2.1 リーマン計量

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離 d を用いると、$\mathbb{R}^n$ の2点、$x, y \in \mathbb{R}^n$ の距離を $d(x, y)$ として定めることができる.(§1.1).

一方、定義1.3 で定めた統計的モデル S は $\mathbb{R}^n$ の開集合 の点 $\xi \in \Xi$ をパラメータとしているので、確率関数 $p(\cdot\,;\xi) \in S$ を点 ξ とみなすことができる. よって、ユークリッド距離を用いれば、2つの確率関数がどの程度違うのかを測ることが可能である. しかし、これは S が確率関数であるという性質を何も反映していない. §2.5 では、統計的モデルに対しては フィッシャー計量を考えることにより、確率関数の間の距離を定める.

§2.1 では、ユークリッド空間 の開集合 のリーマン計量について述べる.

$p, q \in \mathbb{R}^n$ とし、p と q を結ぶ C^1 級曲線 $\gamma:[a, b] \to \mathbb{R}^n$ を考える.

すなわち、γ は有界閉区間 $[a, b]$ で定義された $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ をみたす $\mathbb{R}^n$ への写像であり、γ を成分を用いて、

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておくと、$[a, b]$ で定義された n コの実数値関数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ はすべて1回微分可能であり、その導関数は連続である. このとき、γ の長さは定積分

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

により与えられる. ただし、$\|\ \|$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積から定められるノルムである.

$t_0 \in [a, b]$ に対して、$\gamma'(t_0)$ を γ の $t = t_0$ における接ベクトルという.

命題 2.1

不等式 $\quad d(p, q) \leqq \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$ がなりたつ. --- (2.3)

証明

まず、$p = q$ とする. このとき、$d(p, q) = 0$ となるので (2.3) がなりたつ.

次に、$p \neq q$ とする. $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ のとき、

$$\int_a^b \langle \gamma'(t), v \rangle \, dt = \int_a^b \langle \gamma(t), v \rangle' \, dt$$
$$= \Big[\langle \gamma(t), v \rangle \Big]_a^b$$
$$= \langle q, v \rangle - \langle p, v \rangle$$
$$= \langle q - p, v \rangle \quad \text{である.}$$

また、コーシー・シュワルツの不等式より、

$$\langle \gamma'(t), v \rangle \leqq |\langle \gamma'(t), v \rangle| \leqq \|\gamma'(t)\| \|v\|$$
$$= \|\gamma'(t)\| \quad \text{である.}$$

よって、$\displaystyle\int_a^b \langle \gamma'(t), v \rangle \, dt \leqq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$ だから、

$$\langle q - p, v \rangle \leqq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \quad \text{がなりたつ.} \quad \cdots (2.7)$$

ここで、$p \neq q$ より、$v \in \mathbb{R}^n$ を $v = \dfrac{q - p}{\|q - p\|}$ により定めることができる。

これを (2.7) に代入して、

$$\left\langle q - p, \frac{q - p}{\|q - p\|} \right\rangle \leqq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

$$\therefore \quad d(p, q) \leqq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \quad \text{が示された.}$$

(2.3) において、等号がなりたつ条件を考える。

まず、$p = q$ のとき、(2.3) において等号がなりたつのは、任意の $t \in [a, b]$ に対して、

$\gamma'(t) = 0$ になるときである。このとき、

$$\gamma(t) = p \quad (= q) \qquad (t \in [a, b])$$

となり、γ は1点 $p \,(= q)$ を表す。

次に、$p \neq q$ のとき、(2.3) において等号が成り立つのは、

コーシー・シュワルツの不等式を用いた (2.5) の計算より、

各 $t \in [a, b]$ に対して、$\gamma'(t)$ が (2.8) の v の正の定数倍となるときである。

(絶対値をつけてる、1つ目)

$$\gamma'(t) = \frac{q - p}{\|q - p\|} l \qquad (l > 0) \qquad q = \varphi(b)$$

Q. (2.10) の導出.

$$\gamma(t) = \frac{(q - p)\,l}{\|q - p\|} t + \cancel{\gamma(a)}\ p.$$

このとき、ある C^1 級の単調増加関数 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ が存在し、

$$\gamma(t) = \frac{\varphi(b) - \varphi(t)}{\varphi(b) - \varphi(a)} p + \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} q$$

となり、γ は p と q を結ぶ線分を表す。 よって、$\mathbb{R}^n$ の異なる2点を結ぶ曲線を考えると、最短線，すなわち長さが最も短くなる曲線は線分であり、その長さは2点間の距離となる.

〈ポイント〉

1. 2点間の距離はその2点を結ぶ最短線の長さである.
2. 曲線の長さを表す積分の被積分関数は接ベクトルのノルムである.
3. ノルムは内積を用いて定めることができる.

