

# Métodos numéricos en la ingeniería mecánica

## Problema de sistemas discretos



### Autores:

Gerard López Ordoñez

Jordi Planell Gutiérrez

Samuel Sánchez Cañibano

Yago Trias Vila

Profesor: Daniel Di Capua

## Problema sistemas discretos

### 1. Resolución del problema de forma manual utilizando tres barras de sistemas discretos

Figura 1

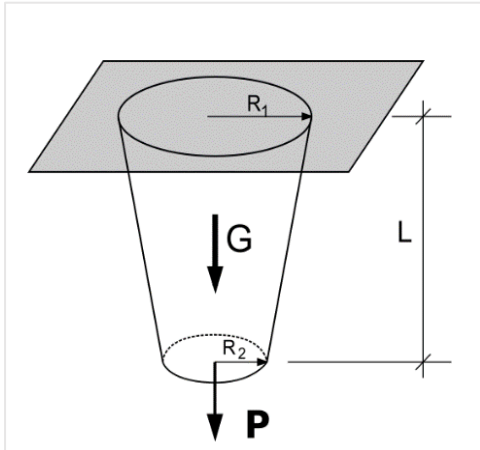
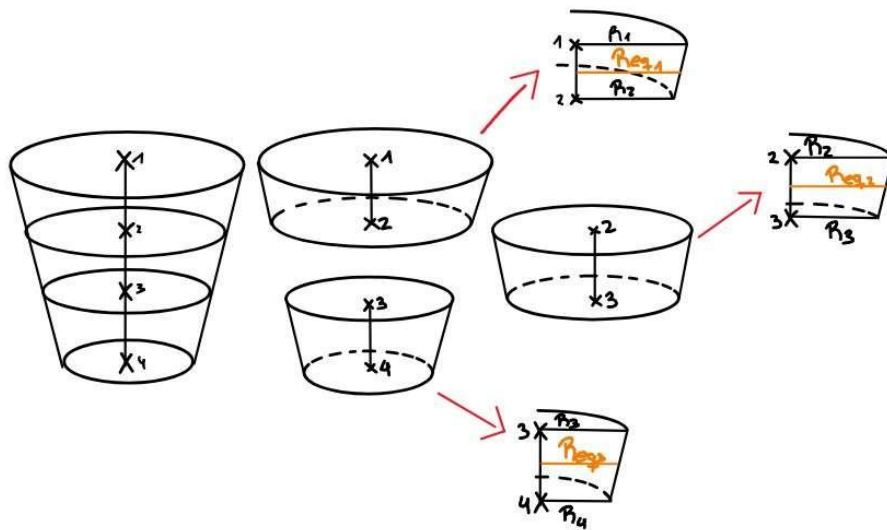
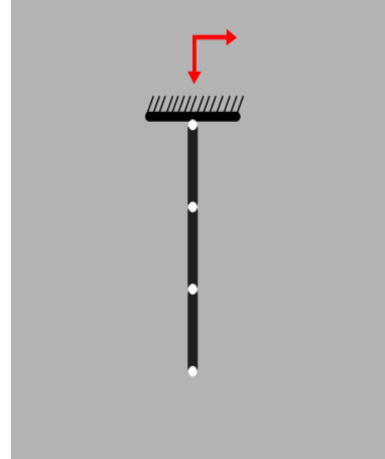


Figura 2



#### a. Matrices de rigidez y vector de cargas elementales

Barra 1:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{Bmatrix} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$k^{(1)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(1)}$$

$$f_g^{(1)} = \frac{G^{(1)}l^{(1)}}{2}$$

$$G^{(1)} = \frac{\gamma V^{(1)}}{l^{(1)}} = \frac{\gamma \pi}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

Barra 2:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} \end{Bmatrix} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$k^{(2)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(2)}$$

$$f_g^{(2)} = \frac{G^{(2)}l^{(2)}}{2}$$

$$G^{(2)} = \frac{\gamma V^{(2)}}{l^{(2)}} = \frac{\gamma \pi}{3} (r_2^2 + r_3^2 + r_2 r_3)$$

