかけて、$(\gamma^0)^2 = I_N$ を用いると、

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(\gamma^0)^2}_{I_N} \vec{u}_\lambda &= \lambda \underbrace{\gamma^0 \vec{u}_\lambda}_{\lambda \vec{u}_\lambda} \\
&\Longrightarrow \lambda^2 = 1 \\
&\Longrightarrow \lambda = \pm 1
\end{aligned} \tag{7}
$$

となり、γ^0 の固有値 λ は ± 1 であることがわかる。

$N \times N$ 行列 γ^0 の N 個の固有値を $\lambda_a (a = 1, 2, \ldots, N)$ としておくと、固有値の和 $\sum_{a=1}^{N} \lambda_a$ は、行列 γ^0 のトレースで与えられる。すなわち

$$
\mathrm{tr}(\gamma^0) = \sum_{a=1}^{N} \lambda_a \tag{8}
$$

≪ (8) の証明 ≫
(8) を示すには、γ^0 がある行列 U によって、次のように対角行列 γ^0_{diag} に対角化されたとする。

$$
U \gamma^0 U^{-1} = \gamma^0_{\mathrm{diag}} \tag{9}
$$

これを用いると、(8) を次のように示すことができる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^0) &= \mathrm{tr}(\gamma^0 U^{-1} U) \qquad (\because U^{-1} U = I_N) \\
&= \mathrm{tr}(U \gamma^0 U^{-1}) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\
&\overset{(9)}{=} \mathrm{tr}(\gamma^0_{\mathrm{diag}}) \\
&= \sum_{a=1}^{N} \lambda_a \qquad (\because \gamma^0_{\mathrm{diag}} \text{の対角成分は} \gamma^0 \text{の固有値})
\end{aligned} \tag{10}
$$

証明終

次に $\mathrm{tr}(\gamma^0) = 0$ を示す。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^0) &= -\mathrm{tr}(\gamma^0 (\gamma^1)^2) \qquad (\because (\gamma^1)^2 = -I_N) \\
&= -\mathrm{tr}(\underbrace{\gamma^1 \gamma^0}_{-\gamma^0 \gamma^1} \gamma^1) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\
&= +\mathrm{tr}(\gamma^0 (\gamma^1)^2) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^0) \qquad (\because (\gamma^1)^2 = -I_N) \\
&\Longrightarrow \mathrm{tr}(\gamma^0) = 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

(8) と (11) から、γ^0 の固有値の和は 0 であることがわかる。すなわち、

$$
\sum_{a=1}^{N} \lambda_a = 0 \tag{12}
$$

である。γ^0 の固有値は $+1$ または -1 なので、$\{\lambda_a\}$ の中で $+1$ の固有値の数を P とすると、-1 の固有値の数は $N - P$ である。したがって、(12) は

$$
\begin{aligned}
&(+1) \times P + (-1) \times (N - P) = 0 \\
&\Longrightarrow 2P - N = 0 \\
&\Longrightarrow N = 2P
\end{aligned} \tag{13}
$$

となり、N は偶数でなければならないことがわかる。

check 4.3

パウリ行列 σ^j $(j=1,2,3)$ が、(4.12) $\sim$ (4.14) を満たすことを確かめてみよう。

パウリ行列は次式で定義される。

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

この表式から σ^j $(j=1,2,3)$ はエルミート行列であることがすぐにわかる。すなわち、

$$(\sigma^j)^\dagger = \sigma^j \quad (j=1,2,3) \tag{15}$$

である。また、(14) の定義から

$$\begin{aligned}
(\sigma^1)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \\
(\sigma^2)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \\
(\sigma^3)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \\
\sigma^1\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma^3 \\
\sigma^2\sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma^3 = -\sigma^1\sigma^2 \\
\sigma^2\sigma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^1 \\
\sigma^3\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = -i\sigma^1 = -\sigma^2\sigma^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^3\sigma^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 \\
\sigma^1\sigma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2 = -\sigma^3\sigma^1
\end{aligned} \tag{16}$$

上の関係 (16) は、次の 2 つのコンパクトな式にまとめられる。

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk} I_2 \tag{17}$$

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2i \sum_{l=1}^{3} \varepsilon^{jkl} \sigma^l \tag{18}$$

ここで、{ , } は反交換関係、[,] は交換関係を表し、ε^{jkl} は 3 階の完全反対称テンソル

$$\epsilon^{jkl} = \begin{cases} +1 & (jkl) \text{ が } (123) \text{ の偶置換} \\ -1 & (jkl) \text{ が } (123) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{19}$$

である。

(!)

パウリ行列の次の性質

$$\begin{aligned} (\sigma^j)^\dagger &= \sigma^j \\ \{\sigma^j, \sigma^k\} &= 2\delta^{jk} I_2 \\ [\sigma^j, \sigma^k] &= 2i \sum_{l=1}^{3} \varepsilon^{jkl} \sigma^l \end{aligned} \tag{20}$$

は、これからいろんな場所で使われる重要なものだ。覚えて損のない関係式だ。ついでに次の公式も与えておこう。

$$\sigma^j \sigma^k = i \sum_{l=1}^{3} \varepsilon^{jkl} \sigma^l + \delta^{jk} I_2 \tag{21}$$

これは

$$\begin{aligned} \sigma^j \sigma^k &= \frac{1}{2}(\sigma^j \sigma^k - \sigma^k \sigma^j) + \frac{1}{2}(\sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j) \\ &= \frac{1}{2}[\sigma^j, \sigma^k] + \frac{1}{2}\{\sigma^j, \sigma^k\} \end{aligned} \tag{22}$$

から導かれる。

check 4.4

ここでの解析から、時空の次元 d が 2 あるいは 3 のとき、γ 行列 γ^μ $(\mu = 0, 1, \cdots, d-1)$ に $N = 2$ の解があることがわかる。実際、$d = 2$ $(\mu = 0, 1)$ のときは、$\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^1$、$d = 3$ $(\mu = 0, 1, 2)$ のときは、それらに加えて $\gamma^2 = i\sigma^2$ と選べば、反交換関係 $\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2\eta^{\mu\nu} I_N$ を満たすことを確かめてみよう。

このように、γ 行列のサイズは時空の次元に依存する。一般の時空次元 d の場合は、$N = 2^{[d/2]}$（$[x]$ はガウス記号）で与えられることが知られている。

パウリ行列 σ^j $(j = 1, 2, 3)$ は

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk} I_2 \tag{23}$$

を満たすので、

$$\gamma^0 \equiv \sigma^3, \quad \gamma^1 \equiv i\sigma^1, \quad \gamma^2 \equiv i\sigma^2 \tag{24}$$

と定義すれば

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_2 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2)$$

が成り立つことがわかる。ここで、上式の $\eta^{\mu\nu}$ は $d = 3$ (時間 1 次元、空間 2 次元) の場合の計量

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

である。

また、明らかに γ^0 と γ^1 のみを使えば、$d=2$ (時間 1 次元、空間 1 次元) の場合の関係式 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}I_2\ \ (\mu,\nu=0,1)$ を満たす。

≪ 一般の d 次元時空での γ 行列の構成法 ≫

d 次元時空 (時間 1 次元、空間 $d-1$ 次元) での $N\times N$ γ 行列

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}I_N\ \ (\mu,\nu=0,1,\ldots,d-1) \tag{26}$$

が与えられたなら、$d+2$ 次元時空での $2N\times 2N$ Γ 行列

$$\{\Gamma^A,\Gamma^B\}=2\eta^{AB}I_{2N}\ \ (A,B=0,1,\ldots,d+1) \tag{27}$$

を $\{\gamma^\mu\}$ から構成できることを以下で説明しよう。

そのために、$N\times N$ 行列 A と $M\times M$ 行列 B のテンソル積 (あるいはクロネッカー積) $A\otimes B$ と呼ばれる量を次式で定義する。

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1N}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & \ldots & a_{NN}B \end{pmatrix} \tag{28}$$

ここで、

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} \tag{29}$$

である。具体的にテンソル積の例を下に挙げておく。

$$\begin{aligned}
\sigma^3\otimes I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\otimes I_2=\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\sigma^3\otimes \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\otimes \sigma^1=\begin{pmatrix} \sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma^1\otimes \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\otimes \sigma^3=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

このテンソル積を用いて、$d+2$ 次元での Γ 行列 $\{\Gamma^A, A=0,1,\ldots,d+1\}$ を、d 次元での

γ 行列 $\{\gamma^\mu, \mu = 0, 1, \ldots, d-1\}$ から次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\mu &\equiv \sigma^3 \otimes \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma^\mu \end{pmatrix} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, d-1) \\
\Gamma^d &\equiv i\sigma^1 \otimes I_N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & iI_N \\ iI_N & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
\Gamma^{d+1} &\equiv i\sigma^2 \otimes I_N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_N \\ -I_N & \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{31}
$$

このテンソル積を使った行列 $A \otimes B$ と $C \otimes D$ の行列の積は

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \tag{32}$$

で与えられる。この積の定義を用いれば、上で定義した $\Gamma^A (A = 0, 1, \ldots, d+1)$ は、$d+1$ 次元の Γ 行列の定義式

$$\{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\eta^{AB} I_2 \otimes I_N (A, B = 0, 1, \ldots, d+1) \tag{33}$$

を満たすことが確かめられる (確かめてみよ)。さらに、γ^μ が次のエルミート性

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \ \ (i = 1, 2, \ldots, d-1) \tag{34}$$

を満たすならば、(31) で定義された Γ^A は次のエルミート性

$$(\Gamma^0)^\dagger = \Gamma^0, \quad (\Gamma^i)^\dagger = -\Gamma^i \ \ (i = 1, 2, \ldots, d+1) \tag{35}$$

を満たすことを示すことができる。

以上の構成法から、時空の次元が 2 だけ上がると γ 行列のサイズは 2 倍になることがわかる。$d = 2$ と $d = 3$ は 2×2 行列で γ 行列が与えられることを示したので、一般の d 次元時空での γ 行列の大きさは

$$2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]} \tag{36}$$

であることがわかる。ここで、$[a]$ はガウス記号で a を超えない最大の整数を表す。また、この結果から我々の $d = 4$ 次元時空では、4×4 行列を使って γ 行列を表現できることがわかる。表 1 に $d = 11$ までの時空の次元と γ 行列の大きさの関係を与えておく。

表 1: 時空次元と γ 行列の大きさ

時空の次元 d	γ 行列の大きさ
2, 3	2×2
4, 5	4×4
6, 7	8×8
8, 9	16×16
10, 11	32×32

check 4.5

(4.16) で与えられる γ 行列が (4.7)、および

$$(\gamma_D^0)^\dagger = \gamma_D^0, \quad (\gamma_D^j)^\dagger = -\gamma_D^j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{4.18}$$

を満たすことを確かめてみよう。また、S をユニタリー行列 ($S^\dagger = S^{-1}$) としたとき、新たに定義される $\tilde{\gamma}^\mu \equiv S^{-1}\gamma_D^\mu S$ も (4.18) と同様の関係を満たすことを確かめてみよう。

【ヒント】公式 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を用いよ。

ディラック表示の γ 行列は次式で定義される。

$$\gamma_D^0 \equiv \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^j \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \ (j = 1, 2, 3) \tag{37}$$

これらの行列が γ 行列の関係式

$$\{\gamma_D^\mu, \gamma_D^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{38}$$

を満たすことをまず確かめる。

$$\begin{aligned}
\{\gamma_D^0, \gamma_D^0\} &= 2(\gamma_D^0)^2 = 2\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = 2I_4 = 2\eta^{00} I_4
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_D^0, \gamma_D^j\} &= \gamma_D^0\gamma_D^j + \gamma_D^j\gamma_D^0 \\
&= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ \sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= 2\eta^{0j} I_4 \qquad (j = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_D^j, \gamma_D^k\} &= \gamma_D^j\gamma_D^k + \gamma_D^k\gamma_D^j \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} \{\sigma^j, \sigma^k\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{\sigma^j, \sigma^k\} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 2\delta^{jk} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\delta^{jk} I_2 \end{pmatrix} \qquad (\because \{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk} I_2) \\
&= -2\delta^{jk} I_4 \\
&= +2\eta^{jk} I_4 \qquad (j, k = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{41}
$$

以上の結果から、γ_D^μ は (38) を満たすことがわかる。

次に γ_D^μ のエルミート性を調べる。

$$
\begin{aligned}
(\gamma_D^0)^\dagger &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} = \gamma_D^0 \\
(\gamma_D^j)^\dagger &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (-\sigma^j)^\dagger \\ (\sigma^j)^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^j \\ \sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} = -\gamma_D^j \qquad (j = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{42}
$$

最後に、任意のユニタリー行列 S を用いて定義した γ 行列

$$
\widetilde{\gamma}^\mu \equiv S^\dagger \gamma_D^\mu S \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{43}
$$

も γ_D^μ と同じ性質 (38) と (42) を満たすことを確かめる。

$$
\begin{aligned}
\{\widetilde{\gamma}^\mu, \widetilde{\gamma}^\nu\} &= \{S^\dagger\gamma_D^\mu S, S^\dagger\gamma_D^\nu S\} \\
&= S^\dagger\{\gamma_D^\mu, \gamma_D^\nu\}S \qquad (\because SS^\dagger = I_4) \\
&\overset{(38)}{=} S^\dagger(2\eta^{\mu\nu} I_4)S \\
&= 2\eta^{\mu\nu}\underbrace{S^\dagger S}_{I_4} \\
&= 2\eta^{\mu\nu} I_4
\end{aligned} \tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\gamma}^0)^\dagger &= (S^\dagger\gamma_D^0 S)^\dagger \\
&= S^\dagger\underbrace{(\gamma_D^0)^\dagger}_{\gamma_D^0}\underbrace{(S^\dagger)^\dagger}_{S} \qquad (\because (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger) \\
&= S^\dagger\gamma_D^0 S \\
&= \widetilde{\gamma}^0
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\gamma}^j)^\dagger &= (S^\dagger \gamma_D^j S)^\dagger \\
&= S^\dagger \underbrace{(\gamma_D^j)^\dagger}_{-\gamma_D^j} \underbrace{(S\dagger)^\dagger}_{S} \\
&= -\widetilde{\gamma}^j \qquad (j=1,2,3)
\end{aligned} \tag{46}
$$

したがって、$\widetilde{\gamma}^\mu$ も γ_D^μ と同じ性質を満たすことがわかる。

check 4.6

流れの保存 (4.21) が成り立っていることを確かめてみよう。

【ヒント】 流れの保存が成り立っていることを確かめるためには、ディラック方程式 $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ とそのエルミート共役をとった式 $-i(\partial_\mu\psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$ および $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j$ (check 4.5 参照) と (4.7) から導かれる関係 $\gamma^0\gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0$ を用いればよい。

確かめることは、$\psi(x)$ がディラック方程式を満たしているならば、次の流れの保存

$$
\partial_\mu j^\mu = 0\,, \quad j^\mu = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi \tag{47}
$$

が成り立つことである。

証明に必要なものは、ディラック方程式

$$
(i\gamma^\mu\partial_\mu - mI_4)\psi = 0 \tag{48}
$$

と、そのエルミート共役をとった式

$$
-i(\partial_\mu\psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0 \tag{49}
$$

である。あとは、$\gamma^0\gamma^j = -\gamma^j\gamma^0$, $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j$ $(j=1,2,3)$ から導かれる

$$
\gamma^0\gamma^\mu = (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 \tag{50}
$$

の関係式である。これらの式を用いて、(47) が成り立つことを以下に示す。

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu(\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi) \\
&= (\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^0\gamma^\mu\psi + \psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&\overset{(50)}{=} \underbrace{(\partial_\mu\psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger}_{im\psi^\dagger\ (\because(49))}\gamma^0\psi + \psi^\dagger\gamma^0 \underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu\psi}_{-im\psi\ (\because(48))} \\
&= im\psi^\dagger\gamma^0\psi - im\psi^\dagger\gamma^0\psi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{51}
$$

check 4.7

(4.26) で定義されるスピン角運動量演算子 $\boldsymbol{S}$ が、エルミートであり、かつ (4.27) ～ (4.29) を満たすことを確かめてみよう。

スピン角運動量演算子 $\boldsymbol{S}$ は、次式で定義される。

$$\boldsymbol{S} = (S^1, S^2, S^3) \equiv \left(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3, \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1, \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\right) \tag{52}$$

まず、$S^j \ (j=1,2,3)$ が次式を満たすことを確かめる。

$$[S^j, S^k] = i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{jkl}S^l \quad (j,k=1,2,3) \tag{53}$$

上式は (jk) に関して反対称なので、$(jk)=(12),(23),(31)$ に対して確かめれば十分である。

<u>$(jk)=(12)$ の場合</u>

$$\begin{aligned}
(53)\text{ 左辺} &= [S^1, S^2] = \left[\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3, \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1\right] \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma^2\underbrace{\gamma^3\gamma^3}_{-I_4}\gamma^1 - \underbrace{\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3}_{\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^2=-\gamma^1\gamma^2}) \\
&= -\frac{1}{4}(-\underbrace{\gamma^2\gamma^1}_{-\gamma^1\gamma^2}+\gamma^1\gamma^2) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2 = i\left(\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\right) = iS^3 \qquad (54) \\
(53)\text{ 右辺} &= i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{12l}S^l = i\underbrace{\varepsilon^{123}}_{1}S^3 = iS^3 \overset{(54)}{=} (53)\text{ 左辺} \qquad (55)
\end{aligned}$$

<u>$(jk)=(23)$ の場合</u>

$$\begin{aligned}
(53)\text{ 左辺} &= [S^2, S^3] = \left[\frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1, \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\right] \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma^3\underbrace{\gamma^1\gamma^1}_{-I_4}\gamma^2 - \underbrace{\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1}_{\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3=-\gamma^2\gamma^3}) \\
&= -\frac{1}{4}(-\underbrace{\gamma^3\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^3}+\gamma^2\gamma^3) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^2\gamma^3 = i\left(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3\right) = iS^1 \qquad (56) \\
(53)\text{ 右辺} &= i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{23l}S^l = i\underbrace{\varepsilon^{231}}_{1}S^1 = iS^1 \overset{(56)}{=} (53)\text{ 左辺} \qquad (57)
\end{aligned}$$

<u>$(jk)=(31)$ の場合</u>

$$
\begin{aligned}
\text{(53) 左辺} &= [S^3, S^1] = \left[\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2, \frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3\right] \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma^1 \underbrace{\gamma^2\gamma^2}_{-I_4} \gamma^3 - \underbrace{\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2}_{\gamma^2\gamma^2\gamma^3\gamma^1 = -\gamma^3\gamma^1}) \\
&= -\frac{1}{4}(-\underbrace{\gamma^1\gamma^3}_{-\gamma^3\gamma^1} + \gamma^3\gamma^1) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^3\gamma^1 = i\left(\frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1\right) = iS^2 \qquad (58) \\
\text{(53) 右辺} &= i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{31l}S^l = i\underbrace{\varepsilon^{312}}_{1}S^2 = iS^2 \overset{(58)}{=} \text{(53) 左辺} \qquad (59)
\end{aligned}
$$

次に

$$
\boldsymbol{S}^2 = \frac{3}{4}I_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)I_4 \qquad (60)
$$

を確かめる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^2 &= (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^3 \\
&= \left(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma^2 \underbrace{\gamma^3\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^3} \gamma^3 + \gamma^3 \underbrace{\gamma^1\gamma^3}_{-\gamma^3\gamma^1} \gamma^1 + \gamma^1 \underbrace{\gamma^2\gamma^1}_{-\gamma^1\gamma^2} \gamma^2) \\
&= +\frac{3}{4}I_4 \qquad (\because (\gamma^j)^2 = -I_4 \ (j = 1, 2, 3)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)I_4 \quad \Longrightarrow \ (60) \qquad (61)
\end{aligned}
$$

最後にディラック表示では、

$$
\boldsymbol{S}_D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \qquad (62)
$$

で表されることを確かめる。

$$
\begin{aligned}
i\gamma_D^2\gamma_D^3 &= i\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \qquad (\because \sigma^2\sigma^3 = i\sigma^1) \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \sigma^1 \end{pmatrix} \qquad (63)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
i\gamma_D^3\gamma_D^1 &= i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} -\sigma^3\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^3\sigma^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \end{pmatrix} \qquad (\because \sigma^3\sigma^1 = i\sigma^2) \qquad (64) \\
i\gamma_D^1\gamma_D^2 &= i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^3 \end{pmatrix} \qquad (\because \sigma^1\sigma^2 = i\sigma^3) \qquad (65)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_D &= \left(\frac{i}{2}\gamma_D^2\gamma_D^3,\ \frac{i}{2}\gamma_D^3\gamma_D^1,\ \frac{i}{2}\gamma_D^1\gamma_D^2\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \qquad (66)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

check 4.8

$L^1 = -i\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$, $S^1 = \frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3$ と H の交換関係が次式

$$\left[L^1, H\right] = \gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^3} - \gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \left[S^1, H\right] = \gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^3}$$

で与えられ、$[J^1, H] = 0$ となることを確かめてみよう。残りの成分 J^2, J^3 についても同様に、ハミルトニアン H と可換であることを示してみよう。

【ヒント】 上式を導くのに必要なものは、$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = 0$, $\left[x^j, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = -\delta^j{}_k$, $\left[\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^2\right] = 2\gamma^0\gamma^3$, $\left[\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^3\right] = -2\gamma^0\gamma^2$ である。

ハミルトニアン H は次式で与えられる。

$$H = -i\gamma^0\sum_{j=1}^{3}\gamma^j\frac{\partial}{\partial x^j} + m\gamma^0 \qquad (67)$$

まず、L^1 と H の交換関係 $[L^1, H]$ を調べよう。$L^1 = -i\left(x^2\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ で与えられているので、L^1 と H の交換関係で交換しない量は、L^1 の中の x^2 あるいは x^3 と H の中の $\frac{\partial}{\partial x^j}$ である。このことに気が付けば、残りの量は互いに可換だと思って交換関係の外に出して、次

のように $[L^1, H]$ を計算することができる。

$$\begin{aligned}
[L^1, H] &= \left[-ix^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + ix^3 \frac{\partial}{\partial x^2}, -i\gamma^0 \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m\gamma^0 \right] \\
&= -\gamma^0 \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \left[x^2, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \frac{\partial}{\partial x^3} + \gamma^0 \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \left[x^3, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -\gamma^0 (-\gamma^2) \frac{\partial}{\partial x^3} + \gamma^0 (-\gamma^3) \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad \left(\because \left[x^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = -\delta^k{}_j \right) \\
&= \gamma^0 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - \gamma^0 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{68}$$

次に S^1 と H の交換関係 $[S^1, H]$ を計算しよう。この場合は、S^1 の中の γ 行列 $\gamma^2\gamma^3$ と H の中の γ 行列 $\gamma^0\gamma^j$ が非可換である ($\gamma^2\gamma^3$ と γ^0 は可換。)。他の量は可換と思ってよいので、

$$\begin{aligned}
[S^1, H] &= \left[\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3, -i\gamma^0 \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} + m\gamma^0 \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} [\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^j] \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \frac{1}{2} \left([\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^1] \frac{\partial}{\partial x^1} + [\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^2] \frac{\partial}{\partial x^2} + [\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^3] \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(0 + 2\gamma^0\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - 2\gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\
&= \gamma^0\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3}
\end{aligned} \tag{69}$$

と求まる。ここで、次の関係を用いた。

$$\begin{aligned}
[\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^1] &= 0 \\
[\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^2] &= 2\gamma^0\gamma^3 \\
[\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^3] &= -2\gamma^0\gamma^2
\end{aligned} \tag{70}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
[J^1, H] &= [L^1 + S^1, H] \\
&= [L^1, H] + [S^1, H] \\
&= \gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - \gamma^0\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^0\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{71}$$

を得る。

同様にして、

$$
\begin{aligned}
[L^2, H] &= \gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^1} - \gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^3} \\
[S^2, H] &= \gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^3} - \gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial x^1} \\
[L^3, H] &= \gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^2} - \gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^1} \\
[S^3, H] &= \gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial x^1} - \gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{72}
$$

を得る。これから、J^k と H が可換、すなわち

$$
[J^k, H] = [L^k + S^k, H] = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{73}
$$

が導かれ、全角運動量 $J^k = L^k + S^k$ $(k = 1, 2, 3)$ が保存量であることがわかる。

check 4.9

(4.45) を (4.35) に代入して $\widetilde{\varphi}$ と $\widetilde{\chi}$ に対する方程式を導け。次に非相対論的極限（$2m_e\widetilde{\varphi}$ に比べて $i\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t}$ と $eA^0\widetilde{\varphi}$ を無視する近似）をとることによって、(4.46) を導出してみよう。

電磁場中のディラック方程式をディラック表示で表すと次式で与えられる。

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \begin{pmatrix} (m_e - eA^0)I_2 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi} & (-m_e - eA^0)I_2 \end{pmatrix}\psi \tag{74}
$$

ここで、

$$
\boldsymbol{\pi} \equiv -i\boldsymbol{\nabla} + e\boldsymbol{A} \tag{75}
$$

である。ここで ψ として

$$
\psi = e^{im_e t}\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi} \\ \widetilde{\chi} \end{pmatrix} \tag{76}
$$

を代入すると、

$$
\begin{pmatrix} -m_e\widetilde{\varphi} + i\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial t} \\ -m_e\widetilde{\chi} + i\frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_e - eA^0)\widetilde{\varphi} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\widetilde{\chi} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\widetilde{\varphi} - (m_e + eA^0)\widetilde{\chi} \end{pmatrix}
$$

すなわち,

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varphi} &= (2m_e - eA^0)\widetilde{\varphi} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\widetilde{\chi} && (77) \\
i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\chi} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\widetilde{\varphi} - eA^0\widetilde{\chi} && (78)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、非相対論的極限

$$
|2m_e\widetilde{\varphi}| \gg \left|i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varphi}\right|,\ |eA^0\widetilde{\varphi}| \tag{79}
$$

をとると、(77) は、

$$
\widetilde{\varphi} \simeq -\frac{1}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\widetilde{\chi} \tag{80}
$$

と近似できる。これを (78) に代入することによって

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\chi} \simeq -\frac{1}{2m_e}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})\widetilde{\chi} - eA^0\widetilde{\chi} \tag{81}$$

が導かれる。ここで、教科書本文の公式 (4.43)

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}) = (-i\boldsymbol{\nabla} + e\boldsymbol{A})^2 I_2 + e\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \tag{82}$$

を用いると、(81) は、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\chi} \simeq \left\{-\frac{1}{2m_e}(-i\boldsymbol{\nabla} + e\boldsymbol{A})^2 I_2 - \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} - eA^0 I_2\right\}\widetilde{\chi} \tag{83}$$

となり、教科書本文 (4.46) が導かれる。

check 4.10

公式 (4.51) を用いて、パウリ行列の 2 つの関係式 (4.50) を 1 つにまとめた公式

$$\sigma^j\sigma^k = \delta^{jk}I_2 + i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{jkl}\sigma^l \tag{84}$$

を導き、公式 (4.58) を証明してみよう。

パウリ行列の公式 (84) は、パウリ行列の次の性質 (check 4.3 参照)

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk}I_2 \tag{85}$$

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{jkl}\sigma^l \tag{86}$$

から導くことができる。証明は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\sigma^j\sigma^k &= \frac{1}{2}(\sigma^j\sigma^k + \sigma^k\sigma^j) + \frac{1}{2}(\sigma^j\sigma^k - \sigma^k\sigma^j) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\{\sigma^j, \sigma^k\}}_{2\delta^{jk}I_2} + \frac{1}{2}\underbrace{[\sigma^j, \sigma^k]}_{2i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{jkl}\sigma^l} \\ &= \delta^{jk}I_2 + i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{jkl}\sigma^l\end{aligned} \tag{87}$$

次に公式 (84) を用いて、教科書本文 (4.58)、すなわち、

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,I_2 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{88}$$

を証明する。ここで、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は任意の 3 次元ベクトルである。以下では、上式左辺から出発し

て右辺を導く。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) &= \Big(\sum_{j=1}^{3}\sigma^j a^j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{3}\sigma^k b^k\Big) \\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\sigma^j\sigma^k a^j b^k \qquad (\because a^j \text{ は単なる数なので } \sigma^k \text{ とは可換}) \\
&\overset{(84)}{=} \sum_{j,k=1}^{3}\Big(\delta^{jk}I_2 + i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon^{jkl}\sigma^l\Big)a^j b^k \\
&= \sum_{j=1}^{3}a^j b^j\, I_2 + i\sum_{j,k,l=1}^{3}\underbrace{\varepsilon^{jkl}}_{\varepsilon^{ljk}}\sigma^l a^j b^k \\
&= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\, I_2 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})
\end{aligned} \tag{89}
$$

最後の等号で、ベクトルの外積の定義

$$
\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon^{ljk}a^j b^k = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^l \tag{90}
$$

を用いた。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第５章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2014/12/09
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 5 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 5.1 ∼ check 5.11 の解答例

check 5.1

$N \times N$ 対称行列 $S_{ij} = +S_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,N)$ の独立な成分の数は $\frac{1}{2}N(N+1)$、$N \times N$ 反対称行列 $A_{ij} = -A_{ji}$ の独立な成分の数は $\frac{1}{2}N(N-1)$ であることを確かめてみよう。

まず、$N \times N$ 対称行列 $S_{ij} = S_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,N)$ の独立な成分の数を求める。そのために、対角成分 $S_{ii}\,(i=1,2,\cdots,N)$ と非対角成分 $S_{ij}\,(i \neq j)$ に分けて考える。

対角成分 $S_{ii}\,(i=1,2,\cdots,N)$ には条件は何もつかないので、独立な成分の数は N である。

$$S_{ii}\,(i=1,2,\cdots,N) \text{ の独立な成分の数} = N \tag{1}$$

一方、非対角成分を $1 \leq i < j \leq N$ として S_{ij} と S_{ji} に分けると、対称性 $S_{ij} = S_{ji}$ から $S_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N)$ のみを考えれば十分であることが分かる。非対角成分（S_{ij} と S_{ji}）の数は、N^2 から対角成分の数 N を引いた $N^2 - N$ に等しいので、$S_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N)$ の数はその半分

$$S_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N) \text{ の成分の数} = \frac{N^2 - N}{2} \tag{2}$$

で与えられる。したがって、$N \times N$ 対称行列 S_{ij} の独立な成分の数は、(1) と (2) の和、すなわち

$$N + \frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \tag{3}$$

で与えられる。

次に $N \times N$ の反対称行列は、$A_{ij} = -A_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,N)$ を満たさねばならない。この反対称性から直ちに対角成分 A_{ii} は常に 0 であることが分かる。

$$A_{ii} = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4}$$

一方、非対角成分を $1 \leq i < j \leq N$ として A_{ij} と A_{ji} に分けると、反対称性 $A_{ji} = -A_{ij}$ から $A_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N)$ のみを考えれば十分であることが分かる。$A_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N)$ の成分の数は、$S_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N)$ の成分の数と同じなので、(2) より、

$$A_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N) \text{ の成分の数} = \frac{N(N-1)}{2} \tag{5}$$

で与えられる。したがって、$N \times N$ 反対称行列 $A_{ij}\,(1 \leq i < j \leq N)$ の独立な成分の数は

$$\frac{N(N-1)}{2} \tag{6}$$

である。

(!)

対称行列 $S_{ij} = S_{ji}$ と反対称行列 $A_{ij} = -A_{ji}$ の独立な成分の数を足すと、$N \times N$ 行列の成分の数に等しいことに注意しよう。すなわち、

$$\frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2$$

が成り立つ。これは、任意の $N \times N$ 行列 M_{ij} は対称行列と反対称行列の和に、一意的に分解できるからである。

$$M_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(M_{ij} + M_{ji})}_{\text{対称成分}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M_{ij} - M_{ji})}_{\text{反対称成分}} \tag{7}$$

check 5.2

次の公式を証明せよ。

$$\left[\,AB\,,\,C\,\right] = A\left[\,B\,,\,C\,\right] + \left[\,A\,,\,C\,\right]B = A\left\{\,B\,,\,C\,\right\} - \left\{\,A\,,\,C\,\right\}B \qquad (5.19a)$$

$$\left\{AB\,,\,C\right\} = A\left[\,B\,,\,C\,\right] + \left\{A\,,\,C\right\}B = A\left\{B\,,\,C\right\} - \left[\,A\,,\,C\,\right]B \qquad (5.19b)$$

これらの公式を使えば、3つ以上の行列や演算子の積からなる（反）交換関係も導くことができる。例として、公式 (5.19a) を 2 度用いることによって、公式 $\left[\,ABC\,,\,D\,\right] = AB\left[\,C\,,\,D\,\right] + A\left[\,B\,,\,D\,\right]C + \left[\,A\,,\,D\,\right]BC$ を導いてみよう。

【ヒント】公式 (5.19) の証明は、右辺をばらして左辺に一致することを確かめればよい。

まず次の公式

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B \qquad (8)$$

$$[AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B \qquad (9)$$

$$\{AB,C\} = A[B,C] + \{A,C\}B \qquad (10)$$

$$\{AB,C\} = A\{B,C\} - [A,C]B \qquad (11)$$

を証明する。証明は、右辺をばらして左辺になることを示す。

$$\begin{aligned} A[B,C] + [A,C]B &= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\ &= ABC - CAB \\ &= [AB,C] \quad \Longrightarrow (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\{B,C\} - \{A,C\}B &= A(BC + CB) - (AC + CA)B \\ &= ABC - CAB \\ &= [AB,C] \quad \Longrightarrow (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A[B,C] + \{A,C\}B &= A(BC - CB) + (AC + CA)B \\ &= ABC + CAB \\ &= \{AB,C\} \quad \Longrightarrow (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\{B,C\} - [A,C]B &= A(BC + CB) - (AC - CA)B \\ &= ABC + CAB \\ &= \{AB,C\} \quad \Longrightarrow (11) \end{aligned}$$

最後に次の公式を証明する。

$$[ABC,D] = AB[C,D] + A[B,D]C + [A,D]BC \qquad (12)$$

この公式は（8）を二度用いることによって次のように導くことができる。

$$
\begin{aligned}
[ABC, D] &= [A(BC), D] \\
&\overset{(8)}{=} A[BC, D] + [A, D]BC \\
&\overset{(8)}{=} A\big(B[C, D] + [B, D]C\big) + [A, D]BC \\
&= AB[C, D] + A[B, D]C + [A, D]BC \quad \Longrightarrow (12)
\end{aligned}
$$

(!)

ここでの重要な教訓は、(8)〜(11) の公式さえ知っていれば、演算子の積の（反）交換関係は、個々の演算子間の（反）交換関係を用いて計算できるという事実である。

check 5.3

(5.28) を別の方法で導いてみよう。まず、(5.27) の両辺を θ_2 で微分して、その後で $\theta_2 = 0$（および $\theta_1 = \theta$）とおくことによって、次式を導け。

$$
-iJ_S^{12}\, S^{(12)}(\theta) = \frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta}, \qquad J_S^{12} \equiv i\, \frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} \tag{13}
$$

次に、この微分方程式の解が (5.28) の第 1 式 $S^{(12)}(\theta) = e^{-i\theta J_S^{12}}$ に他ならないことを確かめよ。また、(5.15) と (5.29) の第 2 式から $J_S^{12} = \frac{1}{2}\sigma^{12}$ の関係が得られることを導いてみよう。

【注】 この結果から、無限小変換 (5.15) がわかれば、有限変換の表式 (5.28) が求まることがわかる。

まず教科書本文の (5.27)

$$
S^{(12)}(\theta_2)S^{(12)}(\theta_1) = S^{(12)}(\theta_1 + \theta_2) \tag{14}
$$

の両辺を θ_2 で微分して、そのあとで $\theta_2 = 0$ および $\theta_1 = \theta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(14) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dS^{(12)}(\theta_2)}{d\theta_2} S^{(12)}(\theta_1) = \underbrace{\frac{\partial S^{(12)}(\theta_1 + \theta_2)}{\partial \theta_2}}_{\frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta}\big|_{\theta=\theta_1+\theta_2}} \\
&\overset{\theta_2=0,\, \theta_1=\theta}{\Longrightarrow} \quad \frac{dS^{(12)}(\theta_2)}{\theta_2}\bigg|_{\theta_2=0} S^{(12)}(\theta) = \frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta} \\
&\Longrightarrow \quad -iJ_S^{12} S^{(12)}(\theta) = \frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta}
\end{aligned} \tag{15}
$$

ここで、J_S^{12} を次式で定義した。

$$
J_S^{12} \equiv i\, \frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} \tag{16}
$$

次に、(15) の解が、

$$
S^{(12)}(\theta) = e^{-i\theta J_S^{12}} \tag{17}
$$

であることを確かめる。指数関数行列の定義にしたがって、(17) の右辺を θ で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}e^{-i\theta J_S^{12}} &= \frac{d}{d\theta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^n}{n!}(J_S^{12})^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-i)(-i\theta)^{n-1}}{n!}(J_S^{12})^n \\
&= -iJ_S^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(J_S^{12})^{n-1} \\
&\overset{n'=n-1}{=} -iJ_S^{12}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^{n'}}{n'!}(J_S^{12})^{n'} \\
&= -iJ_S^{12}e^{-i\theta J_S^{12}} \qquad (18)
\end{aligned}$$

を得る。したがって (17) は確かに微分方程式 (15) を満たしていることがわかる。

さらに (14) で $\theta_2 = 0$ とおいて、右から $\left[S^{(12)}(\theta_1)\right]^{-1}$ をかけると

$$S^{(12)}(0) = I_4 \qquad (19)$$

が得られる。(19) は、1 階微分方程式 (15) の解に対する初期条件を与える。(17) は、1 階微分方程式 (15) の解であり初期条件 (19) も満たすので、我々が求めている解である。

次に、教科書本文 (5.15)

$$S(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \qquad (20)$$

から、J_S^{12} が $J_S^{12} = \dfrac{1}{2}\sigma^{12}$ で与えられることを確かめる。ここでは、x^1x^2 平面内の無限小 θ 回転を考えれば十分なので、$\Delta\omega_{12} = -\Delta\omega_{21} = \theta$ のみを残して他の $\Delta\omega_{\mu\nu}$ 成分をゼロにおく。

$$\begin{aligned}
(20) \quad &\overset{\Delta\omega_{12}=-\Delta\omega_{21}=\theta}{\Longrightarrow} \quad S^{(12)}(\theta) = I_4 - \frac{i}{4}\Big(\Delta\omega_{12}\sigma^{12} + \underbrace{\Delta\omega_{21}}_{-\Delta\omega_{12}}\underbrace{\sigma^{21}}_{-\sigma^{12}}\Big) = I_4 - \frac{i}{2}\theta\sigma^{12} \\
&\Longrightarrow \quad J_S^{12} \equiv i\left.\frac{dS^{(12)}(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\sigma^{12} \qquad (21)
\end{aligned}$$

check 5.4

(5.32) ∼ (5.35) を確かめよう。

以下では次の (22)〜(29) の関係式を確かめる。

$$\Lambda^{(23)}(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = e^{-i\theta_1 J_V^{23}} \qquad (22)$$

$$\Lambda^{(31)}(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = e^{-i\theta_2 J_V^{31}} \qquad (23)$$

ここで J_V^{23}、J_V^{31} は次式で与えられる。

$$J_V^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$J_V^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

また、対応するスピノルの変換行列は

$$S^{(23)}(\theta_1) = e^{-i\theta_1 J_S^{23}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & -i\sin\frac{\theta_1}{2} & 0 & 0 \\ -i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta_1}{2} & -i\sin\frac{\theta_1}{2} \\ 0 & 0 & -i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$S^{(31)}(\theta_2) = e^{-i\theta_2 J_S^{31}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix} \tag{27}$$

で与えられ、J_S^{23}、J_S^{31} は

$$J_S^{23} = \frac{1}{2}\sigma^{23} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$J_S^{31} = \frac{1}{2}\sigma^{31} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

である。

まず、(22) と (24) を確かめる。$\Lambda^{(23)}(\theta_1)$ は x^2x^3 平面内の θ_1 回転を引き起こす回転行列なので

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2\cos\theta_1 - x^3\sin\theta_1 \\ x^2\sin\theta_1 + x^3\cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

として、$\Lambda^{(23)}(\theta_1)$ が (22)、すなわち

$$\Lambda^{(23)}(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

として与えられることが分かる。check 5.3 から

$$\Lambda^{(23)}(\theta_1) = e^{-i\theta_1 J_V^{23}} \tag{32}$$

と表したときに、J_V^{23} は

$$
\begin{aligned}
J_V^{23} = i \left.\frac{d\Lambda^{(23)}(\theta_1)}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=0} &= i \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \end{pmatrix}\right|_{\theta_1=0} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

で与えられることが分かる。

同様に、$\Lambda^{(31)}(\theta_2)$ は x^3x^1 平面内の θ_2 回転行列なので (23)、すなわち

$$
\Lambda^{(31)}(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \qquad (34)
$$

で与えられ、

$$
\Lambda^{(31)}(\theta_2) = e^{-i\theta_2 J_V^{31}} \qquad (35)
$$

と表したときに、J_V^{31} は check 5.3 より

$$
\begin{aligned}
J_V^{31} = i \left.\frac{d\Lambda^{(31)}(\theta_2)}{d\theta_2}\right|_{\theta_2=0} &= i \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \end{pmatrix}\right|_{\theta_2=0} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (36)
\end{aligned}
$$

で与えられることが分かる。

次にスピノルの変換行列 $S^{(23)}(\theta_1)$ を求める。教科書本文の (5.15) で（θ_1 は無限小量だとして）$\Delta\omega_{23} = -\Delta\omega_{32} = \theta_1$ とおいて、残りの $\Delta\omega_{\mu\nu}$ を 0 とすると

$$
\begin{aligned}
S^{(23)}(\theta_1) &= I_4 - \frac{i}{4}\Big(\Delta\omega_{23}\sigma^{23} + \underbrace{\Delta\omega_{32}}_{-\Delta\omega_{23}}\underbrace{\sigma^{32}}_{-\sigma^{23}}\Big) \\
&= I_4 - \frac{i}{2}\theta_1\sigma^{23} \qquad (37)
\end{aligned}
$$

を得る。したがって、check 5.3 から、

$$
S^{(23)}(\theta_1) = e^{-i\theta_1 J_S^{23}} \qquad (38)
$$

と表したとき、J_S^{23} は

$$
\begin{aligned}
J_S^{23} &= i\left.\frac{dS^{(23)(\theta_1)}}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=0} \overset{(37)}{=} \frac{1}{2}\sigma^{23} \\
&= \frac{i}{4}[\gamma_D^2, \gamma_D^3] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

で与えられることが分かる。この表示から、$S^{(23)}(\theta_1)$ を 4×4 行列として具体的に求めてみると、$(2J_S^{23})^{2n} = I_4$、$(2J_S^{23})^{2n+1} = 2J_S^{23}$（$n$ は 0 または正の整数）であることに注意して、以下の結果を得る。

$$
\begin{aligned}
S^{(23)}(\theta_1) &= e^{-i\theta_1 J_S^{23}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\theta_1 J_S^{23})^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta_1 J_S^{23})^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta_1 J_S^{23})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{\theta_1}{2})^{2n}}{(2n)!}}_{\cos\frac{\theta_1}{2}}\underbrace{(2J_S^{23})^{2n}}_{I_4} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)(-1)^n(\frac{\theta_1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{-i\sin\frac{\theta_1}{2}}\underbrace{(2J_S^{23})^{2n+1}}_{2J_S^{23}} \\
&\overset{(39)}{=} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & -i\sin\frac{\theta_1}{2} & 0 & 0 \\ -i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta_1}{2} & -i\sin\frac{\theta_1}{2} \\ 0 & 0 & -i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
J_S^{31} &= i\left.\frac{dS^{(31)}(\theta_2)}{d\theta_2}\right|_{\theta_2=0} = \frac{1}{2}\sigma^{31} \\
&= \frac{i}{4}[\gamma_D^3, \gamma_D^1] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{(31)}(\theta_2) &= e^{-i\theta_2 J_S^{31}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\theta_2 J_S^{31})^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta_2 J_S^{31})^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta_2 J_S^{31})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos\frac{\theta_2}{2}\cdot I_4 - i\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot(2J_S^{31}) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

が求まる。

check 5.5

(5.42) ∼ (5.44) を確かめよ。また、空間回転の生成子 J^{23}, J^{31}, J^{12} はエルミート、ローレンツブーストの生成子 J^{01}, J^{02}, J^{03} は反エルミートであることを確かめてみよう。

まず、教科書本文の (5.42)、すなわち

$$S^{(01)}(\eta_1) = e^{i\eta_1 J_S^{01}}, \quad J_S^{01} = \frac{1}{2}\sigma^{01} = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1 \tag{43}$$

を確かめる。教科書本文の (5.15) で、$\Delta\omega_{01} = -\Delta\omega_{10} = -\eta_1$ とし、残りの $\Delta\omega_{\mu\nu}$ を 0 とおくと、

$$\begin{aligned} S^{(01)}(\eta_1) &= I_4 - \frac{i}{4}\Big(\Delta\omega_{01}\sigma^{01} + \underbrace{\Delta\omega_{10}}_{-\Delta\omega_{01}}\underbrace{\sigma^{10}}_{-\sigma^{01}}\Big) \\ &= I_4 + \frac{i}{2}\eta_1\sigma^{01} \end{aligned} \tag{44}$$

を得る。(43) で η_1 を無限小量だとして、η_1 に関してテイラー展開して (44) と比べると、

$$J_S^{01} = \frac{1}{2}\sigma^{01} \tag{45}$$

を得る。

次に

$$\begin{aligned} (2J_S^{01})^2 &= (\sigma^{01})^2 = (i\gamma^0\gamma^1)^2 = -\gamma^0\underbrace{\gamma^1\gamma^0}_{-\gamma^0\gamma^1}\gamma^1 \\ &= \underbrace{(\gamma^0)^2}_{I_4}\underbrace{(\gamma^1)^2}_{-I_4} = -I_4 \end{aligned} \tag{46}$$

から、$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$(2J_S^{01})^{2n} = (-1)^n I_4, \tag{47}$$

$$(2J_S^{01})^{2n+1} = (-1)^n 2J_S^{01} \tag{48}$$

が導かれる。これらの関係を用いると、(43) の $S^{(01)}(\eta_1)$ を次のように 4×4 行列で具体的

に表すことが出来る。

$$
\begin{aligned}
S^{(01)}(\eta_1) &= e^{i\eta_1 J_S^{01}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\eta_1 J_S^{01})^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta_1 J_S^{01})^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta_1 J_S^{01})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\eta_1}{2})^{2n}}{(2n)!} \underbrace{(2J_S^{01})^{2n}}_{(-1)^n I_4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\eta_1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \underbrace{(2J_S^{01})^{2n+1}}_{(-1)^n 2J_S^{01}} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\eta_1}{2})^{2n}}{(2n)!}}_{\cosh\frac{\eta_1}{2}} \cdot I_4 + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\eta_1}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sinh\frac{\eta_1}{2}} \cdot 2J_S^{01} \\
&= \cosh\frac{\eta_1}{2} \cdot I_4 + i \sinh\frac{\eta_1}{2} \cdot (2J_S^{01}) \qquad (49)
\end{aligned}
$$

ディラック表示では

$$
2J_S^{01} = i\gamma_D^0 \gamma_D^1 = i \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (50)
$$

なので、

$$
S^{(01)}(\eta_1) = \begin{pmatrix} I_2 \cosh\frac{\eta_1}{2} & -\sigma^1 \sinh\frac{\eta_1}{2} \\ -\sigma^1 \sinh\frac{\eta_1}{2} & I_2 \cosh\frac{\eta_1}{2} \end{pmatrix} \qquad (51)
$$

となり、教科書本文の (5.43) を得る。

次に、x^2 軸、x^3 軸方向のローレンツブーストの変換行列 $\Lambda^{(02)}(\eta_2)$、$\Lambda^{(03)}(\eta_3)$ を求める。x^1 軸方向のローレンツブーストが教科書本文の (5.14)、あるいは (5.38) から、

$$
\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh\eta_1 - x^1 \sinh\eta_1 \\ -x^0 \sinh\eta_1 + x^1 \cosh\eta_1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta_1 & -\sinh\eta_1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_1 & \cosh\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (52)
$$

で与えられていた。この表式から、x^2 軸方向のローレンツブーストは

$$
\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh\eta_2 - x^2 \sinh\eta_2 \\ x^1 \\ -x^0 \sinh\eta_2 + x^2 \cosh\eta_2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta_2 & 0 & -\sinh\eta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_2 & 0 & \cosh\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (53)
$$

x^3 軸方向のローレンツブーストは

$$
\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh\eta_3 - x^3 \sinh\eta_3 \\ x^1 \\ x^2 \\ -x^0 \sinh\eta_3 + x^3 \cosh\eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta_3 & 0 & 0 & -\sinh\eta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\eta_3 & 0 & 0 & \cosh\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (54)
$$

で与えられることが分かる。したがって、(53) と (54) から、x^2 軸と x^3 軸方向のローレンツブーストの変換行列 $\Lambda^{(02)}(\eta_2)$ と $\Lambda^{(03)}(\eta_3)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\Lambda^{(02)}(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cosh\eta_2 & 0 & -\sinh\eta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_2 & 0 & \cosh\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$\Lambda^{(03)}(\eta_3) = \begin{pmatrix} \cosh\eta_3 & 0 & 0 & -\sinh\eta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\eta_3 & 0 & 0 & \cosh\eta_3 \end{pmatrix} \tag{56}$$

これらは教科書本文の (5.44a) と (5.44b) を与える。

$\Lambda^{(02)}(\eta_2)$ と $\Lambda^{(03)}(\eta_3)$ は双曲線関数の加法定理

$$\begin{aligned} \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta &= \cosh(\alpha+\beta) \\ \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta &= \sinh(\alpha+\beta) \end{aligned} \tag{57}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \Lambda^{(02)}(\eta_2)\Lambda^{(02)}(\eta_2') &= \Lambda^{(02)}(\eta_2+\eta_2') \\ \Lambda^{(03)}(\eta_3)\Lambda^{(03)}(\eta_3') &= \Lambda^{(03)}(\eta_3+\eta_3') \end{aligned} \tag{58}$$

を満たすことがわかるので、それぞれ次のように指数関数型行列で表すことができる（check 5.3 参照）。

$$\begin{aligned} \Lambda^{(02)}(\eta_2) &= e^{i\eta_2 J_V^{02}} \\ \Lambda^{(03)}(\eta_3) &= e^{i\eta_3 J_V^{03}} \end{aligned} \tag{59}$$

J_V^{02} と J_V^{03} は上式の関係から次のように求めることができる。（check 5.3 参照）。

$$\begin{aligned} J_V^{02} &= -i\left.\frac{d\Lambda^{(02)}(\eta_2)}{d\eta_2}\right|_{\eta_2=0} \\ &\overset{(55)}{=} -i\frac{d}{d\eta_2}\left.\begin{pmatrix} \cosh\eta_2 & 0 & -\sinh\eta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\eta_2 & 0 & \cosh\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\eta_2=0} \\ &= -i\left.\begin{pmatrix} \sinh\eta_2 & 0 & -\cosh\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cosh\eta_2 & 0 & \sinh\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|_{\eta_2=0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{60}$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
J_V^{03} &= -i\left.\frac{d\Lambda^{(03)}(\eta_3)}{d\eta_3}\right|_{\eta_3=0} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (61)
\end{aligned}
$$

次に、スピノルに対するローレンツブーストの変換行列 $S^{(02)}(\eta_2),\ S^{(03)}(\eta_3)$ を求める。$S^{(02)}(\eta_2)$, $S^{(03)}(\eta_3)$ も $\Lambda^{(02)}(\eta_2)$, $\Lambda^{(03)}(\eta_3)$ と同様に、指数関数型行列を用いて次のように表すことができる。

$$
S^{(02)}(\eta_2) = e^{i\eta_2 J_S^{02}} \qquad (62)
$$

$$
S^{(03)}(\eta_3) = e^{i\eta_3 J_S^{03}} \qquad (63)
$$

一方、無限小ローレンツブースト変換では、教科書本文の (5.15) で $\Delta\omega_{02} = -\Delta\omega_{20} = -\eta_2$ あるいは、$\Delta\omega_{03} = -\Delta\omega_{30} = -\eta_3$ とおくことによって

$$
S^{(02)}(\eta_2) = I_4 + \frac{i}{2}\eta_2\sigma^{02} \qquad (64)
$$

$$
S^{(03)}(\eta_3) = I_4 + \frac{i}{2}\eta_3\sigma^{03} \qquad (65)
$$

を得る。(62), (63) で η_2, η_3 を無限小量だとしてテイラー展開し、η_2, η_3 の一次までを残して上式と比べることによって

$$
J_S^{02} = \frac{1}{2}\sigma^{02} = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^2 \qquad (66)
$$

$$
J_S^{03} = \frac{1}{2}\sigma^{03} = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^3 \qquad (67)
$$

を得る。ここで、γ 行列としてディラック表示をとると

$$
J_S^{02} = \frac{i}{2}\gamma_D^0\gamma_D^2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (68)
$$

$$
J_S^{03} = \frac{i}{2}\gamma_D^0\gamma_D^3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (69)
$$

となる。これらの表示を用いて、$S^{02}(\eta_2)$ および $S^{03}(\eta_3)$ を 4×4 行列で具体的に表すと次式のように求まることが分かる。(以下では、$(2J_S^{02})^{2n} = (-1)^n I_4,\ (2J_S^{02})^{2n+1} = (-1)^n\cdot 2J_S^{02}$,

$(2J_S^{03})^{2n} = (-1)^n I_4,\ (2J_S^{03})^{2n+1} = (-1)^n \cdot 2J_S^{03}\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ を用いる。)

$$
\begin{aligned}
S^{(02)}(\eta_2) &= e^{i\eta_2 J_S^{02}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\eta_2 J_S^{02})^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta_2 J_S^{02})^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\eta_2 J_S^{02})^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\eta_2}{2})^{2n}}{(2n)!} \underbrace{(2J_S^{02})^{2n}}_{(-1)^n I_4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n (\frac{\eta_2}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \underbrace{(2J_S^{02})^{2n+1}}_{(-1)^n 2J_S^{02}} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\eta_2}{2})^{2n}}{(2n)!}}_{\cosh \frac{\eta_2}{2}} \cdot I_4 + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\eta_2}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sinh \frac{\eta_2}{2}} \cdot 2J_S^{02} \\
&\overset{(68)}{=} \begin{pmatrix} I_2 \cosh \frac{\eta_2}{2} & -\sigma^2 \sinh \frac{\eta_2}{2} \\ -\sigma^2 \sinh \frac{\eta_2}{2} & I_2 \cosh \frac{\eta_2}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{70}
$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
S^{(03)}(\eta_3) &= e^{i\eta_2 J_S^{03}} \\
&= \cosh \frac{\eta_3}{2} \cdot I_4 + i \sinh \frac{\eta_3}{2} \cdot 2J_S^{03} \\
&\overset{(69)}{=} \begin{pmatrix} I_2 \cosh \frac{\eta_3}{2} & -\sigma^3 \sinh \frac{\eta_3}{2} \\ -\sigma^3 \sinh \frac{\eta_3}{2} & I_2 \cosh \frac{\eta_3}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{71}
$$

を得る。これらは、教科書本文の (5.44c)、(5.44d) を与える。

最後に、J^{23}、J^{31}、J^{12} および J^{01}、J^{02}、J^{03} のエルミート性を調べる。まずは、$J_V^{\mu\nu}$ の方から確かめる。$J_V^{\mu\nu}$ は具体的に次の 4×4 行列で与えられていた。

$$
\begin{aligned}
J_V^{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad
J_V^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad
J_V^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
J_V^{01} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad
J_V^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad
J_V^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{72}
$$

これらの表式から直ちに

$$
\begin{aligned}
(J_V^{23})^\dagger = J_V^{23}, \qquad (J_V^{31})^\dagger = J_V^{31}, \qquad (J_V^{12})^\dagger = J_V^{12} \\
(J_V^{01})^\dagger = -J_V^{01}, \qquad (J_V^{02})^\dagger = -J_V^{02}, \qquad (J_V^{03})^\dagger = -J_V^{03}
\end{aligned} \tag{73}
$$

一方、スピノルに対する $J_S^{\mu\nu}$ は次式で与えられていた。

$$
J_S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^\mu \gamma^\nu \quad (\mu \neq \nu) \tag{74}
$$

この表式より、

$$
\begin{aligned}
(J_S^{23})^\dagger &= \left(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3\right)^\dagger = -\frac{i}{2}\underbrace{(\gamma^3)^\dagger}_{-\gamma^3}\underbrace{(\gamma^2)^\dagger}_{-\gamma^2} = -\frac{i}{2}\underbrace{\gamma^3\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^3} = J_S^{23} \\
(J_S^{31})^\dagger &= \left(\frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1\right)^\dagger = -\frac{i}{2}\underbrace{(\gamma^1)^\dagger}_{-\gamma^1}\underbrace{(\gamma^3)^\dagger}_{-\gamma^3} = -\frac{i}{2}\underbrace{\gamma^1\gamma^3}_{-\gamma^3\gamma^1} = J_S^{31} \\
(J_S^{12})^\dagger &= \left(\frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\right)^\dagger = -\frac{i}{2}\underbrace{(\gamma^2)^\dagger}_{-\gamma^2}\underbrace{(\gamma^1)^\dagger}_{-\gamma^1} = -\frac{i}{2}\underbrace{\gamma^2\gamma^1}_{-\gamma^1\gamma^2} = J_S^{12} \\
(J_S^{0i})^\dagger &= \left(\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i\right)^\dagger = -\frac{i}{2}\underbrace{(\gamma^i)^\dagger}_{-\gamma^i}\underbrace{(\gamma^0)^\dagger}_{\gamma^0} = \frac{i}{2}\underbrace{\gamma^i\gamma^0}_{-\gamma^0\gamma^i} = -J_S^{0i} \quad (i=1,2,3) \qquad (75)
\end{aligned}
$$

したがって、J^{23}, J^{31}, J^{12} はエルミート、J^{01}, J^{02}, J^{03} は反エルミートであることがわかる。

check 5.6

(5.48) の左辺は、(i) $\mu \leftrightarrow \nu$, (ii) $\rho \leftrightarrow \lambda$, (iii) $(\mu\nu) \leftrightarrow (\rho\lambda)$ のそれぞれの入れかえに関して反対称であることを確かめよ。また、(5.48) の右辺も同様の反対称性をもっていることを確かめ、右辺の形が比例係数を除いて一意的であることを示してみよう。

【ヒント】 (i), (ii) は $J^{\mu\nu}$ の $\mu \leftrightarrow \nu$ に関する反対称性、(iii) は交換関係のもつ反対称性 $[A,B] = -[B,A]$ に由来するものである。

$X^{\mu\nu,\rho\lambda} \equiv [J^{\mu\nu}, J^{\rho\lambda}]$ を定義しておく。$J^{\mu\nu}$ は反対称テンソル（$J^{\nu\mu} = -J^{\mu\nu}$）であり、交換関係は、$[A,B] = -[B,A]$ を満たすことから直ちに、$X^{\mu\nu,\rho\lambda}$ は

$$\text{(i)} \quad X^{\nu\mu,\rho\lambda} = -X^{\mu\nu,\rho\lambda} \qquad (76)$$

$$\text{(ii)} \quad X^{\mu\nu,\lambda\rho} = -X^{\mu\nu,\rho\lambda} \qquad (77)$$

$$\text{(iii)} \quad X^{\rho\lambda,\mu\nu} = -X^{\mu\nu,\rho\lambda} \qquad (78)$$

を満たすことがわかる。

次に、$X^{\mu\nu,\rho\lambda}$ が計量テンソル $\eta^{\mu\rho}$ と $J^{\nu\lambda}$ の積、および添字 μ,ν,ρ,λ を入れかえたものの線形結合で表されたとしよう。このとき、$\eta^{\alpha\beta}J^{\gamma\delta}$ として、$(\alpha\beta\gamma\delta)$ に $(\mu\nu\rho\lambda)$ を入れる場合の数は $4! = 24$ 通りである。しかし、$\eta^{\alpha\beta}$ は対称 $(\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha})$、$J^{\gamma\delta}$ は反対称 $(J^{\gamma\delta} = -J^{\delta\gamma})$ なので、24 通りのうち独立なのは次の $\frac{24}{2\cdot 2} = 6$ 個である。

$$X^{\mu\nu,\rho\lambda} = C_1\eta^{\mu\nu}J^{\rho\lambda} + C_2\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} + C_3\eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} + C_4\eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} + C_5\eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu} + C_6\eta^{\rho\lambda}J^{\mu\nu} \qquad (79)$$

まず、(i) の反対称性から次の関係を得る。

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -C_3, \quad C_4 = -C_5 \qquad (80)$$

また、(ii) の反対称性から次の関係を得る。

$$C_2 = C_4, \quad C_3 = C_5, \quad C_6 = 0 \qquad (81)$$

ここで、$\eta^{\alpha\beta}=\eta^{\beta\alpha}, J^{\alpha\beta}=-J^{\beta\alpha}$ の性質を用いた。(80) と (81) の条件を用いて、(79) を整理すると

$$X^{\mu\nu,\rho\lambda}=C_2(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda}-\eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda}+\eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu}-\eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu}) \tag{82}$$

となる。この表式は (iii) の性質を満たしていることがわかるので、$X^{\mu\nu,\rho\lambda}$ は比例係数 C_2 を除いて、上の右辺の表式に一意的に決まることがわかる。

check 5.7

(1) $T^{\mu_1\cdots\mu_n}\equiv\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n})$ は不変テンソル、すなわち、$T^{\mu_1\cdots\mu_n}=\Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n}\times T^{\nu_1\cdots\nu_n}$ を満たすことを証明してみよう。(2) 不変テンソルの観点から、$T^{\mu_1\mu_2}\propto\eta^{\mu_1\mu_2}$、および、$T^{\mu_1\cdots\mu_n}=0$ ($n=$ 奇数) となることを説明してみよう。(3) 実際、$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n})$ を計算して、$T^{\mu_1\mu_2}=4\eta^{\mu_1\mu_2}$, $T^{\mu_1\cdots\mu_n}=0$ ($n=$ 奇数) となることを証明してみよう。

【ヒント】 (1) の証明は、(5.49) とトレースの性質 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ から得られる。(2) では、計量 $\eta^{\mu\nu}$、クロネッカーシンボル $\delta^{\mu}{}_{\nu}$、(5.69) で定義される 4 階完全反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ を用いて、奇数階の不変テンソルを作ることができるかを考えてみよ。(3) では、$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\{\gamma^\nu,\gamma^\mu\})=\eta^{\mu\nu}\mathrm{tr}(I_4)$, $\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}(\gamma^5)^2=(-1)^n\gamma^5\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\gamma^5$ を用いよ。γ^5 行列の性質は 5.4.2 項に与えられている。

(1) 5.1.2 項でローレンツ変換

$$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \tag{83}$$

の下で、スピノルの $\psi(x)$ は、

$$\psi'(x')=S(\Lambda)\psi(x) \tag{84}$$

と変換することがわかった。このとき、$S(\Lambda)$ は次式を満たす。

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^\nu \tag{85}$$

このことを用いて、$T^{\mu_1\cdots\mu_n}\equiv\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n})$ が不変テンソルの性質、すなわち

$$T^{\mu_1\cdots\mu_n}=\Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n}T^{\nu_1\cdots\nu_n} \tag{86}$$

を満たすことを以下で示す。

$$\begin{aligned}
T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} &= \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n})\\
&= \mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}S(\Lambda)\right) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA))\\
&= \mathrm{tr}\left(S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu_1}S(\Lambda)\cdot S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu_2}S(\Lambda)\cdots S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu_n}S(\Lambda)\right)\\
&\overset{(85)}{=} \mathrm{tr}\left(\left(\Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\gamma^{\nu_1}\right)\left(\Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2}\gamma^{\nu_2}\right)\cdots\left(\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n}\gamma^{\nu_n}\right)\right)\\
&= \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n}\cdot\mathrm{tr}(\gamma^{\nu_1}\gamma^{\nu_2}\cdots\gamma^{\nu_n})\\
&\qquad (\because \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\text{は単なる係数なので、tr の外に出すことができる。})\\
&= \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}
\end{aligned} \tag{87}$$

(2) 次に $T^{\mu_1\mu_2} \propto \eta^{\mu_1\mu_2}$、および $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = 0$（$n =$ 奇数）となることを不変テンソルの観点から説明する。

まず、$T^{\mu_1\mu_2}$ は問 (1) の結果から不変テンソルであり、$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ の性質から対称テンソル（$T^{\mu_1\mu_2} = T^{\mu_2\mu_1}$）であることもわかる。2 階の対称な不変テンソルは計量テンソル $\eta^{\mu_1\mu_2}$ しかないので（これは認めてもらう)、$T^{\mu_1\mu_2}$ は $\eta^{\mu_1\mu_2}$ に比例すると期待される。

次に計量テンソル $\eta^{\mu\nu}$、クロネッカーシンボル $\delta^\mu{}_\nu$ および 4 階完全反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ を考えてみよう。これらはすべて偶数個の添字を持つ不変テンソルである。これらを使って新たな不変テンソルを構成しようとしたとき、これらの不変テンソルの積あるいは添字の縮約の操作では、偶数個の添字を持つテンソルしか構成できない。(たとえば 3 階のテンソルを、$\eta^{\mu\nu}, \delta^\mu{}_\nu, \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ の積と添字の縮約の操作では作ることができない。)

したがって、$\eta^{\mu\nu}, \delta^\mu{}_\nu, \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ からは奇数階の不変テンソルを構成できないことがわかる。一方、$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ は不変テンソルの性質を持っているので、$n =$ 奇数のときは $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = 0$ となることが予想されるのである。

(3) ここでは、$T^{\mu_1\mu_2} = 4\eta^{\mu_1\mu_2}$ および $T^{\mu_1\cdots\mu_n} = 0$ ($n =$ 奇数) となることを具体的に証明する。(つまり (2) での予想は正しかったことになる。)

$$\begin{aligned}
T^{\mu_1\mu_2} &= \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}) \\
&= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} + \gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1})\right) \qquad (\because \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}) = \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1})) \\
&= \mathrm{tr}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{\{\gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_2}\}}_{2\eta^{\mu_1\mu_2}I_4}\Big) \\
&= \eta^{\mu_1\mu_2}\underbrace{\mathrm{tr}(I_4)}_{4} \qquad (\because \eta^{\mu_1\mu_2}\text{は単なる係数なので tr の外に出せる。}) \\
&= 4\eta^{\mu_1\mu_2}
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
T^{\mu_1\cdots\mu_n} &= \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}) \\
&= \mathrm{tr}\left(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}(\gamma^5)^2\right) \qquad (\because (\gamma^5)^2 = I_4) \\
&= \mathrm{tr}\Big(\underbrace{\gamma^5\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}}_{(-1)^n\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\gamma^5}\gamma^5\Big) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\
&= (-1)^n\mathrm{tr}\Big(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\underbrace{(\gamma^5)^2}_{=I_4}\Big) \qquad (\because \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5) \\
&= (-1)^n T^{\mu_1\cdots\mu_n} \\
&= -T^{\mu_1\cdots\mu_n} \qquad (n = \text{奇数}) \\
\Longrightarrow\ & T^{\mu_1\cdots\mu_n} = 0
\end{aligned} \tag{89}$$

check 5.8

(5.55) に与えられている（独立な）行列の数が 16 であることを確かめてみよう。

【ヒント】双 1 次形式に現れる Γ 行列は 4×4 行列なので、独立な行列の成分の数は 16 である。したがって、この結果から双 1 次形式 $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ での行列 Γ は、(5.55) に与えられている行列の線形結合で一般的に書き表すことができる。

ここでは、以下の行列の独立な数が 16 であることを確かめる。

$$\Gamma = I_4, \quad \gamma^\mu, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu\gamma^5 \tag{90}$$

ここで、$\sigma^{\mu\nu}$ は μ, ν に関して反対称 ($\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$) なので独立なものは $\sigma^{\mu\nu}(0 \leq \mu < \nu \leq 3)$ としてよく、全部で六つ（具体的には、$\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}, \sigma^{12}, \sigma^{23}, \sigma^{13}$）である。したがって (90) の中で独立な行列の数は、

$$\begin{array}{cc} I_4 & 1\,個 \\ \gamma^\mu & 4\,個 \\ \sigma^{\mu\nu} & 6\,個 \\ \gamma^5 & 1\,個 \\ \gamma^\mu\gamma^5 & 4\,個 \\ \hline & 16\,個 \end{array} \tag{91}$$

となる。

厳密には、(91) の結果だけでは、これら 16 個の行列が互いに独立であることの証明にはなっていない。その証明には、

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv I_4, \quad \Gamma_2 \equiv \gamma^0, \quad \Gamma_3 \equiv \gamma^1, \quad \Gamma_4 \equiv \gamma^2, \quad \Gamma_5 \equiv \gamma^3, \\ \Gamma_6 &\equiv \sigma^{01}, \quad \Gamma_7 \equiv \sigma^{02}, \quad \Gamma_8 \equiv \sigma^{03}, \quad \Gamma_9 \equiv \sigma^{12}, \\ \Gamma_{10} &\equiv \sigma^{23}, \quad \Gamma_{11} \equiv \sigma^{31}, \quad \Gamma_{12} \equiv \gamma^5, \\ \Gamma_{13} &\equiv \gamma^0\gamma^5, \quad \Gamma_{14} \equiv \gamma^1\gamma^5, \quad \Gamma_{15} \equiv \gamma^2\gamma^5, \quad \Gamma_{16} \equiv \gamma^3\gamma^5 \end{aligned} \tag{92}$$

と定義したときに

$$\mathrm{tr}(\Gamma_a\Gamma_b) \begin{cases} \neq 0 & a = b \\ = 0 & a \neq b \end{cases} \qquad (a, b = 1, 2, \cdots, 16) \tag{93}$$

が成り立つことを示せばよい。

(93) を確かめるために、次の公式を証明しておこう。これらはいろんな場面で使われる役に立つ公式である。公式を覚えるのではなく、導出法をマスターしよう。

$$[1] \quad \mathrm{tr}(I_4) = 4 \tag{94}$$

$$[2] \quad \mathrm{tr}(\gamma^5) = 0 \tag{95}$$

$$[3] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu) = 0 \tag{96}$$

$$[4] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^5) = 0 \tag{97}$$

$$[5] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \tag{98}$$

$$[6] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0 \tag{99}$$

$$[7] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0 \tag{100}$$

$$[8] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^5) = 0 \tag{101}$$

$$[9] \quad \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda) = 4\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda} - 4\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} + 4\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} \tag{102}$$

以下に証明を与えておく。

[1]

$$\mathrm{tr}(I_4) \quad = \quad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

[2]

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^5) &= \mathrm{tr}(\gamma^5(\gamma^0)^2) \quad (\because (\gamma^0)^2 = I_4) \\
&= \mathrm{tr}(-\gamma^0\gamma^5\gamma^0) \quad (\because \gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^5(\gamma^0)^2) \quad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^5) \quad (\because (\gamma^0)^2 = I_4) \\
&= 0 \quad (\because X = -X \implies X = 0)
\end{aligned}$$

[3]

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu) \quad = \quad 0 \qquad (\because \text{check 5.7 参照})$$

[4]

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^5) \quad = \quad \mathrm{tr}(\underbrace{\gamma^\mu i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}_{\text{奇数個}}) = 0 \qquad (\because \ \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \ \text{check 5.7 参照})$$

[5]

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= \mathrm{tr}(\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2\eta^{\mu\nu}I_4} - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
&= 2\eta^{\mu\nu}\underbrace{\mathrm{tr}(I_4)}_{4} - \underbrace{\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\mu)}_{\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)} \\
&= 8\eta^{\mu\nu} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
\implies \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= \frac{1}{2} \times 8\eta^{\mu\nu} = 4\eta^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

[6]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\eta^{\rho\rho}(\gamma^\rho)^2) \\
&\qquad (\because \eta^{\rho\rho}(\gamma^\rho)^2 = I_4.\quad \text{ここで}\rho \neq \mu,\nu\text{と選んだ}) \\
&= \eta^{\rho\rho}\mathrm{tr}\left((-1)^3\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\rho\right) \\
&\qquad (\because \rho \neq \mu,\nu\text{と選んでいるので、}\gamma^\rho\text{は}\gamma^\mu,\gamma^\nu,\gamma^5\text{のいずれとも反可換。}) \\
&= -\eta^{\rho\rho}\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5(\gamma^\rho)^2\right) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\
&= -\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) \qquad (\because \eta^{\rho\rho}(\gamma^\rho)^2 = I_4) \\
&= 0 \qquad (\because X = -X \implies X = 0)
\end{aligned}
$$

[7]

$$
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0 \qquad (\because\ \text{check 5.7 参照})
$$

[8]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^5) &= \mathrm{tr}(\underbrace{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\, i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}_{\text{奇数個}}) \qquad (\because\ \gamma^5 = i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \\
&= 0 \qquad (\because\ \text{check 5.7 参照})
\end{aligned}
$$

[9]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda) &= \mathrm{tr}\Big((\underbrace{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}_{2\eta^{\mu\nu}I_4} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\rho\gamma^\lambda\Big) \\
&\qquad (\because\ \gamma^\mu\gamma^\nu = \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} - \gamma^\nu\gamma^\mu\ ) \\
&= 2\eta^{\mu\nu}\underbrace{\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\lambda)}_{4\eta^{\rho\lambda}} - \mathrm{tr}\big(\gamma^\nu\ \underbrace{\gamma^\mu\gamma^\rho}_{\{\gamma^\mu,\gamma^\rho\}-\gamma^\rho\gamma^\mu}\ \gamma^\lambda\big) \\
&= 8\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda} - 2\eta^{\mu\rho}\underbrace{\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\lambda)}_{4\eta^{\nu\lambda}} + \mathrm{tr}\big(\gamma^\nu\gamma^\rho\ \underbrace{\gamma^\mu\gamma^\lambda}_{\{\gamma^\mu,\gamma^\lambda\}-\gamma^\lambda\gamma^\mu}\ \big) \\
&\qquad (\because\ \{\gamma^\mu,\gamma^\rho\} = 2\eta^{\mu\rho}I_4\ ) \\
&= 8\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda} - 8\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} + 2\eta^{\mu\lambda}\underbrace{\mathrm{tr}(\gamma^\nu\gamma^\rho)}_{4\eta^{\nu\rho}} - \underbrace{\mathrm{tr}\big(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\mu\big)}_{\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda)\ (\because\ \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA))} \\
&= 8\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda} - 8\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} + 8\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} - \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda) &= \frac{1}{2}\times(8\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda} - 8\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} + 8\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}) \\
&= 4\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda} - 4\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} + 4\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}
\end{aligned}
$$

公式 [1]〜[9] を用いれば、(93) を確かめることはそれほど難しくはないはずだ。(93) の確認は読者に任せることにする。

(!)

