2.5 フィッシャー計量と単調性，不変性

(0,2)型テンソル場に対するチェンツォフの定理において現れた $\mathcal{S}_n$ 上の(0,2)型テンソル場を表す(2.96)において，$C=1$ とする．すなわち，

$$(g_n)_{ij}(\xi) = (g_n)_\xi(e_i, e_j) = \frac{\delta_{ij}}{\xi_i} + \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k} \quad \text{である．}$$

このとき，実対称行列 $((g_n)_{ij}(\xi))_{n\times n}$ は正定値となる．実際，$v=(v_1, v_2, \dots, v_n)\in\mathbb{R}^n$ とすると，

$$\begin{aligned}(g_n)_\xi(v,v) &= \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \left(\frac{\delta_{ij}}{\xi_i} + \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{\xi_i} + \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2 \end{aligned}$$

となるからである．

--- (2.119)

さらに，$p(\cdot;\xi)\in\mathcal{S}_n$ が

$$p(0;\xi) = 1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad p(k;\xi) = \xi_k \quad (k=1,2,\dots,n)$$

により定められていたことを用いると，(2.119)は，

$$(g_n)_\xi(v,v) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\log p(k;\xi)\right)^2 p(k;\xi) \quad \text{と表せる．}$$

$$\begin{aligned}\because\ (g_n)_\xi(v,v) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\log\xi_k\right)^2\xi_k + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\log\left(1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\right)^2 p(0;\xi)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{v_k}{\xi_k}\right)^2\xi_k + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}_{\delta_{ik}}\right)^2\left(1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{\xi_i} + \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)^2}{1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{\xi_i} + \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2 \end{aligned}$$

また，

$$(g_n)_{ij}(\xi) = (g_n)_\xi(e_i, e_j) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\log p(k;\xi)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\log p(k;\xi)\right)p(k;\xi)$$

である．

$$
\begin{aligned}
☺ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{p(k;\xi)} \frac{\partial p(k;\xi)}{\partial \xi_i} \right) \left(\frac{1}{\cancel{p(k;\xi)}} \frac{\partial p(k;\xi)}{\partial \xi_j} \right) \cancel{p(k;\xi)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k} \delta_{ik} \delta_{jk} + \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} \xi_k} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right)}_{-1} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right)}_{-1} \\
&= \frac{\delta_{ij}}{\xi_i} + \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} \xi_k}
\end{aligned}
$$

そこで、Ω を $\mathbb{R}$ の空でない高々可算な部分集合，

$S = \{ p(\cdot;\xi) \mid \xi \in \Xi \}$ を Ω 上の n次元統計的モデルとし、$i,j = 1,2,\cdots,n$ に対して、

$$g_{ij}(\xi) = \sum_{x \in \Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \log p(x;\xi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \log p(x;\xi) \right) p(x;\xi) \quad \cdots (2.124)$$ とおく。

ただし、簡単のため、$p(\cdot;\xi)$ は ξ の関数として C^∞ 級であると仮定する。

また、(2.124) の右辺の和は発散しないと仮定する。$(g_{ij}(\xi))_{n \times n}$ を S の ξ における

フィッシャー情報行列という。$n=1$ のときは、フィッシャー情報行列をフィッシャー情報量ともいう。

$g_{ij}(\xi)$ の定義より、$(g_{ij}(\xi))_{n \times n}$ は n次実対称行列である。

フィッシャー情報行列は必ずしも正定値であるとは限らないが、半正定値である。

実際、次の命題を用いればよい。

命題 2.5

$a \in \mathbb{R}^n$ とすると、n次実対称行列 ${}^t a\, a$ は半正定値である

proof

$x \in \mathbb{R}^n$ とすると、

$$
\begin{aligned}
x\, {}^t a\, a\, {}^t x &= (x\, {}^t a)\, {}^t (x\, {}^t a) \\
&= \langle x, a \rangle^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ${}^t a\, a$ は半正定値 □

§2.1 で述べたことより、正定値なフィッシャー行列は Ξ 上のリーマン計量を定める。このとき、

点 $\xi \in \Xi$ を確率関数 $p(\cdot;\xi) \in S$ とみなすことにより、フィッシャー情報行列は

統計的モデル S 上のリーマン計量とみなすことができる。このリーマン計量をフィッシャー計量という。

以下では、正定値なフィッシャー情報行列，フィッシャー計量を考える。

ex2.10

ex1.13で述べた二項分布に対応する確率関数からなる統計的モデルを考える。

まず、$n \in \mathbb{N}$ とし、

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$$ とおく。

さらに、$0 < \xi < 1$ に対して

$$p(k;\xi) = {}_nC_k\, \xi^k (1-\xi)^{n-k} \quad (k \in \Omega)$$ とおく。

このとき、Ω 上の統計的モデル S を

$$S = \{ p(\cdot\,;\xi) \mid 0 < \xi < 1 \}$$ により定める。

S のフィッシャー情報量を計算する。$p(\cdot\,;\xi) \in S$, $k \in \Omega$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \log p(k;\xi) = \frac{1}{\xi^k (1-\xi)^{n-k}} \left\{ k\xi^{k-1}(1-\xi)^{n-k} - \xi^k \cdot (n-k)(1-\xi)^{n-k-1} \right\}$$

$$= \frac{k}{\xi} - \frac{n-k}{1-\xi} = \frac{k - n\xi}{\xi(1-\xi)} \quad \cdots (2.129)$$ である。

