1.4 十分統計量

定義 1.5

$f: X \to Y$ を集合 X から Y への写像とする.

(1). 任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在し、$y = f(x)$, すなわち、$f(X) = Y$ となるとき、f を全射 (surjection) という.

(2). $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ ならば、$f(x_1) \neq f(x_2)$, すなわち, $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ ならば、$x_1 = x_2$ となるとき、f を単射 (injection) という.

(3). f が全射かつ単射であるとき、f を全単射 (bijection) という.

ex 1.15

X を集合とする. X が可算であるとは、全単射 $f: \mathbb{N} \to X$ が存在することに他ならない.

$f: X \to Y$ を全単射とする. このとき、任意の $y \in Y$ に対してある $x \in X$ が一意的に存在し、$y = f(x)$ となる. y から x への対応により定められる Y から X への写像を $f^{-1}: Y \to X$ と表し、f の逆写像 (inverse mapping) という.

Ω を $\mathbb{R}$ の空でない有限部分集合とし、Ω 上の n 次元統計的モデル

$$S = \{ p(\cdot\,; \xi) \mid \xi \in \Xi \}$$

を考える. さらに、Ω' を $\mathbb{R}$ の空でない有限部分集合, $F: \Omega \to \Omega'$ を全射とする.

このとき、

$$g(y; \xi) = \sum_{x \in F^{-1}(\{y\})} p(x; \xi) \qquad (y \in \Omega) \qquad \cdots \quad (1.101)$$

とおくと、次がなりたつ.

命題 1.2

$g(\cdot\,; \xi)$ は $g(\cdot\,; \xi)$ となる確率関数を定める.

proof

まず、$y \in \Omega'$ とすると、F は全射なので、$F^{-1}(\{y\}) \neq \phi$ である. また、統計的モデルの定義より、

$p(\cdot;\xi)>0$ である．よって，(1.101) より，$g(\cdot;\xi)>0$ である．さらに，

$$\sum_{y\in\Omega'} g(y;\xi) = \sum_{y\in\Omega'}\sum_{x\in F^{-1}(\{y\})} p(x;\xi)$$
$$= \sum_{x\in F^{-1}(\Omega')} p(x;\xi)$$
$$= \sum_{x\in\Omega} p(x;\xi) = 1$$

したがって，$g(\cdot;\xi)$ は $g(\cdot;\xi)>0$ となる確率関数を定める．

命題 1.2 より，Ω' 上の n 次元統計的モデル S_F を

$$S_F = \{g(\cdot;\xi) \mid \xi\in\Xi\}$$

により定めることができる．そこで，

$$r(x;\xi) = \frac{p(x;\xi)}{g(F(x);\xi)} \quad (x\in\Omega,\ \xi\in\Xi)$$

とおく．任意の $\xi\in\Xi$ に対して，$r(x;\xi)$ が ξ に依存しない関数となるとき，F を S に関する十分統計量 (sufficient statistic) という．

ex1.16

あるコインの表が出る確率 ξ を知りたい．(ただし，$0<\xi<1$ とする．)

ξ の値を推定するには，コインを何回か投げたときに，いつ表が出たのかまでを調べずとも，何回表が出たのかを調べればよいことを，十分統計量の言葉を用いて見る．

まず，例 1.14 で述べた離散型確率空間上の確率変数に対応する Ω 上の統計的モデル S を考える．すなわち，$n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\Omega = \{0,1,2,\cdots,2^n-1\}$$

であり，$0<\xi<1$ に対して，

$$p(0;\xi) = (1-\xi)^n,$$

また，$k=1,2,\cdots,n$，$i_1,i_2,\cdots,i_k\in\mathbb{N}$，$1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq n$ のとき，

$$p\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}; \xi\right) = \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

とおくと

$$S = \{ p(\cdot;\xi) \mid 0 < \xi < 1 \}$$

である.

次に $\Omega' = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ とおき、写像 $F : \Omega \to \Omega'$ を

$$F(0) = 0 \quad , \quad F\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}\right) = k$$

により定める. このとき、F は全射である. さらに (1.101) より

$$q(0;\xi) = \sum_{m \in F^{-1}(\{0\})} p(m;\xi) = p(0;\xi) = (1-\xi)^n ,$$

また、(1.107) より

$$q(k;\xi) = \sum_{m \in F^{-1}(\{k\})} p(m;\xi)$$

$$= \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N} \\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n}} p\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}; \xi\right)$$

$$= {}_nC_k \, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

よって、$q(\cdot;\xi)$ は例 1.13 で述べた二項分布に対応する確率関数であり、

$$S_F = \{ q(\cdot;\xi) \mid \xi \in \Xi \}$$

である. ここで、

$$r(0;\xi) = \frac{p(0;\xi)}{q(F(0);\xi)} = \frac{(1-\xi)^n}{(1-\xi)^n} = 1 .$$

$$r\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}; \xi\right) = \frac{p\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}; \xi\right)}{q\left(F\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}\right); \xi\right)}$$

$$= \frac{p\left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}; \xi\right)}{q(k;\xi)} = \frac{1}{{}_nC_k}$$ である.

