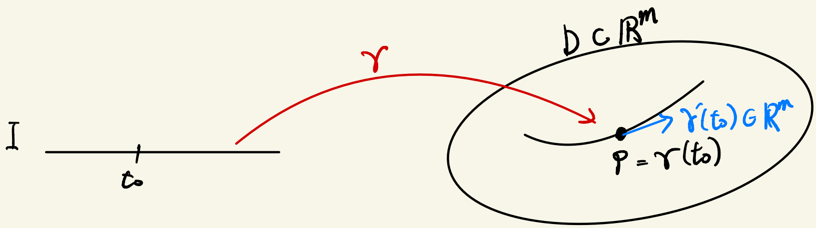
2.2 写像の微分

微分積分でも学ぶユークリッド空間の開集合で定義された実数値関数の微分は、比例関数や線形写像による関数の近似である。§2.2では、ユークリッド空間の開集合の間の写像に対して、微分を考える。

まず、Dを$\mathbb{R}^m$の空でない開集合とし、$p \in D$とする。さらに有界開区間Iで定義されたD内の曲線$\gamma : I \to D$で、$t_0 \in I$に対して、$\gamma(t_0) = p$となるものを考える。すなわち、γは$t = t_0$においてpを通るD内の曲線である。このとき、γの$t = t_0$における接ベクトル$\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^m$が得られる。このようにして得られる接ベクトル全体の集合をT_pDと表すと、次がなりたつ。



$B(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, a) < \varepsilon\}$.
ユークリッド距離.

命題 2.2 $\quad T_pD = \mathbb{R}^m$

$D \subset \mathbb{R}^m$ て移と
$\forall a \in D, \exists \varepsilon > 0$
$B(a; \varepsilon) \subset D$.

proof

まず、T_pDの定義より、$T_pD \subset \mathbb{R}^m$である。

次に、$v \in \mathbb{R}^m$とする。Dは$\mathbb{R}^m$の開集合なので、$\varepsilon > 0$を十分小さく選んでおくと、$t = 0$においてpを通るD内の曲線$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$を

$$\gamma(t) = tv + p \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

により定めることができる。このとき、

$$v = \gamma'(0) \in T_pD$$

である。vは任意に選んでおくことができるので、$\mathbb{R}^m \subset T_pD$である。

よって、$T_pD = \mathbb{R}^m$である。 ∎

T_pD の元を p における接ベクトルという．§1.1 でも述べたように，$\mathbb{R}^m$ はベクトル空間なので，命題2.2より，T_pD はベクトル空間となる．T_pD を p における接ベクトル空間または接空間という．

さらに，E を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合，$f: D \to E$ を写像とする．なお，注意2.1と同様に，簡単のため，f は C^∞ 級であるとする．このとき，γ と f の合成により得られる E 内の曲線 $f\circ\gamma : I \to E$ を考えることができる．γ, f を成分を用いて

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_m(t)) \quad (t \in I)$$

$$f(x_1, \cdots, x_m) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m)) \qquad ((x_1, \cdots, x_m) \in D)$$

と表しておくと，合成関数における微分法より，$f\circ\gamma$ の $t=t_0$ における接ベクトルは

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\gamma(t_0)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t_0), \cdots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\gamma(t_0)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t_0) \right)$$

$$= (\gamma_1'(t_0), \cdots, \gamma_m'(t_0)) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

$$= (\gamma_1'(t_0), \cdots, \gamma_m'(t_0))\, J_f(p)$$

と行列の積を用いて表される．ただし，

$$J_f(p) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \right)_{m\times n}$$

である．よって，$\gamma'(t_0)$ から $(f\circ\gamma)'(t_0)$ への対応はベクトル空間 T_pD からベクトル空間 $T_{f(p)}E$ への線形写像を定める．この対応を $(df)_p$ と表し，f の p における微分という．

また，$J_f(p)$ を f の p におけるヤコビ行列 (Jacobian matrix) という．

任意の $p \in D$ に対して，$(df)_p$ が単射となるとき，f をはめ込み (immersion) という．

写像の微分は線形写像なので，f がはめ込みであるとは，任意の $p \in D$ に対して，

$v \in T_pD$，$(df)_p(v) = 0$ ならば，$v = 0$ となることである．

「補足」: 線形写像の基本的な定義

V, W を $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間とする.

$f: V \to W$ が線形写像であるとは,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in V,$$

$$f(kx) = kf(x), \quad k \in \mathbb{F},\ x \in V$$

の両方が成立することである.