Barra 3:

$$\begin{Bmatrix} R_1^{(3)} \\ R_2^{(3)} \end{Bmatrix} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$k^{(3)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(3)}$$

$$f_g^{(3)} = \frac{G^{(3)}l^{(3)}}{2}$$

$$G^{(3)} = \frac{\gamma V^{(3)}}{l^{(3)}} = \frac{\gamma \pi}{3} (r_3^2 + r_4^2 + r_3 r_4)$$

El radio situado en los nodos es calculado a partir de la ecuación de una recta donde y corresponde a la coordenada y.

$$r(y) = \left( \frac{r_2 - r_1}{L} \right) y + r_1$$

b. Desplazamientos locales y globales

$$\begin{matrix} u_1^{(1)} = u_1 & u_1^{(2)} = u_2 & u_1^{(3)} = u_3 \\ u_2^{(1)} = u_2 & u_2^{(2)} = u_3 & u_2^{(3)} = u_4 \end{matrix}$$

c. Ecuación de ensamblaje a cada uno de los nodos

Nodo 1:

$$\sum_{i=1}^n R_i^{(e)} = -R1 + f_g^{(1)}$$



Nodo 2:

$$\sum_{i=1}^n R_i^{(e)} = f_g^{(1)} + f_g^{(2)}$$

Nodo 3:

$$\sum_{i=1}^n R_i^{(e)} = f_g^{(2)} + f_g^{(3)}$$

Nodo 4:

$$\sum_{i=1}^n R_i^{(e)} = f_g^{(3)} + P$$

d. Matriz de rigidez, desplazamientos y fuerzas globales

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & k^{(1)} & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} + k^{(3)} & -k^{(3)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 + f_g^{(1)} \\ f_g^{(1)} + f_g^{(2)} \\ f_g^{(2)} + f_g^{(3)} \\ f_g^{(3)} + P \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.1615e + 11 & -1.1615e + 11 & 0 & 0 \\ -1.1615e + 11 & 1.9391e + 11 & -7.7754e + 10 & 0 \\ 0 & -7.7754e + 10 & 1.2497e + 11 & -4.7037e + 10 \\ 0 & 0 & -4.7037e + 10 & 4.7037e + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 + 1.2711e + 5 \\ 2.1232e + 5 \\ 1.3689e + 5 \\ 7.1683 + 3 \end{bmatrix}$$

e. Cálculo de desplazamientos

$$\begin{bmatrix} 1.9391e + 11 & -7.7754e + 10 & 0 \\ -7.7754e + 10 & 1.2497e + 11 & -4.7037e + 10 \\ 0 & -4.7037e + 10 & 4.7037e + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1232e + 5 \\ 1.3689e + 5 \\ 7.1683 + 3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.6237e - 6 \\ 6.3061e - 6 \\ 7.8301e - 6 \end{bmatrix} (m)$$

f. Deformaciones en cada barra

Barra 1:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{u_2 - u_1}{l} = 3.6237e - 6$$

Barra 2:

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{l} = 2.6825e - 6$$

Barra 3:

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{u_4 - u_3}{l} = 1.5240e - 6$$

g. Tensiones en cada barra

Barra 1:

$$\sigma^{(1)} = E\varepsilon^{(1)} = 3.9860e + 4 \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Barra 2:

$$\sigma^{(2)} = E\varepsilon^{(2)} = 2.9507e + 4 \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

