2.3 マルコフはめ込み

§2.3では、ex1.10のΩ_n上の統計的モデルS_nに境界を付け加えたものを考え、§1.4で述べた十分統計量の概念を用いて、マルコフはめ込みとよばれるものを定める。

$n \in \mathbb{N}$に対して、

$$\Omega_n = \{0, 1, 2, \cdots, n\},$$

$$\bar{\Xi}_n = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leqq 1 \right\}$$

とおく。

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \bar{\Xi}_n$に対して、

$$p(0; \xi) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad p(i; \xi) = \xi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \cdots (2.60)$$

とおくと、$p(\cdot; \xi)$は確率関数を定める。そこで、Ω_n上のn次元統計的モデル$\bar{S}_n$を

$$\bar{S}_n = \{ p(\cdot; \xi) \mid \xi \in \bar{\Xi}_n \} \quad \cdots (2.61)$$

により定める。

ex1.10では、定義1.3にしたがい、統計的モデルS_nの元である確率関数のとりうる値は常に正であるとしていた。すなわち

$$\Xi_n = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n > 0, \sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1 \right\} \quad \cdots (2.62)$$

とおき、(2.60)を用いて、

$$S_n = \{ p(\cdot; \xi) \mid \xi \in \Xi_n \}$$

と定めていた。これに対して、$\bar{S}_n$は0の値をとる確率関数も含む統計的モデルである。
とくに、$\Xi_n \subset \bar{\Xi}_n$, $S_n \subset \bar{S}_n$である。Ξ_n, S_nをそれぞれ$\bar{\Xi}_n$, $\bar{S}_n$の内部(interior)という。

また、

$$\partial \bar{\Xi}_n = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \bar{\Xi}_n \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある } i = 1, 2, \cdots, n \text{ に対して、} \\ \xi_i = 0, \text{ または } \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1 \end{array} \right\},$$

$$\partial \bar{S}_n = \{ p(\cdot; \xi) \mid \xi \in \partial \bar{\Xi}_n \}$$

とおくと、

$$\bar{\Xi}_n = \Xi_n \cup \partial\bar{\Xi}_n, \quad \Xi_n \cap \partial\bar{\Xi}_n = \phi, \quad \bar{S}_n = S_n \cup \partial\bar{S}_n, \quad S_n \cap \partial\bar{S}_n = \phi$$

である. $\partial\bar{\Xi}_n$, $\partial\bar{S}_n$ をそれぞれ $\bar{\Xi}_n$, $\bar{S}_n$ の境界(boundray)という.

さて、$m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ とし、$\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を $\Phi(\bar{\Xi}_m) \subset \bar{\Xi}_n$ となるはめ込みとする.
このとき、Φ は $\bar{\Xi}_m$ から $\bar{\Xi}_n$ への写像 $\Phi : \bar{\Xi}_m \to \bar{\Xi}_n$ を定める. この写像 $\Phi : \bar{\Xi}_m \to \bar{\Xi}_n$ を $\bar{\Xi}_m$ から $\bar{\Xi}_n$ へのはめ込みという. また、点 $\xi \in \bar{\Xi}_m$, $\Phi(\xi) \in \bar{\Xi}_n$ にそれぞれ対応する $\bar{S}_m$, $\bar{S}_n$ の元を考えることにより、Φ は $\bar{S}_m$ から $\bar{S}_n$ への写像とみなすことができる.
そこで、Ω_n 上の m次元統計的モデル $\Phi(\bar{S}_m)$ を

$$\Phi(\bar{S}_m) = \{ p(\cdot\,; \Phi(\xi)) \mid \xi \in \bar{\Xi}_m \}$$

により定める.

$\left(\bar{S}_m = \{ p(\cdot\,; \xi) \mid \xi \in \bar{\Xi}_m \}. \right)$

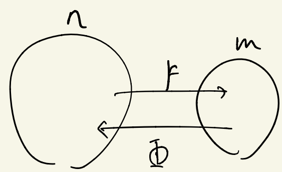
Fは Φと逆向きに定める.

