1.3 期待値と分散

(Ω, P) を離散型確率空間，$X:\Omega \to \mathbb{R}$ を (Ω, P) 上の実数値確率変数とする.

このとき、条件

$$\sum_{w\in\Omega} |X(w)|\, P(\{w\}) < +\infty \quad \cdots (1.63)$$

を考える. Ω が有限集合の場合は (1.63) は常に成り立つが、Ω が可算集合の場合は (1.63) が成り立つとは限らない. (Q なぜ?, 反例は?)

条件 (1.63) がなりたつとき、X は P-可積分 または 可積分 であるという.

定義 1.4

(Ω, P) を離散型確率空間，$X:\Omega \to \mathbb{R}$ を (Ω, P) 上の実数値確率変数とする.

X が P-可積分 のとき、$\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$ を

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{w\in\Omega} X(w)\, P(\{w\})$$

により定め、これを X の期待値 または 平均値 という.

X および X^2 が P-可積分のとき，$V[X] \geqq 0$ を

$$V[X] = \sum_{w\in\Omega} (X(w) - \mathbb{E}[X])^2\, P(\{w\}) \quad \cdots (1.65)$$

により定め. これを X の分散 (variance) という.

命題 1.1

定義 1.4 において、等式

$$V[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

がなりたつ.

proof

公理 1.1 または 公理 1.2 の (2), (4) より、

$$\sum_{w\in\Omega} P(\{w\}) = P\left(\bigcup_{w\in\Omega} \{w\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

である.

よって 定義 (1.65) より.

$$
\begin{aligned}
V[X] &= \sum_{\omega\in\Omega}\left\{(X(\omega))^2 - 2\mathbb{E}[X]X(\omega) + (\mathbb{E}[X])^2\right\}P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega))^2 P(\{\omega\}) - 2\mathbb{E}[X]\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\}) + (\mathbb{E}[X])^2\sum_{\omega\in\Omega}P(\{\omega\}) \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad \square
\end{aligned}
$$

Th 1.5

(Ω, P) を離散型確率空間，$X:\Omega\to\mathbb{R}$ を (Ω,P) 上の実数値確率変数，μ_X を X の分布，p を X に対する確率関数，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする。

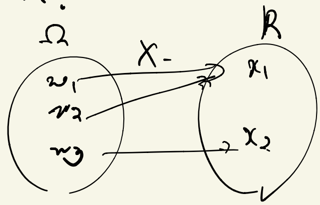
$f(X)$ が P-可積分のとき

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mu_X(\{x\}) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,p(x) \quad \cdots (1.69)$$

が成り立つ。

proof

(1.69) の右側の等式は分布および確率関数の定義から明らか。



$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)] &= \sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))\,P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega\in X^{-1}(\{x\})} P(\{\omega\})
\end{aligned}
$$

{ } はいるの？

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\, P\Big(\bigcup_{\omega\in X^{-1}(\{x\})}\{\omega\}\Big) \quad (\because 公理 1.1 \text{ or } 1.2 の (4) より) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\, P(X^{-1}(\{x\})) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\, \mu_X(\{x\}) \quad (\because 確率分布の定義より)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (1.69) の左側の等式が成り立つ。

系1.1

(Ω, P) を離散型確率空間，$X:\Omega \to \mathbb{R}$ を (Ω, P) 上の実数値確率変数，μ_X を X の分布，p を X に対する確率関数とする．このとき、次の(1),(2)がなりたつ．

(1). X が P-可積分のとき、

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mu_X(\{x\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, p(x)$$ である.

(2). X および X^2 が P-可積分のとき、

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mu_X(\{x\})$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 p(x)$$ である.

proof

(1). 定理1.5において. $f(x) = x \ (x \in \mathbb{R})$ とおけばよい.