4×4 行列の独立な成分の数は 16 なので、任意の 4×4 行列 M は、16 個の独立な行列 $\tilde{\Gamma}_a(a = 1, 2, \cdots, 16)$ を用いて、次のように展開できる。

$$M = \sum_{a=1}^{16} C_a \tilde{\Gamma}_a \tag{103}$$

ここで、$\tilde{\Gamma}_a$ は Γ_a を規格化して次の規格直交関係

$$\mathrm{tr}(\tilde{\Gamma}_a \tilde{\Gamma}_b) = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, \cdots 16) \tag{104}$$

を満たすものとして定義されたものである。また、$C_a(a = 1, 2, \cdots, 16)$ は展開係数（一般に複素数）である。(103) は C_a に関して逆解きができて

$$C_a = \mathrm{tr}(M\tilde{\Gamma}_a) \quad (a = 1, 2, \cdots, 16) \tag{105}$$

で与えられる。

check 5.9

(5.57) と (5.58) を確かめてみよう。

【ヒント】 (5.57) と (5.58) の証明に必要なものは、$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ $(\mu \neq \nu)$, $\left(\gamma^0\right)^2 = I_4 = -\left(\gamma^j\right)^2$, $\left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0$, $\left(\gamma^j\right)^\dagger = -\gamma^j$、および、エルミート共役の公式 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ である。

γ^5 の定義 $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ から、

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{106}$$

および

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^2 &= I_4 &(107)\\ (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5 &(108)\end{aligned}$$

が成り立つことを以下で確かめる。

まず、(107) および (108) を証明する。

$$\begin{aligned}
(\gamma^5)^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^2 \\
&= -\underbrace{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0}_{(-1)^3(\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\ (\because\ \gamma^j\gamma^0=-\gamma^0\gamma^j\ (j=1,2,3))}\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= -(-1)^3(\gamma^0)^2\underbrace{\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1}_{(-1)^2(\gamma^1)^2\gamma^2\gamma^3\ (\because\ \gamma^i\gamma^j=-\gamma^j\gamma^i\ (i\neq j))}\gamma^2\gamma^3 \\
&= -(-1)^3(-1)^2(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2\gamma^2\underbrace{\gamma^3\gamma^2}_{-\gamma^2\gamma^3}\gamma^3 \\
&= -(-1)^3(-1)^2(-1)\underbrace{(\gamma^0)^2}_{I_4}\underbrace{(\gamma^1)^2}_{-I_4}\underbrace{(\gamma^2)^2}_{-I_4}\underbrace{(\gamma^3)^2}_{-I_4} \\
&= +I_4, \qquad (109)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma^5)^\dagger &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger \\
&= -i\,\underbrace{(\gamma^3)^\dagger}_{-\gamma^3}\underbrace{(\gamma^2)^\dagger}_{-\gamma^2}\underbrace{(\gamma^1)^\dagger}_{-\gamma^1}\underbrace{(\gamma^0)^\dagger}_{\gamma^0} \\
&= i\ \underbrace{\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0}_{(-1)^3\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1} \\
&= -i\gamma^0\ \underbrace{\gamma^3\gamma^2\gamma^1}_{(-1)^2\gamma^1\gamma^3\gamma^2} \\
&= -i\gamma^0\,\underbrace{\gamma^1\gamma^3\gamma^2}_{-\gamma^1\gamma^2\gamma^3} \\
&= \gamma^5
\end{aligned} \tag{110}
$$

最後に (106) を確かめる。$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu\,(\mu \neq \nu)$ であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\gamma^5\gamma^\mu &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu \\
&= i(-1)^3\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&\qquad (\because \gamma^\mu \text{ は } \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \text{ のうち 3 つの } \gamma \text{ 行列と反可換。}) \\
&= -\gamma^\mu\gamma^5
\end{aligned} \tag{111}
$$

を得る。

check 5.10

2×2 行列 $M^\mu{}_\nu\ (\mu,\nu=0,1)$ の場合は、2 階の完全反対称テンソル $\varepsilon^{\nu_0\nu_1}$ を使って $\det M = \varepsilon^{\nu_0\nu_1}M^0{}_{\nu_0}M^1{}_{\nu_1}$ と定義される。3×3 行列 $M^\mu{}_\nu\ (\mu,\nu=0,1,2)$ の場合は、3 階の完全反対称テンソル $\varepsilon^{\nu_0\nu_1\nu_2}$ を使って $\det M = \varepsilon^{\nu_0\nu_1\nu_2}M^0{}_{\nu_0}M^1{}_{\nu_1}M^2{}_{\nu_2}$ で定義される。これらが、よく知られた 2×2 と 3×3 行列の行列式の定義と一致していることを具体的に確かめてみよう。

2×2 行列 $M^\mu{}_\nu(\mu,\nu=0,1)$ の行列式は、よく知られた公式より

$$
\det M = \det\begin{pmatrix} M^0{}_0 & M^0{}_1 \\ M^1{}_0 & M^1{}_1 \end{pmatrix} = M^0{}_0M^1{}_1 - M^0{}_1M^1{}_0 \tag{112}
$$

で与えられる。一方、$\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$ および $\varepsilon^{00} = \varepsilon^{11} = 0$ より

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{\nu_0\nu_1}M^0{}_{\nu_0}M^1{}_{\nu_1} &= \varepsilon^{01}M^0{}_0M^1{}_1 + \varepsilon^{10}M^0{}_1M^1{}_0 \\
&= M^0{}_0M^1{}_1 - M^0{}_1M^1{}_0 \\
&= \det M
\end{aligned} \tag{113}
$$

3×3 行列 $M^\mu{}_\nu(\mu,\nu=0,1,2)$ の行列式は、これもよく知られた公式より

$$\begin{aligned}\det M &= \det\begin{pmatrix} M^0{}_0 & M^0{}_1 & M^0{}_2 \\ M^1{}_0 & M^1{}_1 & M^1{}_2 \\ M^2{}_0 & M^2{}_1 & M^2{}_2 \end{pmatrix} \\ &= M^0{}_0M^1{}_1M^2{}_2 + M^0{}_1M^1{}_2M^2{}_0 + M^0{}_2M^1{}_0M^2{}_1 \\ &\quad -M^0{}_2M^1{}_1M^2{}_0 - M^0{}_1M^1{}_0M^2{}_2 - M^0{}_0M^1{}_2M^2{}_1 \end{aligned} \tag{114}$$

で与えられる。一方、

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\nu_0\nu_1\nu_2}M^0{}_{\nu_0}M^1{}_{\nu_1}M^2{}_{\nu_2} &= \varepsilon^{012}M^0{}_0M^1{}_1M^2{}_2 + \varepsilon^{120}M^0{}_1M^1{}_2M^2{}_0 + \varepsilon^{201}M^0{}_2M^1{}_0M^2{}_1 \\ &\quad +\varepsilon^{210}M^0{}_2M^1{}_1M^2{}_0 + \varepsilon^{102}M^0{}_1M^1{}_0M^2{}_2 + \varepsilon^{021}M^0{}_0M^1{}_2M^2{}_1 \\ &= M^0{}_0M^1{}_1M^2{}_2 + M^0{}_1M^1{}_2M^2{}_0 + M^0{}_2M^1{}_0M^2{}_1 \\ &\quad -M^0{}_2M^1{}_1M^2{}_0 - M^0{}_1M^1{}_0M^2{}_2 - M^0{}_0M^1{}_2M^2{}_1 \\ &\qquad\qquad (\because \varepsilon^{012}=\varepsilon^{120}=\varepsilon^{201}=1, \quad \varepsilon^{210}=\varepsilon^{102}=\varepsilon^{021}=-1) \\ &= \det M \end{aligned} \tag{115}$$

check 5.11

計量やクロネッカーシンボル以外に、4 階の完全反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ も不変テンソルとみなすことができる。実際、次の関係を満たすことを証明せよ。

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'}\,\Lambda^\nu{}_{\nu'}\,\Lambda^\rho{}_{\rho'}\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} = (\det\Lambda)\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{116}$$

このことから、**$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ を（本義ローレンツ変換に対して）不変テンソルとみなしてよい**ことを考察してみよう。

【ヒント】まず、(5.75) の左辺は $(\mu\nu\rho\lambda)$ に関して 4 階完全反対称（任意の隣り合う 2 つの添字の入れかえに対して反対称）であることを示し、公式 (5.72) と行列式の定義 (5.71) を用いよ。

まず始めに

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\Lambda^\rho{}_{\rho'}\Lambda^\lambda{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} = (\det\Lambda)\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{117}$$

を証明する。そのために、上式左辺の量を $M^{\mu\nu\rho\lambda}$ と定義する。

$$M^{\mu\nu\rho\lambda} \equiv \Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\Lambda^\rho{}_{\rho'}\Lambda^\lambda{}_{\lambda'}\,\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} \tag{118}$$

このとき、$M^{\mu\nu\rho\lambda}$ が 4 階完全反対称テンソルであることを以下に示す。

完全反対称であることを示すためには、となり合う 2 つの添字の入れかえに対して反対称であることを示せばよい。すなわち、

$$M^{\nu\mu\rho\lambda} = -M^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{119}$$

$$M^{\mu\rho\nu\lambda} = -M^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{120}$$

$$M^{\mu\nu\lambda\rho} = -M^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{121}$$

を示せばよい。

$$
\begin{aligned}
M^{\nu\mu\rho\lambda} &= \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} \\
&\overset{\mu'\leftrightarrow\nu'}{=} \underbrace{\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}}_{\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\underbrace{\varepsilon^{\nu'\mu'\rho'\lambda'}}_{-\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'}} \\
&= -\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} \\
&= -M^{\mu\nu\rho\lambda} \quad \Longrightarrow (119)
\end{aligned} \tag{122}
$$

全く同様に、残りの2式も証明できる。

以上の結果から、$M^{\mu\nu\rho\lambda}$ は4階完全反対称テンソルであることがわかった。したがって、教科書本文の (5.72) から $M^{\mu\nu\rho\lambda}$ は $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ に比例することがわかる。

$$
M^{\mu\nu\rho\lambda} = M^{0123}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{123}
$$

ここで比例係数 M^{0123} は定義 (118) より

$$
\begin{aligned}
M^{0123} &= \Lambda^{0}{}_{\mu'}\Lambda^{1}{}_{\nu'}\Lambda^{2}{}_{\rho'}\Lambda^{3}{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} \\
&= \det\Lambda \qquad (\because \text{教科書本文の行列式の定義 (5.71)})
\end{aligned} \tag{124}
$$

なので、(117) が求まったことになる。

(117) より、本義ローレンツ変換に対して、$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ が不変テンソルとみなすことができることは、次のようにして示される。$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ が4階の反変テンソルならば、ローレンツ変換の下で次の変換性を持つはずである。

$$
\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \to \varepsilon'^{\mu\nu\rho\lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} \tag{125}
$$

一方、$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ は定数なので、

$$
\varepsilon'^{\mu\nu\rho\lambda} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{126}
$$

でなければならない。

したがって、$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ がテンソルであること（すなわち (125)）と、$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ が定数であること（すなわち (126)）が矛盾しないためには、

$$
\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda'}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \tag{127}
$$

が成り立たなければならない。実際、上式は（本義ローレンツ変換では $\det\Lambda = 1$ なので）(117) より、成り立っている。

以上のことより、$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ は不変テンソルとみなせることがわかる。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第６章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2014/12/09
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 6 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 6.1 ～ check 6.12 の解答例
- 『鏡の問題』の解説

check 6.1

空間反転のもとでの電場と磁場の変換性 (6.7) は、マクスウェル方程式 (3.1) からも導くことができる。それを確かめてみよう。

【ヒント】 空間反転のもとで、電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ は、$(\rho, \boldsymbol{j}) \overset{P}{\to} (\rho, -\boldsymbol{j})$ と変換する。

マクスウェル方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{4}$$

の空間回転不変性から、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ に対する空間反転変換性を求めることにする。そのために、電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の変換性

$$(\rho, \boldsymbol{j}) \xrightarrow{P} (\rho, -\boldsymbol{j}) \tag{5}$$

を用いる。

(3) が空間反転 $\boldsymbol{x} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{x}$ （このとき $\boldsymbol{\nabla} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{\nabla}$）の下で不変であるためには、$\rho \xrightarrow{P} \rho$ なので、

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{E} \tag{6}$$

でなければならないことがわかる。

次に (4) が空間反転の下で不変であるためには、$\boldsymbol{j} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{j}$ なので、

$$\boldsymbol{E} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} \xrightarrow{P} \boldsymbol{B} \tag{7}$$

でなければならないことがわかる。これらの変換性から、(1) と (2) は空間反転の下で不変であることがわかる。

check 6.2

(6.19) で定義される時間反転行列 T が、(6.17)、および (6.20) を満たすことを確かめてみよう。

ディラック表示では、時間反転の変換行列 T は $T = i\gamma_D^1\gamma_D^3$ で与えられる。以下で、T が

$$T^{-1}\gamma_D^\mu T = \begin{cases} (\gamma_D^0)^* & (\mu = 0) \\ -(\gamma_D^j)^* & (\mu = j = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{8}$$

および

$$T = T^{-1} = -T^* = T^\dagger = -T^T \tag{9}$$

を満たすことを確かめる。

ディラック表示では

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{10}$$

で与えられるので

$$(\gamma_D^\mu)^* = \begin{cases} +\gamma^\mu & (\mu = 0, 1, 3) \\ -\gamma^\mu & (\mu = 2) \end{cases} \tag{11}$$

を満たす。

まず、(9) を確かめておく。

$$(T)^2 = (i\gamma_D^1\gamma_D^3)^2 = -\gamma_D^1 \underbrace{\gamma_D^3\gamma_D^1}_{-\gamma_D^1\gamma_D^3} \gamma_D^3 = \underbrace{(\gamma_D^1)^2}_{-I_4}\underbrace{(\gamma_D^3)^2}_{-I_4} = I_4 \implies T^{-1} = T \tag{12}$$

$$T^* = (i\gamma_D^1\gamma_D^3)^* = -i(\gamma_D^1)^*(\gamma_D^3)^* \overset{(11)}{=} -i\gamma_D^1\gamma_D^3 = -T \tag{13}$$

$$T^\dagger = (i\gamma_D^1\gamma_D^3)^\dagger = -i\underbrace{(\gamma_D^3)^\dagger}_{-\gamma_D^3}\underbrace{(\gamma_D^1)^\dagger}_{-\gamma_D^1} = -i\gamma_D^3\gamma_D^1 = +i\gamma_D^1\gamma_D^3 = T \tag{14}$$

$$T^T = ((T^T)^*)^* = (T^\dagger)^* \overset{(14)}{=} (T)^* \overset{(13)}{=} -T \tag{15}$$

次に、(8) を $\mu = 0, 1, 2, 3$ のそれぞれについて確かめる。

$$T^{-1}\gamma_D^0 T = T^{-1} \underbrace{\gamma_D^0(i\gamma_D^1\gamma_D^3)}_{(-1)^2(i\gamma_D^1\gamma_D^3)\gamma_D^0} = T^{-1}T\gamma_D^0 \overset{(11)}{=} (\gamma_D^0)^* \tag{16}$$

$$T^{-1}\gamma_D^1 T = T^{-1} \underbrace{\gamma_D^1(i\gamma_D^1\gamma_D^3)}_{-(i\gamma_D^1\gamma_D^3)\gamma_D^1} = -\gamma_D^1 \overset{(11)}{=} -(\gamma_D^1)^* \tag{17}$$

$$T^{-1}\gamma_D^2 T = T^{-1} \underbrace{\gamma_D^2(i\gamma_D^1\gamma_D^3)}_{(-1)^2(i\gamma_D^1\gamma_D^3)\gamma_D^2} = \gamma_D^2 \overset{(11)}{=} -(\gamma_D^2)^* \tag{18}$$

$$T^{-1}\gamma_D^3 T = T^{-1} \underbrace{\gamma_D^3(i\gamma_D^1\gamma_D^3)}_{-(i\gamma_D^1\gamma_D^3)\gamma_D^3} = -\gamma_D^3 \overset{(11)}{=} -(\gamma_D^3)^* \tag{19}$$

したがって、(8) が成り立つことが確かめられた。

check 6.3

(6.28) で定義される荷電共役行列 C が、(6.25)、(6.29)、および (6.30) を満たすことを確かめてみよう。

ここでは、ディラック表示での荷電共役行列 $C = i\gamma_D^2\gamma_D^0$ が、

$$C(\gamma_D^\mu)^T C^{-1} = -\gamma_D^\mu \tag{20}$$

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T = C^* \tag{21}$$

$$(\psi^C)^C = \psi \tag{22}$$

を満たすことを確かめる。

まず、(21) を以下で確かめる。

$$
\begin{aligned}
C^2 &= (i\gamma_D^2\gamma_D^0)^2 = -\gamma_D^2 \underbrace{\gamma_D^0\gamma_D^2}_{-\gamma_D^2\gamma_D^0} \gamma_D^0 = \underbrace{(\gamma_D^2)^2}_{-I_4} \underbrace{(\gamma_D^0)^2}_{I_4} = -I_4 \\
&\implies \quad C^{-1} = -C \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$
C^\dagger = (i\gamma_D^2\gamma_D^0)^\dagger = -i \underbrace{(\gamma_D^0)^\dagger}_{\gamma_D^0} \underbrace{(\gamma_D^2)^\dagger}_{-\gamma_D^2} = i\gamma_D^0\gamma_D^2 = -i\gamma_D^2\gamma_D^0 = -C \qquad (24)
$$

$$
C^T = (i\gamma_D^2\gamma_D^0)^T = i \underbrace{(\gamma_D^0)^T}_{\gamma_D^0} \underbrace{(\gamma_D^2)^T}_{\gamma_D^2} = i\gamma_D^0\gamma_D^2 = -i\gamma_D^2\gamma_D^0 = -C \qquad (25)
$$

$$
C^* = (i\gamma_D^2\gamma_D^0)^* = -i \underbrace{(\gamma_D^2)^*}_{-\gamma_D^2} \underbrace{(\gamma_D^0)^*}_{\gamma_D^0} = i\gamma_D^2\gamma_D^0 = C \qquad (26)
$$

次に、(20) を $\mu = 0, 1, 2, 3$ ごとに確かめる。

$$
\begin{aligned}
C(\gamma_D^0)^T C^{-1} &= C \underbrace{(\gamma_D^0)^T}_{\gamma_D^0} (-i\gamma_D^2\gamma_D^0) \qquad (\because\ C^{-1} = -C = -i\gamma_D^2\gamma_D^0) \\
&= C(-1) \underbrace{(-i\gamma_D^2\gamma_D^0)}_{C^{-1}} \gamma_D^0 = -\gamma_D^0 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$$
C(\gamma_D^1)^T C^{-1} = C \underbrace{(\gamma_D^1)^T}_{-\gamma_D^1} (-i\gamma_D^2\gamma_D^0) = C(-1)(-1)^2 \underbrace{(-i\gamma_D^2\gamma_D^0)}_{C^{-1}} \gamma_D^1 = -\gamma_D^1 \qquad (28)
$$

$$
C(\gamma_D^2)^T C^{-1} = C \underbrace{(\gamma_D^2)^T}_{\gamma_D^2} (-i\gamma_D^2\gamma_D^0) = C(-1) \underbrace{(-i\gamma_D^2\gamma_D^0)}_{C^{-1}} \gamma_D^2 = -\gamma_D^2 \qquad (29)
$$

$$
C(\gamma_D^3)^T C^{-1} = C \underbrace{(\gamma_D^3)^T}_{-\gamma_D^3} (-i\gamma_D^2\gamma_D^0) = C(-1)(-1)^2 \underbrace{(-i\gamma_D^2\gamma_D^0)}_{C^{-1}} \gamma_D^3 = -\gamma_D^3 \qquad (30)
$$

最後に、(22) を確かめる。

$$
\begin{aligned}
(\psi^C)^C &= C\,\overline{\psi^C}^T = C\left((\psi^C)^\dagger\gamma^0\right)^T \qquad (\because\ \psi^C = C\overline{\psi}^T,\ \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0) \\
&= C\left((C\overline{\psi}^T)^\dagger\gamma^0\right)^T \\
&= C(\gamma^0)^T \underbrace{\left(C\overline{\psi}^T\right)^*}_{(C(\psi^\dagger\gamma^0)^T)^* = C^*(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger} \qquad (\because A^\dagger = (A^T)^*) \\
&= C(\gamma^0)^T \underbrace{C^*}_{-C^{-1}} \underbrace{(\gamma^0)^\dagger}_{\gamma^0} \psi \qquad (\because\ C^* = -C^{-1}) \\
&\overset{(20)}{=} \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{I_4} \psi = \psi \qquad (31)
\end{aligned}
$$

check 6.4

ゲージ場 A_μ の荷電共役を

$$A_\mu^C = -A_\mu \tag{6.34}$$

と定義するならば、荷電共役のもとで電磁場中のディラック方程式は不変であること、すなわち、次の対応が成り立つことを確かめてみよう。

$$\left[i\gamma^\mu\Big(\partial_\mu + iqA_\mu\Big) - mI_4\right]\psi = 0 \quad \overset{C}{\Longleftrightarrow} \quad \left[i\gamma^\mu\Big(\partial_\mu + iqA_\mu^C\Big) - mI_4\right]\psi^C = 0 \tag{6.35}$$

6.3 節で電磁場中のディラック方程式

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - mI_4]\psi = 0 \tag{32}$$

から、次式が成り立つことを確かめた。

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - mI_4]\psi^C = 0 \tag{33}$$

ここで、$\psi^C \equiv C\overline{\psi}^T$ である。

ゲージ場 A_μ の荷電共役を A_μ^C としておくと、荷電共役の下でディラック方程式 (32) が不変とは、(32) で $\psi \to \psi^C, A_\mu \to A_\mu^C$ に置き換えた次式

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu^C) - mI_4]\psi^C = 0 \tag{34}$$

が成り立つことである。(33) と (34) を見比べることによって、ゲージ場 A_μ の荷電共役を

$$A_\mu^C \equiv -A_\mu \tag{35}$$

と定義すれば、(34) が成り立つことがわかる。

(!)

マクスウェル方程式

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \tag{36}$$

において、4 元荷電ベクトル j^μ は荷電共役の下で

$$j^\nu \xrightarrow{C} -j^\nu \tag{37}$$

と変換する。(荷電共役の下で電荷の符号が逆になるので、荷電ベクトル j^ν も逆符号となる。)ゲージ場 A_μ の荷電共役は、(35) から $A_\mu \xrightarrow{C} -A_\mu$ なので、荷電共役の下でマクスウェル方程式 (36) は不変であることがわかる。

check 6.5

ディラック表示での γ 行列 γ_D^μ とカイラル表示での γ_W^μ は、次のユニタリー変換

$$\gamma_D^\mu = U\,\gamma_W^\mu\,U^\dagger \quad (\mu = 0,1,2,3)\,, \qquad U = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

で結びついていることを確かめてみよう。また、ディラック表示の場合と同様に $(\gamma_W^0)^\dagger = +\gamma_W^0$, $(\gamma_W^j)^\dagger = -\gamma_W^j$ $(j = 1,2,3)$、および $C\,(\gamma_W^\mu)^T\,C^{-1} = -\gamma_W^\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$ を満たすことを確かめてみよう。ここで、C は荷電共役行列で、$C = i\gamma_W^2\gamma_W^0$ で定義される。

【注】 このとき、ディラック表示での波動関数 ψ_D とカイラル表示での波動関数 ψ_W は、$\psi_D = U\psi_W$ の関係にある。

ディラック表示での γ 行列 γ_D^μ とカイラル（ワイル）表示での γ_W^μ はそれぞれ次式で定義されている。

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_D^j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (j = 1,2,3) \tag{38}$$

$$\gamma_W^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ I_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_W^j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^j \\ \sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (j = 1,2,3) \tag{39}$$

まず、γ_D^μ と γ_W^μ が次のユニタリー変換で結びついていることを確かめる。

$$\gamma_D^\mu = U\gamma_W^\mu U^\dagger, \quad U = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} U\gamma_W^0 U^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ I_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \\ &= \gamma_D^0 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} U\gamma_W^j U^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^j \\ \sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sigma^j & \sigma^j \\ \sigma^j & \sigma^j \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \gamma_D^j \qquad (j = 1,2,3) \end{aligned} \tag{42}$$

次に、γ_W^μ のエルミート性を調べる。$U^\dagger U = I_4$ を用いて、$\gamma_D^\mu = U\gamma_W^\mu U^\dagger$ の関係を γ_W^μ に

ついて解くと、$\gamma_W^\mu = U^\dagger \gamma_D^\mu U$ を得る。両辺のエルミート共役をとると、

$$\begin{aligned}(\gamma_W^\mu)^\dagger &= (U^\dagger \gamma_D^\mu U)^\dagger \\ &= U^\dagger (\gamma_D^\mu)^\dagger U \end{aligned} \tag{43}$$

となる。したがって、$\gamma_W^\mu = U^\dagger \gamma_D^\mu U$ なので、γ_W^μ のエルミート性は γ_D^μ のエルミート性に等しいことがわかる。すなわち

$$(\gamma_W^\mu)^\dagger = U^\dagger (\gamma_D^\mu)^\dagger U = \begin{cases} U^\dagger \gamma_D^0 U = \gamma_W^0 \quad (\mu = 0) \\ \\ U^\dagger (-\gamma_D^j) U = -\gamma_W^j \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{44}$$

最後に荷電共役の性質

$$C_W (\gamma_W^\mu)^T C_W^{-1} = -\gamma_W^\mu \qquad (C_W \equiv i\gamma_W^2 \gamma_W^0) \tag{45}$$

を確かめる。そのために、$\gamma_D^\mu = U\gamma_W^\mu U^\dagger$ から導かれる次の関係式

$$\begin{aligned} C_D &= UC_W U^\dagger \qquad (C_D \equiv i\gamma_D^2 \gamma_D^0) && (46) \\ C_D^{-1} &= UC_W^{-1} U^\dagger && (47) \\ (\gamma_D^\mu)^T &= U(\gamma_W^\mu)^T U^\dagger && (48) \end{aligned}$$

を導いておく。

$$\begin{aligned} UC_W U^\dagger &= U(i\gamma_W^2 \gamma_W^0) U^\dagger \\ &= i(U\gamma_W^2 U^\dagger)(U\gamma_W^0 U^\dagger) \qquad (\because\ U^\dagger U = I_4) \\ &= i\gamma_D^2 \gamma_D^0 \qquad (\because\ U\gamma_W^\mu U^\dagger = \gamma_D^\mu\,) \\ &= C_D && (49) \\ UC_W^{-1} U^\dagger &= U(-i\gamma_W^2 \gamma_W^0) U^\dagger \qquad (\because\ C_W^{-1} = -C_W) \\ &= -i(U\gamma_W^2 U^\dagger)(U\gamma_W^0 U^\dagger) \qquad (\because\ U^\dagger U = I_4) \\ &= -i\gamma_D^2 \gamma_D^0 \qquad (\because\ U\gamma_W^\mu U^\dagger = \gamma_D^\mu\,) \\ &= C_D^{-1} && (50) \\ U(\gamma_W^\mu)^T U^\dagger &= (U^\dagger)^T (\gamma_W^\mu)^T U^T \qquad (\because U^\dagger = U^T = U) \\ &= (U\gamma_W^\mu U^\dagger)^T \qquad (\because\ (AB)^T = (B^T A^T\,) \\ &= (\gamma_D^\mu)^T \qquad (\because\ U\gamma_W^\mu U^\dagger = \gamma_D^\mu\,) && (51) \end{aligned}$$

では、(46)〜(48) を用いて、カイラル (ワイル) 表示での荷電共役行列の関係式 $C_W(\gamma_W^\mu)^T C_W^{-1} = -\gamma_W^\mu$ を導くことにしよう。

$$\begin{aligned} & C_D (\gamma_D^\mu)^T C_D^{-1} = -\gamma_D^\mu \\ \Longrightarrow\ & (UC_W U^\dagger) \left(U(\gamma_W^\mu)^T U^\dagger \right) (UC_W^{-1} U^\dagger) = -U\gamma_W^\mu U^\dagger \qquad (\because\ (46) \sim (48),\ \gamma_D^\mu = U\gamma_W^\mu U^\dagger\,) \\ \Longrightarrow\ & UC_W (\gamma_W^\dagger)^T C_W^{-1} U^\dagger = -U\gamma_W^\mu U^\dagger \qquad (\because\ U^\dagger U = I_4) \\ \Longrightarrow\ & C_W (\gamma_W^\mu)^T C_W^{-1} = -\gamma_W^\mu \qquad (\because\ \text{左から}\,U^\dagger\text{、右から}\,U\,\text{をかけた。}) && (52) \end{aligned}$$

check 6.6

(6.40) で定義された 2 成分スピノル ξ, ζ のローレンツ変換性を求め、$\xi^\dagger\zeta$ および $\zeta^\dagger\xi$ はローレンツ不変（スカラー）量であることを確かめよ。また、$\xi^\dagger\xi$ および $\zeta^\dagger\zeta$ は、ローレンツ不変量ではないことを示してみよう。

【ヒント】 ローレンツ変換性は、(6.42) と (6.46) から求めよ。また、公式 $(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}$ を用いよ。

カイラル表示でのディラックスピノル ψ を 2 成分波動関数 ξ と ζ を使って、次のように表示しておこう。

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \tag{53}$$

このとき、ローレンツ変換性は教科書本文の (6.42) および (6.46) から次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \xi'(x') \\ \zeta'(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp\{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \zeta(x) \end{pmatrix} \tag{54}$$

すなわち、

$$\begin{cases} \xi'(x') = \exp\{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\}\xi(x) \\ \\ \zeta'(x') = \exp\{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\}\zeta(x) \end{cases} \tag{55}$$

である。これから、$\xi^\dagger(x)$ および $\zeta^\dagger(x)$ のローレンツ変換性は次式で与えられることがわかる。

$$\begin{cases} \xi'^\dagger(x') = \xi^\dagger(x)\exp\{+i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\} \\ \\ \zeta'^\dagger(x') = \zeta^\dagger(x)\exp\{+i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\} \end{cases} \tag{56}$$

上式を導く際に、$(e^X)^\dagger = e^{X^\dagger}$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ および $\boldsymbol{\sigma}^\dagger = \boldsymbol{\sigma}$ を用いた。

(55) および (56) から直ちに、$\xi^\dagger(x)\zeta(x)$ および $\zeta^\dagger(x)\xi(x)$ はローレンツ変換の下で不変、すなわち

$$\begin{aligned} \xi'^\dagger(x')\zeta'(x') &= \xi^\dagger(x)\zeta(x) \\ \zeta'^\dagger(x')\xi'(x') &= \zeta^\dagger(x)\xi(x) \end{aligned} \tag{57}$$

が成り立つことがわかる。

一方、$\xi^\dagger(x)\xi(x)$ と $\zeta^\dagger(x)\zeta(x)$ は、（例えば、$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ のとき）

$$\begin{aligned} \xi'^\dagger(x')\xi'(x') &= \xi^\dagger(x)\exp\{-\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\}\xi(x) \\ \zeta'^\dagger(x')\zeta'(x') &= \zeta^\dagger(x)\exp\{+\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}\}\zeta(x) \end{aligned} \tag{58}$$

となり、これらはスカラー量（ローレンツ不変量）ではないことがわかる。

check 6.7

カイラル表示では、

$$P_R = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_W^5) = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P_L = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_W^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix}$$

となることを示し、これらの表示を用いて (6.55) ～ (6.58) を具体的に確かめてみよう。

カイラル表示では、次のように γ^5 が対角化される。

$$\begin{aligned}
\gamma_W^5 &= i\gamma_W^0\gamma_W^1\gamma_W^2\gamma_W^3 \\
&= i\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_2 \\ I_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^1 \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix}} \\
&= i\begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \qquad (\because \sigma^2\sigma^3 = i\sigma^1, \quad (\sigma^1)^2 = I_2)
\end{aligned} \tag{59}$$

したがって、カイラル表示では、P_R と P_L は次式の対角行列で与えられる。

$$P_R = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_W^5) = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$P_L = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_W^5) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} \tag{61}$$

これらを用いて、教科書本文の (6.55)〜(6.58) を具体的に確かめる。

$$P_R + P_L = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = I_4 \implies (6.55a) \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
(P_R)^2 &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = P_R \\
(P_L)^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = P_L \\
&\implies (6.55b)
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
P_RP_L &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
P_LP_R &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&\implies (6.55c)
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_W^5 P_R &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = P_R \\
P_R\gamma_W^5 &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = P_R \\
&\implies (6.56a)
\end{aligned} \tag{65}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_W^5 P_L &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} = -P_L \\
P_L \gamma_W^5 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} = -P_L \qquad (66) \\
&\Longrightarrow (6.56b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_R &= P_R \psi = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \gamma_W^5 \psi_R = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \psi_R \qquad (67) \\
&\Longrightarrow (6.57a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_L &= P_L \psi = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \gamma_W^5 \psi_L = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta \end{pmatrix} = -\psi_L \qquad (68) \\
&\Longrightarrow (6.57b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_W^\mu P_R &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_W^\mu \\ \overline{\sigma}_W^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overline{\sigma}_W^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
P_L \gamma_W^\mu &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_W^\mu \\ \overline{\sigma}_W^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overline{\sigma}_W^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \gamma_W^\mu P_R = P_L \gamma_W^\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_W^\mu P_L &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_W^\mu \\ \overline{\sigma}_W^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_W^\mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
P_R \gamma_W^\mu &= \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_W^\mu \\ \overline{\sigma}_W^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_W^\mu \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \gamma_W^\mu P_L = P_R \gamma_W^\mu \\
&\Longrightarrow (6.58) \qquad (69)
\end{aligned}
$$

check 6.8

(6.60) と (6.61) は、カイラル表示をとると (6.47) と (6.48) にそれぞれ帰着することを確かめてみよう。

カイラル表示では

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta \end{pmatrix} \tag{70}$$

なので、

$$\psi_R \overset{P}{\longleftrightarrow} \psi_L \quad \Longrightarrow \quad \xi \overset{P}{\longleftrightarrow} \zeta \tag{71}$$

の対応が成り立ち、教科書本文の (6.60) は (6.47) に帰着する。

教科書本文の (6.61) はカイラル表示では

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma_W^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) \\ i\overline{\sigma}_W^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta \end{pmatrix} \quad - \quad m \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\
&\begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma_W^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) \\ i\overline{\sigma}_W^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad - \quad m \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{72}$$

となるので、教科書本文の (6.61) は (6.48) に帰着する。

check 6.9

(6.62) を確かめてみよう。

【ヒント】(6.62) を導く際に、次の関係式 $C(\gamma^5)^T = \gamma^5 C$, $(\gamma^5)^* = (\gamma^5)^T$, $\gamma^0\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^0$, $\bar{\psi}^T = (\gamma^0\psi)^*$ を用いよ。

以下で、教科書本文の (6.62a) および (6.62b)、すなわち

$$(\psi^C)_R \;=\; (\psi_L)^C \tag{73}$$

$$(\psi^C)_L \;=\; (\psi_R)^C \tag{74}$$

を確かめる。

まずは、(73) 右辺から出発して (73) 左辺を導く。

$$\begin{aligned}
(73)\text{ 右辺} &= (\psi_L)^C \\
&= C\,\overline{\psi_L}^T \qquad (\because\ \psi^C \equiv C\overline{\psi}^T\,) \\
&= C\left((\psi_L)^\dagger\gamma^0\right)^T \qquad (\because\ \overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0\,) \\
&= C(\gamma^0)^T(\psi_L)^* \qquad (\because\ (\psi^\dagger)^T = \psi^*\,) \\
&= C(\gamma^0)^T\left(\frac{I_4 - \gamma^5}{2}\psi\right)^* \qquad \left(\because\ \psi_L \equiv \frac{I_4 - \gamma^5}{2}\psi\right) \\
&= C(\gamma^0)^T\left(\frac{I_4 - (\gamma^5)^T}{2}\right)\psi^* \qquad (\because (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5\ \Rightarrow\ (\gamma^5)^* = (\gamma^5)^T) \\
&= C\frac{I_4 + (\gamma^5)^T}{2}(\gamma^0)^T\psi^* \\
&\qquad (\because \gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5 \Rightarrow (\gamma^5\gamma^0)^T = -(\gamma^0\gamma^5)^T \Rightarrow (\gamma^0)^T(\gamma^5)^T = -(\gamma^5)^T(\gamma^0)^T) \\
&= \frac{I_4 + \gamma^5}{2}C(\gamma^0)^T\psi^* \qquad (\because C(\gamma^5)^T = \gamma^5 C) \\
&= \frac{I_4 + \gamma^5}{2}C(\gamma^0\psi)^* \qquad (\because (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \Rightarrow (\gamma^0)^T = (\gamma^0)^*)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{I_4+\gamma^5}{2} C\overline{\psi}^T \qquad (\because \overline{\psi}^T = (\gamma^0\psi)^*) \\
&= \frac{I_4+\gamma^5}{2} \psi^C \qquad (\because \psi^C = C\overline{\psi}^T) \\
&= (\psi^C)_R \\
&= (73)\ \text{左辺}
\end{aligned} \tag{75}
$$

同様にして、(74) も確かめることができる。

最後に (75) の導出の際に用いた公式 $C(\gamma^5)^T = \gamma^5 C$ を以下で証明しておく。

$$
\begin{aligned}
C(\gamma^5)^T &= C(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^T \\
&= Ci(\gamma^3)^T(\gamma^2)^T(\gamma^1)^T(\gamma^0)^T \\
&= i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)(-\gamma^0)C \\
&\qquad (\because C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu \ \Rightarrow\ C(\gamma^\mu)^T = -\gamma^\mu C) \\
&= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 C \\
&= (-1)^{(3+2+1)} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 C \\
&= +\gamma^5 C
\end{aligned} \tag{76}
$$

check 6.10

(6.66) を確かめてみよう。

ここでは、双 1 次形式に対する以下のカイラル分解の公式を確かめる。

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L \tag{77}$$

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi_R}\gamma^\mu\psi_R + \overline{\psi_L}\gamma^\mu\psi_L \tag{78}$$

$$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \overline{\psi_L}\sigma^{\mu\nu}\psi_R + \overline{\psi_R}\sigma^{\mu\nu}\psi_L \tag{79}$$

$$\overline{\psi}\gamma^5\psi = \overline{\psi_L}\psi_R - \overline{\psi_R}\psi_L \tag{80}$$

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \overline{\psi_R}\gamma^\mu\psi_R - \overline{\psi_L}\gamma^\mu\psi_L \tag{81}$$

これらの証明には、教科書本文の関係式 (6.65)、すなわち

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi_R} &= \overline{\psi}P_L \\
\overline{\psi_L} &= \overline{\psi}P_R
\end{aligned} \tag{82}
$$

を用いる。ここで、$\overline{\psi_R}$、$\overline{\psi_L}$ は ψ_R、ψ_L のディラック共役、すなわち

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi_R} &\equiv (\psi_R)^\dagger\gamma^0 \\
\overline{\psi_L} &\equiv (\psi_L)^\dagger\gamma^0
\end{aligned} \tag{83}
$$

であることに注意しておく。

あと必要なものは、カイラル射影演算子 $P_R = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma^5)$、$P_L = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma^5)$ の次の性質である。

$$P_R + P_L = I_4 \tag{84}$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (P_L)^2 = P_L \tag{85}$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0 \tag{86}$$

$$\gamma^5 P_R = P_R \gamma^5 = P_R, \quad \gamma^5 P_L = P_L \gamma^5 = -P_L \tag{87}$$

$$\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu \tag{88}$$

(77)〜(81) の証明は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\psi &= \overline{\psi}(P_R + P_L)\psi \qquad (\because (84)) \\
&= \overline{\psi}P_R P_R \psi + \overline{\psi}P_L P_L \psi \qquad (\because (85)) \\
&= \overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L \qquad (\because (82))
\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^\mu\psi &= \overline{\psi}\gamma^\mu(P_R + P_L)\psi \qquad (\because (84)) \\
&= \overline{\psi}\gamma^\mu P_R P_R \psi + \overline{\psi}\gamma^\mu P_L P_L \psi \qquad (\because (85)) \\
&= \overline{\psi}P_L \gamma^\mu P_R \psi + \overline{\psi}P_R \gamma^\mu P_L \psi \qquad (\because (88)) \\
&= \overline{\psi_R}\gamma^\mu\psi_R + \overline{\psi_L}\gamma^\mu\psi_L \qquad (\because (82))
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}(P_R + P_L)\psi \qquad (\because (84)) \\
&= \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu} P_R P_R \psi + \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu} P_L P_L \psi \qquad (\because (85)) \\
&= \overline{\psi}P_R \sigma^{\mu\nu} P_R \psi + \overline{\psi}P_L \sigma^{\mu\nu} P_L \psi \qquad (\because (88)) \\
&= \overline{\psi_L}\sigma^{\mu\nu}\psi_R + \overline{\psi_R}\sigma^{\mu\nu}\psi_L \qquad (\because (82))
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^5\psi &= \overline{\psi}\gamma^5(P_R + P_L)\psi \qquad (\because (84)) \\
&= \overline{\psi}P_R\psi - \overline{\psi}P_L\psi \qquad (\because (87)) \\
&= \overline{\psi}P_R P_R \psi - \overline{\psi}P_L P_L \psi \qquad (\because (85)) \\
&= \overline{\psi_L}\psi_R - \overline{\psi_R}\psi_L \qquad (\because (82))
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi &= \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5(P_R + P_L)\psi \qquad (\because (84)) \\
&= \overline{\psi}\gamma^\mu P_R \psi - \overline{\psi}\gamma^\mu P_L \psi \qquad (\because (87)) \\
&= \overline{\psi}\gamma^\mu P_R P_R \psi - \overline{\psi}\gamma^\mu P_L P_L \psi \qquad (\because (85)) \\
&= \overline{\psi}P_L \gamma^\mu P_R \psi - \overline{\psi}P_R \gamma^\mu P_L \psi \qquad (\because (88)) \\
&= \overline{\psi_R}\gamma^\mu\psi_R - \overline{\psi_L}\gamma^\mu\psi_L \qquad (\because (82))
\end{aligned} \tag{93}$$

check 6.11

$m = 0$ のときは、カイラル変換 (6.69) のもとでディラック方程式 (6.67) は不変、$m \neq 0$ のときは不変にならないことを確かめよ。また、電磁場中のディラック方程式 (6.67) を用いて、次式が成り立つことを証明してみよう。

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \tag{6.71}$$

【ヒント】 カイラル対称性を確かめるために必要な公式は、$\gamma^\mu e^{i\beta\gamma^5} = e^{-i\beta\gamma^5}\gamma^\mu$ である。この式を導くためには、$e^{i\beta\gamma^5}$ をテイラー展開して $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$ を用いればよい。(6.71) を証明するために必要なものは、ディラック方程式 (6.67) とそのエルミート共役をとった式、および $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$, $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$ である。

まず電磁場中のディラック方程式

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - mI_4]\psi = 0 \tag{94}$$

の左辺が、カイラル変換

$$\psi \to e^{i\beta\gamma^5}\psi \tag{95}$$

の下で、どのように変換するかを調べる。

そのために、次の公式を証明しておく。

$$\gamma^\mu e^{i\beta\gamma^5} = e^{-i\beta\gamma^5}\gamma^\mu \tag{96}$$

指数関数型行列の定義と $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$ の関係を使うと

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu e^{i\beta\gamma^5} &= \gamma^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta\gamma^5)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!}\gamma^\mu \underbrace{\gamma^5\gamma^5\cdots\gamma^5}_{n\text{ 個}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\beta)^n}{n!}(-\gamma^5)(-\gamma^5)\cdots(-\gamma^5)\gamma^\mu \qquad (\because \gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\beta\gamma^5)^n}{n!}\right)\gamma^\mu \\
&= e^{-i\beta\gamma^5}\gamma^\mu
\end{aligned} \tag{97}$$

となり、(96) が導かれる。

公式 (96) を用いて、(94) の左辺がカイラル変換の下でどのように変換するかを調べてみる。

$$\begin{aligned}
[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - mI_4]\psi &\xrightarrow{\text{カイラル変換}} [i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - mI_4]\left(e^{i\beta\gamma^5}\psi\right) \\
&\overset{(96)}{=} e^{-i\beta\gamma^5}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - me^{2i\beta\gamma^5}]\psi \\
&\overset{(94)}{=} e^{-i\beta\gamma^5}[mI_4 - me^{2i\beta\gamma^5}]\psi \\
&= e^{-i\beta\gamma^5}m[I_4 - e^{2i\beta\gamma^5}]\psi \\
&\neq 0 \qquad (m \neq 0,\ e^{2i\beta\gamma^5} \neq I_4)
\end{aligned} \tag{98}$$

となり、$m \neq 0$（および $e^{2i\beta\gamma^5} \neq I_4$）の場合は、(94) はカイラル変換の下で不変ではないことがわかる。

次に電磁場中のディラック方程式 (94) を用いて、次式が成り立つことを証明する。

$$\partial_\mu j^{5\mu} = 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi, \quad j^{5\mu} \equiv \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \tag{99}$$

このために、(94) のディラック共役の式を求めておく。

$$\begin{aligned}
& [i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - mI_4]\psi = 0 \\
\overset{\dagger}{\Longrightarrow} \quad & -i(\partial_\mu\psi)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - i(-iqA_\mu)\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0 \\
\overset{\times\gamma^0}{\Longrightarrow} \quad & -i(\partial_\mu\psi)^\dagger \underbrace{(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0}_{\gamma^0\gamma^\mu} - i(-iqA_\mu)\psi^\dagger \underbrace{(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0}_{\gamma^0\gamma^\mu} - m\psi^\dagger\gamma^0 = 0 \\
\Longrightarrow \quad & -i(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu - i(-iqA_\mu)\overline{\psi}\gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0
\end{aligned} \tag{100}$$

以下で、(94) と (100) を用いて (99) を証明する。

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^{5\mu} &= \partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\right) \\
&= (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\gamma^5\psi + \overline{\psi}\underbrace{\gamma^\mu\gamma^5}_{-\gamma^5\gamma^\mu}\partial_\mu\psi \\
&= \left[(iqA_\mu)\overline{\psi}\gamma^\mu + im\overline{\psi}\right]\gamma^5\psi - \overline{\psi}\gamma^5[-\gamma^\mu iqA_\mu - im]\psi \qquad (\because (94), (100)) \\
&= iqA_\mu\overline{\psi}(\underbrace{\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu}_{0})\psi + 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi \\
&= 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi
\end{aligned} \tag{101}$$

check 6.12

マヨラナ表示の γ 行列 (6.80) は、反交換関係 $\{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I_4$, および、$(\gamma_M^0)^\dagger = \gamma_M^0$, $(\gamma_M^j)^\dagger = -\gamma_M^j$ $(j = 1, 2, 3)$, $(\gamma_M^\mu)^* = -\gamma_M^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ を満たすことを確かめよ。またマヨラナ表示では、$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu$ を満たす荷電共役行列 C を $C = -\gamma_M^0 = C^{-1}$ ととればよいことを示し、(6.82) を確かめてみよう。

マヨラナ表示での γ 行列は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
\gamma_M^0 &\equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad & \gamma_M^1 &\equiv \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix} \\
\gamma_M^2 &\equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad & \gamma_M^3 &\equiv \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{102}$$

マヨラナ表示の最大の特徴は、すべての γ_M^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ が純虚数行列、すなわち

$$(\gamma_M^\mu)^* = -\gamma_M^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{103}$$

を満たすことである。実際は、純虚数行列で与えられる γ 行列をマヨラナ表示とよぶ。また、パウリ行列がエルミートであることから直ちに、

$$(\gamma_M^0)^\dagger = \gamma_M^0, \quad (\gamma_M^j)^\dagger = -\gamma_M^j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{104}$$

が導かれる。

γ 行列の定義式でもある反交換関係

$$\{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4 \tag{105}$$

が成り立つことは、次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^0, \gamma_M^0\} &= 2(\gamma_M^0)^2 = 2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= 2I_4 \qquad (\because (\sigma^2)^2 = I_2) \\
&= 2\eta^{00} I_4 \qquad (\because \eta^{00} = 1)
\end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^1, \gamma_M^1\} &= 2(\gamma_M^1)^2 = 2\begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= -2I_4 \qquad (\because (\sigma^3)^2 = I_2) \\
&= 2\eta^{11} I_4 \qquad (\because \eta^{11} = -1)
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^2, \gamma_M^2\} &= 2(\gamma_M^2)^2 = 2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ +\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ +\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= -2I_4 \qquad (\because (\sigma^2)^2 = I_2) \\
&= 2\eta^{22} I_4 \qquad (\because \eta^{22} = -1)
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^3, \gamma_M^3\} &= 2(\gamma_M^3)^2 = 2\begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \\
&= -2I_4 \qquad (\because (\sigma^1)^2 = I_2) \\
&= 2\eta^{33} I_4 \qquad (\because \eta^{33} = -1)
\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^0, \gamma_M^1\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma^2\sigma^3 \\ i\sigma^2\sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma^3\sigma^2 \\ i\sigma^3\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= 0 \qquad (\because \sigma^2\sigma^3 = -\sigma^3\sigma^2)
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^0, \gamma_M^2\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\sigma^2)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(\sigma^2)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\sigma^2)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{111}$$

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_M^0,\gamma_M^3\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i\sigma^2\sigma^1 \\ -i\sigma^2\sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i\sigma^1\sigma^2 \\ -i\sigma^1\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= 0 \qquad (\because \sigma^1\sigma^2 = -\sigma^2\sigma^1)
\end{aligned} \tag{112}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_M^1,\gamma_M^2\} &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i\sigma^3\sigma^2 \\ i\sigma^3\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i\sigma^2\sigma^3 \\ i\sigma^2\sigma^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= 0 \qquad (\because \sigma^2\sigma^3 = -\sigma^3\sigma^2)
\end{aligned} \tag{113}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_M^1,\gamma_M^3\} &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^3\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^3\sigma^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^1\sigma^3 \end{pmatrix} \\
&= 0 \qquad (\because \sigma^3\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^3)
\end{aligned} \tag{114}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\gamma_M^2,\gamma_M^3\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma^2\sigma^1 \\ -i\sigma^2\sigma^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\sigma^1\sigma^2 \\ -i\sigma^1\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
&= 0 \qquad (\because \sigma^2\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^2)
\end{aligned} \tag{115}
$$

次に、マヨラナ表示では荷電共役行列を $C_M \equiv -\gamma_M^0 = C_M^{-1}$ ととればよいこと、すなわち、$C_M(\gamma_M^\mu)^T C_M^{-1} = -\gamma_M^\mu \quad (\mu = 0,1,2,3)$ を満たすことを確かめる。

$$
\begin{aligned}
C_M(\gamma_M^0)^T C_M^{-1} &= (-\gamma_M^0)(\gamma_M^0)^T(-\gamma_M^0) \\
&= -\gamma_M^0 \underbrace{\gamma_M^0\gamma_M^0}_{I_4} \qquad (\because (\gamma_M^0)^T = ((\gamma_M^0)^\dagger)^* = (\gamma_M^0)^* = -\gamma_M^0) \\
&= -\gamma_M^0
\end{aligned} \tag{116}
$$

$$
\begin{aligned}
C_M(\gamma_M^j)^T C_M^{-1} &= (-\gamma_M^0)(\gamma_M^j)^T(-\gamma_M^0) \\
&= \gamma_M^0 \underbrace{\gamma_M^j\gamma_M^0}_{-\gamma_M^0\gamma_M^j} \qquad (\because (\gamma_M^j)^T = ((\gamma_M^j)^\dagger)^* = (-\gamma_M^j)^* = \gamma_M^j) \\
&= -\gamma_M^j \qquad (j = 1,2,3)
\end{aligned} \tag{117}
$$

最後に、マヨラナ表示では波動関数 ψ の荷電共役 ψ^C は、

$$\psi^C \equiv C_M \overline{\psi}^T = \psi^* \tag{118}$$

で与えられることを確かめる。この結果から直ちにマヨラナ条件 $\psi_M = (\psi_M)^C$ は簡単に

$$\psi_M = (\psi_M)^* \tag{119}$$

となることがわかる。(118) の証明は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\psi^C &= C_M \overline{\psi}^T \\
&= (-\gamma^0_M)(\psi^\dagger \gamma^0_M)^T \qquad (\because\ C_M = -\gamma^0_M) \\
&= -\gamma^0_M (\gamma^0_M)^T (\psi^\dagger)^T \\
&= -\gamma^0_M (-\gamma^0_M) \psi^* \qquad (\because (\gamma^0_M)^T = -\gamma^0_M) \\
&= \psi^* \qquad (\because (\gamma^0_M)^2 = I_4)
\end{aligned} \tag{120}$$

鏡の問題

下の文書を見てもらいたい。そこに書かれた文字は、鏡に映されたものだ。

> この文章は、鏡に映してみると
> 左右がひっくり返って、正しく
> 読むことが出来る。

左右がひっくり返っているので、そのままでは読めない。しかし、右から左へ読んでいけばひっくり返った文字をなんとか読めるし、鏡に映せば左右がひっくり返って左から右へ元の正しい文章として読むことができる。このように、鏡は映ったものの左右を逆転する。

ここで簡単な質問に答えてもらいたい。

『鏡は左右を逆にするだけで、上下を逆にしないのはなぜか？』

上の鏡文字を見ると、文字は左右を逆転しているが、上の行は鏡文字の中でも上の行にあり、下の行は下のままである。鏡に映った “あなた” も、頭は上にあり足は下にある。確かに鏡は、左右を逆転させるが、上下は逆転させずそのままにしているようだ。

でもよく考えてほしい。鏡の表面は、まったくつるつるで平らである。右も左も、上も下も鏡は区別しているようにはみえない。事実、鏡を 90° 回転しても何の変化も起きない。かたくなに、左右のみを入れ替え、上下はそのままである。

あなたは、この鏡の不思議な性質について、誰もが納得できる説明を与えることができるだろうか？

M. ガードナー著「(新版) 自然界における左と右」(紀伊國屋書店、1992 年) で、この問題について詳しい議論がなされている。また、朝永振一郎も鏡の問題を「鏡の中の世界」(みすず書房、1995 年) と「鏡の中の物理学」(講談社、1976 年) で取り上げている。

鏡の問題『鏡は左右を逆にするだけで、上下を逆にしないのはなぜか？』の答は、実は、**鏡は上下、左右とも逆転していない**というのが、答である。では、何を逆転しているかというと、**鏡に対する前後 (鏡の面に対して垂直方向) を逆転している**のである。

答を聞いても、すぐには納得できない人もいるだろうし、わかったような気はするが、でも、何となく、もやもやした気持ちが残る人もいるだろう。「鏡は左右を逆転する」という主張は、実は、疑わしいことを、まず、納得してもらおう。

そのために、次の状況を想像してもらいたい。鏡に向かって、正面ではなく真横を向く姿勢をとってみよう。(この場合、鏡の左右は、あなたにとって前後にあたる。) このとき、あなたの左肩の側に鏡があるとしよう。あなたが右手を前に差し出せば、鏡の中の “あなた” は鏡の “奥” の方の手を前に差し出す。この状態であなたは、鏡のしていることは、鏡の面に対して垂直方向 (あなたにとっての左右) を逆転させるが、鏡の面に平行な方向は、そのまま像が映っていると思うだろう。つまり、(鏡の面に水平な) 左右も上下も鏡は何も逆転していないことになる。

さらに、別の実験として、今度は壁ではなく、床一面が鏡張りになっているところに、あ

なたが立っている場面を想像してもらおう。そのとき、あなたは、足下の鏡を見ると、床から逆さに“立っている”あなたの姿を見ることになる。このとき、あなたは、「鏡は左右を逆転している」などとは決して言わないだろう。そう、鏡は、前後 (今の場合は上下) を逆転しているのであって、左右や上下は何もしていないのだ。

上の二つの実験から、鏡が左右を逆転すると思いこんだのは、勘違いであることがわかる。鏡に向かって、あなたが**正面**を向いて鏡の像を見たとき、あなたが無意識におこなっていることは、鏡の中の像とあなた自身を重ねるために、あなたの体を 180° 回転させて、あなたと鏡の中の“あなた”を比べようとしているのである。つまり、前後の逆転を、左右の逆転に置き換えているのである。

これは、人間の体は左右がほぼ対称に作られているため、180° 回転したあなたと比べる方が、人間の意識としてわかりやすいからなのであろう。ひとたび、左右対称でない姿勢、真横を向いたり、あるいは、鏡の上に立った状態では、180° 回転させたあなたを想像する必要はなくなるので、鏡に映った姿を見て、左右が入れ替わったとは思わず、鏡の前後が反転したのだと、正しく認識できるのである。

ここまでの説明でも、まだ納得できない人がいるかもしれない。その人達のために、下の図を用意した。この図に描かれた文字を見れば、鏡は左右と上下を反転してはおらず、鏡の前後のみを反転していることが理解できると思う。

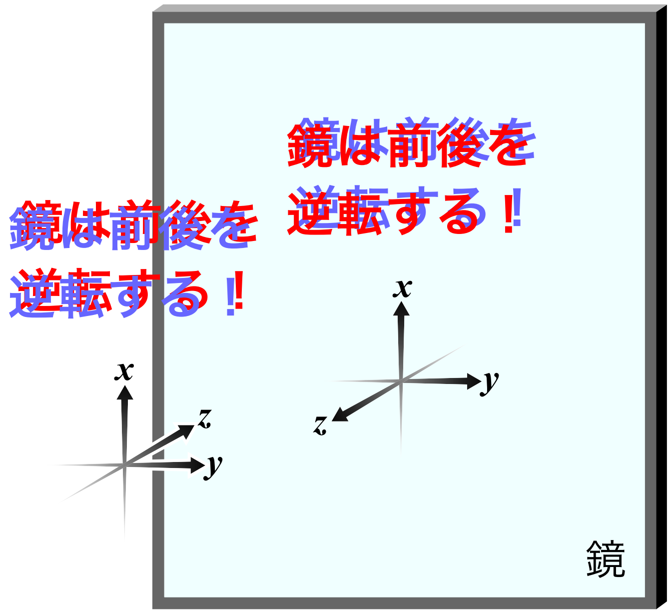

図 6.1 文字の左右、上下は変わっていないが、前面と後面の色が反転している。

では、最後に、鏡は左右を反転すると思い込んでいた人のために、なぜ、そのように信じてしまったかを、座標変換を用いて解説して、鏡の問題を終えることにしよう。

まず、鏡の前に、正面を向いて立っているところを想像してもらいたい。このとき、鏡のしていることは、図 6.1 で示されている z 軸方向の反転である。

$$\mathcal{P}_{鏡} \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \;. \tag{121}$$

さて、あなたが右手を上げると、鏡の中の人物は、“左手”を上げているように見える。このとき、あなたは、無意識のうちに、頭の中で次の**秘密**の操作を行っていることになる。

鏡の中の人物の上げている手が、右手なのか、左手なのかを判断するために、あなたは、鏡の中の人物と同じポーズをとろうとする。鏡の中の人物は、顔をこちらに向けて立っているので、あなたは、自分の体を 180° 回転させることになる。180° 回転して、鏡の中の人物と同じポーズをとったあなたは、あなたの左手が上がっているのを見て、鏡の中の人物は“左手”を上げていると判断したのである。

このように、鏡の中の人物と同じポーズをとるためには、体の中心を通る軸のまわりに、180° 回転する必要がある。図 6.1 の座標系では、x 軸まわりの 180° 回転に対応する。x 軸まわりの 180° 回転では、x 軸は何も変わらないが、y 軸と z 軸は反転することになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{x\text{ 軸まわりの }180^\circ\text{回転}} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \;. \tag{122}$$

鏡のおこなっている変換 (121) と、鏡の中の人物と同じポーズをとるために、あなたが (無意識に) おこなった変換 (122) を、続けておこなってみると次のような変換となる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{P}_{鏡}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \xrightarrow{x\text{ 軸まわりの }180^\circ\text{回転}} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} \;. \tag{123}$$

これで、鏡が左右を反転すると思い込んでしまった理由がおわかりであろう。鏡の中の人物と同じポーズをとるために、あなたが頭の中で無意識におこなった 180° 回転によって、z 軸方向の反転ではなく、y 軸方向の反転、すなわち、左右の反転に置き換わったのである。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第７章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2015/01/16
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第７章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 7.1 ∼ check 7.16 の解答例

check 7.1

次の恒等式

$$e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu e^{-iq\Lambda(x)} = \partial_\mu - iq\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big) \tag{7.4}$$

を証明して、電磁場中のディラック方程式 (7.2) とクライン–ゴルドン方程式 (2.27) は、(7.1)、(7.3)、および $\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\phi(x)$ の下で不変であることを確かめてみよう。

【ヒント】(7.4) の正確な意味は、任意関数 $f(x)$ に対して $e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu\{e^{-iq\Lambda(x)}f(x)\} = \{\partial_\mu - iq\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)\}f(x)$ が成り立つということである。

ヒントにしたがって、任意関数 $f(x)$ を右からかけた式

$$e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu\left(e^{-iq\Lambda(x)}f(x)\right) = \Big(\partial_\mu - iq\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)\Big)f(x) \tag{1}$$

を証明する。以下では左辺から出発して右辺を導く。

$$\begin{aligned}
e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu\left(e^{-iq\Lambda(x)}f(x)\right) &= e^{iq\Lambda(x)}\Big(e^{-iq\Lambda(x)}\left(\partial_\mu f(x)\right) + \underbrace{\big(\partial_\mu e^{-iq\Lambda(x)}\big)}_{-iq\left(\partial_\mu\Lambda(x)\right)e^{-iq\Lambda(x)}} f(x)\Big) \\
&= \partial_\mu f(x) - iq\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)f(x) \\
&= \Big(\partial_\mu - iq\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)\Big)f(x) \qquad (2)
\end{aligned}$$

$f(x)$ は任意関数なので、上式の両辺から $f(x)$ をはずしたものが

$$e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu e^{-iq\Lambda(x)} = \partial_\mu - iq\left(\partial_\mu\Lambda(x)\right) \tag{3}$$

である。あくまでも (1) が上の公式 (3) の正確な意味である。

公式 (3)（あるいは (1)）を用いて、電磁場中のディラック方程式とクライン–ゴルドン方程式

$$\big[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iqA_\mu(x)\right) - m\big]\psi(x) = 0 \tag{4}$$

$$\big[(\partial^\mu + i\tilde{q}A^\mu(x))(\partial_\mu + i\tilde{q}A_\mu(x)) + m^2\big]\phi(x) = 0 \tag{5}$$

のゲージ不変性を確かめる。ここでは一般性をもたせるために、q を $\psi(x)$ の電荷、$\tilde{q}$ を $\phi(x)$ の電荷とした。((5) は、教科書本文の (2.27) を相対論的形式に書き直したものである。)
$\psi(x), \phi(x), A_\mu(x)$ のゲージ変換は次式で与えられる。

$$\psi(x) \;\to\; \psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\psi(x) \tag{6}$$

$$\phi(x) \;\to\; \phi'(x) = e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)}\phi(x) \tag{7}$$

$$A_\mu(x) \;\to\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \tag{8}$$

このとき、(4) の左辺は次のように変換する。

$$
\begin{aligned}
&\big[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iqA_\mu(x)\right) - m\big]\psi(x) \\
&\quad \to \big[i\gamma^\mu\big(\partial_\mu + iqA'_\mu(x)\big) - m\big]\psi'(x) \\
&\quad\quad = \big[i\gamma^\mu\big(\partial_\mu + iq(A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x))\big) - m\big]e^{-iq\Lambda(x)}\psi(x) \\
&\quad\quad = e^{-iq\Lambda(x)}\left[i\gamma^\mu\left(e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu e^{-iq\Lambda(x)} + iqA_\mu(x) + iq\left(\partial_\mu\Lambda(x)\right)\right) - m\right]\psi(x) \\
&\quad\quad\quad\quad (\because\ i\gamma^\mu\partial_\mu\, e^{-iq\Lambda(x)} = e^{-iq\Lambda(x)}\, i\gamma^\mu\, e^{+iq\Lambda(x)}\partial_\mu\, e^{-iq\Lambda(x)}\ ) \\
&\quad\quad \overset{(3)}{=} e^{-iq\Lambda(x)}\big[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + iqA_\mu(x)\right) - m\big]\psi(x) \\
&\quad\quad \overset{(4)}{=} 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

したがって、ディラック方程式 (4) はゲージ変換の下で不変であることがわかる。

次に、クライン–ゴルドン方程式 (5) のゲージ不変性を確かめる。このとき、(5) の左辺は次のように変換する。

$$
\begin{aligned}
&\Big[\big(\partial^\mu + i\tilde{q}A^\mu(x)\big)\big(\partial_\mu + i\tilde{q}A_\mu(x)\big) + m^2\Big]\phi(x) \\
&\quad \to \Big[\big(\partial^\mu + i\tilde{q}A'^\mu(x)\big)\big(\partial_\mu + i\tilde{q}A'_\mu(x)\big) + m^2\Big]\phi'(x) \\
&\quad = \Big[\big(\partial^\mu + i\tilde{q}\big\{A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x)\big\}\big)\big(\partial_\mu + i\tilde{q}\big\{A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)\big\}\big) + m^2\Big]e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)}\phi(x) \\
&\quad = e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)}\Big[e^{i\tilde{q}\Lambda(x)}\Big(\partial^\mu + i\tilde{q}A^\mu(x) + i\tilde{q}\left(\partial^\mu\Lambda(x)\right)\Big)e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)} \\
&\quad\quad\quad \times e^{i\tilde{q}\Lambda(x)}\Big(\partial_\mu + i\tilde{q}A_\mu(x) + i\tilde{q}(\partial_\mu\Lambda(x))\Big)e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)} + m^2\Big]\phi(x) \\
&\quad\quad\quad (\because\ e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)}e^{+i\tilde{q}\Lambda(x)} = 1\text{ を挿入した。}) \\
&\quad = e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)}\Big[\Big(e^{i\tilde{q}\Lambda(x)}\partial^\mu e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)} + i\tilde{q}A^\mu(x) + i\tilde{q}(\partial^\mu\Lambda(x))\Big) \\
&\quad\quad\quad \times \Big(e^{i\tilde{q}\Lambda(x)}\partial_\mu e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)} + i\tilde{q}A_\mu(x) + i\tilde{q}(\partial_\mu\Lambda(x))\Big) + m^2\Big]\phi(x) \\
&\quad \overset{(3)}{=} e^{-i\tilde{q}\Lambda(x)}\Big[\big(\partial^\mu + i\tilde{q}A^\mu(x)\big)\big(\partial_\mu + i\tilde{q}A_\mu(x)\big) + m^2\Big]\phi(x) \\
&\quad \overset{(5)}{=} 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

したがって、クライン–ゴルドン方程式 (5) はゲージ変換の下で不変である。

check 7.2

次式で定義される行列の集合は、それぞれ群をなすことを確かめてみよう。

$$
\begin{aligned}
G_{O(N)} &= \Big\{R = N\times N\text{ 実行列}\ \Big|\ R^T R = RR^T = I_N\ \Big\} \\
G_{SO(N)} &= \Big\{R = N\times N\text{ 実行列}\ \Big|\ R^T R = RR^T = I_N\ ,\ \det R = 1\Big\} \\
G_{SL(N,\mathbb{C})} &= \Big\{M = N\times N\text{ 複素行列}\ \Big|\ \det M = 1\Big\}
\end{aligned}
$$

【注】 集合 $G_{O(N)}, G_{SO(N)}, G_{SL(N,\mathbb{C})}$ は、それぞれ**直交群 (orthogonal group)$O(N)$**、**特殊直交群 (special orthogonal group)$SO(N)$**、**複素特殊線形変換群 (complex special linear group)$SL(N,\mathbb{C})$** とよばれる。

以下で、(1) $G_{O(N)}$、(2) $G_{SO(N)}$、(3) $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ が群をなすことを確かめる。

(1) $G_{SO(N)} = \{R = N \times N$ 実行列 $| R^T R = R R^T = I_N\}$

$(\mathring{0})$ R_1, R_2 を $G_{O(N)}$ の任意の元とする。このとき、積 R_1R_2 は次の性質を満たす。

$$(R_1R_2)^T R_1R_2 = R_2^T \underbrace{R_1^T R_1}_{I_N} R_2 = R_2^T R_2 = I_N \qquad (\because\ (AB)^T = B^T A^T\ )$$

$$R_1R_2(R_1R_2)^T = R_1 \underbrace{R_2R_2^T}_{I_N} R_1^T = R_1R_1^T = I_N \qquad (\because\ (AB)^T = B^T A^T\ )$$

したがって、積 R_1R_2 は $G_{O(N)}$ の元である。

$(\mathring{1})$ 結合則は、行列の場合、自明に成り立つ。

$(\mathring{2})$ 単位行列 I_N は、$G_{O(N)}$ の任意の元 R に対して

$$RI_N = I_N R = R$$

および、

$$(I_N)^T I_N = I_N (I_N)^T = I_N$$

を満たすので、I_N は $G_{O(N)}$ の単位元である。

$(\mathring{3})$ $G_{O(N)}$ の任意の元 R の逆元 R^{-1} も $G_{O(N)}$ の元である。実際、$G_{O(N)}$ の場合は $R^{-1} = R^T$ で与えられることから、$R^{-1}(= R^T)$ は次式を満たす。

$$(R^{-1})^T R^{-1} = (R^T)^T R^T = RR^T = I_N$$

$$R^{-1}(R^{-1})^T = R^T (R^T)^T = R^T R = I_N$$

したがって、R^{-1} も $G_{O(N)}$ の元であることがわかる。

以上の $(\mathring{0})$〜$(\mathring{3})$ より、$G_{O(N)}$ は群をなすことがわかる。

(2) $G_{SO(N)} = \{R = N \times N$ 実行列 $| R^T R = R R^T = I_N, \det R = 1\}$

$(\mathring{0})$ R_1, R_2 を $G_{SO(N)}$ の任意の元とする。このとき、積 R_1R_2 は次の性質を満たす。

$$(R_1R_2)^T R_1R_2 = R_2^T \underbrace{R_1^T R_1}_{I_N} R_2 = R_2^T R_2 = I_N$$

$$R_1R_2(R_1R_2)^T = R_1 \underbrace{R_2R_2^T}_{I_N} R_1^T = R_1R_1^T = I_N$$

$$\det(R_1R_2) = \underbrace{\det(R_1)}_{1} \cdot \underbrace{\det(R_2)}_{1} = 1$$

したがって、積 R_1R_2 も $G_{SO(N)}$ の元である。(第 3 行目では、公式 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ を用いた。)

($\mathring{1}$) 結合則は、行列の場合、自明に成り立つ。

($\mathring{2}$) 単位行列 I_N は $G_{SO(N)}$ の任意の元 R に対して、

$$RI_N = I_N R = R$$

および

$$(I_N)^T I_N = I_N (I_N)^T = I_N$$

$$\det(I_N) = 1$$

を満たすので、I_N は $G_{SO(N)}$ の単位元である。

($\mathring{3}$) $G_{SO(N)}$ の任意の元 R の逆元 R^{-1} も $G_{SO(N)}$ の元である。実際、$G_{SO(N)}$ の場合は $R^{-1} = R^T$ で与えられることから、R^{-1} は次式を満たす。

$$(R^{-1})^T R^{-1} = (R^T)^T R^T = RR^T = I_N$$

$$R^{-1}(R^{-1})^T = R^T (R^T)^T = R^T R = I_N$$

$$\det R^{-1} = \det R^T = \det R = 1 \qquad (\because \det(M^T) = \det M)$$

したがって、R^{-1} も $G_{SO(N)}$ の元であることがわかる。

以上 ($\mathring{0}$)〜($\mathring{3}$) より、$G_{SO(N)}$ は群をなすことがわかる。

(3) $G_{SL(N,\mathbb{C})} = \{M = N \times N \text{ 複素行列} \mid \det M = 1\}$

($\mathring{0}$) $M_1,\ M_2$ を $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の任意の元とする。このとき、積 $M_1 M_2$ は次の性質を満たす。

$$\det(M_1 M_2) = \underbrace{\det M_1}_{1} \cdot \underbrace{\det M_2}_{1} = 1$$

したがって、積 $M_1 M_2$ も $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の元である。

($\mathring{1}$) 結合則は、行列の場合、自明に成り立つ。

($\mathring{2}$) 単位行列 I_N は、$G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の任意の元 M に対して、

$$MI_N = I_N M = M$$

および

$$\det I_N = 1$$

を満たすので、I_N は $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の単位元である。

($\mathring{3}$) $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の任意の元 M の逆元 M^{-1} も $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の元である。実際、$\det M = 1 \neq 0$ なので、M の逆行列 M^{-1} は存在し、

$$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = 1$$

を満たすので、M^{-1} も $G_{SL(N,\mathbb{C})}$ の元であることがわかる。ここで、最初の等号は次のように示される。

$$\begin{aligned} I_N = MM^{-1} \quad &\Longrightarrow \quad 1 = \det(MM^{-1}) = \det(M)\cdot\det(M^{-1}) \\ &\Longrightarrow \quad \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} \end{aligned}$$

以上 ($\mathring{0}$)〜($\mathring{3}$) より、$G_{SL(N,\mathbb{C})}$ は群をなすことがわかる。

check 7.3

ベーカー–キャンベル–ハウスドルフの公式 (7.28) の両辺をテイラー展開（あるいは log をとってからテイラー展開）することによって、両辺が（X, Y の 3 次まで）一致していることを確かめてみよう。

ベーカー–キャンベル–ハウスドロフの公式

$$e^X e^Y = \exp\left\{X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\big([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\big) + \cdots\right\} \tag{11}$$

を X、Y の 3 次まで、以下で確かめる。

まずは (11) 左辺を X, Y についてテイラー展開して X, Y の 3 次まで求める。

$$\begin{aligned} &e^X e^Y \\ &\quad = \left(I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots\right)\left(I + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \cdots\right) \\ &\quad = I + X + Y + \frac{X^2}{2!} + XY + \frac{Y^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^2}{2!}Y + X\frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} \\ &\qquad + (X, Y \text{ の 4 次以上の項}) \end{aligned} \tag{12}$$

次に (11) 右辺を X, Y についてテイラー展開して X, Y の 3 次まで求める。

$$
\begin{aligned}
&\exp\left\{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]+[Y,[Y,X]]\big)+\cdots\right\}\\
&\quad=I+\Big(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\big)+\cdots\Big)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2!}\Big(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\big)+\cdots\Big)^2\\
&\qquad\qquad\quad+\frac{1}{3!}\Big(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\big)+\cdots\Big)^3\\
&\qquad\qquad\quad+\cdots\\
&\quad=I+X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{2!}(X+Y)^2\\
&\qquad\quad+\frac{1}{12}\big([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\big)+\frac{1}{2!}(X+Y)\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}[X,Y](X+Y)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3!}(X+Y)^3+(X,Y\text{ の 4 次以上の項})\\
&\quad=I+X+Y+\frac{1}{2}\left(XY-YX+X^2+XY+YX+Y^2\right)\\
&\qquad\quad+\frac{1}{12}\Big\{X(XY-YX)-(XY-YX)X\\
&\qquad\qquad\qquad+Y(YX-XY)-(YX-XY)Y\\
&\qquad\qquad\qquad\quad+3(X+Y)(XY-YX)+3(XY-YX)(X+Y)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+2(X^3+X^2Y+XYX+YX^2+XY^2+YXY+Y^2X+Y^3)\Big\}\\
&\qquad\quad+(X,Y\text{ の 4 次以上の項})\\
&\quad=I+X+Y+\frac{1}{2}\left(X^2+2XY+Y^2\right)\\
&\qquad\quad+\frac{1}{12}\Big\{2X^3+(1+3+2)X^2Y+(-1-1-3+3+2)XYX\\
&\qquad\qquad\qquad+(1-3+2)YX^2+(1+3+2)XY^2\\
&\qquad\qquad\qquad\quad+(-1-1+3-3+2)YXY+(1-3+2)Y^2X+2Y^3\Big\}\\
&\qquad\quad+(X,Y\text{ の 4 次以上の項})\\
&\quad=I+X+Y+\frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2)+\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{2}X^2Y+\frac{1}{2}XY^2+\frac{1}{6}Y^3\\
&\qquad\quad+(X,Y\text{ の 4 次以上の項})
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(12) と (13) を見比べて、(11) が X、Y の 3 次まで成り立っていることがわかる。

上の計算では、X と Y は可換ではないので行列の順番に気をつけよう。例えば、$(X+Y)^2=X^2+2XY+Y^2$ とうっかり書いてしまいがちだが、正しくは、

$$(X+Y)^2=X^2+XY+YX+Y^2$$

である。

check 7.4

ヤコビの恒等式 $[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0$（check 3.3 参照）から、構造定数に対する次の条件式を導いてみよう。

$$\sum_{d=1}^{d_G} \left(f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} + f^{abd} f^{cde} \right) = 0 \tag{14}$$

この式を用いて、$\left(T^a_{\rm adj}\right)^{bc} \equiv i f^{bac}$ が交換関係 (7.26) を満たすことを確かめてみよう。ここで bc は行列の添字で、$T^a_{\rm adj}$ は $d_G \times d_G$ 行列（$SU(N)$ のときは $d_G = N^2 - 1$）である。

【注】 構造定数を用いて定義される表現 $T^a_{\rm adj}$ を**随伴表現 (adjoint representation)** とよぶ。これは、群 $SU(N)$ に限らず他の群でも同様に存在する表現である。

$[T^a, T^b] = i\sum_d f^{abd} T^d$ を用いて、ヤコビ恒等式の左辺 $[T^a,[T^b,T^c]] + [T^b,[T^c,T^a]] + [T^c,[T^a,T^b]]$ を以下で計算する。

$$\begin{aligned}
[T^a,[T^b,T^c]] &= [T^a, i\sum_{d=1}^{d_G} f^{bcd} T^d] \\
&= i\sum_{d=1}^{d_G} f^{bcd} [T^a, T^d] \\
&= -\sum_{d=1}^{d_G}\sum_{e=1}^{d_G} f^{bcd} f^{ade} T^e
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
[T^b,[T^c,T^a]] &= [T^b, i\sum_{d=1}^{d_G} f^{cad} T^d] \\
&= -\sum_{d=1}^{d_G}\sum_{e=1}^{d_G} f^{cad} f^{bde} T^e
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
[T^c,[T^a,T^b]] &= [T^c, i\sum_{d=1}^{d_G} f^{abd} T^d] \\
&= -\sum_{d=1}^{d_G}\sum_{e=1}^{d_G} f^{abd} f^{cde} T^e
\end{aligned} \tag{17}$$

これらをヤコビ恒等式に代入して、

$$-\sum_{d=1}^{d_G}\sum_{e=1}^{d_G} \left(f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} + f^{abd} f^{cde} \right) T^e = 0 \tag{18}$$

を得る。T^e は線型独立なので、その係数が 0 でなければならない。すなわち

$$\sum_{d=1}^{d_G} \left(f^{bcd} f^{ade} + f^{cad} f^{bde} + f^{abd} f^{cde} \right) = 0 \tag{19}$$

が成り立つ。

次に $d_G \times d_G$ 行列 $T^a_{\rm adj}$ を構造定数 f^{abc} から、

$$\left(T^a_{\rm adj}\right)^{bc} \equiv i f^{bac} \quad (a,b,c = 1,2,\cdots,d_G) \tag{20}$$

で定義する。ここで $\left(T^a_{\rm adj}\right)^{bc}$ は $d_G \times d_G$ 行列 $T^a_{\rm adj}$ の bc 成分を表す。このとき、

$$[T^a_{\rm adj}, T^b_{\rm adj}] = i \sum_{d=1}^{d_G} f^{abd} T^d_{\rm adj} \tag{21}$$

を満たすことを以下で確かめる。((20) で定義される $T^a_{\rm adj}$ $(a = 1,2,\cdots,d_G)$ を随伴表現とよぶ。)

$$\begin{aligned}
\left[T^a_{adj}, T^b_{adj}\right]^{ce} &= \left(T^a_{\rm adj}T^b_{\rm adj} - T^b_{\rm adj}T^a_{\rm adj}\right)^{ce} \\
&= \sum_{d=1}^{d_G}\left((T^a_{\rm adj})^{cd}(T^b_{\rm adj})^{de} - (T^b_{\rm adj})^{cd}(T^a_{\rm adj})^{de}\right) \\
&\overset{(20)}{=} \sum_{d=1}^{d_G}\left((if^{cad})(i\underbrace{f^{dbe}}_{-f^{bde}}) - (i\underbrace{f^{cbd}}_{-f^{bcd}})(i\underbrace{f^{dae}}_{-f^{ade}})\right) \\
&= \sum_{d=1}^{d_G}\left(f^{cad}f^{bde} + f^{bcd}f^{ade}\right) \\
&\overset{(19)}{=} \sum_{d=1}^{d_G}\left(-f^{abd}f^{cde}\right) \\
&\overset{(20)}{=} \sum_{d=1}^{d_G} if^{abd}(T^d_{\rm adj})^{ce} \\
&\Longrightarrow \quad \left[T^a_{\rm adj}, T^b_{\rm adj}\right] = i\sum_{d=1}^{d_G} f^{abd}T^d_{\rm adj} \quad \Longrightarrow \quad (21)
\end{aligned}$$

check 7.5

$\{T^a,\ a = 1,2,\cdots,N^2-1\}$ を $\mathrm{tr}(T^aT^b) = \lambda\delta^{ab}$ (λ は実数)を満たすように選ぶと便利である。この基底の下で、構造定数 f^{abc} が $f^{abc} = -\frac{i}{\lambda}\,\mathrm{tr}\big([\,T^a\,,\,T^b\,]\,T^c\big)$ で与えられることを示せ。この結果とトレースの性質 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$、および、交換関係の定義 $[A,B] = AB - BA$ を用いて、f^{abc} が (abc) に関して完全反対称であることを証明してみよう。

まず構造定数が $f^{abc} = -\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}([T^a,T^b]T^c)$ で与えられることを示す。

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}(\underbrace{[T^a,T^b]}_{i\sum_d f^{abd}T^d}\ T^c) &= \frac{1}{\lambda}\sum_d f^{abd}\underbrace{\mathrm{tr}(T^dT^c)}_{\lambda\delta^{dc}} \\
&= f^{abc}
\end{aligned} \tag{22}$$

次に、f^{abc} が (abc) に関して完全反対称であることを確かめる。このことを示すには、となり合う 2 つの添字に対して反対称、すなわち

$$
\begin{aligned}
f^{bac} &= -f^{abc} && (23)\\
f^{acb} &= -f^{abc} && (24)
\end{aligned}
$$

であることを確かめれば十分である。

$$
\begin{aligned}
f^{bac} &\overset{(22)}{=} -\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}\Bigg(\underbrace{[T^b, T^a]}_{-[T^a,T^b]}T^c\Bigg)\\
&= -f^{abc} \quad\Longrightarrow\quad (23) && (25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{acb} &= -\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}\Bigg(\underbrace{[T^a, T^c]}_{T^aT^c-T^cT^a}\ T^b\Bigg)\\
&= -\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}\left(T^aT^cT^b - T^cT^aT^b\right)\\
&= -\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}\left(T^bT^aT^c - T^aT^bT^c\right) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA))\\
&= +\frac{i}{\lambda}\mathrm{tr}\left([T^a, T^b]T^c\right)\\
&= -f^{abc} \quad\Longrightarrow\quad (24) && (26)
\end{aligned}
$$

!