例 $\dfrac{d}{dx}: C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ を. $f \mapsto f'$ と定めると, これは線形写像である.

実際、$(kf + lg)' = kf' + lg'$ より. 線形性を満たしている.

命題 2.3

V, W をベクトル空間, $f: V \to W$ を線形写像とする. このとき、f が単射であることと、f の核が零空間, すなわち

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} = \{0_V\} \quad \text{--- (2.41)}$$

であることは同値である. ただし、$0_V, 0_W$ はそれぞれ V, W の零ベクトルである. □

proof

まず、f が単射であると仮定する. $x \in \mathrm{Ker} f$ とする. このとき、線形写像が零ベクトルを零ベクトルに写すことと合わせると、

$$f(x) \underbrace{=}_{x \in \mathrm{Ker} f \text{ より.}} 0_W \underbrace{=}_{f \text{ が線形写像であることより.}} f(0_V) \quad \text{--- (2.42)}$$

すなわち、$f(x) = f(0_V)$ である. ここで、f は単射なので、$x = 0_V$ である.

よって. (2.41) が成り立つ.

次に、$\mathrm{Ker} f = \{0_V\}$ であると仮定する. $x, y \in V,\ f(x) = f(y)$ とする.

このとき、f が線形写像であることと合わせると.

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_W,$$

すなわち、$x-y\in \mathrm{Ker}\, f$ である。ここで、$\mathrm{Ker}\, f=\{0_V\}$ なので、$x-y=0_V$，

すなわち $x=y$ である。よって、fは単射である。 □

対偶証明

fがはめ込みであるとは、任意の$p\in D$に対して、fのpにおけるヤコビ行列の階数について、

$$\mathrm{rank}\, J_f(p)=m$$

がなりたつことと言い換えることもできる。実際、Aを$m\times n$行列とすると、$x\in\mathbb{R}^m$を未知変数とする同次形の連立1次方程式 $xA=0$ の解空間の次元について、

$$\dim\{x\in\mathbb{R}^m \mid xA=0\}=m-\mathrm{rank}\, A$$

がなりたつからである。

はめ込みについて、ex1.17～ex1.19で述べた十分統計量$F_n, F_{m,n}, F_m$に関連する例を挙げる。ex2.3～ex2.5について、記号もこれらの例に合わせることにし、$n\in\mathbb{N}$に対して、

$$\Xi_n=\left\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\;\middle|\;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n>0,\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i<1\right\}$$ とおく。

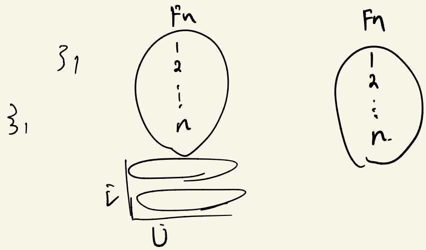
ex2.3 (はめ込みΦ_n)

$F_n:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$を全単射とし、(1.117)に合わせて、写像$\Phi_n:\Xi_n\to\Xi_n$を

$$\Phi_n(\xi)=(\xi_{F_n^{-1}(1)},\xi_{F_n^{-1}(2)},\cdots,\xi_{F_n^{-1}(n)})\qquad(\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\Xi_n)$$

により定める。このとき、(2.40)より

$$J_{\Phi_n}(\xi)=\left(\frac{\partial \Phi_{nj}}{\partial \xi_i}(\xi)\right)=\left(\frac{\partial \xi_{F_n^{-1}(j)}}{\partial \xi_i}(\xi)\right)=\begin{pmatrix} e_{F_n(1)}\\ \vdots \\ e_{F_n(n)}\end{pmatrix}.$$



$F_n^{-1}(j)=i.$

$F_n^{-1}(j)=1,$

$j=F_n(1).$

$f\to\Phi_n$, $p\to\xi$, $x_i\to\xi_i$ とした。

ただし $e_1,e_2,\cdots,e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル(2.29)である。よって、

$$\operatorname{rank} J_{\Phi_n}(\xi) = n$$

となるので、Φ_n は はめ込み である。

ex2.4 (はめ込み $\Phi_{m,n}$)