§1.4 にならい、$\Phi(\bar{S}_m)$ に関する十分統計量について定める. $F : \Omega_n \to \Omega_m$ を全射とする. このとき、

$$q(j\,; \Phi(\xi)) = \sum_{i \in F^{-1}(\{j\})} p(i\,; \Phi(\xi)) \quad (j \in \Omega_m) \quad \cdots (268)$$

とおくと、命題1.2と同様に、$q(\cdot\,; \Phi(\xi))$ は確率関数を定める. よって、Ω_m上の m次元統計的モデル $(\Phi(\bar{S}_m))_F$ を

$$(\Phi(\bar{S}_m))_F = \{ q(\cdot\,; \Phi(\xi)) \mid \xi \in \bar{\Xi}_m \} \quad \cdots (269)$$



により定めることができる. また、$i \in \Omega_n$ が $q(F(i)\,; \Phi(\xi))$ をみたすならば、(268) より、$p(i\,; \Phi(\xi)) = 0$ である. ($\because$ Fが全射より)
そこで、$p(i\,; \Phi(\xi)) > 0$ となる $i \in \Omega_n$ に対して、

$$r(i\,; \Phi(\xi)) = \frac{p(i\,; \Phi(\xi))}{q(F(i)\,; \Phi(\xi))} \quad (\xi \in \bar{\Xi}_m)$$

とおく. $r(\cdot\,; \Phi(\xi))$ が ξ に依存しないとき、F を $\Phi(\bar{S}_m)$ に関する十分統計量という.
さらに、次のように定める.

定義 2.2

$m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqq n$ とし、$\Phi : \Xi_m \to \tilde{\Xi}_n$ をはめ込みとする. $\Phi(\bar{S}_m)$ に関するある十分統計量 $F : \Omega_n \to \Omega_m$ が存在するとき、Φ をマルコフはめ込み (Markov immersion) という.

(
- $\Phi : \Xi_m \to \tilde{\Xi}_n$: はめ込み

  $\rightsquigarrow$ $p(\cdot\,; \Phi(\xi)) \in \Phi(\bar{S}_m)$ が定まる.
- $F : \Omega_n \to \Omega_m$: 全射

  $\rightsquigarrow$ $q(\cdot\,; \Phi(\xi)) \in (\Phi(\bar{S}_m))_F$ が定まる.

Φ: マルコフはめ込み $\Leftrightarrow$ $\dfrac{p(\cdot\,; \Phi(\xi))}{q(F(\cdot); \Phi(\xi))}$: ξ に依存しない.
)

ex 2.6 (マルコフはめ込み Φ_n)

$F_n : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ を全単射とし、写像 $\Phi_n : \Xi_n \to \Xi_n$ を

$$\Phi_n(\xi) = (\xi_{F_n^{-1}(1)}, \xi_{F_n^{-1}(2)}, \cdots, \xi_{F_n^{-1}(n)}) \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \Xi_n)$$

$i = F_n^{-1}(j)$
$j = F_n(i)$

により定める. このとき、例 2.3 より. Φ_n ははめ込みとなる.

(
$$J_{\Phi_n}(\xi) = \left(\frac{\partial \Phi_{nj}}{\partial \xi_i}(\xi)\right)_{n \times n} = \left(\frac{\partial \xi_{F_n^{-1}(j)}}{\partial \xi_i}(\xi)\right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} e_{F_n(1)} \\ \vdots \\ e_{F_n(n)} \end{pmatrix}$$
より $\operatorname{rank} J_{\Phi_n}(\xi) = n$.
($\because$ F_n は全単射)
)

また、$\Phi_n(\bar{S}_n) = \{ p(\cdot\,; \Phi_n(\xi)) \mid \xi \in \Xi_n \}$ である.