したがって、$r(\cdot;\xi)$ は ξ に依存しないので、F は S に関する十分統計量である。

統計的モデル S_n や、その部分集合として表される統計的モデルに関する十分統計量をいくつか挙げる。(表記は例1.10を参照)

ex 1.17

$F_n: \Omega_n \to \Omega_n$ を $F_n(0)=0$ となる全単射とする。ここで、(1.101) より、

$$g(0;\xi) = \sum_{i \in F_n^{-1}(\{0\})} p(i;\xi) = p(0;\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \quad (\because (1.56) より)$$

また、$j=1,2,\cdots,n$ のとき、

$$g(j;\xi) = \sum_{i \in F_n^{-1}(\{j\})} p(i;\xi) = p(F_n^{-1}(j);\xi) = \xi_{F_n^{-1}(j)}$$

である。

よって、

$$r(0;\xi) = \frac{p(0;\xi)}{g(F_n(0);\xi)} = \frac{p(0;\xi)}{g(0;\xi)} = 1.$$

$$r(i;\xi) = \frac{p(i;\xi)}{g(F_n(i);\xi)} = \frac{p(i;\xi)}{p(F_n^{-1}(F_n(i));\xi)} = \frac{p(i;\xi)}{p(i;\xi)} = 1.$$

である。よって、$r(\cdot;\xi)$ は ξ に依存しないので、F_n は S_n に関する十分統計量である。

ex 1.18 (十分統計量 $F_{m,n}$)

ex 1.10 の表記に従う。

まず、$m,n \in \mathbb{N}$ とし、$S_{m,n} \subset S_{mn}$ を

$$S_{m,n} = \{ p(\cdot;\eta) \in S_{mn} \mid \eta_1 = \cdots = \eta_m, \ldots, \eta_{m(n-1)+1} = \cdots = \eta_{mn} \}$$

により定める。ただし $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{mn})$ である。このとき、$S_{m,n}$ は Ω_{mn} 上の n 次元統計的モデルとなる。実際、$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \Xi_n$ のとき、

$$\Big(\underbrace{\frac{\xi_1}{m}, \frac{\xi_1}{m}, \cdots, \frac{\xi_1}{m}}_{m\text{コ}}, \underbrace{\frac{\xi_2}{m}, \frac{\xi_2}{m}, \cdots, \frac{\xi_2}{m}}_{m\text{コ}}, \cdots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m}, \frac{\xi_n}{m}, \cdots, \frac{\xi_n}{m}}_{m\text{コ}}\Big) \in \Xi_{mn}$$ であり、

$$\tilde{p}(\cdot;\xi) = p\Big(\cdot\,;\ \underbrace{\frac{\xi_1}{m},\frac{\xi_1}{m},\dots,\frac{\xi_1}{m}}_{m\text{つ}},\ \underbrace{\frac{\xi_2}{m},\dots,\frac{\xi_2}{m}}_{m\text{つ}},\dots,\ \underbrace{\frac{\xi_n}{m},\dots,\frac{\xi_n}{m}}_{m\text{つ}}\Big)$$

とおくと、 $S_{m,n} = \{\tilde{p}(\cdot;\xi) \mid \xi \in \Xi\}$ と表されるからである。

次に、写像 $F_{m,n} : \Omega_{mn} \to \Omega_n$ を

$$F_{m,n}(0) = 0,\quad F_{m,n}(i) = j \quad (i = (j-1)m+1,\dots,jm;\ j = 1,\dots,n)$$

により定める。このとき、$F_{m,n}$ は全射である。ここで、(1.101): $q(y;\xi) = \sum_{x\in F^{-1}(\{y\})} p(x;\xi)\ (y\in\Omega')$ より、

$$q(0;\xi) = \sum_{i\in F_{m,n}^{-1}(\{0\})} \tilde{p}(i;\xi) = \tilde{p}(0;\xi) = 1-\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

$\because\ p\left(0;\frac{\xi_1}{m},\frac{\xi_1}{m},\dots,\frac{\xi_n}{m},\frac{\xi_n}{m}\right) \in S_{mn}$.

また、(1.56): $p(i;\xi) = \xi_i$, (1.122) より、$j = 1,2,\dots,n$ のとき、

$$\begin{aligned}
q(j;\xi) &= \sum_{i\in F_{m,n}^{-1}(\{j\})} \tilde{p}(i;\xi) \\
&= \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \tilde{p}(i;\xi) \\
&= \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} p\left(i;\frac{\xi_1}{m},\frac{\xi_1}{m},\dots,\frac{\xi_1}{m},\dots,\frac{\xi_n}{m},\frac{\xi_n}{m},\dots,\frac{\xi_n}{m}\right) \\
&= \frac{\xi_j}{m}\times m = \xi_j
\end{aligned}$$