ここでは生成子 T^a が $\mathrm{tr}(T^aT^b) = \lambda\delta^{ab}$ を満たすことを仮定したが、このような基底が本当に選べるのかは自明ではない。このような基底が取れることの証明は、線形代数の理解度の check にもなるので、是非トライしてみよう。(下にその証明を与えておく。)

まず、任意の基底 $\{T'^a, a = 1, 2, \cdots, N^2 - 1\}$ から出発し、$(N^2-1)\times(N^2-1)$ 行列 M を次式で定義する。

$$
M^{ab} \equiv \mathrm{tr}(T'^aT'^b) \qquad (a, b = 1, 2, \cdots, N^2 - 1) \qquad (27)
$$

ここでは ab が行列の添字で、M^{ab} は行列 M の ab 成分を表すことに注意しておく。この行列は実対称行列、すなわち

$$
\begin{aligned}
M^{ab} &= M^{ba} && (28)\\
(M^{ab})^* &= M^{ab} && (29)
\end{aligned}
$$

であることを以下で示す。

$$
\begin{aligned}
M^{ba} &= \mathrm{tr}(T'^bT'^a)\\
&= \mathrm{tr}(T'^aT'^b) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA))\\
&= M^{ab} \quad\Longrightarrow\quad (28) && (30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(M^{ab})^* &= (\mathrm{tr}(T'^aT'^b))^*\\
&= \mathrm{tr}((T'^a)^*(T'^b)^*)\\
&= \mathrm{tr}(((T'^a)^*(T'^b)^*)^T) \qquad (\because \mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A))\\
&= \mathrm{tr}((T'^b)^\dagger(T'^a)^\dagger) \qquad (\because (AB)^T = B^TA^T,\ (A^*)^T = A^\dagger)\\
&= \mathrm{tr}(T'^bT'^a) \qquad (\because (T'^a)^\dagger = T'^a)\\
&= \mathrm{tr}(T'^aT'^b) \qquad (\because \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA))\\
&= M^{ab} \quad\Longrightarrow\quad (29) && (31)
\end{aligned}
$$

行列 M は実対称行列なので、直交行列 R ($R^T = R^{-1}$) を用いて対角化することができる。すなわち、

$$RMR^T = M_{\rm diag} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N^2-1} \end{pmatrix} \tag{32}$$

となる。上式を行列の成分で書き表すと

$$\begin{aligned} &\sum_{c,d} (R)^{ac} M^{cd} (R^T)^{db} = (M_{\rm diag})^{ab} \\ \overset{(27)(32)}{\Longrightarrow} \quad & \sum_{c,d} R^{ac} {\rm tr}(T'^c T'^d) R^{bd} = \lambda_a \delta^{ab} \qquad (\because\ (R^T)^{db} = R^{bd}) \\ \Longrightarrow \quad & {\rm tr}\Big(\big(\sum_c R^{ac} T'^c \big) \big(\sum_d R^{bd} T'^d \big) \Big) = \lambda_a \delta^{ab} \end{aligned}$$

($\because R^{ac}$は成分で書かれているので、単なる係数であり行列ではないことに注意。したがって、トレースの中に入れることができる。)

$$\Longrightarrow \quad {\rm tr}(\tilde{T}^a \tilde{T}^b) = \lambda_a \delta^{ab} \tag{33}$$

ここで、

$$\tilde{T}^a \equiv \sum_c R^{ac} T'^c \tag{34}$$

と定義した。R^{ac} は実係数（$(R^{ac})^* = R^{ac}$）であることに注意しておく。$(R^{ac})^* = R^{ac}$ なので、T'^a と同様に、$\tilde{T}^a$ もエルミートでトレースレスとなる。(証明は下に与えた。)

$$\begin{aligned} (\tilde{T}^a)^\dagger &= \Big(\sum_c R^{ac} T'^c \Big)^\dagger \\ &= \sum_c (R^{ac})^* (T'^c)^\dagger \\ &= \sum_c R^{ac} T'^c \qquad \Big(\because (R^{ac})^* = R^{ac},\ (T'^c)^\dagger = T'^c \Big) \\ &= \tilde{T}^a \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} {\rm tr}(\tilde{T}^a) &= {\rm tr}\Big(\sum_c R^{ac} T'^c \Big) \\ &= \sum_c R^{ac} {\rm tr}(T'^c) \\ &= 0 \qquad (\because {\rm tr}(T'^c) = 0) \end{aligned} \tag{36}$$

したがって、(34) は、エルミート・トレースレス行列の基底 $\{T'^c\}$ から線形結合を取り直して、新たなエルミート・トレースレス行列の基底 $\{\tilde{T}^a\}$ を定義したことに対応する。

$\tilde{T}^a$ からさらに規格化された基底

$$T^a \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_a}} \tilde{T}^a \qquad (a = 1, 2, \cdots, N^2 - 1) \tag{37}$$

を定義すると、

$$\begin{aligned} {\rm tr}(T^a T^b) &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_a \lambda_b}} {\rm tr}(\tilde{T}^a \tilde{T}^b) \\ &\overset{(33)}{=} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_a \lambda_b}} \lambda_a \delta^{ab} \\ &= \lambda \delta^{ab} \end{aligned} \tag{38}$$

となり、${\rm tr}(T^a T^b) = \lambda \delta^{ab}$ を満たす基底が得られたことになる。

ひとつやり残したことがある。それは λ_a が正の量、すなわち、

$$\lambda_a > 0 \qquad (a = 1, 2, \cdots, N^2 - 1) \tag{39}$$

の証明である。なぜなら、この条件が成り立っていないと、(37) の定義が ill-defined になってしまうからである。(T^a がエルミートでなくなる！) (39) を以下で確かめよう。

(35) で確かめたように $\tilde{T}^a$ は $N\times N$ エルミート行列なので、$N\times N$ ユニタリー行列 U で対角化可能である。

$$U\tilde{T}^a U^\dagger = \tilde{T}^a_{\rm diag} = \begin{pmatrix} t^a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t^a_N \end{pmatrix} \tag{40}$$

$\tilde{T}^a$ はエルミート行列なので、固有値 t^a_i $(i=1,2,\cdots,N)$ は実数である。この関係を用いると

$$\begin{aligned}
{\rm tr}(\tilde{T}^a\tilde{T}^a) &= {\rm tr}(\tilde{T}^a U^\dagger U\tilde{T}^a U^\dagger U) \qquad (\because U^\dagger U = I_N) \\
&= {\rm tr}(U\tilde{T}^a U^\dagger U\tilde{T}^a U^\dagger) \qquad (\because {\rm tr}(AB)={\rm tr}(BA)) \\
&\overset{(40)}{=} {\rm tr}(\tilde{T}^a_{\rm diag}\tilde{T}^a_{\rm diag}) \\
&\overset{(40)}{=} {\rm tr}\left[\begin{pmatrix} (t^a_1)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (t^a_2)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (t^a_N)^2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \sum_{i=1}^N (t^a_i)^2 \\
&\overset{(33)}{\Longrightarrow} \lambda_a = \sum_{i=1}^N (t^a_i)^2 > 0 \qquad (a=1,2,\cdots,N^2-1)
\end{aligned} \tag{41}$$

したがって、(39) が確かめられた。

check 7.6

$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ $(a=1,2,3)$ が ${\rm tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ および (7.33) を満たすことを確かめよ。また、check 7.5 の結果を参考にして、次元 d_G の数（＝独立な T^a の数）が 3 の群 G の構造定数 f^{abc} は、（$f^{abc}\neq 0$ ならば）本質的に $SU(2)$ の構造定数に等しいことを証明してみよう。

【注】このことから、群 $SU(2)$ と $SO(3)$ は同じ代数を持つことがわかる。

まず、$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ $(a=1,2,3)$ とおいたとき、${\rm tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ を確かめる。

$$\begin{aligned}
{\rm tr}(T^aT^b) &= \frac{1}{4}{\rm tr}(\sigma^a\sigma^b) \\
&= \frac{1}{4}{\rm tr}\left(\frac{1}{2}(\sigma^a\sigma^b+\sigma^b\sigma^a)\right) \qquad (\because {\rm tr}(AB)={\rm tr}(BA)\,) \\
&= \frac{1}{4}{\rm tr}(\delta^{ab}I_2) \qquad (\because \{\sigma^a,\sigma^b\} = 2\delta^{ab}I_2) \\
&= \frac{1}{2}\delta^{ab} \qquad (\because {\rm tr}(I_2)=2)
\end{aligned} \tag{42}$$

群の次元が 3 の構造定数 f^{abc} は、（f^{abc} が恒等的に 0 でなければ）本質的に $SU(2)$ の構造定数に等しいことを以下で示す。

check 7.5 より、

$${\rm tr}(T^aT^b) = \lambda\delta^{ab} \quad (a,b=1,2,3)$$

となるように群の生成子 T^a を規格直交化しておくと、群の構造定数 f^{abc} は (abc) に関して完全反対称である。このとき、f^{abc} は 3 階の完全反対称テンソルであり、a,b,c は 1 から 3

まで走るので、5.4.4 項での議論を参考にすれば、f^{abc} は 3 階の完全反対称テンソル ε^{abc} に比例することがわかる。すなわち、

$$f^{abc} = \alpha\,\varepsilon^{abc} \quad (\alpha\text{は比例定数}) \tag{43}$$

群 $SU(2)$ の構造定数は ε^{abc} に比例することが分かっており、群の次元が 3 の構造定数は本質的に $SU(2)$ の構造定数に等しいことがわかる。

この結果は、次元が 3 の（非可換）群は、$SU(2)$ と同じ代数を持つことを意味する。例えば、回転群 $SO(3)$ は次元 3 なので、$SU(2)$ と同じ代数構造を持つことがわかる。実際、check 7.7 の 3×3 行列 $T^a_{j=1}(a = 1, 2, 3)$ は、群 $SO(3)$ の生成子とみなすことができ、それらは $su(2)$ 代数

$$[T^a, T^b] = i \sum_{c=1}^{3} \varepsilon^{abc} T^c \tag{44}$$

を満たすことが示される。

check 7.7

次の 3×3 行列 $\{T^a_{j=1},\ a = 1, 2, 3\}$ は $su(2)$ 代数 (7.33) を満たすことを確かめてみよう。

$$T^1_{j=1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2_{j=1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^3_{j=1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

【注】 T^3 の対角成分を見てもらえばわかるように、$T^a_{j=1/2} \equiv \sigma^a/2$ $(a = 1, 2, 3)$ はスピン $j = 1/2$ 表現、$T^a_{j=1}$ $(a = 1, 2, 3)$ はスピン $j = 1$ 表現に対応する。一般に $(2j+1) \times (2j+1)$ 行列を用いて、$su(2)$ 代数 (7.33) を満たすスピン j 表現 T^a_j $(a = 1, 2, 3)$ を構成することができる。

具体的に計算する。

$$
\begin{aligned}
T^1_{j=1}T^2_{j=1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & -i/2 \end{pmatrix} \\
T^2_{j=1}T^1_{j=1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & i/2 \end{pmatrix} \\
T^2_{j=1}T^3_{j=1} &= \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T^3_{j=1}T^2_{j=1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
T^3_{j=1}T^1_{j=1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
T^1_{j=1}T^3_{j=1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[T^1_{j=1}, T^2_{j=1}] &= \begin{pmatrix} i/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & -i/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & i/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = iT^3_{j=1} \\
[T^2_{j=1}, T^3_{j=1}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = iT^1_{j=1} \\
[T^3_{j=1}, T^1_{j=1}] &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = iT^2_{j=1} \qquad (45)
\end{aligned}
$$

これらの交換関係から

$$\left[T^a_{j=1}, T^b_{j=1}\right] = i\sum_{c=1}^{3}\varepsilon^{abc}T^c_{j=1}$$

が成り立つことがわかる。

check 7.8

(7.40) の要請から、ゲージ場の変換が (7.41) で与えられることを示し、非可換ゲージ変換 (7.36) および (7.41) の下で、方程式 (7.44) が不変であることを確かめてみよう。

まず、共変微分の変換性

$$D'_\mu\Psi'(x) = U(x)D_\mu\Psi(x) \tag{46}$$

から、ゲージ場の変換性

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x) \tag{47}$$

を導く。

(46) を共変微分の定義にしたがって、ゲージ場を用いて書き表すと

$$\left(\partial_\mu + igA'_\mu(x)\right)\Psi'(x) = U(x)\left(\partial_\mu + igA_\mu(x)\right)\Psi(x) \tag{48}$$

となる。上辺左辺を $\Psi'(x) = U(x)\Psi(x)$ を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}(48)\text{ 左辺} &= \left(\partial_\mu + igA'_\mu(x)\right)U(x)\Psi(x)\\ &= U(x)\left(\partial_\mu + U^{-1}(x)(\partial_\mu U(x)) + igU^{-1}(x)A'_\mu(x)U(x)\right)\Psi(x)\end{aligned}$$

これが (48) の右辺と等しいので、次の関係式が成り立たなければならない。

$$\begin{aligned}&U^{-1}(x)\partial_\mu U(x) + igU^{-1}(x)A'_\mu(x)U(x) = igA_\mu(x)\\ &\quad\Rightarrow\quad U^{-1}(x)A'_\mu(x)U(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{ig}U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)\\ &\quad\Rightarrow\quad A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x)\end{aligned} \tag{49}$$

次に $\Psi'(x) = U(x)\Psi(x)$ と (49) の変換の下で次の方程式

$$[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + igA_\mu(x)\right) - m]\Psi(x) = 0 \tag{50}$$

が不変であることを確かめる。

$$\begin{aligned}\left[i\gamma^\mu\big(\overbrace{\partial_\mu + igA'_\mu(x)}^{D'_\mu}\big) - m\right]\Psi'(x) &= \left[i\gamma^\mu D'_\mu - m\right]\Psi'(x)\\ &\overset{(46)}{=} U(x)\left[i\gamma^\mu D_\mu - m\right]\Psi(x)\\ &\overset{(50)}{=} 0\end{aligned} \tag{51}$$

したがって、(50) はゲージ変換の下で不変である。

check 7.9

方程式が大域的変換 $\Psi(x) \ \to \ U\,\Psi(x)$ の下で不変ならば、方程式の中の微分 ∂_μ を全て共変微分 D_μ におきかえることによって、その方程式は局所的変換 $\Psi(x) \ \to \ U(x)\,\Psi(x)$ の下での不変性を持つことを考察してみよう。

$\Psi(x), \partial_\mu\Psi(x), \partial_\mu\partial_\nu\Psi(x), \cdots$ からなる方程式を考えてみよう。

$$F\left[\Psi(x), \partial_\mu\Psi(x), \partial_\mu\partial_\nu\Psi(x), \cdots\right] = 0 \tag{52}$$

この方程式が次の大域的 $SU(N)$ 変換

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = U\Psi(x) \qquad (U \in SU(N)) \tag{53}$$

の下で不変としよう。すなわち、

$$\begin{aligned}
&F\left[\Psi(x), \partial_\mu\Psi(x), \partial_\mu\partial_\nu\Psi(x), \cdots\right] = 0 \\
&\quad \Rightarrow \quad F\left[U\Psi(x), U\partial_\mu\Psi(x), U\partial_\mu\partial_\nu\Psi(x), \cdots\right] = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

が成り立っていると仮定する。ここで、$U \in SU(N)$ は時空座標 x^μ に依存していないので、∂_μ と U は可換であることを用いた。

具体的には、例えば $\Psi(x), \partial_\mu\Psi(x), \partial_\mu\partial^\mu\Psi(x) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Psi(x)$ からなる、次の方程式

$$\partial_\mu\partial^\mu\Psi(x) + m^2\Psi(x) + \lambda_1\big(\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\big)\Psi(x) + \lambda_2\big(\Psi^\dagger(x)\partial_\mu\Psi(x)\big)\partial^\mu\Psi(x) = 0 \tag{55}$$

は大域的 $SU(N)$ 変換 (53) の下での不変性を持つ。

実際、

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu\partial^\mu\Psi'(x) + m^2\Psi'(x) + \lambda_1\big(\Psi'^\dagger(x)\Psi'(x)\big)\Psi'(x) + \lambda_2\big(\Psi'^\dagger(x)\partial_\mu\Psi'(x)\big)\partial^\mu\Psi'(x) \\
&\quad = \quad \partial_\mu\partial^\mu(U\Psi(x)) + m^2(U\Psi(x)) + \lambda_1\left((U\Psi(x))^\dagger(U\Psi(x))\right)(U\Psi(x)) \\
&\qquad\qquad + \lambda_2\left((U\Psi(x))^\dagger\,\partial_\mu(U\Psi(x))\right)\partial^\mu\,(U\Psi(x)) \\
&\quad = \quad U\left[\partial_\mu\partial^\mu\Psi(x) + m^2\Psi(x) + \lambda_1\left(\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\right)\Psi(x) + \lambda_2\left(\Psi^\dagger(x)\partial_\mu\Psi(x)\right)\partial^\mu\Psi(x)\right] \\
&\qquad\qquad (\because U^\dagger U = I_N,\ \partial_\mu \text{と}\ U\ \text{は可換。}) \\
&\quad \overset{(55)}{=} \quad 0
\end{aligned} \tag{56}$$

が成り立つ。

(52) で

$$X(x) \equiv \Psi(x), \quad X_\mu(x) \equiv \partial_\mu\Psi(x), \quad X_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu\partial_\nu\Psi(x), \cdots \tag{57}$$

とおいて、(52) を書き換えておくと、 (54) の不変性は、

$$\begin{aligned}
&F\left[X(x), X_\mu(x), X_{\mu\nu}(x), \cdots\right] = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \quad F\left[UX(x), UX_\mu(x), UX_{\mu\nu}(x), \cdots\right] = 0
\end{aligned} \tag{58}$$

におきかわる。このとき、上式では $X(x), X_\mu(x), X_{\mu\nu}(x), \cdots$ はそれぞれ独立な場と考えてよいことに注意しておく。実際、(55) の例でみてみると、(55) を (57) の量を使って書き表すと

$$\eta^{\mu\nu} X_{\mu\nu}(x) + m^2 X(x) + \lambda_1 \big(X^\dagger(x) X(x)\big) X(x) + \lambda_2 \big(X^\dagger(x) X_\mu(x)\big) X^\mu(x) = 0 \tag{59}$$

となり、次の大域的 $SU(N)$ 変換

$$\begin{aligned} X(x) &\longrightarrow X'(x) = U X(x) \\ X_\mu(x) &\longrightarrow X'_\mu(x) = U X_\mu(x) \\ X_{\mu\nu}(x) &\longrightarrow X'_{\mu\nu}(x) = U X_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \tag{60}$$

の下で不変であることがわかる。このとき、$X(x), X_\mu(x), X_{\mu\nu}(x)$ が (59) でそれぞれ独立な場と考えても、不変性の証明には影響しない。

ここで、関数 $F[X(x), X_\mu(x), X_{\mu\nu}(x), \cdots]$ は (59) のように微分 ∂_μ を含まない（微分はすべて、$X(x), X_\mu(x), X_{\mu\nu}(x), \cdots$ に吸収した）とすれば、(58) の不変性は、局所的 $SU(N)$（ゲージ）不変性に拡張できることがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} & F[X(x), X_\mu(x), X_{\mu\nu}(x), \cdots] = 0 \\ \Longrightarrow \quad & F[U(x)X(x), U(x)X_\mu(x), U(x)X_{\mu\nu}(x), \cdots] = 0 \end{aligned} \tag{61}$$

ここで、$U(x)$ は $SU(N)$ に属する任意関数である。((59) を考えてみれば、大域的不変性が局所的不変性に（自明に）拡張できることがわかるだろう。)

上の議論で明らかになったことは、大域的な変換

$$\begin{aligned} X(x) &\longrightarrow X'(x) = U X(x) \\ X_\mu(x) &\longrightarrow X'_\mu(x) = U X_\mu(x) \\ X_{\mu\nu}(x) &\longrightarrow X'_{\mu\nu}(x) = U X_{\mu\nu}(x) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{62}$$

で不変ならば、次の局所的変換

$$\begin{aligned} X(x) &\longrightarrow X'(x) = U(x) X(x) \\ X_\mu(x) &\longrightarrow X'_\mu(x) = U(x) X_\mu(x) \\ X_{\mu\nu}(x) &\longrightarrow X'_{\mu\nu}(x) = U(x) X_{\mu\nu}(x) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{63}$$

の下でも不変ということである。これらの変換は、これまで議論してきたように、微分 ∂_μ を共変微分 D_μ でおきかえることによって実現される。すなわち、

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \tag{64}$$

の下で次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
D_\mu \Psi(x) &\longrightarrow D'_\mu \Psi'(x) = U(x) D_\mu \Psi(x) \\
D_\mu D_\nu \Psi(x) &\longrightarrow D'_\mu D'_\nu \Psi'(x) = U(x) D_\mu D_\nu \Psi(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{65}
$$

したがって、$F\left[\Psi(x), D_\mu \Psi(x), D_\mu D_\nu \Psi(x)\right] = 0$ は $SU(N)$ ゲージ変換 (64) の下で不変となる。

check 7.10

$\Psi(x)$ のゲージ変換性は、ここで考えたものが唯一ではない。例えば、$\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ を $N \times N$ エルミート・トレースレス行列だとすると、$\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ のゲージ変換性を $\Psi_{\mathrm{ad}}(x) \to \Psi'_{\mathrm{ad}}(x) = U(x)\Psi_{\mathrm{ad}}(x)U^{-1}(x)$ と定義することが可能になる。このとき共変微分 D_μ は、$D_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ が $\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ と同じゲージ変換性 $D'_\mu \Psi'_{\mathrm{ad}}(x) = U(x)\big(D_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x)\big)U^{-1}(x)$ を持つものとして定義される。ここで、$\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ に対する共変微分を $D_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x) \equiv \partial_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x) + ig\big[A_\mu(x), \Psi_{\mathrm{ad}}(x)\big]$ と定義するならば、$D_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ は $\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ と同じゲージ変換性を持つことを確かめてみよう。ただし、ゲージ場 $A_\mu(x)$ の変換は (7.41) で与えられるものとする。

【ヒント】 $0 = \partial_\mu(UU^{-1}) = (\partial_\mu U)U^{-1} + U(\partial_\mu U^{-1})$ を用いよ。本文で与えた N 成分ベクトル $\Psi(x)$ は群 $SU(N)$ の**基本表現 (fundamental representation)** とよばれ、$\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ は**随伴表現**とよばれるものである。ゲージ群の添字をつけるとすると、基本表現に対しては Ψ^j $(j = 1, \cdots, N)$ と上つきに、随伴表現に対しては $(\Psi_{\mathrm{ad}})^j{}_k$ $(j, k = 1, \cdots, N)$ と上下に添字をつけるのがよいだろう。（では、その理由はどうしてであろうか？）基本表現と随伴表現以外にも群の表現は無数に存在する。群の表現の理解のためには、群論の詳しい知識が必要となるので、ここではこれ以上深入りしないことにする。

$\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ のゲージ変換性が次式で与えられているものとする。

$$
\Psi'_{\mathrm{ad}}(x) = U(x)\Psi_{\mathrm{ad}}(x)U^{-1}(x) \tag{66}
$$

（ここで $\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ の添え字 ad は随伴表現（adjoint representation）を表す文字であり、行列の足ではないので注意してもらいたい。）このとき、

$$
D_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x) \equiv \partial_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x) + ig\left[A_\mu(x), \Psi_{\mathrm{ad}}(x)\right] \tag{67}
$$

がゲージ変換の下で、$\Psi_{\mathrm{ad}}(x)$ と同じ変換性、すなわち

$$
D'_\mu \Psi'_{\mathrm{ad}}(x) = U(x)\left(D_\mu \Psi_{\mathrm{ad}}(x)\right)U^{-1}(x) \tag{68}
$$

となることを以下で確かめる。

$$
\begin{aligned}
D'_\mu \Psi'_{\rm ad}(x) &= \partial_\mu \Psi'_{\rm ad}(x) + ig\left[A'_\mu(x), \Psi'_{\rm ad}(x)\right] \\
&= \partial_\mu\left(U(x)\Psi_{\rm ad}(x)U^{-1}(x)\right) \\
&\quad + ig\left[U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(x)\right)U(x)^{-1},\ U(x)\Psi_{\rm ad}(x)U^{-1}(x)\right] \\
&= (\partial_\mu U(x))\Psi_{\rm ad}(x)U^{-1}(x) + U(x)(\partial_\mu \Psi_{\rm ad}(x))U^{-1}(x) + U(x)\Psi_{\rm ad}(x)(\partial_\mu U^{-1}(x)) \\
&\qquad + igU(x)A_\mu(x)\Psi_{\rm ad}(x)U^{-1}(x) - (\partial_\mu U(x))\Psi_{\rm ad}(x)U^{-1}(x) \\
&\qquad\quad - igU(x)\Psi_{\rm ad}(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + U(x)\Psi_{\rm ad}(x)U^{-1}(x)\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x) \\
&= U(x)\Big(\left(\partial_\mu \Psi_{\rm ad}(x)\right) + ig\left[A_\mu(x), \Psi_{\rm ad}(x)\right]\Big)U^{-1}(x) \\
&\quad + U(x)\Psi_{\rm ad}(x)\Big(\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) + U^{-1}(x)\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x)\Big) \\
&= U(x)\Big(\left(\partial_\mu \Psi_{\rm ad}(x)\right) + ig\left[A_\mu(x), \Psi_{\rm ad}(x)\right]\Big)U^{-1}(x) \\
&\quad \left(\begin{array}{lll} \because U(x)U^{-1}(x) = I_N & \Rightarrow & \partial_\mu\left(U(x)U^{-1}(x)\right) = 0 \\ & \Rightarrow & \left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x) + U(x)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) = 0 \\ & \Rightarrow & U^{-1}(x)\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x) + \partial_\mu U^{-1}(x) = 0 \end{array}\right) \\
&= U(x)\left(D_\mu \Psi_{\rm ad}(x)\right)U^{-1}(x) \\
&\Rightarrow (68)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

check 7.11

(7.45) で与えられるバリオンが、$SU(3)$ ゲージ変換の下で不変であることを確かめてみよう。

【ヒント】 5.4.4 節での議論を参考にして、$\sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} U^c{}_{c'} = \det U \cdot \varepsilon_{a'b'c'}$ を証明せよ。また、$U \in SU(3)$ ならば、$\det U = 1$ であることに注意せよ。

クォーク 3 体 $q_1q_2q_3$ からなるバリオン

$$
B = \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, q_1^a q_2^b q_3^c \tag{70}
$$

は、$SU(3)$ ゲージ変換（$U \in SU(3)$）

$$
q_j'^a = \sum_{a'=1}^{3} U^a{}_{a'} q_j^{a'} \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{71}
$$

の下で不変であることを以下で示す。（ここでは、クォークを q, q', q'' と書き表す代わりに、ゲージ変換 $q \to q' = Uq$ と混同しないように q_1, q_2, q_3 とした。）

バリオン B のゲージ不変性は、次の公式

$$
\sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} U^c{}_{c'} = \det U \times \varepsilon_{a'b'c'} \tag{72}
$$

を用いれば、次のように簡単に示すことができる。

$$
\begin{aligned}
B' &= \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\, q_1'^a\, q_2'^b\, q_3'^c \\
&= \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} \left(\sum_{a'=1}^{3} U^a{}_{a'} q_1^{a'}\right) \left(\sum_{b'=1}^{3} U^b{}_{b'} q_2^{b'}\right) \left(\sum_{c'=1}^{3} U^c{}_{c'} q_3^{c'}\right) \\
&= \sum_{a',b',c'=1}^{3} \underbrace{\left(\sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} U^c{}_{c'}\right)}_{\det U \times \varepsilon_{a'b'c'} \quad (\because (72))} q_1^{a'} q_2^{b'} q_3^{c'} \\
&= \sum_{a',b',c'=1}^{3} \varepsilon_{a'b'c'}\, q_1^{a'}\, q_2^{b'}\, q_3^{c'} \qquad (\because U \in SU(3) \Rightarrow \det U = 1) \\
&= B
\end{aligned} \tag{73}
$$

公式 (72) は、(72) の左辺

$$
M_{a'b'c'} \equiv \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} U^c{}_{c'} \tag{74}
$$

が $(a'b'c')$ に関して完全反対称であることを確かめれば、5.4.4 項と同様の議論によって (72) が成り立つことがわかる。$M_{a'b'c'}$ が $(a'b'c')$ に関して完全反対称であることは、次の反対称性を確かめれば十分である。

$$
M_{b'a'c'} = -M_{a'b'c'} \tag{75}
$$

$$
M_{a'c'b'} = -M_{a'b'c'} \tag{76}
$$

以下で上式を確かめる。

$$
\begin{aligned}
M_{b'a'c'} &= \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{b'} U^b{}_{a'} U^c{}_{c'} \\
&\overset{a \leftrightarrow b}{=} \sum_{a,b,c=1}^{3} \underbrace{\varepsilon_{bac}}_{-\varepsilon_{abc}} \underbrace{U^b{}_{b'} U^a{}_{a'}}_{U^a{}_{a'} U^b{}_{b'}} U^c{}_{c'} \\
&= -\sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} U^c{}_{c'} \\
&= -M_{a'b'c'} \quad \Rightarrow \quad (75)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{a'c'b'} &= \sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{a'} U^b{}_{c'} U^c{}_{b'} \\
&\overset{b\leftrightarrow c}{=} \sum_{a,b,c=1}^{3} \underbrace{\varepsilon_{acb}}_{-\varepsilon_{abc}} U^a{}_{a'} \underbrace{U^c{}_{c'} U^b{}_{b'}}_{U^b{}_{b'} U^c{}_{c'}} \\
&= -\sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} U^a{}_{a'} U^b{}_{b'} U^c{}_{c'} \\
&= -M_{a'b'c'} \quad \Rightarrow \quad (76)
\end{aligned}
$$

check 7.12

7.4 節での議論を参考にして、$\binom{u_L}{d_L}$, u_R, d_R, $\binom{\nu_{eL}}{e_L^-}$, e_R^-、および G_μ, W_μ, B_μ がそれぞれ $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)_Y$ ゲージ理論の下でどのような変換をするか、具体的に書き下せ。また、それぞれのゲージ変換の下でクォーク・レプトンの方程式 (7.53) が不変であることを確かめてみよう。

【ヒント】例えば、$\binom{u_L}{d_L}$ のゲージ変換性は次式で与えられる。

$$
\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(3)} \begin{pmatrix} U_3(x) u_L \\ U_3(x) d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2)} \begin{pmatrix} U_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \xrightarrow{U(1)_Y} e^{-i(g_1/2)(1/3)\Lambda(x)} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}
$$

ここで、$U_3(x) \in SU(3)$, $U_2(x) \in SU(2)$, $\Lambda(x)$ は任意関数である。

まず、$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, u_R, d_R, \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, e_R^-, G_\mu, W_\mu, B_\mu$ のそれぞれについて、$SU(3), SU(2), U(1)_Y$ ゲージ変換性を与えておく。

$SU(3)$ **ゲージ変換** ($U_3(x) \in SU(3)$)

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(3)} \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3(x)u_L \\ U_3(x)d_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_R &\xrightarrow{SU(3)} u'_R = U_3(x)u_R \\ d_R &\xrightarrow{SU(3)} d'_R = U_3(x)d_R \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e^-_L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(3)} \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'^-_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e^-_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^-_R &\xrightarrow{SU(3)} e'^-_R = e^-_R \\ G_\mu &\xrightarrow{SU(3)} G'_\mu = U_3(x)G_\mu U_3^{-1}(x) + \frac{i}{g_3}\left(\partial_\mu U_3(x)\right) U_3^{-1}(x) \\ W_\mu &\xrightarrow{SU(3)} W'_\mu = W_\mu \\ B_\mu &\xrightarrow{SU(3)} B'_\mu = B_\mu \end{aligned} \tag{77}$$

<u>$SU(2)$ **ゲージ変換** $(U_2(x) \in SU(2))$</u>

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2)} \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_R &\xrightarrow{SU(2)} u'_R = u_R \\ d_R &\xrightarrow{SU(2)} d'_R = d_R \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e^-_L \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2)} \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'^-_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e^-_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^-_R &\xrightarrow{SU(2)} e'^-_R = e^-_R \\ G_\mu &\xrightarrow{SU(2)} G'_\mu = G_\mu \\ W_\mu &\xrightarrow{SU(2)} W'_\mu = U_2(x)W_\mu U_2^{-1}(x) + \frac{i}{g_2}\left(\partial_\mu U_2(x)\right) U_2^{-1}(x) \\ B_\mu &\xrightarrow{SU(2)} B'_\mu = B_\mu \end{aligned} \tag{78}$$

ここで、W_μ と $U_2(x)$ はともに 2×2 行列で表されているので、W_μ の変換性をより正確に書くと

$$\begin{pmatrix} W_\mu \end{pmatrix} \xrightarrow{SU(2)} \begin{pmatrix} W'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2^{-1}(x) \end{pmatrix} + \frac{i}{g_2}\begin{pmatrix} \partial_\mu U_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2^{-1}(x) \end{pmatrix} \tag{79}$$

である。ここで、$\begin{pmatrix} W_\mu \end{pmatrix}$ は教科書本文の (7.48) の 2×2 行列を表す。

$U(1)_Y$ ゲージ変換 ($e^{-i\frac{g_1}{2}Y\Lambda(x)} \in U(1)$)

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \xrightarrow{U(1)_Y} \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{1}{3}\Lambda(x)} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_R &\xrightarrow{U(1)_Y} u'_R = e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{4}{3}\Lambda(x)} u_R \\ d_R &\xrightarrow{U(1)_Y} d'_R = e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{-2}{3}\Lambda(x)} d_R \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \xrightarrow{U(1)_Y} \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e_L'^- \end{pmatrix} = e^{-i\frac{g_1}{2}(-1)\Lambda(x)} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_R^- &\xrightarrow{U(1)_Y} e_R'^- = e^{-i\frac{g_1}{2}(-2)\Lambda(x)} e_R^- \\ G_\mu &\xrightarrow{U(1)_Y} G'_\mu = G_\mu \\ W_\mu &\xrightarrow{U(1)_Y} W'_\mu = W_\mu \\ B_\mu &\xrightarrow{U(1)_Y} B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \Lambda(x) \end{aligned} \tag{80}$$

クォーク・レプトンの方程式は次式で与えられる。

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) B_\mu \right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = 0 \tag{81}$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) B_\mu \right\} u_R = 0 \tag{82}$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) B_\mu \right\} d_R = 0 \tag{83}$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2}(-1) B_\mu \right\} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} = 0 \tag{84}$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + i\frac{g_1}{2}(-2) B_\mu \right\} e_R^- = 0 \tag{85}$$

以下では、$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ および u_R に対する方程式（(81), (82)）が $SU(3), SU(2), U(1)_Y$ ゲージ変換の下で不変であることを確かめる。他の方程式の不変性については、全く同様に確かめることができる。

$SU(3)$ ゲージ不変性

ゲージ場 W_μ と B_μ は $SU(3)$ ゲージ変換の下で不変なので、(81) と (82) の方程式が $SU(3)$ ゲージ変換の下で不変であることを示すには、次の $SU(3)$ ゲージ変換性を確かめれば十分である。

$$(\partial_\mu + ig_3 G'_\mu) \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = U_3(x)(\partial_\mu + ig_3 G_\mu) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tag{86}$$

$$(\partial_\mu + ig_3 G'_\mu) u'_R = U_3(x)(\partial_\mu + ig_3 G_\mu) u_R \tag{87}$$

まず、(86) を確かめる。

$$
\begin{aligned}
&\big(\partial_\mu + ig_3 G'_\mu\big)\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(77)}{=} \quad \left(\partial_\mu + ig_3\left[U_3 G_\mu U_3^{-1} + \frac{i}{g_3}\left(\partial_\mu U_3\right)U_3^{-1}\right]\right)\begin{pmatrix} U_3 u_L \\ U_3 d_L \end{pmatrix} \\
&= \quad U_3\Big(\partial_\mu + U_3^{-1}\left(\partial_\mu U_3\right) + ig_3 G_\mu - U_3^{-1}\left(\partial_\mu U_3\right)\Big)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&\qquad \left(\because\ \partial_\mu\begin{pmatrix} U_3 u_L \\ U_3 d_L \end{pmatrix} = U_3\left(\partial_\mu + U_3^{-1}\partial_\mu U_3\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right) \\
&= \quad U_3\big(\partial_\mu + ig_3 G_\mu\big)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad (86)
\end{aligned}
\tag{88}
$$

同様に、(87) を確かめる。

$$
\begin{aligned}
&\big(\partial_\mu + ig_3 G'_\mu\big)u'_R \\
&\overset{(77)}{=} \quad \left(\partial_\mu + ig_3\left[U_3 G_\mu U_3^{-1} + \frac{i}{g_3}\left(\partial_\mu U_3\right)U_3^{-1}\right]\right)\left(U_3 u_R\right) \\
&= \quad U_3\big(\partial_\mu + U_3^{-1}\left(\partial_\mu U_3\right) + ig_3 G_\mu - U_3^{-1}\left(\partial_\mu U_3\right)\big)u_R \\
&= \quad U_3\big(\partial_\mu + ig_3 G_\mu\big)u_R \\
&\Longrightarrow \quad (87)
\end{aligned}
\tag{89}
$$

ゲージ変換の下で、(86) や (87) のように変換するようにゲージ変換性は決められているので、ある意味、(86) と (87) はゲージ変換の定義でもある。

(86) と (87) が確かめられたのなら、(81) と (82) の $SU(3)$ ゲージ不変性は、次のようにして簡単に確かめられる。

$$
\begin{aligned}
&i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3 G'_\mu + ig_2 \underbrace{W'_\mu}_{W_\mu} + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\underbrace{B'_\mu}_{B_\mu}\right\}\begin{pmatrix} u'_R \\ d'_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(77)(86)}{=} \quad U_3(x)\underbrace{\left[i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3 G_\mu + ig_2 W_\mu + \frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B_\mu\right\}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right]}_{=0} \\
&= \quad 0
\end{aligned}
\tag{90}
$$

$$
\begin{aligned}
&i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3 G'_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\underbrace{B'_\mu}_{B_\mu}\right\}u'_R \\
&\overset{(77)(87)}{=} \quad U_3(x)\underbrace{\left[i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu\right\}u_R\right]}_{=0} \\
&= \quad 0
\end{aligned}
\tag{91}
$$

$SU(2)$ ゲージ不変性

ゲージ場 G_μ と B_μ は $SU(2)$ ゲージ変換の下で不変なので、(81) と (82) の方程式が $SU(2)$ ゲージ変換の下で不変であることを示すには、次の $SU(2)$ ゲージ変換性が確かめられれば十分である。

$$\left(\partial_\mu + ig_2 W'_\mu\right)\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = \Big(U_2(x)\Big)\left(\partial_\mu + ig_2 W_\mu\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tag{92}$$

(注：u_R は $SU(2)$ ゲージ変換の下で不変なので、(82) の $SU(2)$ ゲージ不変性は自明である。また、(78) の下でコメントしたように、上式での W_μ は正確には 2×2 行列で与えられている。) $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ と W_μ の $SU(2)$ ゲージ変換性は (92) が成り立つように決められているので、ここでは (92) の確認は省略する。

(92) が確かめられれば、(81) と (82) の $SU(2)$ ゲージ不変性は簡単に確かめられる。

$$\begin{aligned}
& i\gamma^\mu\Bigg\{\partial_\mu + ig_3 \underbrace{G'_\mu}_{G_\mu} + ig_2 W'_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\underbrace{B'_\mu}_{B_\mu}\Bigg\}\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(92)}{=} \Big(U_2(x)\Big)\underbrace{\left[i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3 G_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right]}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
& i\gamma^\mu\Bigg\{\partial_\mu + ig_3 \underbrace{G'_\mu}_{G_\mu} + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\underbrace{B'_\mu}_{B_\mu}\Bigg\}\underbrace{u'_R}_{u_R} \\
&= \underbrace{i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu\right\}u_R}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{94}$$

$U(1)_Y$ ゲージ不変性

ゲージ場 G_μ と W_μ は $U(1)_Y$ 変換の下で不変なので、(81) と (82) の方程式が $U(1)_Y$ ゲージ変換の下で不変であることを示すには、次の $U(1)_Y$ ゲージ変換性を確かめれば十分である。

$$\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B'_\mu\right)\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} = e^{-i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\Lambda(x)}\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B_\mu\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \tag{95}$$

$$\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B'_\mu\right)u'_R = e^{-i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\Lambda(x)}\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu\right)u_R \tag{96}$$

これらを以下で具体的に確かめる。

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B'_\mu\right)\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(80)}{=} \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(B_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)\right)\right)e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{1}{3}\Lambda(x)}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{1}{3}\Lambda(x)}\left(\partial_\mu - i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(\partial_\mu\Lambda(x)) + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(\partial_\mu\Lambda(x))\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{1}{3}\Lambda(x)}\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B_\mu\right)\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow (95)
\end{aligned} \tag{97}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B'_\mu\right)u'_R \\
&\overset{(80)}{=} \left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\left(B_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)\right)\right)e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{4}{3}\Lambda(x)}u_R \\
&= e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{4}{3}\Lambda(x)}\left(\partial_\mu - i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)(\partial_\mu\Lambda(x)) + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)(\partial_\mu\Lambda(x))\right)u_R \\
&= e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{4}{3}\Lambda(x)}\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu\right)u_R \\
&\Longrightarrow (96)
\end{aligned} \tag{98}
$$

したがって、(81) と (82) は $U(1)_Y$ ゲージ変換の下で不変である。証明は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
&i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3\underbrace{G'_\mu}_{G_\mu} + ig_2\underbrace{W'_\mu}_{W_\mu} + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B'_\mu\right\}\begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(95)}{=} e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{1}{3}\Lambda(x)}\underbrace{\left[i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3G_\mu + ig_2W_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)B_\mu\right\}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right]}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{99}
$$

$$
\begin{aligned}
&i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3\underbrace{G'_\mu}_{G_\mu} + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B'_\mu\right\}u'_R \\
&\overset{(96)}{=} e^{-i\frac{g_1}{2}\frac{4}{3}\Lambda(x)}\underbrace{\left[i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3G_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu\right\}u_R\right]}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{100}
$$

check 7.13

西島–ゲルマンの法則 (7.58) から、クォーク・レプトンの電荷を求め、表 1.2 の値と一致していることを確かめてみよう。また、(7.53) から直接、電荷を読み取ってみよう。

クォーク・レプトンに対する $I_3,\ Y,\ Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ の表を下に与えておく。

	u_L	d_L	u_R	d_R	ν_{eL}	e_L^-	e_R^-
I_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-1	-2
$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	-1

表 1: 各電荷

この表から、西島・ゲルマンの法則 $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ は正しくクォーク・レプトンの電荷を与えていることがわかる。

次に、クォーク・レプトンの方程式 (81)〜(85) から直接電荷を求めてみよう。そのために、教科書本文の (7.55) と (7.57) を用いる。

$$\left.\begin{aligned} A_\mu &= W_\mu^3 \sin\theta_W + B_\mu \cos\theta_W \\[2ex] Z_\mu^0 &= W_\mu^3 \cos\theta_W - B_\mu \sin\theta_W \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} W_\mu^3 &= A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu^0 \cos\theta_W \\[2ex] B_\mu &= A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu^0 \sin\theta_W \end{aligned}\right. \tag{101}$$

$$e = g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W \tag{102}$$

ここで、

$$\sin\theta_W \equiv \frac{g_1}{\sqrt{(g_1)^2 + (g_2)^2}} \tag{103}$$

である。

まずは、(81) から u_L と d_L の電荷を読み取ることにする。そのために、$W_\mu = W_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2} + \cdots$ を代入し、W_μ^3 と B_μ を (101) を使って A_μ と Z_μ^0 で書き直し、A_μ の係数を求めれば、それが u_L と d_L の電荷を与える。

$$\begin{aligned}
&i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + ig_3 G_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) B_\mu\right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&= \quad i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + ig_2 W_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2} + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) B_\mu + \cdots\right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(101)}{=} \quad i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + ig_2 \left(A_\mu \sin\theta_W + \cdots\right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(A_\mu \cos\theta_W - \cdots\right) + \cdots\right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&= \quad i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + i\begin{pmatrix} \frac{1}{2}g_2 \sin\theta_W + \frac{1}{6}g_1 \cos\theta_W & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}g_2 \sin\theta_W + \frac{1}{6}g_1 \cos\theta_W \end{pmatrix} A_\mu + \cdots\right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&\overset{(102)}{=} \quad i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + i\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) e & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) e \end{pmatrix} A_\mu + \cdots\right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\
&= \quad i\gamma^\mu \left\{\begin{pmatrix} \partial_\mu + i\left(\frac{2}{3}e\right) A_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu + i\left(-\frac{1}{3}e\right) A_\mu \end{pmatrix} + \cdots\right\} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{104}$$

上式で A_μ と無関係な部分は「$+\cdots$」の部分に押し込めた。一般に、電荷 q をもつスピノル場 ψ に対するディラック方程式は、

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi = \cdots$$

の形をもつ。したがって、(104) 右辺の表式から直ちに u_L と d_L の電荷は、e を単位としてそれぞれ $\frac{2}{3}$ と $-\frac{1}{3}$ と読み取ることができ、表 1 と一致していることがわかる。

次に、(82) から u_R の電荷を読み取ることにする。

$$\begin{aligned}
& i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3G_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu\right\}u_R \\
= \quad & i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)B_\mu + \cdots\right\}u_R \\
\overset{(101)}{=} \quad & i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)(A_\mu\cos\theta_W - \cdots) + \cdots\right\}u_R \\
\overset{(102)}{=} \quad & i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + i\left(\frac{2}{3}e\right)A_\mu + \cdots\right\}u_R
\end{aligned} \tag{105}$$

したがって、u_R の電荷は（e を単位にして）$\frac{2}{3}$ と読み取ることができ、表 1 と一致していることがわかる。残りの $d_R, \nu_{eL}, e_L^-, e_R^-$ についても同様の解析を行えばよい。

check 7.14

(7.53) から、図 7.2(a) ～ 図 7.2(d) の相互作用が存在することを確かめてみよう。

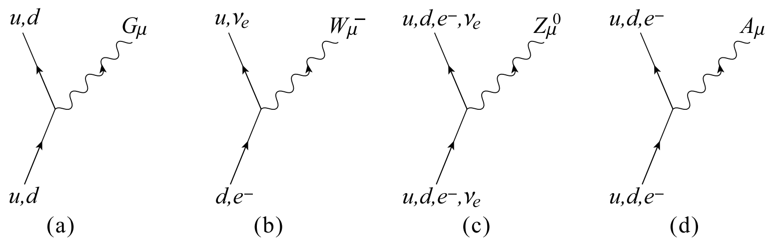

図 1: ファインマン図

図 1 (a)〜(d) の相互作用（ファインマン図）は、クォーク・レプトンの方程式 (81)〜(85) から読み取ることができる。

❗ より正確な理解のためには、相互作用のある場合の場の量子論における摂動論（続刊にて詳しく議論する）を行う必要がある。ここでは、直感的な理解に止めることにする。

まず、(81) の方程式について詳しく見ていくことにする。すなわち、

$$i\gamma^\mu\left\{\partial_\mu + ig_3G_\mu + ig_2W_\mu + i\frac{g_1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)B_\mu\right\}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = 0 \tag{106}$$

ここで、W_μ は（教科書本文の (7.48) 参照)、次の 2×2 行列で与えられている。

$$W_\mu = \sum_{a=1}^{3} W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}W_\mu^3 & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{107}$$

これを (106) に代入し、第 1 項、第 2 項、第 4 項では 2×2 単位行列 I_2 が省略されていることを考慮に入れると、(106) の上成分と下成分はそれぞれ次の方程式で与えられることがわかる。

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu + i\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) B_\mu \right\} u_L + i\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ d_L = 0 \tag{108}$$

$$i\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu + ig_3 G_\mu - i\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + i\frac{g_1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) B_\mu \right\} d_L + i\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- u_L = 0 \tag{109}$$

次に (101) を用いて、W_μ^3 と B_μ を A_μ と Z_μ^0 で書き直すと（(102) も用いる）

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \Bigg\{ & \underbrace{\partial_\mu}_{\text{(A)}} + \underbrace{ig_3 G_\mu}_{\text{(B)}} + \underbrace{i\left(\frac{2}{3}e\right) A_\mu}_{\text{(C)}} \\ & + \underbrace{i\left(\frac{1}{2} g_2 \cos\theta_W - \frac{1}{6} g_1 \sin\theta_W\right) Z_\mu^0}_{\text{(D)}} \Bigg\} u_L + \underbrace{i\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+}_{\text{(E)}} d_L = 0 \end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \Bigg\{ & \underbrace{\partial_\mu}_{\text{(F)}} + \underbrace{ig_3 G_\mu}_{\text{(G)}} + \underbrace{i\left(-\frac{1}{3}e\right) A_\mu}_{\text{(H)}} \\ & + \underbrace{i\left(-\frac{1}{2} g_2 \cos\theta_W - \frac{1}{6} g_1 \sin\theta_W\right) Z_\mu^0}_{\text{(I)}} \Bigg\} d_L + \underbrace{i\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^-}_{\text{(J)}} u_L = 0 \end{aligned} \tag{111}$$

それぞれの項の意味と、ファインマン図（図 1）との対応を以下に述べておく。

(A) 左巻き u_L クォークの伝播を表す項（自由ディラック方程式の部分)。

(B) グルーオン G_μ と u_L との（強い）相互作用を表す項 (図 1 (a))。G_μ と u_L との相互作用の強さ（結合定数）は g_3 で与えられる。

(C) 光子 A_μ と u_L との（電磁）相互作用を表す項（図 1 (d))。A_μ と u_L との相互作用の強さ（結合定数）は $\frac{2}{3}e$ であり、これは u_L クォークの電荷に他ならない。

(D) ウィークボソン Z_μ^0 と左巻き u_L との（弱い）相互作用を表す項（図 1 (c))。Z_μ^0 と u_L との結合定数は、$(\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W - \frac{1}{6}g_1\sin\theta_W)$ で与えられる。

(E) この項は、左巻き u_L クォークが W_μ^+ と d_L に変わる（u_L が消滅し、W_μ^+ と d_L が生成される）過程を表す。(この過程は図 1 の中には描かれていない。) この時の結合定数は $\frac{g_2}{\sqrt{2}}$ である。

(F) 左巻き d_L クォークの伝播を表す項（自由ディラック方程式の部分)。

(G) グルーオン G_μ と d_L との（強い）相互作用を表す項（図 1 (a)）。G_μ と d_L との結合定数は g_3 で与えられる。

(H) 光子 A_μ と d_L との（電磁）相互作用を表す項（図 1 (d)）。A_μ と d_L との結合定数は $-\frac{1}{3}e$ であり、これは d_L クォークの電荷に他ならない。

(I) ウィークボソン Z_μ^0 と左巻き d_L との（弱い）相互作用を表す項（図 1 (c)）。Z_μ^0 と d_L との結合定数は、$(-\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W - \frac{1}{6}g_1\sin\theta_W)$ で与えられる。

(J) この項は、左巻き d_L クォークが W_μ^- と u_L に変わる（d_L が消滅して、W_μ^- と u_L が生成される）過程（図 1 (b)）を表す。この時の結合定数は $\frac{g_2}{\sqrt{2}}$ である。

上と同様の解析を $\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$ に対して行ってみよう。そのために (84) から出発する。

$$i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + ig_2 W_\mu + i\frac{g_1}{2}(-1)B_\mu\right\} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} = 0 \tag{112}$$

W_μ として (107) を代入し、第 1 項と第 3 項は 2×2 単位行列 I_2 が省略されていることを考慮に入れると、(112) の上成分と下成分はそれぞれ次の方程式で与えられることがわかる。

$$i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu + i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 + i\frac{g_1}{2}(-1)B_\mu\right\}\nu_{eL} + i\frac{g_2}{\sqrt{2}}W_\mu^+ e_L^- = 0 \tag{113}$$

$$i\gamma^\mu \left\{\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}W_\mu^3 + i\frac{g_1}{2}(-1)B_\mu\right\}e_L^- + i\frac{g_2}{\sqrt{2}}W_\mu^- \nu_{eL} = 0 \tag{114}$$

次に (101) を用いて、W_μ^3 と B_μ を A_μ と Z_μ^0 で書き直すと

$$i\gamma^\mu\left\{\underbrace{\partial_\mu}_{\text{(K)}} + \underbrace{i\left(\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W + \frac{1}{2}g_1\sin\theta_W\right)Z_\mu^0}_{\text{(L)}}\right\}\nu_{eL} + \underbrace{i\frac{g_2}{\sqrt{2}}W_\mu^+}_{\text{(M)}} e_L^- = 0 \tag{115}$$

$$i\gamma^\mu\left\{\underbrace{\partial_\mu}_{\text{(N)}} + \underbrace{i(-e)A_\mu}_{\text{(O)}} + \underbrace{i\left(-\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W + \frac{1}{2}g_1\sin\theta_W\right)Z_\mu^0}_{\text{(P)}}\right\}e_L^- + \underbrace{i\frac{g_2}{\sqrt{2}}W_\mu^-}_{\text{(Q)}}\nu_{eL} = 0 \tag{116}$$

(115) から、ニュートリノ ν_{eL} は光子 A_μ との（電磁）相互作用項がないことに注意。これは、ニュートリノの電荷が 0 だからであるが、逆に A_μ との相互作用がないことから、ニュートリノの電荷が 0 であるということもできる。

以下で (K)〜(Q) の各項の意味と、ファインマン図（図 1）との対応を述べておく。

(K) 左巻きニュートリノ ν_{eL} の伝播を表す項（自由ディラック方程式の部分）。

(L) ウィークボソン Z_μ^0 と左巻き ν_{eL} との（弱い）相互作用を表す項（図 1 (c)）。Z_μ^0 と ν_{eL} との結合定数は $(\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W + \frac{1}{2}g_1\sin\theta_W)$ で与えられる。

(M) この項は、左巻きニュートリノ ν_{eL} が W_μ^+ と e_L^- に変わる（ν_{eL} が消滅して W_μ^+ と e_L^- が生成される）過程を表す。（この過程は図 1 の中には描かれていない。）この時の結合定数は $\frac{g_2}{\sqrt{2}}$ である。

(N) 左巻きの電子 e_L^- の伝播を表す項（自由ディラック方程式の部分)。

(O) 光子 A_μ と e_L^- との（電磁）相互作用を表す項（図 1 (d))。A_μ と e_L^- との結合定数は $-e$ であり、これは電子の電荷に他ならない。

(P) ウィークボソン Z_μ^0 と左巻き e_L^- との（弱い）相互作用を表す項（図 1 (c))。Z_μ^0 と e_L^- との結合定数は、$(-\frac{1}{2}g_2\cos\theta_W+\frac{1}{2}g_1\sin\theta_W)$ で与えられる。

(Q) この項は、左巻き電子 e_L^- が W_μ^- と ν_{eL} に変わる（e_L^- が消滅して W_μ^- と ν_{eL} が生成される）過程（図 1 (b)）を表す。この時の結合定数は $\frac{g_2}{\sqrt{2}}$ である。

ここでは、$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$ に関して解析を行ったが、残りの u_R, d_R, e_R^- についても全く同様に行えば良い。

check 7.15

自由中性子 n は、約 15 分ほどで陽子 p, 電子 e^-, 反電子ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ に崩壊 $(n\to p+e^-+\bar{\nu}_e)$ する。この崩壊過程がどのような相互作用を通じて起きているのか、図 7.2 のファインマン図を使って説明してみよう。(図 7.3 の例を参考にせよ。)

【ヒント】中性子と陽子はそれぞれ (udd) と (uud) のクォーク 3 体で構成されているので、中性子の崩壊をクォークの反応過程 $d\to u+e^-+\bar{\nu}_e$ におきかえて考えよ。

中性子と陽子はそれぞれ (udd) と (uud) のクォーク 3 体で構成されている。ヒントに書かれているように中性子の崩壊 $(n\to p+e^-+\bar{\nu}_e)$ は、クォークの反応過程 $d\to u+e^-+\bar{\nu}_e$ とみなすことができる。d クォークが $u+e^-+\bar{\nu}_e$ に変わる反応過程は、次のようにウィークボソン W_μ^- を媒介して起こる。(check 7.14 参照)。

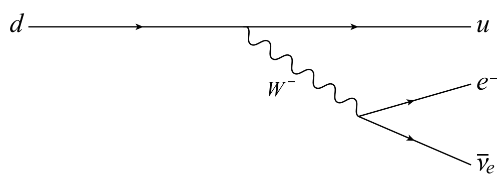

図 2: d クォークの反応過程

(図 2 では、時間は左から右へ流れているものとする。）この図を用いて、中性子の崩壊 $(n\longrightarrow p+e^-+\bar{\nu}_e)$ を表すと、次のファインマン図で与えられることがわかる。

check 7.16

クォーク・レプトンのゲージ変換性が与えられたなら、(7.53) のように方程式をわざわざ書き下す必要はないことを確かめてみよう。

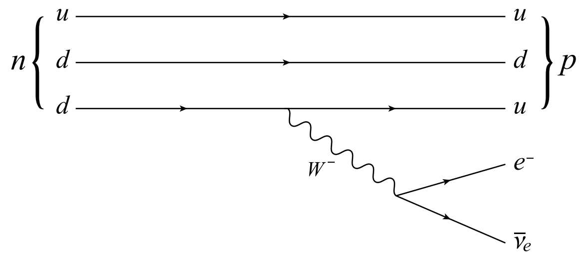

図 3: n の崩壊過程

この問題で問うていることは、クォーク・レプトン $\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, u_R, d_R, \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}, e_R^-$ のそれぞれの $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ変換性 (77), (78), (80) が与えられたときに、ゲージ不変性からそれぞれのクォーク・レプトンに対する方程式 (81)〜(85) を導けというものである。(ここでは導くことはしない。もし、導けないようであれば、もう一度この章を初めから読み直してほしい。)

読者に理解して欲しいことは、クォーク・レプトンの方程式 (81)〜(85) の背後には、$SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ不変性が隠れており、それぞれの方程式はクォーク・レプトンのゲージ変換性 (77), (78), (80) から一意的に決まっているという事実である。このことは、クォーク・レプトンのゲージ変換性は、クォーク・レプトンがどのような方程式に従うべきかを決定し、ひいてはクォーク・レプトンがどのようなゲージ相互作用をするかを決定するのである。つまり、**クォーク・レプトンがどのようなゲージ相互作用をするのかは、クォーク・レプトンのゲージ変換性から決まっている**のである。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第８章 check 解答例と補足説明

≪ 内容 ≫

- 解答例なし

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第９章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。**新たに 9.7 節の詳細な補足説明を付け加えた。**

2015/01/16
解答例の誤植を修正。

2014/04/09
第 9 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 1.1 ∼ check 9.14 の解答例
- 9.7 節の補足説明

check 9.1

オイラー–ラグランジュ方程式から (9.22) を導け。また、作用原理 $\delta S = 0$ から直接 (9.22) を導いてみよう。

ここではスカラー場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{1}$$

から、オイラー–ラグランジュ方程式

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{2}$$

および、作用原理

$$\delta S = 0 \tag{3}$$

を使って、次の運動方程式

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0 \tag{4}$$

を導く。

まずは、オイラー–ラグランジュ方程式を用いて、運動方程式 (4) を導く。このときオイラー–ラグランジュ方程式では、ϕ と $\partial_\mu\phi$ を独立変数とみていることに注意しておく。

(2) の左辺第 1 項 $\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)$ は、教科書本文に導出が示されているように、次式で与えられる。

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial\,\partial_\mu\phi}\left[\frac{1}{2}\partial_\nu\phi\,\partial^\nu\phi\right]\right) = \partial_\mu\partial^\mu\phi \tag{5}$$

次に (2) の左辺第 2 項 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$ は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)\\ &= -m^2\phi - \frac{\lambda}{3!}\phi^3\end{aligned} \tag{6}$$

となる。したがって (5) と (6) をオイラー–ラグランジュ方程式 (2) に代入して、運動方程式

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0 \tag{7}$$

を得る。

次に作用原理 (3) から運動方程式 (4) を導く。

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta\int d^4x\;\mathcal{L}\\ &= \delta\int d^4x\;\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right\}\\ &= \int d^4x\;\left\{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\delta\phi\right)\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\left(\partial^\mu\delta\phi\right) - m^2\phi\,\delta\phi - \frac{\lambda}{3!}\phi^3\,\delta\phi\right\}\\ &= \int d^4x\;\left\{-\frac{1}{2}\delta\phi\left(\partial_\mu\partial^\mu\phi\right) - \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\partial_\mu\phi\right)\delta\phi - m^2\phi\,\delta\phi - \frac{\lambda}{3!}\phi^3\,\delta\phi\right\}\\ &\qquad (\because\ \text{第 1 項と第 2 項で部分積分を行い、表面項を落とした。})\\ &= -\int d^4x\left[\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + m^2\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x)\right]\delta\phi(x)\end{aligned} \tag{8}$$

任意の変分 $\delta\phi(x)$ に対して $\delta S = 0$ が成り立つためには、(8) 右辺のカッコ $[\cdots]$ の中身がゼロ、すなわち、運動方程式 (4) が成り立たなければならないことがわかる。

> **!**
> オイラー–ラグランジュ方程式は、作用原理から導かれるので、同じ結果が得られるのは当然である。これからは、オイラー–ラグランジュ方程式ではなく、より基本的な作用原理 $\delta S = 0$ から運動方程式を導くようにしよう。

check 9.2

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ に全微分項 $\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(\phi)$ を付け加えても、オイラー–ラグランジュ方程式 (9.18) は変わらないことを証明してみよう。ここで、$K^\mu(\phi)$ は $\phi(x)$ のみの関数である。

【ヒント】合成関数の微分の公式 $\partial_\mu K^\mu(\phi(x)) = \frac{\partial K^\mu(\phi)}{\partial\phi(x)}\partial_\mu\phi(x)$ を用いよ。

$\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}$ とおいて、

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{9}$$

を以下で確かめる。

$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(\phi)$ を合成関数の微分の公式を用いて、

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(\phi) = \frac{\partial K^\mu(\phi)}{\partial\phi}\partial_\mu\phi \tag{10}$$

と書き表しておく。この表式で $\frac{\partial K^\mu(\phi)}{\partial\phi}$ は（$\partial_\mu\phi$ に依存しない）ϕ のみの関数なので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\Delta\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi} &\overset{(10)}{=} \frac{\partial}{\partial\,\partial_\mu\phi}\left(\frac{\partial K^\nu(\phi)}{\partial\phi}\partial_\nu\phi\right) \qquad (\because (10)\text{ の}\mu\text{を}\nu\text{に書き換えておいた。})\\ &= \frac{\partial K^\nu(\phi)}{\partial\phi}\underbrace{\frac{\partial(\partial_\nu\phi)}{\partial\,\partial_\mu\phi}}_{=\delta_\nu{}^\mu} = \frac{\partial K^\mu(\phi)}{\partial\phi} \end{aligned}\tag{11}$$

$$\frac{\partial\Delta\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial K^\mu(\phi)}{\partial\phi}\,\partial_\mu\phi\right) = \frac{\partial^2 K^\mu(\phi)}{\partial\phi^2}\,\partial_\mu\phi \tag{12}$$

となる。これらを用いると

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi}\\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial\,\partial_\mu\phi}(\mathcal{L}+\Delta\mathcal{L})\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}(\mathcal{L}+\Delta\mathcal{L})\\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\,\Delta\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial\,\Delta\mathcal{L}}{\partial\phi}\\ &\overset{(11)(12)}{=} \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \underbrace{\partial_\mu\left(\frac{\partial K^\mu(\phi)}{\partial\phi}\right)}_{\frac{\partial^2K^\mu(\phi)}{\partial\phi^2}\,\partial_\mu\phi} - \frac{\partial^2 K^\mu(\phi)}{\partial\phi^2}\partial_\mu\phi\\ &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\end{aligned}\tag{13}$$

となり、(9) が確かめられたことになる。

!

作用積分の中では全微分項を無視して構わないので、$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(\phi)$ が運動方程式に寄与しないのは、作用原理の立場からは自明である。

check 9.3

相対論的不変性の観点からは、ハミルトニアンよりも作用積分を使った方がより便利である。なぜだろうか？

【ヒント】エネルギーはローレンツ変換の下で不変か？ また、ハミルトニアンを使って（ハイゼンベルグの）運動方程式を導くことができるが、その方程式の相対論的不変性（あるいは共変性）を示すことは自明な作業か？

ハミルトニアンはエネルギー演算子なので、エネルギー運動量ベクトル $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$ の第 0 成分と同じ変換性を持つ。特に、ローレンツブースト変換の下でエネルギーと運動量成分は混じり合うので、ハミルトニアンは相対論的不変量ではない。一方、作用積分は相対論的不変量なので、相対論的不変性の観点からは、ハミルトニアンよりも作用積分の方が便利である。

例えば、運動方程式の相対論的不変性（より正確には相対論的共変性）は、作用積分が相対論的不変性を持つことから明らかである。なぜなら、運動方程式は、相対論的不変な作用原理から導かれるからである。一方、運動方程式はハミルトニアンを使ってハイゼンベルグの運動方程式として導くことができるが、ハミルトニアンが相対論的不変量ではないので、運動方程式の相対論的不変性は自明な形では見てとれない。

通常の量子化の手続き（第 11 章〜第 13 章参照）では、正準量子化を行うのでハミルトニアン形式が便利である。ところが、この正準形式は相対論的不変性という観点からは、上で述べたように見通しのよい形式にはなっていない。

量子化の方法には、正準量子化以外にもファインマンの経路積分量子化法が知られている。こちらは、作用積分を基礎に量子化がなされる。この量子化の利点は、すべての量が古典的な変数として取り扱われ、演算子固有の非可換性に煩わされることがない点と、作用積分に基づいているため、相対論的不変性が非常に見やすい点である。経路積分量子化法については、第 2 巻（続巻）で紹介する。

check 9.4

$S, \mathcal{L}, \phi$ の質量次元がそれぞれ $[S] = 0$, $[\mathcal{L}] = 4$, $[\phi] = 1$ で与えられることを確かめてみよう。

作用積分 S は $\hbar$ と同じ角運動量の次元を持つので、自然単位系（$c = \hbar = 1$）では無次元量、すなわち

$$[\,S\,] = 0 \tag{14}$$

である。

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の質量次元は、$[x^\mu] = -1$ より $[d^4x] = -4$ なので、

$$
\begin{aligned}
0 &= [S] = [\,\textstyle\int d^4x\,\mathcal{L}\,] = [\,\textstyle\int d^4x\,] + [\,\mathcal{L}\,] \\
&= -4 + [\,\mathcal{L}\,] \\
&\Longrightarrow [\,\mathcal{L}\,] = 4
\end{aligned} \tag{15}
$$

で与えられる。

スカラー場 ϕ の質量次元は、運動項 $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ から決定することができる。

$$
\begin{aligned}
[\,\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\,] &= 2 \times [\,\partial_\mu\,] + 2 \times [\,\phi\,] \\
&= 2 \times 1 + 2 \times [\,\phi\,]
\end{aligned} \tag{16}
$$

ここで、$[\partial_\mu] = [\frac{\partial}{\partial x^\mu}] = 1$ を用いた。一方、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の質量次元は、(15) から $[\mathcal{L}] = 4$ なので、運動項の質量次元は 4 である。したがって、

$$
2 + 2 \times [\,\phi\,] = 4 \quad \Longrightarrow \quad [\,\phi\,] = 1 \tag{17}
$$

として、ϕ の質量次元が 1 であることがわかる。

check 9.5

$V(|\Phi|^2) = m^2\Phi^*\Phi$ のとき、(9.33) から作用原理を用いて、電荷 q を持つスカラー粒子の相対論的方程式（(2.27) で ϕ を Φ におきかえたもの）を導いてみよう。

【ヒント】 Φ と Φ^* の変分は独立に取り扱って構わない。Φ^* の変分 $\delta\Phi^*$ から (2.27) が導かれ、Φ の変分 $\delta\Phi$ から (2.27) の複素共役をとった式が得られる。

ここでは、次の作用積分

$$
S[\Phi, A_\mu] = \int d^4x\, \left\{ (D_\mu\Phi)^* D^\mu\Phi - m^2\Phi^*\Phi \right\} \tag{18}
$$

から作用原理を用いて、電荷 q を持つスカラー粒子の相対論的方程式

$$
D_\mu D^\mu\Phi + m^2\Phi = 0 \tag{19}
$$

を導く。ここで、共変微分の定義は

$$
D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{20}
$$

で与えられている。複素スカラー場 Φ に対する変分原理では、Φ と Φ^* の変分を独立に取り扱って構わない。

!

Φ と Φ^* は互いに複素共役の関係にあるので、Φ と Φ^* の変分を独立にとることはできないように思える。この点を疑問に感じるなら、

$$
\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)
$$

$$\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

とおいて、Φ, Φ^* の代わりに実スカラー場 ϕ_1, ϕ_2 に書き直して、ϕ_1, ϕ_2 に関して変分をとってみるとよい。得られた結果は、Φ と Φ^* を独立変数として変分をとったものと一致していることがわかる。

運動方程式 (19) は、Φ^* の変分 $\delta\Phi^*$ から導かれることを下で確かめる。Φ はそのままで、Φ^* のみの変分を考えると

$$\begin{aligned}
\delta_{\Phi^*} S &= \int d^4x \left\{ \underbrace{(D_\mu \delta\Phi)^*}_{(\partial_\mu - iqA_\mu)\delta\Phi^*} D^\mu \Phi - m^2\, \delta\Phi^* \Phi \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ (\partial_\mu \delta\Phi^*) D^\mu \Phi - \delta\Phi^* (iqA_\mu) D^\mu \Phi - m^2 \delta\Phi^* \Phi \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\delta\Phi^* \underbrace{(\partial_\mu + iqA_\mu)}_{D_\mu} D^\mu \Phi - m^2 \delta\Phi^* \Phi \right\} \\
&\qquad (\because \text{部分積分を行い、表面項を落とした。}) \\
&= -\int d^4x\, \delta\Phi^*(x) \left[D_\mu D^\mu \Phi(x) + m^2 \Phi(x) \right]
\end{aligned} \tag{21}$$

を得る。任意の変分 $\delta\Phi^*(x)$ に対して $\delta_{\Phi^*} S = 0$ が成り立つためには、(19) の運動方程式が成り立たなければならないことがわかる。

(!)

