Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2015

MARIA MANUELA CORREIA RODRIGUES

MAGIA MATEMÁTICA COM CARTAS

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2015

MARIA MANUELA CORREIA RODRIGUES

MAGIA MATEMÁTICA COM CARTAS

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira, Professor Auxiliar, e da Professora Doutora Andreia Oliveira Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O júri

Presidente

Professor Doutor Paolo Vettori
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Nuno Rafael Oliveira Bastos
Professor Adjunto do Instituto Politécnico de Viseu

Professor Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (Orientador)

Agradecimentos

Aos meus orientadores pela disponibilidade que sempre demonstraram, pelas sugestões e críticas construtivas que possibilitaram a concretização deste trabalho.

Obrigada pelas palavras de incentivo que me deram alento nos momentos mais difíceis.

A todos os elementos da minha família que me ajudaram e compreenderam a minha dedicação a este projeto.

palavras-chave Magia, Matemática, baralho de cartas e truques.

resumo

Nesta dissertação será feita uma incursão pelo mundo do ilusionismo, designadamente ao mundo da cartomagia. Mostraremos como é possível, sem qualquer baralho especial e sem truques “na manga”, realizar efeitos cartomágicos. Para tal, bastará ter na cartola alguns conhecimentos de Matemática.

Como professores, será possível, com a realização de alguns truques aqui apresentados, não só maravilhar os alunos, mas também desenvolver a sua curiosidade científica fazendo apelo ao seu pensamento matemático. Tentaremos demonstrar que o que nos parece muitas vezes impossível ou ilusório é afinal possível e real, e tudo isto, apenas com a magia da Matemática.

keywords Magic, Mathematics, playing cards and magical tricks

abstract This dissertation will dive into the world of illusion, namely the world of card manipulation.

We will show how it is possible to produce magical card manipulation effects, without any special pack of cards nor "up the sleeve tricks".

To do so, it will only be necessary to have some mathematical knowledge in the top hat.

By presenting some tricks here depicted, teachers, will, not only marvel the students, but also develop their scientific curiosity, appealing to their mathematical thinking. We will try to demonstrate that what often seems impossible or illusory is, after all, possible and real, and made up of Mathematical magic.

Índice

Índice de figuras

Introdução

“Aquele que deseja estudar ou exercer Magia,
deve cultivar a Matemática”
Matila Ghyka (1881-1965)

A Matemática e a magia não parecem ter muito em comum, talvez devido ao facto da Matemática ser considerada a ciência do raciocínio lógico enquanto a magia é definida como a arte de produzir ilusões. Um dos objetivos desta dissertação é mostrar que esta aparente incompatibilidade é apenas ilusória! Veremos que a Matemática possibilita a criação de efeitos mágicos surpreendentes e que, por sua vez, a magia pode ser uma mais-valia para a Matemática, já que o estudo de um efeito mágico pode converter-se num problema matemático e proporcionar uma fonte de raciocínio e de investigação.

Se um professor conseguir conciliar estas duas “artes”, poderá não só fascinar os seus alunos com alguns truques de magia, como desenvolver as noções matemáticas que fundamentam a sua execução. Outro dos objetivos deste trabalho é mostrar que, em contexto de Matemática Recreativa, a utilização de um simples baralho de cartas possibilita não só a criação de um cenário mágico como permite ilustrar a Matemática inerente aos truques efetuados.

Nesta dissertação serão explorados, especificamente, os baralhamentos e os truques de magia que recorrem a um simples baralho de cartas. Para tal, o trabalho será dividido em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, será apresentada uma breve resenha histórica das cartas de jogar e algumas das suas curiosidades, que resultaram de uma pesquisa bibliográfica sobre a origem do baralho de cartas.

No segundo capítulo serão abordados alguns conceitos básicos de Matemática Discreta, nomeadamente no que se refere à Teoria dos Números, aos elementos de Combinatória e de Teoria dos Grafos. Estas noções serão imprescindíveis à compreensão dos procedimentos realizados nos baralhamentos com cartas e nos truques apresentados posteriormente. As definições e as diversas propriedades apresentadas resultaram de uma pesquisa bibliográfica sobre as temáticas referentes à Matemática Discreta.

No terceiro capítulo, explorar-se-ão algumas das formas de baralhar as cartas de jogar. Esta operação, indispensável em quase todos os jogos com cartas, pretende garantir o caráter aleatório de uma partida e a equidade entre os jogadores. No entanto, quando se trata de magia, o baralhamento pode ser efetuado para criar a ilusão de que o baralho utilizado não está preparado ou ainda para "encaminhar" uma carta para uma determinada posição. Veremos como os baralhamentos de cartas possibilitam a criação de truques de prestidigitação surpreendentes e apresentaremos alguns dos que se baseiam em pressupostos matemáticos.

Por fim, no quarto capítulo, será apresentada uma panóplia de truques com cartas, em que a Matemática proporciona verdadeiros momentos de pura magia. Explicaremos como se executam por parte do "mágico" e serão explanados os conceitos matemáticos que alicerçam a sua execução. Os truques apresentados não serão afetos a nenhum ano de escolaridade, pretendendo-se assim que os professores, que desejem utilizar este recurso pedagógico nas suas aulas, possam selecionar, adaptar ou mesmo melhorar as nossas propostas. Os diferentes tipos de baralhamentos bem como o conjunto de truques apresentados resultaram de uma pesquisa bibliográfica e de algumas sugestões dos orientadores que dinamizam o "Circo Matemático" da Universidade de Aveiro.

CAPÍTULO 1

Um pouco de história

Neste capítulo será abordada um pouco da história do baralho de cartas e algumas das suas singularidades. Na secção 1.1, começaremos por fazer um resumo da evolução histórica do baralho de cartas até aos nossos dias, tendo como referência [18]. Na secção seguinte, será feita uma breve referência histórica ao baralho de cartas "português", baseada nos livros [24] e [26]. Na última secção serão apresentadas algumas curiosidades do baralho de cartas mais utilizado (baralho francês), que poderão ser consultadas em [34] e [54].

1.1 A origem do baralho de cartas

A origem das "cartas de jogar" ou "baralho" continua a ser uma incerteza. O Extremo Oriente será a origem mais provável uma vez que, no museu Topkapi de Istambul, encontra-se um baralho de cartas mameluco, do século XIII, quase completo (Fig. 1.1), pintado à mão, onde é possível observar os quatro "naipes" - cimitarras (espadas), bastões, dirhams (moedas) e taças.

Fig. 1.1 – Cartas de origem mameluca no museu Topkapi de Istambul [18]

Estes símbolos poderão ter servido de modelo aos símbolos “latinos” (Fig. 1.2) ainda utilizados em Itália, em Espanha e no “Tarô de Marselha”. Foi então sob esta forma simples, de quatro “naipes”, que as cartas vindas do mundo árabe surgiram na Europa, na segunda metade do século XIV. É um pouco difícil precisar o local ou locais onde este novo jogo começou a ser apreciado pelos europeus. Tudo indica que poderá ter sido em Valência (Espanha), em Pisa, Florença e Veneza (Itália). Destes portos, rapidamente se alastrou para várias zonas, nomeadamente Norte de Itália, vales germânicos, Borgonha, entre outras. Existem alguns registos datados de 1377 que descrevem um conjunto de folhas, divididas em quatro “naipes”, dotadas de uma hierarquia entre três personagens – um rei e duas outras figuras subalternas, seguindo-se as cartas com valores de um a dez, ou seja, 52 cartas. Não existem exemplares desses primeiros baralhos europeus e a sua existência só é confirmada através de alguns textos de época.

No século XV, a introdução da técnica da xilogravura na Europa e a difusão do papel permitiram a reprodução mecânica de imagens e a utilização de materiais mais acessíveis à população. A xilografia era utilizada para a impressão de cartas de baralho, ilustrações para livros (iluminuras) e também para reproduzir documentos religiosos. Nesse século, coexistiram as cartas de luxo, pintadas à mão por verdadeiros artistas, e as cartas comuns, impressas em papel.

Rapidamente os jogadores foram percebendo que as figuras das cartas tinham que ser mais perceptíveis, o que não era compatível com o esplendor e com o aprimorado dos desenhos. Assim, surge a necessidade de simplificar e uniformizar. As personagens e os símbolos dos naipes foram padronizados. Cada região ou grupo cultural criou os seus próprios símbolos e disposições. Os historiadores distinguem três famílias de símbolos (Fig. 1.2): símbolos “latinos” (espadas, paus, moedas, taças) utilizados no sul da Europa; símbolos “germânicos” (folhas, bolotas, guizos, copas) utilizados em países de língua alemã; símbolos “franceses” (espadas, paus, ouros, copas).

Fig. 1.2 – Os três sistemas de naipes, respetivamente, da esquerda para a direita: símbolos “latinos”, “germânicos” e “franceses” [18]

Por volta de 1460-1470, os “impressores de cartas” franceses verificaram que poderiam imprimir os símbolos das cartas numeradas, apenas com duas cores, preto e vermelho, utilizando apenas um carimbo. Apesar de esta simplificação reduzir custos, não se difundiu rapidamente, tendo sido utilizada, inicialmente, apenas nos baralhos comuns. Nos meados do século XVIII, um “desenhador de cartas” de Agen (França) teve a ideia de desenhar as figuras de forma simétrica, para evitar que os jogadores tivessem que as virar durante o jogo. Esta ideia não foi muito bem aceite pelo governo francês, de tal forma que proibiu estas cartas nos primeiros tempos. No entanto, esta ideia foi aproveitada pelos espanhóis e ingleses. Até ao início do século XIX, o baralho francês foi-se expandido por toda a Europa, por ter naipes mais simples e fáceis de imprimir. No final do século XIX, os joqueres foram introduzidos no baralho americano e acrescentados oficialmente no baralho francês no início do século XX.

1.2 Período em que o jogo era interdito

Em Portugal, como na Europa, o jogo era interdito, especialmente o jogo de dados. No entanto, esta proibição não conseguiu impedir a sua propagação clandestina. A legislação foi então aligeirada, sendo punitiva apenas para o jogo a dinheiro. Podia jogar-se “a molhados”, isto é, fazer apostas com géneros alimentícios: vinho, pão, fruta, etc., ou seja, podia jogar-se “a feijões”. Em Portugal, a paixão pelo jogo provocou, em todos os estratos sociais, algumas agruras. As classes aristocráticas hipotecaram-se e as classes médias acabaram frequentemente na miséria. Alguns autores teatrais, como Gil Vicente, deixaram-nos algumas memórias desse tempo, em que jogar às cartas era proibido. Descreviam-se e nomeavam-se alguns jogos de cartas praticados por classes populares: o trunfo, o trunfo esgalhado, a vaza e muitos outros. Outros textos literários relatam partidas que ficaram famosas por participarem reis, príncipes e grandes senhores. D. Manuel (1469-1521), contrariando as leis que interditavam o jogo e puniam os infractores, provindas da sua própria Chancelaria, patrocinava jogos com cartas em que toda a Corte participava. Para o efeito, D. Manuel ordenou a Garcia de Resende que escrevesse 48 trovas cortesãs (ver [26]) tantas quantas as cartas que constituíam o baralho corrente no Reino (12 cartas de cada naipe, nove numeradas e três figuras: rei, conde e sota), sendo que 24 eram destinadas às senhoras e as restantes aos homens; 12 de cada eram elogiosas e as outras 12 eram afrontosas. Depois de baralhadas, cada convidado tirava uma carta e lia a quadra que o destino lhe tinha reservado. Consoante a reação de cada pessoa à trova, assim se propagava a diversão. Parece-nos um jogo um pouco inocente mas, na realidade, as trovas eram muitos sagazes, aludindo muitas vezes a vícios e defeitos dos convidados (Fig. 1.3).

Durante o século XVI, no reinado de D. João III, foi criado um baralho com características nacionais, "*as cartas portuguesas do Dragão"* ou *"Dragões de Portugal".* O baralho era constituído por 48 cartas (o 10 não existia) em que cada Ás tinha desenhado uma serpente alada (ou dragão), os ouros eram representados por moedas, as copas por taças com tampa, os paus por cacetes desramados e entrecruzados e as espadas por espadas cruzadas (Fig. 1.4). Como figuras tínhamos o rei, o conde (valete) e a sota (a dama). Algumas cartas, como a sota de paus, o dois de paus e o seis de ouros, possuíam características muito próprias que foram desaparecendo ou mitigadas com o passar dos anos. Este baralho sobreviveu 400 anos e, com os Descobrimentos, expandiu-se em direção ao Oriente e ao Ocidente. No século XVI, os japoneses chamaram-lhe *karuta,* copiaram-no e fizeram algumas adaptações. As *cartas portuguesas do Dragão* deixaram de ser fabricadas em Portugal, em finais do século XIX, no entanto, a Alemanha e a Bélgica continuaram a sua produção, devido à sua forte procura nos mercados coloniais.

[Quatro de copas]

Tendes tanta gentileza
tanto ar na fala e rir
que quem vos senhora vir
nunca sentirá tristeza.
Fostes no mundo nascida
com graças tão escolhidas
que só por vos ter servida
daria duas mil vidas.

[Quatro de ouros]

Pareceis mal em janela
em serão muito pior
sois mais fria e sensabor
do que nunca vi donzela.
Vós fareis bem d´ensinar
as damas moças a ler
não a vestir nem falar
pois não o sabeis fazer.

[Três de paus]

Vossos dias já passaram
logo pareceis passado
sois das damas enjeitado
e nunca vos enjeitaram.
Sois mais pai que servidor
sois mais avô que galante
por isso dês hoje avante
deixai as damas senhor.

Fig.1.3 – Algumas das trovas escritas por Garcia de Resende, a mando do rei D. Manuel, para um jogo de cartas [26]

Hoje em dia, não existe, em Portugal, nenhum baralho português completo. Em Constância, foram descobertos dois baralhos portugueses incompletos, datados de finais do século XVI, num buraco de uma parede, durante umas obras numa quinta dessa região. O proprietário ofereceu algumas dessas cartas à Câmara Municipal de Constância. Existe ainda um colecionador que possui um livro do século XVIII, com artigos sobre magia e ilusionismo, onde alguns exemplares de cartas estão colados às folhas. No estrangeiro, existem vários exemplares em coleções particulares e em museus da especialidade.

Fig. 1.4 – Cartas portuguesas do Dragão [26]

1.3 Algumas curiosidades

Um olhar mais atento para as cartas de um baralho poderá revelar alguns detalhes curiosos! Por exemplo, o rei de espadas dirige o seu olhar para a direção oposta à dos outros três reis. O rei de copas é o único que não tem bigode! O valete de copas não segura uma espada mas sim uma folha! (Fig. 1.5) Existem outras mais! Alguns especialistas referem que estas pequenas particularidades poderão dever-se a erros de impressão ou às muitas impressões que foram tornando alguns detalhes pouco perceptíveis.

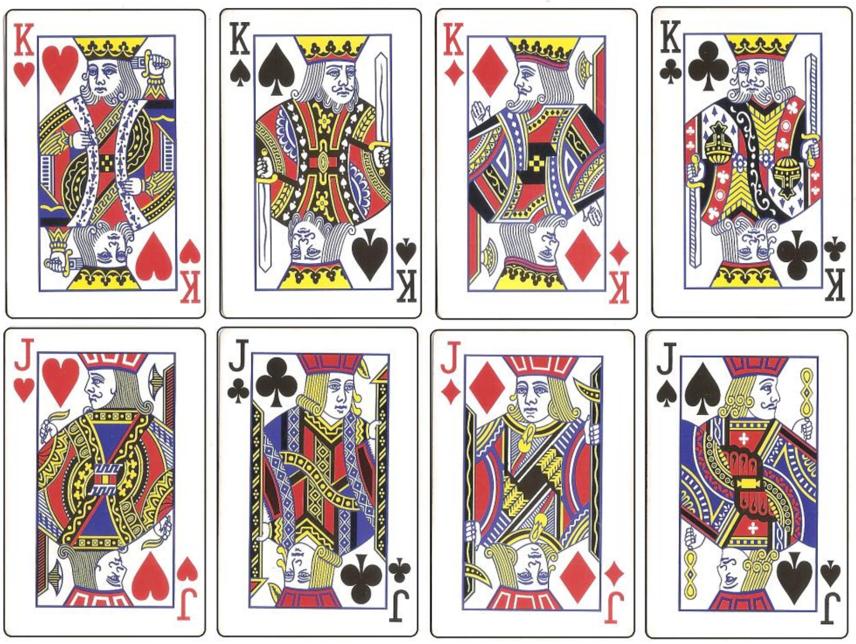


Fig. 1.5 – Algumas das figuras de um baralho francês

Mas existem outras singularidades! Alguns historiadores acreditam que a simbologia dos naipes não foi fruto do acaso mas sim uma forma de representar a sociedade estratificada da época:

- As espadas, símbolos da atividade guerreira, representavam a nobreza;
- As copas, simbolizadas por taças ou cálices, representavam o clero;
- Os ouros, simbolizados por moedas de ouro, representavam os burgueses;
- Os paus representavam o trabalho e, portanto, o povo.

Outras curiosidades estão relacionadas com o "nosso universo", como por exemplo:

- Os quatro naipes representam as quatro estações do ano;
- As 13 cartas de cada naipe representam os 13 ciclos lunares anuais;
- As 12 cartas com figuras (damas, valetes e reis) representam os 12 meses de um ano e os 12 signos do zodíaco;
- As 52 cartas representam as 52 semanas de um ano;
- A soma dos valores numéricos de todas as cartas de um baralho completo, sendo Valete =11, Dama =12 e Rei=13, é igual a 364. Se atribuirmos ao jóquer o valor 1, a soma será 365 que corresponde ao número de dias de um ano comum. Se o baralho tiver outro jóquer corresponde a um ano bissexto.

CAPÍTULO 2

Um pouco de Matemática

Neste capítulo serão abordadas algumas noções elementares de análise combinatória, cálculo de probabilidades, sistemas de numeração, congruência modular e grafos, necessárias para uma melhor compreensão dos procedimentos realizados nos baralhamentos e nos truques com cartas, que serão apresentados nos capítulos 3 e 4, respetivamente.

2.1 Análise combinatória

"A análise combinatória pretende desenvolver métodos que permitam contar, de forma indirecta o número de elementos de um conjunto, estando estes elementos agrupados sob certas condições" [42].

Neste tópico limitar-nos-emos a estudar alguns desses métodos de contagem em conjuntos finitos.

2.1.1 Permutações

Os conceitos, as definições e as propriedades apresentadas neste subtópico têm por base as referências [14] e [51].

Definição 2.1: Dado um conjunto A, com n elementos distintos, dá-se o nome de **permutações simples** ou sem repetição de n, às sequências formadas por esses n elementos, diferindo umas das outras apenas na ordem de colocação dos seus elementos. O número de permutações de n elementos é representado por P_n e o seu valor é dado por:

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Note-se que, por convenção, $0! = 1$.

Exemplo 1

Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, o número de permutações que se podem realizar com estes três elementos é igual a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. As seis sequências, que resultam da ordenação dos três elementos do conjunto, podem ser representadas na forma de lista:

$$(a\,b\,c)\ ,\qquad (a\,c\,b)\ ,\qquad (b\,a\,c)\ ,\qquad (b\,c\,a)\ ,\qquad (c\,a\,b)\ ,\qquad (c\,b\,a).$$

Uma permutação também pode ser considera uma função bijetiva de um conjunto sobre si mesmo. Assim sendo, a sua representação será diferente da apresentada anteriormente.

Para a mesma permutação usaremos duas notações diferentes como se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 2

Seja a permutação $f: A \to A,$ em que $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, tal que:

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 4 \text{ e } f(4) = 2.$$

Abreviadamente representa-se esta permutação da seguinte forma:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Na primeira linha, encontramos a representação da posição dos elementos de A antes da permutação. Na segunda linha, estão as respetivas imagens, ou seja, a posição dos elementos de A depois da permutação. Atendendo ao exemplo, podemos dizer que, depois de aplicada a permutação f, o elemento que se encontrava inicialmente na posição 2 passa para a posição 3.

Alternativamente, para a mesma permutação, usaremos a notação

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) \to (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3)$$

em que a sequência da direita contém, de forma ordenada (da primeira até à última posição) os elementos permutados. Neste caso, após a permutação ficamos com o número um na primeira posição, o quatro na segunda, o dois na terceira e o três na quarta. Note-se que nesta notação, os números representam os elementos do conjunto inicial e não as posições.

Definição 2.2: Seja S_n o conjunto de todas as permutações de $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Este conjunto possui $n!$ elementos e designa-se por **grupo simétrico** em A.

Exemplo 3

Escolhendo $n = 3$, temos S_3 que representa o conjunto de todas as possíveis permutações do conjunto $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$.

$$S_3 = \left\{ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

No conjunto S_n é possível definir a operação designada por composição de permutações, por se tratar de bijeções de um conjunto nele próprio.

Definição 2.3: Sejam f_1 e f_2 duas permutações de S_n. A **composta de $\boldsymbol{f_1}$ por $\boldsymbol{f_2}$**, é a função que se representa por $f_1 \circ f_2$ (lê-se: f_1 após f_2) e que se define por:

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1\big(f_2(x)\big) \ , \ \forall x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Exemplo 4

Sejam f_1 *e* $f_2 \in S_4$ definidas por*:*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

De referir que geralmente a composição de permutações não é comutativa, para $n \geq 3$. Utilizando o exemplo 4 constatamos este facto, pois

$$f_2 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \neq f_1 \circ f_2.$$

Em contrapartida, como a composição de funções é associativa podemos escrever que

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \ , \ \forall \, f, g, h \ \in S_n.$$

A permutação identidade, I, permutação que a cada elemento faz corresponder ele próprio, é o elemento neutro de S_n:

$$I \circ f = f \circ I = f \quad , \quad \forall \, f \in \ S_n.$$

No exemplo 4, a permutação identidade é:

$$I\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para cada permutação f, pertencente a S_n, existe o elemento inverso, que representaremos por f^{-1}, e que satisfaz a condição

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I.$$

Exemplo 5

Se $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ então $f_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Verificamos que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Definição 2.4: Um **ciclo** em S_n é uma permutação que fixa um determinado número de elementos de $A = \{1, 2, \dots n\}$, enquanto que os restantes se movem "ciclicamente".

Exemplo 6

Seja $f \in S_5$ definida por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Verificamos que a permutação f fixa os elementos 2 e 5, e nos restantes observamos um movimento circular

$$1 \underset{f}{\rightarrow} 3 \underset{f}{\rightarrow} 4 \underset{f}{\rightarrow} 1\ .$$

Podemos escrever a permutação f da seguinte forma

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\quad 3\quad 4)(2)(5).$$

Definição 2.5: Uma permutação que não fixa qualquer elemento de A é designada por **permutação cíclica** ou **circular**.

Definição 2.6: O **comprimento** de um ciclo é igual ao número de elementos que o compõe.

Definição 2.7: Dois ciclos dizem-se **disjuntos** se nenhum elemento é movido ao mesmo tempo por ambos.

Num ciclo, o primeiro elemento a ser representado não é importante, mas sim a ordem em que os elementos ocorrem; No exemplo 6, o ciclo $(1 \quad 3 \quad 4)$ poderia escrever-se $(3 \quad 4 \quad 1)$ ou $(4 \quad 1 \quad 3)$, uma vez que o movimento circular é o mesmo. A ordem em que apresentamos os ciclos também não é importante, uma vez que os ciclos são disjuntos.

No exemplo 6, podemos dizer que $(1 \quad 3 \quad 4)$ é um ciclo de comprimento 3. Habitualmente, os ciclos de comprimento 1 são suprimidos, subentendendo-se que os elementos que não aparecem em nenhum ciclo correspondem a ciclos de comprimento 1. Se não estiver definido o conjunto S_n, devem manter-se os ciclos de comprimento 1, para que não ocorram erros.

No exemplo 6

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 4)(2)(5) = (1 \quad 3 \quad 4).$$

Qualquer permutação pode então decompor-se como um produto de ciclos disjuntos. Esta decomposição é única, a não ser pela ordem dos seus ciclos.

Definição 2.8: A um ciclo de comprimento 2 chamamos **transposição.**

Definição 2.9: A **ordem** de uma permutação é o número mínimo de vezes que se deve efetuar a troca dos seus elementos até obtermos a permutação identidade.

Proposição 2.1: A ordem de uma permutação é igual ao mínimo múltiplo comum dos comprimentos dos ciclos disjuntos que a compõe.

Exemplo 7

Seja $f \in S_8$ definida por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 7)(2 \quad 6 \quad 4)(3 \ 8 \ 5)$$

A ordem de f é igual a 6 $(mmc(2,3) = 6)$. Confirmemos

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 8 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \; f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \; f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.10: Uma **subsequência crescente** de uma permutação é uma sequência de números consecutivos, de máximo comprimento.

Qualquer permutação de S_n pode ser decomposta, de forma única, por justaposição de subsequências crescentes.

Para encontrar as subsequências crescentes de uma permutação procedemos da seguinte forma: começamos por localizar, na 2ª linha, o elemento 1. Se o elemento 2 estiver antes, então (1) é uma subsequência crescente; caso contrário, procuramos o elemento 3. Se o elemento 3 estiver antes do elemento 2, então (1, 2) é uma subsequência crescente; caso contrário, procuramos o elemento 4, e assim sucessivamente até terminar o conjunto [8].

Exemplo 8

Seja $f \in S_6$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

As subsequências crescentes de f são (1, 2), (3, 4, 5), (6).

2.1.2 Arranjos

Para este subtópico foram tomadas como referências bibliográficas os livros [14] e [57].

Definição 2.11: Dados n elementos quaisquer, chamam-se **arranjos simples** (ou arranjos sem repetição) dos n elementos tomados p a p $(p \leq n)$, a todas as sequências ordenadas que é possível obter com p elementos distintos escolhidos arbitrariamente entre os n dados. O número de arranjos simples de n elementos, tomados p a p, representa-se por ${}^{n}A_p$ e o seu valor é dado por:

$$ {}^{n}A_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) $$

ou seja

$$ {}^{n}A_p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad , n, p \in \mathbb{N}_0, n \geq p. $$

Os arranjos simples de n elementos, tomados p a p, caracterizam-se por:

- terem p elementos, com $p \leq n$;
- não terem elementos repetidos;
- se diferenciarem pela ordem dos seus elementos.

Exemplo 9

De um baralho com 52 cartas, extraem-se sucessivamente 3 delas, sem reposição, e colocam-se, lado a lado, da esquerda para a direita, em cima de uma mesa. Nestas condições, o número de sequências de três cartas que se podem formar utilizando as 52 cartas dadas é igual ao número de arranjos simples de 52 elementos organizados 3 a 3. Assim, é possível formar

$$ {}^{52}A_3 = \frac{52!}{49!} = 52 \times 51 \times 50 = \ 132600 $$ sequências diferentes.

Note-se que quando $n = p$, obtém-se

$$ {}^{n}A_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n. $$

Assim, as permutações de n elementos são um caso particular de arranjos simples ${}^{n}A_p$.

Definição 2.12: Dado um conjunto A finito, com n elementos distintos, chamam-se **arranjos completos** (ou arranjos com repetição) de n elementos tomados p a p, a todas as sequências constituídas por p elementos de A, podendo nestas sequências existir elementos repetidos. O número de arranjos completos de n elementos, tomados p a p, representa-se por ${}^{n}A'_p$ e o seu valor é dado por:

$$ {}^{n}A'_p = n^p, \ \ n, p \in \mathbb{N}_0. $$

Exemplo 10

De um baralho com 52 cartas, extraem-se 3 delas, com reposição, e colocam-se, lado a lado, da esquerda para a direita, em cima de uma mesa. Nestas condições, o número de sequências de três cartas que se podem formar utilizando as 52 cartas dadas é igual ao número de arranjos completos de 52 elementos organizados 3 a 3. Assim, é possível formar

$$^{52}A'_3 = 52^3 = 140608 \text{ sequências diferentes.}$$

2.1.3 Combinações simples (ou combinações sem repetição)

A referência bibliográfica utilizada para este subtópico foi [57].

Definição 2.13: Dado um conjunto A finito, com n elementos distintos, dá-se o nome de **combinações** de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$, ao número de subconjuntos com p elementos que se obtém a partir de A. Dois subconjuntos são distintos se diferem em algum elemento, não interessando a ordem da sua disposição. O número total de combinações representa-se por ^nC_p, ou ainda por $\binom{n}{p}$ e é dado por

$$^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad n, p \in \mathbb{N}_0, \ n \geq p. \quad (2.1)$$

Se $p = n$, isto é, se todos os elementos são tomados de uma só vez, existe apenas uma combinação que corresponde ao conjunto de todos esses elementos. Assim, escrevemos que

$$^nC_n = 1.$$

No caso oposto, ou seja, o de não tomar nenhum elemento ($p = 0$), está-se a tomar como subconjunto o conjunto vazio, que como se sabe é subconjunto de qualquer conjunto. E como só há uma hipótese possível, escreve-se

$$^nC_0 = 1.$$

Exemplo 11

Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, as combinações de três elementos deste conjunto são:

$$\{a \ b \ c\}, \{a \ b \ d\}, \{b \ c \ d\}, \{a \ c \ d\}.$$

Note-se que o número de combinações de 4 elementos tomados 3 a 3 é ${}^{4}C_3 = \frac{4!}{3!1!} = 4.$

Como já foi referido, a ordem com que são apresentados os elementos dos subconjuntos não interessa, ou seja, qualquer permutação dos seus elementos dá origem ao mesmo subconjunto. Por exemplo, $\{a \ b \ c\} = \{a \ c \ b\}$.

2.1.4 Triângulo de Pascal e binómio de Newton

O famoso triângulo numérico, conhecido por triângulo de Pascal ou triângulo de Tartaglia, não foi inventado por estes matemáticos [29]. Os seus nomes estão associados a este triângulo por recorrerem a ele em muitos dos seus trabalhos, nomeadamente, no cálculo dos coeficientes do binómio de Newton. Em meados do século XI, Jian Xian, num trabalho que se perdeu, utilizou um arranjo triangular para generalizar e melhorar o método, em uso na época, para resolver equações polinomiais de qualquer grau. No século XIII, o matemático chinês, Yang Hui (1238-1298), em alguns dos seus trabalhos, utilizou um diagrama semelhante a um triângulo que intitulou "*a fonte do método de extração de raízes".* Assim, na China, o triângulo é conhecido como "Triângulo de Yang Hui" (Fig. 2.1).

Fig. 2.1 – Triângulo de Yang Hui (séc. XIII) [44]

Este esquema triangular, escrito no sistema de numeração chinês antigo, veio, posteriormente, a ser decifrado e reescrito. Foi estudado por muitos matemáticos mas só foi popularizado pelo filósofo e matemático Blaise Pascal (1623-1662), considerado um dos fundadores da teoria de probabilidades, pelo que hoje, o triângulo é conhecido por "Triângulo de Pascal". No entanto, em 1556, Tartaglia (1499-1557), matemático italiano, no seu livro *General Trattato di Numeri et Misure* [58], apresentou um estudo bastante detalhado sobre este triângulo. Por esse motivo, em Itália, o triângulo é conhecido como "Triângulo de Tartaglia" (Fig. 2.2).

O triângulo de Pascal é uma tabela infinita, em forma triangular, onde o vértice superior é igual a 1 assim como os números que se encontram nos lados oblíquos. Cada número, diferente de 1, é igual à soma dos dois números imediatamente acima de si, na linha superior.

Este triângulo tem muitas propriedades e algumas delas podem ser transportadas para a análise combinatória. Vamos começar por reescrever totalmente o triângulo de Pascal recorrendo ao cálculo de combinações (Fig. 2.3).

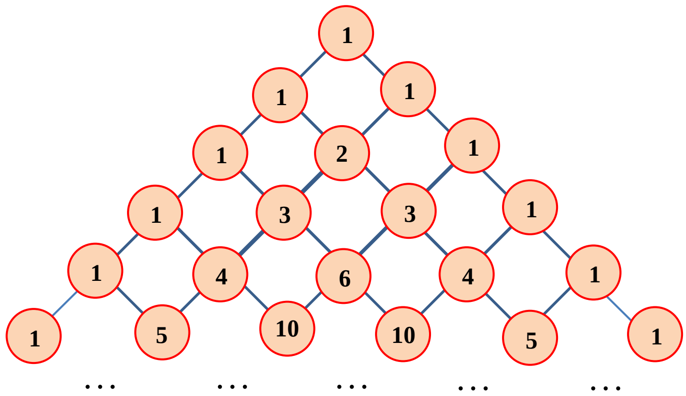


Fig. 2.2 – Triângulo de Pascal ou Triângulo de Tartaglia

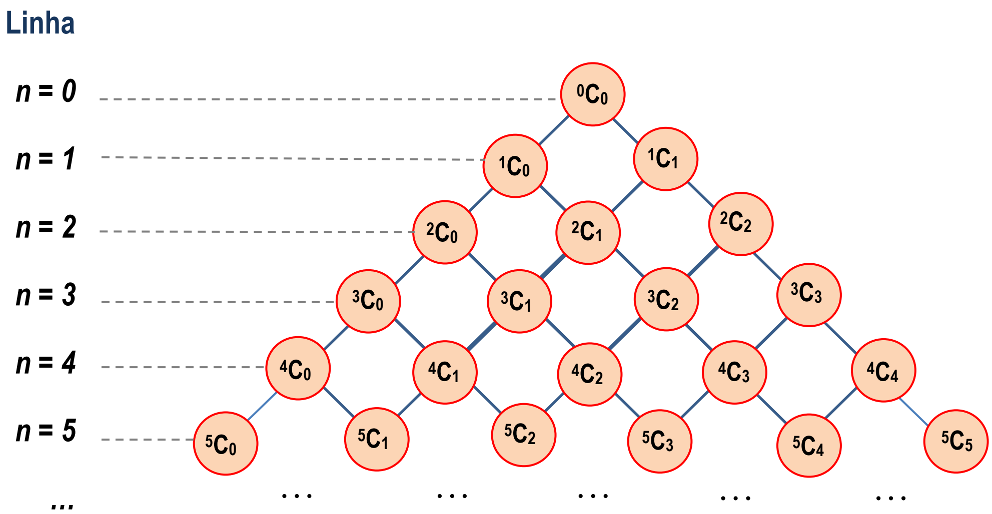


Fig. 2.3 – Triângulo de Pascal reescrito com combinações

De seguida, apresentaremos algumas dessas propriedades.

Propriedade 1

Como já foi mencionado anteriormente, cada elemento de uma linha (exceto o dos extremos) é igual à soma dos dois elementos consecutivos que estão acima dele. Esta propriedade traduzida em termos de combinações conduz-nos à chamada **fórmula de Pascal** [29].

Fórmula de Pascal Se n e p forem dois números inteiros tais que $1 \leq p \leq n-1$, então

$$^{n}C_p = {}^{n-1}C_p + {}^{n-1}C_{p-1}.$$

Demonstração

Este resultado facilmente se comprova com a aplicação da fórmula (2.1) e das regras usuais da álgebra. Assim,

$$^{n-1}C_p + {}^{n-1}C_{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-p)+p(n-1)!}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-p+p)}{p!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-1)!n}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = {}^{n}C_p. \qquad \square$$

Propriedade 2

Outra propriedade interessante está associada ao facto do triângulo de Pascal ser simétrico [29], isto é, em cada linha, valores equidistantes dos extremos são iguais. Podemos então escrever, recorrendo às combinações, que

$$^{n}C_{p} = {^{n}C_{n-p}} \ , \ \ \forall\, n, p \ \in \mathbb{N}_0 \ \ e \ \ p \leq n.$$

Demonstração

$$^{n}C_{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!p!} = {^{n}C_{p}}.$$

□

Cada elemento que constitui o triângulo de Pascal designa-se por **coeficiente binomial**. Esta designação deve-se à estreita relação entre os coeficientes do desenvolvimento das sucessivas potências de um binómio e a construção do próprio triângulo de Pascal [12]. No desenvolvimento do quadrado do binómio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

os coeficientes 1, 2, 1, são precisamente os elementos da segunda linha do triângulo de Pascal. Fazendo alguns cálculos é fácil obtermos as fórmulas para o cubo de um binómio ou a quarta potência de um binómio e constatarmos esta relação. Assim, temos que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \text{e}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

em que 1, 3, 3, 1 e 1, 4, 6, 4, 1 são, respetivamente, os elementos da terceira e quarta linhas do triângulo de Pascal.

De um modo geral, temos:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} {^{n}\mathrm{C}_{p}} a^{n-p} b^{p}, \quad \forall a, b \in IR \ e \ n \in \mathbb{N} \qquad (2.2)$$

conhecida como a **fórmula do binómio de Newton**.

Demonstração por indução matemática

Designando por $P(n)$ a fórmula (2.2), vem:

1) $P(1)$ é verdadeira pois

$$(a+b)^1 = a+b = {}^1\mathrm{C}_0 a^1 b^0 + {}^1\mathrm{C}_1 a^0 b^1$$

2) Suponha-se, por hipótese de indução, que a fórmula é válida para um dado número inteiro não negativo k, isto é,

$$(a+b)^k = \sum_{p=0}^{k} {}^k\mathrm{C}_p a^{k-p} b^p$$

Partindo agora de $(a+b)^{k+1}$ e usando a hipótese de indução, obtém-se

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b)({}^k\mathrm{C}_0 a^k + {}^k\mathrm{C}_1 a^{k-1}b + \cdots + {}^k\mathrm{C}_{k-1} ab^{k-1} + {}^k\mathrm{C}_k b^k) \\ &= {}^k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + {}^k\mathrm{C}_1 a^k b + \cdots + {}^k\mathrm{C}_{k-1} a^2 b^{k-1} + {}^k\mathrm{C}_k ab^k + {}^k\mathrm{C}_0 a^k b + \\ &\quad {}^k\mathrm{C}_1 a^{k-1} b^2 + \cdots + {}^k\mathrm{C}_{k-1} ab^k + {}^k\mathrm{C}_k b^{k+1} \\ &= {}^k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + ({}^k\mathrm{C}_0 + {}^k\mathrm{C}_1) a^k b + \cdots + ({}^k\mathrm{C}_{k-2} + {}^k\mathrm{C}_{k-1}) a^2 b^{k-1} + ({}^k\mathrm{C}_{k-1} + \\ &\quad {}^k\mathrm{C}_k) ab^k + {}^k\mathrm{C}_k b^{k+1}.\end{aligned}$$

Tendo em consideração a fórmula de Pascal, vem

$$(a+b)^{k+1} = {}^k\mathrm{C}_0 a^{k+1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_1 a^k b + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k-1} a^2 b^{k-1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_k ab^k + {}^k\mathrm{C}_k b^{k+1}$$

e como

$${}^k\mathrm{C}_0 = {}^{k+1}\mathrm{C}_0 = 1 \ \text{ e } \ {}^k\mathrm{C}_k = {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1} = 1$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_1 a^k b + \cdots + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k-1} a^2 b^{k-1} + {}^{k+1}\mathrm{C}_k ab^k \\ &\quad + {}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1} b^{k+1} \\ &= \textstyle\sum_{p=0}^{k+1} {}^{k+1}\mathrm{C}_p a^{k+1-p} b^p.\end{aligned}$$

Provamos assim que $P(k) \Rightarrow P(k+1),\ \forall k \in \mathbb{N}_0$. □

Tendo em conta o princípio de indução finita fica demonstrada a fórmula do binómio de Newton.