(1.87), (1.88) より、ξ における S のフィッシャー情報量は、

$$g_{11}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \log p(k;\xi) \right)^2 p(k;\xi)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k - n\xi}{\xi(1-\xi)} \right)^2 {}_nC_k\, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{\xi^2(1-\xi)^2} \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2n\xi k + n^2\xi^2)\, {}_nC_k\, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{\xi^2(1-\xi)^2} \left\{ n(n-1)\xi^2 + n\xi - 2n\xi \cdot n\xi + n^2\xi^2 \cdot 1 \right\}$$

$$= \frac{n\xi(1-\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2} = \frac{n}{\xi(1-\xi)} > 0 \quad \cdots (2.130)$$ である。

ex 2.11

ex 1.11 で述べたポアソン分布に対応する確率関数からなる統計的モデルを考える。まず、

$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とおく。さらに、$\xi > 0$ に対して、

$$p(k;\xi) = e^{-\xi}\frac{\xi^k}{k!} \quad (k \in \Omega)$$ とおく

このとき、Ω 上の 1次元統計的モデル S を

$$S = \{p(\cdot\,;\xi) \mid \xi > 0\}$$ により定める。

S のフィッシャー情報量を計算する。$p(\cdot\,;\xi) \in S$, $k \in \Omega$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\log p(k;\xi) = \frac{1}{p(k;\xi)}\frac{\partial p(k;\xi)}{\partial\xi}$$

$$= \cancel{e^{\xi}}\frac{k!}{\xi^k}\left(-\cancel{e^{-\xi}}\frac{\xi^k}{k!} + \cancel{e^{-\xi}}\frac{k\cdot\xi^{k-1}}{k!}\right)$$

$$= -1 + \frac{k}{\xi}$$ である。

よって、ξ における S のフィッシャー情報量は、

$$g_{11}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\log p(k;\xi)\right)^2 p(k;\xi)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-1 + \frac{k}{\xi}\right)^2 e^{-\xi}\frac{\xi^k}{k!}$$

$$= e^{-\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - 2\frac{k}{\xi} + \frac{k^2}{\xi^2}\right)\frac{\xi^k}{k!}$$

$$= e^{-\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{1 - 2\frac{k}{\xi} + \frac{k(k-1)+k}{\xi^2}\right\}\frac{\xi^k}{k!}$$

$$= e^{-\xi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\xi^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{1}{\xi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\right\}$$

$$= e^{-\xi}\cdot\frac{1}{\xi}e^{\xi} = \frac{1}{\xi} > 0$$ である。

与えられた統計的モデルから別の統計的モデルへの変換を考えると、フィッシャー計量は単調性という性質をもち、その不変性は変換が十分統計量のときになりたつことを示す。

まず、§1.4でも述べた十分統計量について、統計的モデルが$\mathbb{R}$の可算部分集合上で定められている場合も含めて、簡単にふり返る。Ωを$\mathbb{R}$の空でない高々可算な部分集合，$F: \Omega \to \Omega'$を全射とする。このとき、

$$g(y;\xi) = \sum_{x \in F^{-1}(\{y\})} p(x;\xi) \quad (y \in \Omega')$$ とおくと、

$g(\cdot;\xi)$は$g(\cdot;\xi) > 0$となる確率関数を定める。よって、Ω'上のn次元統計的モデルS_Fを

$$S_F = \{ g(\cdot;\xi) \mid \xi \in \Xi \}$$

により定めることができる。そこで、

$$r(x;\xi) = \frac{p(x;\xi)}{g(F(x);\xi)} \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \Xi)$$ とおく。

FがSに関する十分統計量であるというのは、任意の$\xi \in \Xi$に対して、$r(\cdot;\xi)$がξに依存しない関数となることであった。

ここで、$(g_{ij}(\xi))_{n \times n}$，$(g^F_{ij}(\xi))_{n \times n}$をそれぞれ$S$，$S_F$のフィッシャー情報行列とし、

$$\Delta g_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi) - g^F_{ij}(\xi) \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \quad \cdots (2.143)$$ とおく。