Φ の変分 $\delta\Phi$ からは、Φ^* に対する運動方程式

$$(D_\mu D^\mu \Phi)^* + m^2 \Phi^* = 0 \tag{22}$$

が導かれる。これは、(19) の複素共役をとった式と同じである。

check 9.6

(9.30) と (9.36) が等価であることを確かめてみよう。

以下では、

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\theta} \Phi \tag{23}$$

と

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

が等価であることを確かめる。ここで、Φ と ϕ_1, ϕ_2 の関係は次式で与えられる。

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \tag{25}$$

(23) をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて、実部と虚部に分けると

$$
\begin{aligned}
&\Phi \;\to\; \Phi' = e^{-i\theta}\Phi \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1' + i\phi_2') = (\cos\theta - i\sin\theta)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\phi_1 + i\phi_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_1\cos\theta + \phi_2\sin\theta + i\,(-\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta)\big) \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \;\to\; \begin{pmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1\cos\theta + \phi_2\sin\theta \\ -\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\because\ \text{実部を上成分、虚部を下成分に書いた。}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

として、(24) が得られることがわかる。

check 9.7

($\mathring{5}$) と ($\mathring{5}'$) の要請が等価であることを説明してみよう。

ここでは、以下の ($\mathring{5}$) と ($\mathring{5}'$) の要請が等価であることを確かめる。

($\mathring{5}$) ラグランジアン密度に含まれる項の（パラメータを除いた量の）質量次元は 4 以下。

($\mathring{5}'$) ラグランジアン密度に現れるパラメータの質量次元は 0 または正である。

ラグランジアン密度は一般に次のように表すことができる。

$$
\mathcal{L} = \sum_i \lambda_i\,\mathcal{O}_i \tag{26}
$$

λ_i はパラメータを表し、$\mathcal{O}_i$ はスカラー場、スピノル場、ゲージ場からなる量を表す。例えば

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \quad &\longrightarrow \quad \lambda_i = 1, \quad \mathcal{O}_i = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \\
-\frac{m^2}{2}\phi^2 \quad &\longrightarrow \quad \lambda_i = m^2, \quad \mathcal{O}_i = -\frac{1}{2}\phi^2 \\
-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad &\longrightarrow \quad \lambda_i = \lambda, \quad \mathcal{O}_i = -\frac{1}{4!}\phi^4
\end{aligned}
$$

である。

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の質量次元は 4 なので、次の関係が成り立つ。

$$
4 = [\lambda_i] + [\mathcal{O}_i] \tag{27}
$$

($\mathring{5}$) の要請は、

$$
(\mathring{5}) \Longleftrightarrow [\mathcal{O}_i] \le 4 \tag{28}
$$

を意味するので、(27) から

$$
[\lambda_i] = 4 - [\mathcal{O}_i] \overset{(28)}{\ge} 0 \tag{29}
$$

が導かれる。これは ($\mathring{5}'$) の要請に他ならない。

$(\mathring{5})$ の要請は、時空の次元が 4 のときに正しいものだが、4 以外では成り立たない。一方、$(\mathring{5}')$ の要請は時空の次元によらず、くりこみ可能性を正しく与える（check 9.8 参照）。

check 9.8

くりこみ可能な相互作用の形は時空の次元に依存する。例えば、空間 2 次元（時空の次元 $=3$）の場合、相互作用項として $\lambda\phi^6$ 項もくりこみ可能な項として許されることを確かめよ。また、時空の次元が 2 の場合のくりこみ可能な相互作用項について考察してみよう。

【ヒント】 $S=\int d^3x\big\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\cdots\big\}$ として、ϕ の質量次元が $[\phi]=\frac{1}{2}$ となることを確かめよ。ここでくりこみ可能性の要求は $(\mathring{5}')$ を用いる。また、時空の次元が 2 の場合、ϕ の質量次元がどうなるか、求めてみよ。

以下では、時空の次元が 3 と 2 の場合にくりこみ可能な項について調べる。

(I) 時空の次元 $=3$

このとき、(実) スカラー場に対する作用積分は

$$S=\int d^3x\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi-\frac{m^2}{2}\phi^2-\cdots\right\} \tag{30}$$

の形をとる。作用積分の次元は、自然単位系では常に無次元量、すなわち

$$[\,S\,]=0 \tag{31}$$

である。

また、時空座標 x^μ の質量次元も時空の次元によらないので、

$$[\,x^\mu\,]=-1,\quad [\,d^3x\,]=-3,\quad [\,\partial_\mu\,]=1 \tag{32}$$

で与えられる。したがって、運動項 $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ から ϕ の質量次元が次のように求まる。

$$\begin{aligned}0 &= \left[\,\textstyle\int d^3x\,\frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\,\right]\\ &= \left[\,\textstyle\int d^3x\,\right]+2\times[\,\partial_\mu\,]+2\times[\,\phi\,]\\ &= -3+2+2\times[\,\phi\,]\\ &\Longrightarrow\ [\,\phi\,]=\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{33}$$

くりこみ可能性については、$(\mathring{5}')$ の要請

$(\mathring{5}')$ ラグランジアン密度に現れるパラメータの質量次元は 0 または正である。

を用いる。時空の次元が 3 の時は、$[d^3x]=-3$ なのでラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の質量次元は

$$[\,\mathcal{L}\,]=3 \tag{34}$$

で与えられる。スカラー場の自己相互作用項として

$$\lambda_{(n)}\phi^n \tag{35}$$

を考えると、(33) と (34) から相互作用のパラメータ $\lambda_{(n)}$ の質量次元は

$$\begin{aligned} 3 &= [\,\lambda_{(n)}\phi^n\,] \\ &= [\,\lambda_{(n)}\,] + n \times \underbrace{[\,\phi\,]}_{\frac{1}{2}} \\ &= [\,\lambda_{(n)}\,] + \frac{n}{2} \\ \Longrightarrow\ & [\,\lambda_{(n)}\,] = 3 - \frac{n}{2} \end{aligned} \tag{36}$$

で与えられる。くりこみ可能性の要請は $(\mathring{5}')$ より

$$[\,\lambda_{(n)}\,] \geq 0 \tag{37}$$

なので、(36) より

$$n \leq 6 \tag{38}$$

が導かれる。したがって、$\lambda\phi^6$ 項はくりこみ可能な最大のべき項であることがわかる。

(II) 時空の次元 $= 2$

このとき、(実) スカラー場の作用積分は

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \cdots \right\} \tag{39}$$

の形をとる。スカラー場 ϕ の質量次元は、(I) と同様の議論により

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\, \textstyle\int d^2x\, \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \,\right] \\ &= \left[\, \textstyle\int d^2x \,\right] + 2 \times [\,\partial_\mu\,] + 2 \times [\,\phi\,] \\ &= -2 + 2 + 2 \times [\,\phi\,] \\ \Longrightarrow\ & [\,\phi\,] = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

となり、ϕ の質量次元は 0 であることがわかる。

ϕ の質量次元が 0 であることは、スカラー場にとって 2 次元時空は非常に特異であることを意味する。例えば、相互作用項として

$$\lambda_{(n)}\phi^n \tag{41}$$

を考えたとき、$\lambda_{(n)}$ の質量次元は（(36) の導出を参考にして）

$$2 = [\lambda_{(n)}\phi^n] = [\lambda_{(n)}] + n \times [\phi] \overset{(40)}{=} [\lambda_{(n)}] \tag{42}$$

すなわち、$[\lambda_{(n)}] = 2 > 0$ なので、常に $(\mathring{5}')$ の意味でくりこみ可能である。つまり、ϕ の任意のポテンシャル $V(\phi)$ はくりこみ可能である。

ポテンシャルだけでなく運動項もくりこみ可能性から、より一般的な形が許される。実際、微分 ∂_μ の 2 次を含むくりこみ可能な項として

$$\frac{1}{2}K(\phi)\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi \tag{43}$$

が許される。ここで、$K(\phi)$ は ϕ の任意関数で構わない。この項がくりこみ可能になる理由は、ϕ の質量次元は 0 なので、$K(\phi)$ を $\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ にかけても全体の質量次元は変わらないからである。

!

(43) のような項を含んだ理論として、非線形シグマ模型とよばれるものがある。これは、対称性の破れにともなって低エネルギー有効理論として実現されることが知られている。

check 9.9

自由ディラック場の作用積分 (9.40) が、相対論的不変であることと実（エルミート）であることを確かめてみよう。

【ヒント】 スピノルの双 1 次形式 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ の複素共役（エルミート共役）は、$(\bar{\psi}\Gamma\psi)^* = (\bar{\psi}\Gamma\psi)^\dagger \equiv \psi^\dagger\Gamma^\dagger\bar{\psi}^\dagger$ で定義される。この定義と $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu,\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^0)^2 = I_4$、および部分積分を用いよ。また、作用積分の中での全微分項は無視して構わない（9.2.3 項参照)。

自由ディラック場の作用積分は次式で与えられる。

$$S[\psi] = \int d^4x\,\bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x) \tag{44}$$

5.4 節で確かめたように、ローレンツ変換 $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の下で双 1 次形式 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$、$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ はそれぞれスカラー、（反変）ベクトルとしての変換性を持つ。すなわち、

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{45}$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) \tag{46}$$

である。一方、微分 ∂_μ は共変ベクトルの変換性を持つ。

$$\partial'_\mu = \partial_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \tag{47}$$

(45)〜(47) の変換性から直ちに、スピノル場の作用積分はローレンツ変換の下で不変であ

ることがわかる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x'\,\bar{\psi}'(x')\left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m\right)\psi'(x') \\
&= \int \underbrace{d^4x'}_{d^4x}\Big\{i \underbrace{\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\partial'_\mu\psi'(x')}_{\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu(\partial_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu)\psi(x)} - m\underbrace{\bar{\psi}'(x')\psi'(x')}_{\bar{\psi}(x)\psi(x)}\Big\} \\
&= \int d^4x\Big\{\underbrace{(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\Lambda^\mu{}_\nu}_{\delta^\rho{}_\nu} i\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\partial_\rho\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)\Big\} \\
&= \int d^4x\,\bar{\psi}(x)\Big(i\underbrace{\gamma^\nu\partial_\nu}_{\gamma^\mu\partial_\mu} - m\Big)\psi(x) \qquad (48)
\end{aligned}
$$

である。

時空座標の並進 $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ に関しては、$\psi'(x') = \psi(x)$, $\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)$, $\partial'_\mu = \partial_\mu$, $d^4x' = d^4x$ なので、作用積分 (44) の不変性は自明である。

最後に、自由ディラック場の作用積分が、実（エルミート）であることを確かめる。そのために、ヒントに書かれている公式

$$
(\bar{\psi}\Gamma\psi)^* = (\bar{\psi}\Gamma\psi)^\dagger = \psi^\dagger\Gamma^\dagger\bar{\psi}^\dagger \qquad (49)
$$

を用いる。

$$
\begin{aligned}
\left(\int d^4x\,\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)^* &= \int d^4x\,\left(\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)^* \\
&\overset{(49)}{=} \int d^4x\,(-i)(\partial_\mu\psi)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\underbrace{\bar{\psi}^\dagger}_{(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger} \\
&\overset{(\gamma^0)^2=I_4}{=} \int d^4x\,(-i)\underbrace{\left(\partial_\mu\psi^\dagger\right)\gamma^0}_{\partial_\mu\bar{\psi}\ (\because\bar{\psi}^\dagger=\gamma^0\psi)}\underbrace{\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0}_{\gamma^\mu}\psi \\
&= \int d^4x\,i\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi \qquad (50)
\end{aligned}
$$

($\because$ 部分積分をして、表面項を落とした。)

$$
\begin{aligned}
\int d^4x\,(m\,\bar{\psi}\psi)^* &= \int d^4x\,m\,\psi^\dagger\bar{\psi}^\dagger \\
&= \int d^4x\,m\,\underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{\bar{\psi}}\psi \qquad (\because \bar{\psi}^\dagger = \gamma^0\psi) \\
&= \int d^4x\,m\,\bar{\psi}\psi \qquad (51)
\end{aligned}
$$

(50) および (51) から、自由ディラック場の作用積分 (44) は実、すなわち、

$$
(S[\psi])^* = S[\psi] \qquad (52)
$$

であることがわかる。

check 9.10

ディラック場、ゲージ場の質量次元がそれぞれ $[\psi] = 3/2$, $[A_\mu] = 1$ であることを確かめよ。また、双 1 次形式としてテンソル量 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ を作ることができるが、これからはくりこみ可能な相互作用を得ることはできない。その理由を説明してみよう。

【ヒント】 電荷 q の質量次元は 0 である。$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ から作られるスカラー量を $T_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ として、ベクトル場 A_μ、微分演算子 ∂_μ、計量 $\eta_{\mu\nu}$、および、スカラー場 ϕ から 2 階のテンソル $T_{\mu\nu}$ の候補を列挙し、質量次元が 4 以下のものが構成できるかを考えよ。また、$\eta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0$ が成り立つ。なぜか？

ディラック場とゲージ場の質量次元は、それぞれの運動項から求めることができる。作用積分 S の質量次元が 0 であることから出発する。

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\,\textstyle\int d^4x\,\bar{\psi}\,i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi\,\right] \\ &= \underbrace{\left[\,\textstyle\int d^4x\,\right]}_{-4} + \underbrace{\left[\,\bar{\psi}\,\right]}_{[\psi]} + \underbrace{\left[\,\gamma^\mu\,\right]}_{0} + \underbrace{\left[\,\partial_\mu\,\right]}_{1} + \left[\,\psi\,\right] \\ &= -3 + 2\times\left[\,\psi\,\right] \\ \Longrightarrow&\quad \left[\,\psi\,\right] = \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\,\textstyle\int d^4x\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\right] \\ &= \underbrace{\left[\,\textstyle\int d^4x\,\right]}_{-4} + 2\times\left[\,F_{\mu\nu}\,\right] \\ &= -4 + 2\times\Big(\underbrace{\left[\,\partial_\mu\,\right]}_{1} + \left[\,A_\nu\,\right]\Big) \\ &= -2 + 2\times\left[\,A_\nu\,\right] \\ \Longrightarrow&\quad \left[\,A_\nu\,\right] = 1 \end{aligned} \tag{54}$$

次にテンソル量 $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ から、くりこみ可能な相互作用は得られないことを確かめる。まず、$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ の質量次元が (53) から 3 であることがわかる。($\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ の質量次元は 0 。)

$$[\,\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\,] = 3 \tag{55}$$

$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ からつくられる相対論的不変な相互作用項を

$$T_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \tag{56}$$

としておく。くりこみ可能であるためには、(パラメータを除いた) 相互作用項の質量次元は 4 以下でなければならないので、$T_{\mu\nu}$ の質量次元は

$$[\,T_{\mu\nu}\,] \leq 1 \tag{57}$$

を満たさなければならない。

ここで、$T_{\mu\nu}$ はベクトル A_μ、微分演算子 ∂_μ、計量 $\eta_{\mu\nu}$、および、スカラー場 ϕ から作られているとしよう。このとき、それぞれの質量次元は

$$[\,A_\mu\,] = [\,\partial_\mu\,] = [\,\phi\,] = 1, \quad [\,\eta_{\mu\nu}\,] = 0 \tag{58}$$

で与えられている。$T_{\mu\nu}$ は、質量次元 1 以下の 2 階のテンソルでなければならないので、その可能性は

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{あるいは} \quad \eta_{\mu\nu}\phi \tag{59}$$

である。（これら以外は、2 階のテンソルにならないか、質量次元が 1 を超えてしまう。）

しかしながら、$\sigma^{\mu\nu}$ はその定義（$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$）から $(\mu\nu)$ に関して反対称であるので、恒等的に

$$\eta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0 \tag{60}$$

となってしまう。((60) の証明は、教科書本文の公式 (4.53) を参照。）したがって、$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ からは、くりこみ可能な相互作用項は作れないことがわかる。

check 9.11

次式で与えられるラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{F\tilde{F}} = \alpha F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}, \qquad \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$$

も、ゲージ不変、相対論的不変、かつ、くりこみ可能である。（α は任意の実数。）しかし、この項は運動方程式に寄与しない。なぜだろうか？ また、$\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ を $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を用いて書き表してみよう。

【ヒント】$\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ は全微分 $\mathcal{L}_{F\tilde{F}} = \partial_\mu X^\mu$ の形に書き表せることを示せ。

まず初めに、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ が全微分

$$\mathcal{L}_{F\tilde{F}} = \alpha F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu X^\mu \tag{61}$$

の形に書き表せることを示す。そのために、いくつかの関係式を導いておく。

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu A_\nu &\overset{\mu\leftrightarrow\nu}{=} \underbrace{\varepsilon^{\nu\mu\lambda\rho}}_{-\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}}\partial_\nu A_\mu \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu A_\mu \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\lambda A_\rho &\overset{\lambda\leftrightarrow\rho}{=} \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}}_{-\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}}\partial_\rho A_\lambda \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\rho A_\lambda \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu\partial_\lambda &\overset{\mu\leftrightarrow\lambda}{=} \underbrace{\varepsilon^{\lambda\nu\mu\rho}}_{-\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}}\underbrace{\partial_\lambda\partial_\mu}_{\partial_\mu\partial_\lambda} \\ &= -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu\partial_\lambda \\ \Longrightarrow\ & \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu\partial_\lambda = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

これらの関係式を用いて、(61) を導く。

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda) \quad (\because\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\lambda A_\rho) \qquad (\because (62) \text{ と } (63) \text{ を用いた。}) \\
&= \partial_\mu\left[2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu(\partial_\lambda A_\rho)\right] - 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu(\partial_\mu\partial_\lambda A_\rho) \\
&\overset{(64)}{=} \partial_\mu\left[2\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu(\partial_\lambda A_\rho)\right]
\end{aligned} \tag{65}$$

したがって、

$$\mathcal{L}_{F\tilde{F}} = \alpha F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu\left[2\alpha\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu(\partial_\lambda A_\rho)\right] \tag{66}$$

のように、全微分の形にかけることがわかる。

$\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ は上式のように全微分項で与えられるので、作用積分に加えても無視することができ、運動方程式には寄与しないことがわかる。

最後に、$\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ を $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を用いて書き表すことにする。$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ は $(\mu\nu\lambda\rho)$ が (0123) の置換の場合以外は 0 となることを考慮に入れて、μ, ν, λ, ρ に関する和を時間成分と空間成分に分けることにする。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{F\tilde{F}} &= \alpha F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\alpha}{2}\sum_{\mu,\nu,\lambda,\rho=0}^{3}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}\left\{\varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} + \underbrace{\varepsilon^{i0jk}}_{-\varepsilon^{0ijk}}\underbrace{F_{i0}}_{-F_{0i}}F_{jk} + \underbrace{\varepsilon^{jk0i}}_{\varepsilon^{0ijk}}F_{jk}F_{0i} + \underbrace{\varepsilon^{jki0}}_{-\varepsilon^{0ijk}}F_{jk}\underbrace{F_{i0}}_{-F_{0i}}\right\} \\
&= 2\alpha\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon^{0ijk}F_{0i}F_{jk} \\
&= 2\alpha\left\{\underbrace{\varepsilon^{0123}}_{1}\underbrace{F_{01}}_{E^1}\underbrace{F_{23}}_{-B^1} + \underbrace{\varepsilon^{0132}}_{-1}\underbrace{F_{01}}_{E^1}\underbrace{F_{32}}_{B^1} + \underbrace{\varepsilon^{0231}}_{1}\underbrace{F_{02}}_{E^2}\underbrace{F_{31}}_{-B^2}\right. \\
&\qquad \left. + \underbrace{\varepsilon^{0213}}_{-1}\underbrace{F_{02}}_{E^2}\underbrace{F_{13}}_{B^2} + \underbrace{\varepsilon^{0312}}_{1}\underbrace{F_{03}}_{E^3}\underbrace{F_{12}}_{-B^3} + \underbrace{\varepsilon^{0321}}_{-1}\underbrace{F_{03}}_{E^3}\underbrace{F_{21}}_{B^3}\right\} \\
&= -4\alpha\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{67}$$

!

この結果 $\mathcal{L}_{F\tilde{F}} \propto \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ は予想されたものである。なぜなら、$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ が $\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ に含まれているので $\mathcal{L}_{F\tilde{F}}$ は擬スカラー量であることが予想され、実際、$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ は空間反転の下で符号を変える擬スカラーだからである。

!

非可換ゲージ理論の場合、

$$\mathcal{L}_{F\tilde{F}} = \alpha\ \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}), \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \tag{68}$$

は、CP 不変性を破る項として非自明な寄与を与えることが分かっている。一方、この項があると CP の破れに関する実験と矛盾するため、もし存在したとしても α の値は非常に小さくなくてはならない。なぜ α の値が小さくなければならないのかは、標準模型における strong CP problem とよばれる謎の 1 つである。

check 9.12

相対論的不変性とゲージ不変性から、くりこみ可能なラグランジアン密度は (9.47) で与えられることを示せ。また、(9.51) で定義される j^μ_Φ と j^μ_ψ は保存カレント、すなわち $\partial_\mu j^\mu_\Phi = \partial_\mu j^\mu_\psi = 0$ を満たすことを導いてみよう。

【ヒント】(9.47) のラグランジアン密度には、質量次元が 4 以下の量しか現れていないことを確かめよ。また、相対論的不変性は保つが、ゲージ不変性を破る項にはどのようなものがあるか考えてみよ。$\partial_\mu j^\mu_\Phi = \partial_\mu j^\mu_\psi = 0$ を確かめるためには、Φ と ψ の運動方程式を用いよ。

まず、ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A_\mu, \Phi, \psi) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) - m_\Phi^2\Phi^*\Phi \\ &\qquad - \frac{\lambda}{4}(\Phi^*\Phi)^2 + \bar{\psi}\,(i\gamma^\mu D_\mu - m_\psi)\,\psi \end{aligned} \tag{69}$$

がくりこみ可能であることを確認する。そのために、ラグランジアンに現れている量の質量次元を下に与えておく。

$$\begin{aligned}&[A_\mu] = [\Phi] = 1, \quad [\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{3}{2}, \\ &[\partial_\mu] = [D_\mu] = 1, \quad [m_\Phi] = [m_\psi] = 1, \\ &[\lambda] = [q_\Phi] = [q_\psi] = 0 \end{aligned} \tag{70}$$

これらから、(69) の各項の（パラメータを除いた）質量次元は 4 以下であることがわかる。したがって、$\mathcal{L}(A_\mu, \Phi, \psi)$ はくりこみ可能である。

ゲージ不変性を課さずに相対論的不変性のみを課すならば、下に列挙した項も許される。

$$\begin{aligned}\text{質量次元 }1 \ &: \ \Phi, \quad \Phi^* \\ \text{質量次元 }2 \ &: \ \Phi^2, \quad (\Phi^*)^2, \quad A^\mu A_\mu \\ \text{質量次元 }3 \ &: \ \Phi^3, \quad \Phi^*\Phi^2, \quad (\Phi^*)^2\Phi, \quad (\Phi^*)^3, \\ &\quad\ \Phi A^\mu A_\mu, \quad \Phi^* A^\mu A_\mu, \quad \Phi\,\partial^\mu A_\mu, \quad \Phi^*\,\partial^\mu A_\mu \\ \text{質量次元 }4 \ &: \ \Phi^4, \quad \Phi^*\Phi^3, \quad (\Phi^*)^3\Phi, \quad (\Phi^*)^4, \\ &\quad\ \Phi^2 A^\mu A_\mu, \quad \Phi^2\partial^\mu A_\mu, \quad \partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\Phi, \\ &\quad\ \Phi^*\Phi A^\mu A_\mu, \quad \Phi^*\Phi\,\partial^\mu A_\mu, \quad \partial_\mu\Phi^*\,\partial^\mu\Phi, \\ &\quad\ (\Phi^*)^2\,A^\mu A_\mu, \quad (\Phi^*)^2\,\partial^\mu A_\mu, \quad \partial_\mu\Phi^*\,\partial^\mu\Phi^*, \\ &\quad\ (A^\mu A_\mu)^2, \quad (\partial^\mu A_\mu)^2, \quad (\partial^\mu A^\nu)\,(\partial_\mu A_\nu), \\ &\quad\ \bar{\psi}\psi\Phi, \quad \bar{\psi}\psi\Phi^*, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \end{aligned} \tag{71}$$

ここでは、全微分項や微分のかかっている位置が異なるだけのものは省略した。[1] また、単独ではゲージ不変ではないが、幾つかの項を組み合わせるとゲージ不変量となり、(69) で与えられている項が得られるものもある。ゲージ不変性がいかに多くの項を排除しているかがよくわかる。

[1] まだ見落としている項があるかもしれない。パリティ不変性を課さないなら、$\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 等も許される。

最後に、

$$
\begin{aligned}
j_\Phi^\mu &= i\,q_\Phi\{\Phi^* D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\,\Phi\} && (72)\\
j_\psi^\mu &= q_\psi\,\bar\psi\gamma^\mu\psi && (73)
\end{aligned}
$$

が保存カレントであることを確かめる。そのためには、次の $\Phi, \Phi^*, \psi, \bar\psi$ に対する運動方程式が必要となる。(各自確認せよ。)

$$
D_\mu D^\mu\Phi + m_\Phi^2\Phi + \tfrac{\lambda}{2}\Phi(\Phi^*\,\Phi) = 0 \qquad (74)
$$

$$
(D_\mu D^\mu\Phi)^* + m_\Phi^2\Phi^* + \tfrac{\lambda}{2}\Phi^*(\Phi^*\,\Phi) = 0 \qquad (75)
$$

$$
(i\,\gamma^\mu D_\mu - m_\psi)\psi = 0 \qquad (76)
$$

$$
\overline{(D_\mu\psi)}\,i\,\gamma^\mu + m_\psi\bar\psi = 0 \qquad (77)
$$

これらの運動方程式を用いて、j_Φ^μ と j_ψ^μ がそれぞれ保存カレント、すなわち、

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j_\Phi^\mu &= 0 && (78)\\
\partial_\mu j_\psi^\mu &= 0 && (79)
\end{aligned}
$$

を以下で確かめる。

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j_\Phi^\mu &= \partial_\mu\big[i\,q_\Phi\,\{\Phi^* D^\mu\Phi - (D^\mu\Phi)^*\,\Phi\}\big]\\
&= iq_\Phi\Big\{\underbrace{(\partial_\mu\Phi^*)}_{(D_\mu\Phi)^*+iq_\Phi A_\mu\Phi^*}\times D^\mu\Phi \;+\; \Phi^*\times\underbrace{\partial_\mu D^\mu\Phi}_{D_\mu D^\mu\Phi - iq_\Phi A_\mu D^\mu\Phi}\\
&\qquad -\;\underbrace{(\partial_\mu D^\mu\Phi)^*}_{(D_\mu D^\mu\Phi)^*+iq_\Phi A_\mu(D^\mu\Phi)^*}\times\Phi \;-\; (D^\mu\Phi)^*\times\underbrace{\partial_\mu\Phi}_{D_\mu\Phi - iq_\Phi A_\mu\Phi}\Big\}\\
&\qquad (\because\; D_\mu\Phi = (\partial_\mu + iq_\Phi A_\mu)\Phi,\; (D_\mu\Phi)^* = (\partial - iq_\Phi A_\mu)\Phi^*)\\
&= iq_\Phi\,\{\Phi^* D_\mu D^\mu\Phi - (D_\mu D^\mu\Phi)^*\Phi\}\\
&= iq_\Phi\left\{\Phi^*\left(-m_\Phi^2\Phi - \frac{\lambda}{2}\Phi(\Phi^*\,\Phi)\right) - \left(-m_\Phi^2\Phi^* - \frac{\lambda}{2}\Phi^*(\Phi^*\,\Phi)\right)\Phi\right\}\\
&\qquad (\because\text{運動方程式 (74)、(75) を用いた。})\\
&= 0\\
\Longrightarrow&\quad (78) && (80)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu j_\psi^\mu &= \partial_\mu\left[q_\psi\,\bar\psi\gamma^\mu\psi\right]\\
&= q_\psi(\underbrace{\partial_\mu\bar\psi}_{\overline{(D_\mu\psi)}+iq_\psi A_\mu\bar\psi})\gamma^\mu\psi + q_\psi\bar\psi\gamma^\mu(\underbrace{\partial_\mu\psi}_{D_\mu\psi - iq_\psi\,A_\mu\psi})\\
&\qquad (\because\; D_\mu\psi = (\partial_\mu + iq_\psi A_\mu)\psi,\; \overline{D_\mu\psi} = (\partial_\mu - iq_\psi A_\mu)\overline{\psi})\\
&= q_\psi\overline{(D_\mu\psi)}\gamma^\mu\psi + q_\psi\bar\psi\gamma^\mu D_\mu\psi\\
&= q_\psi(im_\psi\bar\psi)\psi + q_\psi\,\bar\psi\,(-im_\psi\psi) \qquad (\because\text{運動方程式 (76)、(77) を用いた。})\\
&= 0\\
\Longrightarrow&\quad (79) && (81)
\end{aligned}
$$

check 9.13

$A_\mu(x)$ のゲージ変換性 (7.41) から、直接 D_μ と $F_{\mu\nu}(x)$ のゲージ変換性：$D_\mu \to D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x)$, $F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)$ を求めよ。また、(9.56) で定義されるラグランジアン密度がゲージ不変であることを確かめてみよう。

ここでは非可換ゲージ場 A_μ のゲージ変換性

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = U(x)\,A_\mu(x)\,U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U(x))\,U^{-1}(x) \tag{82}$$

から、D_μ と $F_{\mu\nu}(x)$ のゲージ変換性

$$D_\mu \quad\longrightarrow\quad D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x) \tag{83}$$

$$F_{\mu\nu}(x) \quad\longrightarrow\quad F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \tag{84}$$

を求める。

(83) の証明には、右から任意関数 $G(x)$ をかけておいたほうがわかりやすいだろう。以下では、(83) の右辺から出発して、$D'_\mu G(x)$ に等しいことを導く。

$$\begin{aligned}
&U(x)D_\mu\left(U^{-1}(x)\,G(x)\right)\\
&= \quad U(x)\,(\partial_\mu + igA_\mu(x))\left(U^{-1}(x)\,G(x)\right)\\
&= \quad \underbrace{U(x)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right)}_{-(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x)} G(x) + \partial_\mu G(x) + ig\,U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x)G(x)\\
&= \quad \left[\partial_\mu + ig\underbrace{\left(U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U(x))\,U^{-1}(x)\right)}_{A'_\mu(x)}\right]G(x)\\
&= \quad D'_\mu G(x)\\
&\Longrightarrow \quad (83)
\end{aligned} \tag{85}$$

ここで、$U(x)U^{-1}(x) = I_4$ の両辺を ∂_μ で微分して得られる恒等式

$$U(x)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) = -\,(\partial_\mu U(x))\,U^{-1}(x) \tag{86}$$

を用いた。

(84) は、$F_{\mu\nu}(x)$ を D_μ の交換関係を用いて表した次の関係

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{ig}\,[D_\mu, D_\nu] \tag{87}$$

を使うと、次のように簡単に示すことができる。

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) \quad &= \quad \frac{1}{ig}\,[D'_\mu, D'_\nu]\\
&\overset{(83)}{=} \quad \frac{1}{ig}\left[U(x)D_\mu U^{-1}(x), U(x)D_\nu U^{-1}(x)\right]\\
&= \quad U(x)\underbrace{\left(\frac{1}{ig}\,[D_\mu, D_\nu]\right)}_{F_{\mu\nu}(x)} U^{-1}(x)\\
&= \quad U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)
\end{aligned} \tag{88}$$

あるいは、$F_{\mu\nu}(x)$ の定義式

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig\left[A_\mu(x), A_\nu(x)\right] \tag{89}$$

から、直接次のようにして (84) を示すこともできる。

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x) \overset{(89)}{=}\ & \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) + ig\left[A'_\mu(x), A'_\nu(x)\right] \\
\overset{(82)}{=}\ & \partial_\mu \left(U(x)A_\nu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\nu U(x)\right)U^{-1}(x) \right) \\
& - \partial_\nu \left(U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x) \right) \\
& + ig \Big[U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x)\,, \\
& \qquad U(x)A_\nu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\left(\partial_\nu U(x)\right)U^{-1}(x) \Big] \\
=\ & \underbrace{\left(\partial_\mu U(x)\right)A_\nu(x)U^{-1}(x)}_{①} + \underbrace{U(x)\left(\partial_\mu A_\nu(x)\right)U^{-1}(x)}_{②} \\
& + \underbrace{U(x)A_\nu(x)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right)}_{③} + \underbrace{\frac{i}{g}\left(\partial_\mu\partial_\nu U(x)\right)U^{-1}(x)}_{④} \\
& + \underbrace{\frac{i}{g}\left(\partial_\nu U(x)\right)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right)}_{⑤} \underbrace{- \left(\partial_\nu U(x)\right)A_\mu(x)U^{-1}(x)}_{⑥} \\
& \underbrace{- U(x)\left(\partial_\nu A_\mu(x)\right)U^{-1}(x)}_{⑦} \underbrace{- U(x)A_\mu(x)\left(\partial_\nu U^{-1}(x)\right)}_{⑧} \\
& \underbrace{- \frac{i}{g}\left(\partial_\nu\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x)}_{⑨} \underbrace{- \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(x)\right)\left(\partial_\nu U^{-1}(x)\right)}_{⑩} \\
& + \underbrace{ig\left[U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x), U(x)A_\nu(x)U^{-1}(x)\right]}_{⑪} \\
& \underbrace{- \left[U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x), \left(\partial_\nu U(x)\right)U^{-1}(x)\right]}_{⑫} \\
& \underbrace{- \left[\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x), U(x)A_\nu(x)U^{-1}(x)\right]}_{⑬} \\
& \underbrace{- \frac{i}{g}\left[\left(\partial_\mu U(x)\right)U^{-1}(x), \left(\partial_\nu U(x)\right)U^{-1}(x)\right]}_{⑭}
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\Longrightarrow \quad ① + ③ + ⑬ = 0 \tag{91}$$

$$② + ⑦ + ⑪$$
$$= U(x)\left(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig\left[A_\mu(x), A_\nu(x)\right]\right) U^{-1}(x)$$
$$= U(x)\, F_{\mu\nu}(x)\, U^{-1}(x) \tag{92}$$

$$④ + ⑨ = 0 \tag{93}$$

$$⑤ + ⑩ + ⑭ = 0 \tag{94}$$

$$⑥ + ⑧ + ⑫ = 0 \tag{95}$$

ここでは、$U^{-1}(x)\left(\partial_\mu U(x)\right) = -\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) U(x)$, $\left(\partial_\nu U(x)\right) U^{-1}(x) = -U(x)\left(\partial_\nu U^{-1}(x)\right)$, $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ を用いた。(91)〜(95) を (90) に代入して

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x) = U(x) F_{\mu\nu}(x) U^{-1}(x) \tag{96}$$

を得る。

check 9.14

標準模型におけるヒッグス場 Φ は、$SU(3)$ カラーの添字は持たず（すなわち $SU(3)$ 1 重項)、$SU(2)$ に関しては 2 重項 $\Phi = (\phi^+, \phi^0)^T$ である。また、$U(1)_Y$ 電荷 $Y = +1$ を持つ。したがって、$SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ変換の下で次のように変換する。

$$\Phi \xrightarrow{SU(3)} \Phi, \quad \Phi \xrightarrow{SU(2)} U_2(x)\Phi, \quad \Phi \xrightarrow{U(1)_Y} e^{-i(g/2)\Lambda(x)}\Phi$$

（用語と記法については 7.5 節参照。）このとき、クォーク・レプトンとの（$SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ 不変な）湯川相互作用項をすべて書き下してみよう。

【ヒント】 $\widetilde{\Phi} \equiv i\sigma^2\Phi^*$ も Φ と同じ $SU(2)$ 変換性を持つことに注意せよ。(証明は、$\sigma^2(\sigma^a)^*\sigma^2 = -\sigma^a$ $(a = 1, 2, 3)$ を用いよ。ここで σ^a はパウリ行列である。）ヒッグス場は非自明な真空期待値 $v \equiv \langle 0|\Phi|0\rangle$ を持つ。そのとき、湯川相互作用項に含まれている Φ を v で置き換えたものは、クォーク・レプトンの質量項を与える。これが、クォーク・レプトンの質量起源である。

ここでは、第 1 世代のクォーク・レプトンとヒッグス場との $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ不変な湯川相互作用を求める。このためには、クォーク・レプトンとヒッグス場が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ変換の下で、どのような変換性を持つかを知る必要がある。

表 1 で $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2\Phi^*$ の変換性についてコメントしておいたほうがよいだろう。Φ^* に σ^2 をかけることにより、$SU(2)$ の変換性が Φ と同じになる。(i はここでは重要ではない。）これは $SU(2)$ の特殊性である。証明は、$SU(2)$ の変換行列 $U_2(x)$ がパウリ行列を用いて

$$U_2(x) = e^{i\sum_{a=1}^{3}\theta_a(x)\sigma^a} \tag{97}$$

と書けることと、

$$\sigma^2 \left(\sigma^a\right)^* \sigma^2 = -\sigma^a \qquad (a = 1, 2, 3) \tag{98}$$

	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	u_R	d_R	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix}$	e_R^-	$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	$\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2\Phi^*$
$SU(3)$	3	3	3	1	1	1	1
$SU(2)$	2	1	1	2	1	2	2
$U(1)_Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	1	-1

表 1: クォーク・レプトンとヒッグス場に対する $SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ ゲージ変換性。$SU(3)$ ($SU(2)$) で 3 (2) と書かれている量は 3 重項（2 重項）を表し、$\psi \to \psi' = U_3(x)\psi$ ($\psi \to \psi' = U_2(x)\psi$) のゲージ変換性を持つ。$SU(3)$ あるいは $SU(2)$ の変換性で 1 と書かれている量は、ゲージ不変であることを意味する。また、$U(1)_Y$ の欄に書かれている値は、$U(1)_Y$ 電荷 Y でゲージ変換性は $\psi \to \psi' = e^{-i\frac{g_1}{2}Y\Lambda(x)}$ で与えられる。（詳細は第 7 章をみよ。）

の関係をパウリ行列が満たすことを用いる。ここで、σ^a $(a = 1, 2, 3)$ はパウリ行列で、

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義されている。

証明は以下の通りである。ヒッグス場 Φ が $SU(2)$ ゲージ変換で

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = U_2(x)\,\Phi \tag{99}$$

と変換したとき、$\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi^*$ は次のように変換する。

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi^* \longrightarrow \tilde{\Phi}' \quad &\equiv \quad i\sigma^2\left(\Phi'\right)^* \\
&\overset{(97)(99)}{=} \quad i\sigma^2\left(e^{i\sum_a \theta_a(x)\sigma^a}\Phi\right)^* \\
&= \quad i\sigma^2 e^{-i\sum_a \theta_a(x)(\sigma^a)^*}\Phi^* \\
&= \quad i e^{-i\sum_a \theta_a(x)\sigma^2(\sigma^a)^*\sigma^2}\sigma^2\Phi^* \\
&\quad \left(\begin{array}{lll} \because \quad \sigma^2 e^X & = & \sigma^2 \sum_n \frac{1}{n!}X^n \\ & \overset{(\sigma^2)^2 = I_2}{=} & \sum_n \frac{1}{n!}\left(\sigma^2 X \sigma^2\right)^n \sigma^2 \\ & = & e^{\sigma^2 X \sigma^2}\sigma^2 \end{array}\right) \\
&\overset{(98)}{=} \quad i e^{i\sum_a \theta_a\sigma^a}\sigma^2\Phi^* \\
&= \quad U_2(x) i\sigma^2\Phi^* \\
&= \quad U_2(x)\tilde{\Phi}
\end{aligned} \tag{100}$$

したがって、$\tilde{\Phi}$ は Φ と同じ $SU(2)$ ゲージ変換性 (99) を持つことがわかる。

さて、$SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ ゲージ変換の下で不変な湯川相互作用項を得るために、次の事実が重要となる。もし、ψ_L と χ_R（L と R はカイラリティを表す）が同じ $SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ ゲージ変換性を持つならば、

$$\overline{\psi_L}\chi_R \quad \text{および} \quad \overline{\chi_R}\psi_L \tag{101}$$

は、$SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ ゲージ変換の下で不変である。なぜなら、一般に ψ のゲージ変換性が $\psi\to U\psi$ で与えられるなら、$\overline{\psi}$ のゲージ変換性は $\overline{\psi}\to\overline{\psi}U^{-1}$ で与えられ、$\overline{\psi}\psi$ の組み合わせはゲージ不変となるからである。(カイラリティの性質から $\overline{\psi_L}\psi_L$ や $\overline{\chi_R}\chi_R$ は恒等的に 0 となることに注意しておく。)

そこで表 2 の量を考えてみよう。

	$\Phi\,d_R$	$\tilde\Phi\,u_R$	$\Phi\,e_R^-$
$SU(3)$	3	3	1
$SU(2)$	2	2	2
$U(1)_Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1

表 2: クォーク d_R, u_R、レプトン e_R^- とヒッグス場 Φ(あるいは $\widetilde\Phi$)の組み合わせ:$\Phi\,d_R$, $\widetilde\Phi\,u_R$, $\Phi\,e_R^-$ は、それぞれ $\binom{u_L}{d_L}$, $\binom{u_L}{d_L}$, $\binom{\nu_{eL}}{e_L^-}$ と同じゲージ変換性を持つ。

表 2 から、ヒッグス場 Φ とクォーク d_R の積 Φd_R、ヒッグス場 $\tilde\Phi=i\sigma^2\begin{pmatrix}(\phi^+)^*\\(\phi^0)^*\end{pmatrix}$ とクォーク u_R の積 $\tilde\Phi u_R$、ヒッグス場 Φ とレプトン e_R^- の積 Φe_R^- を作ると、それぞれ $\begin{pmatrix}u_L\\d_L\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}u_L\\d_L\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\e_L^-\end{pmatrix}$ のゲージ変換性(表 1 参照)と一致していることがわかる。したがって、上で述べた一般論から、次の湯川相互作用項は、$SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$ ゲージ不変である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \;=\;& Y_d(\,\overline{u_L}\,,\,\overline{d_L}\,)\overbrace{\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}d_R}^{\Phi\,d_R}+Y_d^*\overbrace{\overline{d_R}\,(\,(\phi^+)^*\,,\,(\phi^0)^*\,)}^{\overline{d_R}\,\Phi^\dagger}\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}\\ &+Y_u(\,\overline{u_L}\,,\,\overline{d_L}\,)\overbrace{i\sigma^2\begin{pmatrix}(\phi^+)^*\\ (\phi^0)^*\end{pmatrix}u_R}^{\widetilde\Phi\,u_R}+Y_u^*\overbrace{\overline{u_R}\,(\,\phi^+\,,\,\phi^0\,)\,(-i\sigma^2)}^{\overline{u_R}\,\widetilde\Phi^\dagger}\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}\\ &+Y_e(\,\overline{\nu_{eL}}\,,\,\overline{e_L^-}\,)\overbrace{\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}e_R^-}^{\Phi\,e_R^-}+Y_e^*\overbrace{\overline{e_R^-}\,(\,(\phi^+)^*\,,\,(\phi^0)^*\,)}^{\overline{e_R^-}\,\Phi^\dagger}\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L^-\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{102}$$

これが、クォーク・レプトンとヒッグス場の湯川相互作用項である。Y_u, Y_d, Y_e は湯川結合定数とよばれ、一般に複素数で構わない。

標準模型ではヒッグス場 Φ は 0 でない真空期待値 $\langle\Phi\rangle$ を持つと仮定される。すなわち、

$$\langle\Phi\rangle=\begin{pmatrix}\langle\phi^+\rangle\\ \langle\phi^0\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{v}{\sqrt2}\end{pmatrix}\tag{103}$$

である。[2] ここで、v は実験から $v\simeq 246$ GeV で与えられることがわかっている。読者の皆さんは、(102) の中の Φ を $\langle\Phi\rangle=(0,v/\sqrt2)^T$ で置き換えることによって、(102) の第 1 項と第 2 項は d クォークの質量項、第 3 項と第 4 項は u クォークの質量項、第 5 項、第 6 項は電子 e^- の質量項を与えることを確かめてほしい。これは**ヒッグス機構**とよばれ、クォーク・レプトンの質量は、ヒッグス場の真空期待値 $\langle\Phi\rangle$ を通じて生成されるのである。

[2] $SU(2)$ 変換を用いることによって、一般性を失うことなく、真空期待値 $\langle\Phi\rangle$ を (103) の形に持っていくことができる。

≪ 9.7 節の補足説明 ≫

教科書本文 9.7 節に与えられている問題文とその解答例を下に与えておく。

$$\mathcal{L}(A_\mu, \Phi, \psi) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) - m_\Phi^2\Phi^*\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^*\Phi)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_\psi)\psi \tag{104}$$

この章の理解を確実なものにするために、これから述べる質問に答えてほしい。全問クリアできたなら、あなたは自然の真理の一端を理解したことになる。では、早速始めよう。

［1］ラグランジアン密度 (104) の第 1 項 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ で、ゲージ場 A_μ の規格化を適当に選べば比例係数は自由にとれる（ここでは $\frac{1}{4}$ にとった）が、全体の符号は負でなければならない。その理由を述べよ。また、この項は $U(1)$ ゲージ不変性を満たしているか？

(1) $A_\mu = \alpha A'_\mu$ と定義すれば、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ なので、$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{\alpha^2}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}$ となり、比例係数を自由に取れる。

(2) この項の全体の符号は、ゲージ場 A_i $(i = 1, 2, 3)$ の時間微分項 $\dot{A}_i$ の符号をみればよい。このとき、$(\dot{A}_i)^2$ の符号は正でなければならない。なぜなら、ラグランジアンからハミルトニアンに移ったときに、$\dot{A}_i$ の正準運動量 π_i の運動項の符号が正でなければならないからである。（ただし、A_0 は物理的自由度でないので、A_0 の項の符号は気にしなくてよい。）

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\Big\{ \sum_{i=1}^{3} \underbrace{F_{0i}F^{0i}}_{(F_{0i})^2} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{F_{i0}F^{i0}}_{(F_{0i})^2} + \sum_{i,j=1}^{3} F_{ij}F^{ij} \Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\Big\{ -2\sum_{i=1}^{3} (F_{0i})^2 + \cdots \Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\Big\{ -2\sum_{i=1}^{3} \big(\underbrace{\partial_0 A_i}_{\dot{A}_i} - \partial_i A_0\big)^2 + \cdots \Big\} \\
&= +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\dot{A}_i)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

上式 2 番目の等号では、$F^{0i} = -F_{0i}$ および $F_{0i} = -F_{i0}$ を用いた。$\dot{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の運動項は正しい符号で現れている。

【注】 古典力学では、ラグランジアン $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ からルジャンドル変換 $\dot{q} \to p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ で、下のようにハミルトニアンを定義する。

$$H \equiv p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

このとき、ハミルトニアンの運動項 $\frac{p^2}{2m}$ の符号が正になるためには、ラグランジアンの運動項 $\frac{m}{2}\dot{q}^2$ の符号が正でなければならない。

(3) ゲージ場の $U(1)$ ゲージ変換は、$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$ で与えられる。ここで、$\Lambda(x)$ は任意関数である。この変換の下で、次のように $F_{\mu\nu}$ 不変であることがわかる。

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ \longrightarrow\ & \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \\
=\ & \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda \\
=\ & \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\because\ \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu) \\
=\ & F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

[2] 第 2 項 $(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi$ で、スカラー場の規格化を適当に選べば比例係数は自由にとれる（ここでは 1 にとった）が、全体の符号は正でなければならない。なぜか？ また、共変微分 $D^\mu \Phi$ の定義と、なぜそのように定義しなければならないか、理由を述べよ。

(1) ハミルトニアンの運動量の項が正しい正の符号で現れるためには、ラグランジアン密度の中で、場 Φ の時間微分項 $\dot{\Phi}^* \dot{\Phi}$ の係数は正でなければならない。したがって、$(D_\mu \Phi)^* D^\mu \Phi = \left(\partial_0 \Phi\right)^* \partial^0 \Phi + \cdots = \dot{\Phi}^* \dot{\Phi} + \cdots$ の符号は正でなければならない。

(2) 共変微分 $D_\mu \Phi(x)$ の定義は、$\Phi(x)$ のゲージ変換 $\Phi(x) \to e^{-iq_\Phi \Lambda(x)} \Phi(x)$ の下で、$D_\mu \Phi(x)$ も $\Phi(x)$ と同じ変換性、すなわち、$D_\mu \Phi(x) \to e^{-iq_\Phi \Lambda(x)} D_\mu \Phi(x)$ をもつように決められる。この変換性をもつように、共変微分 $D_\mu \Phi(x)$ は、$D_\mu \Phi(x) \equiv (\partial_\mu + iq_\Phi A_\mu(x)) \Phi(x)$ と決まる。

[3] 第 3 項 $-m_\Phi^2 \Phi^* \Phi$ で、m_Φ をスカラー場の質量と解釈できるためには、この項の係数は $-m_\Phi^2$ でなければならない。なぜか？ m_Φ をスカラー場の質量とみなすことはせず、要請 4) の真空の存在を保証するだけなら m_Φ^2 の符号を $+$ としてもよいか？ また、この項はゲージ不変か？

(1) 質量項 $-m_\Phi^2 \Phi^* \Phi$ の係数は、ラグランジアン密度の中で、Φ の自由場部分（Φ, Φ^* に関して 2 次の項）から得られるオイラー–ラグランジュ方程式がクライン–ゴルドン方程式を満たすことから決まる。自由場のラグランジアン密度を、$\mathcal{L}(\Phi) = (\partial_\mu \Phi)^* \partial^\mu \Phi - \alpha m_\Phi^2 \Phi^* \Phi$ としたとき、このラグランジアン密度から得られるオイラー–ラグランジュ方程式は、

$$
\left[\partial_\mu \partial^\mu + \alpha m_\Phi^2\right] \Phi = 0
$$

となる。したがって、上式がクライン–ゴルドン方程式 $\left[\partial_\mu \partial^\mu + m_\Phi^2\right] \Phi = 0$ に一致するためには、$\alpha = 1$ でなければならない。このことから、符号も含めて質量項は $-m_\Phi^2 \Phi^* \Phi$ で与えられることがわかる。

(2) m_Φ をスカラー場の質量とみなすことはせず、要請 4) の真空の存在を保証するだけなら m_Φ^2 の符号を $+$ としてもよい。なぜなら、ポテンシャルが $V(\Phi)$ が $|\Phi| \to \infty$ で $V(\Phi) \xrightarrow{|\Phi| \to \infty} +\infty$ であればよいので、m_Φ^2 の符号にかかわらず、$V(\Phi) = m_\Phi^2 \Phi^* \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^* \Phi)^2$ で λ が正であればよいからである。

(3) $\Phi(x)$ と $\Phi^*(x)$ のゲージ変換性は、

$$\Phi(x) \to e^{-iq_\Phi \Lambda(x)}\Phi(x), \quad \Phi^*(x) \to e^{+iq_\Phi \Lambda(x)}\Phi^*(x)$$

で与えられるので、$\Phi^*(x)\Phi(x)$ は以下のようにゲージ不変である。

$$\Phi^*(x)\Phi(x) \ \longrightarrow \ \big(e^{+iq_\Phi \Lambda(x)}\Phi^*(x)\big)\big(e^{-iq_\Phi \Lambda(x)}\Phi(x)\big) = \Phi^*(x)\Phi(x)$$

[4] 第 4 項 $-\frac{\lambda}{4}(\Phi^*\Phi)^2$ で、比例係数 $\frac{1}{4}$ は結合定数 λ の規格化を適当に選べば自由にとれるが、$\lambda \geqq 0$ でなければならない。なぜか？ また、この項はゲージ不変か？ $g(\Phi^*)^2\Phi$ や $g\Phi^*(\Phi)^2$ の項はラグランジアン密度に加えることはできない。なぜか？

(1) 上でも述べたが、要請 $\mathring{4}$) の真空の存在を保証するためには、ポテンシャルが $V(\Phi)$ が $|\Phi| \to \infty$ で $V(\Phi) \xrightarrow{|\Phi|\to\infty} +\infty$ が満たされなければならない。したがって、$V(\Phi) = m_\Phi^2\Phi^*\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^*\Phi)^2$ で λ が正でなければならない。

(2) 上で確かめたように、$\Phi^*(x)\Phi(x)$ ゲージ不変量なので、$-\frac{\lambda}{4}(\Phi^*\Phi)^2$ もゲージ不変である。

(3) ゲージ変換の下で、

$$\begin{aligned}\big(\Phi^*(x)\big)^2\Phi(x) \ &\longrightarrow \ e^{+iq_\Phi \Lambda(x)}\,\big(\Phi^*(x)\big)^2\Phi(x)\\ \Phi^*(x)\big(\Phi(x)\big)^2 \ &\longrightarrow \ e^{-iq_\Phi \Lambda(x)}\,\Phi^*(x)\big(\Phi(x)\big)^2\end{aligned}$$

と変換され、ゲージ不変ではない。それゆえ、ラグランジアン密度には含めることは出来ない。

[5] 第 5 項 $\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi$ で、ディラック場の規格化を適当に選べば比例係数は自由にとれる（ここでは 1 にとった）。さらに、全体の符号は正でも負でもよい。その理由を説明せよ。また、$D_\mu\psi$ の定義を述べて、第 5 項がローレンツ不変でかつゲージ不変、および、（作用積分の意味で）エルミートであることを示せ。

(1) $x^\mu \to -x^\mu$（このとき、$\partial_\mu \to -\partial_\mu$）および $A_\mu \to -A_\mu$ の変換を考えると、共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - iq_\psi A_\mu$ は $D_\mu \to -D_\mu$ となり、符号を変える。しかし、これ以外の項はすべて ∂_μ あるいは A_μ に関して 2 次なので、符号を変えない。したがって、この変換の下で $\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi$ の符号をいつでも変えることができるので、この項の符号は + でも − でもどちらでもかまわない。

【注】 教科書では **【ヒント】** に、「γ^μ の代わりに $\gamma'^\mu \equiv -\gamma^\mu$ と選んでも、γ 行列の定義式 (4.7) を満たしているか？」と書きましたが、第 3 刷以降は上の (1) のように **【ヒント】** を修正しました。

(2) 共変微分 $D_\mu\psi(x)$ の定義は、$\psi(x)$ のゲージ変換 $\psi(x) \to e^{-iq_\psi\Lambda(x)}\psi(x)$ の下で、$D_\mu\psi(x)$ も $\psi(x)$ と同じ変換性、すなわち、$D_\mu\psi(x) \to e^{-iq_\psi\Lambda(x)}D_\mu\psi(x)$ をもつように決められる。この変換性をもつように、共変微分 $D_\mu\psi(x)$ は、$D_\mu\psi(x) \equiv (\partial_\mu + iq_\psi A_\mu(x))\psi(x)$ と決まる。

(3) $\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi$ がローレンツ不変量であることは、$\bar{\psi}i\gamma^\mu\psi$ が上付きのローレンツベクトル、D_μ が下付きのローレンツベクトルの変換性をもつことから、ローレンツ変換の性質からこの項がローレンツ不変量であることがわかる。

(4) 上の [2] で述べたように、$D_\mu\psi$ は ψ と同じ変換性をもつ。したがって、$\bar{\psi}$, $D_\mu\psi$ のゲージ変換性は、

$$D_\mu\psi(x) \to e^{-iq_\psi\Lambda(x)}D_\mu\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to e^{+iq_\psi\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)$$

で与えられる。このとき、$e^{\pm iq_\psi\Lambda(x)}$ 単なる数なので、γ 行列とは可換である。したがって、$\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi$ は上のゲージ変換の下で不変である。

(5) エルミート性については、次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}
\left(\int d^4x\,\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi\right)^\dagger &= \int d^4x\left(\psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu(\partial_\mu + iq_\psi A_\mu)\psi\right)^\dagger \\
&= \int d^4x\left(\psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu(iq_\psi A_\mu)\psi\right)^\dagger \\
&= \int d^4x\left((\partial_\mu\psi)^\dagger(-i)(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi + \psi^\dagger(-iq_\psi A_\mu)(-i)(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi\right) \\
&= \int d^4x\Big(-(\partial_\mu\psi)^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu\psi + \psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu(iq_\psi A_\mu)\psi\Big) \\
&\qquad \left(\because\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0,\ (\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu,\ \gamma\text{ 行列と } A_\mu \text{ は可換}\right) \\
&= \int d^4x\,\psi^\dagger\gamma^0 i\gamma^\mu(\partial_\mu + iq_\psi A_\mu)\psi \quad (\because\ \text{部分積分を行った。}) \\
&= \int d^4x\,\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi
\end{aligned}$$

[6] 第 6 項 $m_\psi\bar{\psi}\psi$ の符号は正でも負でもよい。なぜか？ m_ψ をディラック場の質量と解釈できるためには、この項の係数は（符号を除いて）1 でなければならない。なぜか？また、この項はゲージ不変でエルミートか？

(1) $\psi' \equiv \gamma^5\psi$ と定義して、ψ' で書き直すと、運動項は $\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi = \bar{\psi}'i\gamma^\mu D_\mu\psi'$ となり、符号はそのまま。一方、質量項は $m_\psi\bar{\psi}\psi = -m_\psi\bar{\psi}'\psi'$ と符号を変える。つまり、この変換でいつでも質量項の符号を変えることが出来るので、質量項 $m_\psi\bar{\psi}\psi$ の符号はどちらでもかまわない。

【注】 上の結果は、次の性質 $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$, $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, $(\gamma^5)^2 = \gamma^5$ から導かれる。

(2) ラグランジアン密度からオイラー–ラグランジュ方程式を導いたときに、ディラック方程式 $\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi\big)\psi = 0$ （あるいは $\big(i\gamma^\mu\partial_\mu + m_\psi\big)\psi = 0$）を ψ が満たす必要がある。そのためには、質量項は $m_\psi\bar{\psi}\psi$ あるいは $-m_\psi\bar{\psi}\psi$ でなければならない。

(3) ゲージ変換 $\psi(x) \to e^{-iq_\psi\Lambda(x)}\psi(x)$, $\bar{\psi}(x) \to e^{+iq_\psi\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)$ から、質量項 $m_\psi\bar{\psi}\psi$ はゲージ不変である。

(4) 質量項のエルミート性は、次のように確かめられる。

$$\left(\bar{\psi}\psi\right)^\dagger = \left(\psi^\dagger\gamma^0\psi\right)^\dagger = \psi^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi = \bar{\psi}\psi \qquad (\because\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0)$$

[7] ゲージ場の質量項 $\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$、および、湯川相互作用 $g\Phi\bar{\psi}\psi$ はこのラグランジアン密度に加えることはできない。なぜか？ ただし Φ の電荷は $q_\Phi \neq 0$ とする。

(1) ゲージ場の質量項 $\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$ は、ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)$ の下で不変ではないので、ラグランジアン密度に加えることは出来ない。

(2) 湯川相互作用 $g\Phi\bar{\psi}\psi$ はゲージ変換の下で、

$$g\Phi\bar{\psi}\psi \ \longrightarrow\ g\big(e^{-iq_\Phi\Lambda(x)}\Phi\big)\big(e^{iq_\psi\Lambda(x)}\bar{\psi}\big)\big(e^{-iq_\psi\Lambda(x)}\psi\big) = e^{-iq_\Phi\Lambda(x)}\,g\Phi\bar{\psi}\psi$$

となるので、Φ の電荷 q_Φ がゼロでない限り、ゲージ不変にはならない。

[8] ラグランジアン密度 (104) に現れている項は、すべて質量次元 4 以下であることを確かめよ。質量次元 4 以下の項は高々有限個しか作れない。なぜか？

(1) $\partial_\mu, \Phi, A_\mu$ の質量次元は $+1$、$\psi, \bar{\psi}$ の質量次元は $+\frac{3}{2}$ である。したがって、ラグランジアン密度 (104) に現れている項の（質量や結合定数を除いた）質量次元は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}&\big[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big] = 4,\ \big[(D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi)\big] = 4,\ \big[\Phi^*\Phi\big] = 2,\ \big[(\Phi^*\Phi)^2\big] = 4,\\ &\big[\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi\big] = 4,\ \big[\bar{\psi}\psi\big] = 3,\end{aligned}$$

(2) $\partial_\mu, \Phi, A_\mu, \psi, \bar{\psi}$ の質量次元はすべて正の値をもつので、これら積から作られる質量次元 4 までの項は有限個しかない。

[9] 電荷 q_Φ をもつ複素スカラー場と電荷 q_ψ をもつディラック場からなる $U(1)$ ゲージ理論のラグランジアン密度を（何も見ずに）書き下せ。

(1) 解答略。

[10] これまでの考察から、理論のラグランジアン密度の形を決定するのに必要な情報は何か、答えよ。

(1) 本質的なものは次の情報である。

・作用積分/ラグランジアン密度のもつ不変性
（相対論的不変性、大域的不変性、ゲージ不変性等）
・ラグランジアン密度に含まれる場の種類
（ラグランジアン密度 (104) で言えば、Φ と ψ）
・場の変換性
（ラグランジアン密度 (104) で言えば、Φ, ψ および A_μ のゲージ変換性）

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著

第１０章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2015/01/21
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 10 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 10.1 ～ check 10.15 の解答例

check 10.1

ルジャンドル変換とは、$\{q_i, \dot{q}_i\}$ を独立変数とする関数 $L(q, \dot{q})$ から、$\{q_i, p_i\}$ を独立変数とする新しい関数 $H(q, p)$ へ移る変換のことである。実際、ハミルトニアン (10.3) の変分 δH を計算して、(10.2) の関係を用いると、δq_i, δp_i, $\delta \dot{q}_i$ のうち $\delta \dot{q}_i$ に比例する項の係数は 0、すなわち、H は $\dot{q}_i$ の依存性を持たないことがわかる。このことを確かめてみよう。

ここでは、q_i, p_i, $\dot{q}_i$ に関してハミルトニアンの変分 δH を計算し、その変分に $\delta \dot{q}_i$ が現れないことを示す。

ハミルトニアン

$$H \equiv \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}) \tag{1}$$

の変分をとると

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \delta \dot{q}_i \, p_i + \dot{q}_i \, \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \, \delta q_i - \frac{\partial L}{\delta \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \, \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

となる。ここで、p_i の定義式

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3}$$

を用いると

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \dot{q}_i \, \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right\} \tag{4}$$

となり、$\delta \dot{q}_i$ の依存性は現れないことがわかる。したがって、ハミルトニアンは、q_i と p_i の関数とみなすことができる。

check 10.2

1 次元調和振動子模型の関係式 (10.7) ∼ (10.19) を再確認してみよう。これは、場の量子論へ入る前の準備作業である。

調和振動子模型における生成消滅演算子の理解は、場の量子論の粒子描像を理解する上で必要不可欠である。逆に言えば、場の量子論の粒子描像の本質は、調和振動子の生成消滅演算子にあるといっても過言ではない。もし、10.1 節に書かれていることに不安を覚えるなら、もう一度量子力学の教科書を読み返しておこう。

check 10.3

エルミート演算子 A の固有値 λ は実数であること ($\lambda^* = \lambda$)、および、異なる固有値に属する固有状態は直交すること ($\lambda \neq \lambda' \implies \langle u_{\lambda'}|u_\lambda\rangle = 0$) を証明してみよう。

【ヒント】 $A\,(= A^\dagger)$ は (10.20) のエルミート共役の式 $\langle u_\lambda| A = \lambda^* \langle u_\lambda|$ を満たす。また、内積は $\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle \neq 0$ を満たすものとする。

エルミート演算子 A の固有値および固有状態をそれぞれ λ および $|u_\lambda\rangle$ としておこう。このとき、次の関係が成り立つ。

$$A\,|u_\lambda\rangle = \lambda\,|u_\lambda\rangle \tag{5}$$

この関係式のエルミート共役をとり、A がエルミート ($A^\dagger = A$) を用いると

$$\langle u_\lambda|\,A = \lambda^*\,\langle u_\lambda| \tag{6}$$

が成り立つ。(5) と (6) を使って、$\langle u_\lambda|\,A\,|u_\lambda\rangle$ を 2 通りの方法で計算すると

$$\langle u_\lambda|\,A\,|u_\lambda\rangle \overset{(5)}{=} \lambda\;\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle \tag{7}$$

$$\langle u_\lambda|\,A\,|u_\lambda\rangle \overset{(6)}{=} \lambda^*\,\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle \tag{8}$$

が得られる。(7) と (8) の右辺は等しいはずなので

$$\begin{aligned}\lambda\,\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle = \lambda^*\,\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle \quad &\implies \quad (\lambda - \lambda^*)\,\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle = 0 \\ &\implies \quad \lambda = \lambda^* \end{aligned} \tag{9}$$

を得る。ここで、$\langle u_\lambda|u_\lambda\rangle \neq 0$ を用いた。(9) からエルミート演算子の固有値は実数であることがわかる。

次に、異なる固有値に属する固有状態は直交することを証明する。$|u_\lambda\rangle$ と $|u_{\lambda'}\rangle$ をそれぞれエルミート演算子 A の固有値 λ と λ' に属する固有状態とする。このとき、$\langle u_\lambda|\,A\,|u_{\lambda'}\rangle$ を 2 通りの方法で計算する。

$$\langle u_\lambda|\,A\,|u_{\lambda'}\rangle \overset{(5)}{=} \lambda'\,\langle u_\lambda|u_{\lambda'}\rangle \tag{10}$$

$$\langle u_\lambda|\,A\,|u_{\lambda'}\rangle \overset{(6)}{=} \lambda\,\langle u_\lambda|u_{\lambda'}\rangle \tag{11}$$

(11) では固有値 λ が実数であることを用いた。(10) と (11) の右辺は等しくなければならないので、

$$(\lambda - \lambda')\,\langle u_\lambda|u_{\lambda'}\rangle = 0 \tag{12}$$

が成り立つ。したがって、異なる固有値 ($\lambda \neq \lambda'$) に属する固有状態は直交する。すなわち、

$$\langle u_\lambda|u_{\lambda'}\rangle = 0 \qquad (\lambda \neq \lambda') \tag{13}$$

が成り立つ。

(!)

エルミート演算子の固有値が実数であることを上で“証明”したが、実は上の証明は厳密には正しくない。上の証明が厳密に成り立つためには、i) **固有値が離散的（飛び飛びの値をとる）**であ

ること、**ii) 状態の内積が正定値計量**であること（13.2.3 項および 13.3 節参照）の 2 つの条件が必要である。

連続固有値のときに、上の証明が成り立たない理由は次の通りである。通常、連続固有値の場合、$\langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle$ の規格直交性は

$$\langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \tag{14}$$

で与えられることが多い。このとき、$\lambda = \lambda'$ と形式的におくと、上式は $\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = \delta(0)$ となりデルタ関数の零点の発散を与え、数学的に意味を持たない。そのため (7) と (8) の右辺は数学的に ill-defined となっている。(第 2 章の『「量子力学は間違っている」は間違っている』の解説を参照。)

上で述べたこととは別の理由も存在する。(9) で $\lambda = \lambda^*$ を"導いた"直前の式は、$(\lambda - \lambda^*) \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 0$ である。このとき、$\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle \neq 0$ だから、$\lambda = \lambda^*$ が成り立たなければならないという論理だった。しかしながら、連続固有値のときは、この論理は必ずしも成り立たない。実際、

$$\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = \delta(\lambda - \lambda^*) \tag{15}$$

ならば、

$$(\lambda - \lambda^*) \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 0 \tag{16}$$

が成立し、$\lambda = \lambda^*$ という結論は導けない。(16) はデルタ関数の公式

$$x\,\delta(x) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{17}$$

を複素数に拡張したものだ。ここで問題となるのは、実数 x に対して成り立つ公式 (17) を複素数にまで拡張できるかである。これの答えは Yes であり、実際下の論文で具体的に複素変数に拡張されたデルタ関数の構成法が与えられている

H.Arisue, T.Fujiwara, T.Inoue and K.Ogawa, *Generalized Schrödinger representation and its application to gauge field theories*, **J. Math. Phys. 22** (1981) 2055.

上で述べた連続固有値の困難を避ける 1 つの方法は、連続固有値が離散的になるように理論を修正することである。例えば、連続的な運動量固有値を離散的固有値にするには、空間の大きさを無限大ではなく有限の大きさ L に限れば良い。境界条件として周期 L の周期的境界条件にとれば、運動量の固有値は $p = \frac{2\pi\hbar n}{L}$（$n$ は整数）となり、離散的となる。こうしておいて最後に $L \longrightarrow \infty$ の極限をとれば（つまり、$L = \infty$ の理論を $L \longrightarrow \infty$ の極限で定義することにすれば）、離散的固有値の結果が連続固有値の場合にも成り立つことになる。

固有値が離散的であっても、ゼロノルム状態 $\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 0$ が存在すると、今度も $(\lambda - \lambda^*) \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 0$ から $\lambda = \lambda^*$ は導けない。実際、このような状況でエルミート演算子の離散的固有値が純虚数で与えられる例が存在する。興味ある読者は以下の文献を読んでみるとよいだろう。

九後汰一郎著：「ゲージ場の量子論 I」（培風館、1989 年）の P.178。

check 10.4

フーリエ変換の手法を用いて、次の方程式の解 $f(x)$ を求めてみよう。

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + m^2 \right] f(x) = \rho(x)$$

ただし、$\rho(x)$ は与えられた関数である。

【ヒント】 $f(x)$ と $\rho(x)$ を $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \widetilde{f}(p) u_p(x),\ \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \widetilde{\rho}(p) u_p(x)$ とフーリエ変換して、$\widetilde{f}(p)$ と $\widetilde{\rho}(p)$ に関する方程式に書きかえよ。そして、$\widetilde{f}(p)$ に対して解を求めよ。

ヒントにあるように、$f(x)$ と $\rho(x)$ を次のようにフーリエ積分表示の形で表しておく。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \widetilde{f}(p)\, u_p(x) \tag{18}$$

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \widetilde{\rho}(p)\, u_p(x) \tag{19}$$

ここで、

$$u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \tag{20}$$

である。これは次の規格直交関係を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \left(u_{p'}(x)\right)^* \ u_p(x) = \delta(p-p') \tag{21}$$

(18) と (19) を方程式

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + m^2\right] f(x) = \rho(x) \tag{22}$$

に代入して

$$\frac{\partial}{\partial x}\, u_p(x) = ip\, u_p(x) \tag{23}$$

の関係を用いて変形すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\,(p^2+m^2)\,\widetilde{f}(p)\,u_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\widetilde{\rho}(p)\,u_p(x) \tag{24}$$

を得る。上式の両辺に $u_k^*(x)$ をかけて x で積分し、(21) を用いると次式を得る。

$$(k^2+m^2)\widetilde{f}(k) = \widetilde{\rho}(k) \quad\Longrightarrow\quad \widetilde{f}(k) = \frac{\widetilde{\rho}(k)}{k^2+m^2} \tag{25}$$

したがって、方程式 (22) の解がフーリエ積分表示の形で求まったことになる。すなわち、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\frac{\widetilde{\rho}(p)}{p^2+m^2}\,u_p(x) \tag{26}$$

である。（上式で与えられる $f(x)$ が、(22) を満たすことを直接確かめることもできる。）

check 10.5

(10.28) の第 1 式あるいは第 2 式のどちらか一方が成り立てば、もう片方は自動的に成り立つことを証明してみよう。また、a がエルミートならば、$\alpha = 0$ でなければならないことを示してみよう。

まず、次の対応関係

$$[\,A\,,\,a^\dagger\,] = \alpha\,a^\dagger \quad\Longleftrightarrow\quad [\,A\,,\,a\,] = -\alpha\,a \tag{27}$$

を証明する。ここで、A はエルミート演算子 ($A^\dagger = A$) である。また、α は実数である。(27) の左側の式のエルミート共役をとると

$$\begin{aligned}
&\left([\,A\,,\,a^\dagger\,]\right)^\dagger = \left(\alpha\,a^\dagger\right)^\dagger \\
&\quad\Longrightarrow\quad [\,\underbrace{(a^\dagger)^\dagger}_{a},\,\underbrace{A^\dagger}_{A}\,] = \underbrace{\alpha^*}_{\alpha}\underbrace{(a^\dagger)^\dagger}_{a} \qquad (\because\ (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger\,) \\
&\quad\Longrightarrow\quad [\,A\,,\,a\,] = -\alpha\,a \qquad (\because\ [\,A\,,\,B\,] = -[\,B\,,\,A\,]\,)
\end{aligned} \tag{28}$$

となり、(27) の右側の式が得られる。同様に、(27) の右側の式のエルミート共役をとると、左側の式が得られる。

演算子 a がエルミート ($a^\dagger = a$) ならば、(27) から $\alpha\, a = -\alpha\, a$ が成り立たなければならない。すなわち、$\alpha = 0$ でなければならない。

check 10.6

角運動量演算子 J^k $(k=1,2,3)$ の中に、生成消滅演算子が隠れていることを示してみよう。

【ヒント】 $\boldsymbol{J}^2$, J^3 と $J_\pm \equiv J^1 \pm iJ^2$ はどのような交換関係を満たすか？

各運動量演算子 $J^k\,(k=1,2,3)$ は、次の交換関係を満たす。

$$[\,J^1\,,\,J^2\,] = iJ^3, \quad [\,J^2\,,\,J^3\,] = iJ^1, \quad [\,J^3\,,\,J^1\,] = iJ^2 \tag{29}$$

これらの交換関係から

$$[\,\boldsymbol{J}^2\,,\,J_\pm\,] = 0 \tag{30}$$

$$[\,J^3\,,\,J_\pm\,] = \pm J_\pm \tag{31}$$

を満たすことがわかる。ここで、$\boldsymbol{J}^2$ と $J_\pm$ は次式で定義される。

$$\boldsymbol{J}^2 \equiv (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 \tag{32}$$

$$J_\pm \equiv J^1 \pm iJ^2 \tag{33}$$

したがって、$J_\pm$ は $\boldsymbol{J}^2$ の固有値を変えないが、J^3 の固有値を ±1 だけ変える生成消滅演算子となっている。

(!)