2.2 Cálculo de probabilidades

2.2.1 Resenha histórica

A incerteza e o azar sempre foram conceitos muito enraizados em todas as civilizações, exercendo mesmo um grande fascínio sobre a mente humana. Causadores de muitas superstições, foram, ao longo dos séculos, e continuam a ser, a principal razão do estudo das probabilidades. Pensa-se que a abordagem matemática destes conceitos se iniciou há pouco mais de 500 anos, com a tentativa de quantificar os riscos dos seguros e de medir a possibilidade de se ganhar em jogos de azar [44].

No século XVI, Girolamo Cardano (1501-1576), matemático italiano, escreveu várias obras dedicadas a diversas áreas do saber, destacando-se, no entanto, um pequeno manual de jogos de azar, "*Liber de Ludo Aleae*", considerado o primeiro livro completo sobre probabilidades. Nesse livro, Cardano resolve alguns problemas concretos utilizando técnicas de contagem para calcular a quantidade de casos favoráveis numa determinada circunstância aleatória. Cardano não produziu nenhum teorema uma vez que o seu estudo se limitou aos problemas com dados exclusivamente numéricos. No século XVII, um nobre francês, Cavaleiro De Méré, adepto de jogos de azar, consultou o matemático Pascal (1623-1662) para tentar compreender os resultados de um determinado jogo com três dados. Pascal, fascinado por este problema, iniciou correspondência com outro matemático, Fermat (1601-1665), sobre os problemas e questões relacionados com este e outros jogos de azar, estabelecendo assim alguns dos fundamentos da teoria das probabilidades. Neste contexto, começa a surgir a ideia da *Lei dos Grandes Números* e a relação entre probabilidade e frequência num elevado número de experiências. Este conceito foi aprofundado por Bernoulli (1654-1705) e apresentado na sua obra *Ars Conjectandi* [7]. No princípio do século XIX, Laplace (1749-1827) publicou, em 1812, a obra "*Théorie Analytique des probabilités*" [40], onde descreveu uma forma de calcular a probabilidade de um acontecimento aleatório, conferindo-lhe um "grau de credibilidade racional". Esta definição é hoje conhecida por definição clássica de probabilidade ou Lei de Laplace. No século XX, os trabalhos metódicos e sistemáticos do matemático russo, Kolmogorov (1903-1987), conferiram à teoria das probabilidades uma axiomática própria.

Nos dias de hoje, o contributo da teoria das probabilidades, nas diversas áreas científicas, é inquestionável. Há muito que a sua aplicação ultrapassou o âmbito dos jogos de azar, uma vez que, em qualquer ciência, a incerteza e o acaso estão sempre presentes. Em suma, este ramo da Matemática pretende encontrar uma ordem na incerteza.

Esta breve resenha histórica teve como referências principais [22] e [29].

2.2.2 Conceito clássico de probabilidade

"A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo género a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre a sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é a pretendida. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fracção cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis."

Pierre Simon Laplace, *Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades (1814)* [41]

Quando lançamos uma moeda ao ar, *estamos igualmente inseguros,* sobre qual das faces vai sair. É portanto natural considerar que a probabilidade de cada uma das faces seja de 50%, isto é, $\frac{1}{2}$. Do mesmo modo, quando lançamos um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, atribuímos a probabilidade $\frac{3}{6}$ ao acontecimento "sair face com número par", pois, das seis faces do dado, três têm um número par. Diz-se que, dos seis casos possíveis associados à experiência, existem três casos favoráveis para o acontecimento "sair face com número par".
De um modo geral, aplicamos a seguinte definição:

Definição 2.14: (Lei de Laplace)
Definido um espaço de resultados, E, constituído por um número finito de elementos, todos eles equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A, $P(A)$, é dada por

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Número de casos favoráveis à ocorrência de A}}{\text{Número de casos possíveis}}.$$

O conceito de probabilidade que se baseia nesta lei é chamado **conceito clássico de probabilidade** [42].

Exemplo 12

Um jogador A retira de um baralho quatro cartas, duas vermelhas e duas pretas. As cartas são baralhadas e colocadas sobre uma mesa, com as faces voltadas para baixo. Um outro jogador, B, escolhe duas das cartas e volta-as para cima. Se essas cartas forem da mesma cor, ganha; caso contrário ganha o jogador A. Será este jogo justo?

Se pensarmos apenas em função das cores, o espaço de resultados seria $E = \{VV, VP, PP\}$. Numa primeira observação, menos atenta, concluiríamos que o jogador A tem menos hipóteses de ganhar. No entanto, ao analisarmos com mais cuidado os acontecimentos elementares deste espaço de resultados, verificamos que eles não são equiprováveis.

Sejam V_1, V_2 as duas cartas vermelhas e P_1, P_2, as duas cartas pretas. Então,

$$E = \{V_1V_2\,, V_1P_1\,, V_1P_2, V_2P_1, V_2P_2, P_1P_2\}.$$

Estamos agora em condições de aplicar a Lei de Laplace. Assim, P(ganhar jogador A) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e P(ganhar jogador B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Constatamos que o jogo não é justo, uma vez que o jogador A tem mais possibilidades de ganhar do que o jogador B.

2.2.3 Conceito frequencista de probabilidade

Existe um outro processo que permite obter os valores das probabilidades dos acontecimentos associados a uma experiência aleatória. Esta abordagem baseia-se no princípio de que é possível obter-se uma regularidade estatística quando uma experiência aleatória é realizada um grande número de vezes. Assim, se repetirmos a experiência aleatória um número cada vez maior de vezes, a frequência relativa de cada acontecimento elementar tende a estabilizar-se à volta de um valor entre 0 e 1. Este valor é interpretado como sendo a probabilidade de cada acontecimento elementar se realizar. Podemos então considerar a seguinte definição:

Definição 2.15: (**Lei dos Grandes números)**

A probabilidade de um acontecimento A, P(A), é o limite da sucessão de valores obtidos para a frequência relativa da realização de A, num número crescente de repetições da experiência aleatória.

Na impossibilidade de repetir uma experiência um número infinito de vezes, tomamos como estimativa da probabilidade de um acontecimento A, P(A), o valor obtido para a frequência relativa, ao fim de um número finito (mas o maior possível) de repetições da experiência.

Ao interpretarmos a probabilidade de um acontecimento desta forma, estamos a utilizar o chamado **conceito frequencista de probabilidade** [14]**.**

Exemplo 13

Consideremos a experiência aleatória de lançar um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Efetuamos uma simulação na internet utilizando, por exemplo, o simulador da Escola Virtual, da Porto Editora (Fig. 2.4). Verificamos que, para muitas repetições da experiência, as frequências relativas, para cada acontecimento elementar, vão estabilizando à volta de 0,17. Podemos assumir estes valores como sendo os valores aproximados para as probabilidades de cada um dos acontecimentos elementares.

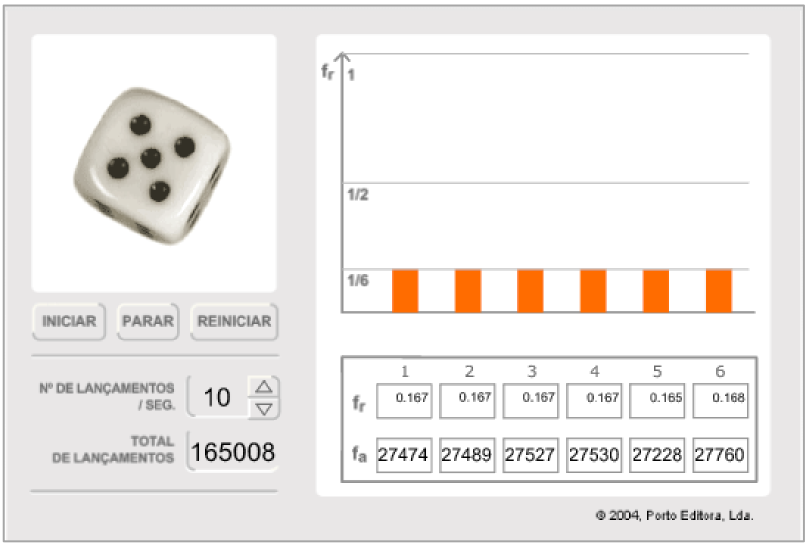


Fig. 2.4 – Simulador do lançamento de um dado cúbico

2.3 Sistemas de numeração

2.3.1 Definição e classificação

O conceito e a utilização prática dos números estão ligados à evolução da História do Homem. Contar terá sido a primeira “atividade” matemática da Humanidade. A contagem implica a associação de uma sequência de símbolos ou objetos a uma determinada quantidade. Com o passar dos tempos, essas quantidades foram sendo cada vez maiores, advindo daí uma complexificação das operações, o que impôs a criação de novos sinais figurativos. As quantias foram sendo representadas por expressões, gestos, palavras e símbolos, originando os chamados sistemas de numeração. Estes, foram desenvolvidos e personalizados, por várias civilizações, tornando-os, nalguns casos, distintos dos restantes (Fig. 2.5). A título exemplificativo, o sistema Indo-árabe acabaria por ser adoptado, progressivamente, por um número crescente de países, sendo atualmente universal [32].

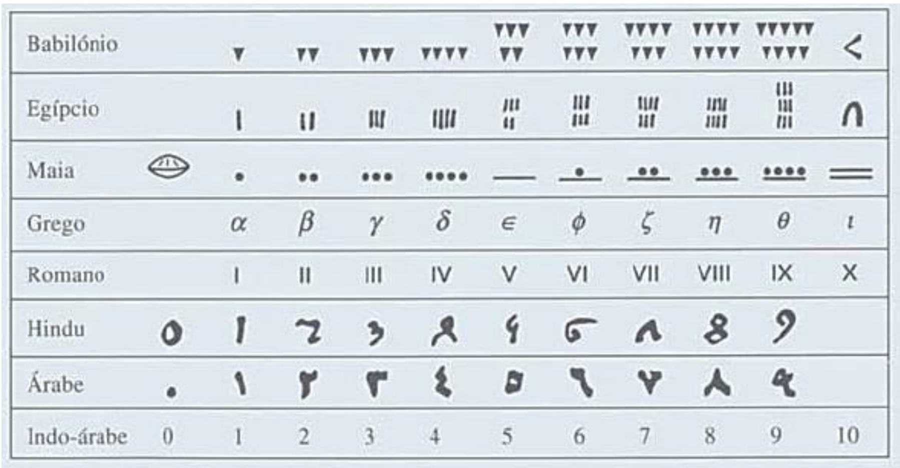


Fig. 2.5 – Diferentes sistemas de numeração [32]

Definição 2.16: Um **sistema de numeração** é um conjunto de símbolos e regras que possibilitam a escrita de números.

Note-se que um número é um objeto matemático utilizado para fins de quantificação.

Os sistemas de numeração podem classificar-se em:

- Não posicionais;
- Posicionais.

Definição 2.17: Um sistema de numeração diz-se **posicional** quando o valor dos símbolos utilizados não depende apenas da sua forma mas também da posição que ocupam no número.

Exemplo 14

No sistema de numeração Indo-árabe (posicional), no numeral 307, o símbolo 3, pela sua posição, representa trezentas unidades, e não trinta ou três. Em contrapartida, no sistema de numeração romano (não posicional), o número cinco, representado pela letra V, tem o mesmo valor nas expressões XV, VI ou VIII.

2.3.2 Sistema de numeração de base b

Atendendo ao tema em estudo nesta dissertação, os tópicos que se seguem, serão abordados tendo em consideração apenas os números inteiros e têm como referências bibliográficas [47] e [59].

Para facilitar a contagem de objetos é habitual agrupá-los. Quando o número de grupos formados é muito grande podemos voltar a agrupar os grupos anteriormente formados, e assim sucessivamente. Quando um sistema de numeração assenta num processo de agrupamento com dimensão fixa dizemos que esse sistema possui uma base.

Definição 2.18: A **base** de um sistema de numeração posicional é a quantidade de símbolos ou dígitos (algarismos) distintos utilizados para representar qualquer quantidade, nesse sistema de numeração.

Definição 2.19: Num sistema posicional, a **ordem** de um algarismo (ou símbolo) é a posição que ocupa no número.

No sistema decimal, ou seja, no sistema posicional de base 10, quando um algarismo está imediatamente à esquerda da vírgula dizemos que a sua ordem é zero. A ordem é crescente à medida que nos deslocamos para a esquerda e decrescente no sentido contrário.

Exemplo 15

No sistema decimal, são utilizados dez símbolos diferentes ou algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. O valor de cada um desses algarismos depende da posição que ocupa no número. Assim, no número 1635, cada algarismo tem um valor em função da sua posição:

Ordem das unidades de milhar	Ordem das centenas	Ordem das dezenas	Ordem das unidades
10^3	10^2	10^1	10^0
1	**6**	**3**	**5**

Assim, $1635 = 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5$.

Teorema 2.2:

Qualquer número inteiro a pode ser escrito numa base de numeração $\boldsymbol{b}$, inteiro maior que 1, utilizando uma sequência de algarismos $r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0$ com o significado

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b^1 + r_0 = \sum_{i=0}^{n} r_i b^i$$

com $0 \leq r_i < b\,; i = 0,1, \dots, n$ e $r_n \neq 0$.

Exemplo 16

$7092_{(10)} = 7 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2 \times 10^0$.

Esta representação designa-se por **representação polinomial** (ou **notação expandida**) do número a e é única. Utilizamos a representação equivalente

$$a = r_n r_{n-1} \dots r_1 r_{0(b)}.$$

A unicidade da representação polinomial de um número a resulta da seguinte proposição e corolário:

Proposição 2.3: (Divisão euclidiana de inteiros) Dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, existem inteiros q e $r \in \mathbb{Z}$ **únicos** tais que:

$$a = qb + r \quad \text{ e } \quad 0 \leq r < b.$$

A q chamamos **quociente** e a r **resto** da divisão inteira de a por b.

A demonstração pode ser consultada em [13].

Corolário 2.3.1 Quaisquer que sejam $a \in \mathbb{Z}^+$ e $b \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$, existem inteiros únicos $r_0, r_1, \dots, r_n$ tais que

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_2 b^2 + r_1 b^1 + r_0 b^0,$$

$r_n \neq 0 \ \ e \ \ 0 \leq r_i < b$ para $0 \leq i \leq n$.

Demonstração

Sejam a e b inteiros com $a > 0$ e $b > 1$.

1ª situação: Se $a < b$ então $a = 0b + a$. Portanto $r_0 = a > 0$.

2ª situação: Se $a \geq b$ então, atendendo à Proposição 2.3, existem q_0 e r_0 únicos tais que

$$a = q_0 b + r_0, \text{ com } 0 \leq r_0 < b.$$

Se $q_0 < b$, considera-se $r_1 = q_0$ e escreve-se $a = r_1 b + r_0$. Se $q_0 \geq b$, efetua-se a divisão euclidiana de q_0 por b. Ou seja, $q_0 = q_1 b + r_1$, com $0 \leq r_1 < b$. Logo

$$a = q_0 b + r_0 = (q_1 b + r_1) b + r_0 = q_1 b^2 + r_1 b + r_0$$

Se $q_1 < b$, considera-se $r_2 = q_1$ e escreve-se $a = r_2 b^2 + r_1 b + r_0$. Se $q_1 \geq b$, então o processo repete-se, efetuando a divisão euclidiana de q_1 por b e assim sucessivamente. O procedimento termina pois $a > q_0 > q_1$ ... e qualquer q_i é um inteiro não negativo. □

Esta demonstração fornece um algoritmo que permite escrever qualquer número inteiro a numa base b.

Exemplo 17

$75_{(10)} = 2210_{(3)}$. De facto

$$
\begin{array}{cccc}
75 & \big|\,3 & & \\
\underline{\mathbf{0}} & 25 & \big|\,3 & \\
r_0 & \underline{\mathbf{1}} & 8 & \big|\,3 \\
 & r_1 & \underline{\mathbf{2}} & \underline{\mathbf{2}} \\
 & & r_2 & \\
 & & & r_3
\end{array}
$$

Corolário 2.3.2 Seja $b \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$. Na base b, com n algarismos conseguimos representar qualquer $a \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$a < {}^{b}A'_{n}.$$

2.3.3 Conversão entre bases

O sistema decimal (base 10) é sem dúvida o sistema de numeração mais utilizado. No entanto, no mundo da computação, por exemplo, os sistemas digitais recorrem a outros sistemas de numeração como os sistemas binário (base 2), ternário (base 3), octal (base 8) e hexadecimal (base 16). Uma vez que os sistemas de codificação mais utilizados nos truques com cartas são os sistemas binário e ternário, será dado destaque à conversão entre o sistema decimal e esses dois sistemas.

A conversão de números escritos no **sistema decimal** para a **base b** pode ser feita de acordo com o seguinte procedimento:

1) Efetuar divisões sucessivas por b até obter um quociente inferior a b;
2) Escrever ordenadamente o último quociente e todos os restos obtidos por ordem inversa.

Este procedimento tem por base o algoritmo descrito na demonstração do corolário 2.3.1 e está ilustrado no exemplo 17.

A conversão de um número escrito na **base b** para a **base decimal** consiste em:

1) Multiplicar cada algarismo do número pela potência de base b e expoente correspondente à sua ordem;
2) Adicionar os produtos obtidos.

Exemplo 18

$10010_{(2)} = \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0 = 16 + 2 = 18_{(10)}$

De um modo geral, para converter um número escrito no sistema de numeração de **base $\boldsymbol{b}$** para a **base $\boldsymbol{b}$´** (com $b \neq 10 \neq b$´) o processo utilizado consiste em converter da base b dada para a base decimal e depois da base decimal para a base b´ pedida.

Exemplo 19

Vamos supor que se pretende converter o número $2011_{(3)}$ para o sistema binário. Então, escrevemos que

$1021_{(3)} = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 27 + 6 + 1 = 34_{(10)}$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
34 & \multicolumn{1}{|r}{2} & & & & \\ \cline{2-2}
\mathbf{0} & 17 & \multicolumn{1}{|r}{2} & & & \\ \cline{3-3}
 & \mathbf{1} & 8 & \multicolumn{1}{|r}{2} & & \\ \cline{4-4}
 & & \mathbf{0} & 4 & \multicolumn{1}{|r}{2} & \\ \cline{5-5}
 & & & \mathbf{0} & 2 & \multicolumn{1}{|r}{2} \\ \cline{6-6}
 & & & & \mathbf{0} & \mathbf{1}
\end{array}$$

Por sua vez

$34_{(10)} = 100010_{(2)}$.

Logo $1021_{(3)} = 100010_{(2)}$.

2.3.4 Adição e multiplicação na base b

Uma vez que, nesta temática, o nosso estudo aborda apenas os números inteiros, os algoritmos apresentados serão apenas os necessários para efetuar adições e multiplicações de números inteiros numa base b, com $b > 1$. Estas operações seguem algoritmos muito semelhantes aos que conhecemos, os do sistema decimal.

2.3.4.1 Adição

Sejam x e y, inteiros positivos, representados na base b, respetivamente, por $x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1 x_{0_{(b)}}$ e $y_{n-1}y_{n-2} \dots y_1 y_{0_{(b)}}$, em que se acrescentam tantos algarismos 0 à esquerda quantos os necessários para as representações terem o mesmo comprimento. A representação de $x+y$, na base b, pode ser obtida da forma seguinte:

$$x+y=\sum_{i=0}^{n-1} x_i b^i+\sum_{i=0}^{n-1} y_i b^i=\sum_{i=0}^{n-1}(x_i+y_i) b^i.$$

Note-se que $x_0<b$ e $y_0<b$, por isso $x_0+y_0=a_0 b+r_0$, com $a_0=1$ ou $a_0=0$ (pois $0 \leq x_0+y_0<2b$) e $0 \leq r_0<b$. Do mesmo modo temos $x_1+y_1+a_0=a_1 b+r_1$, com $0 \leq r_1<b$, e assim sucessivamente. Repetindo este procedimento, concluímos que

$$x+y=r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0.$$

Exemplo 20

Calcular $101_{(2)}+1101_{(2)}$.

Podemos escrever:

(+1)	(+1)		(+1)	
	0	1	0	$1_{(2)}$
+	1	1	0	$1_{(2)}$
1	0	0	1	$0_{(2)}$

$101_{(2)}+1101_{(2)}=10010_2$.

Exemplo 21

Calcular $1021_{(3)}+22_{(3)}$.

Da mesma forma que no exemplo 20 escrevemos

		(+1)	(+1)	
	1	0	2	$1_{(3)}$
+	0	0	2	$2_{(3)}$
	1	1	2	$0_{(3)}$

$1021_{(3)}+22_{(3)}=1120_{(3)}$.

2.3.4.2 Multiplicação

Vejamos primeiro o caso da multiplicação de um número inteiro, representado na base b, por uma potência cuja base é b.

Sejam $x = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1 x_{0_{(b)}}$ e $y = b^j, j \in \mathbb{N}_0$. O produto de x por y será igual a

$$x.y = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i b^i\right) \times b^j = \sum_{i=0}^{n-1} x_i b^{i+j}.$$

Neste caso, os coeficientes das potências de expoente menor que j serão todos iguais a zero. Assim, o produto xy obtém-se acrescentando j zeros à direita do número x.

Exemplo 22

$$201_{(3)} \times 3^2 = 20100_{(3)}.$$

Podemos verificarmos esta igualdade calculando este produto no sistema decimal. Assim, $201_{(3)} \times 3^2 = (2 \times 3^2 + 1 \times 3^0) \times 3^2 = 19 \times 9 = 171 = 20100_{(3)}$.

Consideremos agora o caso da multiplicação de um inteiro, x, por um número, y, este com um só algarismo, e ambos escritos na mesma base.

Seja $P = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1 x_{0_{(b)}} \times y_{1_{(b)}}$. Note-se que $x_0 y_1 = a_0 b + r_0$, com $0 \leq r_0 < b$ e como $0 \leq x_0 y_1 \leq (b-1)^2$, $0 \leq a_0 \leq b-2$. Do mesmo modo, teremos $x_1 y_1 + a_0 = a_1 b + r_1$, com $0 \leq r_1 < b$ e, como $0 \leq x_1 y_1 + a_0 \leq (b-1)^2 + (b-2)$, $0 \leq a_1 \leq b-2$. De um modo geral teremos, $x_i y_1 + a_{i-1} = a_i b + r_i$, com $0 \leq r_i < b$ e $0 \leq a_i \leq b-2$. Podemos então escrever que

$$P = a_{n-1} r_{n-1} \dots r_1 r_0.$$

Finalmente, para multiplicar dois números de n algarismos, escritos no sistema de base b, temos

$$x.y = x.\left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i b^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} (x.y_i) b^i.$$

Exemplo 23

$1102_{(\mathbf{3})} \times 21_{(\mathbf{3})} = 100212_{(\mathbf{3})}$ porque

		1	1	0	$2_{(3)}$
	x			2	$1_{(3)}$
		1	1	0	2
+	2	2	1	1	
1	0	0	2	1	$2_{(3)}$

Note-se que todos os valores intermédios estão representados na base 3.

2.4 Congruência modular

Os conceitos, as propriedades e as definições seguintes foram baseadas em [35] e [46].

Se escrevermos $20 + 8 = 4$, corremos o risco de fazermos uma péssima figura, sobretudo se formos professores de Matemática. No entanto, se dissermos que são 20 horas e que dentro de 8 horas serão 4 da manhã, não estaremos a cometer nenhum erro!

Na aritmética usual, escrevemos $20 + 8 = 28$, mas quando nos referimos às horas, a aritmética utilizada é a *aritmética módulo 24.* Neste caso, 24 é equivalente a zero. Para distinguir da aritmética habitual, escrevemos $(20 + 8) \equiv 4\ (mod\ 24)$, uma vez que,

$$20 + 8 = 28 = 24 + 4.$$

Quanto à multiplicação, podemos escrever que $(20 \times 8) \equiv 16\ (mod\ 24)$ porque

$$20 \times 8 = 160 = 24 \times 6 + 16.$$

O número 16 é o resto da divisão inteira de 160 por 24.

Definição 2.20: Dados dois números inteiros quaisquer, a e b, diz-se que r é o **resto da divisão inteira** de a por b, e escreve-se

$$r = a \bmod b,\ \text{se } 0 \leq r < |b| \ \text{ e } \ a = qb + r \text{, para algum inteiro } q.$$

No caso particular em que $r = 0$, diz-se que a é divisível por b.

Exemplo 24

1) $22 \bmod 6 = \mathbf{4}$ uma vez que $22 = 6 \times 3 + \mathbf{4.}$
2) $22 \bmod (-6) = \mathbf{4}$ uma vez que $22 = (-6) \times (-3) + \mathbf{4.}$
3) $-22 \bmod 6 = \mathbf{2}$ uma vez que $-22 = 6 \times (-4) + \mathbf{2.}$

Definição 2.21: Seja $n \in \mathbb{N}$. Dois inteiros a e b dizem-se **congruentes módulo $\boldsymbol{n}$** e escrevemos

$$a \equiv_n b \quad \text{ou} \quad a \equiv b \pmod{n}$$

se tiverem o mesmo resto na divisão por n, isto é, $a \bmod n = b \bmod n$, ou equivalentemente, se $(a - b)$ é um múltiplo de n.

Observação: Para $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{Z}$, os números congruentes com a módulo n são os inteiros da forma

$$a + kn, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 25

Sabemos que $16 \equiv 6 \pmod{5}$ (lê-se 16 é congruente com 6 módulo 5) pois 16 dividido por 5 dá resto 1 e 6 dividido por 5 também dá resto 1, ou podemos dizer que $(16 - 6) = 10$ que é múltiplo de 5.

A congruência módulo n é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, uma vez que são verificadas as seguintes propriedades:

1) Reflexiva: $a \equiv a \pmod{n}$;
2) Simétrica: se $a \equiv b \pmod{n}$ então $b \equiv a \pmod{n}$;
3) Transitiva: se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ então $a \equiv c \pmod{n}$.

Estas propriedades são válidas uma vez que a relação "$(a - b)$ é um múltiplo de n" é uma relação de equivalência, visto que,

1) $(a - a)$ é um múltiplo de n, $\forall a \in \mathbb{Z}$;
2) Se $(a - b)$ é um múltiplo de n então $(b - a)$ é um múltiplo de n, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$;

3) Se $(a - b)$ é um múltiplo de n e $(b - c)$ é um múltiplo de n então $(a - c)$ é um múltiplo de $n, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.22: A **classe de congruência** de a módulo n é o conjunto formado por todos os inteiros que são congruentes com a módulo n.

$$[a]_n = \{b \in \mathbb{Z}: a \equiv b \pmod{n}\} = \{a + kn, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\dots, a - 2n, a - n, a, a + n, a + 2n, \dots\}$$

Podemos dizer também que dado um número inteiro a, a sua classe de congruência módulo n, é o conjunto constituído por todos os inteiros que têm o mesmo resto que a módulo n.

Exemplo 26

$[6]_3 = \{b \in \mathbb{Z}: 6 \equiv b \pmod{3}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = [9]_3 = [0]_3$

Os elementos do conjunto anterior podem ser escritos sob a forma $3q, \forall q \in \mathbb{Z}$, em que o resto da divisão por 3 é zero.

Exemplo 27

$[5]_3 = \{b \in \mathbb{Z}: 5 \equiv b \pmod{3}\} = \{\dots -4, -1, 2, 5, 8, \ 11 \dots\} = [8]_3 = [2]_3$

Os elementos do conjunto anterior podem ser escritos sob a forma $3q + 2, \forall q \in \mathbb{Z}$, em que o resto da divisão por 3 é dois.

Cada classe de congruência contém um e um só elemento pertencente ao conjunto

$$\{0, 1, \dots, n - 1\},$$

conhecido por sistema completo de resíduos módulo n ou sistema completo de restos módulo n.

Definição 2.23: Um **sistema completo de resíduos** módulo n é um conjunto $I_n = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$ de n inteiros tal que qualquer inteiro a é congruente módulo n a um único elemento de I_n.

Podemos descrever um sistema completo de resíduos módulo n como um conjunto

$$I_n = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$$

tal que se $i \neq j$ então r_i e r_j não são congruentes módulo n, para $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Como o resto da divisão de qualquer número inteiro por n está entre zero e $(n-1)$, a relação de congruência módulo n define n classes de congruência. O conjunto de todas as classes de congruência módulo n é representado por $\mathbb{Z}_{/n}$. Convencionalmente,

$$\mathbb{Z}_{/n} = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\},$$

é constituído por um representante de cada uma das classes de congruência módulo n.

Exemplo 28

Se $n = 4$, existem 4 classes de congruência que contêm o mesmo resto.

$[0]_4 = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$;

$[1]_4 = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$;

$[2]_4 = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$;

$[3]_4 = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$.

Logo, $\mathbb{Z}_{/4} = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$ ou $\mathbb{Z}_{/4} = \{[4]_4, [5]_4, [6]_4, [7]_4\}$.

No conjunto $\mathbb{Z}_{/n}$ estão definidas as operações de adição e de multiplicação apresentadas a seguir.

Adição em $\mathbb{Z}_{/n}$

- Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ então $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

Demonstração

Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ então existem inteiros k_1 e k_2 tais que

$$a = b + k_1 n \text{ e } c = d + k_2 n \, .$$

Logo, $a + c = b + d + k_1 n + k_2 n = b + d + (k_1 + k_2)n$.

$a + c = b + d + (k_1 + k_2)n$, ou seja, $a + c \equiv b + d \pmod{n}$. □

Multiplicação em $\mathbb{Z}_{/n}$

- Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ então $ac \equiv bd \pmod{n}$

Demonstração

Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$ então existem inteiros k_1 e k_2 tais que

$$a = b + k_1 n \text{ e } c = d + k_2 n \, .$$

Logo, $ac = bd + bk_2 n + dk_1 n + k_1 k_2 n^2 = bd + (bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 n)n$.

$ac = bd + (bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 n)n$, ou seja, $ac \equiv bd \pmod{n}$. □

Exemplo 29

Tabuadas de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_{/6}$.

Para simplificar a escrita, consideremos $[a]_k = a,\ \forall k \in \{0, \dots, 5\}$.

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	0	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\times_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Na aritmética modular, as propriedades usuais da adição e multiplicação dos números inteiros continuam a ser verificadas. Temos, por exemplo, que

$$(a + b) + c \equiv a + (b + c)\ (mod\ n);$$
$$(a \times b) \times c \equiv a \times (b \times c)\ (mod\ n);$$
$$(a + b) \times c \equiv (a \times c) + (b \times c) (mod\ n).$$

2.4.1 Alguns critérios de divisibilidade no sistema decimal

Para este subtópico foram consultadas as seguintes referência bibliográficas [53] e [59].

Definição 2.24 Dado um número inteiro positivo m, chama-se **critério de divisibilidade por m,** à proposição que permite calcular, por meio de um processo rápido, o resto da divisão por m de um inteiro positivo a, dada a sua representação decimal.

Proposição 2.4 Sejam $a,\ m \in \mathbb{N}$ e $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$. Se $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ forem os restos da divisão inteira de, respetivamente, $10, 10^2, \dots, 10^{n-1}, 10^n$ por m, então

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \equiv a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0\ (mod\ m).$$

A demonstração pode ser consultada em [53] na página 91.

Exemplo 30

Determinar o resto da divisão inteira de 143 por 3.

Como $10 \equiv 1\ (mod\ 3)$ e $10^2 \equiv 1\ (mod\ 3)$ então, atendendo à proposição 2.4,

$$143 \equiv 1 \times 1 + 4 \times 1 + 3\ (mod\ 3)$$

ou seja

$$143 \equiv 8\ (mod\ 3).$$

Como $8 \equiv 2\ (mod\ 3)$ podemos escrever que $143 \equiv 2\ (mod\ 3)$.
O resto da divisão inteira de 143 por 3 é 2.

De seguida serão apresentados alguns critérios de divisibilidade. Só será realizada a demonstração do critério de divisibilidade por 9, devido à sua utilidade em inúmeros truques de magia com cartas.

Critério de divisibilidade por 2

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 2 é igual ao resto da divisão do algarismo das unidades por 2.

Critério de divisibilidade por 3

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 3 é igual ao resto da divisão da soma de todos os algarismos de a por 3.

Critério de divisibilidade por 4

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 4 é igual ao resto da divisão da soma do dobro do algarismo das dezenas de a com o algarismo das unidades por 4.

Critério de divisibilidade por 5

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 5 é igual ao resto da divisão do algarismo das unidades por 5.

Critério de divisibilidade por 9

O resto da divisão de um número inteiro positivo a por 9 é igual ao resto da divisão da soma de todos os algarismos de a por 9.

Demonstração

Como $10^i \equiv 1(mod\ 9)$, para qualquer inteiro positivo i, então podemos escrever que

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0\ (mod\ 9). \qquad \square$$

2.5 Grafos

A secção que se segue é destinada à apresentação de definições e propriedades básicas da teoria dos grafos. Adotámos como referências principais os documentos [11], [23], [46] e [57].

2.5.1 Introdução e conceitos básicos

Um grafo é um diagrama formado por pontos, chamados "vértices", e por linhas que os unem, chamadas "arestas". A simplicidade deste conceito permite modelar, de forma gráfica e simples, diversas situações do dia-a-dia, como as redes de transportes ou de comunicações. Nestas representações gráficas, o posicionamento dos pontos e as propriedades geométricas das linhas não são relevantes, ao contrário da estrutura e das propriedades da relação existente entre os pontos. Um mapa esquemático de uma rede ferroviária ou uma árvore genealógica são exemplos de grafos.

Hoje, a Teoria dos Grafos é uma ferramenta matemática utilizada em áreas como a Informática, a Investigação Operacional, a Economia, a Sociologia, a Genética, o Design de Produção, etc.

Definição 2.25*:* Um **grafo** G é uma estrutura formada por um par de conjuntos *(V_G, A_G)* em que $V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ representa o conjunto finito e não vazio de elementos que se designam por **vértices** (ou **nós**) e $A_G = \{a_1, \dots a_m\}$ é o conjuntos das **arestas**, a cada uma das quais corresponde um par de vértices, isto é, $a_k = \{v_i, v_j\}$, *para* $k \in \{1, \dots, m\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Dois vértices, v_1 e v_2, dizem-se ***adjacentes*** se tiverem uma aresta que os una e escrevemos $a = \{v_1, v_2\}$ ou $a = \{v_2, v_1\}$. A aresta a diz-se ***incidente*** em v_1 e em v_2.

Definição 2.26: A **ordem** e a **dimensão** de um grafo representam, respetivamente, o número de vértices e o número de arestas desse grafo.

Habitualmente representa-se um grafo por uma figura no plano em que os vértices são representados por pontos ou círculos e as arestas por linhas, curvas ou segmentos de reta, que unem os vértices adjacentes que o constituem. Os vértices e as arestas poderão ter ou não um rótulo.

Exemplo 31

O diagrama da figura 2.6 representa o grafo G, de ordem 6 e dimensão 10, definido por

$$V_G = \{A, B, C, D, E, F\} \quad \text{e}$$

$$A_G = \big\{\{AB\}, \{AE\}, \{AF\}, \{BF\}, \{BC\}, \{BD\}, \{CD\}, \{EF\}, \{ED\}, \{FD\}\big\}$$

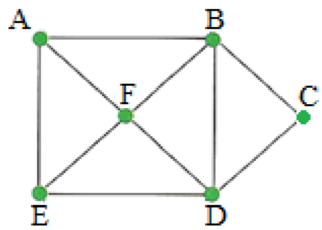


Fig. 2.6 – Exemplo de um grafo G

Por vezes, na modelação de algumas situações, torna-se necessário considerar um sentido para as arestas. Um grafo nestas condições chama-se ***grafo orientado*** ou ***digrafo****.*

Definição 2.27: Um **grafo orientado** ou **digrafo** D é uma estrutura formada por um par de conjuntos *(V_D, A_D) em que* $V_D = \{v_1, \dots, v_n\}$ representa o conjunto finito e não vazio de elementos que se designam por **vértices** *e* $A_D = \{a_1, \dots a_m\}$ é o conjunto de elementos designados por **arcos dirigidos**, a cada um dos quais corresponde um par ordenado de vértices, isto é, $a_k = (v_i, v_j)$, para $k \in \{1, \dots, m\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Num grafo orientado escreve-se $a_1 = (v_0, v_1)$ para representar o arco que une v_0 a v_1, orientado de v_0 para v_1. Neste caso, diz-se que v_0 é **adjacente** ao vértice v_1, que o arco a_1 é **incidente** sobre v_1 e **emergente** de v_0.

Exemplo 32

O diagrama da figura 2.7 representa o grafo orientado D, com três vértices e cinco arcos dirigidos, definido por $V_D = \{A, B, C, D\}$ e $A_D = \{(A, B), (B, C), (B, D), (C, D), (D, A)\}$.

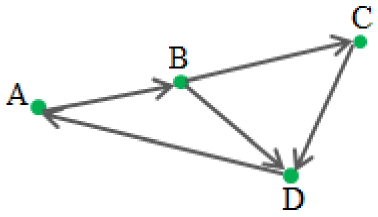


Fig. 2.7 – Exemplo de um digrafo D [23]

Existem grafos nos quais dois vértices podem estar unidos por várias arestas (*arestas paralelas ou múltiplas*) ou ainda admitir arestas que unem um vértice a ele próprio (*lacetes*). Estes grafos são designados por ***multigrafos*** (Fig. 2.8).