$m, n \in \mathbb{N}$ とし、写像 $\Phi_{m,n} : \Xi_n \to \Xi_{mn}$ を

$$\Phi_{m,n}(\xi) = \Big(\underbrace{\frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_1}{m}, \ldots, \frac{\xi_1}{m}}_{m\text{コ}}, \underbrace{\frac{\xi_2}{m}, \frac{\xi_2}{m}, \ldots, \frac{\xi_2}{m}}_{m\text{コ}}, \ldots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m}, \frac{\xi_n}{m}, \ldots, \frac{\xi_n}{m}}_{m\text{コ}}\Big) \quad \cdots (2.50)$$

$$(\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Xi_n)$$

により定める。このとき、(2.40) より、

$$J_{\Phi_{m,n}}(\xi) = \left(\frac{\partial \Phi_{m,n\,j}}{\partial \xi_i}(\xi)\right)_{n \times mn}$$

$$\begin{array}{cc} & mn \\ n & \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{m} \ \frac{1}{m}}_{m\text{コ}} & 0 \cdots \cdots 0 \\ 0 \cdots \cdots 0 & \underbrace{\frac{1}{m} \cdots \frac{1}{m}}_{m\text{コ}} \ 0 \cdots \cdots 0 \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_i' & & O \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_i' \end{pmatrix}$$

$e_1' : (1\ 0 \cdots 0)$

$e_2' = (0\ 1 \cdots 0)$

$e_m' = (0 \cdots 0\ 1)$

である。ただし、$e_1', e_2', \ldots, e_m'$ は $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトルである。よって、

$$\operatorname{rank} J_{\Phi_{m,n}}(\xi) = n$$

となるので、$\Phi_{m,n}$ は はめ込みである □.

ex2.5 (はめ込み $\Phi_{\mathbf{m}}$)

$n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ とし、

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

とおく。また、写像 $\Phi_{\mathbf{m}} : \Xi_n \to \Xi_m$ を

$$\Phi_{\mathbf{m}}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{m_1}, \ldots, \frac{\xi_1}{m_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{m_n}, \ldots, \frac{\xi_n}{m_n}\right) \quad ((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Xi_n)$$

により定める。このとき、ex2.4 の計算と同様に $\xi \in \Xi_n$ とすると、

$$J_{\Phi_{\mathbf{m}}}(\xi) = \left(\frac{\partial \Phi_{\mathbf{m}j}}{\partial \xi_i}\right)_{m \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1}\sum_{i_1=1}^{m_1} e_{i_1}^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{m_n}\sum_{i_n=1}^{m_n} e_{i_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

である. ただし, $k=1,2,\cdots,n$ に対して, $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \cdots, e_{m_k}^{(k)}$ は $\mathbb{R}^{m_k}$ の基本ベクトルである.

よって,
$$\operatorname{rank} J_{\Phi_n}(\xi) = n$$
となるので, Φ_n は はめ込み である.

はめ込みを用いて, リーマン計量を定めることができる. D を $\mathbb{R}^m$ の空でない開集合, E を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合, g を E のリーマン計量, $f: D \to E$ をはめ込みとする. このとき, $p \in D$, $v, w \in T_pD = \mathbb{R}^m$ に対して,

$$(f^*g)_p(v, w) = g_{f(p)}((df)_p(v), (df)_p(w))$$
$$= g_{f(p)}(vJ_f(p), wJ_f(p)).$$

とおくと, 次がなりたつ.

命題 2.4 $(f^*g)_p$ は T_pD の内積を定める.

proof

$(f^*g)_p$ に対して, 内積の対称性, 線形性, 正値性がなりたつことを示せばよい.

まず, 内積 $g_{f(p)}$ の対称性より,
$$g_{f(p)}(vJ_f(p), wJ_f(p))$$
$$= g_{f(p)}(wJ_f(p), vJ_f(p))$$
$$= (f^*g)_p(w, v)$$
だから, 内積 $(f^*g)_p$ の対称性が得られる.

また, 内積 $g_{f(p)}$ の線形性と $(df)_p$ が線形写像であることより, 内積 $(f^*g)_p$ の線形性が得られる.

$a, b \in F$
$$(f^*g)_p(av, bw) = g_{f(p)}((df)_p(av), (df)_p(bw))$$

$= g_{f(p)}\left(a(df)_p(v),\ b(df)_p(w)\right)$ （∵ $(df)_p$ が線形写像）

$= ab\, g_{f(p)}\left((df)_p(v),\ (df)_p(w)\right).$ （∵ 内積 $g_{f(p)}$ が 〃 ）

さらに、fははめ込みなので、$(df)_p$ は単射である。このことと内積 $g_{f(p)}$ の正値性より、内積 $(f^* g)_p$ の正値性が得られる。

Q どうやって使ってる？

命題 2.4 より、$(f^* g)_p$ は D のリーマン計量 $f^* g$ を定める。$f^* g$を fによるgの誘導計量（induced metric）または引き戻し（pullback）という。