La Paradoja del Cumpleaños

Nociones de Probabilidad

Yago Pajariño

September 2021

1 Introducción

La Real Academia Española define el término paradoja como:

"Hecho o expresión aparentemente contrarios a la lógica."

La persona que viaja al pasado y elimina a uno de sus ancestros, el gato de Scrödinger, los gemelos de Einstein, plantean hechos que efectivamente cuestionan la propia lógica. También es cierto que los campos dentro de los que se aplican estas paradojas, viajes en el tiempo o física cuántica, resultan lejanos al entendimiento cotidiano. Sin embargo, aparece una ¿paradoja? en el campo de la probabilidad, aparentemente conocido por todos. En este texto veremos como surge esta y como logra encajar en el selecto grupo de hechos que desafían nuestro intelecto.

2 Bases

El cálculo de probabilidad será enfrentado utilizando las bases sentadas por Pierre de Fermat y Blaise Pascal durante el siglo XVII y que hoy conocemos vulgarmente como *casos favorables sobre casos posibles.* Así, dado un espacio muestral:

$$\Omega = \{R_1, R_2, ..., R_n\} \tag{1}$$

Donde Ω contiene todos los resultados posibles del experimento. Cada $R_i, 1 \leq i \leq n$ representa uno de esos posibles resultados. Luego definimos un evento del cual nos interesa conocer su probabilidad de ocurrencia, digamos lo llamamos A. Entendiendo al evento A como un conjunto de posibles resultado del experimento que estamos estudiando, podemos determinar que $A \subseteq \Omega$, o bien, *A es un subconjunto de Omega.*

El cálculo de casos favorables sobre casos posibles nos dice que:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{2}$$

Donde # o *cardinal* indica la cantidad de elementos de un conjunto, así $\#A$ nos dice la *cantidad de elementos del conjunto A* previamente definido.

A modo de ejemplo para terminar esta sección, imaginemos queremos saber la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda.

En este caso, definimos $\Omega = \{cara, cruz\}$ los posibles resultados del lanzamiento, despreciando el caso de que caiga de canto.

Luego definimos el evento A:"obtengo cara en el lanzamiento de la moneda". En términos de conjunto, decimos que $A = \{cara\} \subset \Omega$ es un subconjunto de Omega.

Y como definimos antes, la probabilidad de que ocurra A es:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \iff P(A) = \frac{1}{2} = 0,5 \tag{3}$$

3 Desarrollo

El problema surge con una sencilla pregunta.

Dado un grupo de 30 personas, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan años el mismo día?

De la misma forma que sentado en las bases, definimos el espacio muestral Ω como:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_{30}) \ / \ x_i \in \{1, 2, ..., 365\}\} \tag{4}$$

Así definido Ω, cada elemento de este representa los días del año ($1 \leq n \leq 365$) en que cumplena las 30 personas del grupo.

Luego definimos el evento A: "Hay dos personas que cumplen años el mismo día del año" Y como vimos:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{5}$$

Sin embargo, el calculo de $\#A$ implicaría calcular la cantidad de cadenas de cumpleaños en donde coinciden dos días, luego tres, luego cuatro y así hasta tener todas las posibles coincidencias de cumpleaños.

Podemos enfrentar el problema por lo que se llama *complemento* de A, es decir, aquellos resultados del experimento en los que no se cumple A. Definimos A^c : "Todas las personas cumplen años en días distintos"

$$A^c = \{(x_1, x_2, ..., x_{30}) \in \Omega \ / \ x_i \neq x_j, \forall i \neq j\} \tag{6}$$

Luego la probabilidad de A calculada por A^c será:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ \iff P(A) &= 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} \end{aligned}$$

Calculemos $\#\Omega$. Utilizando conocimientos de cálculo combinatorio y/o simple intuición, podemos determinar que la persona 1 puede cumplir años en cualquiera de los 365 días del año, la persona 2 también puede cumplir cualquier día del año, siguiendo la misma lógica:

$$\#\Omega = 365 \cdot 365 \cdot ... \cdot 365 = \prod_{i=1}^{30} 365 = 365^{30} \tag{7}$$

De la misma forma veamos A^c. Recordemos definimos A^c como *todas las personas cumplen años en días distintos*, luego la primer persona puede cumplir en cualquiera de los 365 días del año, pero la segunda puede cumplir en cualquiera de los 365 días del año menos aquel en el que cumple la primer persona, siguiendo la misma lógica:

$$\#A^c = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... = \frac{365!}{(365-30)!} = \frac{365!}{335!} \tag{8}$$

Utilizando lo calculado:

$$\begin{aligned} & P(A) = 1 - P(A^c) \\ \iff & P(A) = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} \\ \iff & P(A) = 1 - \frac{365!}{335!} \cdot \frac{1}{365^{30}} \simeq 0,7063 \end{aligned}$$

4 Conclusión

Llegamos a un **paradójico** resultado, aseguramos que la probabilidad de encontrar dos personas que cumplan años el mismo día de un grupo de 30 personas es aproximadamente 70,63%, número que asciende a 89,12% en grupos de 40 personas y a 97,03% teniendo 50 individuos.

La finalidad de este escrito es destacar que quizás *contrariamos* nuestra propia lógica afirmando que hay un 97% de probabilidad de encontrar al menos dos personas que cumplan el mismo día dentro de un grupo de 50 personas, pero que resulta en una afirmación fundamentada en leyes probabilísticas construídas a lo largo del tiempo.

References

[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires http://web.dm.uba.ar/

[2] RAE https://dle.rae.es/paradojo

[3] ¡¡Cumples años el mismo día que yo!! ¿Casualidad? - https://youtu.be/7uzx6D_0V7M

[4] Las matemáticas nos hacen más libres y menos manipulables - https://youtu.be/BbA5dpS4CcI

[5] Psicología y Mente https://psicologiaymente.com/cultura/paradojas-importantes