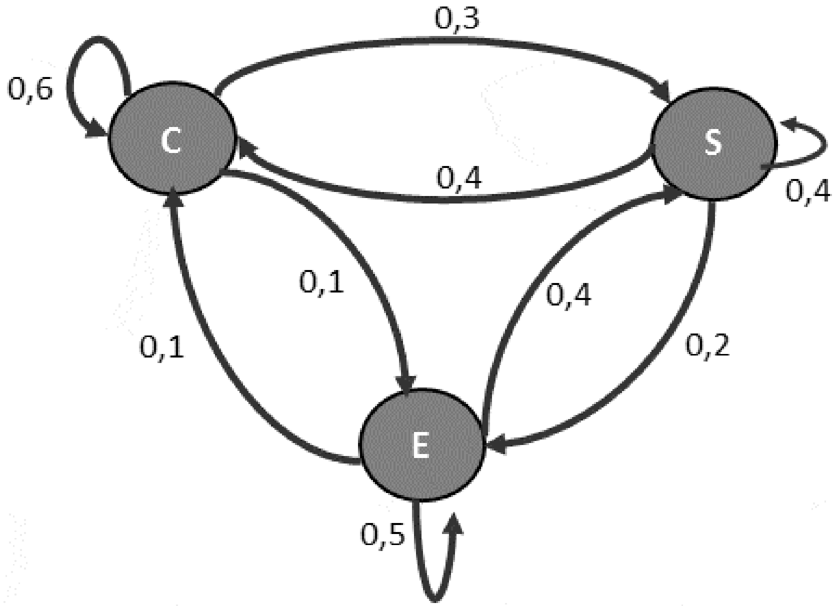
COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI



comillas.edu

Universidad Pontificia Comillas
ICAI

Analítica Social y de la Web
Social and Web Analytics

5.2 Cadenas de Markov

Javier Ruiz de Ojeda

Curso 2023-24
Segundo semestre

Introducción a las cadenas de Markov

Introducción a las cadenas de Markov
Definición

En la teoría de la probabilidad, se conoce como cadena de Márkov o modelo de Márkov a un tipo especial de proceso estocástico* discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior. Esta característica de incluir una memoria reciente recibe el nombre de propiedad de Markov en contraste con los eventos independientes que no tienen memoria de ningún evento anterior.

**: concepto matemático que sirve para representar magnitudes aleatorias que varían con el tiempo o para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra, generalmente el tiempo.*

Introducción a las cadenas de Markov

Definición

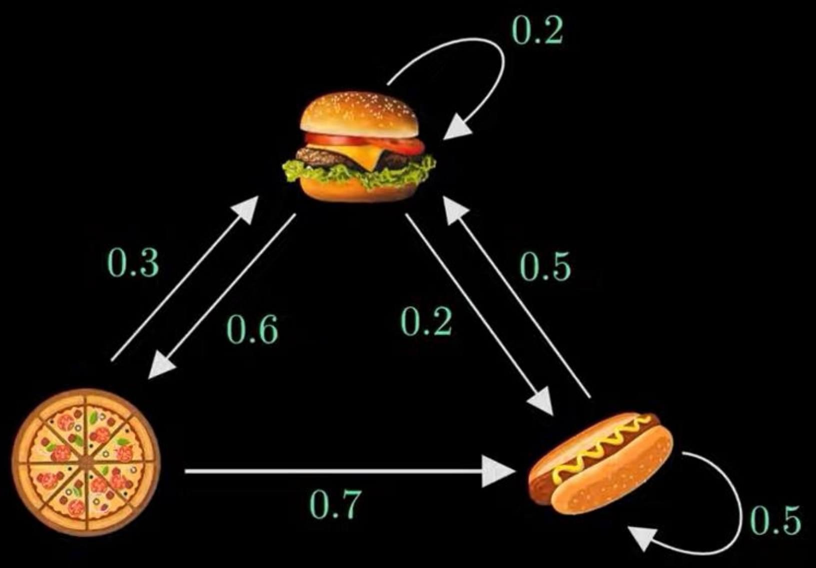
Por tanto, en una cadena de Markov la probabilidad de encontrarnos en el estado *n+1* en un momento dado, solo depende del estado en el momento *n*, es decir en el inmediatamente anterior.

$$P[X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n]$$

A esto se le conoce como la propiedad de Markov.