Barra 3:

$$\sigma^{(3)} = E\varepsilon^{(3)} = 1.6764e + 4 \left( \frac{N}{m^2} \right)$$

h. Esfuerzos en cada barra

Barra 1:

$$N^{(1)} = \sigma^{(1)} A^{(1)} = 4.2089e + 5 \text{ (N)}$$

Barra 2:

$$N^{(2)} = \sigma^{(2)} A^{(2)} = 2.0857e + 5 \text{ (N)}$$

Barra 3:

$$N^{(3)} = \sigma^{(3)} A^{(3)} = 7.1683e + 4 \text{ (N)}$$

i. Reacción en el nodo 1

$$k^{(1)}u_1 - k^{(1)}u_2 = -R_1 + f_g^1$$

$$R_1 = f_g^1 + k^{(1)}(u_2 - u_1), \quad u_1 = 0$$

$$R_1 = f_g^1 + k^{(1)}u_2 = 5.4801e + 5 \text{ (N)}$$

Verificamos sumando todas las fuerzas

$$\sum_{i=1}^n f_i \approx 0$$

## 2. Resolución del problema para n barras de sistemas discretos

Para encontrar la solución a este problema de forma numérica para un número de barras  $n$  se ha utilizado el software de programación matemática, que se nos introdujo en CNED, Matlab. Éste, nos permite realizar operaciones matriciales, gráficos, etc.

Dentro de nuestro script introducimos las propiedades mecánicas constantes del material como el módulo de Young, peso específico y además las condiciones geométricas del caso de nuestro problema ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$ ,  $P$ ).

```
young = 1.1e10; % N/m^2
gamma = 24010; % N/m^3
rmax = 2;      % m
rmin = 1;      % m
l = 3;         % m
p = 20e3;      % N
```

Figura 3

Después se definen unas variables que permitirán iterar de un número de barras inicial a un final a través de una función `for()`. Dentro de esta función se define el número de barras que se utilizará en la iteración, el número de nodos, las coordenadas de los nodos y sus puntos intermedios.

```
n_inicial = 3;
n_final = 25;
max_u = 1:n_final-n_inicial+1;

for i=n_inicial:n_final
%Discretization
n = i;          % n of beams
nnodes = n+1;   % n of nodes
y_nodes = linspace(0,l,nnodes); % y coordinates at the nodes
y_mid = (l/n)/2:1/n:1-(1/n)/2; % y coordinates at the mid sections
```

Figura 4

De la anterior sección se necesitará para el cálculo de las matrices de rigidez elementales y las fuerzas distribuidas: los radios en cada uno de los nodos de la barra. Tanto el de los puntos principales, como el de los puntos intermedios calculados anteriormente.

```
%weight of section G's
%radius at the nodes
r_nodes = (rmin-rmax)/l*y_nodes+rmax; % radius at the nodes
r_mid = (rmin-rmax)/l*y_mid+rmax;      % radius at the mid section

%Distributed load

fg = zeros(n,1);
G = zeros(n,1);

% G in N/m
for i=1:n
    G(i) = gamma*pi/3*(r_nodes(i)^2+r_nodes(i+1)^2+r_nodes(i)*r_nodes(i+1));
end

%fg in N
fg = G*(l/n)/2;
```

Figura 5





Una vez disponemos de todos los parámetros que necesitamos para el cálculo del problema, se construye la matriz de rigidez global del sistema.

```
%Stiffnes matrix

k_element = young*pi*r_mid.^2/(l/n); % k of each beam
k = zeros(nnodes); % global stiffnes matrix

for i=1:n % building global stiffnes matrix
    k(i:i+1,i:i+1) = [1,-1;-1,1].*k_element(i)+k(i:i+1,i:i+1);
end
```

Figura 6

Debido a que el nodo 1 esta empotrado, conocemos que el desplazamiento será nulo ( $u_1=0$ ) y por lo tanto para simplificar el cálculo, se puede eliminar la primera fila y la primera columna de la matriz de rigidez global. De tal manera que construimos el nuevo vector de fuerzas globales con estas nuevas condiciones.

```
%Get mini stiffnes matrix and mini force vector

mini_k = k(2:nnodes,2:nnodes);

%Creating mini_f

mini_f = zeros(n,1);

for i=1:n
    if i<n
        mini_f(i)=fg(i)+fg(i+1);
    else
        mini_f(i)= fg(i)+p;
    end
end
```