(2). 定理1.5において. $f(x) = (x - \mathbb{E}[X])^2 \ (x \in \mathbb{R})$ とおけばよい.

ex 1.12 (ベルヌーイ分布)

例1.8で述べたベルヌーイ試行に対応する離散型確率空間 (Ω, P) を考える.
すなわち，$0 \leq \xi \leq 1$ とし

$$\Omega = \{表, 裏\}$$

$$P(\{表\}) = \xi, \quad P(\{裏\}) = 1 - \xi$$

である. さらに，(Ω, P) 上の実数値確率変数 $X:\Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X(裏) = 0, \quad X(表) = 1$$

により定める. このとき，X の分布 μ_X は

$$\mu_X(\{0\}) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{裏\}) = 1 - \xi$$

$$\mu_X(\{1\}) = \xi$$

により与えられる. この分布をベルヌーイ分布という.

とくに、ex1.10 において、$n=1$ としたときの統計的モデル S_1 は $0<\xi<1$ のときのベルヌーイ分布に対応する確率関数からなる。(簡単のため、$\xi\neq 0,1$ は含まないように統計的モデルを定義している。)

X のではいけない？

このとき、μ_X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ は、

$$E[X] = 0\cdot\mu_X(\{0\}) + 1\cdot\mu_X(\{1\}) = 0\cdot(1-\xi) + 1\cdot\xi = \xi.$$

また、

$$E[X^2] = 0^2\cdot\mu_X(\{0\}) + 1^2\cdot\mu_X(\{1\}) = 0\cdot(1-\xi) + 1\cdot\xi = \xi.$$

よって、

$$V[X] = \xi - \xi^2 = \xi(1-\xi)$$ である。

ex1.13 (二項分布)

例1.12を一般化し、$n\in\mathbb{N}$ に対して、ベルヌーイ試行を n 回繰り返す試行を考える。例えば、$0\leq\xi\leq 1$ とし、表が出る確率が ξ、裏が出る確率が $1-\xi$ のコインを n 回投げるという試行を考え、これを次のように表す。

まず、標本空間 Ω を

$$\Omega = \{表, 裏\}^n$$

により定める。ここで、表が1回もでない事象を w_0 と表し、$k=1,2,\cdots,n$ に対して、$i_1, i_2, \cdots, i_k\in\mathbb{N}$, $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$ のとき、コインを i_1 回目, i_2 回目, …, i_k 回目に投げたときのみ表が出る事象を $w_{i_1 i_2\cdots i_k}$ と表すことにする。このとき、

$$P(\{w_0\}) = (1-\xi)^n, \quad P(\{w_{i_1 i_2\cdots i_k}\}) = \xi^k(1-\xi)^{n-k}$$

とおくと、P は Ω 上の確率を定める。さらに (Ω, P) 上の実数値確率変数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$ を

$$X(w_0) = 0, \quad X(w_{i_1 i_2\cdots i_k}) = k$$

により定める。すなわち、X は表が出た回数を表す。このとき、X の分布 μ_X は

$$\mu_X(\{k\}) = {}_nC_k\, \xi^k(1-\xi)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

により与えられる。この分布を二項分布という。

μ_X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求める.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\, \mu_X(\{k\}) \qquad (\because X(\Omega) = \{0,1,2,\cdots,n\}.) .$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\, {}_nC_k\, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \xi^k (1-\xi)^{n-k}.$$

$$= n\xi \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} \xi^{k-1} (1-\xi)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= n\xi \sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l\, \xi^l (1-\xi)^{(n-1)-l}.$$

$$= n\xi \{\xi + (1-\xi)\}^{n-1}$$

$$= n\xi$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mu_X(\{k\})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2\, {}_nC_k\, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{(n-k)!\,k!} \xi^k (1-\xi)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\xi^2 (n-2)!}{(k-2)!\{(n-2)-(k-2)\}!} \xi^{k-2} (1-\xi)^{(n-2)-(k-2)} + n\xi$$

$$= n(n-1)\xi^2 \{\xi + (1-\xi)\}^{n-2} + n\xi$$

$$= n(n-1)\xi^2 + n\xi$$

よって.