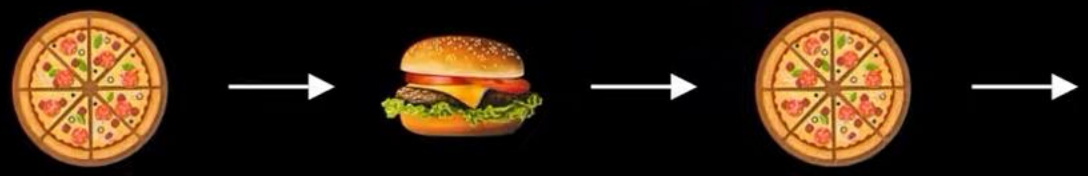
Introducción a las cadenas de Markov

Definición



Supongamos un restaurante en el que el menú de cada día depende del menú del día anterior.

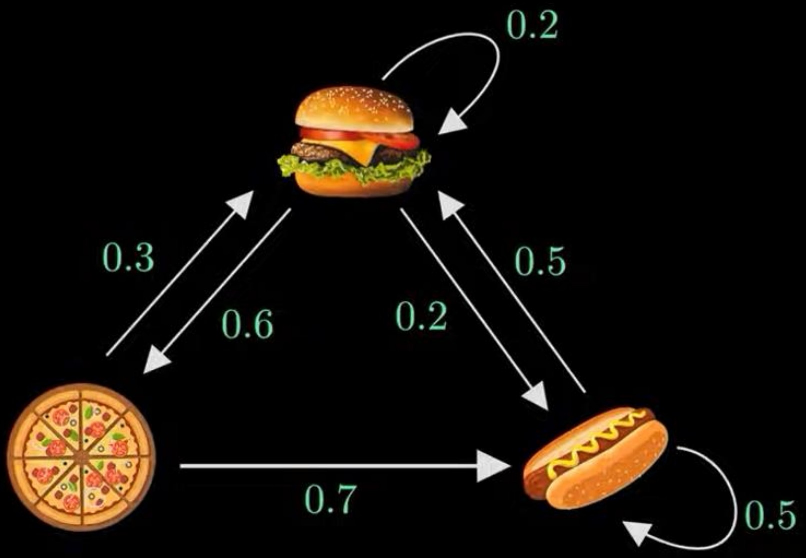
Dado este histórico de menús…



¿Qué probabilidad hay de que hoy sirvan perrito caliente?

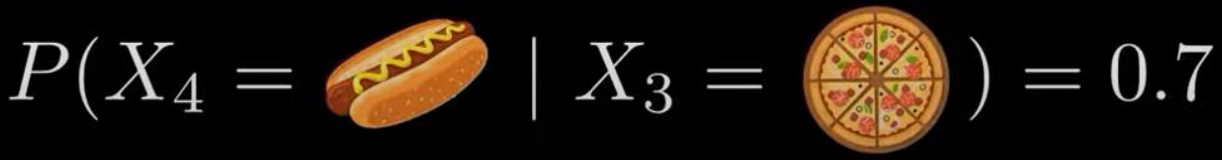
Introducción a las cadenas de Markov

Definición



Podría parecer que es:

Pero la propiedad de Markov simplifica el asunto, de manera que:



Introducción a las cadenas de Markov

Probabilidades asociadas

La segunda propiedad fundamental de una cadena de Markov es que refleja todos los posibles estados y transiciones existentes, por lo que la suma de todas las probabilidades o pesos que corresponde a los eventos posibles a partir de uno dado debe ser 1.