ここで、全射 $F : \Omega_n \to \Omega_n$ を

$$F(0) = 0, \quad F(i) = F_n(i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

により定める. このとき. ex 1.17 より. F は $\Phi_n(\bar{S}_n)$ に関する十分統計量となる. よって、Φ_n はマルコフはめ込みである.

(
$$q(0; \Phi_n(\xi)) = \sum_{i \in F^{-1}(\{0\})} p(i; \Phi_n(\xi)) = p(0; \Phi_n(\xi)),$$

$$q(j; \Phi_n(\xi)) = \sum_{i \in F^{-1}(\{j\})} p(i; \Phi_n(\xi)) = p(F^{-1}(j); \Phi_n(\xi)) = p(F_n^{-1}(j); \Phi_n(\xi))$$
)

(よって $r(0;\Phi_n(\xi)) = \dfrac{p(0;\Phi_n(\xi))}{g(F(0);\Phi_n(\xi))} = \dfrac{p(0;\Phi_n(\xi))}{g(0;\Phi_n(\xi))} = 1.$

$$r(i;\Phi_n(\xi)) = \frac{p(i;\Phi_n(\xi))}{g(F(i);\Phi_n(\xi))} = \frac{p(i;\Phi_n(\xi))}{p(F^{-1}(F(i));\Phi_n(\xi))} = \frac{p(i;\Phi_n(\xi))}{p(i;\Phi_n(\xi))} = 1.$$)

である. よって $r(\cdot;\xi)$ は ξ に依存しないので, F は $\Phi_n(\mathcal{S}_n)$ に関する十分統計量である.

よって Φ_n はマルコフはめ込みである.

ex2.7 (マルコフはめ込み $\Phi_{m,n}$)

$m,n \in \mathbb{N}$ とし、写像 $\Phi_{m,n} : \Xi_n \to \Xi_{mn}$ を

$$\Phi_{m,n}(\xi) = \Big(\underbrace{\frac{\xi_1}{m},\frac{\xi_1}{m},\dots,\frac{\xi_1}{m}}_{m\text{コ}},\ \underbrace{\frac{\xi_2}{m},\frac{\xi_2}{m},\dots,\frac{\xi_2}{m}}_{m\text{コ}},\ \dots,\ \underbrace{\frac{\xi_n}{m},\frac{\xi_n}{m},\dots,\frac{\xi_n}{m}}_{m\text{コ}}\Big) \quad (\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \in \Xi_n)$$

により定める. このとき. ex2.4より. $\Phi_{m,n}$ ははめ込みとなる. また.

Jacobian の rank が n. ⇒ 単射.

$$\Phi_{m,n}(\mathcal{S}_n) = \{ p(\cdot\,;\Phi_{m,n}(\xi)) \mid \xi \in \Xi_n \}$$

である. ここで、全射 $F_{m,n} : \Omega_{mn} \to \Omega_n$ を

$$F_{m,n}(0) = 0, \quad F_{m,n}(i) = j \qquad (i = (j-1)m+1,\dots,jm;\ j = 1,\dots,n)$$

により定める. このとき、ex1.18 より、$F_{m,n}$ は $\Phi_{m,n}(\mathcal{S}_n)$ に関する十分統計量となる.

よって. $\Phi_{m,n}$ はマルコフはめ込みである.

$F_{m,n}$ が存在するため.

ex2.8 (マルコフはめ込み $\Phi_{\mathbf{m}}$)

$n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ とし,

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

とおく. また. 写像 $\Phi_{\mathbf{m}} : \Xi_n \to \Xi_m$ を

$$\Phi_{\mathbf{m}}(\xi) = \Big(\underbrace{\frac{\xi_1}{m_1},\dots,\frac{\xi_1}{m_1}}_{m_1\text{コ}},\ \dots,\ \underbrace{\frac{\xi_n}{m_n},\dots,\frac{\xi_n}{m_n}}_{m_n\text{コ}}\Big) \quad (\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \Xi_n)$$

