1.2 統計的モデル(その1)

離散確率空間上の実数値確率変数から定まる確率関数を考え、それらの族からなる統計的モデルについて述べる.

有限個の元からなる集合は有限であるという. なお、空集合 ϕ も有限集合とみなす. また、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と1対1に対応する集合は可算であるという.

可算集合は自然数によって番号付けられた可算個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を用いて, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ と表すことができる. 例えば、$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ は可算.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ について.

$n \in \mathbb{N}$ を用いて

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ \dfrac{n}{2} & (n=2m \text{ のとき}) \\ -\dfrac{n-1}{2} & (n=2m+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすればよい.

$\mathbb{Q}$: 有理数が可算であることの証明.

有限集合と可算集合は合わせて、高々可算であるという.

Ω を空でない高々可算な集合とする. このとき、Ω を標本空間とし、Ω 上の確率 P を考える. また事象 A が起こる確率を $P(A)$ と表す. (Ω, P) を離散型確率空間 (discrete probability space) という.

まず、Ω が有限の場合を考える. このとき、事象 A が起こる確率 $P(A)$ を考えるということは、次の公理 1.1 の (1)~(4) がなりたつように、各 $A \subset \Omega$ に対して、実数 $P(A) \in \mathbb{R}$ を対応させることである.

公理 1.1

Ω を空でない有限集合とする. 標本空間 Ω の各事象 A から $P(A) \in \mathbb{R}$ への対応について、次の(1)~(4)がなりたつ.

(1). Aの起こる確率は0以上1以下である. すなわち、$0 \leqq P(A) \leqq 1$である.

(2). 全事象Ωが起こる確率は1である. すなわち、$P(\Omega)=1$である.

(3). 空集合ϕが起こる確率は0である. すなわち、$P(\phi)=0$である.

(4). $A_1, A_2, \cdots, A_m$が互いに排反な事象ならば、

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \qquad \cdots (1.26)$$

である. すなわち、$A_1, A_2, \cdots, A_m \subset \Omega$が

$$A_i \cap A_j = \phi \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m,\ i \neq j) \qquad \cdots (1.27)$$

をみたすならば、(1.26)がなりたつ.

さらに、(Ω, P)上の実数値確率変数Xを考える. すなわち、XはΩで定義された関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$である. Ωは有限であるとしているので、

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

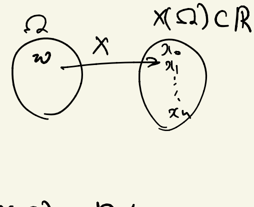
とおくと、$X(\Omega)$は$n+1$コの実数$x_0, x_1, \cdots, x_n$を用いて、

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

と表すことができる. ただしnは0以上の整数. ここで、$i = 0, 1, 2, \cdots, n$に対して.

$$\mu_X(\{x_i\}) = P(X^{-1}(\{x_i\})) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\})$$

とおくと. 公理1.1より、μ_Xは標本空間を$X(\Omega)$とする確率を定める.



とくに、$\mu_X(\{x_i\}) \geqq 0$であり、

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_X(\{x_i\}) = 1$$

がなりたつ. μ_XをXの確率分布または分布という. また関数$p : X(\Omega) \to \mathbb{R}$を

$$p(x_i) = \mu_X(\{x_i\}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

により定める. pをXに対する確率変数という. このとき、事象$B \subset X(\Omega)$の起こる確率$\mu_X(B)$について、

$$\mu_X(B) = \sum_{x \in B} p(x)$$

がなりたつ.

ex1.8 (ベルヌーイ試行)

結果が2種類のみの試行をベルヌーイ試行という. $0 \leq \xi \leq 1$ とし、表が出る確率が ξ, 裏が出る確率が $1-\xi$.

標本空間 Ω を

$$\Omega = \{表, 裏\}$$

により定める. このとき、

$$P(\{表\}) = \xi \quad , \quad P(\{裏\}) = 1-\xi$$

とおくと P は Ω 上の確率を定める. そして確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X(表) = 100 \quad , \quad X(裏) = 0$$

により定める.

さらに、X の分布 μ_X を求める. まず、

$$X(\Omega) = \{0, 100\}$$

である. よって μ_X は

$$\mu_X(\{0\}) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{裏\}) = 1-\xi \,,$$

$$\mu_X(\{100\}) = P(X^{-1}\{100\}) = P(\{表\}) = \xi$$

により定められる. また、X に対する確率変数 p は

$$p(0) = 1-\xi \quad , \quad p(100) = \xi$$

により定められる.

例1.9

公正なサイコロを1回投げるという試行に対して、素数の目が出たときは100点を手に入れ、素数以外の目が出たときは何も点を手に入れないということを考える.

まず、標本空間 Ω を

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

により定める. このとき、

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ とおくと、PはΩ上の確率を定める.

そして確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X(2) = X(3) = X(5) = 100 , \quad X(1) = X(4) = X(6) = 0$$

により定める.

さらに、Xの分布μ_Xを求める. まず,

$$X(\Omega) = \{0, 100\}$$ である.