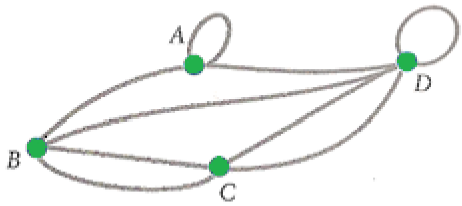


Fig. 2.8 – Exemplo de um multigrafo [23]

Definição 2.28: Um grafo ou digrafo dizem-se **simples** se não tiverem arestas paralelas ou lacetes (*Fig. 2.6).*

Definição 2.29: O **grau** (ou **valência**) de um vértice v é o número de arestas incidentes em v, ou seja, o número de arestas que começam (ou terminam) nesse vértice. Denotemos esse número por $g(v)$.

Definição 2.30: Um vértice diz-se **ímpar** ou **par** segundo o seu grau for, respetivamente, um número ímpar ou par.

Nota: Uma vez que o lacete incide duas vezes no mesmo vértice, este é contabilizado duas vezes para efeito de cálculo do grau do respetivo vértice.

Exemplo 33

No grafo da figura 2.8 tem-se que: $g(A) = 4$, $g(B) = 4$, $g(C) = 4$ e $g(D) = 6$.

Note-se que num digrafo podemos considerar o grau de um vértice em semigrau incidente, $g^-(v)$, e em semigrau emergente, $g^+(v)$, pelo que $g(v) = g^-(v) + g^+(v)$.

Exemplo 34

No digrafo da figura 2.7 temos que $g^-(B) = 1$ e $g^+(B) = 2$ logo $g(B) = 3$.

Definição 2.31: Um grafo G_1 é **um subgrafo** de G se $V_{G_1} \subseteq V_G$ e $A_{G_1} \subseteq A_G$ (Fig. 2.9).

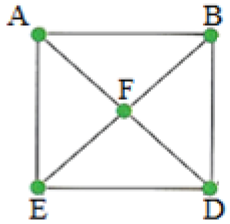


Fig. 2.9 – Exemplo de um subgrafo do grafo representado na figura 2.6

Definição 2.32: Um grafo diz-se **regular** se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau. Se esse grau for r, o grafo diz-se regular de grau r ou r-regular (Fig. 2.10).

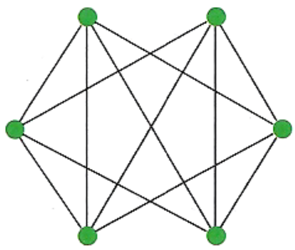


Fig.2.10 – Exemplo de um grafo regular de grau 4 [44]

Nota: Um vértice de grau 0 diz-se ***isolado*** e um de grau 1 chama-se ***terminal***.

Definição 2.33: Um grafo diz-se ***completo*** e denota-se por K_n, se for um grafo simples com n vértices no qual todos tenham o mesmo grau $(n-1)$. Um grafo completo tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas (Fig. 2.11).

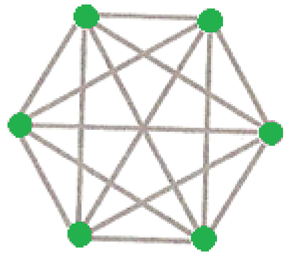


Fig. 2.11 – Exemplo de um grafo K_6 [44]

Nota: Um grafo orientado diz-se completo se entre cada par de vértices existir pelo menos um arco.

Os grafos representam de forma concisa as relações de incidência entre vértices e arestas, sem qualquer exigência quanto à forma ou ao tamanho. Um mesmo grafo pode ter várias configurações (Fig. 2.12).

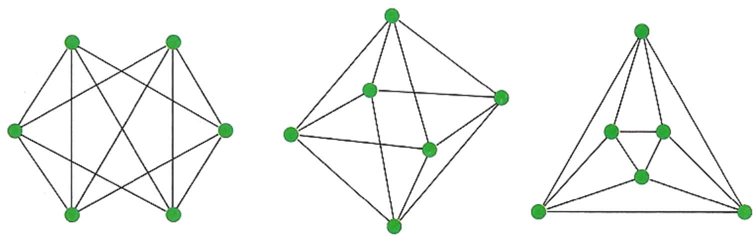


Fig. 2.12 – Exemplos de representações de grafos regulares de grau 4 [44]

Proposição 2.5 [Euler(1736)]: Em qualquer grafo, a soma do grau de todos os seus vértices é igual ao dobro do número de arestas do grafo, isto é, $\sum_{v \in V_G} d(v) = 2|A_G|$.

Este resultado deve-se ao facto de cada aresta ser incidente em dois vértices.

A proposição 2.5 é mais conhecida como o *Lema dos apertos de mão:* Se um grupo de convidados apertar as mãos entre si, quando se encontrarem pela primeira vez, o número total de mãos apertadas será par (em cada aperto estão envolvidas duas mãos) e o número de convidados que apertam a mão, um número ímpar de vezes, é par. Esta situação implica o seguinte:

Corolário 2.5.1: Em qualquer grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.

2.5.2 Caminhos de um grafo

Definição 2.34: Num grafo G um **caminho** de comprimento m é uma sequência de vértices e arestas da forma

$$v_0 a_1 v_1 a_2 \dots v_{m-1} a_m v_m$$

tal que $v_i \in V_G, (\, i \in \{0,1,\dots,m\})$ *e* $a_j = \{v_{j-1}, v_j\}\; com\; a_j \in A_G\; (j \in \{1,2,\dots,m\})$.

Na definição apresentada, um caminho pode ter ou não repetição de vértices e ter ou não repetição de arestas. O objetivo é desenhar uma linha contínua entre dois vértices quaisquer.

Exemplo 35

Observemos o grafo G_1 da figura 2.13.

Para irmos de B para D, podemos partir de B, seguir a_8 e chegar a D, ou seja, seguir o caminho: Ba_8D.

Mas poderíamos ter escolhido outros caminhos, por exemplo:

Ba_2Ca_3D ou $Ba_1Aa_6Ea_5D$.

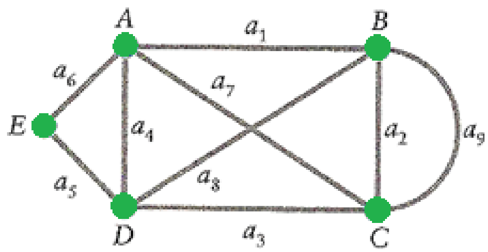


Fig. 2.13 – Grafo G_1 [23]

Definição 2.35: Num grafo orientado D um **caminho orientado** de comprimento m é uma sequência de vértices e arcos orientados da forma

$$v_0 a_1 v_1 a_2 \dots v_{m-1} a_m v_m$$

tal que $v_i \in V_G, (\, i \in \{0,1,\dots,m\})$ e $a_j = (v_{j-1}, v_j)\;\mathrm{com}\; a_j \in A_G\; (j \in \{1,2,\dots,m\})$.

Definição 2.36: *Se* $v_0 = v_m$, isto é, se o caminho começa e acaba no mesmo vértice, o caminho designa-se por **circuito**. O comprimento de um circuito é igual ao número de arestas que possui.

Exemplo 36

No grafo G_1 da figura 2.13, $Ba_1Aa_6Ea_5Da_8B,$ é um circuito de comprimento 4 e $Ba_2Ca_3Da_8B$ é um circuito de comprimento 3.

Definição 2.37: Um circuito diz-se **simples** se não tiver repetição de arestas. Se o circuito não tiver repetição de vértices, exceto o vértice inicial, este designa-se por **ciclo**.

Definição 2.38: Um grafo diz-se **conexo** quando qualquer par dos seus vértices está ligado por uma aresta ou por um caminho (Fig. 2.13).

Definição 2.39: Um grafo diz-se **desconexo** se existir pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhum caminho.

Exemplo 37

O grafo da figura 2.14 é desconexo uma vez que não existe nenhum caminho, por exemplo, entre os vértices F e B.

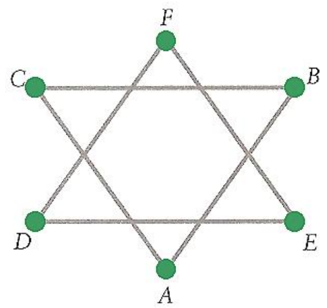


Fig. 2.14 – Exemplo de um grafo desconexo [44]

Observação: Um grafo com um ou mais vértices isolados é desconexo.

2.5.3 Grafos eulerianos

Definição 2.40: Um caminho que contém cada aresta uma e uma só vez chama-se **caminho euleriano.**

Definição 2.41: Um grafo diz-se **euleriano** se admite um circuito simples que contém todas as arestas do grafo. A este circuito chamamos **circuito de Euler.**

Exemplo 38

O grafo da figura 2.15 é um exemplo de um grafo euleriano, uma vez que é possível encontrar um circuito de Euler.

Exemplo de um circuito de Euler: A – B – E – D – C – E – A.

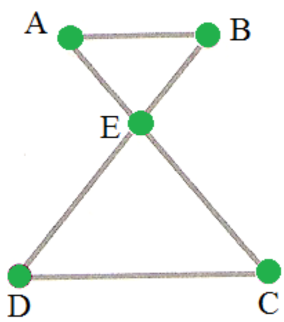


Fig. 2.15 – Grafo euleriano [23]

Teorema 2.6 [Euler (1736)] *Um grafo (ou multigrafo) G é euleriano se e só se for conexo e todos os seus vértices forem de grau par.*

Demonstração:

- *Vamos supor que o grafo (ou multigrafo) G possui um circuito euleriano. Só é possível desenhar este circuito, em que percorremos todas as arestas, se o grafo for conexo. Para além disso, nesse circuito, para cada aresta utilizada para "entrar" num vértice existe outra diferente para "sair". Assim, o número de arestas ligadas a cada vértice é par.*
- *Consideremos o grafo (ou multigrafo) G conexo e com todos os vértices de grau par. Começamos o nosso caminho num determinado vértice, v_1, percorremos uma aresta, ainda não utilizada, até outro vértice e assim sucessivamente, até voltarmos ao vértice v_1.*

Desenhamos assim um circuito. Se todas as arestas do grafo forem percorridas, então estamos perante um circuito euleriano. Vamos supor que esse circuito não contém todas as arestas do grafo. Como o grafo é conexo, existe um vértice, v_2 (já incluído no caminho, porque G é conexo) com arestas incidentes, em número par, que ainda não foram percorridas. Podemos assim, partindo de v_2, iniciar um novo circuito, percorrendo apenas as arestas não usadas. Este novo circuito é intercalado no circuito já desenhado anteriormente. Este procedimento pode ser repetido enquanto existirem arestas não percorridas.

A demonstração construtiva do teorema 2.6 sugere um algoritmo recursivo para encontrar circuitos de Euler em grafos conexos e cujos vértices têm grau par. □

Exemplo 39

Consideremos o grafo da figura 2.16.

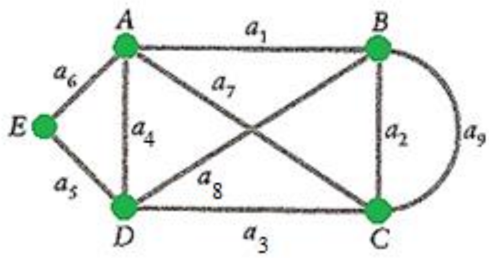


Fig. 2.16 – Grafo G_2 [23]

Podemos, por exemplo, iniciar o circuito em D.

Desenhamos um circuito, escolhendo sempre arestas que não foram percorridas, até regressarmos ao vértice D. Na figura 2.17 está representado o circuito: $Da_3Ca_9Ba_2Ca_7Aa_4D$.

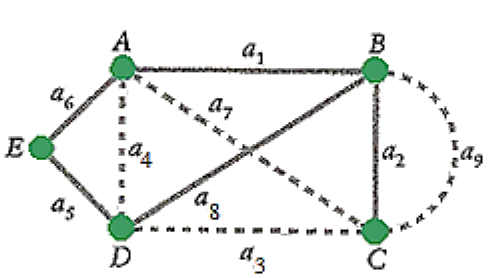


Fig. 2.17 – Circuito $Da_3Ca_9Ba_2Ca_7Aa_4D$ [23]

Este circuito não é um circuito de Euler uma vez que o caminho não percorreu todas as arestas do grafo. Segundo a demonstração do Teorema de Euler, escolhemos um dos vértices do caminho anterior, que ainda tenha arestas por usar, e reiniciamos a construção de um novo circuito. Por exemplo Ba_1Aa_6Ea_5Da_8B. Desta forma conseguimos percorrer todas as arestas do grafo. O próximo passo consiste em juntar os circuitos encontrados. Assim, temos um circuito de Euler Da_3Ca_9Ba_1Aa_6Ea_5Da_8Ba_2Ca_7Aa_4D.

O corolário que se segue estabelece as condições necessárias e suficientes para a existência de um caminho de Euler nos grafos que não admitem um circuito de Euler.

Corolário 2.6.1: Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite um caminho de Euler, mas não um circuito de Euler, se e só se tiver exatamente dois vértices de grau ímpar. Neste caso o caminho começa num desses vértices e termina no outro.

A demonstração deste corolário pode ser consultada em [11].

CAPÍTULO 3

Baralhar e “magicar”

Neste capítulo vamos dar especial atenção ao baralhamento de cartas.

Em muitos dos truques realizados com cartas, a “magia” começa logo com os processos de corte e de baralhamento. Quando o mágico corta e baralha as cartas, no início de um truque, o seu objetivo é tranquilizar o espectador, mostrar-lhe que o baralho não está preparado e que tudo está nas mãos do acaso e nos dotes sobrenaturais do mágico! Mas, como veremos mais adiante, a magia está na Matemática subjacente aos procedimentos e, claro, na performance do mágico!

Existem duas formas de baralhar as cartas: o baralhamento determinista ou perfeito (*Perfect Shuffle)* e o baralhamento probabilístico (*Riffle Shuffle)*. A realização do baralhamento determinista não depende do acaso, mas sim de um procedimento que, efetuado uma vez, duas vezes ou mais, conduz sempre a um resultado esperado. É possível com este tipo de baralhamento voltar a colocar as cartas na sua posição original ou conduzir uma carta para uma posição pré-definida. Por sua vez, o baralhamento probabilístico está sujeito a fatores aleatórios, que não são controlados pelo mágico, a não ser que faça batota!

Quando o mágico baralha as cartas está a permutá-las, isto é, está a alterar as suas posições. Podemos então considerar cada baralhamento uma permutação do baralho de cartas. No que se segue, representaremos as cartas pelos números 1, 2, 3, …, n, em vez dos seus valores faciais habituais e com as faces voltadas para baixo.

3.1 Baralhamentos perfeitos ou deterministas

Como já foi referido anteriormente, estes baralhamentos não dependem do acaso, mas sim de um procedimento que, efetuado uma vez, duas vezes ou mais, conduz sempre a um resultado esperado. Apresentaremos de seguida alguns exemplos de baralhamentos perfeitos.

3.1.1 Baralhamento “Faro Out”

Consideremos um baralho com um número par de cartas. Para realizar o baralhamento “Faro Out” [4], [5] e [15], o baralho é dividido em dois montes (A e B) com o mesmo número de cartas. O monte A é referente às cartas da parte superior do baralho e o monte B às da parte inferior. As cartas, dos dois montes, devem ser misturadas, intercalando-se uma a uma. Deve garantir-se que a primeira carta, localizada na parte superior do monte A, permaneça no topo do baralho misturado, assim como a última do monte B, deve ser a última do mesmo.

Exemplo 40

Vamos efetuar um baralhamento “Faro Out” num baralho de oito cartas, numeradas de 1 a 8, e colocadas por ordem crescente (1 2 3 4 5 6 7 8). Como se pode observar na figura 3.1, a configuração final do baralho será (1 5 2 6 3 7 4 8).

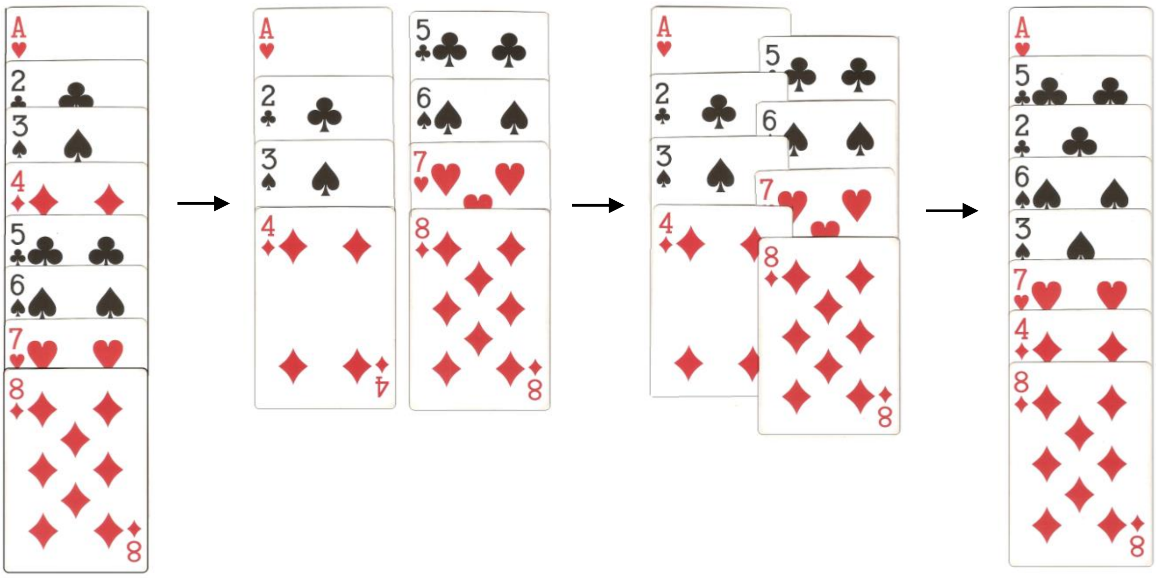


Fig. 3.1 – Baralhamento “Faro Out” com oito cartas

Se voltarmos a aplicar o “Faro Out” a este novo baralho, obtemos a configuração (1 3 5 7 2 4 6 8). Com mais um baralhamento deste tipo, conseguimos voltar à configuração original (1 2 3 4 5 6 7 8). Podemos então concluir que, ao efetuarmos três baralhamentos “Faro Out” consecutivos num baralho com 8 cartas, conseguimos voltar à sua configuração inicial. Com um baralho de 52 cartas, teríamos de efetuar oito baralhamentos “Faro Out” sucessivos. Esta proeza só é alcançada por alguns mestres!

Constatámos assim que o número k de baralhamentos “Faro Out” a realizar, para devolver a configuração inicial de um baralho, depende do número n de cartas.

Conclusão:

- Quando n é par, o valor de k será o menor número inteiro tal que

$$2^k \equiv 1 \bmod(n-1).$$

- Quando n é ímpar, o valor de k será o menor número inteiro tal que

$$2^k \equiv 1 \bmod(n).$$

Neste último caso, devemos ter em atenção que as cartas, do monte mais pequeno, devem ser intercaladas, uma a uma, no monte maior. Este baralhamento tem a designação de “Faro Straddle”. Se pretendermos realizar este baralhamento mais do que uma vez, devemos ter o cuidado de efetuar os cortes do baralho sempre no mesmo sítio.

3.1.2 Baralhamento “Faro In”

O baralhamento “Faro In” [4], [15] é semelhante ao “Faro Out” mas, deve garantir-se que, ao reagrupar as cartas, a primeira carta, localizada na parte superior do monte A, fique na segunda posição, a partir do topo do baralho misturado, e a última do monte B, deve ser a penúltima do mesmo.

Exemplo 41

Vamos efetuar um baralhamento “Faro In” num baralho de oito cartas, numeradas de 1 a 8, e colocadas por ordem crescente (1 2 3 4 5 6 7 8). Depois de efetuar o baralhamento “Faro In” uma vez, o baralho misturado ficará com a configuração (5 1 6 2 7 3 8 4), como constatamos na figura 3.2.

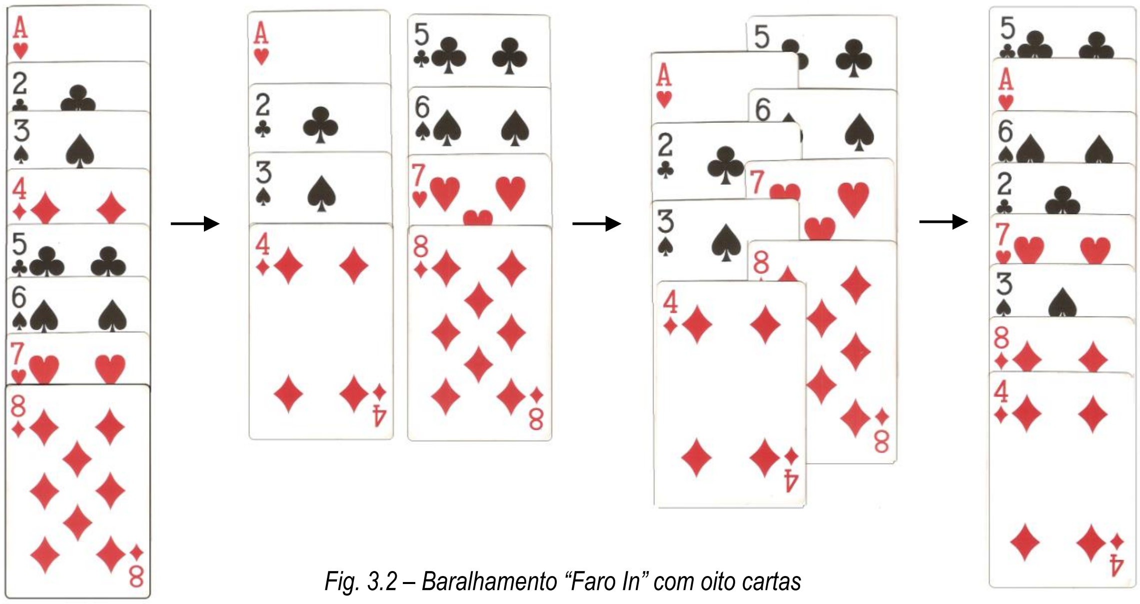


Fig. 3.2 – Baralhamento "Faro In" com oito cartas

À semelhança do "Faro Out", é possível, depois de k baralhamentos "Faro In", voltar à configuração do baralho inicial.

No exemplo 41, serão precisos seis baralhamentos "Faro In" para voltarmos à configuração inicial. Confirmemos:

$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8)\xrightarrow[Faro\ In]{}(5\ \ 1\ \ 6\ \ 2\ \ 7\ \ 3\ \ 8\ \ 4)\xrightarrow[Faro\ In]{}(7\ \ 5\ \ 3\ \ 1\ \ 8\ \ 6\ \ 4\ \ 2)\xrightarrow[Faro\ In]{}$
$(8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)\xrightarrow[Faro\ In]{}(4\ \ 8\ \ 3\ \ 7\ \ 2\ \ 6\ \ 1\ \ 5)\xrightarrow[Faro\ In]{}(2\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 7)\xrightarrow[Faro\ In]{}$
$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8)$.

Conclusão:

- Quando n é par, o valor de k será o menor número inteiro tal que
$$2^k \equiv 1 \bmod (n+1).$$
- Quando n é ímpar, o valor de k será o menor número inteiro tal que
$$2^k \equiv 1 \bmod (n).$$

Neste ultimo caso, devemos ter em atenção que as cartas do monte mais pequeno devem ser intercaladas no monte maior. Se pretendermos realizar este baralhamento mais do que uma vez, devemos ter o cuidado de efetuar os cortes do baralho sempre no mesmo sítio.

3.1.2.1 Algumas propriedades interessantes sobre o baralhamento “Faro”

Com base nas informações anteriores, relativas ao número de baralhamentos “Faro” necessários para voltar à configuração inicial do baralho, podemos elaborar a tabela seguinte [4]:

Números de cartas do baralho (n)	4	5	6	7	8	9	10	11	…	31	32	33	34	…	51	52	53	54
Número de “Faro Out” (k)	2	4	4	3	3	6	6	10	…	5	5	10	10	…	8	8	52	52
Número de “Faro In” (k)	4	4	3	3	6	6	10	10	…	5	10	10	12	…	8	52	52	20

Da observação da tabela constatamos que:

- Num baralho com um número ímpar de cartas, o número de baralhamentos “Faro In” e “Faro Out” é igual;
- O número de baralhamentos “Faro In” necessários para um baralho com $(2m-1)$ cartas é o mesmo que o número de baralhamentos “Faro Out” para um baralho com $(2m)$ cartas.
- Num baralho com 2^m cartas, serão necessários m baralhamentos “Faro Out” para voltar à sua configuração original;

Existem outras propriedades interessantes sobre o baralhamento “Faro”. Por exemplo, cartas que ocupem posições equidistantes dos extremos do baralho, mantém esta característica depois de realizado um baralhamento “Faro Out” ou um baralhamento “Faro In”. Podemos verificar esta propriedade recorrendo aos exemplos 40 e 41.

Posição inicial	1	2	3	**4**	**5**	6	7	8
Um “Faro Out”	1	**5**	2	6	3	7	**4**	8
Um “Faro In”	**5**	1	6	2	7	3	8	**4**

3.1.2.2 Uma combinação perfeita de baralhamentos “Faro”

A combinação apropriada dos baralhamentos “Faro Out” e “ Faro In” [3] permite conduzir a carta situada no topo do baralho para uma posição p. Para começar, deve escrever-se o número inteiro $(p-1)$ em base dois. Os zeros e os uns obtidos serão convertidos nas letras O (Out) e I (In), respetivamente. Vamos exemplificar este procedimento.

Exemplo 42

Utilizemos um baralho de oito cartas, numeradas de 1 a 8, e colocadas por ordem crescente (1 2 3 4 5 6 7 8). Vamos supor que pretendíamos que a carta do topo fosse conduzida para a 5ª posição. Primeiro devemos escrever o número 4 em base dois, ou seja, $4_{(10)} = 100_{(2)}$. A leitura deve ser feita da seguinte forma: *Faro In, Faro Out, Faro Out.* Confirmemos:

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \xrightarrow[Faro\ In]{} (5\ 1\ 6\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4) \xrightarrow[Faro\ Out]{} (5\ 7\ 1\ 3\ 6\ 8\ 2\ 4) \xrightarrow[Faro\ Out]{} (5\ 6\ 7\ 8\ 1\ 2\ 3\ 4).$$

Constatamos que a carta que se encontrava no topo (posição 1) está na 5ª posição, como pretendíamos. Este processo é válido para um baralho com um número par ou ímpar de cartas.

3.1.3 Baralhamento “AntiFaro”

O procedimento é inverso ao do baralhamento “Faro” [3]. Com o baralho numa das mãos, o executante retira cartas, uma a uma, a partir do fundo e coloca-as na mesa, de forma alternada, criando dois montes. Este processo é executado até as cartas ficarem todas na mesa. De seguida, se o objetivo for criar o processo inverso do baralhamento “Faro Out”, o executante recolhe os montes tendo em atenção que o monte, onde foi colocada a última carta, deve ficar na parte superior do baralho misturado. Se recolher por ordem contrária, o executante estará a realizar o inverso do “Faro In”. As propriedades verificadas para o baralhamento “Faro” são válidas para o “AntiFaro”. Em termo práticos, o baralhamento “AntiFaro” é mais fácil de realizar do que o baralhamento “Faro”.

3.1.4 Baralhamento “Under-and-down”

Para este baralhamento [1], [3] os procedimentos são os seguintes:

- A carta do topo do baralho passa para o fundo;
- A carta, que está agora no topo, é colocada na mesa;
- A carta seguinte passa para o fundo do baralho;
- A carta seguinte vai para a mesa e assim sucessivamente, até ficarem as cartas todas na mesa.

Exemplo 43

Consideremos um baralho com 8 cartas, numeradas de 1 a 8 e ordenadas por ordem crescente (o Ás fica no topo). Depois de realizado um baralhamento “Under-and-down”, a permutação é $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 4 & 7 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (2 \;\; 8 \;\; 5)(3 \;\; 4 \;\; 7)$. No segundo membro temos dois ciclos de comprimento três pelo que a ordem desta permutação é três. Com esta informação podemos concluir que serão necessários três baralhamentos “Under-and-down” para que o baralho volte à sua configuração original.

Exemplo 44

Se o nosso baralho tivesse 10 cartas, nas mesmas condições, depois de realizado um baralhamento “Under-and-down”, a permutação seria

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 5 & 9 & 1 & 8 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1 \;\; 3 \;\; 5)(2 \;\; 10 \;\; 6 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 9).$$

No segundo membro temos dois ciclos, um de comprimento três e outro de comprimento 7. A ordem desta permutação é 21 (mínimo múltiplo comum de 3 e 7). Neste caso, seria necessário realizar vinte e um baralhamentos “Under-and-down” para voltarmos à configuração original.

Com esta propriedade já é possível criar um truque de magia, mas o mais impressionante é que é possível saber qual é o valor da última carta a ser colocada na mesa. Com um baralho de n cartas, a última carta a ser colocada na mesa é a que estava inicialmente na posição $2(n - 2^k) + 1$, em que 2^k é a maior potência de 2 menor ou igual a n.

Existe uma variante do baralhamento “Under-and-down” conhecido como baralhamento “Down-and-under”, em que a ordem dos procedimentos é invertida, ou seja, a carta do topo vai para a mesa e a seguinte vai para o fundo do baralho, e assim sucessivamente. Neste caso, a última carta a ser colocada na mesa será a que ocupava o lugar $2(n-2^k)$, em que 2^k é a maior potência de 2 menor que n.

O mágico canadiano Mel Stover foi o primeiro a utilizar o sistema binário para conseguir a mesma proeza. Esta propriedade é explorada no truque intitulado “Fraca memória” apresentado na página 76.

3.1.5 Baralhamento “Monge”

Este baralhamento tem esta designação em homenagem ao matemático francês Gaspar Monge, que estudou as suas propriedades em 1773.

O baralhamento “Monge” [1], [37] realiza-se da seguinte forma:

- Com o baralho na mão direita, passamos a carta do topo para a mão esquerda.
- A carta, que se encontra agora no topo do baralho, passa para a mão esquerda e é colocada sobre a outra carta.
- A carta, que está no topo do baralho da mão direita, passa para a mão esquerda, mas desta vez é colocada sob as outras duas.
- Repete-se este procedimento, colocando uma carta por cima, outra por baixo e assim sucessivamente, até ficarmos sem cartas na mão direita.

Exemplo 45

Consideremos um baralho de 10 cartas, numeradas de 1 a 10 e ordenadas por ordem crescente (o ás fica no topo). Depois de realizado um baralhamento “Monge”, a configuração do baralho será $(10\ \ 8\ \ 6\ \ 4\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9)$. Se o baralho tivesse um número ímpar de cartas, por exemplo, nove, a configuração final seria $(8\ \ 6\ \ 4\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9)$. Constatámos que este baralhamento separa as cartas que se encontravam numa posição par das que estavam numa posição ímpar e coloca-as segundo uma determinada ordem.

De uma forma geral, se utilizarmos uma quantidade par de cartas, ordenadas de 1 a $2n$, a configuração do baralho, depois de realizado um baralhamento "Monge", será

$$(2n \quad 2n-2 \quad \ldots \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad \ldots \quad 2n-1).$$

Se utilizarmos uma quantidade ímpar de cartas, ordenadas de 1 a $2n+1$, a configuração final será

$$(2n \quad 2n-2 \quad \ldots \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad \ldots \quad 2n-1 \quad 2n+1).$$

À semelhança de outros baralhamentos deterministas é possível voltar à configuração inicial do baralho e ainda determinar a posição de qualquer carta, ao fim de um certo número de baralhamentos.

Ao efetuarmos sucessivos baralhamentos "Monge", num baralho com um número ímpar de cartas, constatamos que a carta que se encontra no fundo permanecerá sempre nessa posição. Sendo esta carta "prescindível", o estudo das propriedades deste baralhamento pode ser limitado ao baralho com um número par de cartas. No entanto, as conclusões são válidas para um baralho "ímpar".

Sendo assim, dado um baralho com $2n$ cartas, depois de realizado um baralhamento "Monge", a carta que ocupava a posição p_0, no baralho inicial, ficará na posição p_1, calculada da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2p_1 = 2n + 1 + p_0 & \text{se } p_0 \text{ é ímpar} \\ 2p_1 = 2n + 2 - p_0 & \text{se } p_0 \text{ é par} \end{cases} \tag{3.1}$$

O número mínimo de baralhamentos "Monge" necessários para recuperar a configuração inicial do baralho depende do número de cartas que o compõe. Num estudo recente, verificou-se que esse número está relacionado com a ordem da permutação das cartas resultante do baralhamento. Observemos com atenção a tabela que se segue.

Número de cartas *($2n$)*	**Ordem da permutação**	**Decomposição em ciclos**	**Posição fixa**
2	2	(1 2)	-
4	3	(1 3 4)(2)	2
6	6	(1 4 2 3 5 6)	-
8	4	(1 5 7 8)(2 4 3 6)	-
10	6	(1 6 3 7 9 10)(2 5 8)(4)	4
…	…	…	…

32	6	(1 17 25 29 31 32)…(7 20)	-
…	…	…	…
52	12	(1 27 40 7 30 12 21 37 45 49 51 52) …(8 38 23)(11 32)(18)	18

Assim, para um baralho com $2n$ cartas, o menor inteiro k que verifica uma das seguintes condições:

$$2^k \equiv 1 \mod (4n+1) \quad \text{ou} \quad 2^k \equiv -1 \mod (4n+1)$$

representa o número mínimo de baralhamentos "Monge" necessários para voltar à configuração inicial do baralho [37].

Facilmente constatamos que se o número de cartas for uma potência de base dois, 2^k, basta fazer $(k+1)$ baralhamentos "Monge" para voltar à configuração original do baralho. Isto porque $4n+1 = 2 \times 2^k + 1 = 2^{k+1} + 1$.

Exemplo 46

Com um baralho de 8 cartas teríamos que realizar quatro baralhamentos "Monge" para recuperar a configuração inicial, como podemos constatar no esquema seguinte:

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \xrightarrow[Monge]{} (8\ 6\ 4\ 2\ 1\ 3\ 5\ 7) \xrightarrow[Monge]{} (7\ 3\ 2\ 6\ 8\ 4\ 1\ 5) \xrightarrow[Monge]{} (5\ 4\ 6\ 3\ 7\ 2\ 8\ 1)$$

$$\xrightarrow[Monge]{} (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8).$$

Outro aspeto interessante prende-se com a existência de "pontos fixos", isto é, cartas que permanecem na mesma posição, apesar de realizado o baralhamento "Monge". Esta particularidade é muito útil para os truques de magia! Se consultarmos a tabela anterior, verificamos, por exemplo, que ao realizar o baralhamento "Monge" num baralho com 10 cartas, a carta que se encontra na posição 4 não vai permutar. Existem outras singularidades interessantes como a seguinte:

Num baralho com $(10a+2)$ cartas, as cartas que se encontram nas posições $(2a+1)$ e $(6a+2)$ trocam entre si, depois de executado um baralhamento "Monge". Esta particularidade pode ser verificada utilizando a fórmula (3.1).

Considerando $2p_1 = 2n + 2 - p_0$ e $p_0 = (2a+1)$ temos que

$$2p_1 = (10a + 2) + 1 + (2a + 1)$$
$$\Leftrightarrow 2p_1 = 12a + 4$$
$$\Leftrightarrow p_1 = 6a + 2.$$

Considerando $p_0 = (6a + 2)$ vem

$$2p_1 = (10a + 2) + 2 - (6a + 2)$$
$$\Leftrightarrow 2p_1 = 4a + 2$$
$$\Leftrightarrow p_1 = 2a + 1.$$

Esta singularidade pode ser aplicada a um baralho de 52 cartas. Depois de realizado um baralhamento “Monge”, sabemos que as cartas que ocupam as posições 11 e 32 vão comutar. Sabemos ainda que a 18ª carta mantém-se na mesma posição, por ser um “ponto fixo” (consultar a tabela anterior).

Existem alguns truques interessantes onde o baralhamento “Monge” é o princípio base do seu funcionamento. Por exemplo, “A herança” que encontraremos na página 74.

3.2 Baralhamentos probabilísticos

Como já foi referido anteriormente, os baralhamentos probabilísticos [15] estão sujeitos a fatores aleatórios que não são controlados pelo executante. Será abordado o mais conhecido, o **baralhamento “Americano”**.

Este tipo de baralhamento é comparado a um baralhamento “Faro” imperfeito. O baralho é cortado, de forma aleatória, em dois montes, A e B, que poderão ser desiguais. O baralhamento consiste na intercalação das cartas, umas nas outras, de forma aleatória. O baralho misturado terá, por esta ordem: algumas ou nenhumas cartas da parte superior do monte A, seguidas de algumas ou nenhumas cartas da parte superior do monte B, seguidas de algumas das restantes cartas do monte A, seguidas de algumas das restantes cartas do monte B, e assim sucessivamente. Cada grupo de cartas que vai sendo intercalado mantém a ordem que possuía no baralho inicial.