Figura 7

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos nodales restantes.

```
%Find displacement matrix

m_u = mini_k\mini_f;

%Get global displacement vector

u = zeros(nnodes,1);

u(2:end)=m_u;
```

Figura 8

Una vez calculados los desplazamientos nodales se obtienen las deformaciones en las barras, la tensión y la fuerza axial a la que está sometida.

```
%Deformation of each beam

e = zeros(n,1);

for i=1:n
    e(i)= (u(i+1)-u(i))/(l/n);
end

%Strain stress

sigma = young*e;

%Strain

N = zeros(n,1);

for i=1:n
    N(i)= sigma(i)*pi*r_mid(i)^2;
end
```

*Figura 9*

### 3. Resultados numéricos

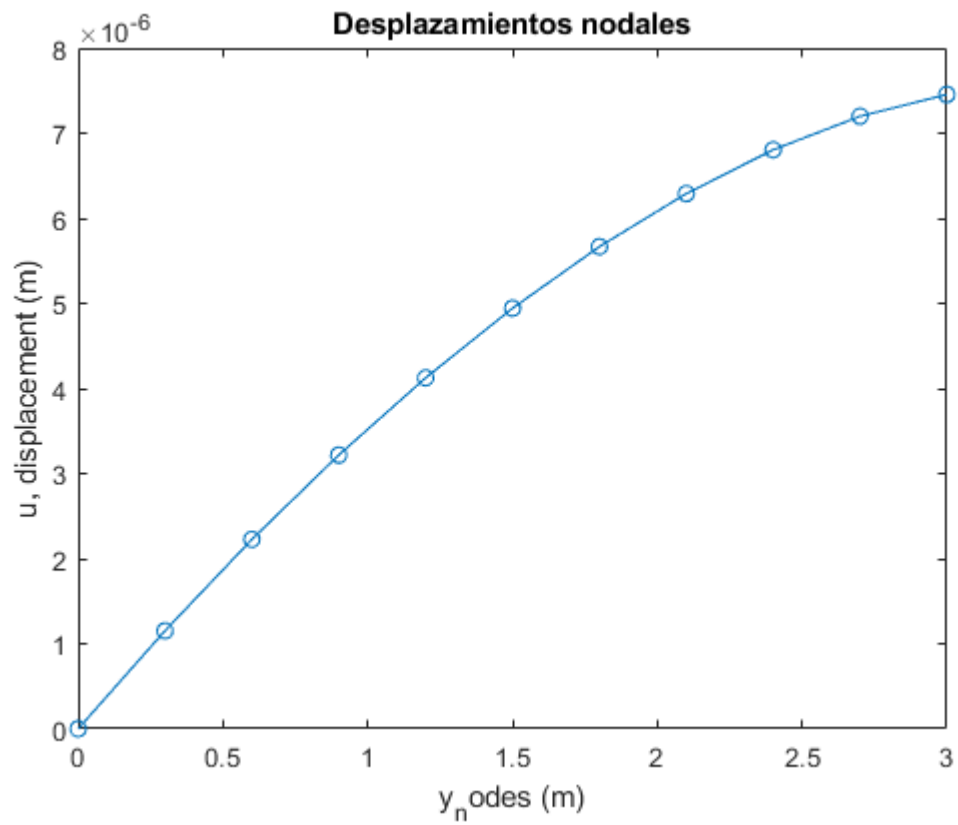
Ejemplo para n=10 barras:

4.3802e+11	-4.3802e+11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4.3802e+11	8.3226e+11	-3.9424e+11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-3.9424e+11	7.4702e+11	-3.5277e+11	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-3.5277e+11	6.6638e+11	-3.1361e+11	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-3.1361e+11	5.9036e+11	-2.7675e+11	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-2.7675e+11	5.1894e+11	-2.4219e+11	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-2.4219e+11	4.5213e+11	-2.0994e+11	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2.0994e+11	3.8992e+11	-1.7999e+11	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1.7999e+11	3.3233e+11	-1.5234e+11	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1.5234e+11	2.7934e+11	-1.2700e+11	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.2700e+11	1.2700e+11	0

Figure 10: Matriz de rigidez global

-5.0497e+05
8.1766e+04
7.3393e+04
6.5473e+04
5.8005e+04
5.0990e+04
4.4428e+04
3.8318e+04
3.2661e+04
2.7456e+04
3.2484e+04

Figure 11: Vector de fuerzas globales resuelto

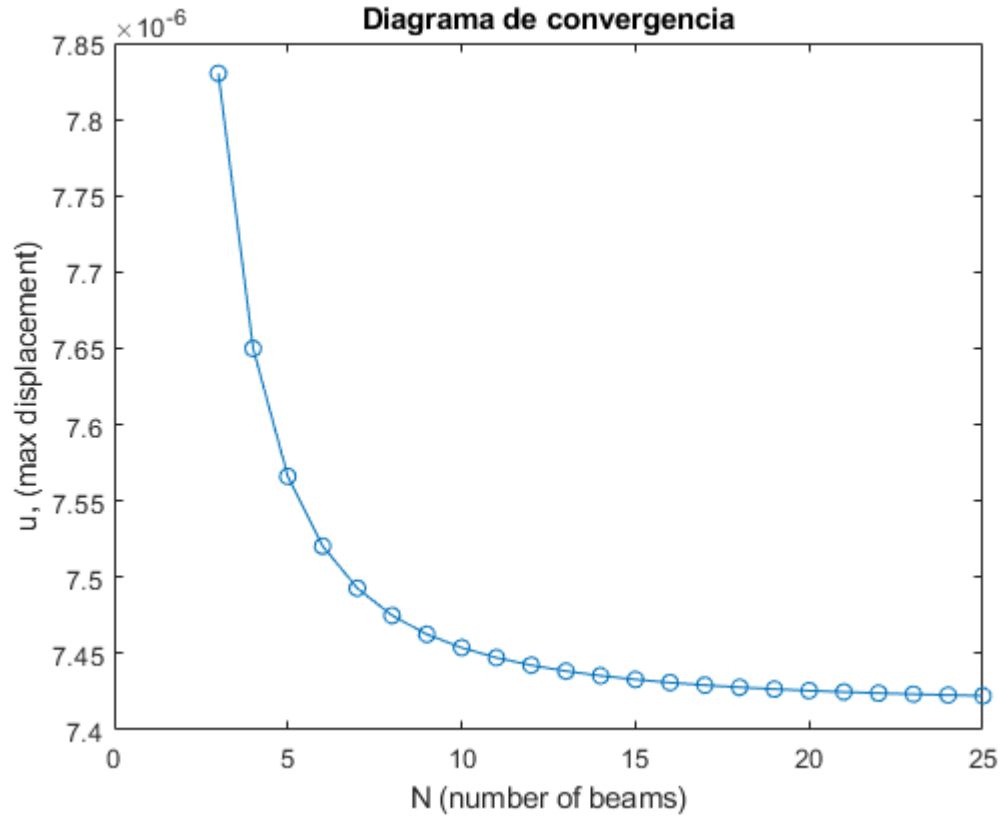


Grafica 1: Desplazamiento en cada nodo

#### 4. Diagrama de convergencia

Una vez se ha iterado para todos los casos de  $n$  barras y graficamos el desplazamiento nodal máximo del sistema en función del número de barras, se observa que converge hasta un valor aproximado de:

$$u_{max} = 7.4223e - 6 \text{ (m)}$$



Grafica 2: Máximo desplazamiento en función del número de barras