よって. μ_X は.

$$\begin{aligned}
\mu_X(\{0\}) &= P(X^{-1}(\{0\})) \\
&= P(\{1, 4, 6\}) \\
&= P(\{1\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_X(\{100\}) &= P(X^{-1}(\{100\})) \\
&= P(\{2, 3, 5\}) \\
&= P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

により定められる.

標本空間が可算集合の場合も、上と同様に考えることができる. Ωを可算集合とする. このとき. Ωを標本空間とし、Ω上の確率Pを考えると、事象Aが起こる確率$P(A)$について、次の公理1.2の(1)~(4)がなりたつ.

<u>公理 1.2</u>

Ωを可算集合とする. 標本空間Ωの各事象Aから$P(A) \in \mathbb{R}$への対応について、次の(1)~(4)がなりたつ.

(1). Aが起こる確率は0以上1以下である. すなわち、$0 \leqq P(A) \leqq 1$である.

(2). 全事象 Ω が起こる確率は 1 である. すなわち $P(\Omega)=1$ である.

(3). 空事象 ϕ が起こる確率は 0 である. すなわち、$P(\phi)=0$ である.

(4). $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が互いに排反な事象ならば、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \cdots (1.47)$$

である. すなわち、$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \subset \Omega$ が

$$A_m \cap A_n = \phi \quad (m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n)$$

をみたすならば、(1.47) がなりたつ.

さらに、実数値確率変数 $X: \Omega \to \mathbb{R}$ を考え、分布や確率関数を定める. まず Ω は可算であるとしているので、$X(\Omega)$ は高々可算である. $X(\Omega)$ が有限のときは すでに述べた Ω が有限の場合と議論は同じ. そこで、$X(\Omega)$ が可算であるとする. このとき、$X(\Omega)$ は可算個の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を用いて.

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

と表すことができる. ここで. $n \in \mathbb{N}$ に対して.

$$\mu_X(\{x_n\}) = P(X^{-1}(\{x_n\})) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) = x_n\})$$

とおくと、公理 1.2 より. μ_X は標本空間を $X(\Omega)$ とする確率を定める. とくに、$\mu_X(\{x_n\}) \geqq 0$ であり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_X(\{x_n\}) = 1$$

がなりたつ. μ_X を X の確率分布または分布という. また関数 $p: X(\Omega) \to \mathbb{R}$ を

$$p(x_n) = \mu_X(\{x_n\}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

により定める. p を X に対する確率関数という. このとき、事象 $B \subset X(\Omega)$ の起こる確率 $\mu_X(B)$ について. $\mu_X(B) = \sum_{x \in B} p(x)$ がなりたつ.

確率関数の族を考え、$\mathbb{R}$ の高々可算な部分集合上の統計的モデルを以下で定める. 簡単のため. 確率変数のとりうる値は常に正とする.

Def 1.3

Ω を $\mathbb{R}$ の空でない高々可算な部分集合とする. 開集合 $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ を用いて

$$S = \left\{ p(\cdot\,;\xi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } x \in \Omega \text{ および任意の } \xi \in \Xi \text{ に対して、} \\ p(x;\xi) \text{ であり、} \sum_{x \in \Omega} p(x;\xi) = 1 \end{array} \right\}$$

と表される確率関数の族 S を Ω 上の n 次元統計的モデルという.

ex1.10

$n \in \mathbb{N}$ とする. $(n+1)$ 個の元からなる有限集合 $\Omega_n \subset \mathbb{R}$ を

$$\Omega_n = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$

により定め、

$$\Xi_n = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \;\middle|\; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1 \right\}$$ とおくと Ξ_n は開集合である.

このとき、$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \Xi_n$ に対して、

$$p(0;\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \quad , \quad p(i;\xi) = \xi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とおくと、$p(\cdot\,;\xi)$ は確率関数を定める. よって、

$$S_n = \{ p(\cdot\,;\xi) \mid \xi \in \Xi_n \} .$$

とおくと、S_n は Ω_n 上の n 次元統計的モデルである.

ex1.11 (ポアソン分布)

可算集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ を

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

により定め、 $\Xi = \{ \xi \mid \xi > 0 \}$ とおくと、Ξ は $\mathbb{R}$ の開集合である.

$\xi \in \Xi$ に対して、

$$p(k;\xi) = e^{-\xi} \frac{\xi^k}{k!} \quad (k \in \Omega)$$

とおくと、$p(\cdot\,;\xi)$ は確率関数を定める. 実際、$p(\cdot\,;\xi) > 0$ であり、

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{\xi^k}{k!} = e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} = e^{-\xi} \cdot e^{\xi} = 1$$ である.

よって、

$$S = \{ p(\cdot\,; \xi) \mid \xi \in \Xi \}$$

とおくと、SはΩ上の1次元統計的モデルである。なお、Sの各元$p(\cdot\,;\xi)$に対応する分布をポアソン分布という。ポアソン分布は起こる確率が小さい事象を多数回試行したときに、その事象が起こる回数を近似する分布として知られている。