Se o objetivo for desordenar o jogo de cartas, este tipo de baralhamento parece adequado. Henri Poincaré, que estudou os baralhamentos aleatórios, referiu, em 1912 no seu livro *Calcul des probabilités* [48] que o número de maneiras de permutar n cartas é $n!$. Demonstrou ainda que, executando um número elevado de baralhamentos aleatórios, é possível calcular, de forma aproximada, a probabilidade de uma determinada sequência de cartas ocorrer, que é $\frac{1}{n!}$. No entanto, nada refere quanto ao número de baralhamentos necessários para que isso seja possível. Émile Borel (1871-1956), sem o demonstrar, refere que um baralho de 52 cartas fica convenientemente misturado se forem realizados sete baralhamentos "Americanos" consecutivos [10]. Edgar Gilbert e Claude Shannon, em 1955, utilizaram um modelo matemático para descrever o baralhamento "Americano" [30]. Relativamente ao corte do baralho, referiam que este é dividido em dois montes, normalmente desiguais, com p e p'cartas $(p + p' = n)$ com uma probabilidade de $\frac{^{n}C_{p}}{2^{n}}$. Por exemplo, ao cortar um baralho de 10 cartas em dois montes, a probabilidade destes terem o mesmo número de cartas, entre todas as separações possíveis, seria de, aproximadamente, 24,6% $\left(\frac{^{10}C_{5}}{2^{10}}\right)$; se a separação pretendida fosse, por exemplo, (3 ; 7) ou (7 ; 3), a probabilidade seria de 11,7%$\left(\frac{^{10}C_{3}}{2^{10}}\right)$ e assim sucessivamente. Edgar Gilbert e Claude Shannon conseguiram também criar um modelo para a intercalação dos dois montes obtidos. Referiram que, quando se intercala um monte A de p cartas num monte B de p' cartas, a probabilidade de a primeira carta, do baralho misturado, ser a carta do topo do monte A é $\frac{p}{p+p'}$ e ser a do monte B, $\frac{p'}{p+p'}$. O modelo é aplicado de forma similar às restantes cartas, que pertencem agora a dois montes mais pequenos. Ficou, mais uma vez, por explorar o número de baralhamentos "Americanos" necessários para desordenar de forma aceitável um baralho de cartas. Este problema foi solucionado por Dave Bayer e Persi Diaconis em 1992 [19]. O baralhamento "Americano" é generalizado, isto é, a separação do baralho inicial é feita em a montes, em vez de dois. Os a montes são depois cruzados, simultaneamente, uns nos outros. Este baralhamento é designado por a–baralhamento "Americano". Bayer e Diaconis demonstraram que efetuar um a–baralhamento "Americano" seguido de um b–baralhamento "Americano" era equivalente a realizar um ab– baralhamento "Americano". Assim, será fácil de perceber que realizar k vezes um baralhamento "Americano" usual (2-baralhamento "Americano") é o mesmo que executar um 2^{k}– baralhamento "Americano". Com esta propriedade, é possível calcular a probabilidade de ocorrer uma determinada sequência de cartas, após k baralhamentos "Americanos" efetuados consecutivamente. Esta quantificação possibilitou a medição da qualidade do baralhamento, ou seja, permitiu verificar se o grau de desordenação das cartas é aceitável.

A probabilidade de obter uma determinada sequência de cartas, f, depois de realizado um a–baralhamento "Americano", num baralho com n cartas é dada pela fórmula

$$\text{P}(f)= \frac{{}^{a+n-sc(f)}C_n}{a^n},$$

onde sc(f) representa o número de subsequências crescentes obtidas a partir de f (página 19).

Exemplo 47

Se efetuarmos um 2-baralhamento "Americano", três vezes seguidas, num baralho com 16 cartas, numeradas de 1 a 16, o que equivale a um 8-baralhamento "Americano", a probabilidade da sequência $(14\ \ 3\ \ 4\ \ 15\ \ 6\ \ 9\ \ 10\ \ 5\ \ 11\ \ 1\ \ 7\ \ 12\ \ 2\ \ 8\ \ 16\ \ 13)$ ocorrer é de $\frac{{}^{8+16-5}C_{16}}{8^{16}} = \frac{{}^{19}C_{16}}{8^{16}} \cong 3{,}44 \times 10^{-12}$.

(Observação: A sequência apresentada tem 5 subsequências crescentes: (1, 2), (3, 4, 5), (6, 7, 8), (9, 10, 11, 12, 13), (14, 15, 16)).

A probabilidade esperada seria, para um baralhamento "ideal" e partindo do pressuposto que todas as sequências obtidas são equiprováveis, de $\frac{1}{16!} \cong 4{,}77 \times 10^{-14}$. Embora a primeira probabilidade seja cerca de 100 vezes superior à segunda, são ambas muito pequenas (de ordem inferior a 10^{-11}), o que nos permite considerar que o baralho fica "quase" aleatoriamente baralhado.

Bayer e Diaconis conseguiram criar uma fórmula que permite calcular a distância entre o baralhamento "Americano", efetuado k vezes, e o baralhamento aleatório ideal. A fórmula é

$$d = \frac{1}{2}\sum_{f \in S_n} \left| P(f) - \frac{1}{n!} \right|$$

onde S_n representa o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Estas distâncias tomam valores entre 0 e 1. Quando a distância é próxima de 1, o baralhamento não é considerado aceitável. Valores inferiores a 0,5 são considerados aceitáveis. Quanto mais pequena for essa distância melhor. Bayer e Diaconis elaboraram uma tabela, como a que se segue, com as distâncias para um baralho com n cartas e um baralhamento "Americano" realizado k vezes sobre esse mesmo baralho.

k / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	1,000	1,000	0,999	0,775	0,437	0,231	0,114	0,056	0,028	0,014
32	1,000	1,000	1,000	0,929	0,597	0,322	0,164	0,084	0,042	0,021
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,924	0,614	0,334	0,167	0,085	0,043
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,893	0,571	0,307	0,153	0,078
104	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,988	0,772	0,454	0,237	0,119

Da observação da tabela, constata-se que, para um baralho com 52 cartas, o baralhamento "Americano" é considerado aceitável a partir da sétima execução, como tinha referido Émile Borel.

Nos truques "Pares impossíveis" (página 165) e "Premonição" (página 171) o baralhamento "Americano" é utilizado na concretização dos mesmos.

Outros baralhamentos aleatórios foram estudados, como o baralhamento "Top-to-random" que consiste em retirar a carta que está no topo do baralho e voltar a colocá-la, de forma aleatória, no baralho. Lerna Pehlivan, professora de Matemática da Universidade de Washington, demonstrou, em 2010 [45], que este baralhamento é considerado satisfatório se for realizado, aproximadamente, $(4n \log_2 n)$ vezes, sobre um baralho com n cartas.

CAPÍTULO 4

Um pouco de "Matemagia" com cartas

Os diferentes exemplos de baralhamentos apresentados no capítulo anterior permitem antever a diversidade de truques de magia que é possível engendrar com cartas. Serão apresentados alguns, com fundamentação matemática, que poderão ser realizados num contexto familiar, num serão cultural ou num ambiente escolar. A admiração e o espanto impulsionam muitas vezes a vontade de aprender. Estas recreações matemáticas estimulam e seduzem os alunos de todos os níveis escolares. Alguns dos truques podem mesmo ser utilizados em contexto de sala de aula, com o intuito de desenvolver uma perspetiva positiva sobre o papel e utilização da Matemática bem como o de criar uma boa imagem de algumas noções matemáticas já abordadas ou que se pretendam ensinar.

De referir que na exploração dos truques apresentados será utilizado um baralho de cartas usual (baralho francês), constituído por quatro naipes, cada um deles com treze cartas distintas, três das quais com figuras (Rei, Dama e Valete) e as restantes 10 numeradas de um a dez (Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Algumas das cartas numeradas têm designações específicas, a saber:

- Duque – carta com o número dois;
- Terno – carta com o número três;
- Quadra – carta com o número quatro;
- Quina – carta com o número cinco;
- Sena – carta com o número seis.

De seguida serão apresentados alguns truques com a indicação da referência bibliográfica, do material necessário e dos procedimentos a realizar para a sua execução. Para além disso, serão desvendados os segredos que estão na base do seu sucesso. Veremos que os efeitos mágicos surpreendentes devem-se não só à mestria do mágico como a alguns conceitos de Matemática.

Os truques serão divididos em grupos tendo em atenção algumas características similares.

No primeiro grupo, "Baralhar para iludir", encontraremos alguns dos truques cujo efeito mágico tem por base, entre outros aspetos, a forma como é feito o baralhamento das cartas. Como já foi referido no capítulo anterior, baralhar as cartas não é sempre sinónimo de misturá-las de forma aleatória. Os truques deste grupo espelham muito bem esta particularidade.

No segundo grupo, “A magia na base 2”, encontraremos, como o próprio nome indica, os truques que utilizam, entre outros conceitos, o sistema binário para alcançar o êxito.

O terceiro grupo, “A magia dos números”, é composto por truques que recorrem a algumas propriedades dos números, no sistema decimal, como por exemplo, o critério de divisibilidade por 9.

O quarto grupo, “A magia da álgebra”, é constituído por truques que recorrem sobretudo à álgebra para garantir o efeito mágico pretendido.

No quinto grupo, “Outras magias com cartas”, encontraremos truques variados, que utilizam conceitos matemáticos específicos como o quadrado do binómio, a sequência de Fibonacci ou combinações elaboradas de vários princípios.

Por fim, no sexto grupo, “Preparar-se para adivinhar”, os truques apresentados exigem uma preparação prévia. O mágico deve, por exemplo, memorizar uma sequência de cartas ou posicionar, no baralho inicial, algumas delas.

Este agrupamento dos truques não é estanque, isto é, alguns deles podem perfeitamente ser movidos de um grupo para outro. Por isso, será apresentado um quadro resumo com todos os truques apresentados neste capítulo, especificando-se os conteúdos matemáticos inerentes à sua execução. Assim, o professor ou executante só terá que o consultar e escolher as “magias” mais adequadas para a persecução dos seus objetivos.

4.1 QUADRO RESUMO

			Conteúdos matemáticos						
Página	Designação do truque	Baralhamento especial e/ou baralho preparado	Sistemas de numeração	Permutações	Expressões algébricas	Congruência modular	Múltiplos e divisores	Códigos de Hamming	Princípio de Dirichelet
73	1 - Herança								
75	2 - Fraca memória								
78	3 - A vermelhinha								
81	4 - Ás, Duque e terno								
84	5 - Dados e cartas								
87	6 - As cinco cartas								
92	7- 5 perguntas para 32 cartas								
96	8 - O detetor de mentiras								
100	9 - Um copo mágico								
104	10 - A prova dos nove								
106	11 - A bola de cristal								
108	12 - O mentalista								
110	13 - O cadeado mágico								
113	14 - Sou realmente um génio								
115	15 - As cartas às avessas								
117	16 - A revelação da meia-noite								

			Conteúdos matemáticos								
Página	Designação do truque	Baralhamento especial e/ou baralho preparado	Sistemas de numeração	Análise combinatória e probabilidades	Binómio de Newton	Sequências	Isometria - reflexão	Expressões algébricas	Congruência modular	Princípios de Gilbreath	Grafos eulerianos
119	17 – 13, o número da sorte										
121	18 – Força misteriosa										
124	19 – Previsão desconcertante										
126	20 – Uma soma rara										
129	21 – A magia do triângulo de Pascal										
132	22 – Os quatro retratos										
136	23 – Mini sequência de Fibonacci										
138	24 – Esconde - esconde										
141	25 – As 21 cartas										
151	26 – Só ases!										
153	27 – Um caso notável										
155	28 – Os ases de Belchou										
157	29 – Transmissão de pensamentos										
164	30 – Pares impossíveis										
170	31 - Premonição										

1 - A herança

Este truque teve por base a referência bibliográfica [1].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas e um jóquer

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Divisores de um número
- Congruência modular
- Permutações
- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico começa por contar a seguinte história: “Há muitos, muitos anos, um sultão deixou no seu testamento a indicação de que, após a sua morte, todos os seus camelos deveriam ser distribuídos pelos seus três filhos: o mais velho receberia metade, o segundo a quarta parte e o mais novo a oitava parte. Quando o sultão morreu deixou 7 camelos, quantidade que não era divisível por dois, nem por quatro nem por oito. Os filhos foram pedir ajuda a um mago que se prontificou de imediato e até deu um dos seus camelos para facilitar a partilha. Assim, o mais velho recebeu quatro camelos (metade de 8), o segundo recebeu 2 camelos (a quarta parte de 8) e o mais novo dos irmãos ficou com um camelo (a oitava parte de 8). Depois de feita a distribuição, constataram que tinha sobrado um camelo. O mago, para além de ter ajudado os filhos do sultão, conseguiu ainda recuperar o seu camelo”.
2. O mágico anuncia ao público que irá recrear a história com algumas das cartas do seu baralho. Assim, retira sete cartas que representarão os camelos do sultão.
3. O mágico coloca sobre a mesa as sete cartas, com as faces voltadas para baixo.
4. À semelhança do mago da história, o mágico terá que acrescentar uma carta, que representará o camelo emprestado. O mágico vai buscar uma carta ao restante baralho, por exemplo, um jóquer, mostra-a ao público e coloca-a, face voltada para baixo, sobre o monte das sete cartas.

5. O mágico solicita a ajuda de três espectadores para representarem os filhos do sultão. Ao “irmão mais velho”, o mágico entrega o monte das oito cartas, com as faces voltadas para baixo, e pede-lhe que realize um baralhamento “Monge”, depois de lhe explicar os procedimentos (página 63). O mágico recolhe o monte e entrega-o ao “irmão do meio” que deverá, por sua vez, realizar um novo baralhamento “Monge”. O mágico recolhe novamente o monte de cartas e entrega-o ao “filho mais novo”, que fará o mesmo.
6. O mágico recolhe novamente as cartas, com as faces voltadas para baixo, e entrega ao “irmão mais velho” as quatro primeiras, a partir do topo, correspondendo aos camelos a que tem direito por herança. Ao “irmão do meio”, o mágico entrega as duas cartas seguintes e ao “mais novo”, a penúltima carta. A última carta fica para o mágico. Este mostra-a ao público que confirma ser o jóquer. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

O baralhamento “Monge” está na base deste truque. A carta colocada no topo do monte pelo mágico, o jóquer, irá ficar, depois dos três baralhamentos, no fundo do baralho (consultar exemplo 45 da página 63). Assim, o mágico só tem que distribuir as cartas pelos três espectadores e ficar com a última.

Este truque poderá ser interessante para explorar a noção de divisor de um número.

2 – Fraca memória

Este truque teve por base a referência bibliográfica [52]

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Sistema binário
- Expressões algébricas

Observação: Para a realização deste truque o mágico tem de conhecer a carta do topo do baralho.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que escolha um número entre 10 e 30.
2. O mágico calcula, mentalmente, o dobro da diferença entre o número escolhido pelo espectador (x) e a maior potência de base 2, menor que x. Por exemplo, se o espectador escolher o número 12, o mágico deverá fazer o seguinte cálculo: $2 \times (12 - 2^3) = 8$.
3. De seguida, o mágico, segurando o baralho numa das mãos, passa, para a outra, o número de cartas correspondente ao resultado do seu cálculo mental, invertendo a ordem das cartas, isto é, a primeira carta que retira do topo do baralho fica no fundo, a segunda em cima da anterior e assim sucessivamente. Quando termina, fingindo esquecimento, o mágico pede ao espectador para repetir o número que escolheu inicialmente. O mágico continua então a fazer o monte só que desta vez as cartas que retira do baralho são colocadas por baixo da pilha já existente. O mágico termina quando o monte tiver o número de cartas correspondente ao número escolhido pelo espectador, ou seja, x. Nota: Se o número escolhido pelo espectador for uma potência de base 2 esta última parte não será necessária.
4. O mágico entrega o monte de cartas, com as faces voltadas para baixo, ao espectador e pede-lhe que faça um baralhamento "Down-and-Under". Neste processo, o espectador começa por colocar a carta do topo em cima da mesa, a seguinte passa para o fundo do monte, a próxima

é colocada na mesa, a seguinte no fundo do monte, e assim sucessivamente, até ficar apenas com uma carta na mão.

5. O mágico consegue adivinhar essa carta. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Na base deste truque está o baralhamento “Down-and-Under”, apresentado no capítulo 3 (página 62).

Se x for o número de cartas de um monte e 2^n a maior potência de base 2 inferior a x, então, depois do baralhamento “Down-and-Under” a carta que ficará sozinha será a que estava inicialmente na posição $2(x-2^n)$.

Vamos supor que, no sistema binário, x se escreve da seguinte forma:

$$x=(1a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_{(2)}=1\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\cdots+a_0\times 2^0.$$

Sendo esta representação válida para todos os números que não são potências de base 2. Se x for uma potência de base 2 então

$$x=(1000\dots 0)_{(2)}=1\times 2^{n+1}.$$

Após o baralhamento “Down-and-Under”, temos, para todos os valores de x que não sejam potências de 2:

$$\begin{aligned}2(x-2^n)&=2(1\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\cdots+a_0\times 2^0-2^n)=\\&=a_{n-1}\times 2^n+a_{n-2}\times 2^{n-1}+\cdots+a_0\times 2^1+0\times 2^0=\\&=(a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0 0)_{(2)}.\end{aligned}$$

Se x for uma potência de 2 então

$$2(x-2^n)=2(2^{n+1}-2^n)=2^{n+1}.$$

Concluímos que a carta final será a que estava na posição correspondente ao número que em binário se escreve $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0 0$, que é igual ao número que se obtém duplicando a diferença entre x e a maior potência de 2 menor que x.

Isto facilmente se pode constatar pela observação da tabela que se segue.

x no sistema decimal	Sistema binário x	$2(x-2^n)$	Resultado no sistema binário
10	1010	$2\times(10-2^3)=4$	0100
11	1011	$2\times(11-2^3)=6$	0110
12	1100	$2\times(12-2^3)=8$	1000
13	1101	$2\times(13-2^3)=10$	1010
14	1110	$2\times(14-2^3)=12$	1100
15	1111	$2\times(15-2^3)=14$	1110
16	10000	$2\times(16-2^3)=16$	10000
17	10001	$2\times(17-2^4)=2$	00010
18	10010	$2\times(18-2^4)=4$	00100
…	…	…	…
30	11110	$2\times(30-2^4)=28$	11100

3 - A vermelhinha

Este truque teve por base a referência sitográfica [62].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Permutações
- Múltiplos de 3
- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho de cartas a um espectador que pretenda, de forma solícita, participar no truque.
2. O mágico pede ao espectador que retire três cartas: duas pretas e uma vermelha. O restante baralho é colocado à parte, não sendo necessário para prosseguir com o truque.
3. O mágico pede ao espectador que segure as cartas, com as faces voltadas para baixo, e que coloque a carta vermelha no topo. O mágico refere que, neste momento, todos têm conhecimento da posição da carta vermelha. O mágico revela que o monte será baralhado apenas pelo espectador.
4. O mágico anuncia que, depois de efetuado o baralhamento, conseguirá descobrir a posição da carta vermelha.
5. O mágico refere que, para dar um cunho pessoal ao truque, o espectador irá baralhar o monte de cartas utilizando o seu nome próprio. O espectador deverá, por cada letra do seu nome, passar a carta do topo para o fundo. Este procedimento é realizado duas vezes e deve ser feito em silêncio, para que o mágico não tenha a perceção do número de letras que compõe o nome do espectador. O mágico, sob o pretexto de tornar o procedimento ainda mais aleatório, pede ao espectador que realize o mesmo procedimento, apenas uma vez, com a palavra MAGIA. Para

terminar, o mágico volta a pedir ao espectador que baralhe, mais uma vez, utilizando o seu nome próprio.

6. Terminado o baralhamento, o mágico pede ao espectador que mostre, apenas ao público, a carta que está no topo. O mágico concentra-se e anuncia que essa carta não é vermelha. O público confirma. Pede então ao espectador que descarte essa carta e que mostre ao público a carta que se encontra agora no topo. Mais uma vez, o mágico concentra-se e anuncia que essa carta é vermelha. O público confirma! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Vamos representar a carta vermelha por V e as cartas pretas por P_1 e P_2 . Observemos a tabela seguinte.

Número de letras do nome próprio	**Permutação**	**Ordem da permutação**
1	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_1\ \ P_2\ \ V)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2)$	3
2	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_2\ \ V\ \ P_1)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$	3
3	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (V\ \ P_1\ \ P_2)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	1
4	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_1\ \ P_2\ \ V)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2)$	3
5	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_2\ \ V\ \ P_1)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$	3
6	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (V\ \ P_1\ \ P_2)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	1
7	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_1\ \ P_2\ \ V)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2)$	3
…	…	…
$3n-2, \qquad n \in \mathbb{N}$	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_1\ \ P_2\ \ V)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2)$	3

$3n-1, \qquad n \in \mathbb{N}$	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (P_2\ \ V\ \ P_1)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$	3
$3n, \qquad n \in \mathbb{N}$	$(V\ \ P_1\ \ P_2) \rightarrow (V\ \ P_1\ \ P_2)$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	1

Verificamos que, se o número de letras que compõe o nome do espectador for um múltiplo de três, a cada baralhamento realizado, o monte de cartas volta à sua configuração inicial. Nos restantes casos, são necessários três baralhamentos para que isso aconteça. Portanto, o mágico sabe que os três baralhamentos, executados com base no nome próprio do espectador, manterão a carta vermelha no topo. A palavra escolhida pelo mágico é essencial para o posicionamento final da carta vermelha. No truque apresentado, o mágico utilizou a palavra MAGIA, para "encaminhar" a carta vermelha para a posição central. Esta situação ocorrerá sempre que for utilizada uma palavra com $(3n-1)$ letras, qualquer que seja o número natural n. Se o objetivo for posicionar a carta vermelha no fundo do monte então a palavra a utilizar deverá ter $(3n-2)$ letras. Se o mágico preferir manter a carta vermelha no topo, deverá utilizar uma palavra com $3n$ letras. O mágico pode alterar a ordem do procedimento, isto é, pode pedir, por exemplo, que o primeiro baralhamento seja efetuado com o nome próprio do espectador, seguido do baralhamento com a palavra do mágico e finalmente, os dois últimos baralhamentos, com o nome do espectador. Esta última particularidade deve-se ao facto da composição de permutações ser associativa.

4 - Ás, Duque e Terno

Este truque teve por base a referência bibliográfica [52].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Permutações
- Composição de permutações

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico coloca um Ás, um Duque e um Terno, de qualquer naipe e de faces voltadas para cima, na mesa, da esquerda para a direita: Ás, 2, 3. Volta-se de costas e pede a um espectador que escolha mentalmente uma destas cartas e que a vire, colocando-a com a face voltada para baixo. Depois disso, o mágico pede ao espectador que vire também as duas outras cartas, mas deve, antes disso, trocá-las entre si. Neste momento, estão sobre a mesa três cartas com as faces voltadas para baixo.
2. O mágico vira-se e recolhe as cartas, de modo a que a da direita fique por cima, a do meio no meio, e a da esquerda por baixo. Baralha, de modo a passar quatro cartas (ou sete, ou dez, ou treze, ...) do topo para o fundo, uma carta de cada vez, ou cinco (ou oito, ou onze, ...) duas de cada vez, em bloco. O mágico coloca as três cartas de novo sobre a mesa, com as faces voltadas para baixo, tendo o cuidado de colocar a carta que está no topo no meio, a seguinte à direita e a última à esquerda.
3. O mágico pede ao espectador que lhe dê um palpite sobre qual será a posição da carta que escolheu inicialmente. O mágico vira para cima a carta sugerida pelo espectador. Nesse momento, o mágico pensa nas cartas como números, isto é, o Ás é equivalente ao número um, o Duque ao número dois e o Terno ao número três. Para além disso, numera mentalmente as posições das cartas que tem na mesa, agora da direita para a esquerda com 1´, 2´ e 3´. O

palpite do espectador consiste em escolher a carta i que se encontra na posição j. Se $i = j$, essa foi a carta escolhida inicialmente pelo espectador. Se $i \neq j$, então a carta é a que está na posição k, diferente de i e j. Por exemplo, se o palpite do espectador for o Terno (número 3) e esta carta estiver na posição 1´ (carta da direita) então como $i \neq j$ $(3 \neq 1)$, a carta que o espectador escolheu no início do truque estará na posição 2´ (carta do meio).

4. O mágico poderá dizer: “Acertou, foi essa a sua escolha inicial” ou então “Não é essa, mas sim esta” e vira a carta correta. Em qualquer dos casos o mágico acerta! Magia! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

O espectador, ao trocar as posições de duas das cartas, está a efetuar uma permutação. Se o mágico conseguir descobrir qual foi a troca, poderá facilmente encontrar a carta escolhida.

Este truque poderá ser assim explicado utilizando permutações de um conjunto de três elementos e a composição de permutações. Estes assuntos foram abordados no capítulo 2 (página 15).

No nosso truque consideremos a situação em que o mágico se volta e encontra sobre a mesa as três cartas com as faces voltadas para baixo.

Consideremos os números 1, 2 e 3 para representar as três cartas, da esquerda para a direita.

Quando o mágico recolhe as cartas da direita para a esquerda, a permutação que ocorre é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

De seguida, quando o mágico baralha as cartas, conforme descrito no truque, o efeito provocado é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quando finalmente o mágico coloca as cartas sobre a mesa, conforme descrito no truque, o efeito é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2' & 1' & 3' \end{pmatrix}.$$

Como a composição das permutações anteriores é a identidade (a menos da inversão da ordem das posições que se processou a certa altura), o mágico colocará na mesa as cartas na mesma ordem em que estavam quando as recolheu, mas em sentido inverso. Assim, as cartas estarão nos lugares 1´, 2´ e 3´, de acordo com a troca realizada pelo espectador, mas agora a posição 1´ é a da direita.

Como esta permutação se limitou a trocar a posição de duas cartas, o mágico conseguirá, ao saber a posição de qualquer uma delas, descobrir a permutação efetuada pelo espectador e por consequência descobrir a carta escolhida. A troca do sentido de ordenação das posições serve apenas para confundir o espectador.

5 - Dados e cartas

Este truque teve por base a referência sitográfica [63].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas
- Três dados cúbicos equilibrados e com as faces numeradas de 1 a 6

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Permutações
- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

O mágico deve conhecer a carta que está no topo do baralho (faces voltadas para baixo).

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico baralha as cartas em frente ao público, com as faces voltadas para baixo. Poderá utilizar, por exemplo, um baralhamento “Americano” (página 65), no entanto, deverá ter o cuidado de manter a carta, que visualizou inicialmente, no topo do baralho.
2. De seguida, o mágico entrega os três dados a um espectador e pede-lhe que os lance sobre uma mesa.
3. O mágico comunica ao público os números que saíram e pede ao espectador que os adicione.
4. O mágico, que está com o baralho numa das mãos, descarta, uma a uma, com as faces voltadas para baixo, o número de cartas correspondente à soma obtida. Esse monte de cartas fica sobre a mesa enquanto o restante baralho é colocado à parte, não sendo necessário para prosseguir com o truque.
5. De seguida, o mágico retira um dos dados da mesa. Deve ter o cuidado de afastar o dado cujo valor seja inferior à soma dos outros dois. Por exemplo, se os números forem 2, 3 e 5, o dado com o número 5 não pode ser retirado. Para facilitar esta tarefa, o mágico pode, por exemplo,

ordenar os dados, em função do número que saiu, e retirar o dado que se encontra no meio. Se o mágico constatar que qualquer um dos dados pode ser removido, poderá pedir ao espectador que o faça, tornando assim o truque mais interessante.

6. Depois de removido um dos dados, o mágico pede ao espectador que adicione os valores dos que ficaram em jogo. O mágico anuncia que essa soma será importante para baralhar o monte das cartas que se encontra na mesa.
7. O mágico recolhe esse monte de cartas e descarta, uma a uma, com as faces voltadas para baixo, o número de cartas correspondente à soma dos dois dados. As cartas que sobram, e que estão na mão do mágico, devem ser colocadas em cima das que foram descartadas, sem as misturar ou inverter. Este procedimento, conhecido por Low-Down Triple Dealing [43], deve ser executado mais duas vezes. Estes dois últimos baralhamentos podem ser efetuados pelo espectador mas com supervisão do mágico. Este pode referir que foram executados três baralhamentos por terem sido lançados três dados.
8. O mágico vira-se de costas para o espectador e pede-lhe que retire a carta que está no topo do monte. Sem revelar o seu valor, o espectador mostre a carta ao público. O mágico afirma que, apesar de não estar a ver a carta, conseguirá adivinhar o seu valor.
9. O mágico pede um pouco de silêncio, concentra-se e anuncia, em voz alta, o valor da carta (carta visualizada antes do truque). O público confirma! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Para percebermos melhor o truque vamos exemplificar e seguir o rasto da carta que está inicialmente no topo do baralho e que é do conhecimento do mágico (M).

Os dados são lançados e vamos supor que os três números que saem são 6, 1 e 3. A seguir, o mágico descarta do seu baralho, 10 cartas, correspondente à soma dos três números obtidos com o lançamento. Ao descartar, a carta que estava no topo do baralho passa para o fundo do monte das 10 cartas. De seguida, um dos dados é retirado. Vamos supor que é afastado o dado com o número 3. Sobre a mesa ficam então os números 1 e 6. O mágico procede ao baralhamento das 10 cartas, de acordo com as indicações do ponto 7. Depois do primeiro baralhamento, a situação é a seguinte

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ M) \rightarrow (8\ \ 9\ \ M\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1).$$

Observamos que as sete primeiras cartas ficaram numa posição invertida e que as três últimas cartas passaram para o topo. A carta do mágico passou para a terceira posição, a partir do topo.

Depois do segundo baralhamento, temos

$$(8\ 9\ M\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1) \rightarrow (3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ M\ 9\ 8).$$

Mais uma vez, as sete primeiras cartas, a partir do topo, ficaram numa posição invertida e as três últimas passaram para o topo. Assim, a carta do mágico passou para a oitava posição.

Depois do terceiro baralhamento, obtemos

$$(3\ 2\ 1\ 4\ 5\ 6\ 7\ M\ 9\ 8) \rightarrow (M\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 1\ 2\ 3).$$

A carta do mágico passou para o topo. Quando o espectador retira essa carta e a mostra ao público, o mágico sabe que será a sua carta.

Vamos generalizar.

Sejam d_1, d_2 e d_3 , os valores obtidos em cada um dos dados, depois do lançamento.

O mágico irá descartar do seu baralho N cartas, sendo $N = d_1 + d_2 + d_3$. A carta que visualizou, antes de iniciar o truque, ficará sempre no fundo desse monte de N cartas. De seguida, é retirado um dos dados da mesa, sendo que o seu valor deve ser inferior à soma dos outros dois. Vamos supor que d_2 é retirado ($d_2 < d_1 + d_3$). Atendendo ao procedimento descrito no ponto 7, depois de efetuado o primeiro baralhamento, a carta do mágico estará sempre nas primeiras posições do novo monte. A sua posição poderá ser calculada aplicando a seguinte fórmula

$$P_1 = N - (d_1 + d_3) = d_1 + d_2 + d_3 - d_1 + d_3 = d_2.$$

Podemos dizer que, depois da primeira iteração, a carta do mágico ficará d_2-ésima posição, a partir do topo. Essa nova posição corresponde ao número do dado que foi retirado.

Após o segundo baralhamento e como $d_2 < d_1 + d_3$, a carta ficará numa posição invertida, logo a nova posição da carta do mágico será obtida da seguinte forma

$$P_2 = (N + 1) - d_2 = d_1 + d_2 + d_3 + 1 - d_2 = (d_1 + d_3) + 1.$$

Como $P_2 > d_1 + d_3$ então, depois do terceiro baralhamento, a carta do mágico não irá sofrer uma inversão na sua posição, mas passará a estar na posição

$$P_3 = P_2 - (d_1 + d_3) = d_1 + d_3 + 1 - \ d_3 - d_1 = 1.$$

Como podemos constatar, independentemente dos valores obtidos nos dados, no final das três iterações, a carta do mágico ficará sempre no topo do monte.

6 - As cinco cartas

Este truque teve por base as referências bibliográficas [5] e [52].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Princípio de Dirichelet ou Princípio do Pombal
- Sistema binário
- Congruência modular

Observação: Para a realização deste truque o mágico precisa de um a*judante,* que conheça todo o procedimento.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico sai da sala enquanto o ajudante pega num baralho de cartas e pede a um espectador que retire do mesmo cinco cartas quaisquer.
2. O ajudante pede ao espectador que lhe entregue as cinco cartas. Depois de as observar com cuidado constata que há pelo menos duas do mesmo naipe. O ajudante devolve ao espectador a carta que for "maior". Essa escolha deverá basear-se na seguinte ordem cíclica
$$A < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < D < R < A$$
e no facto da diferença entre elas ter que ser inferior ou igual a 7. A carta devolvida é escondida pelo espectador.
3. O ajudante fica então com quatro cartas na mão. Coloca uma, do mesmo naipe da carta devolvida ao espectador, na posição mais à esquerda sobre a mesa, ou noutra posição a combinar antecipadamente com o mágico. O mágico, quando regressar à sala, ficará então a conhecer com facilidade o naipe da carta escondida.

4. O ajudante coloca as restantes três cartas à direita da que indica o naipe. A sua disposição não é aleatória uma vez que o ajudante deverá indicar ao mágico quantas unidades deve “subir” a partir da carta mais à esquerda para atingir o valor da carta escondida. A estratégia utilizada baseia-se na numeração binária, uma carta virada para baixo representa o número zero e uma carta virada para cima representa o número um.
5. O mágico entra na sala, olha para as quatro cartas que estão na mesa e adivinha a carta que está no bolso do espectador! MAGIA! Ou talvez não!

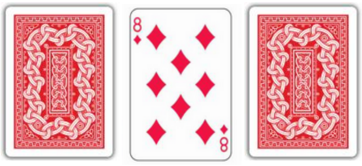
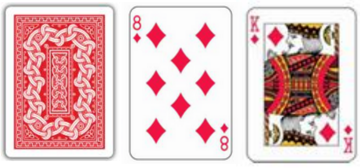
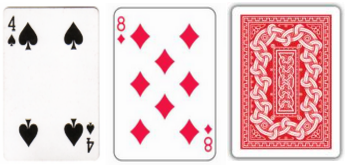
MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Este truque utiliza três conceitos matemáticos. O primeiro é o que garante que em cinco cartas há pelo menos duas do mesmo naipe. Trata-se do Princípio do Pombal (também conhecido por Princípio de Dirichelet) [46] e [51] que nos diz que se num pombal com m casas há $m+1$ pombos então há pelo menos uma casa com pelo menos dois pombos. A demonstração é feita por redução ao absurdo. Por hipótese, vamos supor que nenhuma das m casas contém mais do que um pombo. Então o número total de pombos seria, no máximo, m. Isto é uma contradição uma vez que sabemos que existem $m+1$ pombos.

O segundo conceito é o da numeração de base dois, também conhecido por sistema binário, já anteriormente abordado (página 33).

Voltando ao nosso truque, com três cartas e usando o sistema binário, pelo corolário 2.3.2 (página 36), é possível escrever todos os números inteiros de 0 a 7, uma vez que ${}^2A'_3 = 2^3 = 8$. Sabendo que uma carta voltada para baixo representa o zero e uma carta voltada para cima o número um, temos:

Sistema decimal	Sistema binário	Disposição das cartas na mesa
0	**000**	

1	001	
2	010	
3	011	
4	100	
5	101	
6	110	
7	111	

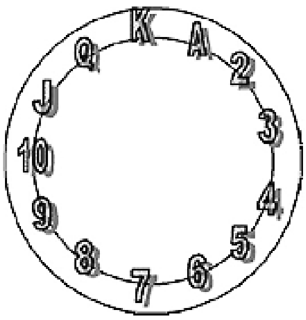
O terceiro conceito é o da congruência modular, já abordado no capítulo 2 (página 40).

Utilizando este conceito e o valor das cartas podemos estabelecer a seguinte ordem circular cartas:

Ás	**Duque**	**Terno**	**…**	**Valete**	**Dama**	**Rei**	**Ás**	**Duque**	**…**
1	2	3	…	11	12	13	14 $1 \equiv 14(mod13)$	15 $2 \equiv 15(mod13)$	…

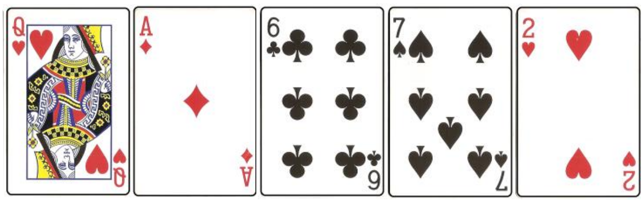
Assim, se ordenarmos as cartas ciclicamente vemos que, se tivermos duas cartas diferentes, é possível chegar de uma à outra percorrendo uma distância menor ou igual a seis. Por exemplo, a carta com o número 8 está a 7 unidades do Ás, quando este vale 1, no entanto, a mesma carta 8 está a 6 unidades do Ás, quando este vale 14.

Voltando ao nosso truque de cartas, o ajudante, utilizando as três cartas disponíveis e o sistema binário, terá que "dizer" ao mágico quantas unidades ele deverá adicionar ao valor da carta que está na mesa mais à esquerda, para descobrir o valor da carta escondida. Como vimos anteriormente, o ajudante só conseguirá escrever números inteiros de 0 a 7, por isso, a carta que devolve ao espectador é crucial para o sucesso do truque.

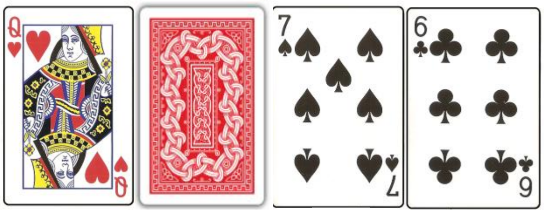


Consideremos o exemplo seguinte.

O espectador retira do baralho as cinco cartas que se seguem.



As cartas do mesmo naipe são o Duque de copas e a Dama de copas. O ajudante deverá devolver o Duque e ficar com a Dama. Neste caso, o Duque é considerada a carta "maior", 15 valores e não 2 valores. Isto porque, se o ajudante devolvesse a Dama e ficasse com o Duque, não teria forma de "dizer" ao mágico como adicionar 10 valores ao Duque para chegar ao valor da Dama. Assim, o ajudante poderá dispor, na mesa, as quatro cartas da forma seguinte.



0 1 1

O mágico ao ver, em cima da mesa, a Dama de copas à esquerda e as três cartas com a indicação de 3 unidades, faz mentalmente a operação 12 + 3 =15 e como $15 \equiv 2\ (mod\ 13)$, o mágico saberá que a carta escondida é o Duque de copas.

7 - 5 perguntas para 32 cartas

Este truque teve por base a referência bibliográfica [54].

MATERIAL NECESSÁRIO

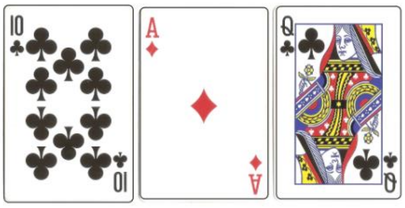
- Um baralho com 32 cartas (Ases, Reis, Damas, Valetes, 10, 9, 8 e 7 de cada naipe)

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

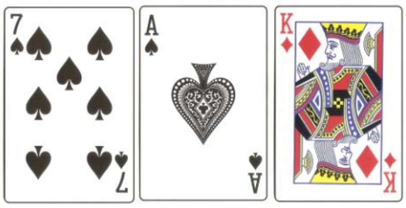
- Sistema binário

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que escolha uma carta do baralho, que a memorize e volte a colocá-la no baralho.
2. O mágico mostra ao espectador as três cartas seguintes e pergunta-lhe se alguma das cartas apresentadas tem o mesmo naipe que a carta que escolheu. O espectador só deve responder sim ou não.



