МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Комбинаторная теория полугрупп

ОТЧЁТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ПРИКЛАДНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА»

студента 3 курса 331 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Яхина Шамиля Илдусовича

Преподаватель
профессор, д.ф.-м.н. ___________ В. А. Молчанов
подпись, дата

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Цель работы — изучение основных понятий теории полугрупп.

1 Теория

1.1 Понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества

Полугруппа – это алгебра $S = (S, \cdot)$ с одной ассоциативной бинарной операцией $\cdot$, т.е. выполняется $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in S$.

Если полугрупповая операция называется умножением, то полугруппу называют мультипликативной.

<u>Лемма 1</u>. Для любого непустого множества X множество всех бинарных отношений на множестве X с операцией композиции является полугруппой. Такая полугруппа называется симметрической полугруппой бинарных отношений на множестве X и обозначается символом $\beta(X)$.

В случае конечного n - элементного множества $S = s_1, s_2, ..., s_n$ операция умножения на S задаётся таблицей Кэли размерности $n \times n$, строки и столбцы которой помечены элементами множества S и в которой на пересечении i–ой строки и j–го столбца стоит произведение $s_i \cdot s_j$ элементов s_i, s_j.

$\cdot$	s_1	s_2	$\ldots$	s_n
s_1	$s_1 \cdot s_1$	$s_1 \cdot s_2$	$\ldots$	$s_1 \cdot s_n$
s_2	$s_2 \cdot s_1$	$s_2 \cdot s_2$	$\ldots$	$s_2 \cdot s_n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
s_n	$s_n \cdot s_1$	$s_n \cdot s_2$	$\ldots$	$s_n \cdot s_n$

Рисунок 1 – Таблица Кэли операции умножения

Классификация элементов полугруппы

Элемент s полугруппы S называется:

1. нулевым, если $s \cdot x = x \cdot s = s$ для всех $x \in S$ (при мультипликативной записи операции полугруппы такой элемент обозначается символом 0 и называется нулем);
2. нейтральным (единичным), если $s \cdot x = x \cdot s = x$ для всех $x \in S$ (при мультипликативной записи операции полугруппы такой элемент обозначается

символом 1 и называется единицей);

3. обратимым, если для некоторого $x \in S$ выполняется свойство: $x \cdot s = s \cdot x = 1$ (такой элемент x называется обратным для элемента s и обозначается символом s^{-1});
4. идемпотентом, если $s \cdot s = s$, т.е. $s^2 = s$.

Если в 1) выполняется лишь равенство $x \cdot s = s$ для всех $x \in S$, то s называется правым нулем. Аналогично определяется левый нуль и односторонние единицы.

Подмножество X полугруппы S называется подполугруппой, если X устойчиво относительно операции умножения, т.е. для любых $x, y \in X$ выполняется свойство: $x \cdot y \in X$.

В силу общего свойства подалгебр пересечение любого семейства $X\_i(i \in I)$ подполугрупп полугруппы S является подполугруппой S и, значит, множество $Sub(S)$ всех подполугрупп полугруппы S является системой замыканий. Следовательно, для любого подмножества X полугруппы S существует наименьшая подполугруппа S, содержащая множество X. Такая полугруппа обозначается символом $< X >$ и называется подполугруппой S, порождённой множеством X. При этом множество X называется также порождающим множеством подполугруппы $< X >$.

В частности, если $< X >= S$, то X называется порождающим множеством полугруппы S и говорят, что множество X порождает полугруппу S.

Легко видеть, что полугруппа $< X >$ состоит из всевозможных конечных произведений $x_1 \cdot ... \cdot x_n$ элементов $x_1, ..., x_n \in X$, т.е. выполняется равенство: $< X >= \{x_1 \cdot ... \cdot x_n : n \in N \text{ и } x_1, ..., x_n \in X\}$.

1.2 Понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений

Полугруппа с единичным элементом называется моноидом. Другими словами, моноид $M = (M, \cdot, 1)$ – это алгебра с ассоциативной бинарной операцией и выделенным единичным элементом 1. При этом полугруппа $(M, \cdot)$ называется полугруппой моноида $M = (M, \cdot, 1)$.