物理的には、$J_+(J_-)$ はスピンの大きさを変えないが、3 軸方向のスピン成分を 1 だけ増やす（減らす）働きを持つ演算子ということだ。

check 10.7

ラグランジアンが空間並進の下で不変となるためには、ポテンシャル $V(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N)$ にどのような制限がつくか考察してみよう。

【ヒント】 まずポテンシャルに対する並進不変性の条件 $(\delta_{\boldsymbol{P}} V = 0)$ が $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} V = 0$ となることを導け。次に変数 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$ の代わりに別の変数 $\{\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2,\, \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3,\, \cdots,\, \boldsymbol{X}_{N-1} = \boldsymbol{x}_{N-1} - \boldsymbol{x}_N,\, \boldsymbol{X}_N = \boldsymbol{x}_N\}$ を使って条件式を書き直すと $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}_N} V(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_N) = 0$ となることを示せ。

議論を明確にするため、以下では空間 1 次元の場合を取り扱う。（空間の 3 次元への拡張は自明であろう。）

ポテンシャル $V = V(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ に対する並進不変の条件は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_P V(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\
&\equiv \underbrace{V(x_1+\varepsilon, x_2+\varepsilon, \cdots, x_N+\varepsilon)}_{V(x_1,x_2,\cdots,x_N)+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}V(x_1,x_2,\cdots,x_N)} - V(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1, x_2, \cdots, x_N) = 0
\end{aligned} \tag{34}
$$

次に、変数 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ から別の変数 $\{X_1 = x_1 - x_2, X_2 = x_2 - x_3, \cdots, X_{N-1} = x_{N-1} - x_N, X_N = x_N\}$ への変数変換を考える。この変数変換の下で、$\{x_i\}$ の微分は $\{X_i\}$ の微分を使って次のように書きかえることができる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1} \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X_2} = -\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \\
\frac{\partial}{\partial x_3} &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial X_3} = -\frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3} \\
&\vdots \\
\frac{\partial}{\partial x_{N-1}} &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial X_{N-2}}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial}{\partial X_{N-2}} + \frac{\partial X_{N-1}}{\partial x_{N-1}}\frac{\partial}{\partial X_{N-1}} = -\frac{\partial}{\partial X_{N-2}} + \frac{\partial}{\partial X_{N-1}} \\
\frac{\partial}{\partial x_N} &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial X_j} = \frac{\partial X_{N-1}}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial X_{N-1}} + \frac{\partial X_N}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial X_N} = -\frac{\partial}{\partial X_{N-1}} + \frac{\partial}{\partial X_N}
\end{aligned} \tag{35}
$$

これらを用いると

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial X_1} + \left(-\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2}\right) + \left(-\frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_3}\right) \\
&\qquad + \cdots + \left(-\frac{\partial}{\partial X_{N-2}} + \frac{\partial}{\partial X_{N-1}}\right) + \left(-\frac{\partial}{\partial X_{N-1}} + \frac{\partial}{\partial X_N}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X_N}
\end{aligned} \tag{36}
$$

を得る。したがって、(34) は

$$
\begin{aligned}
(34) \quad \Longrightarrow\quad & \frac{\partial}{\partial X_N} V(X_1, X_2, \cdots, X_N) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & V = V(X_1, X_2, \cdots, X_{N-1}) \\
& \quad = V(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{N-1} - x_N)
\end{aligned} \tag{37}
$$

と解くことができる。

この結果は、並進不変なポテンシャルは**座標の差** $x_j - x_k$ のみの関数で与えられることを意味する。これはもっともな結論である。なぜなら、座標の差 $x_j - x_k$ は空間並進 $x_i \longrightarrow x_i + \varepsilon$ の下で不変だからである。まとめると

$$\begin{gathered} V = V(x_1, x_2, \cdots, x_N) \text{ が空間並進不変} \\ \Updownarrow \\ V = V(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{N-1} - x_N) \end{gathered} \tag{38}$$

である。

❗

V が $\{x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{N-1} - x_N\}$ の関数ならば、一般に $x_j - x_k$ $(j \neq k)$ の関数と言っても同じことだ。

check 10.8

変換 (10.42) が（無限小）空間回転を表していることを確かめよ。また、具体的に $\boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$ として、$\boldsymbol{x}'_a$ が z 軸まわりの無限小回転 (5.12) を正しく与えていることを確かめてみよう。

【ヒント】 変換 (10.42) が（無限小）空間回転を表していることを確かめるためには、この変換でベクトル $\boldsymbol{x}_a$ の長さが不変、すなわち、$\boldsymbol{\theta}$ の 2 次のオーダーを無視する近似の下で、$\boldsymbol{x}'_a \cdot \boldsymbol{x}'_a \simeq \boldsymbol{x}_a \cdot \boldsymbol{x}_a$ が成り立つことを確かめればよい。

無限小変換

$$\boldsymbol{x}_a \to \boldsymbol{x}'_a = \boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a \tag{39}$$

が無限小空間回転を表していることを確かめるには、（ヒントに書かれているように）この変換によってベクトル $\boldsymbol{x}_a$ の長さが不変、すなわち、$\boldsymbol{\theta}$ の 2 次のオーダーを無視する近似で $\boldsymbol{x}'_a \cdot \boldsymbol{x}'_a = \boldsymbol{x}_a \cdot \boldsymbol{x}_a$ を確かめれば良い。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'_a \cdot \boldsymbol{x}'_a &= (\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a) \cdot (\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a) \\ &= \boldsymbol{x}_a \cdot \boldsymbol{x}_a + 2\boldsymbol{x}_a \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a) \qquad (\because\ \boldsymbol{\theta} \text{ の 2 次の項を無視した。}) \\ &= \boldsymbol{x}_a \cdot \boldsymbol{x}_a \qquad (\because\ \text{ベクトルの外積の性質より、} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a \text{は } \boldsymbol{x}_a \text{と直交。}) \end{aligned} \tag{40}$$

次に、具体的に $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (0, 0, \theta)$ として、$\boldsymbol{x}'_a$ が z 軸周りの無限小回転

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'^1_a \\ x'^2_a \\ x'^3_a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1_a \\ x^2_a \\ x^3_a \end{pmatrix} \\ &\overset{|\theta| \ll 1}{\simeq} \begin{pmatrix} x^1_a - \theta x^2_a \\ \theta x^1_a + x^2_a \\ x^3_a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{41}$$

となっていることを確かめる。

$$
\begin{aligned}
x_a'^1 &= x_a^1 + (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a)^1 \\
&= x_a^1 + \underbrace{\theta^2}_{0} x_a^3 - \underbrace{\theta^3}_{\theta} x_a^2 \\
&= x_a^1 - \theta x_a^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_a'^2 &= x_a^2 + (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a)^2 \\
&= x_a^2 + \underbrace{\theta^3}_{\theta} x_a^1 - \underbrace{\theta^1}_{0} x_a^3 \\
&= x_a^2 + \theta x_a^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_a'^3 &= x_a^3 + (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x}_a)^3 \\
&= x_a^3 + \underbrace{\theta^1}_{0} x_a^2 - \underbrace{\theta^2}_{0} x_a^1 \\
&= x_a^3
\end{aligned}
$$

確かに、(41) の無限小空間回転を表していることがわかる。

check 10.9

不変性と保存量の関係は、正準交換関係 (10.5) やハイゼンベルグ方程式 (10.6) に対して新しい視点を与えてくれる。次の対応について論じてみよう。

$$
\begin{aligned}
\big[\, p_b \,,\, x_a \,\big] = -i\delta_{ba} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{運動量演算子が座標の無限小並進の生成子} \\
\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i\big[\, H \,,\, \mathcal{O} \,\big] \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{ハミルトニアンが時間の無限小並進の生成子}
\end{aligned}
$$

運動量演算子 p_a は、座標演算子 x_a の無限小並進 ($\delta x_a = \varepsilon$)

$$x_a \;\to\; x_a' = x_a + \varepsilon \equiv x_a + \delta x_a \tag{42}$$

を引き起こす生成子である。このことを式で表すと

$$[\, \underbrace{i\varepsilon p_a}_{\text{無限小並進の生成子}} \,,\, x_a \,] = \underbrace{\delta x_a}_{\text{無限小並進}} \tag{43}$$

となる。p_a は x_b ($b \neq a$) の並進は引き起こさないので、(43) をより一般の形で書くと

$$[\, i\varepsilon p_a \,,\, x_b \,] = \delta_{ab}\, \delta x_a \tag{44}$$

で与えられる。$\delta x_a = \varepsilon$ を上式に代入して、両辺から ε を取り除いたものが、正準交換関係

$$[\, p_a \,,\, x_b \,] = -i\delta_{ab} \tag{45}$$

に他ならない。したがって、正準交換関係 (45) は**『$\boldsymbol{p_a}$ が $\boldsymbol{x_a}$ に対する無限小並進の生成子である』**ことを表していると解釈することもできる。

正準交換関係 (45) において、運動量演算子と座標演算子は対等の関係にあるので、今度は x_b を基準に考えると、座標演算子 x_b は運動量 p_b の無限小並進 ($\delta p_b = -\omega$)

$$p_b \ \to \ p'_b = p_b - \omega \equiv p_b + \delta p_b \tag{46}$$

を引き起こす生成子と解釈することができる。実際、(43) からの類推より

$$[\ \underbrace{i\omega x_b}_{\text{無限小運動量並進の生成子}} \ , p_a \,] \ = \ \delta_{ba} \underbrace{\delta p_b}_{\text{無限小運動量並進}} \tag{47}$$

としたものは、やはり正準交換関係 (45) に一致することがわかる。したがって、正準交換関係 (45) は**『$\boldsymbol{x_a}$ が $\boldsymbol{p_a}$ に対する無限小運動量並進の生成子である』**と解釈することもできる。

次に、ハイゼンベルグの運動方程式

$$\frac{d\,\mathcal{O}(t)}{dt} = i\,[\,H\,,\,\mathcal{O}(t)\,] \tag{48}$$

を無限小変換の生成子の観点から考察しよう。ハミルトニアン H は、無限小時間並進の生成子であった。このことを式で表すと

$$[\,i\varepsilon H\,,\,\mathcal{O}(t)\,] = \delta\mathcal{O}(t) \tag{49}$$

となる。ここで、$\delta\mathcal{O}(t)$ は時間に対する無限小並進なので

$$\delta\mathcal{O}(t) \equiv \mathcal{O}(t+\varepsilon) - \mathcal{O}(t) = \varepsilon\,\frac{d\,\mathcal{O}(t)}{dt} \tag{50}$$

で与えられる。これを (49) に代入したものが、ハイゼンベルグの運動方程式 (48) に他ならない。つまり、ハイゼンベルグの運動方程式 (48) は、**『ハミルトニアン $\boldsymbol{H}$ が無限小時間並進の演算子である』**ことを式で表したものである。

check 10.10

$H, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ をそれぞれハミルトニアン、全運動量、全角運動量として、$[H, H] = 0$, $[H, \boldsymbol{P}] = 0$, $[H, \boldsymbol{L}] = 0$ を満たすとき、それぞれの式に対して 2 通りの物理的解釈を述べてみよう。

$H, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ はそれぞれ物理量として、エネルギー、運動量、角運動量を表すと同時に、無限小変換の生成子として、時間並進、空間並進、空間回転の生成子としての役割も持つ。これらの性質から、交換関係 $[\,H\,,\,H\,] = 0,\ [\,H\,,\,\boldsymbol{P}\,] = 0,\ [\,H\,,\,\boldsymbol{L}\,] = 0$ は次に述べるような物理的解釈を持つことがわかる。

(1) $[\,H\,,\,H\,] = 0$

ハミルトニアン H が（無限小）時間並進の生成子という観点から見ると、$[\,H\,,\,H\,] = 0$ は

$$\delta_H H = [\,i\varepsilon H\,,\,H\,] = 0 \tag{51}$$

と書き表すことができる。したがって、ハミルトニアン H は時間並進の下で不変 ($\delta_H H = 0$) であると解釈できる。

一方、ハミルトニアンは物理量としてエネルギーに対応するので、エネルギーの時間並進不変性は、エネルギー保存を意味する。

(!)

$[H\,,\,H] = 0$ は交換関係の定義から自明に成り立つ恒等式だが、物理的に重要な意味を持っている。不思議な関係式である。また、このことはエネルギー保存がハミルトニアンの詳細（理論の詳細）に依存しないことも意味する。

(2) $[H\,,\,\boldsymbol{P}] = 0$

(51) と同様の観点から見ると、$[H\,,\,\boldsymbol{P}]$ は

$$\delta_H \boldsymbol{P} = [i\varepsilon H\,,\,\boldsymbol{P}] = 0 \tag{52}$$

と書き表すことができ、運動量 $\boldsymbol{P}$ は時間並進の下で不変 ($\delta_H \boldsymbol{P} = 0$) であると解釈できる。したがって、運動量 $\boldsymbol{P}$ は保存 ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = 0$) することになる。

$[H\,,\,\boldsymbol{P}] = 0$ の場合は、別の解釈も可能となる。$\boldsymbol{P}$ は（無限小）空間並進の生成子なので、この観点から見ると、$[H\,,\,\boldsymbol{P}] = 0$ は

$$\delta_{\boldsymbol{P}} H = [i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{P}\,,\,H] = 0 \tag{53}$$

と書き表すことができ、ハミルトニアン H が空間並進の下で不変であると解釈できる。ハミルトニアは系のダイナミクス（時間発展）を決める量なので、この系は空間並進不変性を持つことがわかる。(運動量保存の背後には空間並進不変性があるということだ。)

(3) $[H\,,\,\boldsymbol{L}] = 0$

ハミルトニアン H が（無限小）時間並進の生成子という観点から見ると、$[H\,,\,\boldsymbol{L}] = 0$ は

$$\delta_H \boldsymbol{L} = [i\varepsilon H\,,\,\boldsymbol{L}] = 0 \tag{54}$$

と書き表すことができ、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は時間並進の下で不変 ($\delta_H \boldsymbol{L} = 0$) であると解釈できる。したがって、角運動量 $\boldsymbol{L}$ は保存 ($\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0$) することになる。

$\boldsymbol{P}$ と同様に別の解釈も可能になる。$\boldsymbol{L}$ は（無限小）空間回転の生成子なので、この観点から見ると、$[H\,,\,\boldsymbol{L}] = 0$ は

$$\delta_{\boldsymbol{L}} H = [i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{L}\,,\,H] = 0 \tag{55}$$

と書き表すことができ、ハミルトニアン H が空間回転の下で不変であると解釈できる。ハミルトニアンは系のダイナミクス（時間発展）を決める量なので、この系は空間回転不変性を持つことがわかる。(角運動量保存の背後には、空間回転不変性があるということだ。)

check 10.11

空間1次元の場合、$f(b) \equiv U_p(b)\,x\,U_p^{-1}(b) = e^{ibp}\,x\,e^{-ibp}$ が、$\frac{d}{db}f(b) = 1$、および $f(0) = x$ を満たすことを確かめ、その解を求めることによって、1次元の場合の (10.60) を証明してみよう。

ここでは、（空間１次元の場合で）ユニタリー演算子 $U_p(b) = e^{ibp}$ によって空間並進

$$U_p(b)\, x\, U_p^{-1}(b) = x + b \tag{56}$$

が引き起こされることを確かめる。

このために、$f(b) \equiv U_p(b)\, x\, U_p^{-1}(b) = e^{ibp} x e^{-ibp}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{db} f(b) &= \frac{d}{db}\left(e^{ibp} x e^{-ibp}\right) \\
&= \left(\frac{d}{db} e^{ibp}\right) x e^{-ibp} + e^{ibp} x \left(\frac{d}{db} e^{-ibp}\right) \\
&= e^{ibp}(ip) x e^{-ibp} + e^{ibp} x(-ip) e^{-ibp} \\
&= e^{ibp}\ i \underbrace{[\,p\,,\,x\,]}_{-i}\, e^{-ibp} \\
&= e^{ibp}\, e^{-ibp} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{57}$$

が成り立つことがわかる。上の３番目の等号では、$e^{\pm ibp}$ と p が可換であることを用いた。また、$b = 0$ とおくと

$$f(0) = x \tag{58}$$

となる。(57) および (58) から、$f(b)$ は

$$f(b) = x + b \tag{59}$$

に等しいことがわかる。（1 階常微分方程式 (57) の解は、初期条件 (58) の下で一意的である。）したがって、(56) が成り立つことがわかる。

check 10.12

(10.64) で x と y に対する関係式は、次式と等価であることを確かめてみよう。

$$U_{L_z}(\theta)\,(x \pm iy)\, U_{L_z}(\theta)^{-1} = e^{\pm i\theta}\,(x \pm iy) \qquad （複合同順） \tag{10.65}$$

次に、(10.65) の左辺を $f_\pm(\theta)$ とおいて θ で微分し、L_z と x, y の交換関係を用いることで $\frac{d}{d\theta} f_\pm(\theta) = \pm i f_\pm(\theta)$ の関係が成り立つことを導いてみよう。そして、その解が $f_\pm(\theta) = e^{\pm i\theta} f(0)$ で与えられることを確かめ、(10.65) を証明してみよう。

まず初めに

$$U_{L_z}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} U_{L_z}^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \tag{60}$$

と

$$U_{L_z}(\theta)\,(x \pm iy)\, U_{L_z}^{-1}(\theta) = e^{\pm i\theta}(x \pm iy) \tag{61}$$

が等価であることを証明する。ここで、$U_{L_z}(\theta)$ は

$$U_{L_z}(\theta) = \exp\{i\theta L_z\} = \exp\{i\theta(xp_y - yp_x)\} \tag{62}$$

で与えられるユニタリー演算子である。

(60) の関係を用いて (61) の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} U_{L_z}(\theta)\,(x \pm iy)\,U_{L_z}^{-1}(\theta) &= x\cos\theta - y\sin\theta \pm i\,(x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (\cos\theta \pm i\sin\theta)\;x \pm i\,(\cos\theta \pm i\sin\theta)\;y \\ &= e^{\pm i\theta}(x \pm iy) \end{aligned} \tag{63}$$

となり、(61) が確かめられる。

次に、(61) の関係を証明する。そのために、

$$f_\pm(\theta) \equiv U_{L_z}(\theta)(x \pm iy)U_{L_z}^{-1}(\theta) \tag{64}$$

とおくと、

$$\frac{d}{d\theta}f_\pm(\theta) = \pm i f_\pm(\theta) \tag{65}$$

が成り立つことを示す。実際、(62) の表式を用いて $f_\pm(\theta)$ を θ で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}f_\pm(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\Big(U_{L_z}(\theta)(x \pm iy)U_{L_z}^{-1}(\theta)\Big) \\ &= \left(\frac{d}{d\theta}U_{L_z}(\theta)\right)(x \pm iy)U_{L_z}^{-1}(\theta) + U_{L_z}(\theta)(x \pm iy)\left(\frac{d}{d\theta}U_{L_z}^{-1}(\theta)\right) \\ &\overset{(62)}{=} U_{L_z}(\theta)\;i(xp_y - yp_x)(x \pm iy)U_{L_z}^{-1}(\theta) \\ &\qquad + U_{L_z}(\theta)\;(x \pm iy)(-i)(xp_y - yp_x)U_{L_z}^{-1}(\theta) \\ &= U_{L_z}(\theta)\;i\;\underbrace{[\,xp_y - yp_x\,,\,x \pm iy\,]}_{-y[p_x,x] \pm ix[p_y,y]}U_{L_z}^{-1}(\theta) \\ &= U_{L_z}(\theta)\,i\big(-y(-i) \pm ix(-i)\big)\,U_{L_z}^{-1}(\theta) \\ &= \pm i\,U_{L_z}(\theta)\,(x \pm iy)\,U_{L_z}^{-1}(\theta) \\ &= \pm i f_\pm(\theta) \end{aligned} \tag{66}$$

となり、(65) が成り立つことがわかる。微分方程式 (65) の一般解は簡単に解けて

$$f_\pm(\theta) = e^{\pm i\theta}f_\pm(0) \tag{67}$$

で与えられる。

(65) は 1 階常微分方程式なので、一般解は 1 つの任意定数（積分定数）を含む。(67) の $f_\pm(0)$ がその任意定数に対応する。

(64) から $f_\pm(0) = x \pm iy$ なので、(67) に代入して、$f_\pm(\theta) = e^{\pm i\theta}(x \pm iy)$ すなわち、(61) が成り立つことがわかる。

check 10.13

$A(z) = z_{a_1} z_{a_2} \cdots z_{a_N}$ としたとき、$A(z)$ のユニタリー変換に関して、次式が成り立つことを証明してみよう。

$$e^{i\varepsilon Q} A(z)\, e^{-i\varepsilon Q} = A(e^{i\varepsilon Q} z\, e^{-i\varepsilon Q})$$

次に、ε を無限小量として展開し、ε の 1 次まで残すことによって

$$A(z) + [\, i\varepsilon Q\, ,\, A(z)\,] = A(z + [\, i\varepsilon Q\, ,\, z\,])$$

が成り立つことを確かめ、(10.68) が成り立つことを証明してみよう。

まず、$A(z) = z_{a_1} z_{a_2} \cdots z_{a_N}$ に対して、次式が成り立つことを証明する。

$$e^{i\varepsilon Q} A(z) e^{-i\varepsilon Q} = A(e^{i\varepsilon Q} z e^{-i\varepsilon Q}) \tag{68}$$

$e^{-i\varepsilon Q} e^{i\varepsilon Q} = 1$ を使って、上式の左辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned} e^{i\varepsilon Q} A(z) e^{-i\varepsilon Q} &= e^{i\varepsilon Q} z_{a_1} z_{a_2} \cdots z_{a_N} e^{-i\varepsilon Q} \\ &= (e^{i\varepsilon Q} z_{a_1} e^{-i\varepsilon Q})(e^{i\varepsilon Q} z_{a_2} e^{-i\varepsilon Q})(e^{i\varepsilon Q} z_{a_3} e^{-i\varepsilon Q}) \cdots (e^{i\varepsilon Q} z_{a_N} e^{-i\varepsilon Q}) \\ &\qquad (\because\ e^{-i\varepsilon Q} e^{i\varepsilon Q} = 1 \quad \text{を挿入した。}) \\ &= A(e^{i\varepsilon Q} z e^{-i\varepsilon Q}) \end{aligned} \tag{69}$$

したがって、(68) が成り立つことがわかる。

次に、(68) で ε を無限小量として展開し、ε の 1 次まで残すと

$$\begin{aligned} & e^{i\varepsilon Q} A(z) e^{-i\varepsilon Q} = A(e^{i\varepsilon Q} z e^{-i\varepsilon Q}) \\ &\qquad \Longrightarrow \quad (1 + i\varepsilon Q)\, A(z)\, (1 - i\varepsilon Q) = A\left((1 + i\varepsilon Q)\, z\, (1 - i\varepsilon Q)\right) \\ &\qquad \Longrightarrow \quad A(z) + [\, i\varepsilon Q\, ,\, A(z)\,] = A(z + [\, i\varepsilon Q\, ,\, z\,]) \end{aligned} \tag{70}$$

を得る。

最後に、(70) の関係を用いて、

$$\delta_Q A(z) = i\, [\, \varepsilon Q\, ,\, A(z)\,] \tag{71}$$

を確かめる。（ここでは、$z_a \equiv x_a$, $z_{a+n} = p_a$ $(a = 1, 2, \cdots, n)$ と定義している。）上式左辺の定義は

$$\delta_Q A(z) \equiv A(z + \delta_Q z) - A(z) \tag{72}$$

であり、$\delta_Q z$ は

$$\delta_Q z_a \equiv [\, i\varepsilon Q\, ,\, z_a\,] \qquad (a = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{73}$$

で与えられている。この定義を使って、(71) の左辺が (71) の右辺に等しいことを下で示す。

$$\begin{aligned} \delta_Q A(z) &\overset{(72)}{=} A(z + \delta_Q z) - A(z) \\ &\overset{(73)}{=} A(z + [\, i\varepsilon Q\, ,\, z\,]) - A(z) \\ &\overset{(70)}{=} [\, i\varepsilon Q\, ,\, A(z)\,] \\ &\Longrightarrow (71) \end{aligned} \tag{74}$$

check 10.14

(10.90) で定義される $\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$ が保存則 (10.91) を満たすことを、$T^{\mu\nu}$ の性質 ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) を使って示してみよう。

ここでは、

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} \equiv x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\lambda} \tag{75}$$

が保存則

$$\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} = 0 \tag{76}$$

を満たすことを、$T^{\mu\nu}$ の性質

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0 \qquad (T^{\mu\nu}\text{は保存}) && (77)\\ T^{\mu\nu} &= T^{\nu\mu} \qquad (T^{\mu\nu}\text{は対称テンソル}) && (78) \end{aligned}$$

を使って証明する。

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} &\overset{(75)}{=} \partial_\mu \left(x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\lambda} \right) \\ &= \delta_\mu{}^\lambda T^{\mu\nu} + x^\lambda \underbrace{\partial_\mu T^{\mu\nu}}_{0} - \delta_\mu{}^\nu T^{\mu\lambda} - x^\nu \underbrace{\partial_\mu T^{\mu\lambda}}_{0} \\ &= T^{\lambda\nu} - T^{\nu\lambda} \\ &\overset{(78)}{=} 0 \end{aligned} \tag{79}$$

したがって、$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$ の保存は、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の性質（(77) と (78)）から保証されていることになる。

check 10.15

保存カレント (10.98) を別の方法で導いてみよう。(9.31) の作用積分 $S = \int d^4x \left\{ \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - V(|\Phi|^2) \right\}$ で、次の無限小変換

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = \Phi(x) + \delta_Q \Phi(x) = \Phi(x) - iq\theta(x)\Phi(x)$$

を行い、S の変化分 $\delta_Q S$ が

$$\delta_Q S = \int d^4x \left(\partial_\mu \theta(x) \right) j^\mu(x)$$

で与えられることを確かめてみよう。ここで、$\theta(x)$ は x^μ の任意の（無限小）関数で、j^μ は (10.98) で定義された量である。次に $\Phi(x)$ が運動方程式（すなわち、任意の変分 $\delta\Phi$ に対して作用原理 $\delta S = 0$）に従うならば、$j^\mu(x)$ は保存カレント、すなわち、$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ を満たすことを示してみよう。

この問題は、ネーターの定理を用いない、保存カレントの導出法に関するものである。

次の作用積分

$$S=\int d^4x\,\left\{(\partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\Phi)-V(|\Phi|^2)\right\} \tag{80}$$

に対して次の無限小変換を考える。

$$\Phi(x)\ \to\ \Phi'(x)=\Phi(x)+\delta_Q\Phi(x)=\Phi(x)-iq\theta(x)\Phi(x) \tag{81}$$

ここで、$\theta(x)$ は x に依存した無限小パラメータであることに注意しておく。$\theta(x)$ が x に依存しない定数 ($\theta(x)=\theta$) の場合は、(81) の変換の下で作用積分 (80) は不変だが、$\theta(x)$ が x に依存していると、一般に作用積分は不変ではない。この点が、この問題のポイントである。

実際、(81) の変換の下で作用積分 (80) の変化分 δ_QS を計算すると

$$\begin{aligned}
\delta_QS &= \delta_Q\left[\int d^4x\,\left\{(\partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\Phi)-V(|\Phi|^2)\right\}\right]\\
&= \int d^4x\left\{(\partial_\mu\delta_Q\Phi^*)(\partial^\mu\Phi)+(\partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\delta_Q\Phi)-\underbrace{\delta_QV(|\Phi|^2)}_{0}\right\}\\
&= \int d^4x\left\{\partial_\mu\left(-iq\theta(x)\Phi\right)^*(\partial^\mu\Phi)+(\partial_\mu\Phi)^*\,\partial^\mu\left(-iq\theta(x)\Phi\right)\right\}\\
&= \int d^4x\Big\{+iq\left(\partial_\mu\theta(x)\right)\Phi^*(\partial^\mu\Phi)+iq\theta(x)(\partial_\mu\Phi)^*(\partial^\mu\Phi)\\
&\qquad\qquad -iq(\partial_\mu\Phi^*)\left(\partial^\mu\theta(x)\right)\Phi-iq\left(\partial_\mu\Phi^*\right)\theta(x)\left(\partial^\mu\Phi\right)\Big\}\\
&= \int d^4x\ (\partial_\mu\theta(x))\left[iq\left(\Phi^*\partial^\mu\Phi-(\partial_\mu\Phi^*)\,\Phi\right)\right]\\
&\equiv \int d^4x\ \left(\partial_\mu\theta(x)\right)\ j^\mu(x)
\end{aligned} \tag{82}$$

となる。ここで、$j^\mu(x)$ は次式で与えられる。

$$j^\mu(x)\equiv iq\left(\Phi^*(x)\partial^\mu\Phi(x)-\left(\partial^\mu\Phi^*(x)\right)\Phi(x)\right) \tag{83}$$

これは、求めたかった保存カレントに他ならない。

$j^\mu(x)$ が保存すること ($\partial_\mu j^\mu=0$) は、次のようなロジックから結論付けることができる。複素スカラー場 $\Phi(x)$ の運動方程式は、変分原理 $\delta S=0$ から導かれる。逆に $\Phi(x)$ が運動方程式を満たすならば、任意の変分 $\delta\Phi(x)$ に対して $\delta S=0$ が成り立つ。このとき、$\delta\Phi(x)$ は任意の変分でよいので、(81) で定義される $\delta_Q\Phi$ に対しても $\delta_QS=0$ は成り立っているはずである。すなわち、$\Phi(x)$ が運動方程式を満たしているならば、任意の $\theta(x)$ に対して

$$\begin{aligned}
0=\delta_QS &\overset{(82)}{=} \int d^4x\ \left(\partial_\mu\theta(x)\right)j^\mu(x)\\
&= -\int d^4x\,\theta(x)\,\partial_\mu j^\mu(x)
\end{aligned} \tag{84}$$

が成り立たなければならない。（ここで、最後の等号では部分積分を行い、表面項を落とした。）上式が任意の $\theta(x)$ に対して成り立つためには、$j^\mu(x)$ は保存する、すなわち

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0 \tag{85}$$

が成り立たなければならないことがわかる。

(82) では $\theta(x)$ に微分がかかった項しか現れなかった。これは、$\theta(x) = \theta$ としたとき、(81) の変換は作用積分の不変性だからである。つまり、$\delta_Q S \neq 0$ となった要因は、$\theta(x)$ が x 依存性を持ったため、すなわち、$\partial_\mu \theta(x) \neq 0$ だからである。ここで用いた方法は、ネーターの定理を用いずに保存カレント $j^\mu(x)$ を求める便利な方法である。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第１１章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2015/02/25
解答例の誤植を修正。check 11.8 の解答をより詳細に記述しました。

2014/04/09
第 11 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 11.1 ∼ check 11.16 の解答例

check 11.1

公式 (11.13) を確かめ、より一般的に $[\,A_1A_2\cdots A_N\,,\,B_1B_2\cdots B_M\,]$ の交換関係は、$[A_i, B_j]$ $(i = 1, 2, \cdots, N;\ j = 1, 2, \cdots, M)$ の交換関係の計算に帰着することを示してみよう。

まず初めに、次の公式を確かめる。

$$[\,A_1A_2\cdots A_N\,,\,X\,] = \sum_{k=1}^{N} A_1\cdots A_{k-1}\,[\,A_k\,,\,X\,]\,A_{k+1}\cdots A_N \tag{1}$$

$$[\,X\,,\,B_1B_2\cdots B_N\,] = \sum_{k=1}^{N} B_1\cdots B_{k-1}\,[\,X\,,\,B_k\,]\,B_{k+1}\cdots B_N \tag{2}$$

上の証明は、右辺から左辺を示すのが簡単だ。交換関係の定義にしたがって (1) および (2) の右辺をばらすと、ほとんどの項は両隣の項と相殺して、最終的に (1) および (2) の左辺の交換関係にまとまることがわかる。

(1) の右辺

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N} A_1\cdots A_{k-1}\,[\,A_k\,,\,X\,]\,A_{k+1}\cdots A_N \\
&= A_1\cdots A_{N-1}\,[\,A_N\,,\,X\,] + A_1\cdots A_{N-2}\,[\,A_{N-1}\,,\,X\,]\,A_N + \cdots + [\,A_1\,,\,X\,]\,A_2\cdots A_N \\
&= A_1\cdots A_{N-1}\,(A_NX - XA_N) \\
&\qquad + A_1\cdots A_{N-2}\,(A_{N-1}X - XA_{N-1})\,A_N \\
&\qquad + A_1\cdots A_{N-3}\,(A_{N-2}X - XA_{N-2})\,A_{N-1}A_N \\
&\qquad + \cdots \\
&\qquad + A_1\,(A_2X - XA_2)\,A_3\cdots A_N \\
&\qquad + (A_1X - XA_1)\,A_2\cdots A_N \\
&= A_1A_2\cdots A_NX - XA_1A_2\cdots A_N \\
&= [\,A_1A_2\cdots A_N\,,\,X\,] \\
&= \text{(1) の左辺}
\end{aligned} \tag{3}$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
&(2)\text{ の右辺}\\
&\quad= \sum_{k=1}^{N} B_1\cdots B_{k-1}\,[\,X\,,\,B_k\,]\,B_{k+1}\cdots B_N\\
&\quad= [\,X\,,\,B_1\,]\,B_2\cdots B_N + B_1\,[\,X\,,\,B_2\,]\,B_3\cdots B_N + \cdots + B_1\cdots B_{N-1}\,[\,X\,,\,B_N\,]\\
&\quad= (XB_1 - B_1X)\,B_2\cdots B_N\\
&\qquad\qquad +B_1\,(XB_2 - B_2X)\,B_3\cdots B_N\\
&\qquad\qquad +B_1B_2\,(XB_3 - B_3X)\,B_4\cdots B_N\\
&\qquad\qquad +\cdots\\
&\qquad\qquad +B_1\cdots B_{N-2}\,(XB_{N-1} - B_{N-1}X)\,B_N\\
&\qquad\qquad +B_1\cdots B_{N-1}\,(XB_N - B_NX)\\
&\quad= XB_1B_2\cdots B_N - B_1B_2\cdots B_NX\\
&\quad= [\,X\,,\,B_1B_2\cdots B_N\,]\\
&\quad= (2)\text{ の左辺}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

公式 (1) と (2) を用いれば、一般の交換関係 $[\,A_1A_2\cdots A_N\,,\,B_1B_2\cdots B_M\,]$ も次のように $[\,A_k\,,\,B_l\,]$ $(k=1,2,\cdots,N\,;\ l=1,2,\cdots M)$ の交換関係に帰着することがわかる。

$$
\begin{aligned}
&[\,A_1A_2\cdots A_N\,,\,B_1B_2\cdots B_M\,]\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{N} A_1\cdots A_{k-1}\,[\,A_k\,,\,B_1B_2\cdots B_M\,]\,A_{k+1}\cdots A_N\\
&\qquad\qquad (\because\ B_1B_2\cdots B_N\text{をひとかたまりにして、公式 (1) を用いた。})\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{N} A_1\cdots A_{k-1}\left(\sum_{l=1}^{M} B_1\cdots B_{l-1}\,[\,A_k\,,\,B_l\,]\,B_{l+1}\cdots B_M\right)A_{k+1}\cdots A_N\\
&\qquad\qquad (\because\ \text{公式 (2) を用いた。})\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} A_1\cdots A_{k-1}B_1\cdots B_{l-1}\,[\,A_k\,,\,B_l\,]\,B_{l+1}\cdots B_MA_{k+1}\cdots A_N
\end{aligned}
\tag{5}
$$

check 11.2

(11.8) で定義されるエネルギー運動量演算子 $P^\mu = (H, P^j)$ は互いに可換、すなわち $[\,P^\mu\,,\,P^\nu\,] = 0$ であることを、交換関係 (11.6) を用いて具体的に確かめてみよう。

【ヒント】 $[P^j, H] = 0$ $(j = 1,2,3)$ を証明するには、ハミルトニアン H を $H = \int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})$ と表し、P^j と $\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})$ との交換関係が $[P^j, \mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})] = -i\partial^j\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})$ となることを示せばよい。（これは (11.9) の拡張である。）この関係が示されれば、$[P^j, H] = -i\int d^3\boldsymbol{x}\,\partial^j\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x}) = 0$ が導かれる。$[P^j, P^k] = 0$ の証明も同様である。

$[\,P^\mu\,,\,P^\nu\,]=0$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ の証明は、次の交換関係を確かめれば十分である。

$$\begin{aligned}\left[\,P^j\,,\,H\,\right] &= 0 \qquad (j=1,2,3) \quad (6)\\ \left[\,P^j\,,\,P^k\,\right] &= 0 \qquad (j\neq k=1,2,3) \quad (7)\end{aligned}$$

ここで、H と P^j は次式で与えられている。

$$H=P^0=\int d^3\boldsymbol{x}\ \left\{\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2+\frac{m^2}{2}\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right\} \quad (8)$$

$$P^j=\int d^3\boldsymbol{x}\ \pi\partial^j\phi \qquad (j=1,2,3) \quad (9)$$

(6) と (7) を示す前に、同時刻交換関係

$$[\,\phi(t,\boldsymbol{x})\,,\,\pi(t,\boldsymbol{y})\,]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (10)$$

$$[\,\phi(t,\boldsymbol{x})\,,\,\phi(t,\boldsymbol{y})\,]=[\,\pi(t,\boldsymbol{x})\,,\,\pi(t,\boldsymbol{y})\,]=0 \quad (11)$$

を用いて、次の交換関係を導いておく。

$$\begin{aligned}\left[\,P^j\,,\,\phi(t,\boldsymbol{x})\right] &= -i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x}) \quad (12)\\ \left[\,P^j\,,\,\pi(t,\boldsymbol{x})\right] &= -i\partial^j\pi(t,\boldsymbol{x}) \quad (13)\end{aligned}$$

これは、P^j が空間並進の生成子であることを意味している。(12) は教科書本文中で証明しているので、以下では (13) を確かめておく。

$$\begin{aligned}&\left[\,P^j\,,\,\pi(t,\boldsymbol{x})\right]\\ &= \left[\int d^3\boldsymbol{y}\,\pi(t,\boldsymbol{y})\,\partial_y^j\phi(t,\boldsymbol{y})\ ,\ \pi(t,\boldsymbol{x})\right]\\ &\qquad (\because \text{積分変数は}\pi(t,\boldsymbol{x})\text{ と文字がかぶらないように、}\boldsymbol{y}\text{ を使った。})\\ &= \int d^3\boldsymbol{y}\ \pi(t,\boldsymbol{y})\left[\,\partial_y^j\phi(t,\boldsymbol{y})\ ,\ \pi(t,\boldsymbol{x})\right] \qquad (\because \pi(t,\boldsymbol{y})\text{ と}\pi(t,\boldsymbol{x})\text{ は可換。})\\ &= \int d^3\boldsymbol{y}\ \pi(t,\boldsymbol{y})\ \partial_y^j\ \underbrace{\left[\,\phi(t,\boldsymbol{y})\ ,\ \pi(t,\boldsymbol{x})\right]}_{i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\\ &= \int d^3\boldsymbol{y}\ \left(-i\partial_y^j\pi(t,\boldsymbol{y})\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (\because \text{部分積分を行った。})\\ &= -i\partial^j\pi(t,\boldsymbol{x}) \quad (14)\end{aligned}$$

これで、(13) が確かめられた。

次に、

$$H\equiv\int d^3\boldsymbol{x}\ \mathcal{H}(t,\boldsymbol{x}), \quad P^k\equiv\int d^3\boldsymbol{x}\ \mathcal{P}^k(t,\boldsymbol{x}) \quad (15)$$

とおいて、

$$\begin{aligned}\left[\,P^j\,,\,\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})\right] &= -i\partial^j\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x}) \quad (16)\\ \left[\,P^j\,,\,\mathcal{P}^k(t,\boldsymbol{x})\right] &= -i\partial^j\mathcal{P}^k(t,\boldsymbol{x}) \quad (17)\end{aligned}$$

を導く。(これらの関係式は、P^j が空間並進の生成子であることを一般的に示したものである。)

$$
\begin{aligned}
&\left[\,P^j\,,\,\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})\,\right] \\
&= \quad \left[\,P^j\,,\,\frac{1}{2}\left(\pi(t,\boldsymbol{x})\right)^2+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2+\frac{m^2}{2}\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2+\frac{\lambda}{4!}\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^4\,\right] \\
&= \quad \frac{1}{2}\Big\{\,\left[P^j,\pi(t,\boldsymbol{x})\right]\pi(t,\boldsymbol{x})+\pi(t,\boldsymbol{x})\left[P^j,\pi(t,\boldsymbol{x})\right]\,\Big\} \\
&\qquad +\frac{1}{2}\Big\{\,\left(\boldsymbol{\nabla}\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\right)\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{\nabla}\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\,\Big\} \\
&\qquad +\frac{m^2}{2}\Big\{\,\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\phi(t,\boldsymbol{x})+\phi(t,\boldsymbol{x})\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\,\Big\} \\
&\qquad +\frac{\lambda}{4!}\Big\{\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^3+\phi(t,\boldsymbol{x})\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2 \\
&\qquad\quad +\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\phi(t,\boldsymbol{x})+\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^3\left[P^j,\phi(t,\boldsymbol{x})\right]\Big\} \\
&\overset{(12)(13)}{=} \quad \frac{1}{2}\Big\{\,\left(-i\partial^j\pi(t,\boldsymbol{x})\right)\pi(t,\boldsymbol{x})+\pi(t,\boldsymbol{x})\left(-i\partial^j\pi(t,\boldsymbol{x})\right)\,\Big\} \\
&\qquad +\frac{1}{2}\Big\{\boldsymbol{\nabla}\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\ \boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{\nabla}\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\,\Big\} \\
&\qquad +\frac{m^2}{2}\Big\{\,\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\phi(t,\boldsymbol{x})+\phi(t,\boldsymbol{x})\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\,\Big\} \\
&\qquad +\frac{\lambda}{4!}\Big\{\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^3+\phi(t,\boldsymbol{x})\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2 \\
&\qquad\quad +\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\phi(t,\boldsymbol{x})+\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^3\left(-i\partial^j\phi(t,\boldsymbol{x})\right)\Big\} \\
&= \quad -i\partial^j\left\{\frac{1}{2}\left(\pi(t,\boldsymbol{x})\right)^2+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2+\frac{m^2}{2}\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2+\frac{\lambda}{4!}\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^4\right\} \\
&= \quad -i\partial^j\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{18}
$$

ここで 4 番目の等号で用いたものは、微分演算子が満たすライプニッツ則

$$
\begin{aligned}
&\partial^j\left(A_1(\boldsymbol{x})A_2(\boldsymbol{x})\cdots A_N(\boldsymbol{x})\right) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{N}A_1(\boldsymbol{x})\cdots A_{k-1}(\boldsymbol{x})\left(\partial^jA_k(\boldsymbol{x})\right)A_{k+1}(\boldsymbol{x})\cdots A_N(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{19}
$$

である。(17) の証明も全く同様に示すことができる。

(16) と (17) が確かめられれば、(6) と (7) の証明はほとんど自明である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\left[\,P^j\,,\,H\,\right] &= \left[\,P^j\,,\int d^3\boldsymbol{x}\ \mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})\,\right] \\
&\overset{(16)}{=} -i\int d^3\boldsymbol{x}\ \partial^j\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x}) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\,P^j\,,\,P^k\,\right] &= \left[\,P^j\,,\int d^3\boldsymbol{x}\mathcal{P}^k(t,\boldsymbol{x})\,\right] \\
&\overset{(17)}{=} -i\int d^3\boldsymbol{x}\ \partial^j\mathcal{P}^k(t,\boldsymbol{x}) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる。ここでは、表面項はゼロとなることを用いた。

この問題で使われた重要な性質は、P^j と任意の演算子 $\mathcal{O}(t,\boldsymbol{x})$ に対する次の交換関係

$$\big[\, P^j\, ,\, \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x}) \,\big] = -i\partial^j \mathcal{O}(t,\boldsymbol{x}) \tag{22}$$

である。これは、演算子の積に対する交換関係と微分演算子 ∂^j の満たすライプニッツ則の次の対応に基づいて導かれる。

$$\begin{aligned}
&\big[\, P^j\, ,\, A_1(t,\boldsymbol{x})A_2(t,\boldsymbol{x})\cdots A_N(t,\boldsymbol{x}) \,\big] \\
&\quad = \sum_{k=1}^{N} A_1(t,\boldsymbol{x})\cdots A_{k-1}(t,\boldsymbol{x})\,\big[\, P^j\, , A_k(t,\boldsymbol{x}) \,\big]\, A_{k+1}(t,\boldsymbol{x})\cdots A_N(t,\boldsymbol{x}) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{N} A_1(t,\boldsymbol{x})\cdots A_{k-1}(t,\boldsymbol{x})\,\big(-i\partial^j A_k(t,\boldsymbol{x})\big)\, A_{k+1}(t,\boldsymbol{x})\cdots A_N(t,\boldsymbol{x}) \\
&\quad = -i\partial^j \big(\, A_1(t,\boldsymbol{x})A_2(t,\boldsymbol{x})\cdots A_N(t,\boldsymbol{x}) \,\big)
\end{aligned} \tag{23}$$

check 11.3

(11.17) $\sim$ (11.20) を導いてみよう。

【ヒント】(11.17) の証明は、11.1.3 項での (11.13) から下の議論をしっかり身に付けていれば、それほど難しい計算ではないだろう。(11.19) の証明は、$J^{ij} = \int d^3\boldsymbol{x}\, \pi(t,\boldsymbol{x})\, (x^i\partial_x^j - x^j\partial_x^i)\, \phi(t,\boldsymbol{x})$, $J^{kl} = \int d^3\boldsymbol{y}\, \pi(t,\boldsymbol{y})\, (y^k\partial_y^l - y^l\partial_y^k)\, \phi(t,\boldsymbol{y})$ とおき、同時刻交換関係 (11.6) と公式 (11.13) を用いて $[\, J^{ij}\, ,\, J^{kl}\,]$ を計算すればよい。そのとき、$[\, \pi(t,\boldsymbol{x})\, ,\, (y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i)\phi(t,\boldsymbol{y})\,] = (y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i)\,[\, \pi(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \phi(t,\boldsymbol{y})\,] = -i\,(y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i)\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 等の計算と部分積分の公式を用いよ。($\partial_y^j = \partial/\partial y_j = -\partial/\partial y^j$ であることに注意。) (11.18) の証明は、まず無限小変換 ($|\Delta\theta| = |\theta/N| \ll 1$) のときに $e^{-i\Delta\theta J^{12}}\phi(t,\boldsymbol{x})e^{i\Delta\theta J^{12}} = \phi(t,\boldsymbol{x}')$ が成り立つことを、(11.17) を使って確かめよ。このとき、$\boldsymbol{x}'$ は

$$\boldsymbol{x}' = R(\Delta\theta)\,\boldsymbol{x}, \quad R(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\theta) & -\sin(\Delta\theta) & 0 \\ \sin(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義され、$R(\Delta\theta)$ は z 軸まわりの回転行列である。有限の θ の場合は、$\big(e^{-i\Delta\theta J^{12}}\big)^N = e^{-i\theta J^{12}}$, $\big(R(\Delta\theta)\big)^N = R(\theta)$ を用いよ。

ここでは、以下の 4 つの関係式

$$\big[\, J^{ij}\, ,\, \phi(x) \,\big] = -i\,\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,\phi(x) \tag{24}$$

$$e^{-i\theta J^{12}}\phi(t,x^1,x^2,x^3)\,e^{i\theta J^{12}} = \phi(t, x^1\cos\theta - x^2\sin\theta, x^1\sin\theta + x^2\cos\theta, x^3) \tag{25}$$

$$\big[\, J^{ij}\, ,\, J^{kl} \,\big] = -i\,\Big(\delta^{jk}J^{il} - \delta^{jl}J^{ik} + \delta^{il}J^{jk} - \delta^{ik}J^{jl}\Big) \tag{26}$$

$$\big[\, J^{i}\, ,\, J^{j} \,\big] = i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}J^k \tag{27}$$

を確かめる。ここで、J^{ij} は次式で定義されている。

$$J^{ij} = -J^{ji} = \int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x})\,\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,\phi(t,\boldsymbol{x}) \tag{28}$$

また、$(J^1, J^2, J^3) = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$ である。

まず初めに、(24) を確かめる。そのために、次の同時刻交換関係を用いる。

$$[\, \phi(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \pi(t,\boldsymbol{y})\,] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{29}$$

$$[\, \phi(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \phi(t,\boldsymbol{y})\,] = [\, \pi(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \pi(t,\boldsymbol{y})\,] = 0 \tag{30}$$

では、(24) の左辺から出発して右辺を以下で導く。

$$
\begin{aligned}
&\left[\, J^{ij} \,,\, \phi(t,\boldsymbol{x}) \,\right] \\
&\quad = \left[\int d^3\boldsymbol{y}\ \pi(t,\boldsymbol{y}) \left(y^i \partial_y^j - y^j \partial_y^i\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \,,\, \phi(t,\boldsymbol{x}) \right] \\
&\qquad\qquad (\because\ (28)\ \text{で積分変数を}\ \boldsymbol{y}\ \text{に変更したことに注意。}) \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{y}\ [\,\pi(t,\boldsymbol{y}) \,,\, \phi(t,\boldsymbol{x})\,] \left(y^i \partial_y^j - y^j \partial_y^i\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad (\because\ \phi(t,\boldsymbol{y})\ \text{と}\ \phi(t,\boldsymbol{x})\ \text{は可換。}) \\
&\quad \overset{(29)}{=} -i \int d^3\boldsymbol{y}\ \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \left(y^i \partial_y^j - y^j \partial_y^i\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\quad = -i \left(x^i \partial^j - x^j \partial^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{31}
$$

次に、(26) を求める。

$$
\begin{aligned}
&\left[\, J^{ij} \,,\, J^{kl} \,\right] \\
&\overset{(28)}{=} \left[\int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x}) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \,,\, \int d^3\boldsymbol{y}\ \pi(t,\boldsymbol{y}) (y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k) \phi(t,\boldsymbol{y}) \right] \\
&\qquad (\text{積分変数に同じ文字を使わないように注意しよう。}) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\boldsymbol{y} \Big\{ \pi(t,\boldsymbol{x}) \left[\, \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \,,\, \pi(t,\boldsymbol{y}) \,\right] \left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad + \pi(t,\boldsymbol{y}) \left[\, \pi(t,\boldsymbol{x}) \,,\, (y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k) \phi(t,\boldsymbol{y}) \,\right] \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \Big\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\boldsymbol{y} \ \Bigg\{ \pi(t,\boldsymbol{x}) \bigg(\left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) [\phi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})] \bigg) \left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad + \pi(t,\boldsymbol{y}) \bigg(\left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) [\pi(t,\boldsymbol{x}), \phi(t,\boldsymbol{y})] \bigg) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \Bigg\} \\
&\overset{(29)}{=} \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\boldsymbol{y} \ \Bigg\{ \pi(t,\boldsymbol{x}) \bigg(\left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \bigg) \left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad + \pi(t,\boldsymbol{y}) \bigg(\left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) (-i)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \bigg) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \Bigg\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\boldsymbol{y} \ \Bigg\{ -i \bigg(\left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \pi(t,\boldsymbol{x}) \bigg) \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) \phi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad\qquad + i \bigg(\left(y^k \partial_y^l - y^l \partial_y^k\right) \pi(t,\boldsymbol{y}) \bigg) \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \Bigg\} \\
&\qquad\qquad (\because i \neq j, k \neq l) \\
&\overset{\boldsymbol{y}\ \text{積分}}{=} -i \int d^3\boldsymbol{x} \ \Bigg\{ \bigg(\left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \pi(t,\boldsymbol{x}) \bigg) \left(x^k \partial_x^l - x^l \partial_x^k\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \\
&\qquad\qquad - \bigg(\left(x^k \partial_x^l - x^l \partial_x^k\right) \pi(t,\boldsymbol{x}) \bigg) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \Bigg\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} -i \int d^3\boldsymbol{x} \ \Big\{ -\pi(t,\boldsymbol{x}) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \left(x^k \partial_x^l - x^l \partial_x^k\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \\
&\qquad\qquad + \pi(t,\boldsymbol{x}) \left(x^k \partial_x^l - x^l \partial_x^k\right) \left(x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i\right) \phi(t,\boldsymbol{x}) \Big\} \\
&\qquad\qquad (\because i \neq j, k \neq l) \\
&= -i \int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x}) (-1) \left[x^i \partial_x^j - x^j \partial_x^i \,,\ x^k \partial_x^l - x^l \partial_x^k \right] \phi(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -i\int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x})(-1)\ \Big\{x^i\left[\partial_x^j,x^k\right]\partial_x^l + x^k\left[x^i,\partial_x^l\right]\partial_x^j - x^i\left[\partial_x^j,x^l\right]\partial_x^k - x^l\left[x^i,\partial_x^k\right]\partial_x^j \\
& \quad - x^j\left[\partial_x^i,x^k\right]\partial_x^l - x^k\left[x^j,\partial_x^l\right]\partial_x^i + x^j\left[\partial_x^i,x^l\right]\partial_x^k + x^l\left[x^j,\partial_x^k\right]\partial_x^i\Big\}\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
& \quad \left(\begin{array}{lll} \because [AB,CD] & = & A[B,CD]+[A,CD]B \\ & = & A[B,C]D+AC[B,D]+[A,C]DB+C[A,D]B \end{array}\right) \\
= \quad & -i\int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x})\Big\{\delta^{jk}x^i\partial_x^l - \delta^{il}x^k\partial_x^j - \delta^{jl}x^i\partial_x^k + \delta^{ik}x^l\partial_x^j \\
& \quad - \delta^{ik}x^j\partial_x^l + \delta^{jl}x^k\partial_x^i + \delta^{il}x^j\partial_x^k - \delta^{jk}x^l\partial_x^i\Big\}\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
& \quad \left(\begin{array}{l} \because\ \left[\,\partial_x^j\,,\,x^k\,\right] = -\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = -\delta^{jk} \\ \quad\ \left[\,x^k\,,\,\partial_x^j\,\right] = +\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^{jk} \quad \left(\partial^j = -\partial_j = -\partial/\partial x^j \text{ に注意。}\right) \end{array}\right) \\
= \quad & -i\int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x})\Big\{\delta^{jk}\left(x^i\partial_x^l - x^l\partial_x^i\right) - \delta^{jl}\left(x^i\partial_x^k - x^k\partial_x^i\right) \\
& \quad + \delta^{il}\left(x^j\partial_x^k - x^k\partial_x^j\right) - \delta^{ik}\left(x^j\partial_x^l - x^l\partial_x^j\right)\Big\}\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
\overset{(28)}{=} \quad & -i\left(\delta^{jk}J^{il} - \delta^{jl}J^{ik} + \delta^{il}J^{jk} - \delta^{ik}J^{jl}\right) \\
\Longrightarrow \quad & (26)
\end{aligned} \tag{33}
$$

!

上では、J^{ij} と J^{kl} の両方とも (28) を使って ϕ と π で表して計算したが、次の関係

$$
\begin{aligned}
\left[\,J^{ij}\,,\,\phi(t,\boldsymbol{x})\,\right] &= -i\left(x^i\partial^j - x^j\partial^i\right)\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
\left[\,J^{ij}\,,\,\pi(t,\boldsymbol{x})\,\right] &= -i\left(x^i\partial^j - x^j\partial^i\right)\pi(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{34}
$$

を使えば、以下の導出のように、もう少し簡単に (32) に到達できる。

$$
\begin{aligned}
& [\,J^{ij}\,,\,J^{kl}\,] \\
& \overset{(28)}{=} \quad [\,J^{ij}\,,\int d^3\boldsymbol{x}\ \pi(t,\boldsymbol{x})(x^k\partial^l - x^l\partial^k)\phi(t,\boldsymbol{x})\,] \\
& = \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ \Big\{\,[\,J^{ij}\,,\,\pi(t,\boldsymbol{x})\,]\,(x^k\partial^l - x^l\partial^k)\phi(t,\boldsymbol{x}) + \pi(t,\boldsymbol{x})(x^k\partial^l - x^l\partial^k)[\,J^{ij}\,,\,\phi(t,\boldsymbol{x})\,]\,\Big\} \\
& \overset{(34)}{=} \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ \Big\{\,\Big(-i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\pi(t,\boldsymbol{x})\Big)\,(x^k\partial^l - x^l\partial^k)\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
& \qquad\qquad + \pi(t,\boldsymbol{x})(x^k\partial^l - x^l\partial^k)\,\Big(-i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\phi(t,\boldsymbol{x})\Big)\,\Big\} \\
& \overset{\text{部分積分}}{=} \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ i\,\pi(t,\boldsymbol{x})\,[\,x^i\partial_x^j - x^j\partial_x^i\,,\ x^k\partial_x^l - x^l\partial_x^k\,]\,\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
& \Longrightarrow \quad (32)
\end{aligned}
$$

(27) は (26) で $(J^1,J^2,J^3)=(J^{23},J^{31},J^{12})$ と再定義すれば求まる。実際、$J^{ij}(i,j=1,2,3)$ は (i,j) に関して反対称なので、J^{ij} の独立な成分は 3 つ (J^{23},J^{31},J^{12}) である。また $[J^{ij},J^{kl}]$ で本質的に独立なものは、$[J^{23},J^{31}],[J^{31},J^{12}],[J^{12},J^{23}]$ の 3 つなので、(26) を使って計算すると

$$
\left[J^{23},J^{31}\right] = -i\left(\delta^{33}J^{21} - \delta^{31}J^{23} + \delta^{21}J^{33} - \delta^{23}J^{31}\right) = -iJ^{21} = iJ^{12} \tag{35}
$$

$$
\left[J^{31},J^{12}\right] = -i\left(\delta^{11}J^{32} - \delta^{12}J^{31} + \delta^{32}J^{11} - \delta^{31}J^{12}\right) = -iJ^{32} = iJ^{23} \tag{36}
$$

$$
\left[J^{12},J^{23}\right] = -i\left(\delta^{22}J^{13} - \delta^{23}J^{12} + \delta^{13}J^{22} - \delta^{12}J^{23}\right) = -iJ^{13} = iJ^{31} \tag{37}
$$

となり、これらは (27) にまとめることができる。((27) で他の交換関係は、(35) ～ (37) から求まるか、自明にゼロとなる。)

最後に (25) を導く。ヒントに書いてあるように、まず無限小変換 $|\Delta\theta| \equiv |\theta/N| \ll 1$ のときに、次式が成り立つことを確かめる。

$$\begin{aligned} & e^{-i\Delta\theta J^{12}}\phi(t,x^1,x^2,x^3)\,e^{i\Delta\theta J^{12}} \\ & = \phi(t\,,\,x^1\cos(\Delta\theta)-x^2\sin(\Delta\theta)\,,\,x^1\sin(\Delta\theta)+x^2\cos(\Delta\theta)\,,\,x^3) \end{aligned} \tag{38}$$

$\Delta\theta$ を無限小として、上式の左辺を展開する。

$$\begin{aligned} & e^{-i\Delta\theta J^{12}}\phi(t,x^1,x^2,x^3)\,e^{i\Delta\theta J^{12}} \\ \simeq\ & \left(1-i\Delta\theta J^{12}\right)\phi(t,x^1,x^2,x^3)\left(1+i\Delta\theta J^{12}\right) \\ \simeq\ & \phi(t,x^1,x^2,x^3)-i\Delta\theta\left[J^{12}\,,\,\phi(t,x^1,x^2,x^3)\right] \\ & \qquad (\because \Delta\theta\text{ の 2 次の項を無視した。}) \\ \overset{(24)}{=}\ & \phi(t,x^1,x^2,x^3)-i\Delta\theta(-i)\left(x^1\partial^2-x^2\partial^1\right)\phi(t,x^1,x^2,x^3) \\ =\ & \phi(t,x^1,x^2,x^3)+\Delta\theta\left(x^1\frac{\partial}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\phi(t,x^1,x^2,x^3) \\ & \qquad \left(\because \partial^i=\frac{\partial}{\partial x_i}=-\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ \simeq\ & \phi(t,x^1-\Delta\theta x^2,x^2+\Delta\theta x^1,x^3) \\ \simeq\ & \phi(t,x^1\cos(\Delta\theta)-x^2\sin(\Delta\theta),x^2\cos(\Delta\theta)+x^1\sin(\Delta\theta),x^3) \\ & \qquad (\because \cos(\Delta\theta)\simeq 1,\ \sin(\Delta\theta)\simeq\Delta\theta) \\ \Longrightarrow\ & (38) \end{aligned} \tag{39}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\Delta\theta) & -\sin(\Delta\theta) & 0 \\ \sin(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &\equiv R(\Delta\theta)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}=R(\Delta\theta)\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{40}$$

としておくと、(38) は

$$e^{-i\Delta\theta J^{12}}\phi(t,\boldsymbol{x})\,e^{i\Delta\theta J^{12}}=\phi(t,R(\Delta\theta)\boldsymbol{x}) \tag{41}$$

となる。このとき $R(\Delta\theta)$ は回転行列で

$$\left(R(\Delta\theta)\right)^N=R(N\Delta\theta)=R(\theta) \tag{42}$$

を満たすので、次のように (25) が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} e^{-i\theta J^{12}}\phi(t,\boldsymbol{x})\,e^{i\theta J^{12}} &= \left(e^{-i\Delta\theta J^{12}}\right)^N\phi(t,\boldsymbol{x})\left(e^{i\Delta\theta J^{12}}\right)^N \\ &= \phi(t,(R(\Delta\theta))^N\boldsymbol{x}) \\ &= \phi(t,R(\theta)\boldsymbol{x}) \\ &\Longrightarrow (25) \end{aligned} \tag{43}$$

check 11.4

(11.30) で与えられる $\phi(t, \boldsymbol{x})$ が、エルミートでクライン–ゴルドン方程式を満たすことを確かめてみよう。

ここでは、

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ a(\boldsymbol{k}) e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right\} \tag{44}$$

がエルミート ($\phi^\dagger = \phi$) でクライン–ゴルドン方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(t, \boldsymbol{x}) = 0 \tag{45}$$

を満たすことを確かめる。

(44) で定義される $\phi(t, \boldsymbol{x})$ がエルミートであることは、直接エルミート共役をとることによって、次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} \left(\phi(t, \boldsymbol{x})\right)^\dagger &= \int \frac{d^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ \underbrace{\left(a(\boldsymbol{k}) e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right)^\dagger}_{a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}} + \underbrace{\left(a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right)^\dagger}_{a(\boldsymbol{k}) e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}} \right\} \\ &= \phi(t, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{46}$$

$\phi(t, \boldsymbol{x})$ がクライン–ゴルドン方程式をみたすことは、$e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}$ がクライン–ゴルドン方程式を満たすこと、すなわち、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 \right] e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} &= \left(-E_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2 \right) e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \\ &= 0 \qquad \left(\because\ E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\ \right) \end{aligned} \tag{47}$$

から導かれる。実際、

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(t, \boldsymbol{k}) \\ &\quad= \int \frac{d^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ a(\boldsymbol{k}) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 \right] e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + a^\dagger(\boldsymbol{k}) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2 \right] e^{i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right\} \\ &\quad\overset{(47)}{=} 0 \end{aligned} \tag{48}$$

が成り立つ。

check 11.5

$(f\,|\,g)$ の定義の由来は、クライン–ゴルドン方程式の持つ性質からきている。クライン–ゴルドン方程式を満たす任意の場（実でも複素スカラー場でもよい）$\phi_1(x), \phi_2(x)$ に対して、$(\phi_1|\phi_2)$ は時間によらないこと、すなわち、$\frac{d}{dt}(\phi_1|\phi_2) = 0$ を確かめてみよう。

$\phi_1(x), \phi_2(x)$ がともにクライン–ゴルドン方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right]\phi_1(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right]\phi_2(x) = 0 \tag{49}$$

を満たすとき、

$$(\phi_1|\phi_2) \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\ \left\{\phi_1^*(t,\boldsymbol{x}) i \frac{\partial \phi_2(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} - i\frac{\partial \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\phi_2(t,\boldsymbol{x})\right\} \tag{50}$$

は時間によらない。すなわち、

$$\frac{d}{dt}(\phi_1|\phi_2) = 0 \tag{51}$$

を満たす。これを以下で確かめる。

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\phi_1|\phi_2) \\
&= \quad \frac{d}{dt}\int d^3\boldsymbol{x}\ \left\{\phi_1^*(t,\boldsymbol{x}) i \frac{\partial \phi_2(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} - i\frac{\partial \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\phi_2(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&= \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ \left\{\frac{\partial \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} i \frac{\partial \phi_2(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \phi_1^*(t,\boldsymbol{x}) i \frac{\partial^2 \phi_2(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - i\frac{\partial^2 \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2}\phi_2(t,\boldsymbol{x}) - i\frac{\partial \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\frac{\partial \phi_2(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\right\} \\
&= \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ i\left\{\phi_1^*(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 \phi_2(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2}\phi_2(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&\overset{(49)}{=} \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ i\ \left\{\phi_1^*(t,\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2\right)\phi_2(t,\boldsymbol{x}) - \Big(\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2\right)\phi_1^*(t,\boldsymbol{x})\Big)\phi_2(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \quad \int d^3\boldsymbol{x}\ i\ \left\{\phi_1^*(t,\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2\right)\phi_2(t,\boldsymbol{x}) - \phi_1^*(t,\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2\right)\phi_2(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&= \quad 0
\end{aligned} \tag{52}$$

check 11.6

スカラー場の 1 粒子状態はスピンを持たない。このことを示すために、静止している 1 粒子状態 $|\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}\rangle$ の角運動量はゼロ、すなわち $J^i|\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}\rangle = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ であることを確かめてみよう。

【ヒント】 $(J^1, J^2, J^3) = (J^{23}, J^{31}, J^{12})$ は角運動量演算子で、(11.17) の関係 $[J^{ij}, \phi(x)] = -i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\phi(x)$ を満たす。あとで導く (11.45) を用いて $J^{ij}|\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}\rangle = J^{ij}a^\dagger(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0})|0\rangle = [J^{ij}, a^\dagger(\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0})]\,|0\rangle = i\big(f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}|(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\phi\big)\,|0\rangle$ をまず導け。次に $f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}(x)$ は $\boldsymbol{x}$ に依存しない $\big(\partial^j f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}(x) = 0\big)$ ことから、上式右辺は部分積分を行うことによって 0 になることを示せ。

ヒントに書かれているように、$J^i\,|\boldsymbol{k} = 0\rangle = 0$ を導くために、次の関係式を用いる。

$$\left[\,J^{ij}\,,\,\phi(t,\boldsymbol{x})\,\right] = -i\left(x^i\partial^j - x^j\partial^i\right)\phi(t,\boldsymbol{x}) \tag{53}$$

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}) = -\big(\,f^{(-)}_{\boldsymbol{k}}\,|\,\phi\,\big) \tag{54}$$

$J^i\,|\boldsymbol{k}=0\rangle = 0$ $(i=1,2,3)$ と $J^{ij}\,|\boldsymbol{k}=0\rangle = 0$ $(i \neq j = 1,2,3)$ は等価なので、以下では $J^{ij}\,|\boldsymbol{k}=0\rangle$ を確かめる。

$$
\begin{aligned}
J^{ij}\,|\boldsymbol{k}=0\rangle \quad &= \quad J^{ij}a^\dagger(\boldsymbol{k}=0)\,|0\rangle \\
&= \quad \big[\,J^{ij}\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k}=0)\,\big]\,|0\rangle \qquad (\because\ J^{ij}\,|0\rangle = 0) \\
&\overset{(54)}{=} \quad -\big[\,J^{ij}\,,\,\big(\,f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}\,|\,\phi\,\big)\,\big]\,|0\rangle \\
&\overset{(53)}{=} \quad i\big(f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}\big|\,\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,\phi\big)\,|0\rangle \\
&= \quad i\int d^3\boldsymbol{x}\left\{\big(f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x})\big)^*\,i\frac{\partial}{\partial t}\Big(\,\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,\phi(t,\boldsymbol{x})\,\Big)\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\,i\left(\frac{\partial f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\right)^*\,\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,\phi(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \quad -i\int d^3\boldsymbol{x}\left\{\Big(\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x})\Big)^*\,i\frac{\partial\phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\,i\left(\frac{\partial}{\partial t}\big(x^i\partial^j - x^j\partial^i\big)\,f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x})\right)^*\,\phi(t,\boldsymbol{x})\right\} \\
&= \quad 0
\end{aligned} \tag{55}
$$

最後の等号で、$f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ によらないこと、すなわち、

$$
\partial^i f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (i=1,2,3) \tag{56}
$$

を用いた。これは次のように示される。

$$
\begin{aligned}
f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{x}) \quad &= \quad \left.\frac{e^{i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}\right|_{\boldsymbol{k}=0} \\
&= \quad \frac{e^{iE_{\boldsymbol{k}=0}t}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}=0}}} \\
&= \quad f^{(-)}_{\boldsymbol{k}=0}(t,\boldsymbol{0})
\end{aligned} \tag{57}
$$

check 11.7

(11.44b) を確かめてみよう。

ここでは、$a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ を ϕ を使って表した式

$$
a(\boldsymbol{k}) = \big(\,f^{(+)}_{\boldsymbol{k}}\,|\,\phi\big)\,, \quad a^\dagger(\boldsymbol{k}) = -\big(\,f^{(-)}_{\boldsymbol{k}}\,|\,\phi\,\big) \tag{58}
$$

を用いて、交換関係

$$
\big[\,a(\boldsymbol{k})\,,\,a(\boldsymbol{k}')\,\big] = 0 \tag{59}
$$

$$
\big[\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,\big] = 0 \tag{60}
$$

を求める。

$$
\begin{aligned}
&\left[\, a(\boldsymbol{k})\,,\, a(\boldsymbol{k}')\,\right] \\
&\overset{(58)}{=} \quad \left[\,\left(\, f_{\boldsymbol{k}}^{(+)} \,|\, \phi \,\right)\,,\, \left(\, f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)} \,|\, \phi \,\right)\,\right] \\
&= \quad \Bigg[\, \int d^3\boldsymbol{x} \Bigg\{ \big(f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})\big)^* \, i\pi(t,\boldsymbol{x}) - i \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \bigg)^* \phi(t,\boldsymbol{x}) \Bigg\}\,, \\
&\qquad\qquad \int d^3\boldsymbol{y} \Bigg\{ \big(f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)}(t,\boldsymbol{y})\big)^* \, i\pi(t,\boldsymbol{y}) - i \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)}(t,\boldsymbol{y})}{\partial t} \bigg)^* \phi(t,\boldsymbol{y}) \Bigg\} \Bigg] \\
&\qquad \bigg(\because \pi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \bigg) \\
&= \quad \int d^3\boldsymbol{x} \int d^3\boldsymbol{y} \, \Bigg\{ \big(f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})\big)^* \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)}(t,\boldsymbol{y})}{\partial t} \bigg)^* \underbrace{[\pi(t,\boldsymbol{x}), \phi(t,\boldsymbol{y})]}_{-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&\qquad\qquad + \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \bigg)^* \big(f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)}(t,\boldsymbol{y})\big)^* \underbrace{[\phi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})]}_{i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \Bigg\} \\
&= \quad \int d^3\boldsymbol{x} \, \Bigg\{ - \big(f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})\big)^* i \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \bigg)^* + i \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \bigg)^* \big(f_{\boldsymbol{k}'}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})\big)^* \Bigg\} \\
&= \quad - \int d^3\boldsymbol{x} \Bigg\{ \big(f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})\big)^* i \frac{\partial f_{\boldsymbol{k}'}^{(-)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} - i \bigg(\frac{\partial f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \bigg)^* f_{\boldsymbol{k}'}^{(-)}(t,\boldsymbol{x}) \Bigg\} \\
&\qquad \Big(\; \because \;\; \big(f_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(t,\boldsymbol{x})\big)^* = f_{\boldsymbol{k}}^{(-)}(t,\boldsymbol{x}) \;\Big) \\
&= \quad -\big(\, f_{\boldsymbol{k}}^{(+)} \,|\, f_{\boldsymbol{k}'}^{(-)} \,\big) \\
&= \quad 0 \\
&\Longrightarrow \quad (59)
\end{aligned} \tag{61}
$$

(60) は (59) のエルミート共役として求まる。

check 11.8

(11.46) に $\phi(x)$ の展開式 (11.30) を代入して、(11.48) および $\boldsymbol{P} = \int d^3\boldsymbol{k}\, \frac{\boldsymbol{k}}{2}\big\{a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\big\}$ を導いてみよう。

ここでは、

$$
H = \int d^3\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\,\phi^2 \right\} \tag{62}
$$

$$
\boldsymbol{P} = -\int d^3\boldsymbol{x}\, \frac{1}{2}\big\{\, \pi\, \boldsymbol{\nabla}\phi + (\boldsymbol{\nabla}\phi)\, \pi \,\big\} \tag{63}
$$

に $\phi(x)$ の展開式

$$
\phi(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}} \left\{ a(\boldsymbol{k}) e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} \right\} \tag{64}
$$

を代入して、H と $\boldsymbol{P}$ を生成消滅演算子で表した表式

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\boldsymbol{k}\, \frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2} \left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} && (65)\\
\boldsymbol{P} &= \int d^3\boldsymbol{k}\, \frac{\boldsymbol{k}}{2} \left\{a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} && (66)
\end{aligned}
$$

を求める。

上の計算に必要なものは、デルタ関数のフーリエ積分表示

$$
\int d^3\boldsymbol{x}\ e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}) \tag{67}
$$

と次の関係である。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}e^{\mp ik\cdot x} = \frac{\partial}{\partial t}e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} = \mp iE_{\boldsymbol{k}}\, e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} && (68)\\
&\boldsymbol{\nabla} e^{\mp ik\cdot x} = \boldsymbol{\nabla} e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} = \pm i\boldsymbol{k}\, e^{\mp i(E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} && (69)\\
&E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} = E_{-\boldsymbol{k}} && (70)\\
&\pi(t,\boldsymbol{x}) = \partial^0\phi(t,\boldsymbol{x}) && (71)
\end{aligned}
$$

項がいくつかあるので計算には多少時間がかかるが、計算自体に難しいところはない。

教科書本文にも計算例が与えられているが、(62) の 右辺各項の計算例を下に与えておく。

$$
\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left(\pi(t,\boldsymbol{x})\right)^2\\
\overset{(71)}{=}\ & \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\left(\frac{\partial\phi(t,\boldsymbol{x}))}{\partial t}\right)^2\\
\overset{(64)(68)}{=}\ & \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\left(\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\left(-iE_{\boldsymbol{k}}\right)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k})\left(iE_{\boldsymbol{k}}\right)e^{ik\cdot x}\right\}\right)\\
&\qquad\times\left(\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}'}}}\left\{a(\boldsymbol{k}')\left(-iE_{\boldsymbol{k}'}\right)e^{-ik'\cdot x'} + a^\dagger(\boldsymbol{k}')\left(iE_{\boldsymbol{k}'}\right)e^{ik'\cdot x}\right\}\right)\\
=\ & \frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}\ d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\left\{a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(k-k')\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{i(k-k')\cdot x}\right.\\
&\qquad\left. - a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{-i(k+k')\cdot x} - a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{i(k+k')\cdot x}\right\}\\
\overset{(67)}{=}\ & \frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}\ d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}}{2}\\
&\qquad\times\left\{\left(a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})t} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})t}\right)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right.\\
&\qquad\left. - \left(a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})t} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})t}\right)(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right\}\\
&\qquad(\because\ k\cdot x = E_{\boldsymbol{k}}t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\ ,\ k'\cdot x = E_{\boldsymbol{k}'}t - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x})\\
\overset{\boldsymbol{k}'\text{積分}}{=}\ & \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2}\left\{a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\right.\\
&\qquad\left. - a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2E_{\boldsymbol{k}}t} - a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t}\right\}\qquad(\because (70)\ ) && (72)
\end{aligned}
$$

上の計算で引数 $(t,\boldsymbol{x})$ をきちんと書くこと、それから $\phi(t,\boldsymbol{x})$ の展開式 (64) を $(\pi(t,\boldsymbol{x}))^2$ に代入するとき、積分変数がかぶらないように 1 つは $\boldsymbol{k}$、もう 1 つは $\boldsymbol{k}'$ と異なる記号を用い

る点に注意しよう。(62) の残りの 2 項についても以下のように計算すればよい。

$$
\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2 \\
&\overset{(64)(69)}{=} \quad \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\left(\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})\,(i\boldsymbol{k})\,e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k})\,(-i\boldsymbol{k})\,e^{ik\cdot x}\right\}\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}'}}}\left\{a(\boldsymbol{k}')\left(i\boldsymbol{k}'\right)e^{-ik'\cdot x'}+a^\dagger(\boldsymbol{k}')\left(-i\boldsymbol{k}'\right)e^{ik'\cdot x}\right\}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}\ d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}}\int d^3\boldsymbol{x}\left\{a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(k-k')\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{i(k-k')\cdot x}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left.-\,a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{-i(k+k')\cdot x}-a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{i(k+k')\cdot x}\right\} \\
&\overset{(67)}{=} \quad \frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}\ d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}} \\
&\qquad \times\left\{\left(a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})t}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})t}\right)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right. \\
&\qquad\quad \left.-\left(a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})t}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})t}\right)(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right\} \\
&\qquad (\because\ k\cdot x=E_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\ ,\ k'\cdot x=E_{\boldsymbol{k}'}t-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}) \\
&\overset{\boldsymbol{k}'\text{積分}}{=} \quad \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}^2}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2E_{\boldsymbol{k}}t}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t}\right\} \\
&\qquad (\because \text{第 3、第 4 項で}\,\boldsymbol{k}'\to-\boldsymbol{k}\,\text{の置き換えによる}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'\to-\boldsymbol{k}^2\,\text{の符号に注意。}) \qquad (73)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{m^2}{2}\left(\phi(t,\boldsymbol{x})\right)^2 \\
&\overset{(64)}{=} \quad \frac{m^2}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\left(\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}\right\}\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}'}}}\left\{a(\boldsymbol{k}')e^{-ik'\cdot x'}+a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{ik'\cdot x}\right\}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}\ d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}}\int d^3\boldsymbol{x}\left\{a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(k-k')\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{i(k-k')\cdot x}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left.+\,a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{-i(k+k')\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{i(k+k')\cdot x}\right\} \\
&\overset{(67)}{=} \quad \frac{1}{2}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}\ d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k}'}}} \\
&\qquad \times\left\{\left(a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})t}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k}'})t}\right)(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right. \\
&\qquad\quad \left.+\left(a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}')e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})t}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}')e^{i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k}'})t}\right)(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\right\} \\
&\qquad (\because\ k\cdot x=E_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\ ,\ k'\cdot x=E_{\boldsymbol{k}'}t-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}) \\
&\overset{\boldsymbol{k}'\text{積分}}{=} \quad \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{m^2}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2E_{\boldsymbol{k}}t}+a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t}\right\} \\
&\qquad (\because (70)\ ) \qquad (74)
\end{aligned}
$$

(72) ∼ (74) を (62) 右辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\boldsymbol{x} \left\{ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\ \phi^2 \right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2}{2E_{\boldsymbol{k}}} \right) \Big(a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \Big) \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{-E_{\boldsymbol{k}}^2 + \boldsymbol{k}^2 + m^2}{2E_{\boldsymbol{k}}} \right) \Big(a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2E_{\boldsymbol{k}}t} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t} \Big) \right\} \\
&\overset{(70)}{=} \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2} \Big\{ a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \Big\}
\end{aligned}
\tag{75}
$$

となり、(65) が導かれる。

(63) 右辺の計算も上と同じようにすればよい。以下では結果のみを与えておく。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \ \pi(t,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x}) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{2}\ \Big\{ a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad\qquad + a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2E_{\boldsymbol{k}}t} + a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t} \Big\}
\end{aligned}
\tag{76}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \big(\boldsymbol{\nabla}\phi(t,\boldsymbol{x})\big)\pi(t,\boldsymbol{x}) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{2}\ \Big\{ a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad\qquad - a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-i2E_{\boldsymbol{k}}t} - a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t} \Big\}
\end{aligned}
\tag{77}
$$

(76) と (77) を (63) 右辺に代入すれば (66) の表式が得られる。

check 11.9

$\boldsymbol{k}$ の任意関数 $g(\boldsymbol{k})$ に対して、次の関係を確かめてみよう。

$$
G \equiv \int d^3\boldsymbol{k}\, g(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \big[\, G\,,\, a^\dagger(\boldsymbol{k}) \,\big] = +g(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ \big[\, G\,,\, a(\boldsymbol{k}) \,\big] = -g(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \end{array} \right.
\tag{11.54}
$$

$a(\boldsymbol{k})$ と $a^\dagger(\boldsymbol{k}')$ の間の交換関係

$$
\big[\, a(\boldsymbol{k})\,,\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \,\big] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')
\tag{78}
$$

$$
\big[\, a(\boldsymbol{k})\,,\, a(\boldsymbol{k}') \,\big] = \big[\, a^\dagger(\boldsymbol{k})\,,\, a^\dagger(\boldsymbol{k}') \,\big] = 0
\tag{79}
$$

を用いて計算する。

$$
\begin{aligned}
\left[\, G\,,\, a^\dagger(\boldsymbol{k}) \,\right] &= \left[\int d^3\boldsymbol{k}' g(\boldsymbol{k}') a^\dagger(\boldsymbol{k}') a(\boldsymbol{k}')\ ,\ a^\dagger(\boldsymbol{k}) \right] \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}' g(\boldsymbol{k}') \left\{ a^\dagger(\boldsymbol{k}') \underbrace{\left[a(\boldsymbol{k}')\ ,\ a^\dagger(\boldsymbol{k}) \right]}_{\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k})} + \underbrace{\left[a^\dagger(\boldsymbol{k}')\ ,\ a^\dagger(\boldsymbol{k}) \right]}_{0} a(\boldsymbol{k}') \right\} \\
&\qquad (\because\ [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B\,) \\
&= g(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{80}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\, G\,,\, a(\boldsymbol{k}) \,\right] &= \left[\int d^3\boldsymbol{k}' g(\boldsymbol{k}') a^\dagger(\boldsymbol{k}') a(\boldsymbol{k}')\ ,\ a(\boldsymbol{k}) \right] \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}' g(\boldsymbol{k}') \left\{ a^\dagger(\boldsymbol{k}') \underbrace{\left[a(\boldsymbol{k}')\ ,\ a(\boldsymbol{k}) \right]}_{0} + \underbrace{\left[a^\dagger(\boldsymbol{k}')\ ,\ a(\boldsymbol{k}) \right]}_{-\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')} a(\boldsymbol{k}') \right\} \\
&\qquad (\because\ [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B\,) \\
&= -g(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{81}
$$

check 11.10

(11.59) 右辺の 3 番目の表式を用いて、$\Delta(x)$ が本義ローレンツ変換の下で不変（(11.63a) の性質）であることを具体的に示してみよう。

ここでは、次の表式

$$
i\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) \left\{ e^{-ik\cdot x} - e^{ik\cdot x} \right\} \tag{82}
$$

を用いて、$\Delta(x)$ が本義ローレンツ変換の下で不変、すなわち、

$$
\Delta(x') = \Delta(x) \qquad (x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu) \tag{83}
$$

であることを証明する。ここで、$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ は本義ローレンツ変換を表すものとする。

!