O mágico recolhe as cartas anteriores, apresenta outras três e coloca a mesma questão.



3. De seguida o mágico recolhe as carta anteriores, apresenta três conjuntos de 4 cartas, um de cada vez, e pergunta, para cada conjunto, se o espectador vê alguma carta com o mesmo valor do que a que escolheu.

4. O mágico conseguirá depois do questionário descobrir a carta escolhida. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Para perceber o que está por detrás deste truque, vamos tentar primeiro responder à seguinte questão:

"Qual o número mínimo de perguntas, colocadas sucessivamente e cujas únicas respostas são SIM ou NÃO, necessárias para descobrir um número escolhido por um espectador de um determinado conjunto numérico?"

Uma estratégia consiste em separar o conjunto numérico em dois subconjuntos com o mesmo cardinal (ou a diferença dos cardinais ser um) e perguntar se o número pensado está num deles. Assim, a cada pergunta reduz-se para metade o número de possibilidades. Podemos deduzir então que, se o número pensado estiver compreendido entre 2^n e 2^{n+1}, serão necessárias $n+1$ perguntas para descobrir, com segurança, o número pensado.

Sendo assim, se à resposta SIM associarmos o número um e à resposta NÃO o número zero, as sucessivas perguntas permitirão escrever um número no sistema binário, que permitirá ao mágico descobrir o que pretende.

Voltando assim ao nosso truque, como existem 4 (2^2) naipes diferentes, o mágico precisará apenas das duas primeiras respostas do espectador para o descobrir. Vejamos então:

O primeiro trio de cartas apresentado pelo mágico tinha paus e ouros e o segundo tinha espadas e ouros. Logo,

- Se as respostas do espectador forem SIM, SIM, o naipe da carta escolhida será “ouros”. A representação binária é 11 que corresponde, no sistema decimal, ao número 3.
- Se as respostas do espectador forem SIM, NÃO, o naipe da carta escolhida será “paus”. A representação binária é 10 que corresponde, no sistema decimal, ao número 2.
- Se as respostas do espectador forem NÃO, SIM, o naipe da carta escolhida será “espadas”. A representação binária é 01 que corresponde, no sistema decimal, ao número 1.
- Se as respostas do espectador forem NÃO, NÃO, o naipe da carta escolhida será “copas”. A representação binária é 00 que corresponde, no sistema décimal, ao número 0.

Mnemonicamente, o mágico associa a cada naipe um número, ou seja, copas – 0, espadas – 1, paus – 2 e ouros – 3.

Para descobrir o valor da carta escolhida, de entre as 8 possibilidades, é suficiente 3 respostas $(8 = 2^3)$ a 3 questões bem escolhidas. Assim,

000: se as respostas do espectador forem NÃO, NÃO, NÃO, o valor da carta será “Ás”.

001: se as respostas do espectador forem NÃO, NÃO, SIM, o valor da carta será “7”.

010: se as respostas do espectador forem NÃO, SIM, NÃO, o valor da carta será “8”.

011: se as respostas do espectador forem NÃO, SIM, SIM, o valor da carta será “9”.

100: se as respostas do espectador forem SIM, NÃO, NÃO, o valor da carta será “10”.

101: se as respostas do espectador forem SIM, NÃO, SIM, o valor da carta será “Valete”.

110: se as respostas do espectador forem SIM, SIM, NÃO, o valor da carta será “Dama”.

111: se as respostas do espectador forem SIM, SIM, SIM, o valor da carta será “Rei”.

Mnemonicamente, o mágico associa a cada valor da carta um número, da seguinte forma

Valor da carta	Ás	7	8	9	10	V	D	R
Número associado	0	1	2	3	4	5	6	7
Base binária	000	001	010	011	100	101	110	111

Ou então, o número que nos dá a carta escolhida é a soma dos três números seguintes:

4 se a resposta for SIM à 1ª questão, 0 se for NÃO;

2 se a resposta for SIM à 2ª questão, 0 se for NÃO;

1 se a resposta for SIM à 3ª questão, 0 se for NÃO.

Para chegar ao valor da carta basta adicionar 6 ao número obtido, com exceção do Ás que corresponde a 0.

8 - O detetor de mentiras

Este truque teve por base a referência bibliográfica [2].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 16 cartas (Ases, Duques, 9 e 10 de cada naipe)

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Sistema binário
- Códigos de Hamming
- Congruência modular

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico mostra as 16 cartas a um espectador e pede-lhe que escolha uma mentalmente.
2. O mágico diz ao espectador que irá colocar-lhe sete questões, às quais deverá responder apenas com SIM ou NÃO.
3. Para tornar o truque mais interessante, o mágico diz ao espectador que poderá dizer sempre a verdade ou mentir numa das questões.
4. O mágico coloca então as seguintes questões:

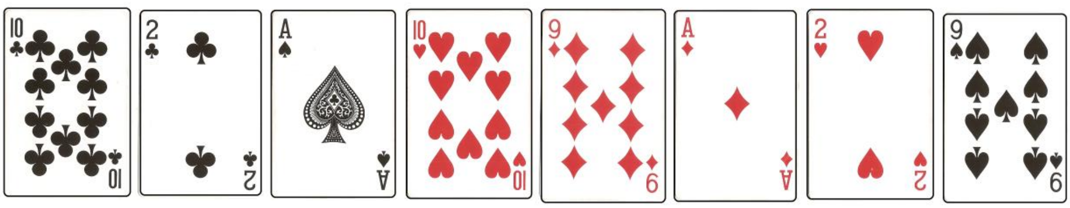
   1ª pergunta: “A sua carta é de copas ou de espadas?”

   2ª pergunta: “A sua carta é vermelha?”

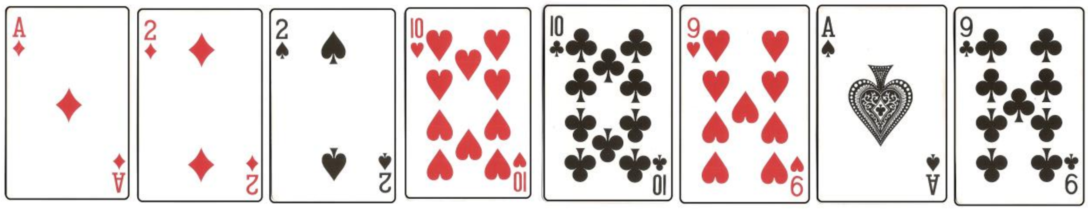
   3ª pergunta: “A sua carta tem um valor superior a 5?”

   4ª pergunta: “A sua carta é par?”

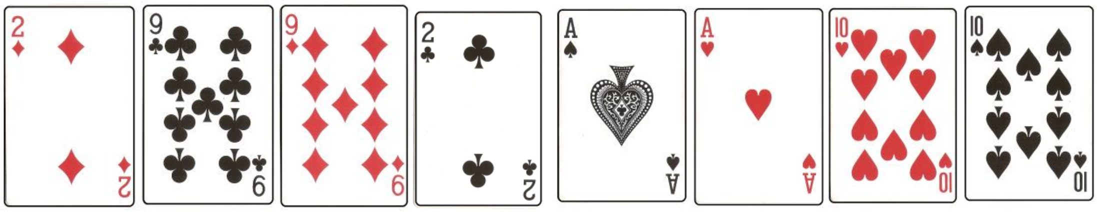
   5ª pergunta: “A sua carta é uma destas?”



6ª pergunta: “A sua carta é uma destas?”



7ª pergunta: “A sua carta é uma destas?”



5. Depois do questionário, o mágico conseguirá adivinhar a carta escolhida. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Para este truque será necessário aplicar os chamados “Códigos de Hamming”. Estes códigos têm a vantagem de permitir ao mágico adivinhar a carta correta, mesmo quando o espectador mente numa das questões colocadas.

Em primeiro lugar atribui-se um número a cada carta. Na tabela seguinte apresentam-se as cartas e os valores atribuídos.

Carta	Valor atribuído (Base decimal)	Valor atribuído (Base binária)	Código de Hamming
10 copas	0	0000	0000000
9 copas	1	0001	0001101
2 copas	2	0010	0010011
Ás copas	3	0011	0011110
10 espadas	4	0100	0100110
9 espadas	5	0101	0101011
2 espadas	6	0110	0110101
Ás espadas	7	0111	0111000

10 ouros	8	1000	1000111
9 ouros	9	1001	1001010
2 ouros	10	1010	1010100
Ás ouros	11	1011	1011001
10 paus	12	1100	1100001
9 paus	13	1101	1101100
2 paus	14	1110	1110010
Ás paus	15	1111	1111111

Na terceira coluna escrevemos a representação binária de cada número e na quarta coluna o código de Hamming. Para formar esse código basta adicionar três algarismos de controlo à representação binária do número, tendo em atenção a seguinte condição:

Sendo x_1, x_2, x_3 e x_4 os algarismos do número, na base binária, definimos x_5, x_6 e x_7 de modo que se verifique o seguinte:

$$(x_1 + x_2 + x_4 + x_5)\ mod\ 2 = 0$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_6)\ mod\ 2 = 0$$

$$(x_1 + x_3 + x_4 + x_7)\ mod\ 2 = 0$$

(isto equivale a dizer que a soma destes quatro algarismos deve ser par).

Vejamos, com um exemplo, como funciona o método da adivinhação da carta escolhida.

Vamos supor que o espectador escolhe o **9 de espadas** que, de acordo com a tabela anterior, corresponde ao número 0101 ou 0101011. A cada resposta do espectador, às questões do mágico, associamos um número, de modo que SIM corresponde ao 0 e NÃO corresponde a 1. Assim,

Pergunta	Enunciado	Resposta	Número
1	Copas / espadas?	SIM	0
2	Vermelha?	NÃO	1
3	Alta?	NÃO (mentira)	1
4	Par?	NÃO	1
5	Conjunto A?	SIM	0
6	Conjunto B?	NÃO	1
7	Conjunto C?	NÃO	1
			0111011

De seguida calcula-se a Distância de Hamming, ou seja, a distância entre o valor obtido 0111011 e os códigos de Hamming correspondentes aos dezasseis números da tabela inicial. Esta distância obtém-se contabilizando o número de posições nos quais eles diferem entre si, que corresponde ao menor número de substituições necessárias para transformar um número noutro.

Neste caso, temos

Carta	Código de Hamming	Distância a 0111011
10 copas	0000000	5
9 copas	0001101	4
2 copas	0010011	2
Ás copas	0011110	3
10 espadas	0100110	4
9 espadas	**0101011**	**1**
2 espadas	0110101	3
Ás espadas	0111000	2
10 ouros	1000111	6
9 ouros	1001010	4
2 ouros	1010100	3
Ás ouros	1011001	3
10 paus	1100001	4
9 paus	1101100	5
2 paus	1110010	3
Ás paus	1111111	2

Como o método utilizado para construir o código de Hamming assegura que a distância entre quaisquer dois números é maior ou igual a três, a distância do número obtido a partir das perguntas efetuadas será maior ou igual a dois em relação a todos os números, exceto se o valor for igual. Se o espectador não mentir nenhuma vez, a distância será igual a zero; se mentir uma vez, a distância será igual a 1. O número (e a carta que o representa) será o que tiver distância igual a 0 ou 1.

9 - Um copo mágico

Este truque teve por base a referência bibliográfica [55].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas
- Um copo
- Uma folha de papel
- Um envelope

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Sistema binário

PREPARAÇÃO

Previamente e sem o conhecimento dos espectadores, o mágico coloca no fundo do baralho, que deverá estar com as faces voltadas para baixo, um Ás, um Duque, um Quatro e um Oito (a ordem não interessa). No topo, coloca 13 cartas, por ordem decrescente do seu valor, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, Ás. As cores e os naipes não são importantes, apenas os valores das cartas.

O mágico escreve o número 14 numa folha de papel. Dobra-a e coloca-a num envelope. Este pode ser deixado na mesa no início do truque, à vista do público ou escondido, antes de começar o espetáculo, por exemplo, por debaixo da cadeira de um espectador.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico explica ao público que irá retirar do seu baralho quatro cartas e colocá-las num copo. O mágico vira o baralho, ficando com as faces para cima, retira as quatro primeiras cartas (Ás, 2, 4, 8) e mostra-as ao público. De seguida, coloca-as no copo. O baralho restante é colocado na mesa, com as faces voltadas para baixo.
2. O mágico pede a um espectador que parta o baralho em dois montes (mais ou menos iguais). De seguida, pede-lhe que aponte para um deles. Independentemente da escolha feita, o

mágico deve garantir que o monte que contém as 13 cartas colocadas no topo do baralho preparado, seja entregue a um segundo espectador, que o deverá guardar sem o baralhar. O outro monte deverá ser entregue ao primeiro espectador.

3. O primeiro espectador é convidado a baralhar o seu monte, a retirar uma carta e a mostrá-la ao público e ao mágico. De seguida, o mágico retira do copo uma carta com o mesmo valor ou as cartas necessárias para que a soma dos seus valores seja igual ao valor da carta do espectador. Por exemplo, se a carta do espectador for a Dama de copas (12 valores), o mágico retira do copo o Oito e o Quatro.
4. De seguida, o mágico anuncia o valor da carta que ficou no copo ou, no caso de terem ficado mais, a soma dos seus valores.
5. O mágico pede ao segundo espectador que, a partir do topo do seu monte, retire a carta que se encontra na posição correspondente ao número que o mágico acabou de anunciar. Por exemplo, se ficar no copo o Oito, o segundo espectador deverá retirar, a partir do topo, a carta que está na oitava posição; se sobrar o Oito e o Ás, retira a nona carta.
6. O mágico pede ao segundo espectador que ao valor da carta que retirou adicione mentalmente a sua posição e anuncie o valor obtido. Por exemplo, se a carta que retirou estava na 4ª posição e o seu valor é um dez, deverá anunciar que a soma obtida é 14.
7. O mágico pede então a alguém que abra o envelope e que leia, em voz alta, o que está escrito. Catorze! Incrível! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Na base deste truque está, mais uma vez, o conceito da numeração de base dois ou sistema binário.

Já sabemos que podemos transformar qualquer número do sistema decimal em binário. Para isso só temos que contar o número de potências de base 2 que contém esse número. Por exemplo, para escrever o número 13, precisamos de um 8, de um 4, de nenhum 2 e de uma unidade:

$13 = \mathbf{1} \times 8 + \mathbf{1} \times 4 + \mathbf{0} \times 2 + \mathbf{1} \times 1$, ou seja, $13_{(10)} = 1101_{(2)}$.

Para o nosso truque precisamos de escrever os 13 primeiros números naturais em numeração de base 2.

Vejamos a tabela seguinte.

Base decimal	Base binária			
	$(2^3) = 8$	$(2^2) = 4$	$(2^1) = 2$	$(2^0) = 1$
13 (Rei)	1	1	0	1
12 (Dama)	1	1	0	0
11 (Valete)	1	0	1	1
10	1	0	1	0
9	1	0	0	1
8	1	0	0	0
7	0	1	1	1
6	0	1	1	0
5	0	1	0	1
4	0	1	0	0
3	0	0	1	1
2	0	0	1	0
1 (Ás)	0	0	0	1

Esta tabela ajuda-nos a perceber que a escolha das quatro cartas para o copo não é aleatória. Independentemente da carta escolhida pelo primeiro espectador, o mágico conseguirá sempre retirar do copo uma carta com o mesmo valor ou cartas cuja soma dos seus valores seja igual à do espectador. O mais interessante é que o valor da carta ou a soma dos valores das cartas que sobrarem no copo irão permitir, com o monte do segundo espectador, chegar ao número 14, premonição inicial do mágico! Relembremos que no topo do monte do 2º espectador estão 13 cartas colocadas por ordem decrescente do seu valor e que inicialmente estão 15 valores, no total, nas 4 cartas do copo.

Carta escolhida pelo 1º espectador	R (13)	D (12)	V (11)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	Ás
Valor que fica no copo	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Valor da carta do 2º espectador	D (12)	V (11)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	(*)
Soma do valor da posição e do valor da carta do 2º espectador	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	(*)

(*) Se a carta escolhida pelo primeiro espectador for um Ás, ficarão no copo as cartas cuja soma dos seus valores é 14. Neste caso, o mágico não recorre ao segundo espectador, limitando-se a pedir que alguém do público abra o envelope e leia em voz alta o que está escrito na folha de papel.

10 - A prova dos nove

Este truque teve por base a referências bibliográfica [9].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas
- Uma calculadora
- Papel e lápis

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Critério de divisibilidade por 9
- Sistema decimal
- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que escreva num papel um número com quatro algarismos diferentes. Pede-lhe que adicione os quatros algarismos e faça a diferença entre o número inicial e a soma obtida.
2. O mágico entrega um baralho de cartas ao espectador e pede-lhe que retire, às escondidas, quatro cartas correspondentes aos algarismos da diferença obtida. O mágico refere que as quatro cartas devem ser de naipes diferentes e que para um zero deve escolher uma carta com o número 10. Por exemplo, para 1845, tira um Ás de copas, um oito de espadas, um quatro de ouros e um cinco de paus.
3. O mágico pede ao espectador que fique com uma dessas cartas, sem ser um 10, e que lhe entregue as restantes.
4. O mágico anuncia qual é a carta escondida pelo espectador. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Por observação das três cartas, o mágico não terá qualquer problema em adivinhar o naipe, pois será o que está em falta. Quanto ao valor da carta, o mágico deverá adicionar o valor das três cartas (o 10 conta como zero) e procurar o diferencial para chegar a um múltiplo de nove. Esse número será o valor da carta escondida!

Observação: Se a soma obtida for um múltiplo de 9, a carta escondida será um nove.

Seja x o algarismo das unidades de milhar, y o algarismo das centenas, z o algarismo das dezenas e w o algarismo das unidades. Temos que o número escolhido pelo espectador, no sistema de base 10, é $1000x + 100y + 10z + w$.

A diferença entre o número inicial e a soma dos quatro algarismos pode ser representada pela seguinte expressão algébrica:

$$1000x + 100y + 10z + w - (x + y + z + w) =$$
$$= 1000x + 100y + 10z + w - x - y - z - w =$$
$$= 1000x - x + 100y - y + 10z - z + w - w = 999x + 99y + 9z =$$
$$= 9(111x + 11y + z)$$

Esta expressão representa um múltiplo de 9. Ora, um número é múltiplo de 9, se e só se a soma dos seus algarismos é um múltiplo de nove, pelo que a carta escondida terá que ter valor correspondente ao que falta para obter um múltiplo de 9 quando se somam os valores das 3 cartas visíveis, como se pretendia mostrar.

11 - A bola de cristal

Este truque teve por base a referência bibliográfica [9].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

O mágico retira do baralho todas as cartas com o número 10 e todas as figuras, de modo a ficar com um baralho só com cartas entre os ases e os noves.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que baralhe as cartas e retire duas delas sem olhar para elas, colocando-as numa mesa voltadas para baixo. O resto do baralho fica de lado.
2. O mágico pede ao espectador para ver apenas uma das cartas e decorar o número (o naipe não interessa) e voltar a colocá-la em cima da mesa. Por sua vez, o mágico vê a outra carta, volta a virá-la e coloca-a à direita da do espectador.
3. O mágico explica que as duas cartas representam um número com dois algarismos (a do espectador representa o algarismo das dezenas e a do mágico o das unidades) e que vai utilizar a calculadora como se fosse uma bola de cristal para adivinhar esse número.
4. O mágico entrega a calculadora ao espectador e pede-lhe que:
   - Escreva o número da carta que escolheu
   - Multiplique esse número por dois
   - Adicione dois ao resultado
   - Multiplique esse resultado por cinco
   - Subtraia o Número Mágico (é a diferença entre 10 e o número da carta vista pelo mágico)

5. O mágico pede então ao espectador que vire as duas cartas que estão em cima da mesa. O número com dois algarismos compostos pelas duas cartas será igual ao número que aparece no visor da calculadora! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

O truque é fácil de explicar com um pouco de álgebra.

Seja x o algarismo das dezenas (número da carta do espectador) e y o algarismo das unidades (número da carta do mágico). O número formado pelas duas cartas, no sistema de base 10, é $10x + y$.

As operações efetuadas pelo espectador na calculadora conduzirão à seguinte expressão algébrica:

$$5(2x + 2) - (10 - y)$$

que simplificada é $10x + 10 - 10 + y = 10x + y$, que é precisamente o número formado pelas duas cartas.

12 - O mentalista

Adaptado do truque com números “Qual é a diferença?” que pode ser consultado em [9].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas
- Uma calculadora
- Papel e lápis

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Critério de divisibilidade por 9
- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

Sem o conhecimento do espectador, o mágico espreita a carta que está na 9ª posição a partir do topo.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que:
   - Escreva num papel um número com três algarismos, que estejam por ordem crescente;
   - Escreva o mesmo número mas com os algarismos por ordem decrescente;
   - Faça a diferença entre o número maior e o número menor;
   - Adicione os algarismos da diferença obtida. Se essa soma for um número com dois algarismos, deve continuar a adicionar os algarismos até se obter um número com apenas um algarismo.
   - Procure a carta que se encontra na posição correspondente a esse número, a partir do topo do baralho.
   - Memorize essa carta e a volte a colocar em qualquer sítio do baralho.
2. O mágico pede ao espectador que baralhe as cartas e que lhe entregue o baralho.
3. O mágico consegue encontrar a carta escolhida pelo espectador. Magia! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Os cálculos efetuados pelo espectador conduzirão sempre ao resultado 9. Assim a carta escolhida por ele será sempre a carta que o mágico tinha memorizado antes de iniciar o truque.
A explicação é simples:
Seja x o algarismo das centenas, y o algarismo das dezenas e z o algarismo das unidades. Temos que o número escolhido pelo espectador, no sistema de base 10, é $100x + 10y + z$.
O outro número escrito na ordem inversa é $100z + 10y + x$.
Ao efectuar a diferença entre os dois números, partindo do pressuposto que o primeiro é o maior vem:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$$

A diferença é um múltiplo de 9, logo a soma dos seus algarismos é 9.

13 - O cadeado mágico

Este truque teve por base a referência sitográfica [68].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um cadeado com a possibilidade de introduzir um código de 4 dígitos
- Um baralho com 52 cartas
- Um marcador e uma folha de papel em branco ou um quadro branco
- Um objeto que possa ser colocado no cadeado

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Sistema decimal
- Algoritmo da adição

PREPARAÇÃO

Previamente e sem o conhecimento dos espectadores, o mágico coloca, a partir do topo do baralho, e com as faces voltadas para baixo, nove cartas de acordo com a seguinte sequência:

7 3 5 4 9 2 A 6 8.

O naipe não tem qualquer importância. Esta sequência pode ser alterada, no entanto, deve garantir-se que a soma dos valores das três primeiras cartas seja igual a 15, assim como a soma dos trios seguintes. O mágico deve ainda introduzir no cadeado o código 1665.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede um objeto emprestado ao público, um anel ou um porta-chaves, algo que possa prender no seu cadeado. Depois de o fazer, altera a combinação, de forma discreta. Entrega o cadeado a um espectador e pede-lhe que, de forma aleatória, altere os algarismos da combinação. O cadeado pode ficar na posse deste último espectador até ao final do truque.
2. De seguida, o mágico solicita a participação de outros três espectadores. Distribui as nove cartas, que se encontram no topo do seu baralho, pelos três voluntários, sempre com as faces voltadas para baixo. As três primeiras cartas são dadas ao primeiro espectador, as três

seguintes ao segundo e as restantes ao terceiro. Cada espectador poderá baralhar as suas três cartas.

3. O mágico refere que os três espectadores o vão ajudar a descobrir o código que permitirá abrir o cadeado e recuperar o objeto emprestado. Para isso, o mágico terá que efetuar a adição de três números, com três algarismos, que serão apresentados pelos espectadores com a ajuda das cartas que têm nas mãos. Antes de iniciar todo o procedimento, o mágico pede aos voluntários que decidam, entre eles, quem fornecerá os algarismos das centenas, os das dezenas e os das unidades.
4. Depois da tomada de decisão, o mágico pega num marcador e encaminha-se para o quadro branco. Pede ao "espectador das centenas" que escolha uma das suas cartas e anuncie o seu valor. O mágico refere que essa carta deve ser descartada. O mágico regista no quadro o algarismo anunciado e pede ao "espectador das dezenas" e, de seguida, ao "das unidades", que façam o mesmo. Cada espectador fica com duas cartas na mão e no quadro encontra-se registado um número com três algarismos. O mágico repete o procedimento até terminarem as cartas. Os três números registados no quadro devem estar alinhados para que possam ser adicionados com o algoritmo usual da adição.
5. O mágico, ou um dos espectadores voluntários, adiciona os três números. O mágico anuncia ao público que a soma obtida (1665) poderá ser a combinação do cadeado e, de seguida, pede ao espectador, que o tem consigo, que introduza esse código. E não é que o cadeado é aberto! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Sabemos que a adição, independentemente da base do sistema de numeração, executa-se adicionando, sucessivamente, da direita para a esquerda, as unidades de cada ordem, ocorrendo uma transferência para a ordem imediatamente superior, sempre que esta soma ultrapassar a base do sistema (consultar a página 31).

No nosso truque, o sistema utilizado é o decimal e o algoritmo da adição é o usual.

Assim, considerando $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3, c_1, c_2\ , c_3$, as nove cartas utilizadas e sabendo que foram preparadas de forma a que

$$\begin{cases} a_1 + \ a_2 + \ a_3 = 15 \\ b_1 + \ b_2 + \ b_3 = 15 \\ c_1 + \ c_2 + \ c_3 = 15 \end{cases}$$

então, ao realizar o algoritmo da adição, teremos, por exemplo, a seguinte situação

$$
\begin{array}{cccc}
 & (+1) & (+1) & \\
 & a_1 & b_2 & c_1 \\
+ & a_3 & b_1 & c_2 \\
 & a_2 & b_3 & c_3 \\
\hline
1 & 6 & 6 & 5
\end{array}
$$

Independentemente das permutações das cartas de cada espectador, a soma obtida será sempre 1665, uma vez que o algoritmo da adição utilizado é feito por colunas.

14 - Sou realmente um génio

Este truque teve por base a referência bibliográfica [28].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Múltiplos de 9
- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que parta o baralho junto ao centro, escolha um dos montes e conte, em silêncio, as cartas que contém. O outro monte fica afastado.
2. O mágico pede ao espectador que adicione, mentalmente, os dois algarismos do número de cartas do seu monte. Suponhamos que o espectador contou 24 cartas. Adiciona o 2 ao 4, o que dá 6.
3. De seguida, o mágico pede ao espectador que memorize a carta que se encontra na posição correspondente a essa soma, a partir do fundo do monte que tem na sua mão.
4. O mágico pede ao espectador que coloque o seu monte em cima do monte que se encontra na mesa, endireite o baralho e o entregue ao mágico.
5. O mágico começa a distribuir as cartas, a partir do topo, soletrando ao mesmo tempo e em voz alta a frase “S-O-U-R-E-A-L-M-E-N-T-E-U-M-G-É-N-I-O”, à razão de uma letra por cada carta dada. A soletragem terminará na carta memorizada pelo espectador. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM ACÇÃO!

O procedimento descrito coloca sempre a carta visualizada pelo espectador na décima nona posição a contar do topo do baralho. Por isso, a soletragem de qualquer frase com 19 letras terminará necessariamente na carta pretendida. O espectador ao cortar o baralho junto ao centro, fica com dois montes de cartas. Cada monte terá um número de cartas que deverá estar compreendido entre 20 e 29.

Seja x o algarismo das unidades. O número de cartas do seu monte será $20 + x$. O espectador faz a soma dos dois algarismos, ou seja, $2 + x$. Como é pedido que veja a carta situada nessa posição a partir do fundo do seu monte, haverá sempre acima dessa carta: $20 + x - (2 + x) = 20 + x - 2 - x = 18$ cartas. Logo a carta pretendida ocupará a décima nona posição.

Neste truque é importante que o monte escolhido não exceda as 29 cartas. Pode por isso ser conveniente pedir ao espectador para escolher o monte mais pequeno, já que meio baralho tem 26 cartas, havendo mais hipóteses entre 20 e 26 do que entre 26 e 29.

Muitos truques baseiam-se no facto de que, somando os dois algarismos de um número e subtraindo o total assim obtido do número original, se obtém sempre um múltiplo de nove.

15 - As cartas às avessas

Este truque teve por base a referência sitográfica [60].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que misture as cartas do baralho e o coloque sobre a mesa com as faces voltadas para baixo. Pede-lhe de seguida que o parta em dois montes.
2. O mágico pede ao espectador que escolha um dos montes e vire o número de cartas que quiser. O monte passará então a ser uma mistura de cartas voltadas para cima e cartas voltadas para baixo.
3. O mágico pede ao espectador que lhe diga o número de cartas que ficaram voltadas para cima nesse monte. De seguida, pede-lhe que baralhe o monte e o entregue.
4. O mágico diz então ao espectador que irá separar o monte em dois, de tal forma que ambos terão o mesmo número de cartas voltadas para cima.
5. O mágico coloca as mãos por baixo de uma mesa ou de um pano e retira do monte o número de cartas correspondente ao valor referido anteriormente pelo espectador. As cartas retiradas são todas viradas.
6. O mágico coloca sobre a mesa os dois montes e pede ao espectador que conte as cartas voltadas para cima em cada um deles. E não é que coincidem! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

O truque é fácil de explicar com um pouco de álgebra.

Seja N o número de cartas do monte escolhido pelo espectador e C o número de cartas que são voltadas para cima.

Vamos voltar a fazer o truque:

1. O espectador pega num monte com N cartas. O mágico pede-lhe para virar as que quiser. Ele vira C cartas. O monte ficará com C cartas voltadas para cima e $(N - C)$ cartas voltadas para baixo. Mesmo depois do baralhamento, esta relação mantêm-se.
2. O mágico pega no monte do espetador e separa C cartas. Este último monte, terá c_1 cartas voltas para cima e $(C - c_1)$ cartas voltadas para baixo. O outro monte terá $(C - c_1)$ cartas voltadas para cima e $(N - 2C + c_1)$ voltadas para baixo. Ao virar ao contrário o monte de C cartas, as c_1 cartas passam a estar voltadas para baixo, e as $(C - c_1)$ voltadas para cima.
3. Assim, acabamos por ter $(C - c_1)$ cartas voltadas para cima no monte com as C cartas, que é igual ao número de cartas voltadas para cima no outro monte.

16 - A revelação da meia-noite

Este truque teve por base a referência bibliográfica [56].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho a um espectador, vira-se de costas, e pede-lhe que retire e esconda um número de cartas entre 1 e 12.
2. O mágico pede ao espectador que espreite, a partir do topo do baralho restante, a carta que ocupa a posição correspondente ao número de cartas que retirou. O espectador deve memorizar essa carta e entregar o baralho, sem o cortar ou baralhar, ao mágico.
3. O mágico diz ao espectador que irá descobrir a carta que memorizou utilizando as horas de um relógio mágico e que à meia-noite a carta será revelada.
4. O mágico soletra a palavra "UMA", e por cada letra passa uma carta do topo para o fundo do baralho. De seguida, soletra a palavra "DUAS", e faz o mesmo procedimento anterior, "TRÊS" , e assim sucessivamente até "ONZE". O mágico diz ao espectador que em vez de dizer "DOZE" irá usar a palavra "MÁGICA" pois essa é uma hora mágica, hora da revelação!
5. Depois de soletrar a palavra "MÁGICA" e efetuar todo o procedimento, o mágico convida o espectador a virar a carta que se encontra no topo e verifica com surpresa que é precisamente a carta que memorizou. MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM ACÇÃO!

Vamos supor que o espectador retira 7 cartas, ou seja, $n = 7$. Há 45 cartas no baralho restante e a carta que será memorizada encontra-se na 7ª posição a partir do topo. O mágico ao soletrar as

51 letras, que resultam do somatório das letras das palavras “UM”, “DOIS”, …, “ONZE” e “MÁGICA”, irá voltar à carta que se encontrava inicialmente na 6ª posição, pois 51 – 45 = 6. Na 7ª posição estará então a carta memorizada pelo espectador.

Generalizando, seja n o número de cartas retiradas do baralho pelo espectador ($1 \leq n \leq 12$).

Há então $(52 - n)$ cartas no baralho restante e a carta memorizada pelo espectador ocupará a n--ésima posição. Como há $(52 - n)$ cartas, a quinquagésima primeira carta será a

$$51 - (52 - n) = (n - 1)^{\text{a}} \text{ carta.}$$

17 - 13, o número da sorte

Este truque teve por base a referência sitográfica [60].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pega no baralho com as faces visíveis e forma um monte de cartas crescentes, começando, por exemplo, com um 7, depois um 8, 9, 10, Valete e termina na Dama. Esse monte é colocado sobre a mesa com as faces voltadas para baixo (a Dama fica no topo do monte).
2. O mágico constrói outro monte de forma idêntica podendo começar por outro número, mas terminando sempre com uma Dama. Atenção, o mágico deve começar sempre por uma carta com número.
3. O mágico faz quatro montes dessa forma e coloca-os todos em cima da mesa com as faces voltadas para baixo. Pede a um espectador que escolha três dos quatro montes.
4. O mágico junta o monte que ficou sobre a mesa ao resto do baralho e mistura as cartas.
5. O mágico retira, do monte que tem na mão, 13 cartas, pois é o “seu número da sorte” e anuncia que o número de cartas que lhe sobraram é igual à soma dos números das três cartas que se encontram por baixo de cada um dos montes escolhidos pelo espectador.
6. O mágico pede então ao espectador que vire cada um dos montes, ficando assim com as faces voltadas para cima, e adicione os três números. E não é que a soma coincide com o número mencionado pelo mágico! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Em cada monte, o valor da carta que se encontra na sua base é igual à diferença entre o número 13 e o número de cartas que se encontram no monte. Por exemplo, se o monte tiver as cartas: 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, perfaz um total de 8 cartas e 13 – 8 = 5, que é o valor da primeira carta do monte. Depois de estarem na mesa os três montes, o mágico descarta 13 cartas do baralho restante. Com isto, reduziu o baralho inicial, de 52 cartas, a um baralho com 39. Observemos a tabela seguinte:

	1º monte	2º monte	3º monte
Valor da carta base	n_1	n_2	n_3
Nº de cartas utilizadas	$13-n_1$	$13-n_2$	$13-n_3$

Como

$$39-[(13-n_1)+(13-n_2)+(13-n_3)]=$$
$$=39-(39-n_1-n_2-n_3)=n_1+n_2+n_3$$

podemos concluir que a soma dos valores das cartas da base de cada monte é igual ao número de cartas que falta para chegar às 39, ou seja, o número de cartas que estão na mão do mágico.

18 - *Força misteriosa*

Este truque teve por base a referência bibliográfica [9].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho de cartas a um espectador e pede-lhe que o baralhe.
2. O espectador devolve o baralho ao mágico que olha, discretamente, para a carta que está no fundo.
3. O mágico escreve num papel, sem ninguém ver, a carta que visualizou. Dobra esse papel várias vezes e pede ao espectador que o guarde num bolso.
4. O mágico retira, do topo do baralho, doze cartas, com as faces voltadas para baixo, e coloca-as em cima de uma mesa. De seguida, o mágico pede ao espectador que escolha, ao acaso, quatro dessas cartas e que as vire ao contrário, ficando com as faces visíveis. As restantes cartas são recolhidas pelo mágico que as coloca no fundo do baralho restante.
5. O mágico explica ao espectador que irá colocar cartas, voltadas para baixo, sobre cada uma das quatro que escolheu. O número de cartas colocadas será igual à diferença entre o número 10 e o valor da carta escolhida. Por exemplo, o mágico colocará sete cartas sobre uma carta que seja um três, contando, em voz alta, “4, 5, 6, 7, 8, 9, 10”. Se tiver sido escolhida uma das figuras (Rei, Dama ou Valete), não será dada nenhuma carta, uma vez que, neste truque, as figuras contam como dez.
6. O mágico pede ao espectador que adicione os valores das quatro cartas que escolheu inicialmente.

7. O mágico descarta, do baralho restante, o número de cartas correspondente a essa soma, criando um monte sobre a mesa. Volta a carta que ficou no topo desse monte.
8. O mágico pede ao espectador que tire do bolso o papel que lhe tinha sido entregue no início e que confirme se coincide com a carta que virou. E não é que coincidem! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Depois de baralhadas as cartas, o mágico olhou discretamente para a carta do fundo do baralho. É o nome desta carta que escreverá na sua previsão, funcionando o resto automaticamente. O facto de juntar as oito cartas e as colocar no fundo do baralho coloca a carta para a qual o mágico olhou na 40ª posição. Depois de dar corretamente as cartas e de somar os valores das quatro cartas viradas para cima, a contagem recairá invariavelmente sobre esta carta. A contagem termina na nona carta a contar do fundo do baralho!