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= n(n-1)\xi^2 + n\xi - (n\xi)^2$$

$$= n\xi(1-\xi)$$ である□.

ex 1.14

例 1.13 と同じ離散型確率空間 (Ω, P) を考え、(Ω, P) 上の実数値確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X(\omega_0) = 0 \quad , \quad X(\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k}) = \sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}$$

により定める．ここで $m = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$ とすると、m は

$$m = \sum_{\beta=1}^{k} 2^{j_\beta}$$

と一意的に表されることを用いた．ただし $k = 1, 2, \cdots, n$, $j_1, j_2, \cdots, j_k \in \mathbb{Z}$,

$0 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqq n-1$ である．よって X は、コインを投げたときに、いつ表が出たのかを

表す．このとき、X の分布 μ_X は、

$$\mu_X(\{0\}) = (1-\xi)^n, \quad \mu_X\left(\left\{\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}\right\}\right) = \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

により与えられる．

μ_X の期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求める．

$$E[X] = \sum_{m=0}^{2^n - 1} m \, \mu_X(\{m\})$$

$$= \underline{\sum_{\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} \in \Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}\right)} \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} {}_{n-1}C_{k-1}} \, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2^n - 1) \frac{k}{n} {}_nC_k \, \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \frac{2^n - 1}{n} n\xi$$

$$= (2^n - 1)\xi .$$

Ω

ω_{13}

$2^{1-1} + 2^{3-1} = 1 + 4 = 5.$

ある k に対し、$i_1, i_2, \cdots, i_k$ が定まる

$1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_k \leqq n.$ $r.$ $2^{i_\alpha - 1}.$

${}_nC_k$ 通りの $\{i_1, \cdots, i_k\}$ のえらび方．

$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} 2^{r-1}.$

$(2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k}).$

$2^{i_1} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$

$2^0 + 2^1 + 2^2$ $(k=3.$

$\cancel{2^0} + 2^1 + 2^3$

$\vdots$ ${}_{k-1}C$

$2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n.$

${}_{n-1}C_{k-1}.$

ex. $k = 3.$ $(i_1, i_2, i_3).$

$2^0 + 2^1 + 2^2$

$2^0 + 2^1 + 2^3$

$\vdots$

$2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n.$

2^0 が何回でてくるか？ $\Rightarrow$ ${}_{n-1}C_{k-1}$

0〜n−1のうち 0を除く n−1コ．

0はきまってるから それ以外の $k-1$ コを きめる．

また、

$$E[X^2] = \sum_{m=0}^{2^n - 1} m^2 \mu_X(\{m\})$$

$$= \sum_{\omega_{i_1, \cdots, i_k} \in \Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} 2^{i_\alpha - 1}\right)^2 \xi^k (1-\xi)^{n-k}$$

$$= \sum_{w_{i_1},\dots,i_k\in\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} 4^{i_\alpha-1} + 2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\substack{\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{k} 2^{i_\alpha+i_\beta-2}\right) \xi^k(1-\xi)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} 4^{r-1}\,{}_{n-1}C_{k-1}\,\xi^k(1-\xi)^{n-k}$$

$$+ 2\sum_{k=2}^{n}\sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n} 2^{r+s-2}\,{}_{n-2}C_{k-2}\,\xi^k(1-\xi)^{n-k}.$$

ここで、

$$\left(\sum_{r=1}^{n} 2^{r-1}\right)^2 = \sum_{r=1}^{n} 4^{r-1} + 2\sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n} 2^{r+s-2}$$ より

$$(2^n-1)^2 = \left(\frac{4^n-1}{4-1}\right) + 2\sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n} 2^{r+s-2}$$

$$\therefore \sum_{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}^{n} 2^{r+s-2} = \frac{4^n-3\cdot 2^n+2}{3}$$

したがって、

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} \frac{4^n-1}{3}\cdot\frac{k}{n}\,{}_nC_k\,\xi^k(1-\xi)^{n-k}$$

$$+ 2\sum_{k=2}^{n} \frac{4^n-3\cdot 2^n+2}{3}\cdot\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,{}_nC_k\,\xi^k(1-\xi)^{n-k}$$

$$= \frac{4^n-1}{3n}\cdot n\xi + 2\cdot\frac{4^n-3\cdot 2^n+2}{3n(n-1)}\underbrace{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k\,\xi^k(1-\xi)^{n-k}}_{n(n-1)\xi^2 \quad (1.88\text{より})}$$

$$= \frac{2}{3}(4^n-3\cdot 2^n+2)\xi^2 + \frac{4^n-1}{3}\xi$$

よ.

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{4^n-1}{3}\xi(1-\xi).$$ 口.