である。

よって、

$$r(0;\xi) = \frac{\tilde{p}(0;\xi)}{q(F_{m,n}(0);\xi)} = \frac{\tilde{p}(0;\xi)}{q(0;\xi)} = 1.$$

$$r(i;\xi) = \frac{\tilde{p}(i;\xi)}{q(F_{m,n}(i);\xi)} = \frac{\tilde{p}(i;\xi)}{q(j;\xi)} = \frac{\frac{\xi_j}{m}}{\xi_j} = \frac{1}{m}$$

である。

よって、$r(\cdot;\xi)$ は ξ に依存しないので、$F_{m,n}$ は $S_{m,n}$ に関する十分統計量である。

ex1.19 (十分統計量 $F_{\boldsymbol{m}}$)

例1.18を一般化する。まず、$n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ とし、

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \quad \text{とおく.}$$

さらに、$S_{\boldsymbol{m}} \subset S_m$ を、

$$S_{\boldsymbol{m}} = \{ p(\cdot\,; \eta) \in S_m \mid \eta_1 = \cdots = \eta_{m_1}, \cdots, \eta_{m_1+\cdots+m_{n-1}+1} = \cdots = \eta_m \}$$

により定める。このとき、例1.18と同様に、$S_{\boldsymbol{m}}$ は Ω_m 上の n 次元統計的モデルとなる。

実際、$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \Xi_n$ のとき、

$$\Big(\underbrace{\frac{\xi_1}{m_1}, \frac{\xi_1}{m_1}, \cdots, \frac{\xi_1}{m_1}}_{m_1\text{コ}}, \underbrace{\frac{\xi_2}{m_2}, \frac{\xi_2}{m_2}, \cdots, \frac{\xi_2}{m_2}}_{m_2\text{コ}}, \cdots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m_n}, \frac{\xi_n}{m_n}, \cdots, \frac{\xi_n}{m_n}}_{m_n\text{コ}} \Big) \in \Xi_m$$

であり、

$$\tilde{p}(\cdot\,; \xi) = p\Big(\cdot\,; \underbrace{\frac{\xi_1}{m_1}, \frac{\xi_1}{m_1}, \cdots, \frac{\xi_1}{m_1}}_{m_1\text{コ}}, \underbrace{\frac{\xi_2}{m_2}, \cdots, \frac{\xi_2}{m_2}}_{m_2\text{コ}}, \cdots, \underbrace{\frac{\xi_n}{m_n}, \cdots, \frac{\xi_n}{m_n}}_{m_n\text{コ}}\Big) \quad \text{とおくと、}$$

$$S_{\boldsymbol{m}} = \{ \tilde{p}(\cdot\,; \xi) \mid \xi \in \Xi_n \} \quad \text{と表されるからである。}$$

次に、写像 $F_{\boldsymbol{m}} : \Omega_m \to \Omega_n$ を

$$F_{\boldsymbol{m}}(0) = 0, \quad F_{\boldsymbol{m}}(i) = 1 \quad (i = 1, \cdots, m_1),$$

$$F_{\boldsymbol{m}}(i) = j \quad (i = m_1 + \cdots + m_{j-1} + 1, \cdots, m_1 + \cdots + m_j ; j = 2, \cdots, n)$$

により定める。このとき、$F_{\boldsymbol{m}}$ は全射である。ここで、(1.10)より、

$$\begin{aligned} q(0; \xi) &= \sum_{i \in F_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\{0\})} \tilde{p}(i; \xi) \\ &= \tilde{p}(0; \xi) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j \end{aligned}$$

また、$q(1; \xi) = \displaystyle\sum_{i \in F_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\{1\})} \tilde{p}(i; \xi) = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{p}(i; \xi) = \xi_1$.

同様に、$j=2,\dots,n$ のとき、　$g(j;\xi)=\xi_j$　である.

(1.104), (1.134), (1.136) より,

$$r(0;\xi)=\frac{\tilde{p}(0;\xi)}{g(F_m(0);\xi)}=\frac{\tilde{p}(0;\xi)}{g(0;\xi)}=1.$$

(1.56), (1.135), (1.137) より.　$i=1,2,\dots,m_1$ のとき.

$$r(i;\xi)=\frac{\tilde{p}(i;\xi)}{g(F_m(i);\xi)}=\frac{\tilde{p}(i;\xi)}{g(1;\xi)}=\frac{\frac{\xi_1}{m_1}}{\xi_1}=\frac{1}{m_1},$$

同様に, $i=m_1+\dots+m_{j-1}+1,\dots,m_1+\dots+m_j$, $j=2,\dots,n$ のとき.

$$r(i;\xi)=\frac{1}{m_j}$$ である.

よって. $r(\cdot;\xi)$ は ξ に依存しないので F_m は S_m に関する十分統計量である.

Ω $\subset\mathbb{R}$, 可算　$x\in\Omega$　$\Xi\subset\mathbb{R}^n$　$\xi\in\Xi$

$$S_m=\{p(\cdot;\xi)\mid \xi\in\Xi,\ p(x;\xi)>0,\ \sum_{x\in\Omega}p(x;\xi)=1\}.$$