	1ª carta	2ª carta	3ª carta	4ª carta
Valor da carta	n_1	n_2	n_3	n_4
Número de cartas a acrescentar para perfazer a contagem até 10	$10-n_1$	$10-n_2$	$10-n_3$	$10-n_4$

Vamos voltar a fazer o truque:

1. O mágico espreita a carta que está no fundo do baralho, isto é, a carta que está na 52ª posição.
2. O mágico retira, do topo do baralho, 12 cartas e pede ao espectador que escolha quatro. Essas cartas ficam na mesa enquanto as restantes são colocadas no fundo do baralho. Agora, a carta visualizada pelo mágico encontra-se na 40ª posição.
3. O mágico começa a descartar o baralho. O número de cartas que serão colocadas sobre a mesa é
$$(10-n_1)+(10-n_2)+(10-n_3)+(10-n_4)=$$
$$=40-(n_1+n_2+n_3+n_4).$$
4. De seguida, o mágico pede ao espectador que adicione o valor das quatro cartas.
5. O mágico descarta o número de cartas correspondente a essa soma, ou seja,
$$(n_1+n_2+n_3+n_4).$$

6. No total, o mágico descartou 40 cartas, uma vez que

$$[40 - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)] = 40.$$

7. O mágico vira a carta que estava na 40ª posição, ou seja, a carta por ele visualizada.

19 - Previsão desconcertante

Este truque teve por base a referência bibliográfica [28].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho de cartas a um espectador e pede-lhe que o baralhe.
2. O espectador entrega o baralho ao mágico que coloca, sobre uma mesa, um monte com oito cartas, com as faces voltadas para baixo. Pede ao espectador que retire, ao acaso, uma dessas cartas e que memorize o seu valor.
3. O mágico pede ao espectador que devolva a carta colocando-a no topo do monte que está na mesa, com as restantes sete cartas.
4. O mágico repõe o restante baralho sobre o monte, o que fará com que a carta escolhida fique na oitava posição a contar do fundo.
5. O mágico pega então no baralho e começa a descartar, a partir do topo, uma carta de cada vez e viradas para cima, para um monte, contando ao mesmo tempo em voz alta e por ordem decrescente de 10 até 1. Se por acaso a carta que estiver a descartar coincidir com o número que estiver a dizer nesse momento (por exemplo, está a dizer em voz alta o número quatro e a carta é um 4 de ouros), pára de dar para esse monte, começando ao lado um novo monte. Se chegar ao 1 e não tiver havido coincidência entre as cartas dadas e a contagem, o monte é "anulado" e cobre-se com uma carta virada para baixo, retirada do topo do monte que tem na mão. Nota: As figuras valem 10.
6. O mágico repete o procedimento até totalizar quatro montes, podendo alguns ou até todos terem sido "anulados". De seguida, pede ao espectador que adicione os valores das cartas expostas no topo dos montes que não tenham sido "anulados".

7. O mágico vai descartando cartas, do baralho sobrante, até perfazer a soma obtida. Descarta mais uma carta, só que desta vez, coloca-a no topo com a face voltada para cima. O mágico pergunta ao espectador se esta última carta foi a que memorizou inicialmente. O espectador confirma. Magia! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

O truque é fácil de explicar com um pouco de álgebra. Observemos a tabela seguinte:

	1º monte	2º monte	3º monte	4º monte
Número de cartas em cada monte	n_1	n_2	n_3	n_4
Valor da última carta colocada	$10 - n_1 + 1$	$10 - n_2 + 1$	$10 - n_3 + 1$	$10 - n_4 + 1$

É pedido ao espectador que adicione os valores das cartas expostas no topo dos montes que não tenham sido "anulados". De acordo com a tabela, temos então

$(10 - n_1 + 1)$+$(10 - n_2 + 1)$+$(10 - n_3 + 1)$+$(10 - n_4 + 1)$ = $44 - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$.

O número de cartas que estão na mão do mágico depois de ter criado os quatro montes é

$$52 - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4).$$

O mágico descarta, do baralho restante, o número de cartas correspondente à soma obtida pelo espectador. Assim, ficará com

$$[52 - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)] - [44 - (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)] = 52 - 44 = 8 \text{ cartas.}$$

O mágico ficará sempre com oito cartas na mão e a do topo será sempre a do espectador. Por isso, quando o mágico descarta essa carta, com a face voltada para cima, sabe que será a carta escolhida.

De referir que no truque original, o mágico, na etapa 2, coloca sobre a mesa nove cartas. Nesta situação, se os quatro montes forem "anulados", a carta escolhida pelo espectador não ficará na mão do mágico, como pretendido, mas sim no topo do último monte formado. Para contornar este problema, o mágico coloca na mesa oito cartas em vez de nove.

20 - Uma soma rara

Este truque teve por base a referência sitográfica [66].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas
- Inequações
- Sinal de somatório
- Cálculo de probabilidades

PREPARAÇÃO

Retirar previamente as cartas com figuras, ou seja, Damas, Reis e Valetes. Ficamos com um baralho de 40 cartas, numeradas de 1 a 10.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho a um espectador e pede-lhe que o baralhe como quiser. De seguida, o mágico vira-se de costas e pede ao espectador que retire 3 cartas e que as coloque sobre a mesa com as faces voltadas para cima.
2. O mágico explica que as cartas da mesa valem tantos pontos como o número que nelas está representado e que as restantes cartas, que estão no baralho, valem, cada uma, um ponto.
3. O mágico pede ao espectador que coloque, sobre cada uma das cartas escolhidas, outras do baralho até perfazer em cada monte um total de 15 pontos. Por exemplo, se uma das cartas escolhidas for um 6 de copas o espectador deve colocar em cima dela nove cartas do baralho restante. Essas cartas podem estar de face voltada para baixo, sem tapar a carta escolhida. O mágico continua de costas voltadas.

4. Depois de concluído o processo, o mágico pede ao espectador que conte o número de cartas que sobraram do baralho e que o diga em voz alta.
5. Mentalmente, o mágico adiciona 8 a esse número e anuncia em voz alta a soma dos valores das três cartas escolhidas pelo espectador (que é igual à soma que efetuou mentalmente). MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Sejam n_1, n_2 e n_3 o valor das cartas escolhidas. O mágico pretende descobrir o valor de $S = n_1 + n_2 + n_3$.

Uma vez colocadas as três cartas na mesa, o baralho que está na posse do espectador, fica com 37 cartas.

Sobre a carta que vale n_1 pontos o espectador coloca $(15 - n_1)$ cartas. Sobre a carta que vale n_2 pontos o espectador coloca $(15 - n_2)$ cartas e, finalmente, sobre a carta que vale n_3 pontos o espectador coloca $(15 - n_3)$ cartas. O baralho terá agora:

$M = 37 - (15 - n_1) - (15 - n_2) - (15 - n_3) = (n_1 + n_2 + n_3) - 8 = S - 8.$

Este número M é o anunciado pelo espectador, logo se o mágico adicionar 8 irá obter a soma pretendida, S.

É possível fazer variar o número de cartas escolhidas pelo espectador e o número de pontos de cada monte. Suponhamos que sobre a mesa estão k cartas de valores $n_1, n_2, \dots, n_k$ e que cada monte deve ter p pontos. Então, no final do truque, o espectador anunciará o número:

$$M = (40 - k) - \sum_{i=1}^{k}(p - n_i) = 40 - k - \sum_{i=1}^{k} p + \sum_{i=1}^{k} n_i = 40 - k - pk + S =$$

$$= 40 - k(1 + p) + S = S - [k(1 + p) - 40].$$

O mágico deverá adicionar a este valor o número $T = k(1 + p) - 40$ para obter o valor de S.

No truque apresentado, $k = 3$ e $p = 15$, logo $T = 3 \times (1 + 15) - 40 = 8$.

Se o mágico fizer o truque com, por exemplo, dois montes ($k = 2$) e para cada monte 11 pontos ($p = 11$), então deverá adicionar ao número anunciado pelo espectador o número

$$T = 2 \times (1 + 11) - 40 = -16.$$

O mágico deve ter algum cuidado na escolha do número de montes e dos pontos pois é preciso garantir que não faltem cartas ao espectador para completar os montes. Para isso é necessário garantir que $M \geq 0$.

Portanto, $M \geq 0 \Leftrightarrow S + 40 \geq k(1 + p) \Leftrightarrow p \leq \frac{S+40}{k} - 1$. Como p deve satisfazer esta condição para todos os valores possíveis de S, então também é válida para o seu valor mais pequeno, isto é, k (supondo que todas as cartas iniciais são ases). Então,

$$p \leq \frac{k+40}{k} - 1 \Leftrightarrow p \leq \frac{40}{k}.$$

Por outro lado, é necessário que $p \geq 10$, pois caso contrário poderia ocorrer $n_i > p$ (o valor da carta ser superior ao número de pontos pretendido) e não seria possível completar o monte. Assim, podemos concluir que $10 \leq p \leq \frac{40}{k}$.

Observamos também que o maior valor que k pode assumir é 4, pois se $k = 5$ chegaríamos a uma contradição $(10 \leq p \leq 8)$. Se $k = 4$ então $p = 10$. Para $k = 3$ tem-se $10 \leq p \leq 13$, portanto, o truque proposto tem os seus riscos, não é completamente seguro, já que para $k = 3$ utilizou-se $p = 15$.

Para $k = 2$ obtém-se $10 \leq p \leq 20$ e finalmente, para $k = 1$ temos que $10 \leq p \leq 40$.

Conforme referido anteriormente, o truque pode falhar. Esta situação ocorre quando a soma dos valores das três cartas escolhidas pelo espectador for inferior ou igual a 7. Isto porque as trinta e sete cartas disponíveis não serão suficientes para completar o último monte. A probabilidade do truque falhar é $\frac{2\times{}^4C_3+7\times{}^4C_2\times{}^4C_1+2\times{}^4C_1\times{}^4C_1\times{}^4C_1}{{}^{40}C_3} = \frac{304}{9880} \cong 0{,}03$. Ou seja, três em cada cem truques podem falhar, sendo um risco que o mágico pode correr!

Nas situações anteriores, quando o espectador comunicar que lhe faltam cartas para completar o último monte, o mágico deve perguntar quantas faltam. A resposta poderá ser 3, 4, 5, 6 ou 7. O mágico deverá, mentalmente, subtrair a 8 ao número declarado pelo espectador. Essa diferença deverá ser anunciada, em voz alta, pois corresponde à soma dos valores das três cartas escolhidas inicialmente pelo espectador. Na situação em que este refere a falta de 5 cartas, o mágico pode dizer que S = 3 e/ou que as cartas escolhidas foram três ases. Na situação em que faltam 4 cartas, o mágico poderá dizer que S = 4 e/ou que as cartas escolhidas foram dois ases e um duque. O mágico consegue assim sair destas situações de forma airosa!

21 - A magia do triângulo de Pascal

Este truque teve por base a referência sitográfica [61].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

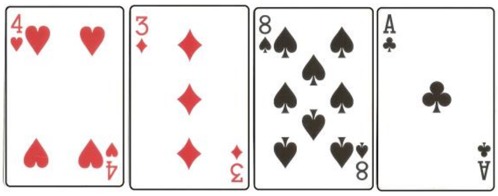
- Binómio de Newton
- Triângulo de Pascal
- Congruência modular

PREPARAÇÃO

Previamente, o mágico deve retirar do baralho as figuras (Reis, Damas e Valetes) e as cartas com o número dez.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho a um espectador. Pede-lhe que retire quatro cartas ao acaso e que as coloque em fila, sobre a mesa, com as faces visíveis.
   Para facilitar a compreensão do truque será apresentado um exemplo.



2. O mágico efetua mentalmente as seguintes operações: multiplica por três a soma dos valores das duas cartas centrais e, de seguida, adiciona a esse produto os valores das cartas que estão nas extremidades; por fim, calcula o resto da divisão do resultado obtido por 9 (o que equivale a adicionar os algarismos do resultado final, sendo que zero é substituído pelo número 9 pertencente à mesma classe de congruência). Considerando o exemplo dado, os cálculos efetuados seriam: $3 \times (8 + 3) + 4 + 1 = 38$, cujo resto da divisão por 9 é 2, ou seja,

$38 \equiv 2 \pmod 9$. O mágico pode ainda adicionar os algarismos da soma obtida até ficar apenas com um dígito. No exemplo apresentado, seria: $3 + 8 = 11;\ 1 + 1 = 2$.

3. O mágico procura no baralho uma carta com esse valor e coloca-a, com a face voltada para baixo, de acordo com a figura 4.1. Se o resto da divisão for zero, o mágico deve colocar uma carta com o número nove.
4. O mágico pede ao espectador que construa um triângulo de cartas, obedecendo às seguintes condições: na fila superior, para cada par de cartas da fila inferior, colocará uma carta cujo valor é igual à soma dos valores dessas duas cartas. Se a soma for superior a 9, adicionam-se os seus algarismos. O espectador termina a sua tarefa quando chegar ao vértice do triângulo, onde está a carta colocada pelo mágico. No exemplo apresentado, poderemos ter a configuração da figura 4.2.

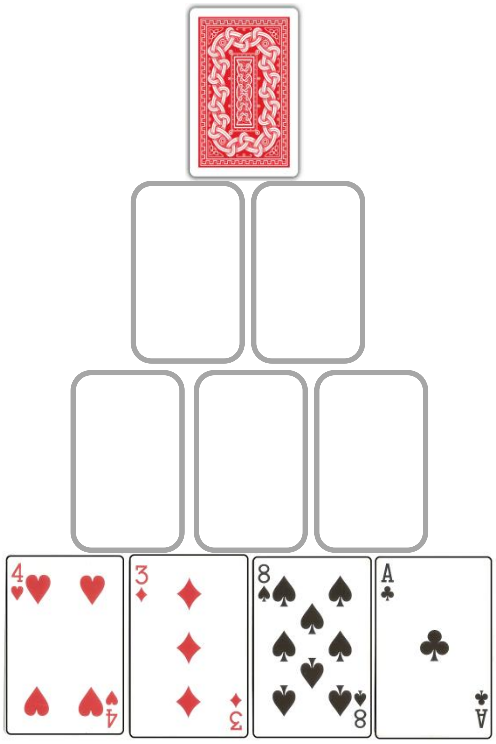


Fig. 4.1 – Etapa 3 do truque

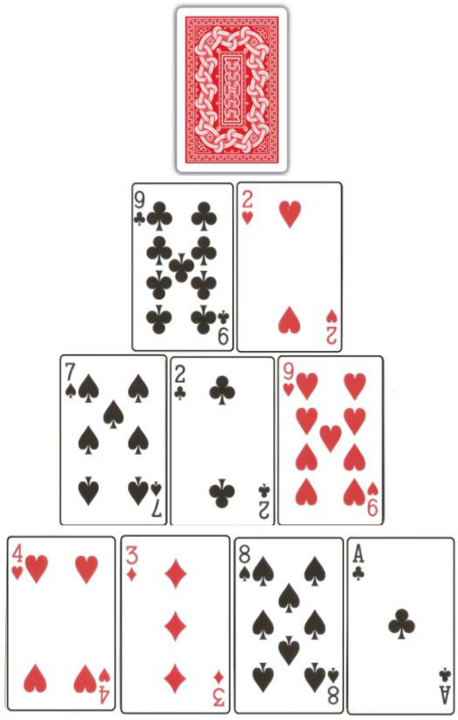


Fig. 4.2 – Etapa 4 do truque

5. O mágico pergunta ao espectador qual o valor da carta que iria colocar no vértice do triângulo. De seguida, pede ao espectador que vire a carta que está no topo. E não é que o mágico acertou! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Na base deste truque está o triângulo de Pascal (página 23), os coeficientes dos binómios de Newton (página 26) e a aritmética modular (página 43).

Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 o valor das quatro cartas escolhidas pelo espectador. Para descobrir o valor da carta que deve colocar no vértice superior do triângulo, o mágico deverá realizar mentalmente a operação $(\boldsymbol{a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4})\mathbf{mod\ 9}$, que corresponde à soma (módulo 9) dos produtos do valor de cada uma das cartas, escolhidas pelo espectador, pelos respetivos coeficientes binomiais da linha 3 do triângulo de Pascal.

Neste truque, o mágico pode pedir ao espectador que retire do baralho, por exemplo, 5 cartas. A carta a ser colocada no topo do triângulo será a que tiver o valor

$$(\boldsymbol{a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + a_5})\mathbf{mod\ 9}.$$

Os coeficientes utilizados são os da linha 4 do triângulo de Pascal.

Se o mágico realizar o truque com seis cartas, deverá ter em atenção que os coeficientes da linha 5 do triângulo de Pascal **1 – 5 – 10 – 10 – 5 – 1** são equivalentes a **1 – 5 – 1 – 1 – 5 – 1**, uma vez que estamos utilizar a aritmética módulo 9.

Se o espectador, em algum momento do truque, não encontrar no baralho a carta com o valor que pretende, poderá retirá-la das filas inferiores do triângulo que está a construir.

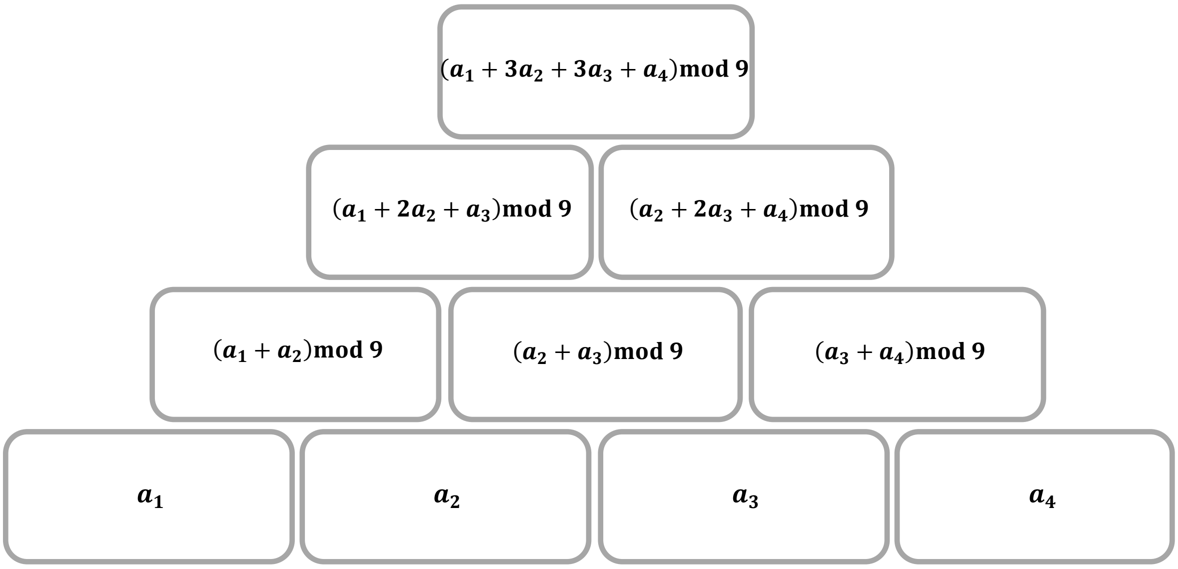


Fig. 4.3 – Configuração do triângulo

22 - Os quatro retratos

Este truque teve por base a referência bibliográfica [54] e a referência sitográfica [65].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Dezasseis cartas de um baralho: os quatro reis e doze cartas numeradas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Isometrias: reflexão

PREPARAÇÃO

O mágico deverá colocar, a partir do topo do baralho e com as faces voltadas para baixo, os reis nas posições 2, 4, 12 e 15. As restantes cartas podem estar em qualquer posição.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico começa por contar a seguinte história: *"Há muitos anos vivia no Japão um rei muito rico e poderoso, chamado Ying. Era um grande apreciador de arte e o seu palácio estava recheado de grandes obras. No entanto, precisava de algo majestoso para impressionar os convidados que teria na sua festa de aniversário. Pensou, pensou e finalmente decidiu que precisaria de uma tela com o quádruplo do tamanho dos seus habituais retratos. Para tal, contratou os melhores pintores da época. O rei fez mais uma exigência, deveria estar retratado quatro vezes. Os artistas puseram mãos à obra e concluíram o seu trabalho passados alguns meses. O rei ficou muito satisfeito com o resultado e decidiu colocar esta preciosidade numa das paredes da sala principal do seu palácio. Assim, todos teriam a oportunidade de apreciar esta esplêndida obra de arte."*
2. O mágico conta a história e ao mesmo tempo coloca na mesa as dezasseis cartas de acordo com a Fig. 4.4.
3. O mágico continua com a história: *"Com o passar do tempo, os convidados foram perdendo o interesse pela obra. Para contrariar esta situação, o rei pensou em criar algo que chamasse a*

atenção de todos. Contratou um famoso artesão, para que o mesmo gravasse a primeira letra do seu nome, na referida tela, utilizando para tal enormes diamantes, um por cada letra do seu nome".

4. O mágico vira quatro cartas da tela de modo a ser possível visualizar a letra Y (Fig. 4.5).
5. O mágico continua a sua história: *"O rei estava muito satisfeito com o trabalho do artesão. No seu reino e noutros mais longínquos, não se falava de outra coisa. Tinha conseguido chamar a atenção de todos e, infelizmente, dos ladrões, que preparavam planos para roubar esta verdadeira "jóia". Assim, numa noite, aproveitando uma viagem da família real, um grupo de ladrões conseguiu entrar no palácio. Ficaram surpreendidos com o tamanho da tela e constataram que não iriam conseguir retirá-la facilmente do palácio, pois as suas portas e janelas eram muito pequenas."* O mágico retira uma carta do seu baralho e diz ao público que as portas e janelas do palácio têm o tamanho daquela carta.

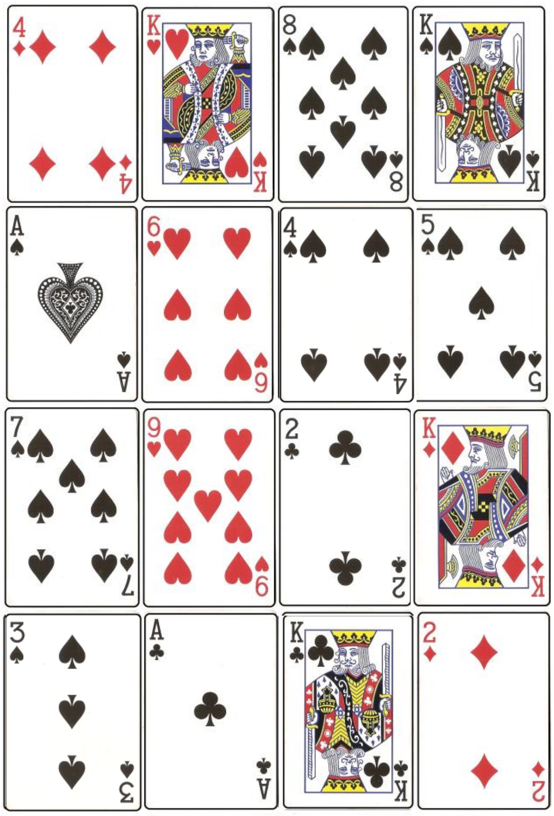


Fig. 4.4 – Disposição das dezasseis cartas na mesa

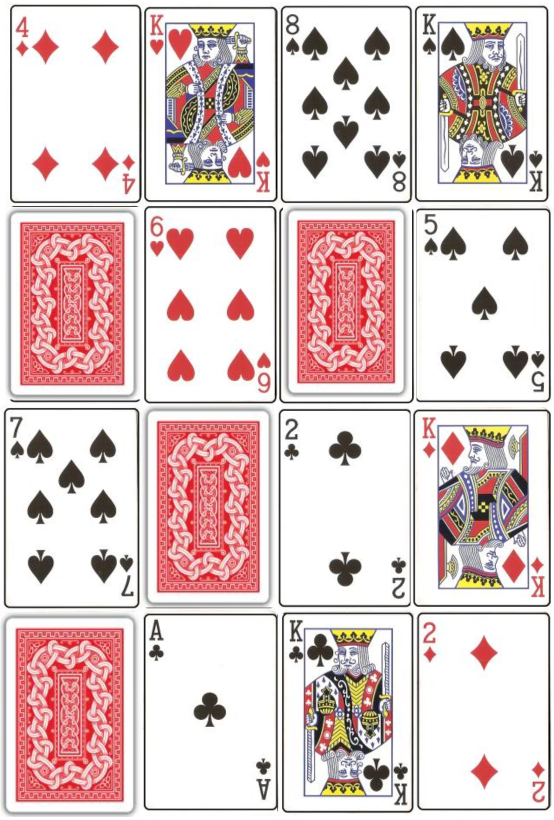


Fig. 4.5 – A letra Y

6. O mágico prossegue com a história: "*Um dos ladrões sugeriu que dobrassem cuidadosamente a tela de modo a ficar do tamanho das portas do palácio".*

7. O mágico solicita a participação de um espectador. Este representará o papel de ladrão e deverá dobrar a tela de cartas que se encontra na mesa. O mágico explica que devem ser realizadas sucessivas dobragens relativamente a um eixo vertical ou horizontal. É aconselhável que o mágico exemplifique e supervisione os movimentos do espectador, pois se uma das dobragens não for corretamente realizada, o truque não funcionará (Fig. 4.6).
8. O espectador dobra a tela até ficar do tamanho de uma carta. O monte de cartas fica então sobre a mesa. O mágico agradece a participação do espectador e continua a sua história: *"Quando os ladrões se preparavam para sair do palácio com a tela, foram intersetados pelos guardas. Os ladrões foram levados para as masmorras e a tela foi cuidadosamente guardada como estava. O rei, furioso com a notícia, voltou para o palácio e exigiu que lhe trouxessem de imediato a tela, para que pudesse verificar se os seus quatro retratos estavam intactos. Os guardas assim fizeram e o rei suspirou de alívio quando os viu".*
6. O mágico recolhe o monte de cartas que está na mesa e abre-o em leque. Os quatros reis são as únicas cartas com a face voltada para cima. MAGIA! Ou talvez não!

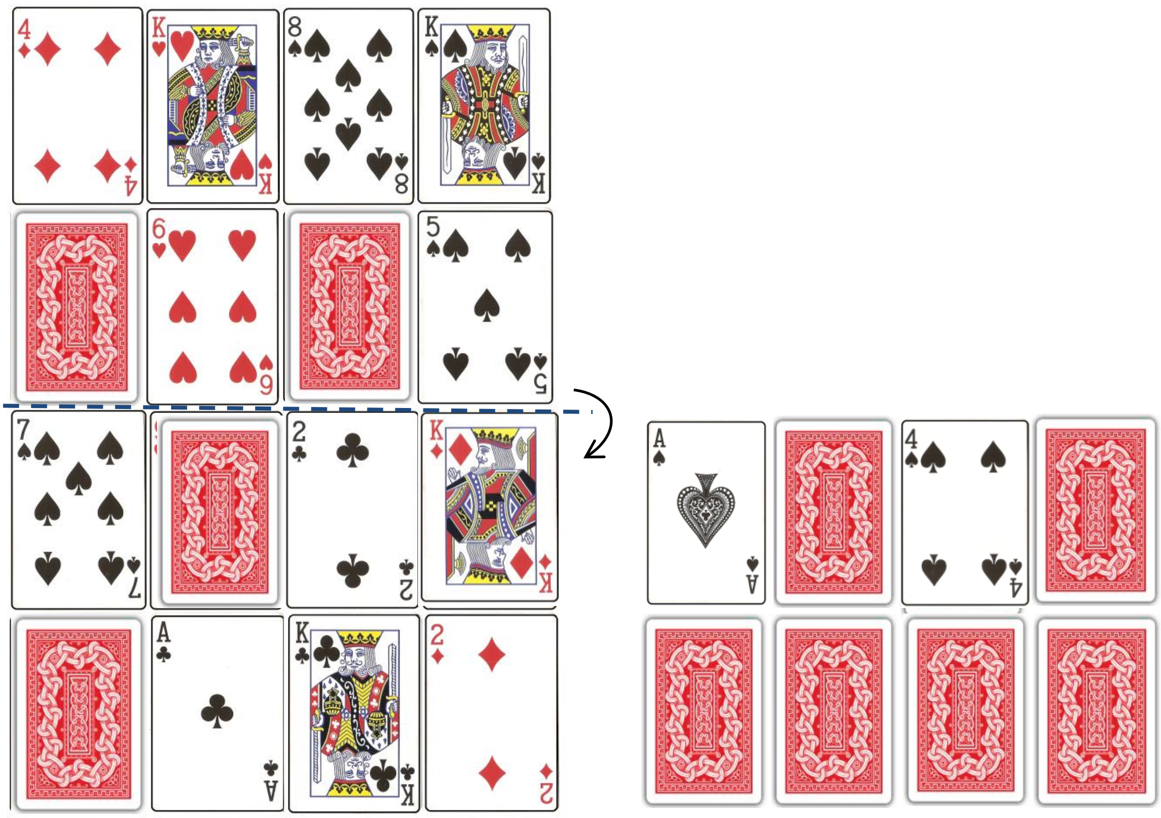


Fig. 4.6 – Exemplo de uma dobragem

DESENVOLVIMENTO

Para percebermos o truque podemos começar por criar, com as dezasseis cartas, uma malha 4 x 4, com a configuração de um tabuleiro de xadrez. As cartas com as faces voltadas para baixo representam as casas pretas e as cartas voltadas para cima, as casas brancas (Fig. 4.7).

Se dobrarmos sucessivamente esta malha de cartas, verificamos que é possível reduzi-la a um monte de cartas. Para além disso, constatamos que, a cada dobragem, as cartas com as faces voltadas para baixo vão sobrepor-se às cartas que estão com as faces voltadas para cima. Desta forma, independentemente das dobragens efetuadas, as cartas agrupadas ficarão sempre no mesmo sentido, isto é, todas com as faces voltadas para baixo ou todas com as faces voltadas para cima. Se compararmos a Fig. 4.5 com a Fig. 4.7, verificamos que os quatro reis são as únicas cartas que não obedecem à configuração em xadrez estabelecida. Assim, o mágico sabe que, depois de realizadas todas as dobragens, os quatros reis ficarão com as faces voltadas para cima enquanto as restantes estarão com as faces para baixo ou vice-versa. Aqui está o segredo do truque.

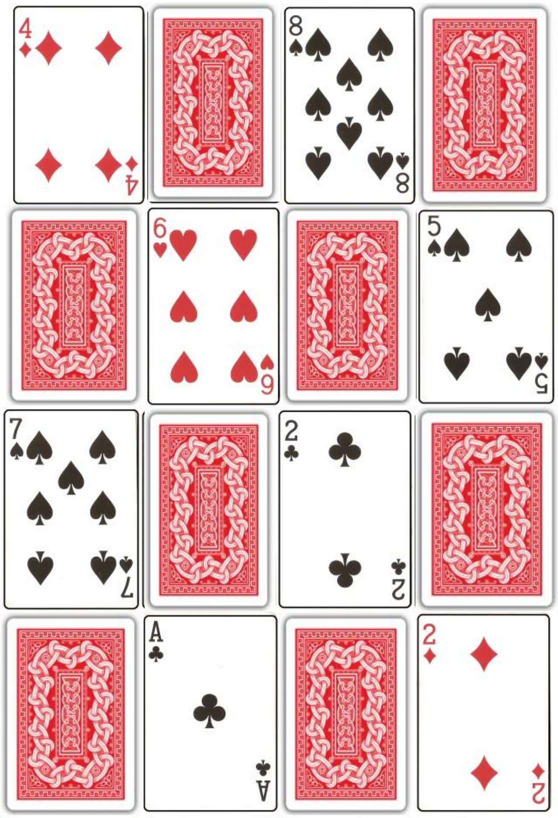


Fig. 4.7 – Configuração em xadrez das 16 cartas

23 - Miniatura de Fibonacci

Este truque teve por base a referência sitográfica [61].

MATERIAL NECESSÁRIO

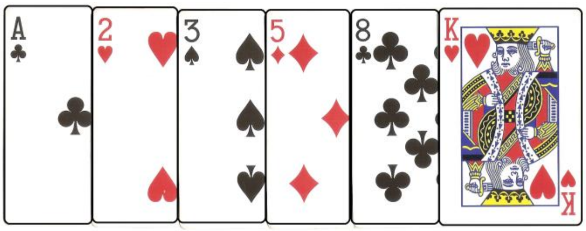
- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Sequência de Fibonacci
- Teorema de Zeckendorf

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico retira do baralho as seis cartas seguintes: o Ás de paus, o dois de copas, o três de espadas, o cinco de ouros, o oito de paus e o Rei de copas.



1 2 3 5 8 13

2. O mágico coloca as cartas sobre a mesa, faces voltadas para baixo, e mistura-as como se fossem peças de dominó. Pede a um espectador que retire duas cartas e que adicione os seus valores.
3. O mágico pergunta qual foi a soma obtida e consegue adivinhar as duas cartas retiradas. Magia! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Este truque utiliza dois conceitos matemáticos. O primeiro está relacionado com a sequência de Fibonacci F_n, definida por recorrência:

$$F_0 = 1 \quad \wedge \quad F_1 = 1 \qquad \wedge \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n \geq 2 \, .$$

Os termos desta sequência são: 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ….

Se observarmos com cuidado as seis cartas escolhidas para o truque verificamos que são seis termos consecutivos da sequência de Fibonacci, assumindo que o Ás vale 1 e o Rei 13.

O segundo conceito está relacionado com o Teorema de Zeckendorf (1901-1983) que afirma:

"*Todo o número inteiro positivo pode ser representado como uma soma única de um ou mais números não consecutivos de Fibonacci".*

Por exemplo, a representação Zeckendorf de 100 é:

100 = 89 + 8 + 3 .

Existem outras formas de representação de 100 com números de Fibonacci, por exemplo

100 = 89 + 8 + 2 + 1

100 = 55 + 34 + 8 + 3

mas estas não são representações Zeckendorf porque 1 e 2 são números de Fibonacci consecutivos, assim como o 34 e 55.

Seja n um qualquer número inteiro positivo, existem inteiros positivos c_i, com $c_{i+1} - c_i > 1$, $i = 0, \dots, k$ e $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$n = \sum_{i=0}^{k} F_{c_i}$$

onde F_n é o n-ésimo número de Fibonacci. Esta soma é conhecida por representação Zeckendorf de n .

Com estes dois conceitos matemáticos, o mágico poderá facilmente descobrir o valor das duas cartas. Por exemplo, se o espectador disser a soma 18, o mágico procura o número de Fibonacci mais próximo de 18, que é o 13, e faz a diferença entre eles. Assim o valor das cartas escolhidas pelo espectador será 5 e 13. Neste truque, as únicas somas que se conseguem obter ou são números de Fibonacci, facilmente reconhecidos, ou são somas de dois números de Fibonacci não consecutivos.

Falta agora descobrir o naipe! Se observarmos atentamente as seis cartas iniciais verificamos que as cores são alternadas e que os naipes se repetem ciclicamente (paus, copas, espadas, ouros, paus, copas), que facilmente se pode memorizar utilizando apenas as primeiras letras PCEO.

24 - Esconde-esconde

Este truque teve por base a referência sitográfica [60].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas
- Decomposição em factores primos

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que baralhe as cartas e que faça dois montes com 15 cartas cada, com as faces voltadas para baixo.
2. O mágico pede ao espectador que escolha um dos montes. O outro ficará para o mágico. Os dois montes são colocados sobre uma mesa com as faces voltadas para baixo.
3. O mágico corta o seu monte e pede ao espectador que faça o mesmo. Sobre a mesa ficam então quatro montes.
4. O mágico pede ao espectador que escolha, às escondidas, uma carta do restante baralho. De seguida, pede-lhe que a coloque, face voltada para baixo, sobre um dos seus montes e que a cubra com um dos montes do mágico à sua escolha. Esse novo monte é colocado à parte.
5. O mágico vai também ao restante baralho, escolhe uma carta (geralmente um Ás) e mostra-a ao espectador.
6. O mágico coloca essa carta, voltada para cima, sobre o seu segundo monte e tapa-a com o segundo monte do espectador. Sobre a mesa, estão agora dois montes de cartas.
7. O mágico pede ao espectador que coloque um dos montes sobre o outro e pode, se quiser, cortar, uma ou várias vezes, esse novo monte.

8. O mágico pega no monte de cartas e diz ao espectador que vão jogar o jogo do “esconde-esconde”. Para isso, o mágico irá lançar as cartas sobre a mesa, uma a uma, com as faces voltadas para baixo, de forma alternada, criando dois montes.
9. O mágico diz ao espectador que o monte que tiver a sua carta (o Ás) será reaproveitado, uma vez que a sua carta está a ajudá-lo a encontrar a carta que o espectador escolheu.
10. O mágico segura no monte reaproveitado e volta a fazer dois montes colocando, uma a uma, alternadamente as cartas na mesa. Fica novamente com o monte do Ás e continua com o mesmo procedimento até ficarem sobre a mesa duas cartas, o Ás e a carta que o espectador escolheu! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Para percebermos o truque vamos seguir o rasto das cartas “importantes”, ou seja, a carta escolhida pelo espectador (E) e a do mágico (M).

No início do truque cada um escolhe um monte com 15 cartas e corta-o. O espectador ficará com dois montes, um com x cartas e outro com $(15-x)$ cartas. De forma análoga, o mágico ficará com um monte com y cartas e outro com $(15-y)$ cartas. O espectador retira uma carta, ao acaso, do baralho restante, e coloca-a sobre um dos seus montes e junta um dos montes do mágico. Sem perda de generalidade, vamos considerar que os montes escolhidos têm x e y cartas. O espectador fica então com um monte de $(x+1+y)$ cartas sendo que a carta na posição $(y+1)$ é a carta escolhida, E. Seguindo o mesmo procedimento, o mágico ficará agora com um monte de $[(15-y)+1+(15-x)]$ cartas, sendo que a carta na posição $(15-x)+1$ é a carta escolhida, M.

O espectador pode juntar os dois montes de duas formas, coloca o seu sobre o do mágico ou vice-versa. Estas situações poderão ser representadas da seguinte forma

$$x+\ 1_E+y+\ (15-y)+\ 1_M+(15-x) \text{ ou } (15-y)+1_M+(15-x)+x+1_E+y.$$

Podemos observar que as cartas “importantes” estão sempre separadas por 15 cartas, ou seja, a diferença entre as posições que ocupam no monte é igual a 16. Assim, as duas cartas ocuparão ambas posições pares ou posições ímpares. O corte ou cortes que o espectador fizer no monte das 32 não irá alterar a “distância” entre as posições ocupadas pelas cartas “importantes”, mas sim as posições que ocupam no monte. Este último facto prende-se com “ a ordem circular” de um baralho. Se o representarmos por uma sequência de números naturais $B_1 = \{1, 2, 3, \dots, 52\}$, ao efetuarmos um corte e escolhermos as n primeiras cartas para serem colocados no fundo, o novo baralho poderá representar-se segundo a seguinte sequência

$$B_2 = \{n+1, n+2, \dots, 51, 52, 1, 2, 3, \dots, n-1, n\}\ .$$

Podemos observar que a “ordem circular” mantém invariante o baralho: a seguir à carta 1 vem a carta 2, a seguir à carta 2 vem a 3, ..., a seguir à 52 vem a 1 e assim sucessivamente. Assim por mais cortes que sejam efetuados pelo espectador as duas cartas manter-se-ão à mesma distância.