この問題は (82) 右辺に現れている次の量

$$
d^4k, \quad k^2, \quad \theta(k^0), \quad k\cdot x \tag{84}
$$

が本義ローレンツ変換の元で不変であることを理解していれば、やさしいはずだ。

以下で、$\Delta(x')$ から出発して $\Delta(x)$ に等しくなることを示す。

$$\begin{aligned}
i\Delta(x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)\left\{e^{-ik\cdot x'}-e^{ik\cdot x'}\right\}\\
&= \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\,\delta(k'^2-m^2)\theta(k'^0)\left\{e^{-ik'\cdot x'}-e^{ik'\cdot x'}\right\}\\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\because\ k^\mu\text{は積分変数なので好きな記号を使っても構わない。}\\ \quad\ \text{ここでは積分変数}\,k^\mu\,\text{を}\,k'^\mu\,\text{に書き換えた。}\end{array}\right)\\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\delta(k^2-m^2)\theta(k^0)\left\{e^{-ik\cdot x}-e^{ik\cdot x}\right\}\\
&= i\Delta(x)
\end{aligned}\tag{85}$$

3 番目の等号では、k'^μ から k^μ への変数変換

$$k'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu \tag{86}$$

を行った。この変換は、$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ の本義ローレンツ変換と同じものなので、(86) の変数変換を本義ローレンツ変換とみなしてよい。本義ローレンツ変換の下で、$d^4k',\ k'^2 = k'_\mu k'^\mu,\ \theta(k'^0),\ k'\cdot x'$ は不変、すなわち、

$$d^4k' = d^4k,\ k'^2 = k^2,\ \theta(k'^0) = \theta(k^0),\ k'\cdot x' = k\cdot x \tag{87}$$

なので、(85) の 3 番目の等号が成り立つ。

!

$d^4k,\ k^2,\ k\cdot x$ は広義のローレンツ変換の下で不変だが、$\theta(k^0)$ は**広義**ローレンツ変換の下で一般には不変ではない。例えば、時間反転の下では $k^0 \to k'^0 = -k^0$ となるので、$k^0 > 0 \to k'^0 < 0$ となり $\theta(k^0) \neq \theta(k'^0)$ である。一方、**本義**ローレンツ変換の下では、$k^0(=$ エネルギー$)$ の符号は変わらないので、$\theta(k^0)$ は不変、すなわち、$\theta(k^0) = \theta(k'^0)$ である。

check 11.11

(11.68) で与えられる関数 $f(x)$ が (11.67) を満たすことを確かめよ。また、(11.67) の一般解は、特解 $f(x)_{\text{特解}}$ に $\rho(x)=0$ とおいた斉次方程式 $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,g(x) = 0$ の一般解 $g(x)$ を加えたもの、$f(x)_{\text{特解}} + g(x)$ で与えられることを証明してみよう。

【ヒント】 (11.67) の一般解を $f(x)$ としたとき、$f(x) = f(x)_{\text{特解}} + g(x)$ とおいて $g(x)$ に対する方程式を求めてみよ。

この問題の目的は、グリーン関数が微分方程式を解くための強力な武器の 1 つであることを示すことである。

まず、次式

$$f(x)_{\text{特解}} = i\int d^4y\ \Delta_G(x,y)\rho(y) \tag{88}$$

で定義される関数 $f(x)_{\text{特解}}$ が、微分方程式

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) f(x) = \rho(x) \tag{89}$$

の特解になっていることを示す。 ここで、グリーン関数 $\Delta_G(x,y)$ は

$$\left(\partial_\mu^x\partial_x^\mu + m^2\right)\Delta_G(x,y) = -i\delta^4(x-y) \tag{90}$$

を満たすものとする。(88) を (89) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) f(x)_{\text{特解}} &= \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) i\int d^4y\ \Delta_G(x,y)\rho(y) \\ &= i\int d^4y \underbrace{\left(\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Delta_G(x,y)\right)}_{-i\delta^4(x-y)}\rho(y) \\ &\overset{y\ \text{積分}}{=} \rho(x) \end{aligned} \tag{91}$$

となり、微分方程式 (89) の特解を与えていることがわかる。

次に (89) の一般解 $f(x)$ を求めるために

$$f(x) = f(x)_{\text{特解}} + g(x) \tag{92}$$

とおいて、$g(x)$ の満たすべき性質を調べる。

(92) を (89) に代入すると

$$\begin{aligned}&\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\left(f(x)_{\text{特解}} + g(x)\right) = \rho(x) \\ &\overset{(91)}{\Longrightarrow}\ \rho(x) + \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) g(x) = \rho(x) \\ &\Longrightarrow\ \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) g(x) = 0 \end{aligned} \tag{93}$$

となる。したがって、(89) の一般解は $\rho(x)=0$ とおいた斉次方程式 $\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) g(x) = 0$ の一般解 $g(x)$ を特解 $f(x)_{\text{特解}}$ に加えたもので与えられることがわかる。

!

グリーン関数の方法を用いれば、非斉次方程式 $\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) f(x) = \rho(x)$ の一般解を求める問題は、斉次方程式 $\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right) g(x) = 0$ の一般解を求める問題に帰着することになる！

check 11.12

2 点関数 $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ は $x^\mu - y^\mu$ の関数であることを証明してみよう。（この性質は、自由場だけでなく相互作用がある場合でも、一般に成り立つ。）

【ヒント】 $P^\mu|0\rangle = 0$ および (11.11) を用いよ。

ここでは、一般に次の相関関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \langle 0|\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,|0\rangle \tag{94}$$

は、座標の差 $x_i^\mu - x_j^\mu$ $(i \neq j = 1, 2, \cdots, n)$ の関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{n-1} - x_n) \tag{95}$$

であることを証明する。

!

f が $\{x_1 - x_2, x_2 - x_3, \cdots, x_{n-1} - x_n\}$ の関数ということは、一般に座標の差 $x_i^\mu - x_j^\mu$ $(i \neq j)$ の関数ということである。このことは、f は時空座標の並進 $x_i^\mu \to x_i^\mu + \varepsilon^\mu$ の下での不変性を持つことを意味する。

証明に必要な性質は、真空の並進不変性

$$P^\mu |0\rangle = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{96}$$

と、P^μ が時空並進の生成子であること（教科書本文の (11.11) 参照)、すなわち、

$$\phi(x) = e^{+ix\cdot P}\phi(0)e^{-ix\cdot P} \tag{97}$$

の 2 つである。(96) と (97) を用いて相関関数を変形すると

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= \langle 0| \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) |0\rangle \\
&\overset{(97)}{=} \langle 0| \left(e^{+ix_1\cdot P}\phi(0)e^{-ix_1\cdot P}\right)\left(e^{+ix_2\cdot P}\phi(0)e^{-ix_2\cdot P}\right)\cdots\left(e^{+ix_n\cdot P}\phi(0)e^{-ix_n\cdot P}\right)|0\rangle \\
&= \langle 0| \phi(0)e^{-i(x_1-x_2)\cdot P}\phi(0)e^{-i(x_2-x_3)\cdot P}\phi(0)\cdots e^{-i(x_{n-1}-x_n)\cdot P}\phi(0)|0\rangle \\
&\qquad \left(\because\ P^\mu|0\rangle = \langle 0|P^\mu = 0 \ \Rightarrow\ e^{-ix\cdot P}|0\rangle = |0\rangle\ ,\ \langle 0|e^{+ix\cdot P} = \langle 0|\ \right) \\
&\Longrightarrow (95)
\end{aligned} \tag{98}$$

!

特に、1 点相関関数（$\phi(x)$ の真空期待値）$\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ は、時空座標 x^μ に依存しないことがわかる。すなわち、

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle \tag{99}$$

check 11.13

階段関数 $\theta(x^0 - y^0)$ のフーリエ積分表示 (11.77) を証明してみよう。

【ヒント】(11.77a) の場合は次のように考えればよい。$x^0 - y^0 > 0$ のときは、$z = Re^{i\alpha}$ $(\pi < \alpha < 2\pi)$ とおいたとき $e^{-iz(x^0-y^0)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ なので積分路を図 11.5(b) へ拡張でき、$x^0 - y^0 < 0$ のときは、$z = Re^{i\alpha}$ $(0 < \alpha < \pi)$ とおいたとき $e^{-iz(x^0-y^0)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ なので積分路を図 11.5(c) へ拡張することができる。あとはコーシーの積分公式を用いて留数を計算すればよい。そのとき、積分路が右回りなのか左回りなのか、また積分路の内部に極を含むか含まないかに注意せよ。

ここでは、階段関数 $\theta(x^0 - y^0)$ のフーリエ積分表示

$$\theta(x^0 - y^0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\ \frac{e^{-iz(x^0-y^0)}}{z + i\varepsilon'} \tag{100}$$

$$= \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\ \frac{e^{iz(x^0-y^0)}}{z - i\varepsilon'} \tag{101}$$

を確かめる。ここで、ε' は正の無限小量である。これは、複素積分（留数定理）の良い練習問題である。(101) は (100) で $z \to -z$ の変数変換から得られるので、以下では (100) を証明する。

複素積分における留数定理を用いるために、(100) の積分路を複素 z 平面における閉じた経路に変形する必要がある。このためには、$x^0 - y^0 > 0$ と $x^0 - y^0 < 0$ とで場合分けを行う必要がある。

(1) $x^0 - y^0 > 0$

このとき、$z = Re^{i\alpha} \quad (R > 0, \pi < \alpha < 2\pi)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[-iz(x^0 - y^0)\right] &= \mathrm{Re}\left[-iRe^{i\alpha}(x^0 - y^0)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[-iR\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)(x^0 - y^0)\right] \\
&= R\left(x^0 - y^0\right)\sin\alpha \\
&\xrightarrow{R\to\infty} -\infty \\
&\quad \left(\begin{array}{c} \because\ x^0 - y^0 > 0 \text{ および } \pi < \alpha < 2\pi \\ \text{なので } (x^0 - y^0)\sin\alpha < 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{102}
$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
\left|e^{-iz(x^0-y^0)}\right| &= \left|e^{-iRe^{i\alpha}(x^0-y^0)}\right| \\
&= \left|e^{R(x^0-y^0)\sin\alpha - iR(x^0-y^0)\cos\alpha}\right| \\
&= e^{R(x^0-y^0)\sin\alpha} \qquad \left(\because\ \left|e^{-iR(x^0-y^0)\cos\alpha}\right| = 1\right) \\
&\xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad (\because\ (x^0 - y^0)\sin\alpha < 0\,)
\end{aligned}
\tag{103}
$$

となるので、(100) の z の積分路を図 1 (b) の閉曲線 Γ_1 へ拡張できる。このことから、

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\ \frac{e^{-iz(x^0-y^0)}}{z + i\varepsilon'} &= \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_1} dz\ \frac{e^{-iz(x^0-y^0)}}{z + i\varepsilon'} \\
&= \frac{i}{2\pi}(-2\pi i)e^{-iz(x^0-y^0)}\Big|_{z=-i\varepsilon'} \\
&\overset{\varepsilon'=0}{=} 1
\end{aligned}
\tag{104}
$$

を得る。ここで、2 番目の等号では留数定理を用いた。注意点は閉曲線 Γ_1 が時計回りなのでマイナス符号 $(-2\pi i)$ がつくことと、閉曲線 Γ_1 の内部に 1 位の極 $(z = -i\varepsilon')$ が存在していることである。また、最後の等号では、$\varepsilon' = 0$ とおいた。

(2) $x^0 - y^0 < 0$

このときは、$z = Re^{i\alpha}$ $(R > 0, 0 < \alpha < \pi)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[-iz(x^0 - y^0)\right] &= R(x^0 - y^0)\sin\alpha \\
&\xrightarrow{R\to\infty} -\infty \\
&\quad \left(\begin{array}{c} \because\ x^0 - y^0 < 0 \text{ および } 0 < \alpha < \pi \\ \text{なので } (x^0 - y^0)\sin\alpha < 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

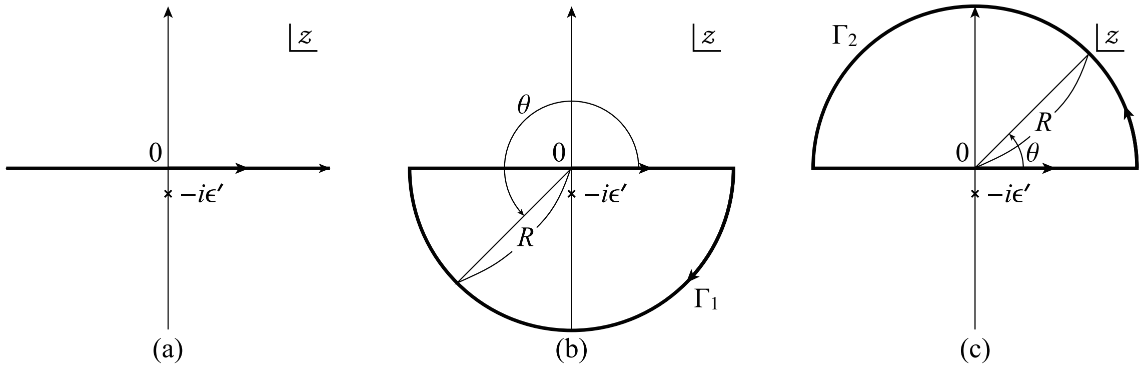

図 1: 階段関数 (100) の積分路 (a) を、$x^0 - y^0 > 0$ のときは閉曲線 Γ_1（図 (b)）、$x^0 - y^0 < 0$ のときは閉曲線 Γ_2（図 (c)）へ拡張できる。

となる。したがって、

$$\left| e^{-iz(x^0-y^0)} \right| = e^{R(x^0-y^0)\sin\alpha} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \tag{105}$$

となるので、(100) の z の積分路を図 1 (c) の閉曲線 Γ_2 へ拡張できる。このことから、

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{e^{-iz(x^0-y^0)}}{z+i\varepsilon'} &= \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma_2} dz\, \frac{e^{-iz(x^0-y^0)}}{z+i\varepsilon'} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{106}$$

を得る。ここで、最後の等号では、閉曲線 Γ_2 の内部には極が存在していないので、留数定理から 0 となることを用いた。

以上、(104) と (106) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz(x^0-y^0)}}{z+i\varepsilon'} &= \begin{cases} 1 & (x^0-y^0>0) \\ 0 & (x^0-y^0<0) \end{cases} \\ &= \theta(x^0-y^0) \end{aligned} \tag{107}$$

が示されたことになる。

check 11.14

次式で定義される関数 $\Delta(x-y)$ は、クライン–ゴルドン方程式のグリーン関数の定義式 (11.66) を（形式的に）満たしていることを確かめてみよう。

$$\Delta(x-y) \equiv \int_\Gamma \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{i\,e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2} \tag{11.78}$$

k^0 の積分路 Γ として図 11.4 をとればファインマン伝播関数を与えるが、図 11.6(a)（図 11.6(b)）の積分路をとると、次の性質を満たす遅延グリーン関数 $\Delta_{\rm ret}(x-y)$（先行グリーン関数 $\Delta_{\rm adv}(x-y)$）を与えることを示してみよう。

$$\Delta_{\rm ret}(x-y)=0 \quad (x^0-y^0<0)\,, \quad \Delta_{\rm adv}(x-y)=0 \quad (x^0-y^0>0)$$

また、次の関数 $\int d^4k\,\delta(k^2-m^2)\,f(k)\,e^{-ik\cdot(x-y)}$ を $\Delta(x-y)$ に加えても、グリーン関数の定義を再び満たすことを示してみよう。ここで、$f(k)$ はローレンツ不変な k^μ の任意関数である。

【ヒント】 デルタ関数のフーリエ積分表示 $2\pi\delta(x)=\int dk\,e^{-ikx}$ とデルタ関数の公式 $x\delta(x)=0$ を用いよ。また、遅延グリーン関数は時間の未来に向かってのみ伝播し、先行グリーン関数は時間の過去に向かってのみ伝播する場を表す。

クライン–ゴルドン方程式に対するグリーン関数の形式解は次式で与えられる。

$$\Delta(x-y) \equiv \int_\Gamma \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{ie^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2} \tag{108}$$

ここで、"形式解" とよんだ理由は、k^0 積分で $k^0=\pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}=\pm E_{\boldsymbol{k}}$ の点では $k^2-m^2=0$ となり積分が発散してしまうため、$k^0=\pm E_{\boldsymbol{k}}$ の極の避け方を指定しないと、(108) の表式は数学的に意味をもたないからである。例えば、k^0 の積分路 Γ として、図 2 にとればファインマン伝播関数を与えることになる。

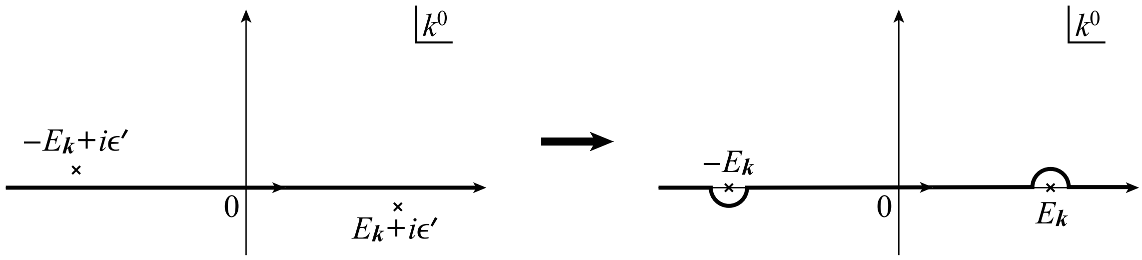

図 2: ファインマン伝播関数の積分路

しかしながら、極のよけ方によらず、(108) はクライン–ゴルドン微分演算子のグリーン関数、すなわち、

$$\left(\partial^x_\mu \partial^\mu_x + m^2\right)\Delta(x-y) = -i\delta^4(x-y) \tag{109}$$

の性質を満たしている。これをまず確かめる。

$$\begin{aligned}\left(\partial^x_\mu\partial^\mu_x+m^2\right)\Delta(x-y) &= \left(\partial^x_\mu\partial^\mu_x+m^2\right)\int_\Gamma\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{ie^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2}\\ &= \int_\Gamma\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{-k^2+m^2}{k^2-m^2}ie^{-ik\cdot(x-y)}\\ &= -i\int_\Gamma\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,e^{-ik\cdot(x-y)}\\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,e^{-ik\cdot(x-y)}\\ &= -i\delta^4(x-y)\end{aligned} \tag{110}$$

ここで、4 番目の等号では、k^0 の積分路 Γ を実軸上の積分路 $-\infty<k^0<\infty$ におきかえた。これは、被積分関数における $k^0=\pm E_{\boldsymbol{k}}$ での極が、この表式ではなくなっているので（分母の k^2-m^2 が分子の $-k^2+m^2$ と相殺したので）、このおきかえを行っても問題がないからである。

つぎに、(108) の k^0 の積分路 Γ を図 3 (a) にとると、次の性質を満たす遅延グリーン関数

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x-y)=0 \qquad (x^0-y^0<0) \tag{111}$$

が得られ、一方、図 3 (b) にとると、次の性質を満たす先行グリーン関数（先進グリーン関数）

$$\Delta_{\mathrm{adv}}(x-y)=0 \qquad (x^0-y^0>0) \tag{112}$$

を与えることを示す。

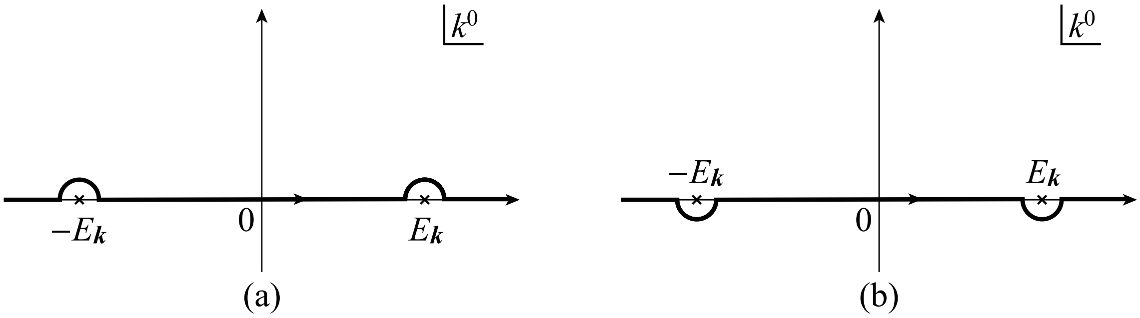

図 3: 遅延グリーン関数の積分路は (a)、先行グリーン関数の積分路は (b) にとられる。

(108) で $k^0=Re^{i\alpha}$ $(R>0)$ とおいたとき、

$$\begin{aligned}\left|e^{-ik^0(x^0-y^0)}\right| &= \left|e^{-iRe^{i\alpha}(x^0-y^0)}\right|\\ &= \left|e^{-iR(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x^0-y^0)}\right|\\ &= e^{R(x^0-y^0)\sin\alpha}\end{aligned} \tag{113}$$

となるので、

(1) $x^0-y^0>0,\ \pi<\alpha<2\pi\ (\Rightarrow\ \sin\alpha<0)$

$$\left|e^{-ik^0(x^0-y^0)}\right| = e^{R(x^0-y^0)\sin\alpha} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \tag{114}$$

(2) $x^0 - y^0 < 0,\ 0 < \alpha < \pi\ (\Rightarrow\ \sin\alpha > 0)$

$$\left|e^{-ik^0(x^0-y^0)}\right| = e^{R(x^0-y^0)\sin\alpha} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \tag{115}$$

となる。

以上の結果を念頭において、まず遅延グリーン関数 $\Delta_{\text{ret}}(x-y)$ を考えよう。$x^0 - y^0 < 0$ のときは、$k^0 = Re^{i\alpha}$ とおいたとき $0 < \alpha < \pi$ ととれば (115) がなりたつので、図 3 (a) の積分路を複素 k^0 平面の上半面を囲む閉曲線に拡張することができる（ check 11.13 の図 1 (c) 参照）。このとき、この閉曲線内には k^0 の極はないので（図 3 (a) 参照）、留数定理により k^0 積分は 0 となる。すなわち、

$$\Delta_{\text{ret}}(x-y) = 0 \qquad (x^0 - y^0 < 0) \tag{116}$$

が成り立つ。

今度は、先行グリーン関数を考える。$x^0 - y^0 > 0$ のときは、$k^0 = Re^{i\alpha}$ とおいたとき $\pi < \alpha < 2\pi$ ならば、(114) が成り立つので、図 3 (b) の積分路を複素 k^0 平面の下半面を囲む閉曲線に拡張することができる。(check 11.13 の図 1 (b) 参照）。このとき、閉曲線内には k^0 の極はないので、(図 3 (b) 参照)、留数定理により k^0 積分は 0 となる。すなわち、

$$\Delta_{\text{adv}}(x-y) = 0 \qquad (x^0 - y^0 > 0) \tag{117}$$

が成り立つ。

最後に、$\int d^4k\ \delta(k^2-m^2)\,f(k)e^{-ik\cdot(x-y)}$ を $\Delta(x-y)$ に加えても（ここで $f(k)$ は k^μ の任意関数）グリーン関数の定義を再び満たすこと、すなわち、

$$\left(\partial^x_\mu\partial^\mu_x + m^2\right)\int d^4k\ \delta(k^2-m^2)\,f(k)e^{-ik\cdot(x-y)} = 0 \tag{118}$$

を満たすことを確かめる。

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^x_\mu\partial^\mu_x + m^2\right)\int d^4k\ \delta(k^2-m^2)\,f(k)e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&= \int d^4k\ \delta(k^2-m^2)\,f(k)\underbrace{\left(\partial^x_\mu\partial^\mu_x + m^2\right)e^{-ik\cdot(x-y)}}_{(-k^2+m^2)e^{-ik\cdot(x-y)}} \\
&= -\int d^4k\ \left[\,(k^2-m^2)\,\delta(k^2-m^2)\right]f(k)e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{119}$$

最後の等号では、デルタ関数の公式 $x\,\delta(x) = 0$ を用いた。

!

このグリーン関数の不定性は、k^0 積分における $k^0 = \pm E_{\boldsymbol{k}}$ での極のよけ方の不定性と密接に関係している。この不定性はさらに細かく分けることができて、

$$\int d^4k\ \delta(k^0 \pm E_{\boldsymbol{k}})\,f(k)e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{120}$$

を $\Delta(x-y)$ に加えても再びグリーン関数の定義をみたす。(120) の表式をみれば、これらの不定性と $k^0 = \pm E_{\boldsymbol{k}}$ での極のよけ方の不定性との対応が見えてくるだろう。

check 11.15

交換関係 (11.81) を使って (11.88) を導いてみよう。

保存電荷

$$Q = iq \int d^3\boldsymbol{x}\ \left\{ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) - \Pi(t,\boldsymbol{x})\Phi(t,\boldsymbol{x}) \right\} \tag{121}$$

が

$$\left[\, Q\, ,\, \Phi \,\right] = -q\Phi\,, \qquad \left[\, Q\, ,\, \Phi^\dagger \,\right] = q\Phi^\dagger \tag{122}$$

を満たすことを確かめる。必要なものは、次の同時刻交換関係

$$\begin{aligned} & \left[\, \Phi(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \Pi(t,\boldsymbol{y}) \,\right] = \left[\, \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \Pi^\dagger(t,\boldsymbol{y}) \,\right] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ & \text{その他の交換関係} = 0 \end{aligned} \tag{123}$$

である。

まず、$\left[\, Q\, ,\, \Phi \,\right] = -q\Phi$ から確かめる。

$$\begin{aligned} & \left[\, Q\, ,\, \Phi(t,\boldsymbol{x}) \,\right] \\ &\quad = \left[iq \int d^3\boldsymbol{y}\ \left\{ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{y})\Pi^\dagger(t,\boldsymbol{y}) - \Pi(t,\boldsymbol{y})\Phi(t,\boldsymbol{y}) \right\}\ ,\ \Phi(t,\boldsymbol{x}) \right] \\ &\quad = -iq \int d^3\boldsymbol{y}\ \underbrace{\left[\, \Pi(t,\boldsymbol{y})\, ,\, \Phi(t,\boldsymbol{x}) \,\right]}_{-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \Phi(t,\boldsymbol{y}) \\ &\qquad\qquad (\because\ \Phi(t,\boldsymbol{x}) \text{ と非可換なのは } \Pi(t,\boldsymbol{y}) \text{ のみである。}) \\ &\quad = -q\Phi(t,\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} & \left[\, Q\, ,\, \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) \,\right] \\ &\quad = \left[iq \int d^3\boldsymbol{y}\ \left\{ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{y})\Pi^\dagger(t,\boldsymbol{y}) - \Pi(t,\boldsymbol{y})\Phi(t,\boldsymbol{y}) \right\}\ ,\ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) \right] \\ &\quad = iq \int d^3\boldsymbol{y}\ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{y}) \underbrace{\left[\, \Pi^\dagger(t,\boldsymbol{y})\, ,\, \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) \,\right]}_{-i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\ &\qquad\qquad (\because\ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) \text{ と非可換なのは } \Pi^\dagger(t,\boldsymbol{y}) \text{ のみである。}) \\ &\quad = +q\Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{125}$$

!

$\left[Q, \Phi^\dagger\right] = q\Phi^\dagger$ は、$\left[Q, \Phi\right] = -q\Phi$ のエルミート共役をとることによっても導くことができる。上の計算 (124) と (125) が理解できているなら、(122) の交換関係から逆に Q の表式 (121) が推測できるはずだ。

check 11.16

(11.91) ∼ (11.95) を確かめてみよう。

自由複素スカラー場のハミルトニアン H、運動量 $\boldsymbol{P}$、$U(1)$ 保存電荷 Q は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\boldsymbol{x}\ \left\{\Pi^\dagger\Pi + (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^\dagger(\boldsymbol{\nabla}\Phi) + m^2\Phi^\dagger\Phi\right\} && (126)\\
\boldsymbol{P} &= -\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left\{\Pi(\boldsymbol{\nabla}\Phi) + (\boldsymbol{\nabla}\Phi)\Pi + (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^\dagger\Pi^\dagger + \Pi^\dagger(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^\dagger\right\} && (127)\\
Q &= iq\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left\{\Phi^\dagger\Pi^\dagger + \Pi^\dagger\Phi^\dagger - \Pi\Phi - \Phi\Pi\right\} && (128)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\Pi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}, \qquad \Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\Phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} \tag{129}
$$

である。これらの表式に $\Phi(x)$ のフーリエ展開

$$
\Phi(x) = \int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}\left\{a_+(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} + a_-^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}\right\} \tag{130}
$$

を代入することによって、まず $H, \boldsymbol{P}, Q$ を生成消滅演算子を使って、次のように書き表せることを確かめる。

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3\boldsymbol{k}\ E_{\boldsymbol{k}}\ \left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) + a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} && (131)\\
\boldsymbol{P} &= \int d^3\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{k}\ \left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) + a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} && (132)\\
Q &= \int d^3\boldsymbol{k}\ q\ \left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) - a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} && (133)
\end{aligned}
$$

ここで、生成消滅演算子に関して正規順序となるように、演算子の順番をならべている。また、ハミルトニアン H に関しては、真空のエネルギーが 0 となるように零点振動エネルギーを差し引いて定義している。

(131) ∼ (133) を求めた後に、これらの表式を用いて次の関係式を導くことにする。

$$
H\left|0\right\rangle = \boldsymbol{P}\left|0\right\rangle = Q\left|0\right\rangle = 0 \tag{134}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\,H\,,\,a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\,\right] &= E_{\boldsymbol{k}}\ a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\\
\left[\,\boldsymbol{P}\,,\,a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\,\right] &= \boldsymbol{k}\ a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\\
\left[\,Q\,,\,a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\,\right] &= \pm q\ a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{135}
$$

$$
\begin{aligned}
H\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle &= E_{\boldsymbol{k}}\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle\\
\boldsymbol{P}\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle &= \boldsymbol{k}\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle\\
Q\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle &= \pm q\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle
\end{aligned} \tag{136}
$$

ここで、1 粒子状態 $\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle$ は次式で定義されている。

$$
\left|\boldsymbol{k},\pm q\right\rangle \equiv a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\left|0\right\rangle \tag{137}
$$

まず、$H, \boldsymbol{P}, Q$ の表式 (126) ∼ (128) から (131) ∼ (133) を導く。そのために、(126) ∼ (128) の右辺の各項をそれぞれ生成消滅演算子で表すことにする。ただし、解析を楽にするた

めに、時間 t に依存した項は無視する。これは、check 11.8 でも確かめたように、$H, \boldsymbol{P}, Q$ は保存量なので、最終結果に t 依存項は残っていないはずだからである。本質的に check 11.8 での計算と同じなので、以下では (126) ～ (128) の右辺の各項を生成消滅演算子で表した結果のみを与えることにする。

$$\int d^3\boldsymbol{x}\ \Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\Pi(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2}\left\{a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k}) + a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{138}$$

$$\int d^3\boldsymbol{x}\ \left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)^\dagger\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}^2}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) + a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{139}$$

$$\int d^3\boldsymbol{x}\ m^2\Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\Phi(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{m^2}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) + a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{140}$$

$$-\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\Pi(t,\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{4}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) + a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{141}$$

$$-\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)\Pi(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{4}\left\{a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k}) + a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{142}$$

$$-\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)^\dagger\Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{4}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) + a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{143}$$

$$-\int d^3\boldsymbol{x}\ \frac{1}{2}\Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi(t,\boldsymbol{x})\right)^\dagger$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{4}\left\{a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k}) + a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{144}$$

$$\frac{iq}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{q}{4}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) - a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{145}$$

$$\frac{iq}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \Pi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\Phi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{q}{4}\left\{a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k}) - a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{146}$$

$$-\frac{iq}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \Pi(t,\boldsymbol{x})\Phi(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{q}{4}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k}) - a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{147}$$

$$-\frac{iq}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\ \Phi(t,\boldsymbol{x})\Pi(t,\boldsymbol{x})$$
$$= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{q}{4}\left\{a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k}) - a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} + (t\text{ 依存項}) \tag{148}$$

(138) ∼ (140) からハミルトニアン H の表式 (131) を導く。

$$
\begin{aligned}
H &= (138)+(139)+(140) \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ \left\{\frac{E_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k})+a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right)\right. \\
&\qquad\qquad +\frac{\boldsymbol{k}^2}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left(a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right) \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{m^2}{2E_{\boldsymbol{k}}}\left(a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right)\right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{1}{2}\left(E_{\boldsymbol{k}}+\frac{\boldsymbol{k}^2+m^2}{E_{\boldsymbol{k}}}\right)\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} \\
&\quad +(\text{零点振動エネルギー}) \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ E_{\boldsymbol{k}}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} \qquad (\because\ E_{\boldsymbol{k}}=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}) \qquad (149)
\end{aligned}
$$

3 番目の等号では、$a_\pm(\boldsymbol{k})$ と $a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})$ の間の交換関係を用いて正規順序の形に書き直した。最後の等号では、零点振動エネルギーを無視した。

つぎに、(141) ∼ (144) から運動量演算子の表式 (132) を導く。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= (141)+(142)+(143)+(144) \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{\boldsymbol{k}}{2}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k})+a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})+a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{k}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} \qquad (150)
\end{aligned}
$$

最後の等号では、

$$
\begin{aligned}
a_\pm(\boldsymbol{k})a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k}) &= a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})a_\pm(\boldsymbol{k})+\left[\,a_\pm(\boldsymbol{k})\,,\,a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})\,\right] \\
&= a_\pm^\dagger(\boldsymbol{k})a_\pm(\boldsymbol{k})+\underbrace{\delta^3(\boldsymbol{0})}_{\boldsymbol{k}\text{に依存しない定数}} \qquad (151)
\end{aligned}
$$

および、$\displaystyle\int d^3\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ を用いた。

次に、(145) ∼ (148) から Q の表式 (133) を導く。

$$
\begin{aligned}
Q &= (145)+(146)+(147)+(148) \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ \frac{q}{2}\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})+a_+(\boldsymbol{k})a_+^\dagger(\boldsymbol{k})-a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})-a_-(\boldsymbol{k})a_-^\dagger(\boldsymbol{k})\right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{k}\ q\left\{a_+^\dagger(\boldsymbol{k})a_+(\boldsymbol{k})-a_-^\dagger(\boldsymbol{k})a_-(\boldsymbol{k})\right\} \qquad (152)
\end{aligned}
$$

最後の等号では、(151) を用いた。

$H,\boldsymbol{P},Q$ に対して (131), (132), (133) が求まれば、(134), (135), (136) の証明は簡単である。(134) は $H,\boldsymbol{P},Q$ のそれぞれが正規順序の形で書かれているので、真空状態 $|0\rangle$ を

$$
a_\pm(\boldsymbol{k})\,|0\rangle = 0 \qquad (153)
$$

で定義するなら、自動的に成り立つ。(135) は、check 11.9 の特別な場合にすぎない。(136) は、(135) の交換関係と (134) の性質から、例えば $H\,|\boldsymbol{k},\pm q\rangle$ は

$$
\begin{aligned}
H\,|\boldsymbol{k},\pm q\rangle &= H a_{\pm}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,|0\rangle \\
&= \Big(\big[\,H\,,\,a_{\pm}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,\big] + a_{\pm}^{\dagger}(\boldsymbol{k})H\Big)\,|0\rangle \\
&= E_{\boldsymbol{k}} a_{\pm}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,|0\rangle \\
&\qquad \Big(\ \because\ \big[\,H\,,\,a_{\pm}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\big] = E_{\boldsymbol{k}} a_{\pm}^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,, \quad H\,|0\rangle = 0\ \Big) \\
&= E_{\boldsymbol{k}}\,|\boldsymbol{k},\pm q\rangle
\end{aligned}
\tag{154}
$$

として求まる。他も全く同様にして、簡単に確かめることができる。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第１２章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2015/01/28
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 12 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 12.1 ∼ check 12.13 の解答例

check 12.1

$f(X)$ を変数 $X_1, \cdots, X_n$ の関数とする。このとき、$X_1, \cdots, X_n$ がボース変数かフェルミ変数かによらず、任意の変分 $\delta f(X)$ は次式で与えられることを証明してみよう。

$$\delta f(X) \equiv f(X+\delta X) - f(X) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta X_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} f(X) \tag{12.6}$$

【ヒント】 上式で重要なのは、右辺の表式で δX_α, $\frac{\partial}{\partial X_\alpha}$, $f(X)$ の順番である、$\{X_\alpha\}$ の中にフェルミ変数が含まれる場合は、(12.6) 右辺の代わりに、たとえば $\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial X_\alpha} f(X)\right)\delta X_\alpha$ としたものは一般に $\delta f(X)$ には等しくない。(12.6) の証明は、$f(X)$ が $\{X_\alpha\}$ の N 次単項式 $f(X) = X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_N}$ で与えられている場合に確かめれば十分である。このとき、次のライプニッツ則が一般に成り立つことをまず証明せよ。

$$\delta X_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left(X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_N}\right) = \sum_{k=1}^{N} X_{\beta_1} \cdots X_{\beta_{k-1}} \left(\delta X_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} X_{\beta_k}\right) X_{\beta_{k+1}} \cdots X_{\beta_N}$$

公式 (12.6) は、ディラック場に対してネーターの定理を導く際に使われる。

一般にフェルミ変数を含むとその反可換性のため、順番を入れ替えたときの符号の取り扱いがけっこう面倒である。check 12.1 は、関数 $f(X) \equiv f(X_1, \cdots, X_n)$ の変分に関して、フェルミ変数が含まれているときでも使える便利な公式

$$\delta f(X) \equiv f(X+\delta X) - f(X) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta X_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} f(X) \tag{1}$$

を与えるものである。

関数 $f(X_1, \cdots, X_n)$ としてはテイラー級数展開可能なものを考えているので、(1) の証明には、N 次単項式

$$f(X_1, \cdots, X_n) = X_{\beta_1} X_{\beta_2} \cdots X_{\beta_N} \qquad (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

の場合で (1) を確かめれば十分である。

変数 X_{β_k} $(k = 1, 2, \cdots, N)$ の順番を変えなければ符号の問題は生じないので、(2) の変分 $\delta f(X)$ を (1) の定義にしたがって求めてみる。

$$
\begin{aligned}
\delta f(X_1,\cdots,X_n) &= f(X_1+\delta X_1,\cdots,X_n+\delta X_n) - f(X_1,\cdots,X_n) \\
&\qquad (\text{これは変分}\delta f(X_1,\cdots,X_n)\text{ の定義である}) \\
&\overset{(2)}{=} (X_{\beta_1}+\delta X_{\beta_1})(X_{\beta_2}+\delta X_{\beta_2})\cdots(X_{\beta_N}+\delta X_{\beta_N}) - X_{\beta_1}X_{\beta_2}\cdots X_{\beta_N} \\
&= \delta X_{\beta_1}X_{\beta_2}\cdots X_{\beta_N} + X_{\beta_1}\delta X_{\beta_2}X_{\beta_3}\cdots X_{\beta_N} + \cdots + X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_{N-1}}\delta X_{\beta_N} \\
&\qquad (\because\ \delta X_\beta\text{の 2 次以上の項は無視した。}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_{k-1}}(\delta X_{\beta_k})X_{\beta_{k+1}}\cdots X_{\beta_N} \\
&= \sum_{k=1}^{N} X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_{k-1}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}X_{\beta_k}\right)X_{\beta_{k+1}}\cdots X_{\beta_N} \\
&\qquad \left(\because \sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}X_{\beta_k} = \sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\,\delta_{\alpha,\beta_k} = \delta X_{\beta_k}\right)
\end{aligned} \tag{3}
$$

一方、

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}f(X_1,\cdots,X_n) &= \sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}(X_{\beta_1}X_{\beta_2}\cdots X_{\beta_N}) \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}X_{\beta_1}\right)X_{\beta_2}\cdots X_{\beta_N} \\
&\quad + X_{\beta_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}X_{\beta_2}\right)X_{\beta_3}\cdots X_{\beta_N} \\
&\quad + \cdots + X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_{N-1}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}X_{\beta_N}\right)
\end{aligned} \tag{4}
$$

が成り立つので、(3) と合わせると

$$
\delta f(X_1,\cdots,X_n) = \sum_{\alpha=1}^{n}\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}f(X_1,\cdots,X_n) \tag{5}
$$

が証明できたことになる。

上の証明でもっとも重要な点は、(4) の第 2 番目の等号である。そこでのポイントは、X_α がボソン変数かフェルミ変数かに関係なく、$\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}$ の組み合わせはボソン変数になるという点である。この性質のため、$\frac{\partial}{\partial X_\alpha}$ 単独では X_{β_k} を飛び越えるときに符号を気にしなければならなかったものが、$\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}$ の組み合わせならば（この組み合わせはボソン変数なので）X_{β_k} を飛び越えるときの符号は気にしなくていよい（つまり可換）ということだ。すなわち、通常のライプニッツ則

$$
\begin{aligned}
\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}(A_1A_2\cdots A_N) &= \left(\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}A_1\right)A_2\cdots A_N + A_1\left(\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}A_2\right)A_3\cdots A_N \\
&\quad + \cdots + A_1\cdots A_{N-1}\left(\delta X_\alpha\frac{\partial}{\partial X_\alpha}A_N\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

が、任意の量 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ に対して成り立つ。

(!)

フェルミ変数が含まれているときは、その反可換性から、順番の入れ替えに対して常に符号を気にしなければならず、間違いやすい。上で説明したように、**フェルミ変数をペアで移動させるなら、入れ替えの際に現れる符号の問題は生じない**。知っておくと便利なテクニックである。

check 12.2

自由ディラック場の作用積分は次の荷電共役不変性を持つことを証明せよ。

$$\int d^4x\,\bar{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi = \int d^4x\,\overline{\psi^C}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi^C$$

ここで、$\psi^C = C\bar{\psi}^T$ である（6.3 節参照）。このとき、荷電共役不変性が成り立つためには、ディラック場が反可換性 ($\psi_a^\dagger\psi^b = -\psi^b\psi_a^\dagger$) を持つ必要があることを確かめてみよう。

【ヒント】まず、6.3 節の定義から $\bar{\psi}^T = C^{-1}\psi^C$, $\psi^T = -\overline{\psi^C}C$ を証明せよ。次に反可換性を考慮して、次の関係式 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = \bar{\psi}_a(\gamma^\mu)^a{}_b(\partial_\mu\psi)^b = -(\partial_\mu\psi)^b(\gamma^\mu)^a{}_b\bar{\psi}_a = -(\partial_\mu\psi)^T(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T$, および $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_a\psi^a = -\psi^a\bar{\psi}_a = -\psi^T\bar{\psi}^T$ を用いよ。また、部分積分の際に現れる表面項は無視してよい。

以下ではディラック場の反可換性

$$\psi_a^\dagger\psi^b = -\psi^b\psi_a^\dagger \tag{7}$$

を仮定して、自由ディラック場の作用積分の荷電共役不変性

$$\int d^4x\,\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \int d^4x\,\bar{\psi}^C(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^C \tag{8}$$

を確かめる。ここで ψ^C は ψ の荷電共役

$$\psi^C \equiv C\bar{\psi}^T \tag{9}$$

で定義され、荷電共役行列 C は

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{10}$$

を満たす。

(8) を示すために、(8) の左辺第 1 項から調べる。

$$\begin{aligned}
i&\int d^4x\,\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= i\int d^4x\,\bar{\psi}_a(\gamma^\mu)^a{}_b(\partial_\mu\psi)^b \\
&\qquad (\because \text{スピノルの添字 } a, b \text{ をあらわに書いた。}) \\
&= -i\int d^4x\,(\partial_\mu\psi)^b(\gamma^\mu)^a{}_b\bar{\psi}_a \\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\because \bar{\psi}_a \text{と} \psi^b \text{の反可換性 (7) を用いた。ここでは成分で書かれているので} \\ \;(\bar{\psi}_a \text{と} \psi^b \text{の反可換性に注意して）順番は自由に入れ替えてかまわない。}\end{array}\right) \\
&= -i\int d^4x\,(\partial_\mu\psi)^b((\gamma^\mu)^T)_b{}^a\bar{\psi}_a \\
&\qquad (\because ((\gamma^\mu)^T)_b{}^a = (\gamma^\mu)^a{}_b\,,\ \text{ここで } T \text{ は転置を表す。})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\int d^4x\,(\partial_\mu\psi)^T(\gamma^\mu)^T\bar{\psi}^T \\
&\qquad (\because \text{再び行列表示に戻した。}) \\
&= +i\int d^4x\,\psi^T(\gamma^\mu)^T\partial_\mu\bar{\psi}^T \\
&\qquad (\because \text{部分積分を行って、表面項は落とした。}) \\
&= i\int d^4x\,\psi^T C^{-1}\;\underbrace{C(\gamma^\mu)^T C^{-1}}_{-\gamma^\mu\;\;(\because(10))}\;C\partial_\mu\bar{\psi}^T \\
&= -i\int d^4x\;\underbrace{(\psi^T C^{-1})}_{-\overline{\psi^C}}\gamma^\mu\partial_\mu\underbrace{C\bar{\psi}^T}_{\psi^C} \\
&= +i\int d^4x\,\overline{\psi^C}\gamma^\mu\partial_\mu\psi^C
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで、最後の等号では (9) と

$$
\overline{\psi^C} = -\psi^T C^{-1} \tag{12}
$$

の関係を用いた。(下に証明を与えておいた。)

次に、(8) の質量項について確かめる。

$$
\begin{aligned}
m\int d^4x\,\bar{\psi}\psi &= m\int d^4x\,\bar{\psi}_a\psi^a \\
&= -m\int d^4x\,\psi^a\bar{\psi}_a \qquad (\because\ (7)) \\
&= -m\int d^4x\,\psi^T\bar{\psi}^T \\
&= -m\int d^4x\,\big(-\overline{\psi^C}C\big)\big(C^{-1}\psi^C\big) \qquad (\because\ (9),(12)\,) \\
&= +m\int d^4x\,\overline{\psi^C}\psi^C
\end{aligned}
\tag{13}
$$

最後に (12) を導いておく。

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi^C} &\equiv \big(\psi^C\big)^\dagger\gamma^0 \\
&= \big(C\bar{\psi}^T\big)^\dagger\gamma^0 \qquad (\because (9)) \\
&= \big(C(\psi^\dagger\gamma^0)^T\big)^\dagger\gamma^0 \qquad (\because \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0) \\
&= \big(C(\gamma^0)^T(\psi^T)^\dagger\big)^\dagger\gamma^0 \qquad (\because (AB)^T = B^TA^T,\ (A^\dagger)^T = (A^T)^\dagger\,) \\
&= -\big(\gamma^0 C(\psi^T)^\dagger\big)^\dagger\gamma^0 \qquad (\because (10)) \\
&= -\psi^T C^\dagger(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 \\
&= -\psi^T C^{-1} \qquad (\because C^\dagger = C^{-1},\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0,\ (\gamma^0)^2 = I_4\,)
\end{aligned}
$$

check 12.3

10.6 節での議論を参考にして、エネルギー運動量演算子 (12.14)、および角運動量演算子 (12.17) の表式を導出してみよう。

ここでは、10.6 節の議論をディラック場に適用してエネルギー運動量演算子

$$P^\nu = \int d^3\boldsymbol{x} \left\{ i\psi^\dagger \partial^\nu \psi - \eta^{0\nu}\mathcal{L} \right\} \tag{14}$$

と角運動量演算子

$$J^{ij} = \int d^3\boldsymbol{x}\, \psi^\dagger \left[i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij} \right] \psi \tag{15}$$

を導く。

エネルギー運動量演算子 P^μ を導くために、ディラック場に対する無限小並進を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \psi(x) \ \to\ \psi'(x) &\equiv \psi(x+\varepsilon) \simeq \psi(x) + \varepsilon_\nu \partial^\nu \psi(x) \\ &\equiv \psi(x) + \delta_P \psi(x) \end{aligned} \tag{16}$$

このとき、ラグランジアン密度の無限小並進は、スカラー場のときと全く同じように (教科書本文の (10.80) 参照)、次のように全微分の形で与えられる。

$$\delta_P \mathcal{L} = \partial_\mu (\varepsilon_\nu \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}) \tag{17}$$

!

ラグランジアン密度の詳細には一切よらず、無限小並進 ($x^\mu \to x^\mu + \varepsilon^\mu$) の場合はいつでも (17) が成り立つ。

したがって、(ディラック場に対する) ネーターの定理より、保存するネーターカレントは

$$\begin{aligned} N^\mu &\equiv \big(\delta_P \psi^a\big) \left(\frac{\partial}{\partial \partial_\mu \psi^a} \mathcal{L} \right) - \varepsilon_\nu \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &\overset{(16)}{=} \big(\varepsilon_\nu \partial^\nu \psi^a\big)\big(-(\bar{\psi} i\gamma^\mu)_a \big) - \varepsilon_\nu \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \varepsilon_\nu \big[\, i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \,\big] \end{aligned} \tag{18}$$

で与えられることが分かる。上の計算では、$\psi, \bar{\psi}$ が反可換な量であることに注意する必要がある。例えば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \psi^a} \big((\bar{\psi} i\gamma^\nu)_b \partial_\nu \psi^b \big) &= -(\bar{\psi} i\gamma^\nu)_b \underbrace{\frac{\partial}{\partial \partial_\mu \psi^a} \partial_\nu \psi^b}_{\delta^\mu{}_\nu \delta_a{}^b} \qquad \left(\because\ \tfrac{\partial}{\partial\partial_\mu\psi^a} \text{ と } (\bar{\psi} i\gamma^\nu)_b \text{ は反可換。} \right) \\ &= -(\bar{\psi} i\gamma^\mu)_a \end{aligned} \tag{19}$$

$$(\partial^\nu \psi^a)\,(\bar{\psi} i\gamma^\mu)_a = -(\bar{\psi} i\gamma^\mu)_a (\partial^\nu \psi^a) \tag{20}$$

である。

ε_ν は任意の (無限小) 定数ベクトルなので、(18) で定義される N^μ から ε_ν を取り出して定義した 2 階のテンソル

$$T^{\mu\nu} \equiv i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{21}$$

も保存則

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{22}$$

を満たす。エネルギー運動量演算子 P^ν は $T^{0\nu}$ を空間積分したもので与えられる。

$$\begin{aligned}
P^\nu &\equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, T^{0\nu} \\
&\overset{(21)}{=} \int d^3\boldsymbol{x}\,\{\, i\bar{\psi}\gamma^0\partial^\nu\psi - \eta^{0\nu}\mathcal{L}\,\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\{\, i\psi^\dagger\partial^\nu\psi - \eta^{0\nu}\mathcal{L}\,\} \qquad (\because\ \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0,\, (\gamma^0)^2 = I_4\,) \\
&\Longrightarrow\ (14)
\end{aligned} \tag{23}$$

次に角運動量演算子 (15) を導くために、無限小ローレンツ変換 $x^\mu \to x'^\mu \equiv x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \equiv (x + \Delta\omega\cdot x)^\mu$ を考える。このとき、ディラック場 $\psi(x)$ は次のように変換する (5.2 節参照)。

$$\psi(x)\ \to\ \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{24}$$

$S(\Lambda)$ はスピノルの変換行列で、次式で与えられる。

$$S(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}, \quad \sigma^{\lambda\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\lambda, \gamma^\nu] \tag{25}$$

ネーターカレントを導くときに必要な無限小変換は、$\psi'(x')$ ではなく $\psi'(x)$ なので

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &\overset{(24)}{=} S(\Lambda)\psi(x - \Delta\omega\cdot x) \\
&\overset{(25)}{\simeq} \Big(I_4 - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}\Big)\Big(\psi(x) - \Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu\partial_\lambda\psi(x)\Big) \\
&\simeq \psi(x) - \Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu\partial_\lambda\psi(x) - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}\psi(x) \\
&\equiv \psi(x) + \delta_J\psi(x)
\end{aligned} \tag{26}$$

となる。ここで、$\delta_J\psi(x)$ の中の $-\Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu\partial_\lambda\psi(x)$ は時空座標のローレンツ変換部分 ($\psi(x - \Delta\omega\cdot x) \simeq \psi(x) - \Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu\partial_\lambda\psi(x)$) に対応し、$-\frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}\psi(x)$ はスピノルの変換性 ($S(\Lambda)\psi(x) \simeq (I_4 - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu})\psi(x)$) の部分に対応する。また、最初の等号では、$\Delta\omega$ の 2 次以上の項を無視する近似のもとに、(24) を $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(x' - \Delta\omega\cdot x) = S(\Lambda)\psi(x' - \Delta\omega\cdot x') + \mathcal{O}(\Delta\omega^2)$ と変形した後に、x'^μ を x^μ におきかえて $\mathcal{O}(\Delta\omega^2)$ の項を無視した。(任意の時空座標 x'^μ に対してこの式は成り立つので、この式で $x'^\mu \to x^\mu$ のおきかえを行っても問題は無い。)

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の無限小ローレンツ変換は、スカラー場のときと同じように（教科書本文 (10.88) 参照)、次の全微分の形で与えられる。

$$\delta_J\mathcal{L} = \partial_\mu(-\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu\mathcal{L}) \tag{27}$$

(!)

(27) の関係はラグランジアン密度の詳細によらず、無限小ローレンツ変換の場合はいつでも成り立つ。

したがって、ネーターの定理より、保存するネーターカレントは

$$\begin{aligned}
N^\mu &\equiv \delta_J \psi^a \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \psi^a}\mathcal{L} - (-\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L}) \\
&= \left(-\Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda \psi - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}\psi\right)^a (-\bar{\psi} i\gamma^\mu)_a + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L} \\
&\qquad (\because (26), (19)) \\
&= \bar{\psi} i\gamma^\mu \Bigg(- \underbrace{\Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda}_{\Delta\omega_{\lambda\nu} x^\nu \partial^\lambda} \psi - \frac{i}{4}\Delta\omega_{\lambda\nu}\sigma^{\lambda\nu}\psi \Bigg) + \underbrace{\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu}_{\Delta\omega_{\lambda\nu}\eta^{\lambda\mu}x^\nu} \mathcal{L} \\
&\qquad (\because \psi \text{と} \bar{\psi} \text{は反可換であることに注意。}) \\
&= \frac{1}{2}\Delta\omega_{\lambda\nu}\left[\bar{\psi} i\gamma^\mu (x^\lambda \partial^\nu - x^\nu \partial^\lambda)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \sigma^{\lambda\nu}\psi + (\eta^{\lambda\mu}x^\nu - \eta^{\nu\mu}x^\lambda)\mathcal{L}\right] \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because\ \Delta\omega_{\lambda\nu} \text{は} (\lambda\nu) \text{に関して反対称} (\Delta\omega_{\lambda\nu} = -\Delta\omega_{\nu\lambda}) \text{なので、} \\ \quad (\lambda\nu) \text{に関してカッコ} [\cdots] \text{の中身を反対称化した。} \end{array}\right)
\end{aligned} \tag{28}$$

で与えられる。

$\Delta\omega_{\lambda\nu}$ は任意の (無限小) 反対称パラメータなので、N^μ から $\Delta\omega_{\lambda\nu}$ を取り外した

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} \equiv \bar{\psi} i\gamma^\mu (x^\lambda \partial^\nu - x^\nu \partial^\lambda)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \sigma^{\lambda\nu}\psi + (\eta^{\lambda\mu}x^\nu - \eta^{\nu\mu}x^\lambda)\mathcal{L} \tag{29}$$

も保存則

$$\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} = 0 \tag{30}$$

を満たす。したがって、$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$ で $\mu = 0$ 成分を空間積分した次の量が保存する。

$$J^{\lambda\nu} \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{M}^{0\lambda\nu} \tag{31}$$

これから角運動量演算子 J^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ は

$$\begin{aligned}
J^{ij} &= \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{M}^{0ij} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \left\{\bar{\psi} i\gamma^0 (x^i \partial^j - x^j \partial^i)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0 \sigma^{ij}\psi + (\eta^{i0}x^j - \eta^{j0}x^i)\mathcal{L}\right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\ \psi^\dagger \left[i(x^i \partial^j - x^j \partial^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\right]\psi \qquad (\because\ \eta^{i0} = \eta^{j0} = 0) \\
&\Longrightarrow\ (15)
\end{aligned} \tag{32}$$

で与えられることがわかった。

check 12.4

(12.16)、(12.17) および (12.21) を用いて、(12.15)、(12.19)、(12.22) を導いてみよう。

【ヒント】(12.12) の計算を参考にせよ。場の引数やスピノルの添字を省略せずにきちんと書くように心掛けよう。そのとき、場の引数やスピノルの添字が他の引数や添字と重複して使われていないか確認しよう。また、ディラック場の反可換性にも注意せよ。
(12.15)、(12.19)、(12.22) は、自由ディラック場だけでなく相互作用がある系でも成り立つ。

ここでは、

$$P^0 = \int d^3\boldsymbol{x}\,(i\psi^\dagger\partial^0\psi - \mathcal{L}) \tag{33}$$

$$P^i = \int d^3\boldsymbol{x}\,i\psi^\dagger\partial^i\psi \tag{34}$$

$$J^{ij} = \int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^\dagger\left(i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\right)\psi \tag{35}$$

$$Q = q\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^\dagger\psi \tag{36}$$

を用いて

$$[\,P^\mu\,,\,\psi(x)\,] = -i\partial^\mu\psi(x) \tag{37}$$

$$[\,J^{ij}\,,\,\psi(x)\,] = -\left(i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\right)\psi \tag{38}$$

$$[\,Q\,,\,\psi(x)\,] = -q\psi(x), \qquad [\,Q\,,\,\psi^\dagger(x)\,] = +q\psi^\dagger(x) \tag{39}$$

を導くことにする。そのために、ψ と $\psi^\dagger$ の間の同時刻反交換関係

$$\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\,\} = \delta^a{}_b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{40}$$

$$\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,\} = 0 = \{\,\psi^\dagger_a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\,\} \tag{41}$$

を用いる。

以下で、P^0, P^i, J^{ij}, Q と $\psi^a(t,\boldsymbol{x})$ との交換関係を順次計算していく。このとき、$\psi^a(t,\boldsymbol{x})$ のスピノルの添字 a と時空座標 $(t,\boldsymbol{x})$ をきちんと書いておくことが、間違えを少なくするためにも重要である。

$$\begin{aligned}
[\,P^0\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[\int d^3\boldsymbol{y}\,\big(i\psi^\dagger(t,\boldsymbol{y})\partial^0\psi(t,\boldsymbol{y}) - \mathcal{L}\big)\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\right] \\
&\qquad (\,(33)\text{ で積分変数を } \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y} \text{ に変更していることに注意。}) \\
&= \int d^3\boldsymbol{y}\,i[\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\partial^0\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,] \\
&\qquad \left(\begin{array}{l} \because\ \text{運動方程式}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0\,\text{を使うと}\,\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ \quad = 0\,\text{なので、ここでは}\,\mathcal{L}=0\,\text{とおいた。} \end{array}\right) \\
&= \int d^3\boldsymbol{y}\ \ i\Big(\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\underbrace{\{\partial^0\psi^b(t,\boldsymbol{y}),\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{0} - \underbrace{\{\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y}),\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{\delta_b{}^a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\partial^0\psi^b(t,\boldsymbol{y})\Big) \\
&\qquad (\because [AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B\,) \\
&= -i\partial^0\psi^a(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{42}$$

4 番目の等号で次の同時刻反交換関係

$$\{\,\partial^0\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,\} = 0 \tag{43}$$

を用いたが、時間微分 ∂_0 を含んでいるので、このままでは同時刻反交換関係 (41) を使うことができない。この点については、解説が必要であろう。

時間微分は異なる時刻での差として定義されるので、厳密には (43) 左辺は " 同時刻 " 反交換関係になっていない。そのため、(41) を用いてよいのか疑問が残る。それを正当化するためには、ディラック方程式 $(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = i\gamma_0\partial^0\psi + (i\gamma_j\partial^j - m)\psi = 0$ を用いればよい。ディラック方程式を使えば、$\partial^0\psi^b(t,\boldsymbol{y})$ は空間微分 $-(\gamma_0\gamma_j)^b{}_c\,\partial^j\psi^c(t,\boldsymbol{y})$ と $-im(\gamma_0\psi)^b(t,\boldsymbol{y})$ におきかわるので、安心して同時刻反交換関係 (41) を使うことができ、(43) が正当化される。

残りの交換関係も以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
[\,P^j\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[\int d^3\boldsymbol{y}\,i\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\partial_y^j\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\right] \\
&= i\int d^3\boldsymbol{y}\left(\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\underbrace{\{\partial_y^j\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{0} - \underbrace{\{\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\,,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{\delta_b{}^a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\partial_y^j\psi^b(t,\boldsymbol{y})\right) \\
&= -i\partial^j\psi^a(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
[\,J^{ij}\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[\int d^3\boldsymbol{y}\,\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\Big(i(y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\Big)^b{}_c\,\psi^c(t,\boldsymbol{y})\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\right] \\
&= \int d^3\boldsymbol{y}\left(\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\Big(i(y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\Big)^b{}_c\underbrace{\{\psi^c(t,\boldsymbol{y})\,,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{0}\right. \\
&\qquad\left. - \underbrace{\{\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\,,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{\delta_b{}^a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Big(i(y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\Big)^b{}_c\,\psi^c(t,\boldsymbol{y})\right) \\
&= -\left(i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\right)^a{}_c\,\psi^c(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
[\,Q\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[q\int d^3\boldsymbol{y}\,\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\right] \\
&= q\int d^3\boldsymbol{y}\left(\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\underbrace{\{\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{0} - \underbrace{\{\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\,,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\}}_{\delta_b{}^a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\psi^b(t,\boldsymbol{y})\right) \\
&= -q\psi^a(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
[\,Q\,,\,\psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[q\int d^3\boldsymbol{y}\,\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\,\psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x})\right] \\
&= q\int d^3\boldsymbol{y}\left(\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\underbrace{\{\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,,\psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x})\}}_{\delta^b{}_a\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \underbrace{\{\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\,,\psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x})\}}_{0}\psi^b(t,\boldsymbol{y})\right) \\
&= q\psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{47}
$$

check 12.5

静止系 $\widetilde{k}^\mu = (m,0,0,0)$ で $(\widetilde{\not k} - m)\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) = 0$ と (12.31) を満たす $\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ を具体的に求め、(12.32) ～ (12.39) が成り立っていることを確かめてみよう。

【ヒント】 ここでは、γ^0 を対角化する表示、たとえば、ディラック表示を使って計算するのが便利である。また、$\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ は $\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) = C\bar{\widetilde{u}}^T(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ で定義される。

静止系

$$\widetilde{k}^\mu = (m,0,0,0) = (m, \widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}) \tag{48}$$

では、

$$\left(\widetilde{\not k} - m\right)\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) = 0 \tag{49}$$

$$\bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s') = 2m\delta_{ss'} \tag{50}$$

を満たす解 $\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ を簡単に求めることができる。

ディラック表示

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_D^j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{51}$$

では、

$$\widetilde{\not k} \overset{(48)}{=} m\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} mI_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -mI_2 \end{pmatrix} \tag{52}$$

なので、(49) は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{u}_2 \\ \widetilde{u}_3 \\ \widetilde{u}_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{53}$$

となり、$\widetilde{u}$ のスピノル成分の上から 3 番目と 4 番目の成分 ($\widetilde{u}_3$ と $\widetilde{u}_4$) が 0 であることがわかる。したがって、$\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ として、次のように

$$\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{2m}\chi(s) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\chi(s) = \begin{cases} \binom{1}{0} & s = + \\ \binom{0}{1} & s = - \end{cases} \tag{55}$$

とれば、(49) のディラック方程式と (50) の直交性を満たすことがわかる。ここで、

$$\bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) = \widetilde{u}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)\gamma_D^0 = \widetilde{u}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) = (\sqrt{2m}\chi^T(s), \boldsymbol{0}^T) \tag{56}$$

$$\chi^T(s)\chi(s') = \delta_{ss'} \tag{57}$$

であることに注意しておく。

$\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ は、$\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s)$ から

$$\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) \equiv C\bar{\widetilde{u}}^T(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}, s) \tag{58}$$

で定義される。荷電共役行列 C をディラック表示で具体的に書き表すと

$$C = i\gamma_D^2\gamma_D^0 = i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{59}$$

となるので、(56) と (59) を (58) に代入して

$$\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sqrt{2m}(-i\sigma^2)\chi(s) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s) \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\widetilde{\chi}(s) \equiv -i\sigma^2\chi(s) = \begin{cases} \binom{0}{1} & s = + \\ \binom{-1}{0} & s = - \end{cases} \tag{61}$$

を得る。この表示から

$$\bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s) = \widetilde{v}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\gamma_D^0 = -\widetilde{v}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s) = (\mathbf{0}^T,\, -\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s)) \tag{62}$$

$$\widetilde{\chi}^T(s)\widetilde{\chi}(s') = \delta_{ss'} \tag{63}$$

が成り立つことがわかる。

以下では、上で求めた $\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)$ と $\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)$ が、次式を満たすことを具体的に確かめる。

$$\bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = -2m\delta_{ss'} \tag{64}$$

$$\bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = \bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = 0 \tag{65}$$

$$\widetilde{u}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = \widetilde{v}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = 2m\delta_{ss'} \tag{66}$$

$$\widetilde{u}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{v}(-\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = \widetilde{v}^\dagger(\widetilde{-\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = 0 \tag{67}$$

$$\bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\gamma_D^\mu\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = \bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\gamma_D^\mu\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') = 2\widetilde{k}^\mu\delta_{ss'} \tag{68}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{s=\pm}\{\widetilde{u}^a(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\bar{\widetilde{u}}_b(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s) - \widetilde{v}^a(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\bar{\widetilde{v}}_b(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\} = \delta^a{}_b \tag{69}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{s=\pm}\widetilde{u}^a(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\bar{\widetilde{u}}_b(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s) = \left(\frac{\widetilde{\not k} + m}{2m}\right)^a{}_b \tag{70}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_{s=\pm}\widetilde{v}^a(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\bar{\widetilde{v}}_b(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s) = \left(\frac{\widetilde{\not k} - m}{2m}\right)^a{}_b \tag{71}$$

ここで、(66) では $E_{\widetilde{\boldsymbol{k}}=\mathbf{0}} = m$ を用いた。

<u>(64)</u>

$$\begin{aligned} \bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') &\overset{(60)(62)}{=} (\mathbf{0}^T, -\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s))\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s') \end{pmatrix} \\ &= -2m\widetilde{\chi}^\dagger(s)\widetilde{\chi}(s') \\ &\overset{(63)}{=} -2m\delta_{ss'} \end{aligned}$$

<u>(65)</u>

$$\begin{aligned} \bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s)\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}, s') &\overset{(56)(60)}{=} (\sqrt{2m}\chi^T(s), \mathbf{0}^T)\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s') \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') \overset{(54)(62)}{=} (\boldsymbol{0}^T, -\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s))\begin{pmatrix}\sqrt{2m}\chi(s')\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$
$$= 0$$

<u>(66)</u>

$$\begin{aligned}\widetilde{u}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') &\overset{(54)}{=} (\sqrt{2m}\chi^T(s),\boldsymbol{0}^T)\begin{pmatrix}\sqrt{2m}\chi(s')\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ &= 2m\chi^T(s)\chi(s')\\ &\overset{(57)}{=} 2m\delta_{ss'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{v}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') &\overset{(60)}{=} (\boldsymbol{0}^T,\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s))\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s')\end{pmatrix}\\ &= 2m\widetilde{\chi}^T(s)\widetilde{\chi}(s')\\ &\overset{(63)}{=} 2m\delta_{ss'}\end{aligned}$$

<u>(67)</u>

$$\widetilde{u}^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\widetilde{v}(-\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') \overset{(54)(60)}{=} (\sqrt{2m}\chi^T(s),\boldsymbol{0}^T)\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s')\end{pmatrix}$$
$$= 0$$

$$\widetilde{v}^\dagger(-\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') \overset{(54)(60)}{=} (\boldsymbol{0}^T,\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s))\begin{pmatrix}\sqrt{2m}\chi(s')\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$
$$= 0$$

<u>(68)</u>

$$\begin{aligned}\bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\gamma_D^0\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') &\overset{(51)(54)(56)}{=} (\sqrt{2m}\chi^T(s),\boldsymbol{0}^T)\begin{pmatrix}I_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2m}\chi(s')\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ &\overset{(57)}{=} 2m\delta_{ss'}\\ &\overset{(48)}{=} 2\widetilde{k}^0\delta_{ss'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\widetilde{u}}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\gamma_D^j\,\widetilde{u}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') &\overset{(51)(54)(56)}{=} (\sqrt{2m}\chi^T(s),\boldsymbol{0}^T)\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \sigma^j\\ -\sigma^j & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2m}\chi(s')\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ &= 0\\ &= 2\widetilde{k}^j\delta_{ss'} \quad (\because \widetilde{k}^j=0) \qquad (j=1,2,3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\widetilde{v}}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\gamma_D^0\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') &\overset{(51)(60)(62)}{=} (\boldsymbol{0}^T,-\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s))\begin{pmatrix}I_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s')\end{pmatrix}\\ &\overset{(63)}{=} 2m\delta_{ss'}\\ &\overset{(48)}{=} 2\widetilde{k}^0\delta_{ss'}\end{aligned}$$

$$\bar{\widetilde{v}}^T(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\gamma_D^j\,\widetilde{v}(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s') \overset{(51)(60)(62)}{=} (\boldsymbol{0}^T, -\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s') \end{pmatrix}$$
$$= 0$$
$$= 2\widetilde{k}^j \delta_{ss'} \quad (\because \widetilde{k}^j = 0) \qquad (j=1,2,3)$$

<u>(69)</u>

(69) は (70) と (71) から導かれるので、ここでは (70) と (71) を証明する。

<u>(70)</u>

$$\frac{1}{2m}\sum_{s=\pm} \widetilde{u}^a(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\,\bar{\widetilde{u}}_b(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s) \overset{(54)(56)}{=} \frac{1}{2m}\sum_{s=\pm} \begin{pmatrix} \sqrt{2m}\chi(s) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^a (\sqrt{2m}\chi^T(s), \boldsymbol{0}^T)_b$$
$$= \begin{pmatrix} \chi(+) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^a (\chi^T(+), \boldsymbol{0}^T)_b + \begin{pmatrix} \chi(-) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^a (\chi^T(-), \boldsymbol{0}^T)_b$$
$$\overset{(55)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^a (1,0,0,0)_b + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^a (0,1,0,0)_b$$
$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}^a_{\ b} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}^a_{\ b}$$
$$= \begin{pmatrix} I_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^a_{\ b} \overset{(52)}{=} \left(\frac{\widetilde{\not{k}}+m}{2m}\right)^a_{\ b}$$

<u>(71)</u>

$$\frac{1}{2m}\sum_{s=\pm} \widetilde{v}^a(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s)\bar{\widetilde{v}}_b(\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{0},s) \overset{(60)(62)}{=} \frac{1}{2m}\sum_{s=\pm} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \sqrt{2m}\widetilde{\chi}(s) \end{pmatrix}^a (\boldsymbol{0}^T, -\sqrt{2m}\widetilde{\chi}^T(s))_b$$
$$= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\chi}(+) \end{pmatrix}^a (\boldsymbol{0}^T, \widetilde{\chi}^T(+))_b - \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\chi}(-) \end{pmatrix}^a (\boldsymbol{0}^T, \widetilde{\chi}^T(-))_b$$
$$\overset{(61)}{=} -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^a (0,0,0,1)_b - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^a (0,0,-1,0)_b$$
$$= -\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}^a_{\ b} - \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}^a_{\ b}$$
$$= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & I_2 \end{pmatrix}^a_{\ b} \overset{(52)}{=} \left(\frac{\widetilde{\not{k}}-m}{2m}\right)^a_{\ b}$$

check 12.6

ディラック表示での解の表式 (12.43) と (12.44) を確かめよ。また、(12.43) と (12.44) を用いて、具体的に (12.31) ∼ (12.40) および (12.42) が成り立っていることを確かめてみよう。

【ヒント】 $|\boldsymbol{k}| = \sqrt{(E_{\boldsymbol{k}})^2 - m^2} = \sqrt{(E_{\boldsymbol{k}}+m)(E_{\boldsymbol{k}}-m)}$、およびディラック表示で $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列) を用いよ。

ディラック場 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2m)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left\{ b(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k},s)e^{-ik\cdot x} + d^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k},s)e^{ik\cdot x} \right\} \tag{72}$$

と展開したとき、4 成分 (c 数) スピノル $u(\boldsymbol{k},s)$ と $v(\boldsymbol{k},s)$ は次式

$$(\not{k} - m)u(\boldsymbol{k},s) = 0 \tag{73}$$

$$(-\not{k} - m)v(\boldsymbol{k},s) = 0 \tag{74}$$

を満たす解として定義される。$s = \pm\frac{1}{2}$ で区別される 2 つの独立解は、ここではヘリシティの固有状態、すなわち、

$$\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}u(\boldsymbol{k},s) = s\,u(\boldsymbol{k},s) \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{75}$$

$$\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}v(\boldsymbol{k},s) = -s\,v(\boldsymbol{k},s) \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{76}$$

にとることにする。ここで $\boldsymbol{S}$ はスピン角運動量行列

$$\boldsymbol{S} = \left(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3\,,\ \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1\,,\ \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 \right) \tag{77}$$

である。

まず初めに、γ 行列をディラック表示

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad (j = 1,2,3) \tag{78}$$

にとったとき、方程式 (73) ∼ (76) の解が具体的に

$$u(\boldsymbol{k},s) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\chi^{(s)} \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{79}$$

$$v(\boldsymbol{k},s) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\widetilde{\chi}^{(s)} \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\widetilde{\chi}^{(s)} \end{pmatrix} \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{80}$$

で与えられることを確かめる。ここで、$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列、$\chi^{(s)}$, $\widetilde{\chi}^{(s)} \equiv -i\sigma^2(\chi^{(s)})^*$ は 2 成分スピノルで

$$\chi^{(s=+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \chi^{(s=-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{81}$$

$$\widetilde{\chi}^{(s=+\frac{1}{2})} = -i\sigma^2(\chi^{(s=+\frac{1}{2})})^* = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$
$$\widetilde{\chi}^{(s=-\frac{1}{2})} = -i\sigma^2(\chi^{(s=-\frac{1}{2})})^* = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \\ -e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{82}$$

で与えられる。θ, φ は、$\boldsymbol{k}$ を極座標表示したときの天頂角と方位角で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &= (k_x, k_y, k_z) \\ &= (|\boldsymbol{k}|\cos\varphi\sin\theta,\ |\boldsymbol{k}|\sin\varphi\sin\theta,\ |\boldsymbol{k}|\cos\theta) \end{aligned} \tag{83}$$

で定義される。(81) および (82) で定義される $\chi^{(s)}$ および $\widetilde{\chi}^{(s)}$ $(s = \pm\frac{1}{2})$ は、次の直交関係を満たすことがすぐに確かめられる。

$$\begin{aligned} &(\chi^{(s)})^\dagger\chi^{(s')} = \delta_{ss'} \\ &(\widetilde{\chi}^{(s)})^\dagger\widetilde{\chi}^{(s')} = \delta_{ss'} \quad \left(s, s' = \pm\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{84}$$