Для любой полугруппы $S = (S, \cdot)$ канонически определяется моноид $M(S)$ по следующему правилу: $M(S) = S \cup 1$ для некоторого элемента $1 \notin S$ и умножение в $M(S)$ на новый элемент 1 определяется по формуле: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Полугруппа моноида $M(S)$ обозначается символом S^1 и называется полугруппой с внешне присоединенной единицей.

Моноид называется группой, если в нем все элементы обратимы.

Лемма. Для любого моноида M множество всех обратимых элементов M^* с операцией умножения моноида является группой, т.е. для любых $a, b \in M^*$ выполняется условие $a \cdot b \in M^*$

Подгруппой полугруппы S назовем подполугруппу T из S, являющуюся группой относительно бинарной операции, определенной в S. Это эквивалентно тому, что T есть подполугруппа из S, в которой для любых $a, b \in T$ существуют $x, y \in T$ такие, что $ax = b$ и $ya = b$. Отсюда легко получить, что подмножество T полугруппы S является подгруппой тогда и только тогда, когда $aT = Ta = T$ для любого $a \in T$.

Единица e подгруппа T полугруппы S является идемпотентом, но не обязательно единицей полугруппы S.

Пусть A – произвольное множество, называемое алфавитом. Элементы $a \in A$ называются буквами. Словом над алфавитом A называется конечная последовательность букв $a_1, ..., a_n$ алфавита A.

Обозначим символом A^+ множество всех непустых слов над алфавитом и символом A^* - множество слов $A^* = A^+ \cup \wedge$.

Теорема (О представлении полугрупп словами). Любая полугруппа S является фактор-полугруппой некоторой полугруппы слов A^+, т.е. $S \cong A/\epsilon$ для некоторой конгруэнции ϵ полугруппы A^+.

Таким образом, для любой конечной полугруппы S найдется такой конечный алфавит A, что для некоторого отображения $\phi : A \to S$ выполняется равенство $< \phi(A) \geq S$ и, значит, $S \cong A^+/kerf$. В этом случае множество A называется множеством порождающих символов полугруппы S (относительно отображения $\phi : A \to S$).

Если при этом для слов $w_1, w_2 \in A^+$ выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, т.е. $w_1 \equiv w_2(ker\phi)$, то говорят, что на S выполняется соотношение $w_1 = w_2$ (относительно отображения $\phi : A \to S$).

Очевидно, что в общем случае множество таких соотношений $w_1 = w_2$ для всех пар $(w_1, w_2) \in ker\phi$ будет бесконечным и не представляется возможности эффективно описать полугруппу S в виде полугруппы классов конгруэнции $ker\phi$. Однако в некоторых случаях можно выбрать такое сравнительно простое подмножество $\rho \subset ker\phi$, которое однозначно определяет конгруэнцию $ker\phi$

как наименьшую конгруэнцию полугруппы A^+, содержащую отношение ρ, т.е. $ker\rho\phi = f_{con}(\rho) = f_{eq}(f_{reg}(\rho))$.

Так как в случае $(w_1, w_2) \in \rho$ по-прежнему выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, то будем писать $w_1 = w_2$ и называть такие выражения определяющими соотношениями.

2 Результаты работы

2.1 Алгоритм построения подполугрупп по таблице Кэли

Вход: Полугруппа S с таблицей Кэли и подмножество $X \subset S$.

Выход: Подполугруппа $< X >\subset S$.

1. Положим $i = 0, X_0 = X$;
2. Для X_i вычислим $\overline{X_l} = x \cdot y : x \in X_i \wedge y \in X$ и положим $X_{i+1} = X_i \cup \overline{X_l}$.
3. Вычисляем $< X >= \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$.

Временная сложность алгоритма построения подполугрупп по таблице Кэли = $O(n^2 * m)$, где m - количество элементов в подмножестве X, а n - это размер множества для полугруппы S.

2.2 Алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству

Вход: Конечное множество множество X бинарных отношений (булевых матриц).

Выход: Полугруппа $< X >$, таблица Кэли операции умножения матриц из $< X >$.