Voltando ao nosso truque, quando o mágico descarta as 32 cartas sobre a mesa, uma a uma, com as faces voltadas para baixo, de forma alternada, criando dois montes, um terá as cartas que ocupavam as posições pares e outro para as posições ímpares. As duas cartas ficarão no mesmo monte só que desta vez a distância entre elas passará para 8. O mágico recolhe o monte, onde está a sua carta, e repete o processo de descarte. A distância entre as duas cartas “importantes” passará para 4 e depois para 2, e finalmente o mágico ficará apenas com duas cartas, a do espectador e a dele.

Se pretendermos alterar o desenvolvimento do truque, podemos pedir ao espectador que escolha o número de cartas para cada monte inicial. Mentalmente, o mágico soma 1 unidade e faz a decomposição em factores primos. Quando realizar o processo de descarte, vai criando um número de montes igual a cada um dos factores primos da decomposição.

Na realidade, o número de cartas que se eliminam em cada descarte é um divisor do número inicial de cartas. Se o número inicial de cartas é $2N$ e a sua decomposição em factores primos $2N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$, a distância inicial entre as cartas escolhidas será igual a N. Logo repartimos p_1 montes e eliminamos aqueles que não contêm a carta do mágico; continuando, repartimos p_2 montes e voltamos a eliminar aqueles em que não está a carta do mágico; repetimos o processo com os diferentes factores primos de N até ficarmos com apenas duas cartas, que serão as que procuramos. No truque apresentado, $N = 16$. Logo $2N = 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Isto explica a razão pela qual o mágico distribui as cartas criando sempre dois montes.

25 - As 21 cartas

Este truque teve por base as referências bibliográficas [2] e [49].

MATERIAL NECESSÁRIO

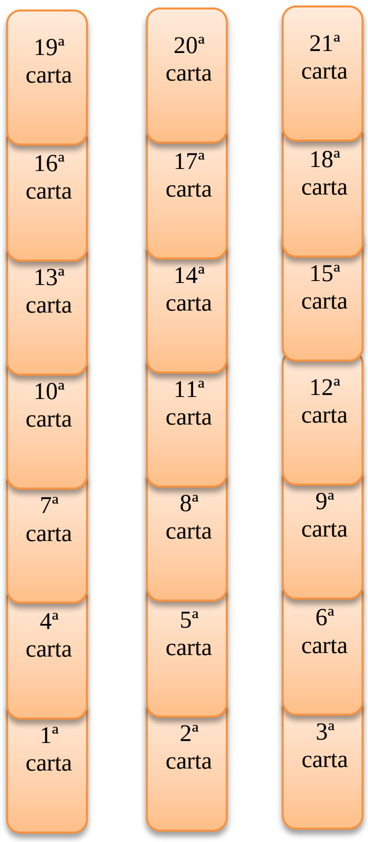
- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas/ Função composta
- Sistema ternário/ Sistema de numeração de base m
- Congruência modular

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pede a um espectador que retire, ao acaso, 21 cartas de um baralho. De seguida, pede-lhe que memorize uma delas.



2. O mágico pede ao espectador que lhe entregue as 21 cartas. Com o monte de cartas na mão, com as faces voltadas para baixo, o mágico descarta-as, colocando-as sobre a mesa, face voltada para cima, uma a uma, da esquerda para a direita, separando-as em três colunas, como indica o esquema ao lado.
3. O mágico pede ao espectador que lhe diga em que coluna está a carta que memorizou inicialmente.
4. O mágico recolhe as cartas colocando o monte indicado pelo espectador no meio dos outros dois, de modo a ficar novamente com as 21 cartas na mão. O mágico deve ter o cuidado de recolher cada monte, de baixo para cima, ficando as cartas umas em cima das outras. Por exemplo, ao

recolher o monte mais à esquerda, a 19ª carta deve ficar em cima da 16ª e assim sucessivamente.

5. O processo descrito nos pontos 2, 3 e 4 repete-se por mais duas vezes.
6. Finalmente, o mágico anuncia que irá dizer a palavra "ABRACADABRA" e que a carta escolhida pelo espectador irá aparecer por magia. Com o monte de cartas na mão, faces voltadas para baixo, o mágico diz lentamente a palavra, virando uma carta por cada letra. A última carta a virar será a escolhida! Magia! Ou talvez não!
7.

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Vamos considerar que as posições das cartas estão numeradas de zero a vinte.

Seja P_k a posição da carta escolhida depois da k-ésima iteração.

Quando o mágico coloca, pela primeira vez, as 21 cartas na mesa, em três colunas de sete cartas cada, a carta escolhida pelo espectador poderá ocupar qualquer posição, ou seja, $0 \leq P_0 \leq 20$.

Depois da primeira iteração, ou seja, quando o mágico recolhe as cartas, tendo tido o cuidado de colocar o monte indicado pelo espectador no meio dos outros dois, a carta escolhida passou a estar entre a posição 7 e 13 (inclusive), isto é, $7 \leq P_1 \leq 13$.

Depois da segunda iteração, $7 + 2 \leq P_2 \leq 13 - 2$, ou seja, $9 \leq P_2 \leq 11$.

Finalmente, com a terceira iteração, $P_3 = 10$ (11ª carta), posição central! Assim a palavra escolhida pelo mágico, "ABRACADABRA", não foi escolhida ao acaso, uma vez que tem precisamente onze letras!

É possível realizar truques similares utilizando um número diferente de cartas.

Seja c o número de colunas e f o número de cartas em cada coluna. Considerando P_k a posição da carta escolhida, depois da k-ésima iteração temos que:

$$P_k = \left[\frac{P_{k-1}}{c}\right] + \frac{(c-1) \times f}{2} \qquad (4.1)$$

em que $[x]$ representa a parte inteira do número real x.

Para o truque funcionar é necessário realizar iterações suficientes até garantir que a carta escolhida fique na posição $\left[\frac{c \times f}{2}\right]$.

Aplicando a fórmula (4.1) para o truque apresentado ($c = 3$ e $f = 7$), temos:

- $c = 3$ e $f = 7$

P_0	P_1	P_2	P_3
0, 1, 2	7	9	10
3, 4, 5	8	9	10
6, 7, 8	9	10	10
9, 10, 11	10	10	10
12, 13, 14	11	10	10
15, 16, 17	12	11	10
18, 19, 20	13	11	10

Outros exemplos:

- $c = 5$ e $f = 5$

P_0	P_1	P_3
0, 1, 2, 3, 4	10	12
5, 6, 7, 8, 9	11	12
10, 11, 12, 13, 14	12	12
15, 16, 17, 18, 19	13	12
20, 21, 22, 23, 24	14	12

- $c = 3$ e $f = 5$

P_0	P_1	P_2	P_3
0, 1, 2	5	6	7
3, 4, 5	6	7	7
6, 7, 8	7	7	7
9, 10, 11	8	7	7
12, 13, 14	9	8	7

Utilizando o procedimento anterior, a carta escolhida pelo espectador ocupará sempre a posição central. Note-se que se $c \times f$ for par, o truque não funcionará pois não haverá uma posição central. É possível, utilizando um sistema de numeração diferente do sistema decimal, "encaminhar" a carta escolhida pelo espectador para qualquer posição do baralho. Vejamos um exemplo.

Exemplo 48

Consideremos $c = 3, f = 9$, e pretendemos que a carta escolhida apareça na posição 15, a partir do topo do baralho.

Começamos por escrever o número 14 no sistema ternário: $15 - 1 = 14 = 112_{(3)}$.

Antes de iniciar o truque, o mágico deve decorar a seguinte chave:

0 = recolher em primeiro lugar;

1 = recolher em segundo lugar;

2 = recolher em último lugar.

O mágico deve fazer a leitura do número $112_{(3)}$ da direita para a esquerda e seguir o seguinte procedimento:

Da primeira vez que o mágico recolhe as cartas, deve colocar o monte, indicado pelo espectador, sobre os outros dois, ou seja, será o último a ser recolhido; da segunda vez, o mágico coloca o monte, com a carta escolhida, no centro; na terceira recolha, o mágico deve colocar novamente o monte com a carta escolhida no centro. Com este procedimento a carta do espectador ficará na posição pretendida (posição 15).

Para o caso geral de um baralho com m^m cartas distribuídas em m colunas com m^{m-1} cartas cada uma, apresentaremos mais à frente um Teorema que permitirá descobrir a posição de qualquer carta escolhida, depois de m interações, utilizando o sistema de numeração de base m. Antes de o enunciar, será necessário primeiro apresentar o truque de m colunas de Gergonne.

O truque de $\boldsymbol{m}$ colunas de Gergonne [49]

Seja m um número inteiro tal que $m \geq 3$. Vamos supor que temos um baralho com m^m cartas, com as faces voltadas para baixo, e que n representa a n-ésima carta a partir do topo do baralho. Para começar vamos aplicar o truque de m colunas de Gergonne assumindo que a carta n foi a escolhida pelo espectador. O truque consiste na distribuição das cartas do baralho, com as faces voltadas para cima, sobre uma mesa, em m colunas com m^{m-1} cartas cada uma, de acordo com o esquema da figura 4.8. Depois de a distribuição estar completa, o espectador indica a coluna onde se encontra a sua carta. O mágico recolhe então as cartas, mantendo as faces voltadas para cima, colocando a coluna indicada pelo espectador na k-ésima posição, contando de baixo para cima, sendo 1 a coluna do fundo e m a coluna do topo, como se mostra na figura 4.9.

O mágico vira o baralho, ficando as cartas com as faces voltadas para baixo. A carta escolhida pelo espectador, a carta n, ficou assim na posição $P_k(n)$, dada pela fórmula:

$$P_k(n) = \frac{n-j}{m} + 1 + (k-1)m^{m-1} \qquad (4.2)$$

onde $n \equiv j \pmod{m}$ e j pertence ao sistema de resíduos $\{1, 2, \dots, m\}$.

	Coluna 1	**Coluna 2**	…	**Coluna j**	…	**Coluna m**
Linha $(m^{m-1}-1)$	$[(m^{m-1}-1)m+1]^{a}$	$[(m^{m-1}-1)m+2]^{a}$		$[(m^{m-1}-1)m+j]^{a}$		$(m^m)^{a}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Linha i	$(im+1)^{a}$	$(im+2)^{a}$		$(im+j)^{a}$		$(im+m)^{a}$
…	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Linha 2	$(2m+1)^{a}$	$(2m+2)^{a}$	…	$(2m+j)^{a}$	…	$(3m)^{a}$
Linha 1	$(m+1)^{a}$	$(m+2)^{a}$	…	$(m+j)^{a}$	…	$(2m)^{a}$
Linha 0	1ª carta (carta do topo)	2ª carta	…	j^{a}	…	m^{a}

Fig. 4.8 – Distribuição das cartas sobre a mesa

Atendendo à distribuição das cartas na mesa (Fig. 4.8), quando $n = im + j$, com $0 \leq i \leq m^{m-1} - 1$, podemos afirmar que $i + 1$ será a posição da carta n na coluna j (contando a partir do fundo). Como $n = im + j \Leftrightarrow \frac{n-j}{m} = i$, a fórmula (4.2) é equivalente a

$$P_k(n) = i + 1 + (k-1)m^{m-1}.$$

Portanto, quando o mágico recolhe todas as cartas da mesa, e as vira para realizar uma nova distribuição, sabe que estão $i + (k-1)m^{m-1}$ cartas sobre a carta escolhida pelo espectador.

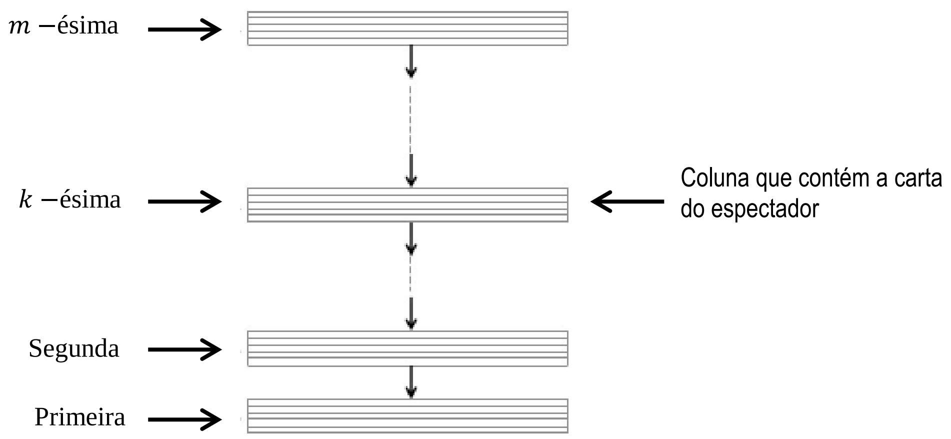


Fig. 4.9 – Recolha das colunas [49]

De seguida será apresentada uma definição do truque de m colunas de Gergonne.

Definição 4.1*:* Seja $m \geq 3$ um inteiro fixo e sejam $n, k_1, k_2, \ldots, k_m$ .números naturais que satisfazem as seguintes condições*:*

1) $1 \leq n \leq m^m$;

2) $1 \leq k_i \leq m$.

Diz-se que o **truque de $\boldsymbol{m}$ colunas de Gergonne** é aplicado sobre a carta n segundo o esquema $\{k_i\}_{i=1}^{m}$, se for aplicada a seguinte função

$$G_{\{k_i\}_{i=1}^{m}}(n) = \left(P_{k_m} \circ \ldots \circ P_{k_1}\right)(n).$$

Aplicar o truque de m colunas de Gergonne é o mesmo que descobrir a posição final da carta escolhida pelo espectador.

De referir que existem m^m possíveis esquemas diferentes para cada n e no total existem m^{2m} variantes do truque, sem considerar as diferentes formas de colocar as restantes $(m-1)$ colunas que não contêm a carta escolhida em cada iteração.

Teorema 4.1: Seja $\{k_i\}_{i=1}^{m}$ um esquema qualquer. Então,

$$\left(P_{k_m} \circ \dots \circ P_{k_1}\right)(n) = [(k_m - 1) \dots (k_1 - 1)]_{(base\ m)} + 1, \qquad 1 \leq n \leq m^m.$$

A demonstração pode ser consultada no documento [49].

Constatamos que o truque não depende da carta escolhida mas sim de um esquema seguido pelo mágico, em função do que pretende para o seu espetáculo. Poderá fazer uma de três coisas:

1) Determinar a posição exata da carta escolhida, a partir do topo do baralho;
2) Colocar a carta escolhida numa posição previamente indicada pelo espectador;
3) Nomear a carta do espectador.

Vejamos de seguida cada uma das situações referidas.

1) Descobrir a posição exata da carta escolhida

Nesta versão, o mágico pode delegar no espectador a distribuição das cartas em colunas e a sua recolha. No entanto, o mágico deve acompanhar mentalmente, a cada iteração, a posição em que é recolhida a coluna que o espectador indicou como sendo a que continha a sua carta.
Vamos supor que, depois de realizar o truque de Gergonne m vezes, a coluna que continha a carta escolhida foi recolhida da seguinte forma: na 1ª iteração, posição k_1; na 2ª iteração, posição k_2; …; na m-ésima iteração, posição k_m, sempre de acordo com o esquema apresentado na figura 4.9. Considerando o Teorema 4.1, a carta escolhida estará na posição

$$[(k_m - 1) \dots (k_1 - 1)]_{(base\ m)} + 1 =$$
$$= (k_m - 1)m^{m-1} + (k_{m-1} - 1)m^{m-2} + \cdots + (k_2 - 1)m + (k_1 - 1)m^0 + 1$$
$$= k_1 + (k_2 - 1)m + \cdots + (k_m - 1)m^{m-1}.$$

Na prática, depois da primeira recolha, o mágico terá que memorizar k_1; de seguida memoriza k_2 e realiza mentalmente a operação $k_1 + (k_2 - 1)m$, e assim sucessivamente, até adicionar $(k_m - 1)m^{m-1}$.

Exemplo 49

Vamos supor que o mágico utiliza um baralho com 27 cartas ($m = 3$). O espectador memoriza o Ás de copas e distribui as 27 cartas da seguinte forma:

8♦	9♥	V♦
10♠	10♣	A♠
9♣	6♣	8♣
10♦	A♣	7♠
V♠	8♥	V♥
2♣	R♠	A♦
D♥	D♦	R♦
3♠	A♥	D♠
7♦	8♠	R♣

Vamos supor que o espectador recolhe os montes, de acordo com o esquema da figura 4.9, colocando a coluna que contém a sua carta no topo. O mágico memoriza $k_1 = 3$.

Na segunda iteração, a disposição das cartas na mesa poderá ser

6♣	10♣	9♥
R♠	8♥	A♣
8♠	A♥	D♦
9♣	10♠	8♦
2♣	V♠	10♦
7♦	3♠	D♥
8♣	A♠	V♦
A♦	V♥	7♠
R♣	D♠	R♦

Vamos supor que o espectador recolhe os montes, colocando a coluna que contém a sua carta no centro. O mágico memoriza $k_2 = 2$.

Na terceira iteração, a disposição das cartas na mesa será, por exemplo:

8♠	R♠	6♣
7♦	2♣	9♣
R♣	A♦	8♣
A♥	8♥	10♣
3♠	V♠	10♠
D♠	V♥	A♠
D♦	A♣	9♥
D♥	10♦	8♦
R♦	7♠	V♦

Vamos supor que o espectador recolhe os montes, colocando a coluna que contém a sua carta mais uma vez no centro. O mágico memoriza $k_3 = 2$.

O mágico efetua, mentalmente, a seguinte operação: $3 + (2-1) \times 3 + (2-1) \times 9 = 15$. O mágico pede o baralho de cartas ao espectador, coloca as cartas com as faces voltadas para baixo e vai descartando as cartas até chegar à 15ª carta, que será a escolhida pelo espectador, o Ás de copas.

2) Conduzir a carta para uma posição pré-definida

Nesta situação, o mágico pede ao espectador que escolha uma carta e indique em que posição a pretende encontrar no final do truque.

Vamos supor que a posição pretendida é a p-ésima.

Começamos por escrever o número $(p-1)$ na base m, ou seja, $(p-1) = (a_1 \dots a_m)_{(base\ m)}$.

Ao executar o truque, o mágico recolhe a coluna, que contém a carta escolhida pelo espectador, da seguinte forma:

Na primeira iteração, a coluna, que contém a carta escolhida, é recolhida em $(a_m + 1)^{\underline{o}}$ lugar; na segunda iteração, a coluna é recolhida em $(a_{m-1} + 1)^{\underline{o}}$ lugar; e assim sucessivamente até à m-ésima iteração, em que a coluna é recolhida em $(a_1 + 1)^{\underline{o}}$ lugar. Assim, a carta escolhida ocupará a posição $(a_1 \dots a_m)_{(base\ m)} + 1 = (p-1) + 1 = p$, como pretendido.

Portanto, concluímos que a carta escolhida poderá ficar numa qualquer posição previamente escolhida pelo espectador (exemplo 48).

3) Nomear a carta do espectador

Nesta versão, o m deve ser ímpar e nas m recolhas efetuadas, a coluna, que contém a carta escolhida, deve ficar sempre no meio das outras. Esta é a versão clássica do truque de Gergonne, em que, no final, a carta escolhida ocupará sempre a posição $\frac{m^m+1}{2}$, ou seja, a posição central.

Como uma das condições era que m fosse ímpar então podemos dizer que $(m+1)$ será par. Por outro lado, foi referido que a coluna contendo a carta escolhida deve ser recolhida de modo a ficar no meio das restantes, assim, o esquema será $\left\{\frac{m+1}{2}\right\}_{i=1}^{m}$. Aplicando o Teorema 4.1, temos que a posição final da carta será:

$$\left[\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\right]_{(base\ m)}+1=$$

$$=\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)\dots\left(\frac{m-1}{2}\right)\right]_{(base\ m)}+1=\left[\sum_{i=m}^{1}\left(\frac{m-1}{2}\right)m^{i-1}\right]+1$$

$$=\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)(m^{m-1}+m^{m-2}+\cdots+m+m^0)\right]+1=$$

$$=\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m^m-1}{m-1}\right)+1=\frac{m^m-1}{2}+1=\frac{m^m+1}{2}.$$

Na prática, o mágico pode, na m-ésima distribuição das cartas na mesa, descobrir a carta escolhida pelo espectador. Para isso, só terá que retirar da coluna indicada pelo espectador, a carta que se encontra na posição $\frac{m^{m-1}+1}{2}$, contando a partir do fundo da coluna.

26 - Só ases!

Este truque teve por base a referência bibliográfica [9].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

Sem o conhecimento do espectador, o mágico coloca uma carta com o número 8 na oitava posição do baralho a partir do topo, faces voltadas para baixo, e os ases na nona, décima, décima primeira e décima segunda posições. Acrescenta as restantes cartas do baralho a seguir aos ases.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico abre o baralho em leque, tendo o cuidado de não mostrar os quatro ases que estão agrupados, para que os espectadores possam constatar que as cartas estão bem misturadas.
2. De seguida, o mágico pede a um espectador que escolha um número entre 10 e 19.
3. O mágico descarta, uma a uma, a partir do topo do baralho e com as faces voltadas para baixo, esse número de cartas. O restante baralho é colocado à parte.
4. O mágico pede ao espectador que adicione os algarismos do número que escolheu inicialmente. O mágico retira do monte esse número de cartas e coloca-as sobre o baralho restante, uma de cada vez, invertendo assim a posição das cartas.
5. O mágico pede ao espectador que vire a carta que está no topo do monte sobrante e que constate que se trata de um ás. Essa carta é colocada de lado, não sendo necessária para o prosseguimento do truque.
6. O monte é agora colocado sobre o baralho restante, sem inverter as cartas.
7. O mágico deve repetir todo o processo mais duas vezes, com dois números diferentes, entre 10 e 19.

8. Por fim, o mágico finge que pede ajuda ao “espírito dos números” para que lhe dê um sinal sobre a localização do último ás. O mágico vira a carta do topo do baralho que será um 8, este deve ser colocado na mesa. O mágico revela que acha que a pista dada pelo “espírito” é que o último ás será a oitava carta a partir do topo. O mágico conta mais 8 cartas e magia, aparece o quarto ás! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Este truque baseia-se no facto da diferença entre um número compreendido entre 10 e 19 e a soma dos seus algarismos ser sempre igual a 9.

Uma vez que o espectador deve escolher um número n tal que $10 \leq n \leq 19$, esse número será da forma $1a$, em que a é o algarismo das unidades. Temos então que o número escolhido, no sistema de base 10, é $10 + a$.

A diferença entre o número inicial e a soma dos dois algarismos pode ser representada pela seguinte expressão algébrica:

$10 + a - (1 + a) = 10 + a - 1 - a = 9$

Tendo em conta este princípio e a colocação dos ases no baralho, o mágico conseguirá invariavelmente encontrar os quatro ases.

27 - Um caso notável

Este truque teve por base a referência bibliográfica [55].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Quadrado de um binómio

PREPARAÇÃO

Previamente e sem o conhecimento dos espectadores, o mágico prepara o baralho colocando as cartas, a partir do topo e com as faces voltadas para baixo, de acordo com a sequência:

Ás, Ás, Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, R, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

As cores e os naipes não são importantes, apenas os valores das cartas.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico coloca o baralho sobre a mesa e pede a um espectador que o parta e que junte os dois montes obtidos. O mágico pede que o faça novamente, só que desta vez, o espectador deve deixar, sobre a mesa, os dois montes obtidos.
2. O mágico pede ao espectador que veja a carta que está no fundo do monte que estava na parte superior do baralho e a carta que está no topo do monte que estava na parte inferior do baralho. Se as cartas tiverem o mesmo valor o espectador deve juntar os montes e voltar a partir o baralho, criando dois novos montes. Se as cartas tiverem valores diferentes, o espectador retira essas cartas, fica com a que tem menor valor e entrega a outra a outro espectador, que a vai guardar até ao fim do truque. O primeiro espectador agrupa os dois montes das cartas sobrantes e coloca esse baralho na mesa com as faces voltadas para baixo.

3. O mágico vira-se de costas e pede a cada um dos espectadores que calcule mentalmente o quadrado do valor da sua carta. De seguida, pede-lhes que façam a diferença entre o maior valor obtido e o menor.
4. O mágico pede ao primeiro espectador (o que ficou com a carta de menor valor) que pegue no baralho, com as faces voltadas para baixo, e descarte sobre a mesa o número de cartas correspondente à diferença obtida, criando um novo monte. Deve ainda colocar a sua carta no topo desse monte. O restante baralho fica na mesa.
5. O mágico pede a esse espectador que pegue no monte que criou e que, de forma alternada, coloque as cartas na mesa em duas pilhas. De seguida, o espectador é convidado a ficar com uma das pilhas e deixar ficar a outra na mesa.
6. O mágico vira-se e anuncia que o número de cartas na posse do primeiro espectador é igual ao valor da carta guardada pelo outro espectador. Os espectadores confirmam. E não é que o mágico acertou! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Excluindo o grupo dos três ases e dos três reis, o baralho está preparado para que duas cartas seguidas tenham valores consecutivos. O primeiro corte não altera esta sequência uma vez que a carta do fundo do baralho, que é o 2, ficará sobre a carta que estava no topo, um Ás.

No segundo corte, se aparecer um par de ases ou de reis, o baralho volta a ser partido, sob o pretexto dos valores das cartas terem que ser diferentes para se prosseguir com o truque.

Seja x o valor da carta com menor valor e $(x+1)$ o valor da outra carta, que ficará com o segundo espectador.

O mágico pede aos espectadores que façam a diferença entre os quadrados dos valores das respetivas cartas, ou seja,

$$(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$$

O mágico pede ao primeiro espectador que descarte do baralho o número de cartas correspondente à diferença obtida e que acrescente a sua carta, ou seja, irá colocar na mesa $(2x+2)$ cartas. De seguida, é pedido ao espectador que divida esse monte em duas pilhas que terão cada uma $(x+1)$ cartas. Este número é precisamente o valor da carta que ficou para o segundo espectador (a carta com maior valor).

28 - Os ases de Belchou

Este truque teve por base a referência bibliográfica [28].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

Sem o conhecimento do espectador, os quatro ases encontram-se no topo do baralho (faces voltadas para baixo).

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico abre o baralho em leque, tendo o cuidado de não mostrar os quatro ases que estão no topo, para mostrar aos espectadores que as cartas estão bem misturadas.
2. O mágico pede a um espectador que parta o baralho em quatro montes, a que chamaremos monte A, B, C e D. Estes montes poderão ter um número diferente de cartas. O monte D será o que primeiramente se encontrava no topo do baralho.
3. O mágico pede ao espectador que pegue no monte A e descarte três cartas, viradas para baixo, para o local onde estava o monte A. De seguida, coloca uma carta, virada para baixo, no topo de cada um dos outros três montes, B, C e D, por esta ordem. O que resta do monte A, é colocado por cima das três cartas que inicialmente foram colocadas na posição A.
4. O espectador deve seguir o mesmo procedimento com o monte B: descarta três cartas, viradas para baixo, para o local onde estava o monte B, e de seguida coloca uma carta, virada para baixo, no topo de cada um dos outros três montes. O que resta do monte B, é colocado por cima das três cartas que inicialmente foram colocadas na posição B.
5. O espectador deve seguir o mesmo procedimento com os montes C e D.

6. O mágico pede então ao espectador que vire as cartas que estão no topo de cada monte. MAGIA! São quatro ases!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Vamos tentar explicar o truque com um pouco de álgebra.

Sejam n_1, n_2, n_3 e n_4 o número de cartas dos montes A, B, C e D, respetivamente.

	Monte A	Monte B	Monte C	Monte D
1º descarte	$n_1 - 3$	$n_2 + 1$	$n_3 + 1$	$n_4 + 1$
2º descarte	$n_1 - 3 + 1$	$n_2 + 1 - 3$	$n_3 + 1 + 1$	$n_4 + 1 + 1$
3º descarte	$n_1 - 3 + 1 + 1$ $= n_1 - 1$	$n_2 + 1 - 3 + 1$ $= n_2 - 1$	$n_3 + 1 + 1 - 3$ $= n_3 - 1$	$n_4 + 1 + 1 + 1$ $= n_4 + 3$

Antes de iniciar o procedimento com o monte D, observemos a última coluna da tabela.

Depois do descarte do monte C, o monte D, que inicialmente tinha os quatros ases no topo, passou a ter três cartas provenientes dos outros três montes, tendo assim ficado os ases na 4ª, 5ª, 6ª e 7ª posições, a partir do topo.

Ao iniciar o procedimento análogo aos restantes montes, as três cartas do topo do monte D são colocadas na mesa. Com isto, conseguiu-se voltar a ter os quatro ases novamente no topo. Ao serem distribuídas essas cartas pelos restantes montes, passamos a ter um ás no topo do monte A, outro no monte B, outro no monte C e o último permanecerá no topo do monte D. Conseguimos assim o efeito pretendido.

29 - Transmissão de pensamentos

Este truque teve por base as referências bibliográficas [16], [20] e sitográfica [61].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 32 cartas (Ases, Reis, Damas, Valetes, 10, 9, 8 e 7 de cada naipe)

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Sequências de De Bruijn
- Grafos eulerianos
- Análise combinatória (arranjos completos)

PREPARAÇÃO

Previamente e sem o conhecimento dos espectadores, o mágico prepara o baralho colocando as cartas, a partir do topo, de acordo com a seguinte sequência:

8♦ 9♥ R♥ 7♥ 10♦ V♣ D♥ 9♦ V♠ V♥ 9♣ 7♣ D♦ 10♥ 9♠ R♣ D♣ R♠ 10♣ R♦ 8♥ A♦ 8♠ D♠ 7♦ 7♠ A♠ 8♣ V♦ 10♠ A♥ A♣.

DESENVOLVIMENTO

1. Antes de entregar o baralho a um espectador, o mágico pode abri-lo em leque para mostrar ao público que este está bem misturado. Entrega então o baralho, com as faces viradas para baixo, a um espectador, pede-lhe que o corte onde quiser e que volte a juntar os montes. O baralho deve continuar com as faces voltadas para baixo.
2. O mágico pede ao espectador que fique com a carta que está no topo, não a mostre, e passe o baralho ao espectador que está à sua direita. Este fica com a carta do topo e passa o baralho para o seu vizinho da direita, que por sua vez, tira a carta do topo e assim sucessivamente até serem retiradas cinco cartas do baralho.
3. O mágico diz ao público que irá adivinhar as cartas que foram retiradas apenas por "transmissão de pensamentos".

4. O mágico começa então o seu espetáculo. Pede aos cinco espectadores que se concentrem na carta que têm na mão, que não mostraram a ninguém. O mágico fecha os olhos e procura concentrar-se. Passados alguns segundos, menciona o facto de estar a receber demasiadas informações o que impossibilita a sua concentração no que é essencial. Por isso será necessário fragmentar a informação, começando pelas cartas pretas (paus ou espadas).
5. O mágico pede então que, dos cinco espectadores, se levantem os que tiverem uma carta preta. O mágico volta a pedir que se concentrem na sua carta. Vamos supor que se levantam o primeiro e o terceiro espectadores. Ao fim de algum tempo, o mágico anuncia que o primeiro espectador tem o 10 de espadas e o outro o Ás de paus.
6. O mágico dirige-se ao público e diz que agora já consegue decifrar as primeiras informações que lhe foram transmitidas, dizendo que as outras cartas são o Ás de copas, o oito de ouros e o 9 de copas.
7. O mágico pede então aos espectadores que mostrem as suas cartas ao público. O mágico acertou! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

A letra V representará uma carta vermelha e P uma carta preta.

Este truque pode ser explicado utilizando algumas noções estudadas pelo matemático holandês Nicolaas Govert de Bruijn (1918-2012). Estes conceitos centram-se sobretudo na Teoria dos Grafos e nas sequências numéricas, conhecidas, hoje em dia, por "sequências de De Bruijn". Estas sequências ajudar-nos-ão a perceber o funcionamento do truque apresentado [16]. Voltemos ao truque. Em nenhum momento, o baralho foi misturado, apenas observado e cortado pelo primeiro espectador. Os cinco espectadores não retiraram do baralho cartas de forma aleatória, mas sim cinco cartas consecutivas, depois do corte efetuado. Em determinado momento do truque, o mágico consegue saber quantos e quais os espectadores com cartas pretas. Com estas informações, conseguirá escolher o caso favorável dos trinta e dois possíveis, a saber:

PPPPP – PPPPV – PPPVP – PPPVV – PPVPP – PPVPV – PPVVP – PPVVV – PVPPP – PVPPV – PVPVP – PVPVV – PVVPP – PVVPV – PVVVP – PVVVV – VPPPP – VPPPV – VPPVP – VPPVV – VPVPP – VPVPV – VPVVP – VPVVV – VVPPP – VVPPV – VVPVP – VVPVV – VVVPP – VVVPV – VVVVP – VVVVV.

Na apresentação inicial do truque foi dado como exemplo o primeiro e o terceiro espectadores a levantarem-se, assim, o arranjo adequado a esta situação é **PVPVV**. Para descobrir o valor de cada uma das cartas, o mágico terá primeiro que saber o local preciso do corte efetuado pelo primeiro espectador. Isto só será possível porque o baralho inicial foi preparado de acordo com uma ordem específica. Apenas com o conhecimento das cores das cinco cartas, o mágico conseguirá saber onde foi feito o corte e assim descobrir os seus valores. O segredo do truque está então na sequência escolhida para a colocação das cartas do baralho inicial.

Precisamos de uma sequência de 32 símbolos, P e V, contendo 16P e 16V, de tal forma que as 32 formas de escolher cinco elementos consecutivos dessa sequência sejam todas diferentes e que correspondam aos 32 arranjos acima apresentados. De referir que, quando falamos em cartas consecutivas, depois da última carta do baralho voltamos à do topo: as cartas nas posições 30, 31, 32, 1 e 2, são assim, para o nosso truque, cinco cartas consecutivas. Um exemplo de uma sequência que verifica as condições anteriores poderá ser:

VVVVVPVVPVPPVVPPPPPVVVPPVPPPVPVP.

Esta sequência é designada por sequência de De Bruijn de ordem 5. Se escolhermos 5 símbolos consecutivos desta sequência conseguimos encontrar cada um dos 32 arranjos. Basta agora escolher uma forma de organizar as 32 cartas de um baralho que respeite esta sequência de De Bruijn. Existem várias, no entanto basta escolher uma e mantê-la.

Por exemplo:

8♦ 9♥ R♥ 7♥ 10♦ V♣ D♥ 9♦ V♠ V♥ 9♣ 7♣ D♦ 10♥ 9♠ R♣ D♣ R♠ 10♣ R♦ 8♥ A♦ 8♠ D♠ 7♦ 7♠ A♠ 8♣ V♦ 10♠ A♥ A♣.

Independentemente do local onde for feito o corte, as cinco cartas consecutivas, que ficarão para os espectadores, determinam um arranjo de vermelho e preto que permitirá ao mágico saber onde foi feito o corte e ainda conhecer o valor dessas cartas. Vamos retomar o exemplo dado. Os espectadores 1 e 3 tinham cartas pretas. A situação é **PVPVV**, como já tinha sido referido. O único corte que permite este arranjo é aquele que traz para o topo do baralho a carta com o 10 de espadas. A configuração do baralho, depois do corte, será:

10♠ A♥ A♣ 8♦ 9♥ R♥ 7♥ 10♦ V♣ D♥ 9♦ V♠ V♥ 9♣ 7♣ D♦ 10♥ 9♠ R♣ D♣ R♠ 10♣ R♦ 8♥ A♦ 8♠ D♠ 7♦ 7♠ A♠ 8♣ V♦.

Assim, as cinco cartas dos espectadores serão 10♠, A♥, A♣, 8♦, 9♥, por esta ordem.

Para a realização do truque o mágico pode decorar a ordem inicial das cartas e mentalmente encontrar o local do corte ou então elaborar uma tabela, como a que é apresentada a seguir, e colocar, por exemplo, os diferentes arranjos em sítios estratégicos da sala de espetáculo.

PPPPP	9♠ R♣ D♣ R♠ 10♣
PPPPV	R♣ D♣ R♠ 10♣ R♦
PPPVP	7♠ A♠ 8♣ V♦ 10♠
PPPVV	D♣ R♠ 10♣ R♦ 8♥
PPVPP	8♠ D♠ 7♦ 7♠ A♠
PPVPV	A♠ 8♣ V♦ 10♠ A♥
PPVVP	9♣ 7♣ D♦ 10♥ 9♠
PPVVV	R♠ 10♣ R♦ 8♥ A♦
PVPPP	D♠ 7♦ 7♠ A♠ 8♣
PVPPV	V♠ V♥ 9♣ 7♣ D♦
PVPVP	8♣ V♦ 10♠ A♥ A♣
PVPVV	10♠ A♥ A♣ 8♦ 9♥
PVVPP	7♣ D♦ 10♥ 9♠ R♣
PVVPV	V♣ D♥ 9♦ V♠ V♥
PVVVP	10♣ R♦ 8♥ A♦ 8♠
PVVVV	A♣ 8♦ 9♥ R♥ 7♥

VPPPP	10♥ 9♠ R♣ D♣ R♠
VPPPV	7♦ 7♠ A♠ 8♣ V♦
VPPVP	A♦ 8♠ D♠ 7♦ 7♠
VPPVV	V♥ 9♣ 7♣ D♦ 10♥
VPVPP	9♦ V♠ V♥ 9♣ 7♣
VPVPV	V♦ 10♠ A♥ A♣ 8♦
VPVVP	10♦ V♣ D♥ 9♦ V♠
VPVVV	A♥ A♣ 8♦ 9♥ R♥
VVPPP	D♦ 10♥ 9♠ R♣ D♣
VVPPV	8♥ A♦ 8♠ D♠ 7♦
VVPVP	D♥ 9♦ V♠ V♥ 9♣
VVPVV	7♥ 10♦ V♣ D♥ 9♦
VVVPP	R♦ 8♥ A♦ 8♠ D♠
VVVPV	R♥ 7♥ 10♦ V♣ D♥
VVVVP	9♥ R♥ 7♥ 10♦ V♣
VVVVV	8♦ 9♥ R♥ 7♥ 10♦

Este truque pode ser realizado com n espectadores e um baralho de 2^n cartas. A questão que se coloca é como descobrir a sequência de De Bruijn de ordem n que permita realizar o truque com sucesso. Vamos primeiro ver um algoritmo que permite encontrar apenas uma delas.

Vamos exemplificar para $n = 4$. A letra P será substituída pelo número 1 e a letra V por 0.