そこで、$\mathbb{R}^n$ の開集合の各点ごとに標準内積とは限らない $\mathbb{R}^n$ の内積を考え、次のように定める.

定義 2.1

D を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とし、各 $p \in D$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の内積 $g_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ があたえられているとする. このとき、p から g_p への対応を g と表し、g を D のリーマン計量という。

※ 定義 2.1 において、任意の C^∞ 級写像 $X, Y : D \to \mathbb{R}^n$ に対して、関数 $g(X, Y) : D \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級となるとき、g は C^∞ 級であるという. 以下では、簡単のため、曲線もリーマン計量も C^∞ 級であるとする.

リーマン計量を用いて、曲線の長さを定めることができる. D を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合，g を D のリーマン計量，$\gamma : [a,b] \to D$ を D 内の曲線とする.

このとき、γ の長さを

$$\int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$$

により定める. なお、曲線の長さは径数付けを変えても不変である. すなわち、

$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ を

$$\varphi(\alpha) = a \ , \ \varphi(\beta) = b \ , \ \varphi'(s) > 0 \quad (s \in [\alpha, \beta])$$

となる変数変換とし、φ と γ の合成により得られる D内の曲線 $\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to D$

を考えると、γ と $\gamma \circ \varphi$ の長さは等しい。

<u>proof</u> Q.

$\gamma \circ \varphi$ の長さは 定義 より、 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{g((\gamma\circ\varphi)'(s), (\gamma\circ\varphi)'(s))}\, ds$

ここで、 $t = \varphi(s)$ とおくて、 $dt = \varphi'(s)\, ds$

$$\frac{d\gamma(\varphi(s))}{dt} \quad \gamma'(t)$$

また、$\varphi'(s) > 0$ より、 $s : \alpha \to \beta$ で $t : a \to b$.

よって、

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{g((\gamma\circ\varphi)'(s), (\gamma\circ\varphi)'(s))}\, ds$$

$$= \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t)\varphi'(s), \gamma'(t)\varphi'(s))} \cdot \frac{1}{\varphi'(s)}\, dt.$$

リーマン計量と曲線の長さについて、例を2つ挙げる。

ex 2.1 (ユークリッド計量)

各 $p \in \mathbb{R}^n$ に対して、g_p を $\mathbb{R}^n$ の標準内積 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ とする。このとき、g は $\mathbb{R}^n$ のリーマン計量となる。この g をユークリッド計量という。ユークリッド計量を考えると、$\mathbb{R}^n$ 内の曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ の長さは、$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$ により与えられる。

ex 2.2 (ポアンカレ計量)

$D \subset \mathbb{R}^2$ を $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ により定め、$(x, y) \in D$ に対して、

$$g_{(x,y)}(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{y^2} \quad (v, w \in \mathbb{R}^2)$$

とおく。

ただし $\langle \ , \ \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積 (1.4) である。このとき、g は D のリーマン計量となる。

g を D のポアンカレ計量，(D, g) をポアンカレ上半平面という。$\gamma : [a, b] \to D$ を D 内の曲線とし、成分を用いて

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表しておく。このとき、$L(\gamma)$ を γ の長さとすると、(2.11), (2.14) より、

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{(x(t), y(t))}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}{\{y(t)\}^2}} \, dt$$

$$= \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{y(t)} \, dt \quad (\because \ y(t) > 0) \quad \cdots (2.16)$$

である。

ポアンカレ上半平面 (D, g) 内の線分の長さの最短性について調べる。

まず、$0 < y_0 < y_1$ とし、D の2点 $(0, y_0)$ と $(0, y_1)$ を結ぶ D 内の曲線 $\gamma_1 : [0, 1] \to D$ を

$$\gamma_1(t) = (0, (y_1 - y_0)t + y_0) \quad (t \in [0, 1]) \quad \cdots (2.17)$$

により定める。すなわち γ_1 は $(0, y_0)$ と $(0, y_1)$ を結ぶ線分である。

このとき、(2.16), (2.17) より

$$L(\gamma_1) = \int_0^1 \frac{y_1 - y_0}{(y_1 - y_0)t + y_0}\,dt$$

$$= \Big[\log\left[(y_1 - y_0)t + y_0\right]\Big]_0^1$$

$$= \log\frac{y_1}{y_0}$$ である. $\cdots(2.18)$

一方 $\gamma_2 : [0,1] \to D$ を $(0, y_0)$ と $(0, y_1)$ を結ぶ D内の任意の曲線とし、

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ と表しておく. このとき、

$$L(\gamma_2) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)}\,dt$$

$$\geqq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)}\,dt \geqq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt$$

$$= \Big[\log y(t)\Big]_0^1 = \log\frac{y(1)}{y(0)} = \log\frac{y_1}{y_0}.$$ $\cdots(2.19)$

(2.18), (2.19) より.