1. Пока не будет добавлена ни одна новая матрица за весь цикл, выполняется:
   а) Запускается цикл for с g_now от 0 до размера списка матриц res_all_matr, который обходит все матрицы из res_all_matr и в нем запускается еще один цикл for с g от 0 до размера списка матриц res_all_matr.
      i. Создается матрица с нулевыми элементами matrix_res
      ii. Если g_now[i][k] == 1 и g[k][j] == 1, то в результирующей матрице matrix_res[i][j] присваивается 1.
      iii. Если полученной матрицы matrix_res еще нет в res_all_matr, то она вносится туда.
2. Возвращается res_all_matr и таблица Кэли операции умножения матриц из res_all_matr.

Временная сложность алгоритма построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству = $O(m^2 * n^3 * p)$, где n - это размерность матриц, m - количество матриц в res_all_matr, а p - число раз, когда в цикле находилась хотя бы одна новая матрица

2.3 Алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям

Вход: Конечное множество символов A и конечное множество R определяющих соотношений.

Выход: Полугруппа $< A|R >$, таблица Кэли операции умножения слов из $< A|R >$.

1. Создается полная система представителей $< A|R >$, т.е. список, куда будут заноситься слова, эквивалентные относительно конгруэнции ϵ ранее занесенным туда словам.
2. Все слова из конечного множества символов A вносятся в $< A|R >$.
3. Пока все слова, полученные в цикле не будут эквивалентны относительно конгруэнции ϵ словам из $< A|R >$, выполняется:
   а) Рассматриваются все слова w, полученные умножением справа элементов конечного множества символов A к внесенным в $< A|R >$ на предыдущем шаге словам. К каждому из полученных слов применяются преобразования R до того момента, когда не подойдет ни одно из определяющих соотношений.
   б) Если полученное на шаге 3 слово не эквивалентно относительно конгруэнции ϵ словам из $< A|R >$, то это слово кладется в $< A|R >$.
4. Возвращаются $< A|R >$ и таблица Кэли операции умножения слов из $< A|R >$.

Временная сложность алгоритма построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям = $O(m^2 * n^2 * p)$, где m - размер конечного множества R, n - длина слова, а p - максимальная длина слова.

3 Код программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <math.h>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <iomanip>

using namespace std;

int CharInt(int N, char c, vector <char> mnojestvo) {
for (int i = 0; i < N; i++)
{
if (mnojestvo[i] == c)
return i;
}
}

bool proverka_Ass(int N, char** keli, vector <char> mnojestvo) {
bool prov = true;
for (int x = 0; x < N; x++)
{
for (int y = 0; y < N; y++)
{
for (int z = 0; z < N; z++)
{
if (keli[x][CharInt(N, keli[y][z], mnojestvo)]
!= keli[CharInt(N, keli[x][y], mnojestvo)][z])
prov = false;
}
}
}
return prov;
```

```
}

bool true_elems(vector <char> X_i, vector <char> X_i_next) {
if (X_i.size() != X_i_next.size())
return true;
else {
for (int j = 0; j < X_i.size(); j++) {
if (X_i[j] != X_i_next[j])
return true;
}
}
return false;
}

bool unique_elem(vector <char> ch, char elem) {
for (int j = 0; j < ch.size(); j++) {
if (elem == ch[j])
return false;
}
return true;
}

void postr_podpol(int N, vector <char> mnojestvo, int M,
vector <char> X, char** keli) {
int i = 0;
vector <char> X_i;
vector <char> X_i_next;
vector <char> X_dop;
vector <char> X_res;
for (int j = 0; j < M; j++) {
X_i.push_back(X[j]);
X_res.push_back(X[j]);
X_i_next.push_back(X[j]);
}
```