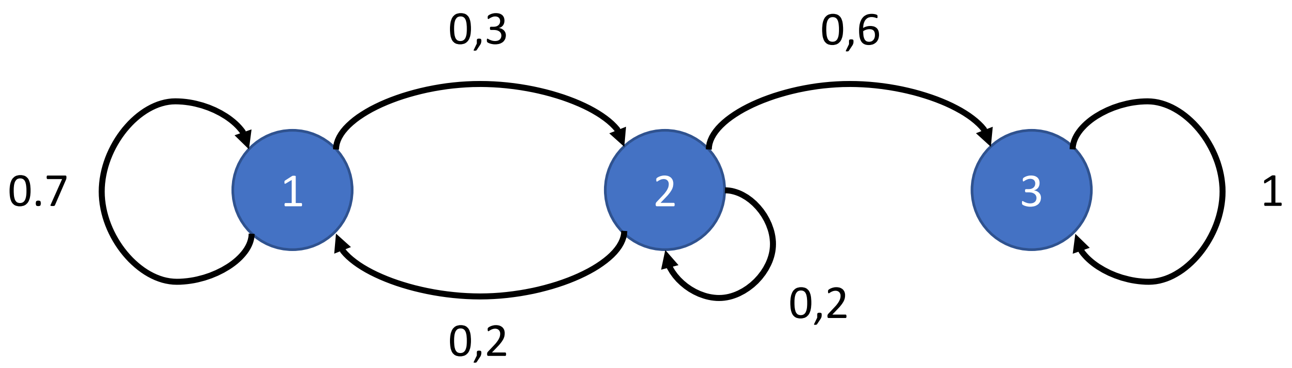
Visto de otro modo, la suma de todas las probabilidades asociadas a las flechas que salen de un nodo, será 1.

Introducción a las cadenas de Markov

Matriz estocástica (de probabilidades)

Al corresponder la cadena de Markov con un proceso estocástico, el grafo que la representa puede transformarse en una matriz estocástica que refleje la probabilidad de llegar a cada estado a partir del estado anterior.

Así, el grafo:



se corresponde con la matriz:

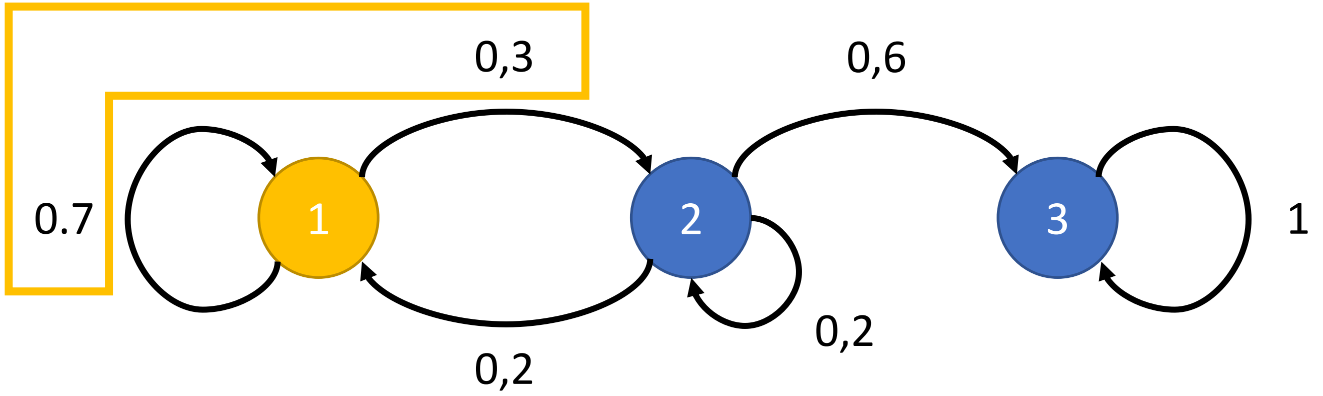
$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción a las cadenas de Markov

Matriz estocástica (de probabilidades)

Al corresponder la cadena de Markov con un proceso estocástico, el grafo que la representa puede transformarse en una matriz estocástica que refleje la probabilidad de llegar a cada estado a partir del estado anterior.

Así, el grafo:



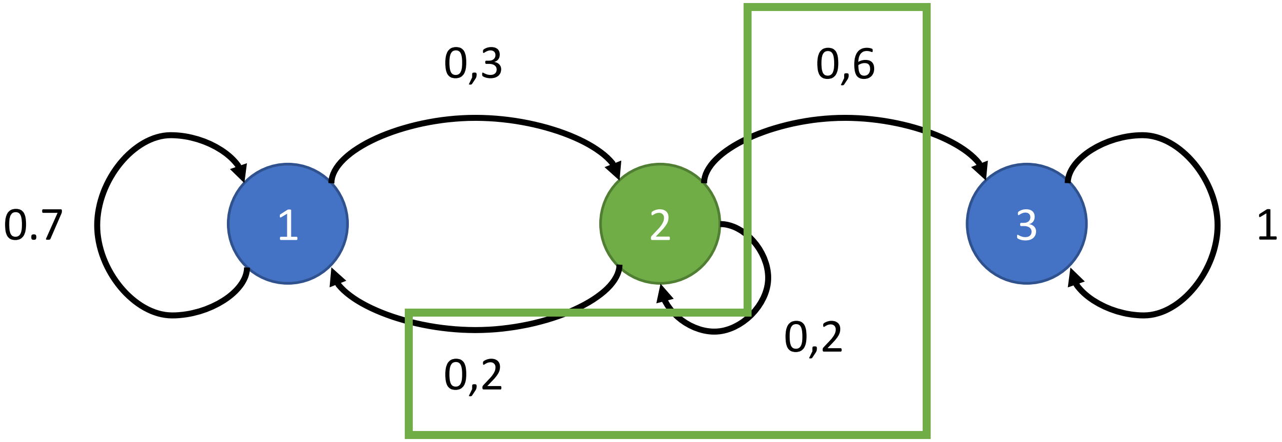
se corresponde con la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción a las cadenas de Markov
Matriz estocástica (de probabilidades)

Al corresponder la cadena de Markov con un proceso estocástico, el grafo que la representa puede transformarse en una matriz estocástica que refleje la probabilidad de llegar a cada estado a partir del estado anterior.

Así, el grafo:



se corresponde con la matriz:

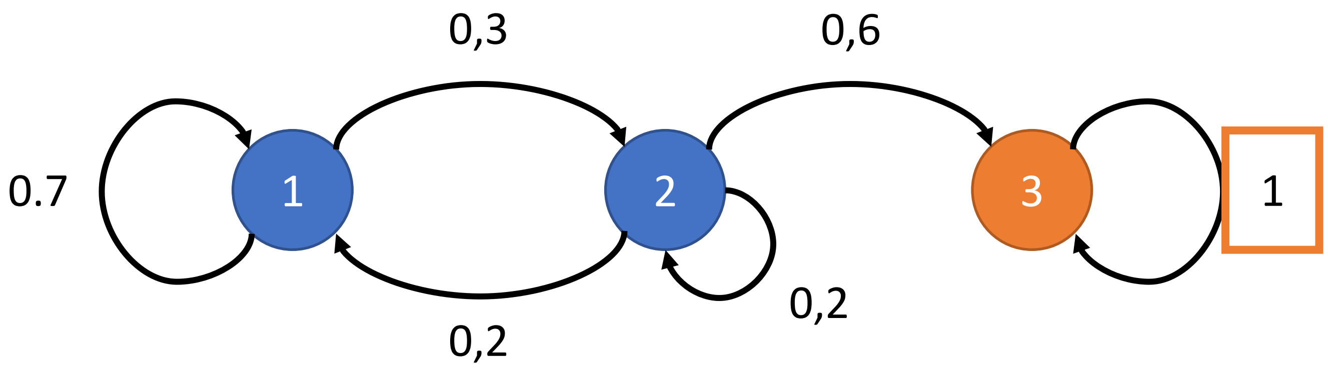
$$T = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción a las cadenas de Markov

Matriz estocástica (de probabilidades)

Al corresponder la cadena de Markov con un proceso estocástico, el grafo que la representa puede transformarse en una matriz estocástica que refleje la probabilidad de llegar a cada estado a partir del estado anterior.

Así, el grafo: se corresponde con la matriz:

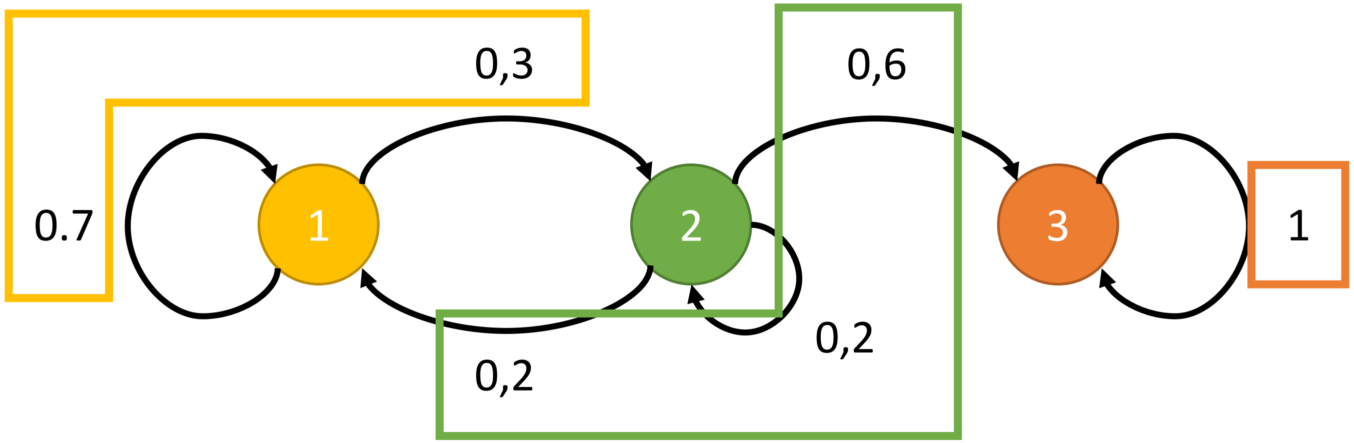


$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción a las cadenas de Markov
Matriz estocástica (de probabilidades)

Al corresponder la cadena de Markov con un proceso estocástico, el grafo que la representa puede transformarse en una matriz estocástica que refleje la probabilidad de llegar a cada estado a partir del estado anterior.

Así, el grafo:



se corresponde con la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción a las cadenas de Markov
Probabilidades asociadas

Así, nos encontramos con dos matrices estocásticas fundamentales asociadas a una determinada cadena de Markov:

Matriz de Probabilidades de Transición:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

donde $p_{i,j}$ representa la probabilidad de pasar de i a j en un paso

MPT en n pasos:

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & p_{02}(n) & \cdots \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots \\ p_{20}(n) & p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

donde $p_{i,j}$ representa la probabilidad de pasar de i a j en n pasos

Operaciones con matrices y vectores

Operaciones con matrices y vectores

Vector x Matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*4 + 1*6 + 2*2 \\ 0*4 + 4*6 + 2*2 \\ 2*4 + 5*6 + 1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices y vectores

Vector x Matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*4 + 1*6 + 2*2 \\ 0*4 + 4*6 + 2*2 \\ 2*4 + 5*6 + 1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices y vectores

Matriz x Matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & -5 \\ 7 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1*2) + (2*-1) + (0*1) & (1*1) + (2*1) + (0*2) & (1*1) + (2*3) + (0*4) \\ (2*2) + (-1*-1) + (-1*1) & (2*1) + (-1*1) + (-1*2) & (2*1) + (-1*3) + (-1*4) \\ (3*2) + (2*-1) + (3*1) & (3*1) + (2*1) + (3*2) & (3*1) + (2*3) + (3*4) \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices y vectores

Matriz x Matriz

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
(1*2) + (2*-1) + (0*1) & (1*1) + (2*1) + (0*2) & (1*1) + (2*3) + (0*4) \\
(2*2) + (-1*-1) + (-1*1) & (2*1) + (-1*1) + (-1*2) & (2*1) + (-1*3) + (-1*4) \\
(3*2) + (2*-1) + (3*1) & (3*1) + (2*1) + (3*2) & (3*1) + (2*3) + (3*4)
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & -5 \\ 7 & 11 & 21 \end{pmatrix}
$$

Cálculo de estados futuros

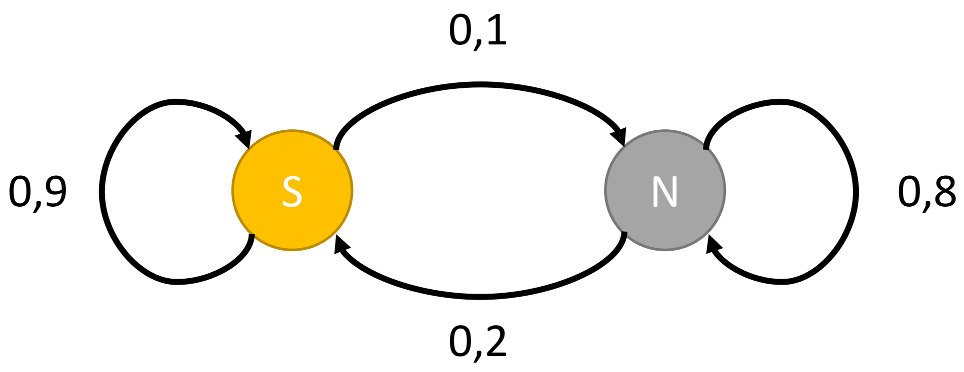
Ejercicios:

Modelado con cadenas de Markov

Cálculo de estados futuros

Ejercicio 1

En un pueblo, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen nublados. Dada esta información, modelar el clima del pueblo como una cadena de Markov y su matriz estocástica:

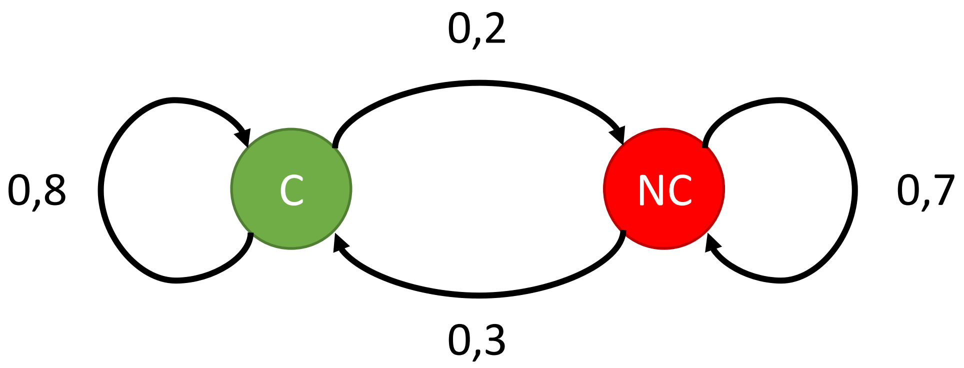


$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Cálculo de estados futuros

Ejercicio 2

El departamento de Marketing de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes, lo adquirirá el mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto este mes. ¿Cuántos lo comprarán el mes que viene? ¿Y dentro de 3 meses?



$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$u_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Cálculo de estados futuros
Ejercicio 2

El departamento de Marketing de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes, lo adquirirá el mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto este mes. ¿Cuántos lo comprarán el mes que viene? ¿Y dentro de 3 meses?

$$u_1 = A * u_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8*100 + 0,3*900 \\ 0,2*100 + 0,7*900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

Cálculo de estados futuros

Ejercicio 2

¿Y dentro de 3 meses?

$$u_1 = A^3 * u_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Cálculo de estados futuros

Ejercicio 2

¿Y dentro de 3 meses?

$$u_1 = A^3 * u_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,45 \\ 0,3 & 0,55 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Cálculo de estados futuros

Ejercicio 2

¿Y dentro de 3 meses?

$$u_1 = A^3 * u_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,45 \\ 0,3 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 537,5 \\ 462,5 \end{pmatrix}$$

Cálculo de estados futuros
Ejercicio 3

Supongamos que en un determinado pueblo hay dos estados climáticos posibles: despejado o lluvioso. Como resultado del histórico meteorológico, se ha determinado que la probabilidad de un día lluvioso después de uno despejado es 0,3, y la probabilidad de un día lluvioso después de otro lluvioso es 0,4. Si hoy (jueves) está despejado:

a) Determinar la cadena de Markov y la matriz estocástica asociada al problema

b) Determinar la probabilidad de que no llueva el sábado

c) Determinar la probabilidad de que llueva el domingo

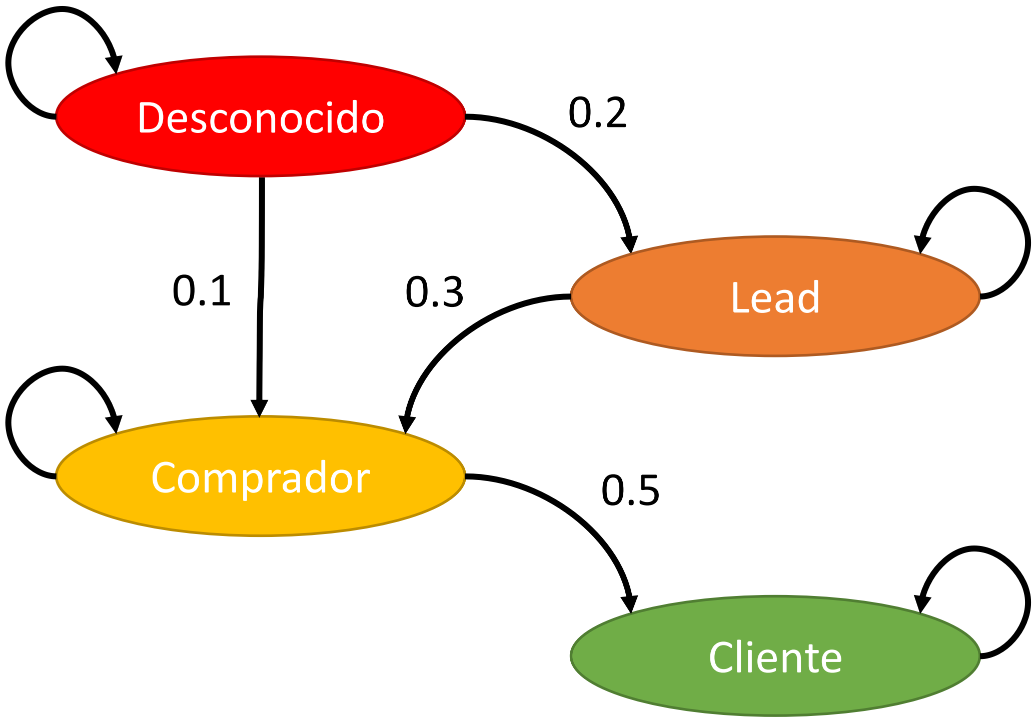
Cálculo de estados futuros
Ejercicio 3

Dada la siguiente cadena de Markov (los valores son anuales y actuales):

a) *Determinar la matriz estocástica*

b) *Determinar la probabilidad de que un desconocido se convierta en cliente en 2 años*

c) *Determinar la probabilidad de que un desconocido se convierta en cliente en 5 años*



Tipos de cadenas de Markov

Tipos de cadenas de Markov

Cadenas irreducibles

Una cadena de Markov se denomina irreducible si:

- Desde cualquier estado se puede acceder a cualquier otro
- Todos los estados se comunican entre sí
- Ninguna probabilidad de su matriz estocástica asociada es nula

Tipos de cadenas de Markov

Cadenas recurrentes

En una cadena de Markov diremos que un estado es recurrente si:

- La probabilidad de volver a dicho estado al cabo del tiempo es 1

En una cadena de Markov diremos que un estado es transitorio si:

- La probabilidad de volver a dicho estado al cabo del tiempo es inferior a 1

Tipos de cadenas de Markov
Tiempo medio de recurrencia

En una cadena de Markov se define el tiempo medio de recurrencia de un estado recurrente j a partir de un estado inicial i como el número de pasos promedio que necesita la cadena para llegar al estado j si actualmente nos encontramos en el paso i.

Cuando $i = j$, se dice que el estado i es:

- Recurrente nulo si el tiempo esperado de recurrencia es ∞ (no se espera que la cadena vuelva a ese estado)
- Recurrente positivo si el tiempo esperado de recurrencia es $< \infty$ (se espera que la cadena vuelva a ese estado). Se dice que una cadena de Markov es recurrente positiva si todos sus estados también lo son.

Tipos de cadenas de Markov

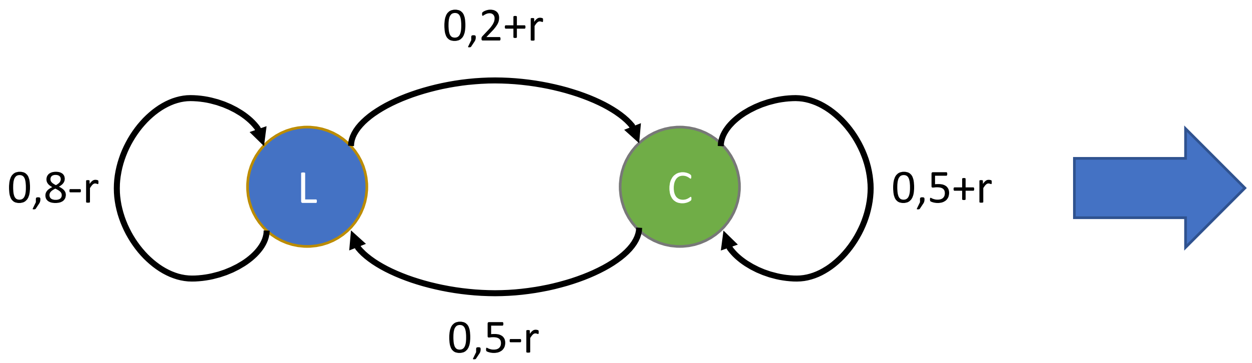
Cadenas regulares

Una cadena de Márkov se dice regular si existe alguna potencia positiva de la matriz de transición cuyas entradas sean todas estrictamente mayores que cero.