$L(\gamma_1) \leqq L(\gamma_2)$ となり. 線分 γ_1 は $(0, y_0)$ と $(0, y_1)$ を結ぶ最短線である.

次に、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし、D の2点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ D内の曲線

$\gamma_3 : [0,1] \to D$ を

$$\gamma_3(t) = ((1-2t)\cos\theta, \sin\theta) \quad (t \in [0,1])$$ $\cdots(2.21)$

により定める. すなわち、γ_3 は $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ線分である.

このとき、(2.16), (2.21) より.

$-2\cos\theta$

$$L(\gamma_3) = \int_0^1 \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\,dt = \frac{2}{\tan\theta}$$ である. $\cdots(2.22)$

一方. $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ D内の曲線 $\gamma_4 : [0,1] \to D$ を

$$\gamma_4(t) = \left(\cos(\theta + (\pi - 2\theta)t), \sin(\theta + (\pi - 2\theta)t)\right) \quad (t \in [0,1])$$ $\cdots(2.23)$

により定める. すなわち γ_4 は $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ原点を中心とする

円弧である。このとき、(2.16), (2.23) より

$$L(\gamma_4) = \int_0^1 \frac{\pi - 2\theta}{\sin(\theta + (\pi - 2\theta)t)}\,dt$$

$$= \left[\log \tan \frac{\theta + (\pi - 2\theta)t}{2}\right]_0^1$$

$$= \log \tan \frac{\pi - \theta}{2} - \log \tan \frac{\theta}{2}$$

$$= \log \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} - \log \tan \frac{\theta}{2}$$

$$= -2 \log \tan \frac{\theta}{2}$$ である。 ... (2.24)

ここで、関数 $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ を

$$f(\theta) = \frac{1}{\tan\theta} + \log \tan \frac{\theta}{2} \quad \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

により定めると、

$$f'(\theta) = -\frac{1}{\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta - 1}{\sin^2\theta} < 0.$$

また、$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2} - 0} f(\theta) = 0$ となる。

よって (2.22), (2.24) より

$$L(\gamma_4) < L(\gamma_3)$$ である。

すなわち線分 γ_3 は $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ最短線ではない。

$-\sin(\theta + (\pi - 2\theta)t) \cdot (\pi - 2\theta)$

$\cos(\theta + (\pi - 2\theta)t) \cdot (\pi - 2\theta)$

$\frac{1}{\cancel{\tan\alpha}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\pi - 2\theta}{2}$ $\quad \cancel{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\sin 2\alpha$

$\log \tan \frac{\theta + \pi - 2\theta}{2} - \log \tan$

$\tan(\alpha - \beta)$

$= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$\tan(\theta + \theta) = \frac{2\tan}{1 + \tan^2\theta}$

Q実は、γ_4 が $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, \sin\theta)$ を結ぶ最短線であることがわかる.

リーマン計量は、各点ごとに正定値実行列を対応させるものとみなすことができる.

まず、A を n次実対称行列とする. すなわち、Aはすべての成分が実数のn次正方行列であり、Aの転置行列 ${}^tA$ は A に等しい. 任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、

$$x A^t x > 0$$

となるとき、Aは正定値であるという. また、$\mathbb{R}^n$の基本ベクトルを $e_1, e_2, \cdots, e_n$ と表す.

さて、Dを$\mathbb{R}^n$の空でない開集合，gをDのリーマン計量とし、$p \in D$, $v, w \in \mathbb{R}^n$ とする. v, w を用いて、

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \quad , \quad w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$$

と表しておくと、

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad , \quad w = \sum_{j=1}^{n} w_j e_j$$

である. よって内積 g_p の線形性より、

$$\begin{aligned} g_p(v, w) &= g_p\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i , \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i w_j\, g_p(e_i, e_j) \end{aligned}$$

である.

したがって、$g_{ij}(p) = g_p(e_i, e_j) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ とおくと、

$$g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j\, g_{ij}(p)$$

である. ---(2.34)

また、$g_{ij}(p)$は関数 $g_{ij} : D \to \mathbb{R}$ で定め、gがC^∞級であるとは、各g_{ij}がC^∞級であるということである. さらに内積 g_p の対称性より、(i, j)成分が $g_{ij}(p)$ のn次正方行列 $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ は実対称行列であり、内積 g_p の正値性より、$(g_{ij}(p))_{n\times n}$ は正定値である. 逆に、各 $p \in D$ に対して、正定値実対称行列 $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ が与えられていれば、(2.34) により Dのリーマン計量 g を定めることができる.

Q