```
for (int j = 0; j < X_i.size(); j++) {
for (int k = 0; k < X_i.size(); k++) {
char x_y = keli[CharInt(N, X_i[j], mnojestvo)]
[CharInt(N, X_i[k], mnojestvo)];
if (unique_elem(X_dop, x_y)) {
X_dop.push_back(x_y);
}
}
}
for (int j = 0; j < X_dop.size(); j++) {
if (unique_elem(X_res, X_dop[j])) {
X_res.push_back(X_dop[j]);
}
if (unique_elem(X_i_next, X_dop[j])) {
X_i_next.push_back(X_dop[j]);
}
}

int sch = 1;
while (true_elems(X_i, X_i_next) || sch == 1) {
sch = 0;
X_i.clear();
for (int j = 0; j < X_i_next.size(); j++) {
X_i.push_back(X_i_next[j]);
}
X_dop.clear();
for (int j = 0; j < X_i.size(); j++) {
for (int k = 0; k < X_i.size(); k++) {
int x_y = keli[CharInt(N, X_i[j], mnojestvo)]
[CharInt(N, X_i[k], mnojestvo)];
if (unique_elem(X_dop, x_y)) {
X_dop.push_back(x_y);
}
}
```

```
}
for (int j = 0; j < X_dop.size(); j++) {
if (unique_elem(X_i_next, X_dop[j])) {
X_i_next.push_back(X_dop[j]);
}
}
for (int j = 0; j < X_i_next.size(); j++) {
if (unique_elem(X_res, X_i_next[j])) {
X_res.push_back(X_i_next[j]);
}
}
sort(X_res.begin(), X_res.end());
if (X_res.size() == N) {
for (int j = 0; j < X_res.size(); j++) {
cout << X_res[j] << ", ";
}
return;
}
}
for (int j = 0; j < X_res.size(); j++) {
cout << X_res[j] << ", ";
}
return;
}

void proverka_1(int N, vector <char> mnojestvo, int M,
vector <char> podmnojestvo, char** keli) {

cout << endl;
if (proverka_Ass(N, keli, mnojestvo) == true) {
postr_podpol(N, mnojestvo, M, podmnojestvo, keli);
}
else
cout << "Не ассоциативна" << endl;
```

```
}

bool unique_matr(vector < vector <int> >matrix_res,
vector < vector < vector <int> > > res_all_matr) {
for (int i = 0; i < res_all_matr.size(); i++)
{
if (matrix_res == res_all_matr[i])
return false;
}
return true;
}
int mult_matr(vector < vector <int> > matrix1,
vector < vector <int> > matrix2, int N,
vector < vector < vector <int> > > res_all_matr) {
vector < vector <int> >  matrix_res;
vector <int> s(N, 0);
for (int jh = 0; jh < N; jh++)
{
matrix_res.push_back(s);
}
for (int i = 0; i < N; i++)
{
for (int j = 0; j < N; j++)
{
for (int k = 0; k < N; k++) {
if (matrix1[i][k] == 1 && matrix2[k][j] == 1) {
matrix_res[i][j] = 1;
break;
}
}
}
}
for (int g = 0; g < res_all_matr.size(); g++)
```

```
{
if (matrix_res == res_all_matr[g])
return g + 1;
//cout << setw(6) << "№" << g + 1 << " ";
}
}
void second_bin(int N, vector < vector < vector <int> > > res_all_matr,
int matr_count) {
int razmer = res_all_matr.size();
int dps = 0;
while (res_all_matr.size() != razmer || dps == 0) {
razmer = res_all_matr.size();
dps = 1;
for (int g_now = 0; g_now < razmer; g_now++)
{
for (int g = 0; g < razmer; g++)
{
vector < vector <int> >  matrix_res;
vector <int> s(N, 0);
for (int jh = 0; jh < N; jh++)
{
matrix_res.push_back(s);
}
for (int i = 0; i < N; i++)
{
for (int j = 0; j < N; j++)
{
for (int k = 0; k < N; k++) {
if (res_all_matr[g_now][i][k] == 1
&& res_all_matr[g][k][j] == 1) {
matrix_res[i][j] = 1;
break;
}
}
```

