

Лабораторная работа №4
5 вариант

Яхин Ш.И.
331 гр.

Задание 1

$$X = \{1, 2, 3\}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, S = \langle f, g \rangle = ?$$

$$ff = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$gg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^2g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

очевидно:

Все ост., описан-ся на g будут иметь результат $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$g^2f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$gf^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$S = \langle f, g \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Задание 2

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, k = ?, m = ?$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a^3 = a^2 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a^4 = a^3 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Ответ: индекс $k = 1$, период $m = 4 - 1 = 3$

Задание 3

$$S = \langle x, y : xy = yx, x^3 = x^2, y^2 = x \rangle$$

Шаг 1 (длина 1): x и y не экв. между собой \Rightarrow вносим их в сист. предст.

Шаг 2 (длина 2): $x^2, xy = yx, yx, y^2 = x$. Из этих слов только слова x^2 и yx не экв. отн. контр. \in другим ранее выделенным словам \Rightarrow вносим x^2 и yx в сист. представителей.

Шаг 3 (длина 3): $x^3 = x^2, x^2 y = xxy = xyx = yx^2, yx^2, yxy = y^2 x = x^2$

Из этих слов только слово yx^2 не экв. отн. контр. \in другим ранее выделенным словам \Rightarrow вносим yx^2 в сист. представителей.

Шаг 4 (длина 4): $yx^3 = yx^2, yx^2 y = yxyx = yyyx = x^3 = x^2$. Все эти слова экв. отн. контр. \in ранее выделенным словам.

Значит, $S = \{x, y, x^2, yx, yx^2\}$ - полная система представителей классов контр. \in .

Ответ: $S = \{x, y, x^2, yx, yx^2\}$