Precisamos de encontrar uma sequência com 16 dígitos, 0 e 1, em que, ao deslocar sobre ela "uma janela" de largura 4, seja possível encontrar todos os arranjos completos de 2 elementos (0 e 1) tomados 4 a 4.

Começamos, por exemplo, com o arranjo 0000. De seguida, acrescentamos um 1, e ficamos com a sequência 00001. Os quatro últimos dígitos dão origem ao arranjo 0001. Voltamos a acrescentar um 1 e a sequência passa a ser 000011. Se os últimos quatro dígitos originarem um arranjo já existente temos que acrescentar um 0 em vez de um 1, e continuamos este procedimento até encontrar os 16 arranjos completos de 0 e 1, tomados 4 a 4. Observemos:

Ponto de partida: 0000

Acrescentamos um 1: 00001

Acrescentamos um 1: 000011

Acrescentamos um 1: 0000111

Acrescentamos um 1: 00001111

Acrescentamos um 0: 000011110 (Se acrescentássemos um 1 originaria o 1111 que já existe)

Acrescentamos um 1: 0000111101

Acrescentamos um 1: 00001111011

Acrescentamos um 0: 000011110110

Acrescentamos um 0: 0000111101100

Acrescentamos um 1: 00001111011001

Acrescentamos um 0: 000011110110010

Acrescentamos um 1: 0000111101100101

Assim conseguimos obter uma sequência de de Bruijn de ordem 4: 0000111101100101.

O mágico poderia então realizar o truque com 4 espectadores e um baralho de dezasseis cartas (mantendo as copas e os paus, por exemplo). O baralho é preparado colocando as cartas de acordo com a sequência anterior: VVVVPPPPVPPVVPVP.

O algoritmo apresentado anteriormente permitiu-nos encontrar apenas uma sequência de De Bruijn de ordem 4, mas é possível encontrá-las todas. Para isso utilizam-se os chamados grafos de De Bruijn.

Os grafos de De Bruijn permitem descobrir todas as sequências com 2^n símbolos (0 e 1), onde é possível, ao deslocar sobre elas uma "janela" de largura n, encontrar todos os arranjos completos de 2 elementos (0 e 1) tomados n a n. Estas sequências de 0 e 1 são conhecidas por "sequências de de Bruijn de ordem n". Para descobrir estas sequências temos que desenhar um grafo de De Bruijn e procurar circuitos eulerianos (página 53).

Vamos primeiro ver como se desenham os grafos de de Bruijn, tomando como exemplo $n = 4$.

Neste caso, o grafo terá oito vértices que corresponde ao número de arranjos completos de 2 elementos (0 e 1) tomados 3 a 3, ou seja, 2^{n-1} $(2^3 = 8)$. Traçamos um arco partindo do arranjo $a_1a_2a_3$ para o arranjo $a_2a_3a_4$ (os dois últimos símbolos do primeiro arranjo são iguais aos dois primeiros do segundo) e escrevemos a_4 sobre o arco que os une. Esta forma de desenhar o grafo permite assegurar que, em cada vértice começam e terminam exatamente dois arcos. Existem, ao todo, neste grafo, 16 (2^4) arcos. Na figura 4.10 apresentamos um exemplo.

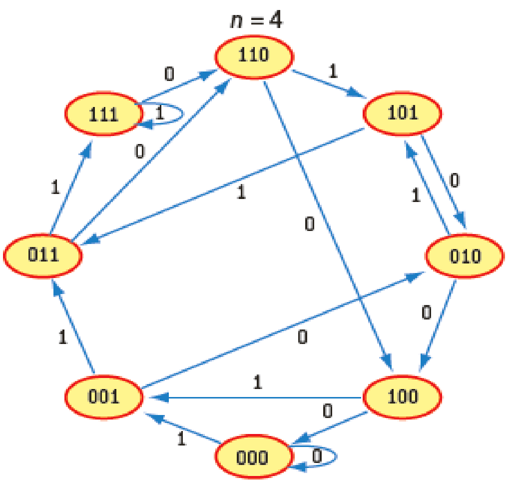


Fig. 4.10 – Grafo de De Bruijn (n=4) [16]

Vamos verificar se este grafo é euleriano. A primeira condição do Teorema de Euler, ser um grafo conexo, é verificada, pois é possível partindo de um qualquer vértice chegar a outro. A segunda condição, o grau de cada vértice ser par, também é verificada, uma vez que em cada vértice começam e terminam dois arcos.

Assim, será possível, utilizando este grafo, encontrar uma sequência de De Bruijn de ordem 4, bastando para isso procurar um circuito euleriano. Este circuito passará duas vezes por cada vértice do grafo, pois de cada um começam dois arcos; duma vez, escolhemos o arco com o número zero e da segunda o arco com o número um. Por exemplo, consideremos o circuito: 000 $\underset{0}{\rightarrow}$ 000 $\underset{1}{\rightarrow}$ 001 $\underset{1}{\rightarrow}$ 011$\underset{0}{\rightarrow}$ 110 $\underset{0}{\rightarrow}$ 100 $\underset{1}{\rightarrow}$ 001 $\underset{0}{\rightarrow}$ 010 $\underset{1}{\rightarrow}$ 101 $\underset{1}{\rightarrow}$ 011 $\underset{1}{\rightarrow}$ 111 $\underset{1}{\rightarrow}$ 111 $\underset{0}{\rightarrow}$ 110 $\underset{1}{\rightarrow}$ 101 $\underset{0}{\rightarrow}$ 010 $\underset{0}{\rightarrow}$ 100.

Com este circuito conseguimos escrever cada um dos 16 arranjos completos de 0 e 1 tomados 4 a 4:

0000 – 0001 – 0011 – 0110 – 1100 – 1001 – 0010 – 0101 – 1011 – 0111 – 1111 – 1110 – 1101 – 1010 – 0100 – 1000.

Podemos escrever este circuito de forma mais compacta, ou seja, 0000110010111101, que representa a sequência de De Bruijn de ordem 4.

Conclusão final: Qualquer que seja o valor de n, podemos fazer o truque de cartas com n espectadores e um baralho com 2^n cartas. O método dos circuitos eulerianos permite encontrar as sequências de De Bruijn de ordem n, para todo o n, e encontrá-las todas. É possível contabiliza-las, são exatamente $2^{2^{n-1}-n}$.

Para o nosso truque, o grafo a utilizar poderá ser o que está representado na figura 4.11.

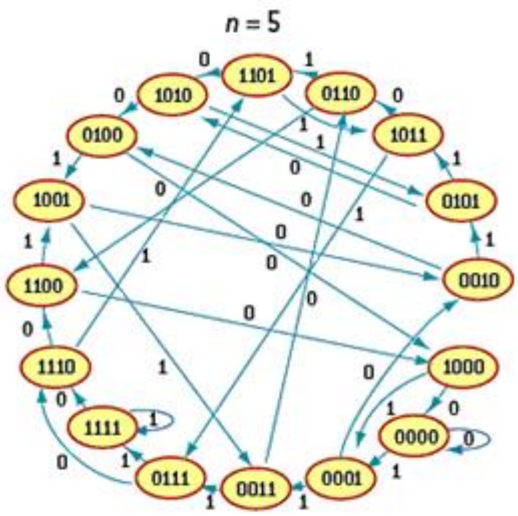


Fig. 4.11 – Grafo de De Bruijn (n=5) [16]

De realçar que a Matemática subjacente a este truque é, sem dúvida, bastante rebuscada e muito interessante. No entanto, a sua execução prática não é fácil, pois exige, por parte do mágico, uma grande capacidade de memorização. Isto porque a sequência particular do baralho inicial não apresenta nenhuma regularidade evidente que possa ajudar o mágico nessa árdua tarefa.

30 - Pares impossíveis

Este truque teve por base a referências bibliográficas [5], [37] e [38].

MATERIAL NECESSÁRIO

- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Primeiro princípio de Gilbreath
- Permutações
- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

Previamente e sem o conhecimento dos espectadores, o mágico prepara o baralho colocando as cartas com as cores alternadas.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico entrega o baralho a um espectador, pede-lhe que o parta quantas vezes quiser e que o devolva.
2. Com o baralho numa das mãos, com as faces voltadas para baixo, o mágico vai passando cartas, uma a uma, do topo do baralho, para a outra mão, até o espectador o mandar parar. O mágico fica com dois montes, um em cada mão, que coloca sobre a mesa.
3. De seguida, o mágico pede ao espectador que faça um baralhamento "Americano" (página 66).
4. O mágico pede ao espectador que fique com o baralho misturado e diz-lhe que vão jogar à Batalha, alterando ligeiramente as regras. O espectador deverá tirar, do topo do baralho, alternadamente, uma carta para si e outra para o mágico. Se as cores das cartas forem diferentes, o par fica para o mágico, caso contrário fica para o espectador. Ganha quem ficar com mais cartas.
5. O jogo começa e não é que o mágico ganha! Magia! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Para este truque foi utilizado um baralho preparado, contendo um número par de cartas com as cores alternadas. Os cortes realizados inicialmente pelo espectador não alterarão esta disposição. Quando o mágico separa o baralho em dois montes, da forma descrita no ponto 2, está a garantir que no topo de cada um deles as cartas serão de cores diferentes. De seguida, estes montes são misturados utilizando um baralhamento "Americano". Este novo baralho será designado por baralho misturado.

Este truque pode ser explicado utilizando o **primeiro Princípio de Gilbreath**. O seu enunciado, tal como foi escrito por Gilbreath, no seu artigo do Linking Ring de Junho de 1966 [31] é o seguinte:

"Se um baralho de cartas, preparado com cartas vermelhas e pretas alternadas uma a uma, for cortado em dois montes, com uma carta preta no topo de um, e uma carta vermelha no topo do outro, e se esses dois montes foram misturados utilizando um baralhamento "Americano", então cada par de cartas consecutivas do baralho será composto por uma carta vermelha e outra preta".

O esquema seguinte mostra um exemplo de uma configuração do baralho preparado. A letra V representa uma carta vermelha e P uma carta preta.

$$\underline{VP}\ \underline{VP}\ \underline{VP} \dots \underline{VP}\ V \;\Big|\; P\ \underline{VP}\ \underline{VP}\ \underline{VP}$$

Corte

O princípio anteriormente descrito garante que, depois de realizar o baralhamento "Americano", encontraremos uma sucessão de pares de cartas de cores diferentes. Um exemplo dessa configuração poderá ser:

$$\underline{VP}\ \underline{PV}\ \underline{PV} \dots\ \underline{VP}\ \underline{PV}$$

No mesmo artigo [31] é possível ler:

"*Se preferirem deixar o espectador efetuar o corte, antes do baralhamento "Americano", com as faces voltadas para baixo, sem se preocupar com a cor das cartas dos dois montes, basta, depois de efetuado o baralhamento "Americano", proceder ao seguinte ajustamento: pegar no baralho, virá--lo de forma a ficar com as faces voltadas para cima, […], procurar duas cartas da mesma cor, […], cortar ao meio deste par e completar o corte […].*"

Ao fazer este ajustamento, a propriedade da alternância de cores de cada par volta a encontrar-se. Note-se que é possível ter um baralho sem cartas consecutivas da mesma cor, não sendo assim necessário o ajustamento.
Se, por exemplo, depois do baralhamento "Americano" tivermos a seguinte disposição

VP VV PP VV PV … PP VP

que o mágico corta entre duas cartas da mesma cor, por exemplo, entre duas pretas:

VP VV P | P VV PV … PP VP

Completando o corte, obtém-se uma nova sucessão de pares de cartas de cores diferentes:

PV VP V … P PV PV PV VP

Assim, o **primeiro princípio de Gilbreath** estipula que para um baralho preparado com a seguinte configuração

VP VP VP … VP

o baralho misturado de acordo com as condições anteriormente descritas terá a seguinte configuração

$$f_1(VP), \qquad f_2(VP), \dots. \ , \qquad f_p(VP)$$

onde para cada $j \in \{1, \dots, p\}$, $f_j(VP)$ é uma permutação das cartas V e P.

Demonstração do primeiro Princípio de Gilbreath [38]

Vamos supor que temos um baralho, com $2n$ cartas, preparado com cartas vermelhas e pretas, alternadas uma a uma.

Sejam V_k e P_k o número de cartas vermelhas e pretas, do baralho misturado, depois de contadas as primeiras k cartas ($1 \leq k \leq 2n$). Temos que:

$$V_k + P_k = k\,, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, 2n\}.$$

Seja D_k a diferença entre o número de cartas vermelhas e pretas, ou seja,

$$D_k = V_k - P_k\,, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, 2n\}.$$

Vamos considerar que $D_0 = 0$.

Assim, temos que

$$D_{k+1} = D_k \pm 1 \quad , \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots., 2n-1\}.$$

O sinal " $+$ " corresponde ao caso em que a $(k+1)$-ésima carta é vermelha e o sinal "$-$" quando esta é preta.

Proposição 4.1: Se depois do corte do baralho preparado, os dois montes tiverem no topo cartas de cores diferentes, então os números D_k com $0 \leq k \leq 2n$, verificam as propriedades seguintes:

1) $D_{2k} = 0$, $\quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

2) $D_{2k+1} \in \{-1, 1\}$ $\quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Demonstração

A primeira propriedade fica demonstrada se provarmos que

$$D_{2k+2} = D_{2k}\,, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Como por hipótese, os dois montes têm no topo cartas de cores diferentes então $D_2 = 0 = D_0$.

As $2k$ primeiras cartas do baralho misturado comportam as p primeiras cartas do primeiro monte e as q primeiras cartas do segundo monte, para p e q tais que $p + q = 2k$. As duas cartas seguintes têm cores diferentes uma vez que o baralho inicial foi preparado com cartas pretas e vermelhas alternadas. Assim, se tivermos no topo de um dos montes uma carta vermelha e no topo do outro monte uma carta preta, encontraremos, respetivamente, para as $(p+1)$-ésima e $(p+2)$-ésima cartas de um, e as $(q+1)$-ésima e $(q+2)$-ésima cartas do outro,

- quando p e q são números pares, uma carta vermelha seguida de uma preta e uma preta seguida de uma vermelha;

- quando p e q são números ímpares, uma carta preta seguida de uma vermelha e uma vermelha seguida de uma preta.

Constatamos assim que as $(2k+1)$-ésima e $(2k+2)$-ésima cartas do baralho misturado são de cores diferentes, pois foi efetuado um baralhamento "Americano" de dois montes VP e PV. Assim,

$$V_{2k+2} = V_{2k} + 1 \text{ e } P_{2k+2} = P_{2k} + 1$$

e então

$$D_{2k+2} = V_{2k+2} - P_{2k+2} = V_{2k} + 1 - (P_{2k} + 1) = V_{2k} - P_{2k} = D_{2k}\,.$$

Assim $D_0,\ D_2,\ D_4, \ldots, D_{2n}$ é uma sequência constante e nula.

A propriedade $D_{2k+1} = D_{2k} \pm 1$ leva-nos então a que $D_{2k+1} = \pm 1$. $\square$

Corolário 4.1.1: Se depois do corte do baralho preparado, os dois montes tiverem no topo cartas de cores diferentes, então o baralho misturado, por um baralhamento "Americano", terá pares de cartas de cores diferentes.

Demonstração

Da igualdade $D_{2k+2} = D_{2k}$ podemos afirmar que $V_{2k+2} - V_{2k} = P_{2k+2} - P_{2k}$. Estas relações significam que o número de cartas vermelhas e o de cartas pretas no par formado pelas $(2k+1)$-ésima e $(2k+2)$-ésima cartas é igual. Isto prova que o baralho misturado é constituído por pares de cartas de cores diferentes. □

De forma análoga, podemos demonstrar que:

Proposição 4.2 Se depois do corte do baralho preparado, os dois montes tiverem no topo cartas da mesma cor, então os números D_k com $0 \leq k \leq 2n$, verificam as seguintes propriedades:

Se as cartas no topo forem as duas vermelhas:

- $D_{2k+1} = 1 \qquad \forall k \in \{0,1, \dots, n-1\}$
- $D_{2k} \in \{0, 2\} \qquad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Se as cartas no topo forem as duas pretas:

- $D_{2k+1} = -1 \qquad \forall k \in \{0,1, \dots, n-1\}$
- $D_{2k} \in \{-2\,, 0\} \qquad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Corolário 4.2.1:

Se depois do corte do baralho preparado, os dois montes tiverem no topo cartas da mesma cor, então pares de cartas sucessivas da mesma cor coincidem com algum par que se obtém ao dar o baralho aos pares do início ao fim.

O truque "Pares impossíveis" pode ser reformulado. Em vez de recorrer às cores das cartas (vermelha – preta – vermelha – preta…) podemos utilizar, por exemplo, os naipes (paus – ouros – espadas – copas – paus – ouros – …).

Seja C_i uma carta do tipo i ($i = 1,2, \dots, n$). Por exemplo, $n = 2$ para vermelha ou preta, $n = 4$ para os naipes, etc.

Se tivermos um baralho com o mesmo número de cartas de cada tipo e o separarmos em dois montes (que podem ser desiguais): num deles colocamos as cartas em sequências periódicas de período n: $C_1, C_2, \dots, C_n, C_1, C_2, \dots C_n, \dots$, e no outro as mesmas mas por ordem inversa $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1, C_n, C_{n-1}$, ... Depois de fazer o baralhamento "Americano" dos dois montes, conseguiremos obter um baralho com montinhos de n cartas consecutivas, cada um deles formado por uma carta de cada tipo (não necessariamente pela mesma ordem). Este é o segundo princípio de Gilbreath que veremos com mais pormenor no próximo truque, intitulado "Premonição".

31 - *Premonição*

Este truque teve por base a referência bibliográfica [38].

MATERIAL NECESSÁRIO

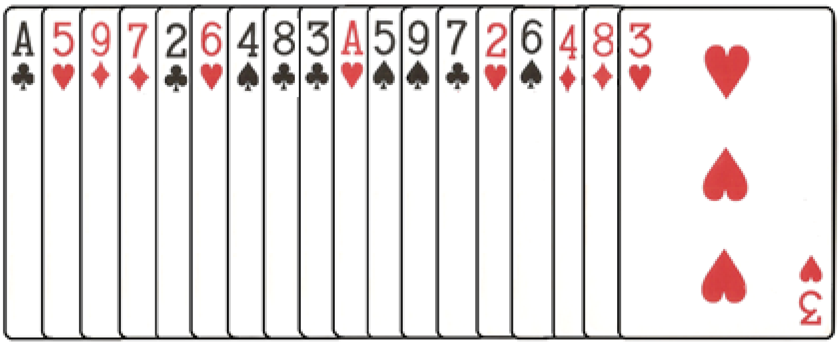
- Um baralho com 52 cartas

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

- Primeiro princípio de Gilbreath
- Permutações
- Expressões algébricas

PREPARAÇÃO

Previamente e sem o conhecimento dos espectadores, o mágico prepara o baralho colocando, a partir do topo, a Dama de copas (ou outra carta) na 45ª posição e as dezoito primeiras cartas com a disposição a seguir apresentada. Para este truque as cores podem não ser alternadas, apenas o valor das cartas é importante.



O mágico escreve numa folha em branco o seguinte " A carta será a Dama de copas". Esta folha é dobrada e colocada num determinado local ou entregue ao espectador no início do truque pedindo-lhe que a guarde num bolso.

DESENVOLVIMENTO

1. O mágico pega no baralho e abre em leque as primeiras cartas do topo, com o pretexto de mostrar ao espectador que o baralho não está preparado. Sem dar a impressão que está a contar, o mágico entrega ao espectador as primeiras nove cartas.
2. O mágico pede ao espectador que conte, em voz alta, as cartas do seu monte, colocando-as, uma a uma sobre a mesa, formando um monte.
3. O mágico retira do seu baralho, a partir do topo, o mesmo número de cartas, ou seja, nove (sem inverter a ordem). Coloca esse monte ao lado do do espectador.
4. O mágico pede então ao espectador que misture os dois montes, utilizando um baralhamento "Americano" (página 66).
5. De seguida, o mágico pede ao espectador que faça um primeiro monte com nove cartas e um segundo com as restantes. O mágico pede que escolha um dos montes. O monte não escolhido é colocado sobre o baralho, que está na posse do mágico.
6. O mágico pede ao espectador que faça mentalmente a adição dos valores de todas as cartas do seu monte. Depois de concluída a operação, o mágico pede ao espectador que lhe entregue as suas cartas, que serão colocadas no topo do baralho.
7. O mágico pede ao espectador que lhe diga qual foi a soma obtida. A partir do topo do baralho, o mágico vai colocando, uma a uma, sobre a mesa, o número de cartas correspondente à soma obtida.
8. De seguida, o mágico pede ao espectador que leia em voz alta o que está escrito na folha que lhe foi entregue no início e que vire a última carta que o mágico colocou na mesa. E não é que o mágico adivinhou a carta mesmo antes de realizar o truque! MAGIA! Ou talvez não!

MATEMÁTICA EM AÇÃO!

Este truque de magia pode ser explicado através do **segundo Princípio de Gilbreath** [31] cujo enunciado original é:

"*Se duas séries de cartas, em que uma delas está por ordem inversa, forem misturadas usando um baralhamento "Americano", as duas metades do monte resultante serão compostas por cartas similares às das séries originais."*

O esquema seguinte [37] mostra a montagem requerida, dita “em espelho”. As duas séries são representadas pelas sequências $C_1 \ldots C_r$ e $C'_1 \ldots C'_r$.

$$\underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Primeira série}} \quad \underset{\text{“Espelho”}}{\Big|} \quad \underbrace{C'_r \ldots C'_1}_{\text{Segunda série invertida}}$$

Depois de um baralhamento “Americano” podemos obter, por exemplo, o seguinte esquema:

$$C_1 C'_r C'_{r-1} C_2 C_3 C_4 \ldots \qquad \ldots C'_3 C_{r-2} C_{r-1} C'_2 C_r C'_1.$$

O monte misturado é formado por duas séries, cada uma delas contendo as cartas C_1 ou C'_1 , C_2 ou C'_2, …, C_r ou C'_r, mas desordenadas.

C. Hudson propôs uma reformulação do segundo princípio de Gilbreath, que designou por princípio RS (Repeating Series)[36], cujo enunciado é o seguinte:

“ Quando um número qualquer de cartas são organizadas em sequências periódicas, elas podem ser misturadas utilizando um baralhamento “Americano” sem alterar o conteúdo de cada série, mas um dos dois montes a baralhar deve conter cartas idênticas do outro mas por ordem inversa.”

Consideremos um baralho composto por $2m$ séries idênticas de r cartas.

$$\underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Série } 1} \quad \cdots \quad \underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Série } m} \quad \underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Série } (m+1)} \quad \cdots \quad \underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Série } 2m}$$

Cortando o baralho ao meio e invertendo as cartas de um dos montes, obtemos

$$\underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Série } 1} \quad \cdots \quad \underbrace{C_1 \ldots C_r}_{\text{Série } m} \quad \underset{\text{Corte}}{\Big|} \quad \underbrace{C_r \ldots C_1}_{\text{Série } (2m) \text{ invertida}} \quad \cdots \quad \underbrace{C_r \ldots C_1}_{\text{Série } (m+1) \text{ invertida}}$$

O Princípio RS refere que depois de um baralhamento “Americano”, a composição do baralho passa a ser

$$\underbrace{f_1(C_1 \ldots C_r)}_{\text{Série } 1'} \quad \cdots \quad \underbrace{f_m(C_1 \ldots C_r)}_{\text{Série } m'} \quad \cdots \quad \underbrace{f_{2m}(C_1 \ldots C_r)}_{\text{Série } (2m)'},$$

onde $f_j(C_1 \dots C_r)$, $j \in \{1, \dots, 2m\}$, é uma permutação das r cartas $C_1 \dots C_r$.
Note-se que este raciocínio também é válido quando o corte não é efetuado exatamente ao meio do baralho preparado.

Voltando ao nosso truque, as dezoito primeiras cartas representam duas séries de nove cartas idênticas (C_1= Ás, C_2= 5, C_3 = 9, C_4= 7, C_5= 2, C_6= 6, C_7= 4, C_8= 8 e C_9= 3). No início do truque o monte das dezoito cartas é cortado a meio e a ordem das cartas de um dos montes é invertida. Estas condições permitem a aplicação do segundo Princípio de Gilbreath. Acresce o facto de a soma dos valores das nove cartas de cada uma das duas sequências ser igual a 45 e por essa razão a Dama de Copas foi colocada na posição 45 a partir do topo.

Conclusão

"The mediocre teacher tells.
The good teacher explains.
The superior teacher demonstrates.
The great teacher inspires."
William Arthur Ward (1921-1994)

O insucesso na disciplina de Matemática é um assunto que preocupa a sociedade em geral e o próprio Ministério da Educação. Este tema tem sido objeto de discussão e a procura de soluções para mitigar este problema é uma constante. Os professores debatem-se diariamente com esta questão e procuram constantemente diversificar os seus recursos pedagógicos e as abordagens metodológicas utilizadas. O intuito é ajudar os alunos a superar as suas dificuldades e a desenvolver uma postura positiva face à Matemática. Mas não é fácil, e não existem soluções milagrosas capazes de resolver todos os problemas de aprendizagem dos discentes. A magia, como tantas outras componentes lúdicas, é uma boa fonte de “entretenimento educativo”. De realçar que a abordagem lúdica da Matemática não pretende criar a ideia de que esta disciplina não requer esforço, pois tal não corresponde à realidade. Mas, utilizando as estratégias supra descritas, procura proporcionar um ambiente motivacional que possibilite a discussão, a exploração e a descoberta de conceitos matemáticos. A aprendizagem torna-se assim aprazível e proveitosa.

Por norma, quando um bom truque de magia tem êxito junto de uma audiência, esta sente uma curiosidade imediata em saber a causa ou a razão do seu sucesso. Ora, muitas vezes, a Matemática está na origem desses truques e no desenvolvimento dos mesmos. Aproveitando assim a admiração e o espanto, que impulsionam a vontade de aprender, será possível com alguns destes truques de magia, seduzir os alunos e levá-los para o universo da Matemática. É assim possível, aliando esta ciência à magia, não só abordar conceitos matemáticos curriculares como estimular numerosas competências como a criatividade, a imaginação, o sentido de observação, a destreza mental e a resolução de problemas.

Sabemos, no entanto, que uma das regras de ouro de um bom mágico é nunca revelar os seus segredos, mas o “matemágico”, em detrimento da sua “carreira artística”, poderá fazê-lo. A intensão será sempre a de motivar a assistência para os “artefactos matemáticos” utilizados.

Os baralhamentos e os truques com cartas apresentados nesta dissertação, parecem-nos interessantes para os professores que têm a pretensão de incluir um elemento mágico nas suas aulas e de contribuir para que a Matemática possa ser ensinada e aprendida com prazer.

É certo que esta não é a solução milagrosa para o problema do insucesso na disciplina de Matemática mas é com certeza mais uma "arma" que temos ao nosso dispor para o combater.

Por fim, é surpreendente verificar as potencialidades de um simples baralho de cartas, que para além de utilizado numa infinidade de jogos, permite ilustrar muitas noções matemáticas. Assim, fica demonstrado que a Matemática está ao alcance de todos e presente nas mais diversas situações. Como diria Nicolai Lobachevsky (1792-1856): "*Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenómenos do mundo real*".

BIBLIOGRAFIA

[1] Alegría, Pedro, "*Entre la matemática y la magia: la leyenda de Josefo y la mezcla australiana",* Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 2012, pp. 410-421. Obtido em 21 de março de 2015 em http://reuredc.uca.es/index.php/tavira/article/view/288/pdf_104.

[2] Alegría, Pedro, *"Códigos secretos y teoria de la información en la magia",* Sigma, nº 25, novembro de 2004. Obtido em 02 de novembro de 2014 de http://www.ehu.eus/~mtpalezp/mates/codigos.pdf.

[3] Alegría, Pedro, *"Matemáticas en una baraja de cartas"* – Universidad del País Vasco. Obtido em 5 de fevereiro de 2015, de http://archivado.unican.es/matesco/talleres_matematicas/transparencias200920010/magiaycartas.pdf.

[4] Alegría, Pedro, "*Un curso de maxia e matemáticas: teoria e 1000 problemas resoltos",* departamento de Matemáticas Universidad do País Vasco. Obtido em 18 de janeiro de 2015, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=433&Itemid=75.

[5] Álvarez, Venancio & Fernández Pablo & Márquez, M, *"Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos",* Gazeta Matemática – El diablo de los números, volume nº 5, pp. 711-735. Obtido em 25 de setembro de 2014, de http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2002_05_3_08.pdf.

[6] Belhoste, Bruno, *"Mélanges de cartes et mathématiques",* Images des Maths, CNRS, 2013. Obtido em 26 de setembro de 2014, de http://images.maths.cmrs.fr/Melanges-de-cartes-et.html .

[7] Bernoulli Jakob, *"Ars conjectandi"*, Basel, 1713. Consultado em fevereiro de https://archive.org/stream/wahrscheinlichke00bernuoft#page/n7/mode/2up.

[8] Biane, P, "*Combien de fois faut-il battre um jeu de cartes?"* Gaz. Math. Nº 91,2002, pp. 4–10.

[9] Blum, Raymond, *"Matemágica",* Bertrand Editora, 1999.

[10] Borel, E & Chéron A., *"Théorie mathématique du bridge à la portée de tous"*, Paris, Gauthier-villars, 1940.

[11] Cardoso Moreira, Domingos, *"Tópicos de Teoria Algébrica de grafos",* Universidade de Aveiro, 2008. Obtido em 22 de março de 2015 de http://sweet.ua.pt/dcardoso/TextosApoio/TAG.pdf.

[12] Carvalho e Silva, Jaime & outros, *"NIUaleph 12"*, volume 1 e 2, ASA Editores, 2012.

[13] Correia de Sá, Carlos & Rocha, Jorge *" Treze viagens pelo mundo da Matemática",* U. Porto Editorial, 2010.

[14] Costa, Belmiro & Rodrigues, Ermelinda, *"Novo espaço 12",* parte 1, Porto Editora, 2012.

[15] Delahaye, Jean-Paul, *"Des cartes bien mélangées",* Pour la Science, Logique et Calcul, nº425, março de 2013. Obtido em 03 de fevereiro, de www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/articles-des-cartes-bien-melangees-31119.ph .

[16] Delahaye, Jean-Paul, *"Un tour de cartes mathématiques",* Logique et Calcul, nº441, julho de 2014. Acedido em outubro de 2014 de www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/articles-un-tour-de-cartes-mathemagiques-33018.php .

[17] Deléglise Marc, *"Permutation et cycles",* Capes Externe Math.,Université de Lyon, 2011. Obtido em http://math.univ-lyon1.fr/capes/IMG/pdf/cycles.pdf.

[18] Depaulis, Thierry, "Histoire et images médiévales – Les jeux pratiques et évolutions", nº28, pp. 78-80, 2012.

[19] Diaconis, P. & Bayer, D., *"Trailing the dovetail shuffle to its lair",* The Annals of Applied Probability, Volume 2, pp. 294-313, 1992.

[20] Diaconis, P. & Graham, R., *"Magical Mathematics"*, Princeton University Press, 2012.

[21] Fernique, Thomas, *"Combien de fois faut-il battre les cartes?",* Susdislav, fevereiro 2015. Obtido em 20 de maio de 2015 em www.lipn.univ-paris13.fr/~fernique/info/dubna14.pdf

[22] Ferreira, Maria João & Tavares, Isabel, "*VI – notas sobre a História da Estatística",* Dossiers didácticos do projeto Alea do Instituto Nacional de Estatística.

[23] Ferreira Neves, Maria Augusta, *"Matemática aplicada às Ciências Sociais – 11"*, Porto Editora, 2008.

[24] Frazão, Fernanda, *"No tempo em que jogar às cartas era proibido – Séculos XV e XVI em Portugal",* Apenas Livros Lda, 2003.

[25] Gallardo Fernandez Pablo, *"Las estruturas básicas de la combinatória",* capítulo 3b, pp.153 - 165, UAM, 2005. Obtido em 17 de fevereiro de 2015 em www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/md.htm

[26] Gandra J. Manuel, *"Cartas de jogar, Cartomância e tarot em Portugal",* CESDIES, Centro Ernesto Soares de Iconografia e Simbólica – Hermética, 2009.

[27] Gardner, Martin, *" Ah, Apanhei-te!",* Biblioteca – Desafios Matemáticos, RBA, 2008, pp. 189-191.

[28] Gardner, Martin, " *Matemática, Magia e mistério",* O prazer da Matemática, Gradiva, 1ª edição, 1991, pp. 13-56.

[29] GAVE, *"Probabilidades e combinatória – 1997-2012",* Editorial do Ministério da Educação e Ciência, pp. 33-57, 2012.

[30] Gilbert, E., *"Theory of shuffling"*, Technical Memorandum, Bell Laboratories, 1955.

[31] Gilbreath, N.L., "*Second Gilbreath principle"* The Linking Ring, junho de 1966.

[32] Gomes, Helena & Martins, Ana, “Números e sistemas de numeração”- capítulo Números e operações, texto de apoio ao PFCM (ESEV).

[33] Gomes, Luiza & Raposo, Daniela, *“Matemática A 12”* , Volume 1, Edições ASA, pp.20-24, 2012.

[34] Guimarães, José Manuel, *“Falando de… Cartas de ilusionismo”,* Apenas Livros Lda, 2003.

[35] Gutiérrez, González Francisco, *“Apuntes de Matemática Discreta-13”,* Universidad de Cádiz, Departamento de Matematicas, outubro de 2004.

[36] Hudson, C., *“Repeating séries*”, The Linking Ring, agosto de 1996.

[37] Lachal, Aimé, “*Quelques mélanges parfaits de cartes”***,** Quadratura nº76, pp.13-25, 2011. Obtido em fevereiro, de *http://lachal.neamar.fr/Ressources/Shuffle.pdf*.

[38] Lachal, Aimé & Schott, P. “*Cartomagie: príncipes de Gilbreath (II)”,* Quadranture nº86*, 2012.*Obtido em 28 de setembro de 2014 de *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00864412/document.*

[39] Lachal, Aimé & Schott,P., “*Cartomagie: príncipes de Gilbreath (III)”,* Quadranture nº86, 2012.Obtido em 28 de setembro de 2014 de *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00864409/document.*

[40] Laplace, Pierre, “*Théorie analytique das Probabilités”,* 2ª edição, V. Courcier, Paris, 1814. Obtido em fevereiro de https://archive.org/stream/thorieanalytiqu01lapgoog#page/n6/mode/2up.

[41] Laplace, *“Essai philosophique sur les probabilités”,* V. Courcier, Paris, 1814. Obtido em fevereiro de https://archive.org/details/essaiphilosophiq00lapluoft.

[42] Martinho, Emanuel & Negra, Cristina, “*Matemática A – 12º ano”,* volume 1, Santillana Constância, pp. 24-27, 2012.

[43] Mulcahy, Colm, *"Mathematical Card Magic: Fifty Two New Effects"*, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2013.

[44] Orbis Fabbris, *"Jogos de engenho",* RBA.

[45] Pehlivan Lerna, "*No feedback card guessing for Top to Random Shuffles",* Carleton University, School of Mathematics and Statistics, 2010. Obtido em março de 2015 de www.mathpubs.com/detail/1006.1321v1/No-feedback-Card-Guessing-for-Top-To-Random-Shuffles.

[46] Picado, Jorge, "*Estruturas discretas"* textos de apoio, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 2ª edição, agosto de 2014 . Obtido em fevereiro de 2015 de http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/52/1/EstruturasDiscretas.pdf.

[47] Pires, Marília Fernanda, *"Texto de apoio de Matemática Discreta",* Universidade do Algarve, 2006. Obtido em 2 de Abril de 2015 de http://w3.ualg.pt/~mpires/texto.pdf.

[48] Poincaré, H., *"Calcul des probabilités,* Gauthier-Villars, Paris, 1912

[49] Quintero, Roy, *"El truco de m pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base m",* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XIII, nº 2, pp. 165-176, 2006. Obtido em 19 de novembro de 2014 de http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/rquintero.pdf.

[50] Robert Marie, Peeters, Loius & autres, "*Les bases nous rendent des comptes",* UCL - Université Catholiques de Louvain, 2014.

[51] Rodrigues Martins, Pedro, *"Notas sobre Elementos de Matemática Finita",* Universidade Técnica de Lisboa, 2011. Obtido em 27 de outubro de 2014 de www.math.ist.utl.pt/~pmartins/EMF/EMF.pdf.

[52] Silva, Jorge Nuno, *"Os matemágicos Silva",* 3ª edição aumentada, Apenas Livros Lda, 2010.

[53] Smith, P. & Martins, M, *"Matemática discreta",* Departamento de Matemática da Universidade do Minho, fevereiro 2009.

[54] Souder, Dominique, *"32 tours mathématiques pour 32 cartes",* ACL- Les Editions du Kangourou, março 2008.

[55] Souder, Dominique, *"60 tours magiques de mathématiques et de logique",* Editions – Ellipses, 2012.

[56] Souder Dominique, Atelier: "quelques instants de récréations mathémagiques". Obtido em 29 de setembro de 2014 de www.apmep.fr/IMG/pdf/Document_atelier_17_Souder-2.pdf

[57] Sousa Pinto, José, *"Tópicos de Matemática Discreta",* Textos de apoio, Universidade de Aveiro, 2005. Obtido em 22 de março de 2015 de http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/116/telemat.pdf.

[58] Tartaglia, Niccolo, *"General Trattato di numeri et misure",* In Vinegia, 1556. Consultado em www.bvpb.mcu.es/es/consulta/registo.cmd?id=406900.

[59] Tomás, Ana Paula, "*Alguns tópicos de Matemática Discreta",* Faculdade de Ciências do Porto, 2005. Obtido em 03 de março de 2015 de: www.dcc.fc.up.pt/~lfa/aulas/0506/mcc/praticas/apontamentos.pdf.

[60] www.apprendre-magie.fr/

[61] www.divulgamat.net.

[62] www.facebook.com/video.php?v=1218231492832&set=vb.42202667694&type=2&theater

[63] www.headinside.blogspot.pt/2015/02/cards-and-dice.html

[64] www.magiaymatematicas.blogspot.pt.

[65] www.openclassrooms.com/courses/tours-de-magie-mathematiques/ces-talents-de-roi

[66] www.olmo.pntic.mec.es/~aserra10/articulos/magia.html

[67] www.recreamat.blogs.sapo.pt

[68] www.youtube.com/watch?v=_M8ku5Yeslg