このとき、フィッシャー計量の単調性と不変性について、次がなりたつ。

○ S：Ω上の統計的モデル

$\rightsquigarrow (g_{ij}(\xi))_{n \times n}$：フィッシャー情報行列

○ $F: \Omega \to \Omega'$：全射

$\rightsquigarrow S_F$：Ω'上の統計的モデル

$\rightsquigarrow (g^F_{ij}(\xi))_{n \times n}$：フィッシャー情報行列

$\Rightarrow (g_{ij}(\xi))_{n \times n} \geqq (g^F_{ij}(\xi))_{n \times n}$

等号成立 $\Leftrightarrow$ F: 十分統計量

Th 2.2

等式 $\Delta g_{ij}(\xi) = \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log r(x;\xi))(\partial_j \log r(x;\xi))\, p(x;\xi)$ ... (2.144)

がなりたつ。ただし、

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$ である。

とくに、n次実対称行列 $(\Delta g_{ij}(\xi))_{n\times n}$ は半正定値であり、任意の $\xi\in\Xi$ に対して、$(\Delta g_{ij}(\xi))_{n\times n}$ が零行列となるのは、F が S に関する十分統計量のときである。

proof

(2.124), (2.140), (2.142), (2.143) より.

$$\Delta g_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi) - g^F_{ij}(\xi) \qquad (\because (2.143)より)$$

$$= \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log p(x;\xi))(\partial_j \log p(x;\xi))\, p(x;\xi)$$
$$- \sum_{y\in\Omega'} (\partial_i \log q(y;\xi))(\partial_j \log q(y;\xi))\, q(y;\xi)$$

$$= \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log r(x;\xi) + \partial_i \log q(F(x);\xi))(\partial_j \log r(x;\xi) + \partial_j \log q(F(x);\xi))\, p(x;\xi)$$
$$- \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log q(F(x);\xi))(\partial_j \log q(F(x);\xi))\, p(x;\xi)$$

$$= \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log r(x;\xi))(\partial_j \log r(x;\xi))\, p(x;\xi)$$
$$+ \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log r(x;\xi))(\partial_j \log q(F(x);\xi))\, p(x;\xi)$$
$$+ \sum_{x\in\Omega} (\partial_j \log r(x;\xi))(\partial_i \log q(F(x);\xi))\, p(x;\xi) \quad \cdots (2.146)$$

である。ここで、(2.140), (2.142) および積の微分法より.

$$\sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log r(x;\xi))(\partial_j \log g(F(x);\xi))\, p(x;\xi)$$

$$= \sum_{x\in\Omega} \frac{1}{\cancel{r(x;\xi)}} (\partial_i r(x;\xi)) \frac{1}{\cancel{g(F(x);\xi)}} (\partial_j g(F(x);\xi))\ \cancel{p(x;\xi)}$$

$$= \sum_{x\in\Omega} (\partial_i r(x;\xi))(\partial_j g(F(x);\xi))$$

逆にたどれば分かりやすい。

$$= \partial_i \sum_{x\in\Omega} r(x;\xi)\, \partial_j g(F(x);\xi) - \sum_{x\in\Omega} r(x;\xi)\, \partial_i\partial_j g(F(x);\xi)$$

$$= \partial_i \sum_{x\in\Omega} \frac{\partial_j g(F(x);\xi)}{g(F(x);\xi)} p(x;\xi) - \sum_{x\in\Omega} \frac{\partial_i\partial_j g(F(x);\xi)}{g(F(x);\xi)} p(x;\xi)$$

$$= \partial_i \sum_{y\in\Omega'} \frac{\partial_j g(y;\xi)}{g(y;\xi)} g(y;\xi) - \sum_{y\in\Omega'} \frac{\partial_i\partial_j g(y;\xi)}{g(y;\xi)} g(y;\xi)$$

$$= \partial_i \sum_{y\in\Omega'} \partial_j g(y;\xi) - \sum_{y\in\Omega'} \partial_i\partial_j g(y;\xi) = 0$$ である。

同様に、$i\to j$, $j\to i$として

$$\sum_{x\in\Omega} (\partial_j \log r(x;\xi))(\partial_i \log g(F(x);\xi))\, p(x;\xi) = 0 \quad \cdots (2.148)$$ である。

よって、

$$\Delta g_{ij}(\xi) = \sum_{x\in\Omega} (\partial_i \log r(x;\xi))(\partial_j \log r(x;\xi))\, p(x;\xi) \quad \cdots (2.144)$$ が成り立つ。

さらに、命題2.5より n次実対称行列

$$(\partial_i \log r(x;\xi))(\partial_j \log r(x;\xi)))_{n\times n}$$

は半正定値より、$(\Delta g_{ij}(\xi))_{n\times n}$は半正定値である。また、任意の$\xi\in\Xi$に対して、

$(\Delta g_{ij}(\xi))_{n\times n}$が零行列となるのは、任意の$i=1,2,\dots,n$に対して

$$(\partial_i \log r(x;\xi)) = 0$$

となるとき、すなわち、$r(x;\xi)$がξに依存しないときであり、このときFはSに関する

十分統計量である. □