Th 1.1 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x \rangle \quad \square$$

(2). $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$

$$\langle x+y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \square$$

$$\langle cx, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (cx_i) y_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c\langle x, y \rangle \quad \square$$

(3). $\langle x, x \rangle \geqq 0$ であり、$\langle x, x \rangle = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る.

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq 0.$$ 等号成立は、$x_i = 0$ for all i

$\therefore$ $x = 0$.

Th 1.2

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1). $\|x\| \geqq 0$ であり、$\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る (正値性)

定義より

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geqq 0.$$

等号成立は $\forall i$ $x_i = 0$ のとき. すなわち $x = 0$.

(2). $\|cx\| = |c|\,\|x\|$

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx \rangle} = \sqrt{c^2 \langle x, x \rangle} \quad (\because \text{Th. 1.1 の (2)}).$$

$$= |c| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$= |c|\,\|x\|.$$

(3). $|\langle x, y \rangle| \leqq \|x\|\|y\|$. 等号成立は x が y の定数倍となるとき、または y が x の定数倍となるときに限る.

$x=0$ または $y=0$ の場合、シュワルツの不等式が成り立つのは明らか。以下、$x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ とする。任意のベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し、$s\in\mathbb{R}$ の関数

$$F(s) = \langle x - sy,\ x - sy \rangle$$ を定義する。

Th.1.1 の3) より、 $F(s) \geqq 0$.

一方、 $F(s) = \langle x - sy, x - sy \rangle$

$$= \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle s + \langle y, y\rangle s^2 .$$

よって
$$\langle y, y\rangle s^2 - 2\langle x, y\rangle s + \langle x, x\rangle \geqq 0$$ が成立。

これは s の2次式であり、不等式が成立するための必要十分条件は

$$D = \langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqq 0.$$

$$\langle x, y\rangle^2 \leqq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$\therefore\quad |\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\,\|y\|$$

等号成立は $F(s)=0$、すなわち $x = sy$ のとき。 □

$\sum (x_i + y_i)^2$

$x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2$

(4) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式)

両辺正より2乗して、

$$\|x+y\|^2 \leqq (\|x\| + \|y\|)^2$$

すなわち $\cancel{\|x\|^2} + 2\|\langle x, y\rangle\| + \cancel{\|y\|^2} \leqq \cancel{\|x\|^2} + 2\|x\|\|y\| + \cancel{\|y\|^2}$ を示せばよい。

これは $\langle x, y\rangle \leqq \|x\|\|y\|$、つまり、シュワルツの不等式に他ならない。

∴ 題意は示された□

関数 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

により定める。d を $\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離、$d(x,y)$ を x と y のユークリッド距離という。

Th1.3　$x, y, z \in \mathbb{R}^n$とする.

(1). $d(x, y) \geqq 0$であり、$d(x, y) = 0$となるのは、$x = y$のときに限る.（正値性）.

$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$　より　$\forall i$　$x_i = y_i$.　□.

(2). $d(x, y) = d(y, x)$　（対称性）.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d(y, x)$$ □.

(3) $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$　（三角不等式）

$$\begin{aligned} d(x, z) = \|x - z\| &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leqq \|x - y\| + \|y - z\| \quad (\because \text{Th1.2の(4)}). \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$ □.

Def 1.1

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$を$\mathbb{R}^n$の点列とし、$a \in \mathbb{R}^n$とする. 任意の$\varepsilon > 0$に対して、ある$K \in \mathbb{N}$が存在し、$k \in \mathbb{N}$, $k \geqq K$ならば、$d(a_k, a) < \varepsilon$となるとき、$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$はaに収束するという.

このとき、$\lim_{k \to \infty} a_k = a$　または　$a_k \to a\ (k \to \infty)$と表し、$a$を$\{a_k\}_{k=1}^{N}$の極限という. □.

ex 1.1

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$をそれぞれ$a, b \in \mathbb{R}^n$に収束する$\mathbb{R}^n$の点列とする. このとき、

$\lim_{k \to \infty}(a_k + b_k) = a + b$　であることを示す.

点列の収束の定義より、$\varepsilon > 0$とすると、ある$K_1 \in \mathbb{N}$が存在し、$k \in \mathbb{N}$, $k \geqq K_1$ならば

$$d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$ となる.

また、ある$K_2 \in \mathbb{N}$が存在し、$k \in \mathbb{N}$, $k \geqq K_2$ならば、

$$d(b_k, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$ となる.

ここで$K \in \mathbb{N}$を$K = \max\{K_1, K_2\}$により定める.