また、2 成分スピノル $\chi^{(s)}$、$\widetilde{\chi}^{(s)}$ は $\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ の固有状態となっている。すなわち、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\chi^{(s)} = s\,\chi^{(s)} \\ &\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\widetilde{\chi}^{(s)} = -s\,\widetilde{\chi}^{(s)} \quad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{85}$$

が成り立つ。これは、$\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ の具体的表示

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} &= \frac{1}{2|\boldsymbol{k}|}\begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \\ &\overset{(83)}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{86}$$

から直接確かめることができる。

では、(79) と (80) で定義される $u(\boldsymbol{k}, s)$ と $v(\boldsymbol{k}, s)$ がそれぞれ (73) と (74) を満たすことを確かめる。

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)\,u(\boldsymbol{k}, s) &= (E_{\boldsymbol{k}}\gamma_D^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}_D - m)\,u(\boldsymbol{k}, s) \\ &\overset{(78)(79)}{=} \begin{pmatrix} (E_{\boldsymbol{k}} - m)I_2 & -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -(E_{\boldsymbol{k}} + m)I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}} + m}\,\chi^{(s)} \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}} - m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\chi^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left((E_{\boldsymbol{k}} - m)\sqrt{E_{\boldsymbol{k}} + m} - \sqrt{E_{\boldsymbol{k}} - m}|\boldsymbol{k}|\right)\chi^{(s)} \\ \left(\sqrt{E_{\boldsymbol{k}} + m} - (E_{\boldsymbol{k}} + m)\frac{\sqrt{E_{\boldsymbol{k}} - m}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \\ &\qquad (\because (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{k}^2 I_2\,) \\ &= 0 \qquad (\because |\boldsymbol{k}| = \sqrt{(E_{\boldsymbol{k}})^2 - m^2} = \sqrt{(E_{\boldsymbol{k}} + m)(E_{\boldsymbol{k}} - m)}\,) \\ &\Longrightarrow (73) \end{aligned} \tag{87}$$

$$
\begin{aligned}
(-\not{k}-m)\,v(\boldsymbol{k},s) &= (-E_{\boldsymbol{k}}\gamma_D^0+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}_D-m)\,v(\boldsymbol{k},s)\\
&\overset{(78)(80)}{=} \begin{pmatrix} -(E_{\boldsymbol{k}}+m)I_2 & \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma} & (E_{\boldsymbol{k}}-m)I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{k}|}\,\widetilde{\chi}^{(s)}\\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\widetilde{\chi}^{(s)}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\Big(-(E_{\boldsymbol{k}}+m)\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}+\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\Big)\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}\widetilde{\chi}^{(s)}\\ \big(-\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}|\boldsymbol{k}|+(E_{\boldsymbol{k}}-m)\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\big)\widetilde{\chi}^{(s)}\end{pmatrix}\\
&\qquad (\because (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=\boldsymbol{k}^2I_2\,)\\
&= 0 \qquad (\because |\boldsymbol{k}|=\sqrt{(E_{\boldsymbol{k}}+m)(E_{\boldsymbol{k}}-m)}\,)\\
&\Longrightarrow (74)
\end{aligned}
\tag{88}
$$

次に、(75) と (76) を確かめる。ディラック表示では、$\boldsymbol{S}$ は次式で与えられる。

$$
\boldsymbol{S}=\left(\frac{i}{2}\gamma_D^2\gamma_D^3,\,\frac{i}{2}\gamma_D^3\gamma_D^1,\,\frac{i}{2}\gamma_D^1\gamma_D^2\right)=\begin{pmatrix}\frac12\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \frac12\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}
\tag{89}
$$

この $\boldsymbol{S}$ の表示と (85) を用いれば、次のように (75) と (76) を確かめることができる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}u(\boldsymbol{k},s) &= \begin{pmatrix}\frac12\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \frac12\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\chi^{(s)}\\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\chi^{(s)}\end{pmatrix}\\
&\overset{(85)}{=} s\begin{pmatrix}\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\chi^{(s)}\\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\chi^{(s)}\end{pmatrix},\\
&= s\,u(\boldsymbol{k},s) \quad\Longrightarrow\quad (75)
\end{aligned}
\tag{90}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}v(\boldsymbol{k},s) &= \begin{pmatrix}\frac12\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \frac12\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\widetilde{\chi}^{(s)}\\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\widetilde{\chi}^{(s)}\end{pmatrix}\\
&\overset{(85)}{=} -s\begin{pmatrix}\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\widetilde{\chi}^{(s)}\\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\widetilde{\chi}^{(s)}\end{pmatrix}\\
&= -s\,v(\boldsymbol{k},s) \quad\Longrightarrow\quad (76)
\end{aligned}
\tag{91}
$$

次に教科書本文の (12.31)、すなわち

$$
\bar{u}(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k},s')=2m\delta_{ss'}
\tag{92}
$$

を確かめる。

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k},s')=u^\dagger(\boldsymbol{k},s)\gamma_D^0u(\boldsymbol{k},s')\\
&\overset{(79)}{=}\left(\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}(\chi^{(s)})^\dagger,\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}(\chi^{(s)})^\dagger\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\begin{pmatrix}I_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\chi^{(s')}\\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\chi^{(s')}\end{pmatrix}\\
&\qquad (\because \boldsymbol{\sigma}^\dagger=\boldsymbol{\sigma}\,)\\
&=(E_{\boldsymbol{k}}+m)(\chi^{(s)})^\dagger\chi^{(s')}-(E_{\boldsymbol{k}}-m)(\chi^{(s)})^\dagger\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)^2\chi^{(s')}\\
&=(E_{\boldsymbol{k}}+m)\delta_{ss'}-(E_{\boldsymbol{k}}-m)\delta_{ss'}\\
&\qquad (\because (84)\text{ および }(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})^2=\boldsymbol{k}^2I_2\text{を用いた。})\\
&=2m\delta_{ss'}\\
&\Longrightarrow (92)
\end{aligned}
\tag{93}
$$

教科書本文で述べたように、$v(\boldsymbol{k},s)$ は $u(\boldsymbol{k},s)$ からの荷電共役変換

$$v(\boldsymbol{k},s) = C\bar{u}^T(\boldsymbol{k},s) \tag{94}$$

として定義した。(80) で与えられている $v(\boldsymbol{k},s)$ が上の関係を満たしていることを確かめておく。

$$\begin{aligned}
C\bar{u}^T(\boldsymbol{k},s) &= (i\gamma_D^2\gamma_D^0)\ \underbrace{(u^\dagger(\boldsymbol{k},s)\gamma_D^0)^T}_{(\gamma_D^0)^T u^*(\boldsymbol{k},s)=\gamma_D^0 u^*(\boldsymbol{k},s)} \\
&= i\gamma_D^2 \underbrace{(\gamma_D^0)^2}_{I_4} u^*(\boldsymbol{k},s) \\
&\overset{(78)(79)}{=} i\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,(\chi^{(s)})^* \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,(\chi^{(s)})^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,i\sigma^2\frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,(\chi^{(s)})^* \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,(-i\sigma^2)(\chi^{(s)})^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,(-i\sigma^2)(\chi^{(s)})^* \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,(-i\sigma^2)(\chi^{(s)})^* \end{pmatrix} \qquad (\because\ \sigma^2(\sigma^j)^*\sigma^2 = -\sigma^j\ \ (j=1,2,3)\,) \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\,\widetilde{\chi}^{(s)} \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\widetilde{\chi}^{(s)} \end{pmatrix} \qquad (\because\ \widetilde{\chi}^{(s)} = -i\sigma^2(\chi^{(s)})^*\,) \\
&= v(\boldsymbol{k},s) \\
&\Longrightarrow\ (80)
\end{aligned} \tag{95}$$

上で求めた表式を用いれば、教科書本文の (12.32) ∼ (12.42) を具体的に確かめることができる。計算は多少面倒だが、計算自体は初等的なものだ。実際、教科書本文で示したように、$u(\boldsymbol{k},s)$ がディラック方程式 (73) と直交性 (92) を満たし、$v(\boldsymbol{k},s)$ を $u(\boldsymbol{k},s)$ の荷電共役変換 (94) で定義するなら、教科書本文での (12.32) ∼ (12.39) の関係は γ 行列の表示に関係なく成り立つ。また、s をヘリシティ演算子 $\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ の固有値に選ぶなら ((75), (76) 参照)、教科書本文 (12.42)、すなわち

$$\frac{1}{2m}u(\boldsymbol{k},s)\bar{u}(\boldsymbol{k},s) = \left(\frac{\not{k}+m}{2m}\right)\left(\frac{1+2s(2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)}{2}\right) \tag{96}$$

$$\frac{1}{2m}v(\boldsymbol{k},s)\bar{v}(\boldsymbol{k},s) = \left(\frac{\not{k}-m}{2m}\right)\left(\frac{1-2s(2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)}{2}\right) \tag{97}$$

が成り立つ。

以下では、教科書本文の (12.32) ∼ (12.42) の中で自明ではないと思われる (12.42)、すなわち、(96) と (97) を $u(\boldsymbol{k},s)$ と $v(\boldsymbol{k},s)$ の具体的表示を用いて確かめることにする。そのために、次の関係式を証明しておく。(下では、s の和はとられていないことに注意。)

$$\chi^{(s)}(\chi^{(s)})^\dagger = \frac{1}{2}\left(I_2 + 2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \tag{98}$$

$$\widetilde{\chi}^{(s)}(\widetilde{\chi}^{(s)})^\dagger = \frac{1}{2}\left(I_2 - 2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{99}$$

(98) の証明は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\chi^{(s=\frac{1}{2})}(\chi^{(s=\frac{1}{2})})^\dagger &\overset{(81)}{=} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \bigl(e^{i\varphi/2}\cos(\theta/2), e^{-i\varphi/2}\sin(\theta/2)\bigr) \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & e^{-i\varphi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\overset{(86)}{=} \frac{1}{2}\left(I_2 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \qquad (100)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi^{(s=-\frac{1}{2})}(\chi^{(s=-\frac{1}{2})})^\dagger &\overset{(81)}{=} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \bigl(-e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2), e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2)\bigr) \\
&= \begin{pmatrix} \sin^2(\theta/2) & -e^{-i\varphi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ -e^{i\varphi}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & \cos^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -e^{-i\varphi}\sin\theta \\ -e^{i\varphi}\sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\overset{(86)}{=} \frac{1}{2}\left(I_2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \qquad (101)
\end{aligned}
$$

したがって、(100) と (101) から (98) が成り立っていることがわかる。(99) は $\widetilde{\chi}^{(s)} = -i\sigma^2(\chi^{(s)})^*$ の関係を使って、次のように (98) から導くことができる。

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\chi}^{(s)}(\widetilde{\chi}^{(s)})^\dagger &= \bigl(-i\sigma^2(\chi^s)^*\bigr)\bigl(-i\sigma^2(\chi^{(s)})^*\bigr)^\dagger \\
&= \sigma^2\bigl(\chi^{(s)}(\chi^{(s)})^\dagger\bigr)^*\sigma^2 \\
&\overset{(98)}{=} \sigma^2\frac{1}{2}\left(I_2 + 2s\frac{\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\sigma^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(I_2 - 2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \qquad (\because\ \sigma^2(\boldsymbol{\sigma})^*\sigma^2 = -\boldsymbol{\sigma},\ (\sigma^2)^2 = I_2\,) \\
&\Longrightarrow\ (99) \qquad (102)
\end{aligned}
$$

では最後に、(96) を導いておく。((97) は同様に確かめることができる。) まず、(96) 左辺の $u(\boldsymbol{k},s)\bar{u}(\boldsymbol{k},s)$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{k},s)\bar{u}(\boldsymbol{k},s) \\
&\overset{(78)(79)}{=} u(\boldsymbol{k},s)u^\dagger(\boldsymbol{k},s)\gamma_D^0 \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}\,\chi^{(s)} \\ \sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \left(\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}+m}(\chi^{(s)})^\dagger, -\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}-m}\,(\chi^{(s)})^\dagger\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (E_{\boldsymbol{k}}+m)\chi^{(s)}(\chi^{(s)})^\dagger & -2s|\boldsymbol{k}|\chi^{(s)}(\chi^{(s)})^\dagger \\ 2s|\boldsymbol{k}|\chi^{(s)}(\chi^{(s)})^\dagger & -(E_{\boldsymbol{k}}-m)\chi^{(s)}(\chi^{(s)})^\dagger \end{pmatrix} \\
&\qquad \left(\because \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\chi^{(s)} = 2s\chi^{(s)}\ \left(s=\pm\frac{1}{2}\right),\ (2s)^2 = 1,\ \sqrt{(E_{\boldsymbol{k}+m})(E_{\boldsymbol{k}}-m)} = |\boldsymbol{k}|\right) \\
&\overset{(98)}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (E_{\boldsymbol{k}}+m)\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) & -2s|\boldsymbol{k}|\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \\ 2s|\boldsymbol{k}|\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) & -(E_{\boldsymbol{k}}-m)\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) \end{pmatrix} \qquad (103)
\end{aligned}
$$

次に、(96) の右辺（に $2m$ をかけたもの）を計算する。

$$
\begin{aligned}
&(\not{k}+m)\left(\frac{I_4+2s(2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)}{2}\right) \\
&\quad=\frac{1}{2}(\gamma_D^0 E_{\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{\gamma_D}\cdot\boldsymbol{k}+mI_4)\left(I_4+2s\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\end{pmatrix}\right) \\
&\quad=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(E_{\boldsymbol{k}}+m)I_2 & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} & -(E_{\boldsymbol{k}}-m)I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\end{pmatrix} \\
&\quad=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(E_{\boldsymbol{k}}+m)\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) & -(E_{\boldsymbol{k}}-m)\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\end{pmatrix} \\
&\quad=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(E_{\boldsymbol{k}}+m)\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) & -2s|\boldsymbol{k}|\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\\ 2s|\boldsymbol{k}|\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right) & -(E_{\boldsymbol{k}}-m)\left(I_2+2s\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)\end{pmatrix} \\
&\qquad\left(\because\ \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)^2=I_2,\ (2s)^2=1\ \text{を用いた。}\right) \\
&\quad\overset{(103)}{=}u(\boldsymbol{k},s)\bar{u}(\boldsymbol{k},s) \\
&\quad\Longrightarrow\ (96)
\end{aligned}
\tag{104}
$$

check 12.7

$\psi(x)$ と $\psi'(x)$ がディラック方程式の解ならば、$(\psi'|\psi)$ は時間によらないことを示せ。また、(12.46) の規格直交関係を確かめてみよう。

まず初めに、$\psi(x)$ と $\psi'(x)$ がディラック方程式を満たすならば

$$\frac{d}{dt}(\psi'|\psi)=0 \tag{105}$$

となることを確かめる。ここで、$(\psi'|\psi)$ は次式で定義される。

$$(\psi'|\psi)\equiv\int d^3\boldsymbol{x}\,\psi'^{\dagger}(x)\psi(x)=\int d^3\boldsymbol{x}\,\bar{\psi}'(x)\gamma^0\psi(x) \tag{106}$$

$\psi(x)$ と $\bar{\psi}'(x)$ に対するディラック方程式は

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0 \tag{107}$$

$$i(\partial_\mu\bar{\psi}'(x))\gamma^\mu+m\bar{\psi}'(x)=0 \tag{108}$$

で与えられるので、これらから

$$\gamma^0\partial_0\psi(x)=(-\gamma^j\partial_j-im)\psi(x) \tag{109}$$

$$(\partial_0\bar{\psi}'(x))\gamma^0=-(\partial_j\bar{\psi}'(x))\gamma^j+im\bar{\psi}'(x) \tag{110}$$

が導かれる。これらを使って、(105) を以下で導く。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi'|\psi) &= \frac{d}{dt}\int d^3\boldsymbol{x}\,\bar{\psi}'(x)\gamma^0\psi(x) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\left\{\frac{\partial\bar{\psi}'(x)}{\partial t}\gamma^0\psi(x)+\bar{\psi}'(x)\gamma^0\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}\right\} \\
&\overset{(109)(110)}{=} \int d^3\boldsymbol{x}\left\{\big(-(\partial_j\bar{\psi}'(x))\gamma^j+im\bar{\psi}'(x)\big)\psi(x)+\bar{\psi}'(x)(-\gamma^j\partial_j-im)\psi(x)\right\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \int d^3\boldsymbol{x}\left\{+\bar{\psi}'(x)\gamma^j\partial_j\psi(x)-\bar{\psi}'(x)\gamma^j\partial_j\psi(x)\right\} \\
&\qquad (\because\ \text{第 1 項を部分積分して、表面項は 0 とした。}) \\
&= 0 \qquad (111)
\end{aligned}$$

次に、規格直交関係

$$(U_{\boldsymbol{k},s}|U_{\boldsymbol{k'},s'}) = (V_{\boldsymbol{k},s}|V_{\boldsymbol{k'},s'}) = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \qquad (112)$$

$$(U_{\boldsymbol{k},s}|V_{\boldsymbol{k'},s'}) = (V_{\boldsymbol{k},s}|U_{\boldsymbol{k'},s'}) = 0 \qquad (113)$$

を導く。ここで、

$$U_{\boldsymbol{k},s}(x) \equiv \frac{u(\boldsymbol{k},s)e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}, \qquad V_{\boldsymbol{k},s}(x) \equiv \frac{v(\boldsymbol{k},s)e^{ik\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}} \qquad (114)$$

である。定義にしたがって、計算していく。

$$\begin{aligned}
(U_{\boldsymbol{k},s}|U_{\boldsymbol{k'},s'}) &= \int d^3\boldsymbol{x}\,U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}U_{\boldsymbol{k'},s'} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\frac{e^{i(k-k')\cdot x}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\,u^\dagger(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k'},s') \\
&\overset{\boldsymbol{x}\text{ 積分}}{=} \frac{(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})e^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k'}})t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\,u^\dagger(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k'},s') \\
&\quad \left(\because\ e^{i(k-k')\cdot x} = e^{i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k'}})t-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}},\ \int d^3\boldsymbol{x}\,e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\right) \\
&= \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\underbrace{u^\dagger(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k},s')}_{2E_{\boldsymbol{k}}\delta_{ss'}}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \\
&= \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \qquad (115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(V_{\boldsymbol{k},s}|V_{\boldsymbol{k'},s'}) &= \int d^3\boldsymbol{x}\,\frac{e^{-i(k-k')\cdot x}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\,v^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k'},s') \\
&\overset{\boldsymbol{x}\text{ 積分}}{=} \frac{(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})e^{-i(E_{\boldsymbol{k}}-E_{\boldsymbol{k'}})t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\,v^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k'},s') \\
&= \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\underbrace{v^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k},s')}_{2E_{\boldsymbol{k}}\delta_{ss'}}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \\
&= \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \qquad (116)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(U_{\boldsymbol{k},s}|V_{\boldsymbol{k'},s'}) &= \int d^3\boldsymbol{x}\, \frac{e^{i(k+k')\cdot x}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\, u^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k'},s') \\
&\overset{\boldsymbol{x}\,\text{積分}}{=} \frac{(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'})e^{i(E_{\boldsymbol{k}}+E_{\boldsymbol{k'}})t}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\, u^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k'},s') \\
&= \frac{1}{2E_{\boldsymbol{k}}}\underbrace{u^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(-\boldsymbol{k},s')}_{0}\, e^{i2E_{\boldsymbol{k}}t}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k'}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{117}
$$

$$
\begin{aligned}
(V_{\boldsymbol{k},s}|U_{\boldsymbol{k'},s'}) &= (U_{\boldsymbol{k'},s'}|V_{\boldsymbol{k},s})^\dagger \\
&\overset{(117)}{=} 0
\end{aligned} \tag{118}
$$

check 12.8

$\psi(t,\boldsymbol{x})$, $\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$ に対する同時刻反交換関係 (12.10) から、$b(\boldsymbol{k},s)$, $b^\dagger(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{k},s)$ に対する反交換関係 (12.49) を導いてみよう。逆に、$b(\boldsymbol{k},s)$, $b^\dagger(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{k},s)$ に対する反交換関係から、$\psi(t,\boldsymbol{x})$, $\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$ に対する同時刻反交換関係を導いてみよう。

【ヒント】 (12.10) から (12.49) を導く際には、(12.48) を (12.49) に代入して (12.34) と (12.35) を用いるとよい。逆に (12.49) から (12.10) を導く際には、(12.25) を (12.10) に代入して (12.38) と (12.39) を用いる。また、デルタ関数の積分表示 $\int d^3\boldsymbol{x}\, e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k})$ および $E_{\boldsymbol{k}} = E_{-\boldsymbol{k}}$ の関係も用いる。

$\psi(x)$ と $b(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$ はお互い次の関係で結びついている。

$$
\psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left\{ b(\boldsymbol{k},s)u(\boldsymbol{k},s)e^{-ik\cdot x} + d^\dagger(\boldsymbol{k},s)v(\boldsymbol{k},s)e^{ik\cdot x} \right\} \tag{119}
$$

$$
\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left\{ b^\dagger(\boldsymbol{k},s)u^\dagger(\boldsymbol{k},s)e^{ik\cdot x} + d(\boldsymbol{k},s)v^\dagger(\boldsymbol{k},s)e^{-ik\cdot x} \right\} \tag{120}
$$

$$
b(\boldsymbol{k},s) = (U_{\boldsymbol{k},s}|\psi), \quad b^\dagger(\boldsymbol{k},s) = (U_{\boldsymbol{k},s}|\psi)^\dagger = (\psi|U_{\boldsymbol{k},s}) \tag{121}
$$

$$
d^\dagger(\boldsymbol{k},s) = (V_{\boldsymbol{k},s}|\psi), \quad d(\boldsymbol{k},s) = (V_{\boldsymbol{k},s}|\psi)^\dagger = (\psi|V_{\boldsymbol{k},s}) \tag{122}
$$

まず初めに、$\psi(t,\boldsymbol{x})$, $\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$ に対する同時刻反交換関係

$$
\begin{gathered}
\{\, \psi^a(t,\boldsymbol{x})\, ,\, \psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\, \} = \delta^a{}_b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
\text{その他の同時刻反交換関係} = 0
\end{gathered} \tag{123}
$$

から、$b(\boldsymbol{k},s)$, $b^\dagger(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{k},s)$ の間の反交換関係

$$
\begin{gathered}
\{\, b(\boldsymbol{k},s)\, ,\, b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\, \} = \{\, d(\boldsymbol{k},s)\, ,\, d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\, \} = \delta_{ss'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \\
\text{その他の反交換関係} = 0
\end{gathered} \tag{124}
$$

を導く。

$$
\begin{aligned}
\{\, b(\boldsymbol{k},s)\,,\, b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \{\, (U_{\boldsymbol{k},s}|\psi)\,,\,(\psi|U_{\boldsymbol{k'},s'})\,\} \\
&= \left\{ \int d^3\boldsymbol{x}\,\big(U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)_a \psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\, \int d^3\boldsymbol{y}\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\big(U_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{y})\big)^b \right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,d^3\boldsymbol{y}\,\big(U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)_a \big(U_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{y})\big)^b \underbrace{\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\,\}}_{\delta^a{}_b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\big(U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)_a \big(U_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{x})\big)^a \\
&= (U_{\boldsymbol{k},s}|U_{\boldsymbol{k'},s'}) \\
&= \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) && (125) \\
\{\, d(\boldsymbol{k},s)\,,\, d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \{\, (\psi|V_{\boldsymbol{k},s})\,,\,(V_{\boldsymbol{k'},s'}|\psi)\,\} \\
&= \left\{ \int d^3\boldsymbol{x}\,\psi^\dagger_a(t,\boldsymbol{x})\big(V_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)^a,\, \int d^3\boldsymbol{y}\,\big(V^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{y})\big)_b \psi^b(t,\boldsymbol{y}) \right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,d^3\boldsymbol{y}\,\big(V^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{y})\big)_b \big(V_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)^a \underbrace{\{\,\psi^\dagger_a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,\}}_{\delta_a{}^b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\big(V^\dagger_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{x})\big)_b \big(V_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)^b \\
&= (V_{\boldsymbol{k'},s'}|V_{\boldsymbol{k},s}) \\
&= \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) && (126)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\, b(\boldsymbol{k},s)\,,\, b(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \{\, b^\dagger(\boldsymbol{k},s)\,,\, b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\,\} = 0 && (127) \\
&(\because\ \{\psi^a(t,\boldsymbol{x}),\psi^b(t,\boldsymbol{y})\}=0,\ \{\psi^\dagger_a(t,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\}=0\,) \\
\{\, d(\boldsymbol{k},s)\,,\, d(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \{\, d^\dagger(\boldsymbol{k},s)\,,\, d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\,\} = 0 && (128) \\
&(\because \{\psi^\dagger_a(t,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\}=0,\ \{\psi^a(t,\boldsymbol{x}),\psi^b(t,\boldsymbol{y})\}=0\,) \\
\{\, b(\boldsymbol{k},s)\,,\, d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \{\, b^\dagger(\boldsymbol{k},s)\,,\, d(\boldsymbol{k'},s')\,\} = 0 && (129) \\
&(\because \{\psi^a(t,\boldsymbol{x}),\psi^b(t,\boldsymbol{y})\}=0,\ \{\psi^\dagger_a(t,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\}=0\,) \\
\{\, b(\boldsymbol{k},s)\,,\, d(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \{\, (U_{\boldsymbol{k},s}|\psi)\,,\,(\psi|V_{\boldsymbol{k'},s'})\,\} \\
&= \left\{ \int d^3\boldsymbol{x}\,\big(U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)_a \psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\, \int d^3\boldsymbol{y}\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\big(V_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{y})\big)^b \right\} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,d^3\boldsymbol{y}\,\big(U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)_a \big(V_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{y})\big)^b \underbrace{\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^\dagger_b(t,\boldsymbol{y})\,\}}_{\delta^a{}_b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\big(U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}(t,\boldsymbol{x})\big)_a \big(V_{\boldsymbol{k'},s'}(t,\boldsymbol{x})\big)^a \\
&= (U_{\boldsymbol{k},s}|V_{\boldsymbol{k'},s'}) \\
&= 0 && (130) \\
\{\, b^\dagger(\boldsymbol{k},s)\,,\, d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\,\} &= \big(\{\, b(\boldsymbol{k},s)\,,\, d(\boldsymbol{k'},s')\,\}\big)^\dagger \overset{(130)}{=} 0 && (131)
\end{aligned}
$$

今度は逆に、$b(\boldsymbol{k},s)$, $b^\dagger(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{k},s)$ の反交換関係 (124) から、$\psi(t,\boldsymbol{x})$, $\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})$ に

対する同時刻反交換関係 (123) を導く。

$$
\begin{aligned}
&\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\,\}\\
&\quad=\Bigg\{\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}\sum_s\Big(b(\boldsymbol{k},s)u^a(\boldsymbol{k},s)e^{-ik\cdot x}+d^\dagger(\boldsymbol{k},s)v^a(\boldsymbol{k},s)e^{ik\cdot x}\Big),\\
&\qquad\int\frac{d^3\boldsymbol{k'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k'}}}}\sum_{s'}\Big(b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')u_b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')e^{ik'\cdot y}+d(\boldsymbol{k'},s')v_b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')e^{-ik'\cdot y}\Big)\Bigg\}\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}d^3\boldsymbol{k'}}{(2\pi)^3 2\sqrt{E_{\boldsymbol{k}}E_{\boldsymbol{k'}}}}\sum_{s,s'}\Big(\underbrace{\{b(\boldsymbol{k},s),b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\}}_{\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})}u^a(\boldsymbol{k},s)u_b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')e^{-ik\cdot x+ik'\cdot y}\\
&\qquad\qquad+\underbrace{\{d^\dagger(\boldsymbol{k},s),d(\boldsymbol{k'},s')\}}_{\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})}v^a(\boldsymbol{k},s)v_b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')e^{ik\cdot x-ik'\cdot y}\Big)\\
&\qquad(\because\ \{b(\boldsymbol{k},s),d(\boldsymbol{k'},s')\}=\{d^\dagger(\boldsymbol{k},s),b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\}=0\,)\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}\sum_s\Big(u^a(\boldsymbol{k},s)u_b^\dagger(\boldsymbol{k},s)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+v^a(\boldsymbol{k},s)v_b^\dagger(\boldsymbol{k},s)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Big)\\
&\qquad(\because x^0=y^0=t\ \ \Longrightarrow\ k\cdot x-k\cdot y=-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,)\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}\Big(\big[(\not{k}+m)\gamma^0\big]^a{}_b\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+\big[(\not{k}-m)\gamma^0\big]^a{}_b\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Big)\\
&\qquad\Big(\because\ \sum_s u(\boldsymbol{k},s)\bar{u}(\boldsymbol{k},s)=\not{k}+m,\ \sum_s v(\boldsymbol{k},s)\bar{v}(\boldsymbol{k},s)=\not{k}-m\Big)\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}(2E_{\boldsymbol{k}}\,I_4)^a{}_b\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\\
&\qquad\left(\begin{array}{l}\because\ \text{第 2 項で}\ \boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}\ \text{の変数変換を行った。このとき、}\\ \quad k_0=E_{\boldsymbol{k}}=E_{-\boldsymbol{k}}\ \text{および}\ (\gamma^0)^2=I_4\ \text{を用いた。}\end{array}\right)\\
&\overset{\boldsymbol{k}\,\text{積分}}{=}\delta^a{}_b\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\qquad\Big(\because\ (I_4)^a{}_b=\delta^a{}_b\,,\ \int d^3\boldsymbol{k}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Big)
\end{aligned}
\tag{132}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi^b(t,\boldsymbol{y})\,\}=0\\
&\qquad(\because\ \{b(\boldsymbol{k},s),b(\boldsymbol{k'},s')\}=\{d^\dagger(\boldsymbol{k},s),d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\}=\{b(\boldsymbol{k},s),d^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\}=0\,)
\end{aligned}
\tag{133}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\psi_a^\dagger(t,\boldsymbol{x}),\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\}=0\\
&\qquad(\because \{b^\dagger(\boldsymbol{k},s),b^\dagger(\boldsymbol{k'},s')\}=\{d(\boldsymbol{k},s),d(\boldsymbol{k'},s')\}=\{b^\dagger(\boldsymbol{k},s),d(\boldsymbol{k'},s')\}=0\,)
\end{aligned}
\tag{134}
$$

!

$\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ と $b(\boldsymbol{k},s)$, $b^\dagger(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{k},s)$ は、(119) $\sim$ (122) の関係で**一意的に**結ばれているので、(123) $\to$ (124) が導けたのならば、(124) $\to$ (123) は計算するまでもなく成り立っているはずである。

check 12.9

ハミルトニアンが $H = -\omega\, dd^\dagger$ $(\omega > 0)$ で与えられ、d と $d^\dagger$ が交換関係 $[d, d^\dagger] = 1$ を満たしているとしよう。このとき、次の (I), (II) の性質を確かめてみよう。

(I) "真空"$|0\rangle$ を $d|0\rangle = 0$ $(\langle 0|0\rangle = 1)$ で定義するならば、状態 $|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(d^\dagger)^n|0\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のエネルギー固有値は $E_n = -(n+1)\omega$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられる。

(II) "真空"$|\widetilde{0}\rangle$ を $d^\dagger|\widetilde{0}\rangle = 0$ $(\langle\widetilde{0}|\widetilde{0}\rangle = 1)$ で定義するならば、状態 $|\widetilde{n}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\widetilde{n}!}}(d)^{\widetilde{n}}|\widetilde{0}\rangle$ $(\widetilde{n} = 0, 1, 2, \cdots)$ のエネルギー固有値は正エネルギー $E_{\widetilde{n}} = +\widetilde{n}\omega$ $(\widetilde{n} = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられるが、負のノルム状態 $\langle\widetilde{n}|\widetilde{n}\rangle = (-1)^{\widetilde{n}}$ が現れる。

(I) H と $d^\dagger$ の交換関係は

$$\begin{aligned}[H\,,\,d^\dagger] &= [-\omega dd^\dagger\,,\,d^\dagger] \\ &= -\omega \underbrace{[\,d\,,d^\dagger\,]}_{1} d^\dagger \\ &= -\omega d^\dagger \end{aligned} \tag{135}$$

で与えられているので、$d^\dagger$ はエネルギーを ω だけ下げる。"真空" $|0\rangle$ は $d|0\rangle = 0$ で定義されているので

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= -\omega dd^\dagger|0\rangle = -\omega(d^\dagger d + 1)|0\rangle \\ &= -\omega|0\rangle \qquad (\because d|0\rangle = 0) \end{aligned} \tag{136}$$

となり、"真空" $|0\rangle$ のエネルギーは $-\omega$ であることがわかる。したがって、状態 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(d^\dagger)^n|0\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のエネルギー固有値は、$(d^\dagger)^n$ によって真空エネルギーから $-n\omega$ だけ下がるので、

$$E_n = -(n+1)\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{137}$$

で与えられることになる。

(II) H と d の交換関係は

$$\begin{aligned}[H\,,\,d] &= [-\omega dd^\dagger\,,\,d] \\ &= -\omega d \underbrace{[d^\dagger\,,\,d]}_{-1} \\ &= +\omega d \end{aligned} \tag{138}$$

で与えられるので、d はエネルギーを ω だけ増やす。"真空" $|\widetilde{0}\rangle$ は $d^\dagger|\widetilde{0}\rangle = 0$ で定義されているので

$$H|\widetilde{0}\rangle = -\omega dd^\dagger|\widetilde{0}\rangle = 0 \tag{139}$$

となり、"真空" のエネルギーは 0 であることがわかる。したがって、状態 $|\widetilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{n}!}}(d)^{\widetilde{n}}|0\rangle$ $(\widetilde{n} = 0, 1, 2, \cdots)$ のエネルギー固有値は

$$E_{\widetilde{n}} = \widetilde{n}\omega \quad (\widetilde{n} = 0, 1, 2, \cdots) \tag{140}$$

で与えられ、0 または正の値を持つ。しかしながら、状態 $|\widetilde{n}\rangle$ は、$\widetilde{n}$ が奇数のとき、負のノルム状態

$$\langle\,\widetilde{n}|\widetilde{n}\,\rangle = (-1)^{\widetilde{n}} \qquad (\widetilde{n} = 0, 1, 2\cdots) \tag{141}$$

を含む。

最後に上の関係を証明する。

$$\begin{aligned}
\langle\,\widetilde{n}|\widetilde{n}\,\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{\widetilde{n}!}}(d)^{\widetilde{n}}|\widetilde{0}\rangle\right)^{\dagger}\left(\frac{1}{\sqrt{\widetilde{n}!}}(d)^{\widetilde{n}}|\widetilde{0}\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\widetilde{n}!}\langle\widetilde{0}|\underbrace{d^{\dagger}\cdots d^{\dagger}}_{\widetilde{n}}\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}}|\widetilde{0}\rangle\\
&= \frac{1}{\widetilde{n}!}\langle\widetilde{0}|\underbrace{d^{\dagger}\cdots d^{\dagger}}_{\widetilde{n}-1}\left([\,d^{\dagger}\,,\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}}] + \underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}}d^{\dagger}\right)|\widetilde{0}\rangle\\
&= \frac{(-1)}{(\widetilde{n}-1)}\langle\widetilde{0}|\underbrace{d^{\dagger}\cdots d^{\dagger}}_{\widetilde{n}-1}\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}-1}|\widetilde{0}\rangle\\
&\qquad\left(\begin{array}{l}
\because\ d^{\dagger}|\widetilde{0}\rangle = 0 \text{ および}\\
[d^{\dagger},\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}}] = \underbrace{[d^{\dagger},d]}_{-1}d\cdots d + d\underbrace{[d^{\dagger},d]}_{-1}d\cdots d + \cdots + d\cdots d\underbrace{[d^{\dagger},d]}_{-1}\\
\qquad\qquad\quad = -\widetilde{n}\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}-1}\\
\text{を用いた。}
\end{array}\right)\\
&= \frac{(-1)}{(\widetilde{n}-1)}\langle\widetilde{0}|\underbrace{d^{\dagger}\cdots d^{\dagger}}_{\widetilde{n}-2}\left([\,d^{\dagger}\,,\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}-1}] + \underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}-1}d^{\dagger}\right)|\widetilde{0}\rangle\\
&= \frac{(-1)^2}{(\widetilde{n}-2)}\langle\widetilde{0}|\underbrace{d^{\dagger}\cdots d^{\dagger}}_{\widetilde{n}-2}\underbrace{d\cdots d}_{\widetilde{n}-2}|\widetilde{0}\rangle\\
&= \cdots\\
&= (-1)^{\widetilde{n}}\langle\,\widetilde{0}\,|\,\widetilde{0}\,\rangle\\
&= (-1)^{\widetilde{n}}
\end{aligned} \tag{142}$$

check 12.10

超対称性 (supersymmetry) を持つ理論には、超対称変換を引き起こす生成子 Q^a ($a = 1, 2, 3, 4$ はマヨラナスピノルの添字) が存在し、エネルギー運動量演算子 P^{μ} との間に**超対称代数 (supersymmetry algebra)** とよばれる関係式 $2P^{\mu}(\gamma_{\mu})^{a}{}_{b} = \{Q^a, \overline{Q}_b\}$ が成り立つことが知られている。ここで、$\overline{Q} = Q^{\dagger}\gamma^0$ で、Q は**超電荷 (supercharge)** とよばれている。このとき、真空 $|0\rangle$ が超対称変換の下で不変ならば、真空エネルギー E_0 は $E_0 = 0$ であることを証明してみよう。

【ヒント】 超対称代数に γ^0 をかけて γ 行列のトレースをとることによって、まず $8H = \sum_{a=1}^{4}\left(Q^a(Q^{\dagger})_a + (Q^{\dagger})_a Q^a\right)$ を導け。次にこの関係からエネルギー固有値 E は $E \geqq 0$ となることを示せ。このことから、$E = 0$ の状態は最低エネルギー状態（= 真空状態）であることがわかる。また、「真空 $|0\rangle$ が超対称変換の下で不変」ということを超対称変換の生成子 Q を用いて式で表すと、$Q|0\rangle = Q^{\dagger}|0\rangle = 0$ である。

以下では、真空 $|0\rangle$ が超対称変換の下で不変、すなわち

$$Q^a|0\rangle = Q_a^\dagger|0\rangle = 0 \tag{143}$$

ならば、真空エネルギー E_0 は

$$E_0 = 0 \tag{144}$$

であることを証明する。

このために、超対称代数

$$2P^\mu(\gamma_\mu)^a{}_b = \{\, Q^a \,,\, \bar{Q}_b \,\} \tag{145}$$

から出発する。両辺に $\sum_b(\gamma^0)^b{}_c$ をかけると

$$2P^\mu(\gamma^\mu\gamma^0)^a{}_c = \{\, Q^a \,,\, Q_c^\dagger \,\}$$

となる。ここで、$a=c$ とおいて和をとると (これは、左辺について行列のトレースをとることに等しい。)

$$2P^\mu \underbrace{\sum_{a=1}^4 (\gamma_\mu\gamma^0)^a{}_a}_{\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma^0)=4\delta_\mu{}^0} = \sum_{a=1}^4 \{\, Q^a \,,\, Q_a^\dagger \,\} \quad\Longrightarrow\quad 8H = \sum_{a=1}^4 \big(Q^a Q_a^\dagger + Q_a^\dagger Q^a \big) \tag{146}$$

を得る。ここで、$P^0 = H$ とおいた。この関係式と (143) を用いると

$$H|0\rangle = \frac{1}{8}\sum_{a=1}^4 \big(Q^a Q_a^\dagger + Q_a^\dagger Q^a \big)|0\rangle = 0 \tag{147}$$

が得られ、真空のエネルギーは 0 であることがわかる。

さらに、ゼロエネルギー ($E_0 = 0$) は、最低エネルギーであることを指摘しておく。なぜなら、エネルギー固有値は次の不等式（下に証明を与えてある）

$$E \geq 0 \tag{148}$$

を満たすからである。真空は定義より、最低エネルギー状態でなければならないが、(143) を満たす状態 $|0\rangle$ は最低エネルギー状態となっている。[1] これは自明なことではない。以下で、(148) を証明しておく。

エネルギー固有状態を $|E\rangle$ とし、

$$H\,|E\rangle = E\,|E\rangle$$

を満たしているとする。このとき、

$$\langle E|H|E\rangle = E\,\langle E|E\rangle$$

[1] したがって、(143) を満たす状態 $|0\rangle$ は基底状態（最低エネルギー状態）であり、真空状態とみなすことができる。

なので

$$
\begin{aligned}
E = \frac{\langle E|H|E\rangle}{\langle E|E\rangle} &= \frac{1}{\langle E|E\rangle}\langle E|\,\frac{1}{8}\sum_a \left(Q^a Q_a^\dagger + Q_a^\dagger Q^a\right)|E\rangle \\
&= \frac{1}{\langle E|E\rangle}\frac{1}{8}\sum_a \left(\,\|Q_a^\dagger|E\rangle\|^2 + \|Q^a|E\rangle\|^2\,\right) \\
&\geq 0 \qquad (\because \text{任意の状態}\, |A\rangle \,\text{に対して、}\langle A|A\rangle = \|\,|A\rangle\,\|^2 \geq 0\,)
\end{aligned} \tag{149}
$$

を得る。

check 12.11

(12.62) を確かめてみよう。

【ヒント】J_z と $b(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)$ の交換関係の計算例を下に与えておく。各々の等号で何を用いたかを考えよ。

$$
\begin{aligned}
[\,J_z\,,\, b(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)\,] &= [\,J^{12}\,,\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}|\psi)\,] = [\,J^{12}\,,\,\int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger \psi(x)\,] \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger \left(-i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1) - \frac{1}{2}\sigma^{12}\right)\psi(x) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger\,\frac{1}{2}\sigma^{12}\,\psi(x) = -\int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}\,\psi(x) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\right)^\dagger \psi(x) = -s\,b(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)
\end{aligned}
$$

両辺のエルミート共役をとると $[J_z, b^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)] = +s\,b^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)$ を得る。J_z と $d^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)$ の交換関係の計算も $d^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s) = (V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}|\psi)$ を用いれば同様にできる。ただし、そのとき $\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}\,v(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s) = -s\,v(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s))$ に注意しておく。

ここではディラック粒子の 1 粒子状態がスピン $\frac{1}{2}$ を持つこと、すなわち

$$
[\,J_z\,,\, b^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)\,] = s\,b^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s), \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{150}
$$

$$
[\,J_z\,,\, d^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)\,] = s\,d^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s), \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \tag{151}
$$

を導く。ここで、

$$
\widetilde{\boldsymbol{k}} = (0, 0, k_z > 0) \tag{152}
$$

は、z 軸方向に運動する粒子の運動量に対応する。

まず、(150) を確かめる。直接 (150) を示す代わりに、エルミート共役をとった

$$
[\,J_z\,,\, b(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s)\,] = -s\,b(\widetilde{\boldsymbol{k}}, s) \tag{153}
$$

を証明する。

$$
\begin{aligned}
[\,J_z\,,\,b(\widetilde{\boldsymbol{k}},s)\,] &= [\,J^{12}\,,\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}|\psi)\,] \\
&\qquad (\because\ J_z = J^{12},\ b(\boldsymbol{k},s) = (U_{\boldsymbol{k},s}|\psi)\ \text{の関係を用いた。}) \\
&= [\,J^{12}\,,\int d^3\boldsymbol{x}\,\big(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\big)^\dagger\psi(x)\,] \\
&\qquad (\because\ (\psi'|\psi) \equiv \textstyle\int d\boldsymbol{x}\,\psi'^\dagger(x)\psi(x)\,) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\big(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\big)^\dagger[\,J^{12}\,,\,\psi(x)\,] \\
&\qquad (\because U^\dagger_{\boldsymbol{k},s}\ \text{は}\ c\ \text{数関数なので}\ J^{12}\ \text{とは可換。}) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger\left(-i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1) - \frac{1}{2}\sigma^{12}\right)\psi(x) \\
&\qquad \left(\because [J^{ij},\psi(x)] = \left(-i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) - \frac{1}{2}\sigma^{ij}\right)\psi(x)\right) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\left\{\big(-i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1)U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\big)^\dagger\psi(x) - (U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger\frac{1}{2}\sigma^{12}\psi(x)\right\} \\
&\qquad (\ \because\ \text{部分積分を行って表面項を落とした。}) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger\frac{1}{2}\sigma^{12}\psi(x) \\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\because\ U_{\boldsymbol{k},s}(x) \equiv \frac{u(\boldsymbol{k},s)}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}e^{-ik\cdot x}\text{なので、}\widetilde{\boldsymbol{k}} = (0,0,k_z)\ \text{のとき、} \\ \quad \partial^j U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x) = 0\ (j=1,2)\ \text{である。}\end{array}\right) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,(U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x))^\dagger\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}\psi(x) \\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\because\ \boldsymbol{S} = \big(\frac{i}{2}\gamma^2\gamma^3,\ \frac{i}{2}\gamma^3\gamma^1,\ \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\big) = \big(\frac{1}{2}\sigma^{23},\ \frac{1}{2}\sigma^{31},\ \frac{1}{2}\sigma^{12}\big) \\ \quad \text{および、}\widetilde{\boldsymbol{k}} = (0,0,k_z>0),\ |\widetilde{\boldsymbol{k}}| = k_z\text{を用いた。}\end{array}\right) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,\left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\right)^\dagger\psi(x) \\
&\qquad (\ \because\ \boldsymbol{S}^\dagger = \boldsymbol{S}\,) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,\big(s\,U_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\big)^\dagger\psi(x) \\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\because\ U_{\boldsymbol{k},s}(x) = \frac{u(\boldsymbol{k},s)}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}e^{-ik\cdot x}\ \text{および} \\ \quad \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}u(\boldsymbol{k},s) = su(\boldsymbol{k},s)\ \ \big(s = \pm\frac{1}{2}\big)\ \text{を用いた。}\end{array}\right) \\
&= -s\,b(\widetilde{\boldsymbol{k}},s) \qquad \left(s = \pm\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad (\because\ b(\boldsymbol{k},s) = (U_{\boldsymbol{k},s}|\psi)\ \text{を用いた。}) \\
&\Longrightarrow\quad (153)
\end{aligned}
\tag{154}
$$

(153) の両辺のエルミート共役をとり、J_z がエルミートであることを用いれば、(150) が得られる。

(151) も同様にして導くことができる。

$$
\begin{aligned}
[\,J_z\,,\,d^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},s)\,] &= [\,J^{12}\,,\,(V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}|\psi)\,] \\
&= [\,J^{12}\,,\int d^3\boldsymbol{x}\,\bigl(V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\bigr)^\dagger\psi(x)\,] \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\bigl(V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\bigr)^\dagger[\,J^{12}\,,\,\psi(x)\,] \\
&= \int d^3\boldsymbol{x}\,\bigl(V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\bigr)^\dagger\left(-i(x^1\partial^2-x^2\partial^1)-\frac{1}{2}\sigma^{12}\right)\psi(x) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,\bigl(V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\bigr)^\dagger\underbrace{\frac{1}{2}\sigma^{12}}_{\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}}\psi(x) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}}}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|}V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\right)^\dagger\psi(x) \\
&= -\int d^3\boldsymbol{x}\,\bigl(-s\,V_{\widetilde{\boldsymbol{k}},s}(x)\bigr)^\dagger\psi(x) \qquad \left(s=\pm\frac{1}{2}\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\because\ V_{\boldsymbol{k},s}(x)=\frac{v(\boldsymbol{k},s)}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}}e^{ik\cdot x}\text{、および} \\ \quad\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}v(\boldsymbol{k},s)=-s\,v(\boldsymbol{k},s)\text{ を用いた。}\end{array}\right) \\
&= s\,d^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},s) \qquad \left(s=\pm\frac{1}{2}\right) \\
&\Longrightarrow\quad (151)
\end{aligned}
\tag{155}
$$

check 12.12

(12.72a) で $x^0=y^0$ とおくことによって、$\psi(t,\boldsymbol{x})$ と $\psi^\dagger(t,\boldsymbol{y})$ の同時刻交換関係 (12.11) が導かれることを確かめてみよう。

ここでは、

$$\{\,\psi^a(x)\,,\,\bar{\psi}_b(y)\,\}=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^a{}_b\,i\Delta(x-y) \tag{156}$$

で $x^0=y^0$ とおくことによって、$\psi^a(t,\boldsymbol{x})$ と $\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})$ の同時刻反交換関係

$$\{\,\psi^a(t,\boldsymbol{x})\,,\,\psi_b^\dagger(t,\boldsymbol{y})\,\}=\delta^a{}_b\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{157}$$

を導く。

$$
\begin{aligned}
\{\,\psi^a(x)\,,\,\bar{\psi}_b(y)\,\}|_{x^0=y^0} &\overset{(156)}{=} (i\gamma^\mu\partial_\mu+m)^a{}_b\,i\Delta(x-y)|_{x^0=y^0} \\
&= -(\gamma^0)^a{}_b\left.\frac{\partial\Delta(x-y)}{\partial x^0}\right|_{x^0=y^0}+\left(i\gamma^j\frac{\partial}{\partial x^j}+m\right)^a{}_b i\Delta(x-y)|_{x^0=y^0} \\
&= -(\gamma^0)^a{}_b\,(-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))+0 \\
&\qquad\left(\because\ \Delta(x)|_{x^0=0}=0,\ \frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x)|_{x^0=0}=-\delta^3(\boldsymbol{x})\right)
\end{aligned}
$$

両辺に $\sum_b (\gamma^0)^b{}_c$ をかけて、$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ と $(\gamma^0)^2 = I_4$ を用いると

$$\{\,\psi^a(x)\,,\,\psi_b^\dagger(y)\,\}|_{x^0=y^0} = \underbrace{(I_4)^a{}_b}_{\delta^a{}_b}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{158}$$

として、(157) が求まる。

check 12.13

ファインマン伝播関数 $S_F(x-y)$ は (12.78) を満たす。これについて、(12.76) を使って確かめてみよう。また、(12.75) の定義式から (12.78) が成り立つことを証明してみよう。

まず初めに、ファインマン伝播関数の表式

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{159}$$

を用いて

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m) S_F(x-y) = iI_4 \delta^4(x-y) \tag{160}$$

を導く。次に、ファインマン伝播関数の定義式

$$S_F(x-y)^a{}_b = \langle 0| T\psi^a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle \tag{161}$$

から、(160) が成り立つことを確かめる。

まず、(160) の左辺に (159) を代入すると

$$\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m) S_F(x-y) \\
&\quad = (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\quad = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(i\gamma^\mu(-ik_\mu)-m)(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\qquad (\because\ \partial_\mu^x e^{-ik\cdot(x-y)} = -ik_\mu e^{-ik\cdot(x-y)}\,) \\
&\quad = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k}-m)(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\quad = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k})^2-m^2}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\quad = iI_4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2-m^2}{k^2-m^2+i\varepsilon}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\qquad \left(\begin{aligned} \because\ (\not{k})^2 &= (\gamma^\mu k_\mu)(\gamma^\nu k_\nu) = \gamma^\mu\gamma^\nu k_\mu k_\nu = \tfrac{1}{2}\big(\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + [\gamma^\mu,\gamma^\nu]\big)\, k_\mu k_\nu \\ &= \tfrac{1}{2}(2\eta^{\mu\nu}I_4)k_\mu k_\nu + \tfrac{1}{2}\underbrace{[\,\not{k}\,,\,\not{k}\,]}_{0} = k^2 I_4 \end{aligned} \right) \\
&\quad = iI_4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\qquad \left(\begin{aligned} &\because\ \varepsilon \to 0 \text{ の極限をとっても発散は生じないので、} \\ &\quad \varepsilon = 0 \text{ とおいてもかまわない。} \end{aligned} \right) \\
&\quad = iI_4 \delta^4(x-y)
\end{aligned} \tag{162}$$

となり、(160) が導けた。

次に、(160) の左辺に (161) を代入すると

$$
\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)^a{}_b S_F(x-y)^b{}_c \\
&\quad = (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)^a{}_b \langle 0|T\psi^b(x)\bar{\psi}_c(y)|0\rangle \\
&\quad = (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)^a{}_b \left[\, \theta(x^0-y^0)\langle 0|\psi^b(x)\bar{\psi}_c(y)|0\rangle - \theta(y^0-x^0)\langle 0|\bar{\psi}_c(y)\psi^b(x)|0\rangle \,\right] \\
&\quad = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\big((i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)\psi(x)\big)^a \bar{\psi}_c(y)|0\rangle + i(\gamma^0)^a{}_b\delta(x^0-y^0)\langle 0|\psi^b(x)\bar{\psi}_c(y)|0\rangle \\
&\qquad - \theta(y^0-x^0)\langle 0|\bar{\psi}_c(y)\big((i\gamma^\mu \partial_\mu^x - m)\psi(x)\big)^a|0\rangle + i(\gamma^0)^a{}_b\delta(x^0-y^0)\langle 0|\bar{\psi}_c(y)\psi^b(x)|0\rangle \\
&\qquad\quad \left(\because\ \frac{\partial}{\partial x^0}\theta(x^0-y^0) = \delta(x^0-y^0)\right) \\
&\quad = i(\gamma^0)^a{}_b\, \delta(x^0-y^0)\, \langle 0|\{\, \psi^b(x)\,,\, \bar{\psi}_c(y)\,\}|0\rangle \\
&\qquad\quad (\because\ \psi(x)\ \text{はディラック方程式}\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0\ \text{を満たす。}) \\
&\quad = i(\gamma^0)^a{}_b\, \delta(x^0-y^0)\, \langle 0|\{\, \psi^b(x)\,,\, \psi_d^\dagger(y)\,\}|_{x^0=y^0}(\gamma^0)^d{}_c|0\rangle \\
&\qquad\quad (\because\ \bar{\psi}_c(y) = (\psi^\dagger(y)\gamma^0)_c = \psi_d^\dagger(y)(\gamma^0)^d{}_c) \\
&\quad = i(\gamma^0)^a{}_b\, \delta(x^0-y^0)\, \delta^b{}_d\, \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\gamma^0)^d{}_c \\
&\qquad\quad (\because\ \{\psi^b(x), \psi_d^\dagger(y)\}|_{x^0=y^0} = \delta^b{}_d\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ \text{および}\ \langle 0|0\rangle = 1\ \text{を用いた。}) \\
&\quad = i\delta^a{}_c\, \delta^4(x-y) \\
&\qquad\quad (\because\ (\gamma^0)^a{}_b\delta^b{}_d(\gamma^0)^d{}_c = \big((\gamma^0)^2\big)^a{}_c = (I_4)^a{}_c = \delta^a{}_c)
\end{aligned}
$$

となり、(160) が導けた。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」
裳華房、坂本眞人著
第１３章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31
　全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。特に、check 13.7 の説明をより詳しく行った。

2015/01/29
　解答例の誤植を修正。

2014/04/09
　第 13 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 13.1 ∼ check 13.10 の解答例

check 13.1

(13.4) および (13.5) を確かめてみよう。

ここでは、

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha=1} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\nu A^0 \partial^\nu A^0 + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}\partial_\nu A^j \partial^\nu A^j \right\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

および、この作用積分から得られる運動方程式

$$
\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{2}
$$

を確かめる。

任意の α に対する作用積分は

$$
S_\alpha = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} \tag{3}
$$

で与えられる。$\alpha = 1$ とおいて $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha=1} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\nu A^\nu)(\partial_\mu A^\mu) \right\} \\
&= \int d^4x \Big\{ -\frac{1}{4}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{4}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{4}\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\partial_\nu A^\nu \partial_\mu A^\mu \Big\}
\end{aligned} \tag{4}
$$

となる。第 1 項と第 2 項、第 3 項と第 4 項は $\mu \leftrightarrow \nu$ の入れ替えを行うと同じものであることがわかるので

$$
S_{\alpha=1} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu A^\nu \partial_\mu A^\mu \right\} \tag{5}
$$

となる。最後の項は部分積分を 2 度行うと、次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
\int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\nu A^\nu \partial_\mu A^\mu \right\} &= \int d^4x \left\{ +\frac{1}{2} A^\nu \partial_\nu \partial_\mu A^\mu \right\} \\
&\qquad (\because \partial_\nu \text{に関して部分積分を行い、表面項を落とした。}) \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu \right\} \\
&\qquad (\because \text{今度は}\partial_\mu\text{に関して部分積分を行い、表面項を落とした。}) \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right\} \\
&\qquad (\because A^\nu \partial_\nu = A_\nu \partial^\nu \text{を用いた。})
\end{aligned} \tag{6}
$$

したがって、(5) の右辺第 2 項と第 3 項は相殺し、

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha=1} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \right\} \\
&\overset{\mu\leftrightarrow\nu}{=} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\nu \underbrace{A_0}_{A^0} \partial^\nu A^0 - \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}\partial_\nu \underbrace{A_j}_{-A^j} \partial^\nu A^j \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\nu A^0 \partial^\nu A^0 + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}\partial_\nu A^j \partial^\nu A^j \right\} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となり、(1) が成り立つことがわかる。2 番目の等号では添字 μ と ν を入れ替えた。また最後の等号では、$A_0 = A^0$, $A_j = -A^j$ $(j = 1, 2, 3)$ を用いた。

運動方程式 (2) は、作用積分 $S_{\alpha=1}$ から作用原理を通じて導くことができる。

$$
\begin{aligned}
0 \ = \ \delta S_{\alpha=1} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\nu \delta A_\mu)\partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu (\partial^\nu \delta A^\mu) \right\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\delta A_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial^\nu \partial_\nu A_\mu)\delta A^\mu \right\} \\
&= \int d^4x \, \delta A_\mu(x) \left[\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) \right] \\
&\Longrightarrow \ \partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

check 13.2

量子化条件 (13.7) とローレンツゲージ条件 (13.3) は互いに矛盾することを導いてみよう。

【ヒント】 次の同時刻交換関係 $[\, A^0(t, \boldsymbol{x}) \, , \, \partial_\mu A^\mu(t, \boldsymbol{y})]$ を計算してみよ。もし、量子化条件 (13.7) とローレンツゲージ条件 (13.3) が矛盾しないならば、ローレンツゲージ条件からこの交換関係はゼロになるはずだ。

ヒントにあるように、同時刻交換関係 $[\, A^0(t, \boldsymbol{x}) \, , \, \partial_\mu A^\mu(t, \boldsymbol{y})]$ を計算して、ゼロにならないことを示す。この結果は、明らかに要請 $\partial_\mu A^\mu(t, \boldsymbol{x}) = 0$ と矛盾する。

$$
\begin{aligned}
[\, A^0(t, \boldsymbol{x}) \, , \, \partial_\mu A^\mu(t, \boldsymbol{y})] &= [\, A^0(t, \boldsymbol{x}) \, , \, \underbrace{\partial_0 A^0(t, \boldsymbol{y})}_{-\pi_0(t, \boldsymbol{y})}] + \underbrace{[\, A^0(t, \boldsymbol{x}) \, , \, \partial_j A^j(t, \boldsymbol{y})]}_{0} \\
&= -\underbrace{[\, A^0(t, \boldsymbol{x}) \, , \, \pi_0(t, \boldsymbol{y})]}_{i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= -i\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
&\neq 0 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

ここで、$A^0(t, \boldsymbol{x})$ と $A^j(t, \boldsymbol{y})$ $(j = 1, 2, 3)$ は可換、および、$\pi_0(t, \boldsymbol{y}) = -\partial_0 A^0(t, \boldsymbol{y})$ を用いた。

check 13.3

(13.11) ～ (13.13) を確かめてみよう。

運動量が z 軸正方向に向いた系 $(\widetilde{k}^\mu = (\widetilde{k}^0, \widetilde{\boldsymbol{k}}) = (\widetilde{k}, 0, 0, \widetilde{k}), \widetilde{k} > 0)$ で、偏極ベクトルを次のように選ぶ。

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 0) &= (1,0,0,0), \quad \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 1) = (0,1,0,0) \\ \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 2) &= (0,0,1,0), \quad \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 3) = (0,0,0,1) \end{aligned} \tag{10}$$

このとき、次の関係が成り立つ。

$$\varepsilon_\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda)^* \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda') = \eta_{\lambda\lambda'} \qquad (\lambda, \lambda' = 0,1,2,3) \tag{11}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\lambda\lambda} \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda)^* \varepsilon^\nu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda) = \eta^{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0,1,2,3) \tag{12}$$

$$\widetilde{k}_\mu \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2) \tag{13}$$

$$\widetilde{k}_\mu \big(\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 0) + \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 3)\big) = 0 \tag{14}$$

$$\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 0) + \varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, 3) = \frac{\widetilde{k}^\mu}{|\widetilde{\boldsymbol{k}}|} \tag{15}$$

まず初めに、これらの関係式を導く。このために、$\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda)$ を形式的に次のように表しておくと便利である。

$$\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda) = \delta^\mu{}_\lambda \qquad (\mu, \lambda = 0,1,2,3) \tag{16}$$

ここで気をつけてもらいたいことは、上式で μ はローレンツベクトルの添字であるが、λ はローレンツベクトルの添字ではないという点だ。(16) は $\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda)$ の値 (数値) が $\delta^\mu{}_\lambda$ に等しいというだけで、$\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}}, \lambda)$ が λ に関してベクトルの変換性を持つということではない。

それでは、(11) ～ (15) を確かめていこう。

$\underline{(11)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^*\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda') &= \eta_{\mu\nu}\varepsilon^\nu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda') \\
&\qquad \left(\begin{aligned}&\because \mu\text{はローレンツベクトルの添字なので、}\\ &\quad\text{添字の上げ下げは計量}\,\eta_{\mu\nu}\text{を用いて行われる。}\end{aligned}\right) \\
&\overset{(16)}{=} \eta_{\mu\nu}\delta^\nu{}_\lambda\delta^\mu{}_{\lambda'} \\
&= \eta_{\lambda\lambda'} \\
&\Longrightarrow (11)
\end{aligned} \tag{17}$$

$\underline{(12)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=0}^{3}\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^*\varepsilon^\nu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda) &= \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\eta^{\lambda\lambda'}\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^*\varepsilon^\nu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda') \\
&\qquad \left(\begin{aligned}&\because \text{値として}\,\eta_{\lambda\lambda}\,\text{は}\,\eta^{\lambda\lambda}\,\text{に等しい。}\\ &\quad\text{また、}\eta^{\lambda\lambda'}=0\ (\lambda\neq\lambda').\end{aligned}\right) \\
&\overset{(16)}{=} \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3}\eta^{\lambda\lambda'}\delta^\mu{}_\lambda\delta^\nu{}_{\lambda'} \\
&= \eta^{\mu\nu} \\
&\Longrightarrow (12)
\end{aligned} \tag{18}$$

$\underline{(13)}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{k}_\mu\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda) &\overset{(16)}{=} \widetilde{k}_\mu\delta^\mu{}_\lambda \\
&= \widetilde{k}_\lambda \\
&= 0 \qquad (\because \lambda=1,2) \\
&\Longrightarrow (13)
\end{aligned} \tag{19}$$

$\underline{(14)}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{k}_\mu\big(\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},0)+\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},3)\big) &= \underbrace{\widetilde{k}_0}_{\widetilde{k}}\big(\underbrace{\varepsilon^0(\widetilde{\boldsymbol{k}},0)}_{1}+\underbrace{\varepsilon^0(\widetilde{\boldsymbol{k}},3)}_{0}\big)+\underbrace{\widetilde{k}_3}_{-\widetilde{k}}\big(\underbrace{\varepsilon^3(\widetilde{\boldsymbol{k}},0)}_{0}+\underbrace{\varepsilon^3(\widetilde{\boldsymbol{k}},3)}_{1}\big) \\
&= 0 \qquad (\because \widetilde{k}_0=\widetilde{k}^0=\widetilde{k},\ \widetilde{k}_3=-\widetilde{k}^3=-\widetilde{k}) \\
&\Longrightarrow (14)
\end{aligned} \tag{20}$$

$\underline{(15)}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},0)+\varepsilon^\mu(\widetilde{\boldsymbol{k}},3) &= (1,0,0,0)+(0,0,0,1) \\
&= (1,0,0,1) \\
&= \frac{1}{\widetilde{k}}(\widetilde{k},0,0,\widetilde{k}) \\
&= \frac{1}{|\widetilde{k}|}(\widetilde{k}^0,0,0,\widetilde{k}^3) \qquad (\because\ \widetilde{k}^0=\widetilde{k}^3=\widetilde{k}>0\,) \\
&= \frac{\widetilde{k}^\mu}{|\widetilde{k}|} \\
&\Longrightarrow (15)
\end{aligned} \tag{21}$$

次に、生成消滅演算子の交換関係

$$[\, a(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\, a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')\,] = -\eta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \tag{22}$$

$$[\, a(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\, a(\boldsymbol{k'},\lambda')\,] = [a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda), a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')] = 0 \tag{23}$$

を確かめる。$A^\mu(x)$ と $a(\boldsymbol{k},\lambda)$, $a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)$ は、

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \Big\{ a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x} \Big\} \tag{24}$$

あるいは、逆に

$$a(\boldsymbol{k},\lambda) = \eta_{\lambda\lambda} \int d^3\boldsymbol{x} \frac{e^{ik\cdot x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \varepsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^* i\overleftrightarrow{\partial_0} A^\mu(x) \tag{25}$$

でお互い一意的に結びついている。このことから、(22) と (23) の交換関係が正しいことを示すためには、(22) と (23) の交換関係を使ってゲージ場 $A^\mu(x)$ と $\pi_\nu(x) = -\partial_0 A_\nu(x)$ の同時刻交換関係

$$[\, A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, \pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = i\delta^\mu{}_\nu\, \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{26}$$

$$[\, A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, A^\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = [\, \pi_\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, \pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = 0 \qquad (\mu,\nu = 0,1,2,3) \tag{27}$$

が成り立つことを確かめれば十分である。

!

逆に (26) と (27) を用いて、(22) および (23) が成り立つことを導いてもよい。

まずは、(26) を確かめる。

$$\begin{aligned}
&[\, A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, \pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = [\, A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, -\partial_0 A_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] \\
&\quad = \Bigg[\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda} \Big\{ a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x} \Big\}, \\
&\qquad \int \frac{d^3\boldsymbol{k'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k'}}}} \sum_{\lambda'} \Big\{ a(\boldsymbol{k'},\lambda')\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k'},\lambda') i\omega_{\boldsymbol{k'}} e^{-ik'\cdot y} + a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k'},\lambda')^*(-i\omega_{\boldsymbol{k'}}) e^{ik'\cdot y} \Big\} \Bigg] \\
&\quad = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}d^3\boldsymbol{k'}(-i\omega_{\boldsymbol{k'}})}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}}}} \sum_{\lambda,\lambda'} \Big\{ [\, a(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\, a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k'},\lambda')^* e^{-ik\cdot x + ik'\cdot y} \\
&\qquad\qquad - [\, a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\, a(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^*\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k'},\lambda') e^{ik\cdot x - ik'\cdot y} \Big\} \\
&\qquad (\because\ [a(\boldsymbol{k},\lambda), a(\boldsymbol{k'},\lambda')] = [a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda), a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')] = 0\,) \\
&\quad \overset{(22)}{=} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}(-i)}{(2\pi)^3 2} \sum_{\lambda} \Big\{ -\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^*\varepsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \Big\} \\
&\qquad \begin{pmatrix} \because [a(\boldsymbol{k},\lambda), a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')] = -\eta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}), \quad \eta_{\lambda\lambda'} = 0\ (\lambda \neq \lambda') \\ k\cdot(x-y) = -\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \ \ (\because x^0 = y^0 = t) \end{pmatrix} \\
&\quad \overset{(12)}{=} \frac{-i}{(2\pi)^3 2} \Big\{ -\delta^\mu{}_\nu (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \delta^\mu{}_\nu (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \Big\} \\
&\qquad \big(\because\ \eta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad \textstyle\int d^3\boldsymbol{k}\, e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \\
&\quad = i\,\delta^\mu{}_\nu\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\quad \Longrightarrow\ (26)
\end{aligned} \tag{28}$$

ここで5番目の等号では、(12) で $\widetilde{\boldsymbol{k}}$ を一般の $\boldsymbol{k}$ におきかえた式 $\sum\limits_{\lambda=0}^{3}\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)^{*}\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)=\eta^{\mu\nu}$ を用いた。

次に $[\,A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})\,,\,A^{\nu}(t,\boldsymbol{y})\,]=0$ を確かめる。

$$
\begin{aligned}
&[\,A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})\,,\,A^{\nu}(t,\boldsymbol{y})\,]\\
&\quad=\Bigg[\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda}\Big\{a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)^{*}e^{ik\cdot x}\Big\}\,,\\
&\qquad\int\frac{d^3\boldsymbol{k'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k'}}}}\sum_{\lambda'}\Big\{a(\boldsymbol{k'},\lambda')\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k'},\lambda')e^{-ik'\cdot y}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k'},\lambda')\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k'},\lambda')^{*}e^{ik'\cdot y}\Big\}\Bigg]\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}d^3\boldsymbol{k'}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}}}}\sum_{\lambda,\lambda'}\Big\{\underbrace{[\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]}_{-\eta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k'},\lambda')^{*}e^{-ik\cdot x+ik'\cdot y}\\
&\qquad\qquad+\underbrace{[\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\,a(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]}_{\eta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)^{*}\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k'},\lambda')e^{ik\cdot x-ik'\cdot y}\Big\}\\
&\qquad(\because\ [a(\boldsymbol{k},\lambda),a(\boldsymbol{k'},\lambda')]=[a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda),a^{\dagger}(\boldsymbol{k'},\lambda')]=0\,)\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}\sum_{\lambda}\Big\{-\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)^{*}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)^{*}\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Big\}\\
&\qquad\Big(\because\ \eta_{\lambda\lambda'}=0\ (\lambda\neq\lambda')\,,\quad k\cdot(x-y)=-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ \ (\because x^0=y^0=t)\Big)\\
&\quad\overset{(12)}{=}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}\Big\{-\eta^{\mu\nu}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+\eta^{\mu\nu}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\Big\}\\
&\quad=0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

最後の等号では、第2項目の積分変数 $\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ におきかえ、$\omega_{-\boldsymbol{k}}=\omega_{\boldsymbol{k}}$ を用いた。同様にして、$[\,\pi_{\mu}(t,\boldsymbol{x})\,,\,\pi_{\nu}(t,\boldsymbol{y})\,]=0$ も確かめることができる。

check 13.4

(13.15) ∼ (13.17) を確かめてみよう。

ここでは、

$$
H=\int d^3\boldsymbol{x}\Big\{-\frac{1}{2}\pi_{\mu}\pi^{\mu}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\partial_k A_{\mu}\partial^k A^{\mu}\Big\} \tag{30}
$$

$$
\boldsymbol{P}=-\int d^3\boldsymbol{x}\,\pi_{\mu}\boldsymbol{\nabla}A^{\mu} \tag{31}
$$

を生成消滅演算子を使って、次のように書き直し、

$$
H=\int d^3\boldsymbol{k}\ \omega_{\boldsymbol{k}}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{3}a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)a(\boldsymbol{k},\lambda)-a^{\dagger}(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\Big\} \tag{32}
$$

$$
\boldsymbol{P}=\int d^3\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{k}\Big\{\sum_{\lambda=1}^{3}a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)a(\boldsymbol{k},\lambda)-a^{\dagger}(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)\Big\} \tag{33}
$$

交換関係

$$[\,P^\mu\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\,] = +k^\mu a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda) \tag{34}$$

$$[\,P^\mu\,,\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,] = -k^\mu a(\boldsymbol{k},\lambda) \tag{35}$$

$$[\,P^\mu\,,\,A^\nu(x)\,] = -i\partial^\mu A^\nu(x) \tag{36}$$

を導く。ここで、$k^0 = \omega_{\boldsymbol{k}}$ である。

(32) および (33) を導くために、$A^\mu(x)$ の展開式

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left\{ a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x} \right\} \tag{37}$$

を (30) および (31) に代入して求めることができるが、ここでは異なる方法で (32) ～ (36) を導いてみよう。

そのために、$A^\mu(t,\boldsymbol{x})$ と $\pi_\nu(t,\boldsymbol{y})$ の同時刻交換関係

$$\begin{aligned} &[\,A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\,\pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = i\delta^\mu{}_\nu \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &[\,A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\,A^\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = [\,\pi_\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\,\pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

を用いて、(36) をまず初めに確かめる。

$$\begin{aligned}
[\,H\,,\,A^\nu(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[\int d^3\boldsymbol{y} \left\{ -\frac{1}{2}\pi_\mu(t,\boldsymbol{y})\pi^\mu(t,\boldsymbol{y}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \partial_k A_\mu(t,\boldsymbol{y})\partial^k A^\mu(t,\boldsymbol{y}) \right\},\,A^\nu(t,\boldsymbol{x}) \right] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{y} \left\{ \pi_\mu(t,\boldsymbol{y}) \underbrace{[\pi^\mu(t,\boldsymbol{y}), A^\nu(t,\boldsymbol{x})]}_{-i\eta^{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + \underbrace{[\pi_\mu(t,\boldsymbol{y}), A^\nu(t,\boldsymbol{x})]}_{-i\delta_\mu{}^\nu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \pi^\mu(t,\boldsymbol{y}) \right\} \\
&\qquad (\because\ [\,\partial_k A_\mu(t,\boldsymbol{y})\,,\,A^\nu(t,\boldsymbol{x})\,] = 0\,) \\
&= i\ \underbrace{\pi^\nu(t,\boldsymbol{x})}_{-\partial^0 A^\nu(t,\boldsymbol{x})} \\
&= -i\partial^0 A^\nu(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
[\,P^j\,,\,A^\nu(t,\boldsymbol{x})\,] &= \left[\int d^3\boldsymbol{y}\,\pi_\mu(t,\boldsymbol{y})\partial_y^j A^\mu(t,\boldsymbol{y})\,,\,A^\nu(t,\boldsymbol{x}) \right] \\
&\qquad \left(\because\ (31)\ \text{で}\ \boldsymbol{\nabla}\ \text{を}\ \partial^j\ \text{におきかえるとき、}\frac{\partial}{\partial y^j} = -\frac{\partial}{\partial y_j} = -\partial^j\ \text{に注意。}\right) \\
&= \int d^3\boldsymbol{y}\,\underbrace{[\pi_\mu(t,\boldsymbol{y}), A^\nu(t,\boldsymbol{x})]}_{-i\delta_\mu{}^\nu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \partial_y^j A^\mu(t,\boldsymbol{y}) \\
&\qquad (\because\ [\,\partial_y^j A^\mu(t,\boldsymbol{y})\,,\,A^\nu(t,\boldsymbol{x})\,] = 0\,) \\
&= -i\partial^j A^\nu(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{40}$$

したがって (39) と (40) より、(36) が確かめられたことになる。

次に、(36) の両辺に $A^\nu(x)$ の展開式 (37) を代入して、両辺の $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}$、あるいは $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x}$ の係数を見比べることによって、(34) および (35) を導く。(36) の両辺に (37)

を代入して

$$
\begin{aligned}
&[\,P^\mu\,,\,A^\nu(x)\,] = -i\partial^\mu A^\nu(x)\\
&\overset{(37)}{\Longrightarrow}\ \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big\{[\,P^\mu\,,\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,]\,\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x} + [\,P^\mu\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\,]\,\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x}\Big\}\\
&\qquad = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\Big\{-k^\mu a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x} + k^\mu a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x}\Big\} \qquad (41)
\end{aligned}
$$

を得る。上式で $\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}$ および $\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x}$ は（異なる k^μ, λ に対して）独立なので、両辺のそれぞれの係数を等しくおくことができる。したがって、

$$
\begin{aligned}
&[\,P^\mu\,,\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,] = -k^\mu a(\boldsymbol{k},\lambda) \quad \Longrightarrow\ (35)\\
&[\,P^\mu\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\,] = +k^\mu a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda) \quad \Longrightarrow\ (34)
\end{aligned}
$$

が導かれる。

最後に、(32) と (33) の表式を導く。(30) と (31) から、H と $\boldsymbol{P}$ は生成消滅演算子の２次で与えられることがわかる。また、check 11.9 で確かめた関係式

$$
G = \int d^3\boldsymbol{k}\, g(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} [\,G\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,] = g(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ [\,G\,,\,a(\boldsymbol{k})\,] = -g(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \end{cases} \qquad (42)
$$

は、G が生成消滅演算子のべきで与えられているとするならば、定数項の不定性を除いて、(42) の逆の矢印が成り立つ。ただし、(42) では次の交換関係が成り立っているとした。

$$
\begin{aligned}
&[\,a(\boldsymbol{k})\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'})\,] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\\
&[\,a(\boldsymbol{k})\,,\,a(\boldsymbol{k'})\,] = [\,a^\dagger(\boldsymbol{k})\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'})\,] = 0 \qquad (43)
\end{aligned}
$$

上に述べたことを念頭におくと、(34) と (35) から、(32) と (33) が導かれることがわかる。このとき注意する点が２つある。１つ目は、ハミルトニアンには定数項 (零点振動エネルギー) が現れるが、(32) ではそれを差し引いて真空エネルギーがゼロとなるように再定義していることである。２つ目の注意点は、$a(\boldsymbol{k},0)$ と $a^\dagger(\boldsymbol{k},0)$ は他の $a(\boldsymbol{k},j)$ と $a^\dagger(\boldsymbol{k},j)$ $(j=1,2,3)$ とは交換関係の右辺が逆符号という点である。すなわち、

$$
\begin{aligned}
&[\,a(\boldsymbol{k},0)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},0)\,] = -\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\\
&[\,a(\boldsymbol{k},j)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},l)\,] = \delta_{jl}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \qquad (j,l=1,2,3)
\end{aligned}
$$

である。このため、(32) と (33) の右辺で、$a^\dagger(\boldsymbol{k},0)a(\boldsymbol{k},0)$ の前の符号がマイナスとなっているのである。

check 13.5

10.6 節での議論を参考にして、角運動量演算子の表式 (13.18) を導いてみよう。さらに、(13.18) を用いて (13.19) を確かめてみよう。

ここでは、角運動量演算子の表式

$$J^{ij} = \int d^3\boldsymbol{x} \left\{ \underbrace{\pi_\mu(x^i\partial^j - x^j\partial^i)A^\mu}_{\text{軌道角運動量部分}} + \underbrace{\pi^i A^j - \pi^j A^i}_{\text{スピン角運動量部分}} \right\} \tag{44}$$

と、A^μ に対する空間回転の関係式

$$[\, J^{ij}\,,\, A^0(x)\,] = -i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)A^0(x) \tag{45}$$

$$[\, J^{ij}\,,\, A^k(x)\,] = -i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)A^k(x) + i\big(\delta^{ik}A^j(x) - \delta^{jk}A^i(x)\big) \tag{46}$$

を確かめる。

!