Estado de equilibrio
Probabilidades relativas

Por último, podemos definir cadenas en las que las probabilidades en lugar de ser fijas, dependan de una variable o parámetro que podamos modificar.

Así, una matriz que relacione *Leads* con clientes anuales podría definirse como:



$$\begin{pmatrix} 0,8-r & 0,5-r \\ 0,2+r & 0,5+r \end{pmatrix}$$

Donde r representa el porcentaje del presupuesto de Marketing que invertimos en *Lead Nurturing*.

COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

Ejercicio:

Modelado con cadenas de Markov

Tipos de cadenas de Markov

Ejercicio

Por cualquier método, y dada la siguiente matriz de Markov: $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

a) Determinar la matriz de probabilidad asociada al estado 1

b) Determinar la matriz de probabilidad asociada al estado 2

c) Determinar la matriz de probabilidad asociada al estado 3

d) Determinar la matriz de probabilidad asociada al estado 4…

COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

Estado de equilibrio

Estado de equilibrio
Definición

También llamado ***Distribución límite o estacionaria***, se refiere a la probabilidad al cabo de infinitos pasos, de terminar en un estado determinado. Una propiedad interesante es que este estado **no** depende del estado inicial.

$$\lim_{n \to \infty} A^n$$

Podemos decir entonces que la Distribución estacionaria asociada a una cadena de Markov **regular** es una propiedad de la misma (depende de ella, pero no del estado actual).

Estado de equilibrio

Python: Importar y definir

```
Import numpy as np
state = {
      0: “Estado1”,
      1: “Estado2”,
      2: “Estado3”
}
state

A = np.array ([[0.2, 0.6, 0.2], [0.3, 0.0, 0.7], [0.5, 0.0, 0.5]]
```

¡OJO! Se trasponen las matrices

Estado de equilibrio

Python: Paseo aleatorio

```
n = 10
start_state = 0
print (state[start_state], "--->", end = " ")
prev_state n start_state

while n-1:
        curr_state = np.random.choice([0, 1, 2], p = A[prev_state])
        print (state[curr_state] , "--->", end = " ")
        prev_state = curr_state
        n-=1

print("Stop")
```

Estado de equilibrio

Distribución estacionaria (Método Montecarlo)

```
steps = 10**6
start_state = 0
pi = np.array([0, 0, 0])
pi[start_state] = 1
prev_state = start_state

i = 0
while i<steps:
      curr_state = np.random.choice([0, 1, 2], p = A[prev_state])
      pi[curr_state]+=1
      prev_state = curr_state
      i+=1
print("π = ", pi/steps)
```

Estado de equilibrio

Distribución estacionaria (Multiplicación de Matrices)

```
steps = 10**3
A_n = A

i = 0
while i<steps:
      A_n = np.matmul(A_n, A)
      i+=1

print("A^n = ", A_n, "\n")
print("π = ", A_n[0])
```

COMILLAS
UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI

Proyecto (II):

Programación de cadenas de Markov

Proyecto – Fase II
Objetivos

Entregable: Presentación + Memoria y/o código Python comentado

Entrega: miércoles 17/4/24

Dada una empresa de retail :

- Definir una cadena de Markov regular con al menos 4 estados (el último debe ser la Conversión) que describa el proceso de Lead Nurturing para mi marca
- Diseñar un modelo de probabilidades donde las transiciones dependan de la asignación presupuestaria de la empresa (de forma que el presupuesto se pueda redistribuir a posteriori), y definir un vector con la distribución actual de *Leads*
- Escribir un código Python que permita:
    - Calcular la distribución estacionaria asociada de forma general
    - Calcular la distribución de *leads* en un estado futuro N
    - Obtener la mejor asignación de presupuesto para optimizar el número de conversiones para la distribución estacionaria

¡Muchas gracias!