$k \in \mathbb{N}$, $k \geqq K$ならば、

$$d(\mathbb{a}_k+\mathbb{b}_k, \mathbb{a}+\mathbb{b}) = \|(\mathbb{a}_k+\mathbb{b}_k)-(\mathbb{a}+\mathbb{b})\|$$
$$\leqq \|\mathbb{a}_k-\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}_k-\mathbb{b}\|$$
$$= d(\mathbb{a}_k, \mathbb{a}) + d(\mathbb{b}_k, \mathbb{b})$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

すなわち $d(\mathbb{a}_k+\mathbb{b}_k, \mathbb{a}+\mathbb{b}) < \varepsilon$

よって. 点列の収束の定義より $\lim_{k\to\infty}(\mathbb{a}_k+\mathbb{b}_k) = \mathbb{a}+\mathbb{b}$ が示された□.

$\mathbb{R}^n$の部分集合で定義された関数の極限や微分を考える場合、定義域が開集合だと議論が簡単(らしい).

$\mathbb{a}\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$とする. このとき、$\mathbb{R}^n$の部分集合 $B(\mathbb{a};\varepsilon)$を

$$B(\mathbb{a};\varepsilon) = \{\mathbb{x}\in\mathbb{R}^n \mid d(\mathbb{x},\mathbb{a})<\varepsilon\}$$

により定める. $B(\mathbb{a};\varepsilon)$を $\mathbb{a}$ の ε-近傍, または $\mathbb{a}$を中心, εを半径とする開球体という.

ex 1.2 $n=1$の場合,

一般に $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$のとき. $(a,b)\subset\mathbb{R}$を

$$(a,b) = \{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$$

により定め. これを有界開区間 または 開区間 という.

ex1.3

$n=2$ の場合.

$\mathbb{a} = (x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$とすると、

$$B(\mathbb{a};\varepsilon) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}$$

である. このとき、$B(\mathbb{a};\varepsilon)$を開円板ともいう.

Def 1.2

$O\subset\mathbb{R}^n$とする. 任意の $\mathbb{a}\in O$に対して、ある$\varepsilon>0$が存在し、$B(\mathbb{a};\varepsilon)\subset O$となるとき、

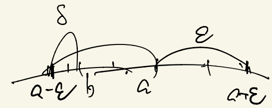
Oを$\mathbb{R}^n$の開集合という.

Th1.4　$\mathbb{R}^n$ の開球体は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

$a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とし、$B(a;\varepsilon)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示す.

$b \in B(a;\varepsilon)$ とする. このとき開球体の定義より、$d(b,a) < \varepsilon$ である. よって,

$\delta > 0$ を　$\delta = \varepsilon - d(b,a)$



により定めることができる. ここで $x \in B(b;\delta)$ とすると

$d(x,b) < \delta$ である. よって, ユークリッド距離に関する三角不等式より.

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a)$$

$$< \delta + d(b,a) = \varepsilon$$

すなわち $d(x,a) < \varepsilon$ となり. $x \in B(a;\varepsilon)$ である. したがって. $B(b;\delta) \subset B(a;\varepsilon)$

となるので開集合の定義より、$B(a;\varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

ex1.5　有界開区間は $\mathbb{R}$ の開集合である.

$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$ より. 定理1.4において、a を $\frac{a+b}{2}$,

ε を $\frac{b-a}{2}$ とすればよい. □

ex1.6 (無限開区間)

$a \in \mathbb{R}$ とし, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a) \subset \mathbb{R}$ を

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

により定める. $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ を無限開区間という.

無限開区間は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示す. まず $b \in (a,+\infty)$ とする.

このとき. $a < b$ より. $b - a > 0$ であり. $B(b;b-a) \subset (a,+\infty)$ である.

よって開集合の定義より、$(a,+\infty)$ は $\mathbb{R}$ の開集合である.

次に. $b \in (-\infty,a)$ とする. このとき. $b < a$ より $a - b > 0$ であり.

$B(b;a-b) \subset (-\infty,a)$ である.

よって. 開集合の定義より. $(-\infty,a)$ は $\mathbb{R}$ の開集合である.

ex 1.7

$\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ を

$$\Delta_n = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, x_1, x_2, \cdots, x_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i < 1 \right\}$$

により定める．Δ_n が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示す．

$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \Delta_n$ とする．このとき，$a_1, a_2, \cdots, a_n, 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$ なので，

$\varepsilon > 0$ を

$$\varepsilon = \min \left\{ a_1, a_2, \cdots, a_n, \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \right\}$$

により定めることができる．

ここで，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in B(a, \varepsilon)$ とする．まず $j = 1, \cdots, n$ とし，$x_j \leqq 0$ であると仮定すると，

$$d(x, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} \geqq a_j \geqq \varepsilon.$$

すなわち，$d(x, a) \geqq \varepsilon$ となり，これは矛盾である．よって，$x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ である．

次に，コーシー・シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \langle x - a, (1, 1, \cdots, 1) \rangle + \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&\leqq \| x - a \| \sqrt{n} + \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&< \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \sqrt{n} + \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (\because x \in B(a; \varepsilon) \text{ より}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

すなわち $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$ である．よって，$B(x; \varepsilon) \subset \Delta_n$ となるので，開集合の定義より，

Δ_n は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．