(46) の右辺第 2 項は、3 次元ベクトル A^k の ij 平面内での無限小回転に相当する。(45) と (46) の右辺第 1 項は、空間座標 $\boldsymbol{x}$ の無限小回転に相当する。A^0 は空間回転の下で3次元スカラー量なので、(45) には (46) の右辺第 2 項のような寄与は現れない。

以下では、10.6 節でのスカラー場に対する議論をベクトル場に適用して、角運動量演算子 (44) を求める。そのために、無限小ローレンツ変換 ($\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu$)

$$\begin{aligned} x^\mu \;\to\; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu &= x^\mu + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \\ &\equiv (x + \Delta\omega\cdot x)^\mu \end{aligned} \tag{47}$$

を考える。このとき、ベクトル場 $A^\mu(x)$ は次のように変換する (教科書本文の (2.10) 参照)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) \;\to\; A'^\mu(x') &= \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \\ &= A^\mu(x) + \Delta\omega^\mu{}_\nu A^\nu(x) \end{aligned} \tag{48}$$

ネーターカレントを導くときに必要な (無限小) 変換は、$A'^\mu(x')$ ではなく、$A'^\mu(x)$ なので (47) と (48) を使って、

$$\begin{aligned} A'^\mu(x) &\overset{(47)(48)}{\simeq} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x - \Delta\omega\cdot x) \\ &\simeq (\delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu)\Big(A^\nu(x) - (\Delta\omega\cdot x)^\lambda\partial_\lambda A^\nu(x)\Big) \\ &\simeq A^\mu(x) - \Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu\partial_\lambda A^\mu(x) + \Delta\omega^\mu{}_\nu A^\nu(x) \\ &\equiv A^\mu(x) + \delta_J A^\mu(x) \end{aligned} \tag{49}$$

で与えられる。ここで、$\delta_J A^\mu(x)$ の中の $-\Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu\partial_\lambda A^\mu(x)$ は、時空座標のローレンツ変換部分 $A^\mu(x - \Delta\omega\cdot x)$ からの寄与に対応する。一方、$\Delta\omega^\mu{}_\nu A^\nu$ は、A^μ のベクトルとしての変換性 $\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ からの寄与に対応する。

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の無限小ローレンツ変換は、スカラー場と同じように (教科書本文 (10.88) 参照)、次の全微分の形で与えられる。

$$\delta_J\mathcal{L} = \partial_\mu(-\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu\mathcal{L}) \tag{50}$$

!

(50) の関係は、理論の詳細によらず、無限小ローレンツ変換の場合はいつでも成り立つ。

したがって、ネーターの定理より、保存するネーターカレントは

$$\begin{aligned}
N^\mu &\equiv \delta_J A^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A^\alpha} - (-\Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L}) \\
&= \big(- \Delta\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda A^\alpha + \Delta\omega^\alpha{}_\nu A^\nu \big)(-\partial^\mu A_\alpha) + \Delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L} \\
&\qquad \left(\because \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\alpha \partial^\mu A_\alpha \ \Rightarrow \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A^\alpha} = -\partial^\mu A_\alpha \right) \\
&= \Delta\omega_{\lambda\nu} \Big[(\partial^\mu A_\alpha) x^\nu \partial^\lambda A^\alpha - (\partial^\mu A^\lambda) A^\nu + \eta^{\lambda\mu} x^\nu \mathcal{L} \Big] \\
&= \frac{1}{2}\Delta\omega_{\lambda\nu} \Big[-(\partial^\mu A_\alpha)(x^\lambda \partial^\nu - x^\nu \partial^\lambda) A^\alpha - (\partial^\mu A^\lambda) A^\nu + (\partial^\mu A^\nu) A^\lambda + (\eta^{\lambda\mu} x^\nu - \eta^{\nu\mu} x^\lambda)\mathcal{L} \Big]
\end{aligned} \tag{51}$$

で与えられる。ここで、$\Delta\omega_{\lambda\nu}$ は $(\lambda\nu)$ に関して反対称 $(\Delta\omega_{\lambda\nu} = -\Delta\omega_{\nu\lambda})$ なので、$(\lambda\nu)$ に関してカッコ $[\cdots]$ の中身を反対称化した。

$\Delta\omega_{\lambda\nu}$ は任意の (無限小) 反対称パラメータなので、N^μ から $\Delta\omega_{\lambda\nu}$ を取り除いた

$$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} \equiv -(\partial^\mu A_\alpha)(x^\lambda \partial^\nu - x^\nu \partial^\lambda) A^\alpha - (\partial^\mu A^\lambda) A^\nu + (\partial^\mu A^\nu) A^\lambda + (\eta^{\lambda\mu} x^\nu - \eta^{\nu\mu} x^\lambda)\mathcal{L} \tag{52}$$

も保存則

$$\partial_\mu \mathcal{M}^{\mu\lambda\nu} = 0 \tag{53}$$

を満たす。したがって、$\mathcal{M}^{\mu\lambda\nu}$ で $\mu = 0$ 成分を空間積分した量

$$J^{\lambda\nu} \equiv \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{M}^{0\lambda\nu} \tag{54}$$

が保存する。これから角運動量演算子 J^{ij} は

$$\begin{aligned}
J^{ij} &= \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{M}^{0ij} \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \Big\{ - (\partial^0 A_\alpha)(x^i \partial^j - x^j \partial^i) A^\alpha - (\partial^0 A^i) A^j + (\partial^0 A^j) A^i \Big\} \\
&\qquad (\because \ \eta^{i0} = \eta^{j0} = 0 \ (i,j = 1,2,3)\,) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \Big\{ - (-\pi_\alpha)(x^i \partial^j - x^j \partial^i) A^\alpha - (-\pi^i) A^j + (-\pi^j) A^i \Big\} \\
&\qquad (\because \ \pi_\alpha = -\partial^0 A_\alpha\,) \\
&= \int d^3\boldsymbol{x} \Big\{ \pi_\alpha (x^i \partial^j - x^j \partial^i) A^\alpha + \pi^i A^j - \pi^j A^i \Big\} \\
&\Longrightarrow \ (44)
\end{aligned} \tag{55}$$

で与えられ、(44) が確かめられたことになる。

(44) から (45) と (46) の交換関係を導くためには、同時刻交換関係

$$\begin{aligned}
[\, A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, \pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] &= i\delta^\mu{}_\nu \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
[\, A^\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, A^\nu(t,\boldsymbol{y})\,] &= [\, \pi_\mu(t,\boldsymbol{x})\,,\, \pi_\nu(t,\boldsymbol{y})\,] = 0
\end{aligned} \tag{56}$$

を用いればよい。

$$
\begin{aligned}
&[\,J^{ij}\,,\,A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})\,] \\
&\quad = \left[\int d^3\boldsymbol{y}\left\{\pi_{\nu}(t,\boldsymbol{y})\big(y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i\big)A^{\nu}(t,\boldsymbol{y})\right.\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left. +\,\pi^i(t,\boldsymbol{y})A^j(t,\boldsymbol{y}) - \pi^j(t,\boldsymbol{y})A^i(t,\boldsymbol{y})\right\},\,A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})\right] \\
&\quad = \int d^3\boldsymbol{y}\left\{\underbrace{[\pi_{\nu}(t,\boldsymbol{y}),A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})]}_{-i\delta_{\nu}{}^{\mu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(y^i\partial_y^j - y^j\partial_y^i\right)A^{\nu}(t,\boldsymbol{y})\right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. +\,\underbrace{[\pi^i(t,\boldsymbol{y}),A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})]}_{-i\eta^{i\mu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}A^j(t,\boldsymbol{y}) - \underbrace{[\pi^j(t,\boldsymbol{y}),A^{\mu}(t,\boldsymbol{x})]}_{-i\eta^{j\mu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}A^i(t,\boldsymbol{y})\right\} \\
&\quad = -i(x^i\partial^j - x^j\partial^i)A^{\mu}(t,\boldsymbol{x}) - i\eta^{i\mu}A^j(t,\boldsymbol{x}) + i\eta^{j\mu}A^i(t,\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{57}
$$

(57) で $\mu = 0$ とおくと、$\eta^{i0} = \eta^{j0} = 0$ なので (45) が得られる。また、(57) で $\mu = k$ ($k = 1,2,3$) とおくと、$\eta^{ik} = -\delta^{ik}$, $\eta^{jk} = -\delta^{jk}$ なので (46) が得られることがわかる。

check 13.6

$|\Psi'_{\rm phys}\rangle$ も物理的状態の条件 (13.26) を満たすことを確かめてみよう。また、(13.31) を証明してみよう。

【ヒント】 $[\,X(\boldsymbol{k}')\,,\,X^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,] = 0$、$[\,H\,,\,X^{\dagger}(\boldsymbol{k})\,] = \omega_{\boldsymbol{k}}X^{\dagger}(\boldsymbol{k})$、および $X(\boldsymbol{k})|\Psi_{\rm phys}\rangle = \langle\Psi_{\rm phys}|X^{\dagger}(\boldsymbol{k}) = 0$ を用いよ。

まず初めに、$|\Psi_{\rm phys}\rangle$ が物理的状態ならば

$$
|\Psi'_{\rm phys}\rangle \equiv |\Psi_{\rm phys}\rangle + |\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle \tag{58}
$$

も物理的状態の条件

$$
\big(a(\boldsymbol{k},0) - a(\boldsymbol{k},3)\big)\,|\Psi'_{\rm phys}\rangle = 0 \tag{59}
$$

を満たすことを証明する。ここで、

$$
|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots\int d^3\boldsymbol{k_n}\,f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})X^{\dagger}(\boldsymbol{k_1})\cdots X^{\dagger}(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle \tag{60}
$$

$$
X(\boldsymbol{k}) \equiv a(\boldsymbol{k},0) - a(\boldsymbol{k},3) \tag{61}
$$

である。

ヒントにあるように

$$
[\,X(\boldsymbol{k})\,,\,X^{\dagger}(\boldsymbol{k}')\,] = 0 \tag{62}
$$

$$
X(\boldsymbol{k})|\Psi_{\rm phys}\rangle = 0\,, \qquad \langle\Psi_{\rm phys}|X^{\dagger}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{63}
$$

を用いて証明する。(63) は物理的状態に対する条件式そのものなので自明だが、(62) は証明に重要な関係式なので下で確かめておく。

$$\begin{aligned}
[\,X(\boldsymbol{k})\,,\,X^\dagger(\boldsymbol{k'})\,] &= [\,a(\boldsymbol{k},0)-a(\boldsymbol{k},3)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},0)-a^\dagger(\boldsymbol{k'},3)\,] \\
&= \underbrace{[\,a(\boldsymbol{k},0)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},0)\,]}_{-\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})} + \underbrace{[\,a(\boldsymbol{k},3)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},3)\,]}_{+\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

つまり、$X(\boldsymbol{k})$ と $X^\dagger(\boldsymbol{k}')$ が可換な理由は、交換関係 $[\,a(\boldsymbol{k},0)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},0)\,]$ と $[\,a(\boldsymbol{k},3)\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k'},3)\,]$ がお互い逆符号であることから来ている。

(59) の証明は、$\big(a(\boldsymbol{k},0)-a(\boldsymbol{k},3)\big)\,|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle=0$ なので、

$$\big(a(\boldsymbol{k},0)-a(\boldsymbol{k},3)\big)\,|\Delta\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle=0 \tag{64}$$

を確かめればよい。証明は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
&\big(a(\boldsymbol{k},0)-a(\boldsymbol{k},3)\big)\,|\Delta\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle \\
&\quad\overset{(60)}{=} X(\boldsymbol{k})\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots\int d^3\boldsymbol{k_n}\,f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle \\
&\quad\overset{(62)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots\int d^3\boldsymbol{k_n}\,f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,\underbrace{X(\boldsymbol{k})\,|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle}_{0\,(\because(63))} \\
&\quad= 0
\end{aligned} \tag{65}$$

次に、

$$\langle\Psi_{\mathrm{phys}}|\Delta\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle=\langle\Delta\Psi_{\mathrm{phys}}|\Delta\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle=0 \tag{66}$$

$$\langle\Psi'_{\mathrm{phys}}|\Psi'_{\mathrm{phys}}\rangle=\langle\Psi_{\mathrm{phys}}|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle \tag{67}$$

$$\langle\Psi'_{\mathrm{phys}}|H|\Psi'_{\mathrm{phys}}\rangle=\langle\Psi_{\mathrm{phys}}|H|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle \tag{68}$$

を証明する。このためには、(62) と (63) に加えて

$$[\,H\,,\,X^\dagger(\boldsymbol{k})\,]=\omega_{\boldsymbol{k}}X^\dagger(\boldsymbol{k}) \tag{69}$$

が必要である。(この証明は難しくないので、ここでは導出しない。) (66) ~ (68) の導出は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\langle\Psi_{\mathrm{phys}}|\Delta\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle &= \langle\Psi_{\mathrm{phys}}|\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\,f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle \\
&\overset{(63)}{=} 0 \\
&\Longrightarrow\ (66)
\end{aligned} \tag{70}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle &= \left(\langle\Psi_{\rm phys}|\sum_{n'=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k'_1}\cdots d^3\boldsymbol{k'_{n'}}\, f^*(\boldsymbol{k'_1},\cdots,\boldsymbol{k'_{n'}})\, X(\boldsymbol{k'_{n'}})\cdots X(\boldsymbol{k'_1})\right)\\
&\qquad\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\, X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})|\Psi_{\rm phys}\rangle\right)\\
&= 0 \qquad (\because\ [X(\boldsymbol{k'}),X^\dagger(\boldsymbol{k})]=0,\quad X(\boldsymbol{k})|\Psi_{\rm phys}\rangle=0)\\
&\Longrightarrow\ (66)
\end{aligned}
\tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi'_{\rm phys}|\Psi'_{\rm phys}\rangle &= \big(\langle\Psi_{\rm phys}|+\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|\big)\big(|\Psi_{\rm phys}\rangle+|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle\big)\\
&\overset{(66)}{=} \langle\Psi_{\rm phys}|\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\Longrightarrow\ (67)
\end{aligned}
\tag{72}
$$

(68) を証明するために、次の関係を示す。

$$
\langle\Psi_{\rm phys}|H|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle = 0 \tag{73}
$$

$$
\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|H|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle = 0 \tag{74}
$$

(73) は次のように示される。

$$
\begin{aligned}
&\langle\Psi_{\rm phys}|H|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\quad= \langle\Psi_{\rm phys}|H\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\, X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\quad= \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,\langle\Psi_{\rm phys}|\ \underbrace{H\,X^\dagger(\boldsymbol{k_1})}_{X^\dagger(\boldsymbol{k_1})H+\omega_{\boldsymbol{k_1}}X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\ (\because\ (69))}\ X^\dagger(\boldsymbol{k_2})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\quad\overset{(69)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\\
&\qquad\qquad\times\underbrace{\langle\Psi_{\rm phys}|\left(X^\dagger(\boldsymbol{k_1})H+\omega_{\boldsymbol{k_1}}X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\right)}_{0\,(\because(63))}X^\dagger(\boldsymbol{k_2})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\quad= 0 \quad\Longrightarrow\quad (73)
\end{aligned}
\tag{75}
$$

(74) は次のようにして示される。

$$
\begin{aligned}
&\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|H|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\quad= \left(\langle\Psi_{\rm phys}|\sum_{n'=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k'_1}\cdots d^3\boldsymbol{k'_{n'}}\, f^*(\boldsymbol{k'_1},\cdots,\boldsymbol{k'_{n'}})X(\boldsymbol{k'_{n'}})\cdots X(\boldsymbol{k'_1})\right)H\\
&\qquad\qquad\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})|\Psi_{\rm phys}\rangle\right)\\
&\quad\overset{(69)}{=} \sum_{n,n'=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k'_1}\cdots d^3\boldsymbol{k'_{n'}}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f^*(\boldsymbol{k'_1},\cdots,\boldsymbol{k'_{n'}})f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\\
&\qquad\qquad\times\langle\Psi_{\rm phys}|X(\boldsymbol{k'_{n'}})\cdots X(\boldsymbol{k'_1})\left(X^\dagger(\boldsymbol{k_1})H+\omega_{\boldsymbol{k_1}}X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\right)X^\dagger(\boldsymbol{k_2})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})|\Psi_{\rm phys}\rangle\\
&\quad= 0 \qquad (\because\ [X(\boldsymbol{k'}),X^\dagger(\boldsymbol{k_1})]=0\,,\ \ \langle\Psi_{\rm phys}|X^\dagger(\boldsymbol{k_1})=0\,)\\
&\quad\Longrightarrow\ (74)
\end{aligned}
\tag{76}
$$

(73) と (74) を使えば、(68) は直ちに確かめられる。

$$\begin{aligned}\langle\Psi'_{\rm phys}|H|\Psi'_{\rm phys}\rangle &= \big(\langle\Psi_{\rm phys}| + \langle\Delta\Psi_{\rm phys}|\big)\, H\, \big(|\Psi_{\rm phys}\rangle + |\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle\big) \\ &\overset{(73)(74)}{=} \langle\Psi_{\rm phys}|H|\Psi_{\rm phys}\rangle \end{aligned} \tag{77}$$

check 13.7

(13.32) の関係を確かめてみよう。

【ヒント】 前問での議論と、$A^\mu(x)$ と $X(\boldsymbol{k})$, $X^\dagger(\boldsymbol{k})$ の交換関係が c 数となることを考慮すれば、(13.32) 左辺で $|\Psi'_{\rm phys}\rangle$ に含まれている $X^\dagger(\boldsymbol{k})$ の 2 次以上の項は寄与しないことがわかる。そのことに気がつけば、あとは前問のヒントに書かれている性質と次の交換関係（およびエルミート共役をとった式）

$$[\,A^\mu(x)\,,\,X^\dagger(\boldsymbol{k})\,] = -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left(\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},0)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},3)\right)e^{-ik\cdot x}$$

それから、$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},0)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},3) = k^\mu/|\boldsymbol{k}|$（(13.12b) 参照）、$k^\mu e^{\mp ik\cdot x} = \pm i\partial^\mu e^{\mp ik\cdot x}$ を用いればよい。(13.12b) は、そこでの **【注】** に書かれているように、一般の k^μ に対しても成り立つ。

以下では、

$$\langle\Psi'_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi'_{\rm phys}\rangle = \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)+\partial^\mu\Lambda(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle \tag{78}$$

を確かめる。ここで、$\Lambda(x)$ は c 数関数で次式で与えられる。

$$\Lambda(x) = -i\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{\frac{f(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}e^{-ik\cdot x} - \frac{f^*(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}e^{ik\cdot x}\right\} \tag{79}$$

$f(\boldsymbol{k})$ は $|\Psi'_{\rm phys}\rangle$ の定義式

$$|\Psi'_{\rm phys}\rangle = |\Psi_{\rm phys}\rangle + |\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle \tag{80}$$

$$|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})|\Psi_{\rm phys}\rangle \tag{81}$$

で、(81) の右辺 $n=1$ の場合の係数関数である。

ヒントに書かれているように、$A^\mu(x)$ と $X(\boldsymbol{k})$, $X^\dagger(\boldsymbol{k})$ の交換関係が c 数関数、すなわち

$$\begin{aligned}[\,A^\mu(x)\,,\,X^\dagger(\boldsymbol{k})\,] &= -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left(\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},0)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},3)\right)e^{-ik\cdot x} \\ [\,A^\mu(x)\,,\,X(\boldsymbol{k})\,] &= +\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left(\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},0)^*+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},3)^*\right)e^{ik\cdot x}\end{aligned} \tag{82}$$

で与えられることに気がつけば、

$$X(\boldsymbol{k'})X^\dagger(\boldsymbol{k}) = X^\dagger(\boldsymbol{k})X(\boldsymbol{k'}) \tag{83}$$

および

$$X(\boldsymbol{k})|\Psi_{\rm phys}\rangle = \langle\Psi_{\rm phys}|X^\dagger(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{84}$$

$$X(\boldsymbol{k})|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle = \langle\Delta\Psi_{\rm phys}|X^\dagger(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{85}$$

の関係から (check 13.6 参照)、(78) の左辺に含まれている $X(\boldsymbol{k})$ および $X^\dagger(\boldsymbol{k})$ の 2 次以上の項は寄与しない事がわかる。すなわち、

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi'_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi'_{\rm phys}\rangle \\
&\quad= \big(\langle\Psi_{\rm phys}|+\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|\big)\,A^\mu(x)\,\big(|\Psi_{\rm phys}\rangle+|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle\big) \\
&\quad= \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle+\langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\qquad+\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle+\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\quad= \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle+\langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)\left(\int d^3\boldsymbol{k}\,f(\boldsymbol{k})X^\dagger(\boldsymbol{k})|\Psi_{\rm phys}\rangle\right) \\
&\qquad+\left(\langle\Psi_{\rm phys}|\int d^3\boldsymbol{k}\,f^*(\boldsymbol{k})X(\boldsymbol{k})\right)A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle\;+\;0
\end{aligned}\tag{86}$$

の関係が成り立つ。最後の等号の証明を以下で行うが、少々長いので順次説明していく。まず、次の関係

$$\langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k}_1)X^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k}_n)=0\qquad(n\geq 2)\tag{87}$$

$$X(\boldsymbol{k}_n)\cdots X(\boldsymbol{k}_2)X(\boldsymbol{k}_1)A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle=0\qquad(n\geq 2)\tag{88}$$

を以下で証明する。

$$\begin{aligned}
(87)\,\text{左辺} &= \langle\Psi_{\rm phys}|\,\underbrace{A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k}_1)}_{X^\dagger(\boldsymbol{k}_1)A^\mu(x)+(c\,\text{数})\ (\because\ (82))}\,X^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k}_n) \\
&= \underbrace{\langle\Psi_{\rm phys}|X^\dagger(\boldsymbol{k}_1)}_{0\ (\because\ (84))}A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k}_n)+(c\,\text{数})\times\underbrace{\langle\Psi_{\rm phys}|X^\dagger(\boldsymbol{k}_2)}_{0\ (\because\ (84))}\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k}_n) \\
&= 0\qquad(n\geq 2) \\
(88)\,\text{左辺} &= X(\boldsymbol{k}_n)\cdots X(\boldsymbol{k}_2)\,\underbrace{X(\boldsymbol{k}_1)A^\mu(x)}_{A^\mu(x)X(\boldsymbol{k}_1)+(c\,\text{数})\ (\because\ (82))}\,|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&= X(\boldsymbol{k}_n)\cdots X(\boldsymbol{k}_2)A^\mu(x)\underbrace{X(\boldsymbol{k}_1)|\Psi_{\rm phys}\rangle}_{0\ (\because\ (84))}+(c\,\text{数})\times X(\boldsymbol{k}_n)\cdots\underbrace{X(\boldsymbol{k}_2)|\Psi_{\rm phys}\rangle}_{0\ (\because\ (84))} \\
&= 0\qquad(n\geq 2)
\end{aligned}$$

上の証明からわかるように、(87) と (88) は $\langle\Psi_{\rm phys}|$ と $|\Psi_{\rm phys}\rangle$ をそれぞれ $\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|$ と $|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle$ に置き換えてもそのまま成り立つ。すなわち、

$$\langle\Delta\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k}_1)X^\dagger(\boldsymbol{k}_2)\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k}_n)=0\qquad(n\geq 2)\tag{89}$$

$$X(\boldsymbol{k}_n)\cdots X(\boldsymbol{k}_2)X(\boldsymbol{k}_1)A^\mu(x)|\Delta\Psi_{\rm phys}\rangle=0\qquad(n\geq 2)\tag{90}$$

(87) ～ (90) を用いれば、(86) の最後の等号を示すことは簡単だ。証明は以下の通りである。

- $\langle\Phi_{\rm phys}|\,A^\mu(x)\,|\Delta\Phi_{\rm phys}\rangle$

$$\begin{aligned}
&\overset{(81)}{=}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\,f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,\langle\Phi_{\rm phys}|\,A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\overset{(87)}{=}\int d^3\boldsymbol{k_1}\,f(\boldsymbol{k_1})\,\langle\Phi_{\rm phys}|\,A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle
\end{aligned}\tag{91}$$

• $\langle\Delta\Phi_{\rm phys}|\, A^\mu(x)\,|\Phi_{\rm phys}\rangle$

$$\begin{aligned}
&\overset{(81)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f^*(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,\langle\Phi_{\rm phys}|\,X(\boldsymbol{k_n})\cdots X(\boldsymbol{k_1})A^\mu(x)\,|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\overset{(88)}{=} \int d^3\boldsymbol{k_1}\, f^*(\boldsymbol{k_1})\,\langle\Phi_{\rm phys}|\,X(\boldsymbol{k_1})A^\mu(x)\,|\Psi_{\rm phys}\rangle
\end{aligned} \tag{92}$$

• $\langle\Delta\Phi_{\rm phys}|\, A^\mu(x)\,|\Delta\Phi_{\rm phys}\rangle$

$$\begin{aligned}
&\overset{(81)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\boldsymbol{k_1}\cdots d^3\boldsymbol{k_n}\, f(\boldsymbol{k_1},\cdots,\boldsymbol{k_n})\,\langle\Delta\Phi_{\rm phys}|\,A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k_1})\cdots X^\dagger(\boldsymbol{k_n})\,|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\overset{(89)}{=} \int d^3\boldsymbol{k_1}\, f(\boldsymbol{k_1})\,\langle\Delta\Phi_{\rm phys}|\,\underbrace{A^\mu(x)X^\dagger(\boldsymbol{k_1})}_{X^\dagger(\boldsymbol{k_1})A^\mu(x)+(c\,数)\ (\because\ (82))}\,|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&= \int d^3\boldsymbol{k_1}\, f(\boldsymbol{k_1})\left\{\underbrace{\langle\Delta\Phi_{\rm phys}|\,X^\dagger(\boldsymbol{k_1})}_{0\ (\because\ (85))}\,A^\mu(x)\,|\Psi_{\rm phys}\rangle + (c\,数)\times\underbrace{\langle\Delta\Phi_{\rm phys}|\Psi_{\rm phys}\rangle}_{0\ (\because\ (66))}\right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{93}$$

以上より、(86) の最後の等号が導かれた。(86) から (78) の導出は、以下の通りである。

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi'_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi'_{\rm phys}\rangle \\
&\quad\overset{(86)}{=} \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle + \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)\left(\int d^3\boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k})X^\dagger(\boldsymbol{k})|\Psi_{\rm phys}\rangle\right) \\
&\qquad + \left(\langle\Psi_{\rm phys}|\int d^3\boldsymbol{k}\, f^*(\boldsymbol{k})X(\boldsymbol{k})\right)A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\quad\overset{(84)}{=} \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle + \langle\Psi_{\rm phys}|\int d^3\boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k})[A^\mu(x),X^\dagger(\boldsymbol{k})]|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\qquad + \langle\Psi_{\rm phys}|\int d^3\boldsymbol{k}\, f^*(\boldsymbol{k})[X(\boldsymbol{k}),A^\mu(x)]|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\quad\overset{(82)}{=} \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\qquad + \langle\Psi_{\rm phys}|\int d^3\boldsymbol{k}\Bigg\{-\frac{f(\boldsymbol{k})}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\underbrace{\big(\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},0)+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},3)\big)}_{k^\mu/|\boldsymbol{k}|}e^{-ik\cdot x} \\
&\qquad\qquad - \frac{f^*(\boldsymbol{k})}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\underbrace{\big(\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},0)^*+\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},3)^*\big)}_{k^\mu/|\boldsymbol{k}|}e^{ik\cdot x}\Bigg\}|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\quad= \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\qquad + \langle\Psi_{\rm phys}|\,\partial^\mu\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left\{-i\frac{f(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}e^{-ik\cdot x}+i\frac{f^*(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}e^{ik\cdot x}\right\}|\Psi_{\rm phys}\rangle \\
&\qquad (\because\ k^\mu e^{\mp ik\cdot x} = \pm i\partial^\mu e^{\mp ik\cdot x}) \\
&\quad\equiv \langle\Psi_{\rm phys}|A^\mu(x)+\partial^\mu\Lambda(x)|\Psi_{\rm phys}\rangle
\end{aligned} \tag{94}$$

このとき、c 数関数 $\Lambda(x)$ は、(79) で与えられることがわかる。

check 13.8

(13.36) を確かめてみよう。

【ヒント】(13.9) を (13.19b) に代入して $a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)$ $(\lambda=1,2)$) に関する部分を抜き出すことによって（そのとき (13.10) を用いる)、$[\,J^{12}\,,\,a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},1)\,]=+ia^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},2)$, $[\,J^{12}\,,\,a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},2)\,]=-ia^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},1)$ を導け。

ここでは、$A^\mu(x)$ の展開式

$$A^\mu(x)=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\Big\{a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^*e^{ik\cdot x}\Big\} \tag{95}$$

を、J^{ij} と $A^k(x)$ の交換関係

$$[\,J^{ij}\,,\,A^k(x)\,]=-i(x^i\partial^j-x^j\partial^i)A^k(x)+i\big(\delta^{ik}A^j(x)-\delta^{jk}A^i(x)\big) \tag{96}$$

に代入して、$a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)$ $(\lambda=1,2)$ に関する部分を抜き出すことによって

$$[\,J^{12}\,,\,a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},1)\,]=+ia^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},2) \tag{97}$$

$$[\,J^{12}\,,\,a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},2)\,]=-ia^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},1) \tag{98}$$

を導く。ここで、$\widetilde{k}^\mu=(\widetilde{k}^0,\widetilde{\boldsymbol{k}})=(\widetilde{k},0,0,\widetilde{k})$ $(\widetilde{k}>0)$ である。

まず初めに、(96) の左辺に (95) を代入したものを計算する。

$$\begin{aligned}
&[\,J^{ij}\,,\,A^k(x)\,]\\
&=\left[\,J^{ij}\,,\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\Big\{a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^k(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^k(\boldsymbol{k},\lambda)^*e^{ik\cdot x}\Big\}\right]\\
&=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\Big\{\,[\,J^{ij}\,,\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,]\,\varepsilon^k(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}+[\,J^{ij}\,,\,a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\,]\,\varepsilon^k(\boldsymbol{k},\lambda)^*e^{ik\cdot x}\Big\}
\end{aligned} \tag{99}$$

次に、(96) の右辺に (95) を代入する。

$$\begin{aligned}
&-i(x^i\partial^j-x^j\partial^i)A^k(x)+i\big(\delta^{ik}A^j(x)-\delta^{jk}A^i(x)\big)\\
&\quad=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\Big\{a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^k(\boldsymbol{k},\lambda)(-i)(x^i\partial^j-x^j\partial^i)\,e^{-ik\cdot x}\\
&\qquad\qquad+a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^k(\boldsymbol{k},\lambda)^*(-i)(x^i\partial^j-x^j\partial^i)\,e^{ik\cdot x}\Big\}\\
&\qquad+\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\Big\{ia(\boldsymbol{k},\lambda)\big(\delta^{ik}\varepsilon^j(\boldsymbol{k},\lambda)-\delta^{jk}\varepsilon^i(\boldsymbol{k},\lambda)\big)\,e^{-ik\cdot x}\\
&\qquad\qquad+ia^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\big(\delta^{ik}\varepsilon^j(\boldsymbol{k},\lambda)^*-\delta^{jk}\varepsilon^i(\boldsymbol{k},\lambda)^*\big)\,e^{ik\cdot x}\Big\}
\end{aligned} \tag{100}$$

(99) と (100) で $i=1$, $j=2$, $k=1$ と選び、$e^{i\widetilde{k}\cdot x}$ に比例する部分をそれぞれから取り出すと、(このとき、$\widetilde{k}^\mu=0$ $(\mu=1,2)$ なので $\partial^j e^{i\widetilde{k}\cdot x}=0$ $(j=1,2)$ に注意して)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=0}^{3}[\,J^{12}\,,\,a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)\,]\,\varepsilon^1(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^*=\sum_{\lambda=0}^{3}ia^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)\varepsilon^2(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^*\\
&\qquad\Longrightarrow\quad[\,J^{12}\,,\,a^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},1)\,]=ia^\dagger(\widetilde{\boldsymbol{k}},2)\\
&\qquad\Longrightarrow\quad(97)
\end{aligned} \tag{101}$$

を得る。ここで、

$$\varepsilon^{\mu}(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)=\delta^{\mu}{}_{\lambda} \qquad (\mu,\lambda=0,1,2,3) \tag{102}$$

を用いた。

今度は、(99) と (100) で $i=1,\, j=2,\, k=2$ と選び、$e^{i\widetilde{k}\cdot x}$ に比例する部分をそれぞれ取り出すと、(このとき、$\widetilde{k}^{\mu}=0$ $(\mu=1,2)$ なので $\partial^{j}e^{i\widetilde{k}\cdot x}=0$ $(j=1,2)$ に注意して)

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=0}^{3}[\,J^{12}\,,\,a^{\dagger}(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)\,]\,\varepsilon^{2}(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^{*}&=\sum_{\lambda=0}^{3}(-i)a^{\dagger}(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)\varepsilon^{1}(\widetilde{\boldsymbol{k}},\lambda)^{*}\\
\overset{(102)}{\Longrightarrow}\quad &[\,J^{12}\,,\,a^{\dagger}(\widetilde{\boldsymbol{k}},2)\,]=-ia^{\dagger}(\widetilde{\boldsymbol{k}},1)\\
\Longrightarrow\quad &(98)
\end{aligned} \tag{103}$$

check 13.9

(13.38) を確かめてみよう。

ここではファインマンゲージ $(\alpha=1)$ での伝播関数

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu}(x-y)_{\alpha=1}&\equiv\langle 0|TA^{\mu}(x)A^{\nu}(y)|0\rangle\\
&=\int\frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}}\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^{2}+i\varepsilon}e^{-ik\cdot(x-y)}
\end{aligned} \tag{104}$$

を確かめる。そのために、$A^{\mu}(x)$ の展開式

$$A^{\mu}(x)=\int\frac{d^{3}\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^{3}2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\sum_{\lambda=0}^{3}\Big\{a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x}+a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)^{*}e^{ik\cdot x}\Big\} \tag{105}$$

および、交換関係

$$\begin{aligned}
[\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]&=-\eta_{\lambda\lambda'}\delta^{3}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\\
[\,a(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\,a(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]&=[\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)\,,\,a^{\dagger}(\boldsymbol{k'},\lambda')\,]=0
\end{aligned} \tag{106}$$

それと真空の性質

$$a(\boldsymbol{k},\lambda)|0\rangle=\langle 0|a^{\dagger}(\boldsymbol{k},\lambda)=0 \tag{107}$$

を用いる。また、偏極ベクトルの完全性

$$\sum_{\lambda=0}^{3}\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{k},\lambda)=\eta^{\mu\nu} \tag{108}$$

も用いる。

まず、$\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle$ を評価する。

$$\begin{aligned}
&\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle \\
&\quad = \langle 0| \left(\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \sum_\lambda \left\{ a(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)^* e^{ik\cdot x} \right\} \right) \\
&\qquad \times \left(\int \frac{d^3\boldsymbol{k'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k'}}}} \sum_{\lambda'} \left\{ a(\boldsymbol{k'},\lambda')\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k'},\lambda')e^{-ik\cdot y} + a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k'},\lambda')^* e^{ik'\cdot y} \right\} \right) |0\rangle \\
&\quad \overset{(107)}{=} \int \frac{d^3\boldsymbol{k} d^3\boldsymbol{k'}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}}}} \sum_{\lambda,\lambda'} \left\{ \langle 0|\, a(\boldsymbol{k},\lambda)\, a^\dagger(\boldsymbol{k'},\lambda')\,|0\rangle\, \varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k'},\lambda')^* e^{-ik\cdot x + ik'\cdot y} \right\} \\
&\quad \overset{(106)}{=} \int \frac{d^3\boldsymbol{k} d^3\boldsymbol{k'}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k'}}}} \sum_{\lambda,\lambda'} \left\{ -\eta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\,\langle 0|0\rangle\, \varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k'},\lambda')^* e^{-ik\cdot x + ik'\cdot y} \right\} \\
&\quad = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}} \underbrace{\sum_\lambda \big(-\eta_{\lambda\lambda}\varepsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{k},\lambda)^* \big)}_{-\eta^{\mu\nu}\ (\because\ (108))} e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\quad = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}} (-\eta^{\mu\nu})\, e^{-ik\cdot(x-y)}
\end{aligned} \tag{109}$$

この結果を用いて、$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|A^\nu(y)A^\mu(x)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}} (-\eta^{\mu\nu}) \left\{ \theta(x^0-y^0)e^{-ik\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{ik\cdot(x-y)} \right\} \\
&= -\eta^{\mu\nu}\Delta_F(x-y)|_{m^2=0}
\end{aligned} \tag{110}$$

ここで、スカラー場のファインマン伝播関数の表式（教科書本文 11.4 節参照）

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x-y) &= \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} \left\{ \theta(x^0-y^0)e^{-ik\cdot(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{ik\cdot(x-y)} \right\} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2+i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{111}$$

および、$E_{\boldsymbol{k}}|_{m^2=0} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ を用いた。(110) は求めたかった表式 (104) に他ならない。

check 13.10

作用積分 (13.2) から運動方程式 (13.40) を導け。また、ファインマン伝播関数 (13.39) が (13.41) の解となっていることを確かめてみよう。

まず、作用積分

$$S_\alpha = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} \tag{112}$$

から運動方程式

$$\left[\eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu \right] A^\nu(x) = 0 \tag{113}$$

を求める。そのために変分原理を用いる。

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta S_\alpha \\
&= \delta \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) - \frac{1}{\alpha}(\partial_\nu A^\nu)(\partial_\mu \delta A^\mu) \right\} \\
&\overset{\text{部分積分}}{=} \int d^4x \Big\{ \frac{1}{2}\big[\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\big]\delta A^\nu - \frac{1}{2}\big[\partial^\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\big]\delta A^\mu + \frac{1}{\alpha}\big[\partial_\mu \partial_\nu A^\nu\big]\delta A^\mu \Big\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\partial^\nu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu \partial_\nu A^\nu \right\} \delta A^\mu \\
&\qquad (\because \text{第 1 項で} \mu \leftrightarrow \nu \text{の添字の入れ替えを行った。}) \\
&= \int d^4x \Big\{ \underbrace{\partial^\nu \partial_\nu}_{\partial_\rho \partial^\rho} \underbrace{A_\mu(x)}_{\eta_{\mu\nu} A^\nu(x)} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu(x) \Big\} \delta A^\mu(x) \\
&= \int d^4x \left\{ \left[\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu(x) \right\} \delta A^\mu(x) \\
&\Longrightarrow \quad \left[\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu(x) = 0
\end{aligned}
\tag{114}
$$

次に、

$$
D_F^{\nu\lambda}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{-i\eta^{\nu\lambda}}{k^2 + i\varepsilon} + i(1-\alpha)\frac{k^\nu k^\lambda}{(k^2+i\varepsilon)^2} \right] e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{115}
$$

が、(114) の微分演算子のグリーン関数、すなわち

$$
\left[\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] D_F^{\nu\lambda}(x-y) = i{\delta_\mu}^\lambda \, \delta^4(x-y) \tag{116}
$$

の解になっていることを確かめる。このためには、次のフーリエ表示での関係式

$$
\left[-\eta_{\mu\nu} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] \left[\frac{-i\eta^{\nu\lambda}}{k^2 + i\varepsilon} + i(1-\alpha)\frac{k^\nu k^\lambda}{(k^2+i\varepsilon)^2} \right] = i{\delta_\mu}^\lambda \tag{117}
$$

を確かめれば十分である。なぜなら上式が成り立てば、(116) の左辺は

$$
\begin{aligned}
&\left[\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right] D_F^{\nu\lambda}(x-y) \\
&\quad \overset{(115)}{=} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-\eta_{\mu\nu} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu \right] \left[\frac{-i\eta^{\nu\lambda}}{k^2 + i\varepsilon} + i(1-\alpha)\frac{k^\nu k^\lambda}{(k^2+i\varepsilon)^2} \right] e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\quad \overset{(117)}{=} i{\delta_\mu}^\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, e^{-ik\cdot(x-y)} \\
&\quad = i{\delta_\mu}^\lambda \, \delta^4(x-y)
\end{aligned}
\tag{118}
$$

となって、(116) が導かれるからである。

では、最後に (117) を確かめることにする。

$$
\begin{aligned}
&\left[-\eta_{\mu\nu}k^2+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]\left[\frac{-i\eta^{\nu\lambda}}{k^2+i\varepsilon}+i(1-\alpha)\frac{k^\nu k^\lambda}{(k^2+i\varepsilon)^2}\right]\\
&\quad=\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)^2}\left[-\eta_{\mu\nu}k^2+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]\left[-i\eta^{\nu\lambda}k^2+i(1-\alpha)k^\nu k^\lambda\right]\\
&\qquad\quad(\because \text{分子の } i\varepsilon \text{は 0 とおいた。})\\
&\quad=\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)^2}\Biggl\{i\underbrace{\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\lambda}}_{\delta_\mu{}^\lambda}(k^2)^2-i(1-\alpha)\underbrace{\eta_{\mu\nu}k^\nu}_{k_\mu}k^\lambda k^2\\
&\qquad\qquad-i\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu\underbrace{k_\nu\eta^{\nu\lambda}}_{k^\lambda}k^2+i\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha)k_\mu\underbrace{k_\nu k^\nu}_{k^2}k^\lambda\Biggr\}\\
&\quad=\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)^2}\left\{i\delta_\mu{}^\lambda(k^2)^2-i\left(\underbrace{1-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha)}_{0}\right)k_\mu k^\lambda k^2\right\}\\
&\quad=i\delta_\mu{}^\lambda\frac{(k^2)^2}{(k^2+i\varepsilon)^2}\\
&\quad=i\delta_\mu{}^\lambda
\end{aligned}
\tag{119}
$$

ここで、最後から 2 番目の表式では $\varepsilon\to 0$ としても $k^2=0$ での発散は生じないので、最後の等号では $\varepsilon=0$ とおいた。

量子力学選書「場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—」

裳華房、坂本眞人著

第１４章 check 解答例と補足説明

≪ 変更履歴 ≫

2020/03/31

全面的に誤植等を修正。また、よりわかりやすい説明となるように、適宜加筆修正を行った。

2015/01/29

解答例の誤植を修正。

2014/04/09

第 14 章の解答例をアップ

≪ 内容 ≫

- check 14.1 ∼ check 14.7 の解答例

check 14.1

(14.3) と (14.4) から (II) の交換関係を、(14.6) と (14.7) から (III) の交換関係を導いてみよう。

【ヒント】 $\Delta\omega_{\mu\nu}$ が $\mu\nu$ に関して反対称であることに注意せよ。たとえば、(14.5) 右辺で $\Delta\omega^{\rho}{}_{\nu}P^{\nu} = \Delta\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}P^{\nu} = \frac{1}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}\big(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu\rho}P^{\mu}\big)$ と $\mu\nu$ に関して反対称化しておく必要がある。

まず初めに、

$$P^{\rho} \;\to P'^{\rho} = \Lambda^{\rho}{}_{\nu}P^{\nu} \qquad (\Lambda^{\rho}{}_{\nu} = \delta^{\rho}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\nu}) \tag{1}$$

$$P'^{\rho} = \exp\left\{\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\}P^{\rho}\exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} \tag{2}$$

から、$J^{\mu\nu}$ と P^{ρ} の交換関係、

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,P^{\rho}\,] = -i(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu\rho}P^{\mu}) \tag{3}$$

を導く。ここで、(1) は 4 元ベクトル P^{ρ} のローレンツ変換性を表したもので、(2) は $J^{\mu\nu}$ がローレンツ変換の生成子であることを示している。

(3) の導出は、(2) を $\Delta\omega_{\mu\nu}$ について展開し、$\Delta\omega_{\mu\nu}$ の 1 次までの式と (1) を比べればよい。(1) と (2) のそれぞれを $\Delta\omega_{\mu\nu}$ の 1 次まで残して表すと、

$$\begin{aligned}
(1) \;\Longrightarrow\; P'^{\rho} &= \Lambda^{\rho}{}_{\nu}P^{\nu} \\
&= (\delta^{\rho}{}_{\nu} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\nu})P^{\nu} \\
&= P^{\rho} + \underbrace{\Delta\omega^{\rho}{}_{\nu}}_{\Delta\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}}\,P^{\nu} \\
&= P^{\rho} + \Delta\omega_{\mu\nu}\frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu\rho}P^{\mu}) \qquad (4)\\
&\quad \left(\begin{array}{l} \because\;\; \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}\,\text{なので}\,(\mu\nu)\,\text{に関して反対称化した。} \\ \qquad \Delta\omega_{\mu\nu}X^{\mu\nu} = \Delta\omega_{\mu\nu}\frac{1}{2}(X^{\mu\nu} - X^{\nu\mu}) \end{array}\right) \\
(2) \;\Longrightarrow\; P'^{\rho} &= \exp\left\{\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\}P^{\rho}\exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} \\
&\simeq \left(1 + \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)P^{\rho}\left(1 - \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\
&\simeq P^{\rho} + \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}[\,J^{\mu\nu}\,,\,P^{\rho}\,] \qquad (5)
\end{aligned}$$

となる。これらは等しいので、$\Delta\omega_{\mu\nu}$ の係数を等しくおいて

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,P^{\rho}\,] = -i(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu\rho}P^{\mu}) \tag{6}$$

を得る。

(!)

(4) の最後の等号で、$(\mu\nu)$ に関して反対称化した点は重要である。($J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ は $(\mu\nu)$ に関して反対称なので、(5) でさらに反対称化する必要はない。) (6) の左辺は $(\mu\nu)$ に関して反対称 ($J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$) なので、右辺も $(\mu\nu)$ に関して反対称になっているはずである。

同様にして、

$$J'^{\rho\lambda} = \Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\lambda}{}_{\beta}J^{\alpha\beta} \qquad (\Lambda^{\rho}{}_{\alpha} = \delta^{\rho}{}_{\alpha} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\alpha}) \tag{7}$$

$$J'^{\rho\lambda} = \exp\left\{\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} J^{\rho\lambda} \exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} \tag{8}$$

から、$J^{\mu\nu}$ と $J^{\rho\lambda}$ の交換関係

$$[\, J^{\mu\nu}\,,\, J^{\rho\lambda}\,] = -i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu}) \tag{9}$$

を以下で導く。

導出の仕方は前と同様で、$\Delta\omega_{\mu\nu}$ の 1 次まで展開して (7) と (8) を比べればよい。この時、前と同様に $\Delta\omega_{\mu\nu}$ の $(\mu\nu)$ に関する反対称性に注意して式変形を行う必要がある。

$$\begin{aligned}
(7) \implies J'^{\rho\lambda} &= \Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\lambda}{}_{\beta}J^{\alpha\beta} \\
&= (\delta^{\rho}{}_{\alpha} + \Delta\omega^{\rho}{}_{\alpha})(\delta^{\lambda}{}_{\beta} + \Delta\omega^{\lambda}{}_{\beta})J^{\alpha\beta} \\
&\simeq J^{\rho\lambda} + \underbrace{\Delta\omega^{\rho}{}_{\alpha}J^{\alpha\lambda}}_{\Delta\omega^{\rho}{}_{\nu}J^{\nu\lambda}} + \underbrace{\Delta\omega^{\lambda}{}_{\beta}J^{\rho\beta}}_{\Delta\omega^{\lambda}{}_{\nu}J^{\rho\nu}} \\
&= J^{\rho\lambda} + \Delta\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} + \Delta\omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} \\
&= J^{\rho\lambda} + \Delta\omega_{\mu\nu}\frac{1}{2}\big(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu}\big) \qquad (10) \\
&\qquad \big(\because \quad \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}\text{なので、}(\mu\nu)\text{ に関して反対称化した。}\big) \\
(8) \implies J'^{\rho\lambda} &= \exp\left\{\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} J^{\rho\lambda} \exp\left\{-\frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\} \\
&\simeq \left(1 + \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) J^{\rho\lambda} \left(1 - \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right) \\
&\simeq J^{\rho\lambda} + \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}[\, J^{\mu\nu}\,,\, J^{\rho\lambda}\,] \qquad (11)
\end{aligned}$$

(10) と (11) の $\Delta\omega_{\mu\nu}$ の係数を見比べて

$$[\, J^{\mu\nu}\,,\, J^{\rho\lambda}\,] = -i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu}) \tag{12}$$

を得る。

❗

一見すると (12) の右辺の形は複雑に見えるが、上の導出からわかるように、左辺の $J^{\mu\nu}$（と $J^{\rho\lambda}$）の $(\mu\nu)$（と $(\rho\lambda)$）の反対称性を反映しているにすぎない。

check 14.2

$J^{\rho\lambda}$ のローレンツ変換性だけから (III) の交換関係は求まるので、別の簡単な導出方法がある。$J^{\rho\lambda}$ の変換性だけが問題となっているのだから、$J^{\rho\lambda}$ と同じ 2 階のテンソルの変換性を持つ $T^{\rho\lambda} \equiv P^\rho \widetilde{P}^\lambda$ を考えても同じことである。(P^ρ と $\widetilde{P}^\rho$ はともに (II) の交換関係を満たすものとする。) このとき、次の交換関係を満たすことを確かめてみよう。

$$[\, J^{\mu\nu}\, ,\, T^{\rho\lambda}\,] = -i\left(\eta^{\mu\rho}T^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}T^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}T^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}T^{\rho\mu}\right)$$

【ヒント】 $J^{\mu\nu}$ と $P^\rho \widetilde{P}^\lambda$ の交換関係は、$[\, J^{\mu\nu}\, ,\, (P^\rho \widetilde{P}^\lambda)\,] = [\, J^{\mu\nu}\, ,\, P^\rho\,]\widetilde{P}^\lambda + P^\rho[\, J^{\mu\nu}\, ,\, \widetilde{P}^\lambda\,]$ として (II) の交換関係を用いれば計算できる。この交換関係は 2 階のテンソル $P^\rho \widetilde{P}^\lambda$ のローレンツ変換性を示したものにすぎないので、任意の 2 階のテンソル $T^{\rho\lambda}$ に対して成り立つ関係式だ。実際、$T^{\rho\lambda}$ を $J^{\rho\lambda}$ におきかえたものは、確かに (III) の交換関係を再現している。

ここでは、P^ρ と $\widetilde{P}^\lambda$ がともにベクトルの変換性

$$\begin{aligned} [\, J^{\mu\nu}\, ,\, P^\rho\,] &= -i(\eta^{\mu\rho}P^\nu - \eta^{\nu\rho}P^\mu) \\ [\, J^{\mu\nu}\, ,\, \widetilde{P}^\lambda\,] &= -i(\eta^{\mu\lambda}\widetilde{P}^\nu - \eta^{\nu\lambda}\widetilde{P}^\mu) \end{aligned} \tag{13}$$

を満たす時、$T^{\rho\lambda} \equiv P^\rho \widetilde{P}^\lambda$ は次のテンソルの変換性

$$[\, J^{\mu\nu}\, ,\, T^{\rho\lambda}\,] = -i(\eta^{\mu\rho}T^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}T^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}T^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}T^{\rho\mu}) \tag{14}$$

に従うことを示す。

$$\begin{aligned} [\, J^{\mu\nu}\, ,\, T^{\rho\lambda}\,] &= [\, J^{\mu\nu}\, ,\, P^\rho \widetilde{P}^\lambda\,] \\ &= [\, J^{\mu\nu}\, ,\, P^\rho\,]\widetilde{P}^\lambda + P^\rho[\, J^{\mu\nu}\, ,\, \widetilde{P}^\lambda\,] \\ &\qquad (\because\ [\, X\, ,\, AB\,] = [\, X\, ,\, A]B + A[\, X\, ,\, B\,]\,) \\ &\overset{(13)}{=} -i(\eta^{\mu\rho}P^\nu - \eta^{\nu\rho}P^\mu)\widetilde{P}^\lambda - iP^\rho(\eta^{\mu\lambda}\widetilde{P}^\nu - \eta^{\nu\lambda}\widetilde{P}^\mu) \\ &= -i(\eta^{\mu\rho}P^\nu\widetilde{P}^\lambda - \eta^{\nu\rho}P^\mu\widetilde{P}^\lambda + \eta^{\mu\lambda}P^\rho\widetilde{P}^\nu - \eta^{\nu\lambda}P^\rho\widetilde{P}^\mu) \\ &= -i(\eta^{\mu\rho}T^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}T^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}T^{\rho\nu} - \eta^{\nu\lambda}T^{\rho\mu}) \end{aligned} \tag{15}$$

(!)

$T^{\rho\lambda}$ を $J^{\rho\lambda}$ に置き換えたものが、check 14.1 で確かめた (12) に他ならない。

check 14.3

(14.8) ∼ (14.17) の交換関係をポアンカレ代数 (14.1) から導き、それぞれの式に書かれている物理的意味を確認してみよう。

この問題の目的は 2 つある。1 つは、(ローレンツ不変性ではなく) 空間回転の不変性しか認識していなければ、教科書本文に書かれた交換関係 (14.8) ∼ (14.17) を個別に書き下さなければならないということだ。そのときは、これらの間に隠れた関係 (ローレンツ不変

性）を見過ごしていることになる。一方、ローレンツ不変性を理解していれば、教科書本文の (14.8) ～ (14.17) は、たった 3 つの交換関係

$$[\,P^\mu\,,\,P^\nu\,]=0 \tag{16}$$

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,P^\rho\,]=-i(\eta^{\mu\rho}P^\nu-\eta^{\nu\rho}P^\mu) \tag{17}$$

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,J^{\rho\lambda}\,]=-i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda}-\eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda}+\eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu}-\eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu}) \tag{18}$$

にすべて収めることができる。教科書本文の (14.8) ～ (14.17) はそれぞれ独立なものではなく、いくつかが組み合わさって (16) ～ (18) の形にまとまるべきものだったのである。

2 つ目の目的は、交換関係の物理的意味をきちんと理解することである。P^μ は時空並進の生成子、$J^{\mu\nu}$ のローレンツ変換の生成子で、これらの交換関係はポアンカレ代数を構成し、(16) ～ (18) の交換関係で与えられる。これはこれですっきりとしてよいのだが、これだけではポアンカレ代数の理解としては不十分だ。$P^\mu, J^{\mu\nu}$ はそれぞれ細かく見てみると

$$\begin{aligned}
H&=P^0 &&:\ \text{エネルギー}\\
\boldsymbol{P}&=(P^1,P^2,P^3) &&:\ \text{運動量}\\
\boldsymbol{J}&=(J^{23},J^{31},J^{12}) &&:\ \text{角運動量}\\
\boldsymbol{K}&=(J^{01},J^{02},J^{03}) &&:\ \text{ローレンツブースト}
\end{aligned}$$

という物理的意味を持つ。これらの物理量が満たす交換関係の意味を知るには、教科書本文に書かれているように、ポアンカレ代数を $1+3$ 次元分解した (14.8) ～ (14.17) を書き下して、それぞれ交換関係の意味を個別に理解する必要がある。こちらの理解も重要である。

最後に、ポアンカレ代数 (16) ～ (18) と教科書本文の (14.8) ～ (14.17) の対応を下に示しておく。

$$\begin{aligned}
[\,P^\mu\,,\,P^\nu\,]=0 \quad &\xrightarrow{\mu=\nu=0} \quad [\,H\,,\,H\,]=0\\
&\xrightarrow{\mu=0,\,\nu=i} \quad [\,H\,,\,P^i\,]=0\\
&\xrightarrow{\mu=i,\,\nu=j} \quad [\,P^i\,,\,P^j\,]=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\,J^{\mu\nu}\,,\,P^\rho\,]=-i(\eta^{\mu\rho}P^\nu-\eta^{\nu\rho}P^\mu) \quad &\xrightarrow{(\mu\nu)=(23),\,(31),\,(12),\,\rho=0} \quad [\,J^i\,,\,H\,]=0\\
&\xrightarrow{\mu=0,\,\nu=i,\,\rho=0} \quad [\,K^i\,,\,H\,]=-iP^i\\
&\xrightarrow{(\mu\nu)=(23),\,(31),\,(12),\,\rho=j} \quad [\,J^i\,,\,P^j\,]=i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}P^k\\
&\xrightarrow{\mu=0,\,\nu=i,\,\rho=j} \quad [\,K^i\,,\,P^j\,]=-i\delta^{ij}H
\end{aligned}$$

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,J^{\rho\lambda}\,]=-i(\eta^{\mu\rho}J^{\nu\lambda}-\eta^{\nu\rho}J^{\mu\lambda}+\eta^{\mu\lambda}J^{\rho\nu}-\eta^{\nu\lambda}J^{\rho\mu})$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{(\mu\nu),\,(\rho\lambda)=(23),\,(31),\,(12)} \quad [\,J^i\,,\,J^j\,]=i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}J^k\\
&\xrightarrow{(\mu\nu)=(23),\,(31),\,(12),\,\rho=0,\,\lambda=j} \quad [\,J^i\,,\,K^j\,]=i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}K^k\\
&\xrightarrow{\mu=0,\,\nu=i,\,\rho=0,\,\lambda=j} \quad [\,K^i\,,\,K^j\,]=-i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon^{ijk}J^k
\end{aligned}$$

check 14.4

(14.28) が成り立つことを、直接計算で確かめてみよう。

【ヒント】 $\|J^{\pm}|j,\pm j\rangle\|^2 = \langle j,\pm j|\,J^{\mp}J^{\pm}\,|j,\pm j\rangle = 0$（複合同順）を示せばよい。このとき、$\boldsymbol{J}^2 = J^-J^+ + J^+J^- + (J^3)^2$, $[J^+, J^-] = J^3$、および (14.22) を用いよ。

ここでは、

$$J^+\,|j,j\rangle = 0 \tag{19}$$

$$J^-\,|j,-j\rangle = 0 \tag{20}$$

を証明する。そのために、ヒントに書かれている次の関係

$$\boldsymbol{J}^2 = J^-J^+ + J^+J^- + (J^3)^2 \tag{21}$$

$$[\,J^+\,,\,J^-\,] = J^3 \qquad \big(J^{\pm} \equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}(J^1 \pm iJ^2)\big) \tag{22}$$

および

$$\boldsymbol{J}^2\,|j,m\rangle = j(j+1)\,|j,m\rangle \tag{23}$$

$$J^3\,|j,m\rangle = m\,|j,m\rangle \tag{24}$$

を用いる。

以下では (19) と (20) を直接導くのではなく、それらのノルムがゼロ、すなわち

$$\|J^+\,|j,j\rangle\,\|^2 = \langle j,j|J^-J^+|j,j\rangle = 0 \tag{25}$$

$$\|J^-\,|j,-j\rangle\,\|^2 = \langle j,-j|J^+J^-|j,-j\rangle = 0 \tag{26}$$

を示す。

(!)

$$\|\,|\psi\rangle\,\|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; |\psi\rangle = 0 \tag{27}$$

まず初めに (25) を示す。

$$\begin{aligned}
\|J^+\,|j,j\rangle\,\|^2 &= \langle j,j|J^-J^+|j,j\rangle \qquad (\because (J^+)^\dagger = J^-)\\
&= \langle j,j|\,\tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{J}^2 - J^3 - (J^3)^2\big)\,|j,j\rangle\\
&\quad\left(\begin{array}{l}\because (21) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{J}^2 = J^-J^+ + \underbrace{J^+J^-}_{J^-J^+ + J^3\ (\because(22))} + (J^3)^2\\
\qquad\qquad\quad = 2J^-J^+ + J^3 + (J^3)^2\\
\qquad\quad \Rightarrow\; J^-J^+ = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{J}^2 - J^3 - (J^3)^2\big)\end{array}\right)\\
&= \langle j,j|\,\tfrac{1}{2}\big(j(j+1) - j - (j)^2\big)\,|j,j\rangle \quad (\because (23),\,(24)\,)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{28}$$

次に (26) を示す。

$$
\begin{aligned}
\| J^- \, |j,-j\rangle \, \|^2 &= \langle j,-j|J^+J^-|j,-j\rangle \qquad (\because\ (J^-)^\dagger = J^+) \\
&= \langle j,-j|\,\tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{J}^2 + J^3 - (J^3)^2\bigr)\,|j,-j\rangle \\
&\qquad \left(
\begin{aligned}
\because\ (21)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{J}^2 &= \underbrace{J^-J^+}_{J^+J^- - J^3\ (\because (22))} + J^+J^- + (J^3)^2 \\
&= 2J^+J^- - J^3 + (J^3)^2 \\
\Rightarrow\ J^+J^- &= \tfrac{1}{2}\bigl(\boldsymbol{J}^2 + J^3 - (J^3)^2\bigr)
\end{aligned}
\right) \\
&= \langle j,-j|\,\tfrac{1}{2}\bigl(j(j+1) + (-j) - (-j)^2\bigr)\,|j,-j\rangle \quad (\because\ (23), (24)\,) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

check 14.5

交換関係 (14.30) から $J^3P^\pm = P^\pm(J^3 \pm 1)$（ただし、$P^\pm \equiv P^1 \pm iP^2$）が成り立つことを確かめ、一般にテイラー展開可能な任意関数 $f(J^3)$ に対して、

$$
f(J^3)\,P^\pm = P^\pm\,f(J^3 \pm 1) \tag{14.36}
$$

が成り立つことを証明せよ。また、$f(J^3) = e^{i\theta J^3}$ と選んだ場合が、(14.33) の証明を与えることを示してみよう。

【ヒント】 この問題から (14.36) の意味が理解できる。$P^\pm$ は J^3 に対する生成消滅演算子とみなせ、J^3 の固有値を ± 1 だけ変える。したがって、J^3 が $P^\pm$ の左から右へ通過したとき、$J^3 \to J^3 \pm 1$ に変化したと見なすことができる。

まず初めに

$$
[\,J^3\,,\,P^1\,] = iP^2, \quad [\,J^3\,,\,P^2\,] = -iP^1, \quad [\,P^1\,,\,P^2\,] = 0 \tag{30}
$$

から

$$
J^3P^\pm = P^\pm(J^3 \pm 1) \qquad (P^\pm \equiv P^1 \pm iP^2) \tag{31}
$$

を導く。

$$
\begin{aligned}
J^3P^\pm &= J^3(P^1 \pm iP^2) \\
&= [\,J^3\,,\,P^1\,] + P^1J^3 \pm i\bigl([\,J^3\,,\,P^2\,] + P^2J^3\bigr) \\
&\overset{(30)}{=} (P^1 \pm iP^2)J^3 \pm (P^1 \pm iP^2) \\
&= P^\pm(J^3 \pm 1) \\
&\Longrightarrow\ (31)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

次に、テイラー級数展開可能な任意関数 $f(J^3)$ に対して、

$$
f(J^3)P^\pm = P^\pm f(J^3 \pm 1) \tag{33}
$$

を導く。まず、$f(J^3)$ をテイラー級数展開しておく。

$$f(J^3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(J^3)^n \tag{34}$$

これを用いて (33) の左辺を変形していく。

$$\begin{aligned}
f(J^3)P^{\pm} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(J^3)^n\right)P^{\pm}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\underbrace{J^3\dots J^3J^3}_{n}P^{\pm}\\
&\overset{(31)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\underbrace{J^3\cdots J^3}_{n-1}P^{\pm}(J^3\pm 1)\\
&\overset{(31)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\underbrace{J^3\cdots J^3}_{n-2}P^{\pm}(J^3\pm 1)^2\\
&\overset{(31)}{=} \dots\\
&\overset{(31)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}P^{\pm}(J^3\pm 1)^n\\
&= P^{\pm}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(J^3\pm 1)^n\right)\\
&\overset{(34)}{=} P^{\pm}f(J^3\pm 1)\\
&\Longrightarrow\ (33)
\end{aligned} \tag{35}$$

最後に、(33) で $f(J^3)=e^{i\theta J^3}$ と選んだ場合、

$$e^{i\theta J^3}\begin{pmatrix}P^1\\P^2\end{pmatrix}e^{-i\theta J^3}=\begin{pmatrix}P^1\cos\theta-P^2\sin\theta\\P^1\sin\theta+P^2\cos\theta\end{pmatrix} \tag{36}$$

の証明を与えることを示す。そのために、(33) で、$f(J^3)=e^{i\theta J^3}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&e^{i\theta J^3}P^{\pm}=P^{\pm}e^{i\theta(J^3\pm1)}\\
&\quad\Longrightarrow\ e^{i\theta J^3}P^{\pm}e^{-i\theta J^3}=P^{\pm}e^{\pm i\theta}\\
&\quad\Longrightarrow\ \begin{cases}e^{i\theta J^3}(P^1+iP^2)e^{-i\theta J^3}=(P^1+iP^2)e^{i\theta}\\ e^{i\theta J^3}(P^1-iP^2)e^{-i\theta J^3}=(P^1-iP^2)e^{-i\theta}\end{cases}\\
&\quad\Longrightarrow\ \begin{cases}e^{i\theta J^3}P^1e^{-i\theta J^3}=\frac{1}{2}\left\{(P^1+iP^2)e^{i\theta}+(P^1-iP^2)e^{-i\theta}\right\}\\ e^{i\theta J^3}P^2e^{-i\theta J^3}=\frac{1}{2i}\left\{(P^1+iP^2)e^{i\theta}-(P^1-iP^2)e^{-i\theta}\right\}\end{cases}\\
&\quad\Longrightarrow\ \begin{cases}e^{i\theta J^3}P^1e^{-i\theta J^3}=P^1\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)-P^2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\\ e^{i\theta J^3}P^2e^{-i\theta J^3}=P^1\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)+P^2\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\end{cases}\\
&\quad\Longrightarrow\ \begin{cases}e^{i\theta J^3}P^1e^{-i\theta J^3}=P^1\cos\theta-P^2\sin\theta\\ e^{i\theta J^3}P^2e^{-i\theta J^3}=P^1\sin\theta+P^2\cos\theta\end{cases}\\
&\quad\Longrightarrow\ (36)
\end{aligned} \tag{37}$$

check 14.6

座標演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ が存在して、交換関係 $[\hat{p}, \hat{x}] = -i$ を満たしているとする。このとき、$\hat{p}$ の固有状態を $\hat{p}\,|k\rangle = k\,|k\rangle$ としたとき、固有値 k の取りうる範囲は実数全体、すなわち、$-\infty < k < \infty$ となることを示してみよう。

【ヒント】 $\hat{p}$ の 1 つの固有状態を $|k_0\rangle$ としたとき、任意の実数 a に対して状態 $e^{ia\hat{x}}|k_0\rangle$ は $\hat{p}$ の固有値 k_0+a を持つ固有状態に比例していることを示せ。

以下では、交換関係 $[\hat{p}, \hat{x}] = -i$ を満たす運動量演算子 $\hat{p}$（座標演算子も同様）の固有値の取りうる範囲は実数全体であることを示す。

運動量演算子 $\hat{p}$ の固有値 k_0 を持つ固有状態が存在したとしよう。

$$\hat{p}\,|k_0\rangle = k_0\,|k_0\rangle \tag{38}$$

この固有状態 $|k_0\rangle$ に $e^{ia\hat{x}}$（a は任意の実数）をかけた状態

$$|k\rangle \equiv e^{ia\hat{x}}\,|k_0\rangle \tag{39}$$

を考えてみよう。この時、$|k\rangle$ は $\hat{p}$ の固有状態になっていることが、次のようにして確かめられる。

$$\begin{aligned}
\hat{p}\,|k\rangle &\overset{(39)}{=} \hat{p}\,e^{ia\hat{x}}\,|k_0\rangle \\
&= e^{ia\hat{x}}\,\underbrace{e^{-ia\hat{x}}\hat{p}\,e^{ia\hat{x}}}_{\hat{p}+a}\,|k_0\rangle \qquad (\because\ e^{ia\hat{x}}\,e^{-ia\hat{x}} = 1) \\
&= e^{ia\hat{x}}(\hat{p}+a)\,|k_0\rangle \\
&\overset{(38)}{=} e^{ia\hat{x}}(k_0+a)\,|k_0\rangle \\
&= (k_0+a)\,\underbrace{e^{ia\hat{x}}\,|k_0\rangle}_{|k\rangle} \qquad (\because\ k_0,\,a\ \text{は}\ c\ \text{数。}) \\
&= (k_0+a)\,|k\rangle
\end{aligned} \tag{40}$$

3 番目の等号で、関係式 $e^{-ia\hat{x}}\hat{p}\,e^{ia\hat{x}} = \hat{p}+a$ を用いた（後で証明する）。上の結果から、$|k\rangle = e^{ia\hat{x}}\,|k_0\rangle$ は $\hat{p}$ の固有値 k_0+a を持つ固有状態であることがわかった。すなわち、

$$|k\rangle = e^{ia\hat{x}}\,|k_0\rangle = |k_0+a\rangle \tag{41}$$

となる。[1] a は任意の実数に取ることができるので、($\hat{p}$ の固有状態が存在するならば）運動量演算子の固有値 k（$\hat{p}\,|k\rangle = k\,|k\rangle$）の取りうる範囲は、実数全体

$$-\infty < k < \infty \tag{42}$$

となる。

同じ議論は、座標演算子 $\hat{x}$ に適用できる。$\hat{x}$ の固有値 x_0 を持つ固有状態 $|x_0\rangle$ が存在したとする。すなわち

$$\hat{x}\,|x_0\rangle = x_0\,|x_0\rangle \tag{43}$$

[1] 正確には、(41) の右辺には位相 $e^{i\theta}$ の不定性があるが、ここでは 1 にとった。

この固有状態 $|x_0\rangle$ に $e^{-ib\hat{p}}$ をかけた状態 $e^{-ib\hat{p}}\,|x_0\rangle$ は、$\hat{x}$ の固有値 x_0+b を持つ固有状態であることが、以下のように示される。

$$\hat{x}\left(e^{-ib\hat{p}}\,|x_0\rangle\right) = e^{-ib\hat{p}}\,\underbrace{e^{ib\hat{p}}\,\hat{x}\,e^{-ib\hat{p}}}_{\hat{x}+b}\,|x_0\rangle \tag{44}$$

$$= e^{-ib\hat{p}}(\hat{x}+b)\,|x_0\rangle \tag{45}$$

$$\overset{(43)}{=} (x_0+b)\left(e^{-ia\hat{x}}\,|k_0\rangle\right) \tag{46}$$

したがって、運動量の場合と同様の議論によって、($\hat{x}$ の固有状態が存在するならば）座標演算子 $\hat{x}$ の固有値 x（$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle$）の取りうる範囲は、実数全体

$$-\infty < x < \infty \tag{47}$$

となる。

最後に (40) で用いた公式

$$e^{-ia\hat{x}}\,\hat{p}\,e^{ia\hat{x}} = \hat{p}+a \tag{48}$$

を証明しておこう。この式の意味することは、$e^{-ia\hat{x}}$ は運動量 $\hat{p}$ の並進 $(\hat{p}\to\hat{p}+a)$ を引き起こすユニタリー演算子ということである。$f(a) = e^{-ia\hat{x}}\,\hat{p}\,e^{ia\hat{x}}$ とおいて a で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{df(a)}{da} &= \frac{d}{da}\left(e^{-ia\hat{x}}\,\hat{p}\,e^{ia\hat{x}}\right)\\
&= \left(\frac{d}{da}e^{-ia\hat{x}}\right)\hat{p}\,e^{ia\hat{x}} + e^{-ia\hat{x}}\hat{p}\left(\frac{d}{da}e^{ia\hat{x}}\right)\\
&= e^{-ia\hat{x}}(-i\hat{x})\,\hat{p}\,e^{ia\hat{x}} + e^{-ia\hat{x}}\,\hat{p}\,(i\hat{x})\,e^{ia\hat{x}} \qquad (\because\ e^{-ia\hat{x}}\text{ と }\hat{x}\text{ は可換。})\\
&= e^{-ia\hat{x}}(-i)\underbrace{[\,\hat{x}\,,\,\hat{p}\,]}_{i}e^{ia\hat{x}}\\
&= e^{-ia\hat{x}}e^{ia\hat{x}}\\
&= 1
\end{aligned} \tag{49}$$

となる。また、

$$f(0) = \hat{p} \tag{50}$$

なので、(49) と (50) を満たす解は

$$f(a) = \hat{p}+a \tag{51}$$

で与えられることがわかる。(1 階微分方程式の解は、初期条件を 1 つ与えれば一意的に決まる。)

!

ここでの解析から、運動量演算子 $\hat{p}$ と座標演算子 $\hat{x}$ の固有値は実数全体の値を取ることがわかった。とすると、円周上の量子力学の場合は一体どうなるのだろうか？ 例えば、半径 R の円周上に束縛された粒子の運動量 k は離散的な値

$$k = \frac{n\hbar}{R} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{52}$$

をとり、座標は

$$0 \le x < 2\pi R \tag{53}$$

の値をとるので、実数全体の値は取らない。この問題の解決は、『「量子力学が間違っている」は間違っている』の解決のところで提起した円周上の量子力学系の問題の解決と本質的に同じものである。是非、読者自身で納得のいく解答を導き出してほしい。

check 14.7

理論に超対称性が存在すると、ポアンカレ代数は**超ポアンカレ代数 (super Poincaré algebra)** に拡張される。このとき、ポアンカレ代数に次の（反）交換関係が新たに加わることになる。

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,Q^a\,] = -\frac{1}{2}\big(\sigma^{\mu\nu}Q\big)^a, \quad [\,P^\mu\,,\,Q^a\,] = 0, \quad \{\,Q^a\,,\,\overline{Q}_b\,\} = 2(\gamma_\mu)^a{}_b P^\mu$$

ここで、Q^a $(a = 1, \cdots, 4)$ はマヨラナスピノルで、超対称変換の生成子（超電荷）である。自明でないのは 3 番目の反交換関係で（これは check 12.10 で出会った）、超対称変換を続けて 2 度行う操作は時空並進に等しいことを意味する。最初の 2 つの交換関係の物理的意味は明確だ。それは何か、答えてほしい。

超ポアンカレ代数に見られる次の交換関係

$$[\,J^{\mu\nu}\,,\,Q^a\,] = -\frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu}Q)^a \tag{54}$$

$$[\,P^\mu\,,\,Q^a\,] = 0 \tag{55}$$

の物理的意味は、$J^{\mu\nu}$ と P^μ がそれぞれローレンツ変換と時空座標並進の生成子であることを理解していれば答えられるはずだ。

(54) は、ローレンツ変換の下で Q^a がスピノルの変換性を持つことを意味している。逆に言えば、超電荷 Q^a $(a = 1, 2, 3, 4)$ はスピノルなので、ローレンツ変換の下でスピノルの変換性 (54) に従わなければならないのである。（第 5 章で見たように、ローレンツ変換の下でスピノルは、$\psi \to S(\Lambda)\psi \simeq (I_4 - \frac{i}{2}\Delta\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2})\psi$ で与えられたことを思い出そう。）

(55) は、スピノル Q^a（超電荷）が時空の座標並進の下で不変であること（(55) の右辺がゼロ）を意味している。特に $\mu = 0$ の場合は、超電荷 Q^a が保存量 $\big(\frac{dQ}{dt} \propto [H, Q] = 0\big)$ であることを保証する。また、Q^a が超対称変換の生成子であることに注目すると、超対称変換の下でハミルトニアン H と運動量 $\boldsymbol{P}$ が不変であることを意味する。系の時間発展（ダイナミクス）を決めるハミルトニアンが超対称変換の下で不変であることは、この系に超対称性が存在することを意味する。