により定める. このとき. ex2.5 より. $\Phi_{\mathbf{m}}$ ははめ込みとなる. また、

$$\Phi_m(\overline{S_n}) = \{ p(\cdot\,; \Phi_m(\xi)) \mid \xi \in \Xi_n \} \quad \text{である.}$$

ここで、全射 $F_m : \Omega_m \to \Omega_n$ を

$$F_m(0) = 0, \quad F_m(i) = 1 \quad (i = 1, \cdots, m_1),$$

$$F_m(i) = j \quad (i = m_1 + \cdots + m_{j-1} + 1, \cdots, m_1 + \cdots + m_j \,;\, j = 2, \cdots, n)$$

により定める. このとき. ex1.19より F_m は $\Phi_m(\overline{S_n})$ に関する十分統計量となる.

よって Φ_m はマルコフはめ込みである.

§24や§26で述べるチェンツォフの定理の証明では. マルコフはめ込みが境界に値をとる次の例を用いる.

<u>ex29 (マルコフはめ込み Φ_n)</u>

$n \in \mathbb{N}$ とし、写像 $\Phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$\Phi_n(\xi) = \left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n)$$

により定める. このとき、

$$\Phi_n(\Xi_n) \subset \partial \Xi_{n+1} \subset \overline{\Xi_{n+1}} \quad \text{である.}$$

$$(\because \xi_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \text{ より})$$

また. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \Xi_n$ とすると.

$$J_{\Phi_n}(\xi) = \left(\frac{\partial \Phi_{nj}}{\partial \xi_i}(\xi) \right)_{n \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって. $\quad \operatorname{rank} J_{\Phi_n}(\xi) = n$

となるので. Φ_n ははめ込み $\Phi_n : \Xi_n \to \overline{\Xi_{n+1}}$ を定める. さらに、

$$\Phi_n(\overline{S_n}) = \{ p(\cdot\,; \Phi_n(\xi)) \mid \xi \in \Xi_n \} \quad \text{である.}$$

とくに、$p(0; \Phi_n(\xi)) = 0$ である. $\left(\because p(0; \Phi_n(\xi)) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \Phi_n(\xi)_j = 0 \right)$.

ここで、全射 $\bar{F}_n : \Omega_{n+1} \to \Omega_n$ を

$$\bar{F}_n(0) = \bar{F}_n(n+1) = 0, \quad \bar{F}_n(i) = i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

により定める。このとき、(2.68) より、

$$q(0; \bar{\Phi}_n(\xi)) = p(0; \bar{\Phi}_n(\xi)) + p(n+1; \bar{\Phi}_n(\xi)) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

である。また、$i = 1, 2, \cdots, n$ とすると、

$$q(i; \bar{\Phi}_n(\xi)) = p(i; \bar{\Phi}_n(\xi)) = \xi_i \qquad \text{である。}$$

さらに、(2.70), (2.90) より $i = 1, 2, \cdots, n$ とすると $\xi_i > 0$ のとき、

$$r(i; \bar{\Phi}_n(\xi)) = \frac{p(i; \bar{\Phi}_n(\xi))}{q(\bar{F}_n(i); \bar{\Phi}_n(\xi))} = \frac{p(i; \bar{\Phi}_n(\xi))}{q(i; \bar{\Phi}_n(\xi))} = 1.$$

である。また、(2.89) より $\sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1$ のとき、 $\bar{\Phi}_n : \bar{\Xi}_n \to \bar{\Xi}_{n+1}$ より $\sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1$ or $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$.

$$r(n+1; \bar{\Phi}_n(\xi)) = \frac{p(n+1; \bar{\Phi}(\xi))}{q(\bar{F}_n(n+1); \bar{\Phi}_n(\xi))} = \frac{p(n+1; \bar{\Phi}(\xi))}{q(0; \bar{\Phi}_n(\xi))} = 1.$$

である。したがって、$\bar{F}_n$ は $\bar{\Phi}_n(\bar{\Xi}_n)$ に関する十分統計量である。以上より $\bar{\Phi}_n$ はマルコフはめ込みである。