```
}
}
if (unique_matr(matrix_res, res_all_matr)) {
res_all_matr.push_back(matrix_res);
}
}
}
}
cout << "Получаем: " << endl;
for (int g = 0; g < res_all_matr.size(); g++)
{
cout << "Матрица " << g + 1 << endl;
for (int i = 0; i < N; i++) {
for (int j = 0; j < N; j++) {
cout << res_all_matr[g][i][j] << " ";
}
cout << endl;
}
cout << endl;
cout << endl;
}

cout << "Таблица Кэли: " << endl;
cout << setw(6) << " " << " ";
for (int i = 0; i < res_all_matr.size(); i++) {
cout << setw(6) << i + 1;
}
int s_d = 0;
cout << endl;
for (int g = 0; g < res_all_matr.size(); g++)
{
cout << setw(6) << g + 1 << " ";
for (int f = 0; f < res_all_matr.size(); f++)
{
```

```
cout << setw(6) << mult_matr(res_all_matr[g],
res_all_matr[f], N, res_all_matr);
}
cout << endl;
}
}

bool unique_word(string A_i, vector <string> s_predst) {
for (int i = 0; i < s_predst.size(); i++)
{
if (A_i == s_predst[i])
return false;
}
return true;
}

bool unique_word_on_pair(string word,
vector < pair < string, string > > relations, string& sec_pair) {
for (int i = 0; i < relations.size(); i++)
{
if (word == relations[i].first) {
sec_pair = relations[i].second;
return false;
}
}
return true;
}

vector<string> word_vector(string word)
{
vector<string> convert_word;
for (int i = 0; i < word.size(); ++i)
convert_word.push_back(word.substr(i, 1));
```

```
return(convert_word);
}

vector <string> res_keli_elems;

void find_res_word(string keli_word, vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations,
int max_w, int max_sist_pred);

bool dop_proverka(string keli_word, vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations, int max_w,
 int max_sist_pred) {
int start_size = res_keli_elems.size();
find_res_word(keli_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);

if (start_size != res_keli_elems.size()) {
if (res_keli_elems.size() == 1 ||
 res_keli_elems[res_keli_elems.size() - 1]
== res_keli_elems[res_keli_elems.size() - 2]) {
if (res_keli_elems.size() != 1) {
res_keli_elems.erase(res_keli_elems.begin() +
 res_keli_elems.size() - 1);
}
return true;
}
return false;
}
return true;
}

void find_res_word(string keli_word, vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations, int max_w, int max_sist_pr
if (!unique_word(keli_word, S)) {
//cout << keli_word << " ";
```

```
res_keli_elems.push_back(keli_word);
return;
}
else {
string rec_word;
vector<string> word_now = word_vector(keli_word);

int sch = 2;
while (sch <= max_w)
{
for (int i = word_now.size() - 1; i >= 0; --i)
{
if (sch > keli_word.size() || sch > i + 1)
break;
int j;
string f_part = "";
for (j = i; j > i - sch; --j)
f_part = word_now[j] + f_part;
string s_pair = "";
if (!unique_word_on_pair(f_part, relations, s_pair))
{
rec_word = "";
vector<string> part_ = word_vector(s_pair);

for (int k = 0; k < j + 1; ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

rec_word = rec_word + s_pair;

for (int k = i + 1; k < word_now.size(); ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

if (rec_word.size() < keli_word.size())
{
```

```
res_keli_elems.push_back(rec_word);
if (dop_proverka(rec_word, S, relations, max_w,
 max_sist_pred)) {
//cout << rec_word << " ";
return;
}
else
find_res_word(rec_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);
}
else
find_res_word(rec_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);
}
}
sch++;
}
}
}

void vivod_keli(vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations,
int max_w, int max_sist_pred) {
cout << endl;
cout << "Операция умножения таких слов определяется по следующей
таблице Кэли : " << endl;
cout << setw(6) << " " << " ";
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
cout << setw(6) << S[i] << " ";
}
cout << endl;
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
cout << setw(6) << S[i] << " ";
for (int j = 0; j < S.size(); j++)
```

```
{
string keli_word = S[i] + S[j];
find_res_word(keli_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);
cout << setw(6) << res_keli_elems[res_keli_elems.size() - 1] << " ";
res_keli_elems.clear();
}
cout << endl;
}
}

vector <string> S;

void th_alg(string& word, vector <string>& A_ofr,
int& max_w, string& new_word,
string& rec_word, vector < pair < string, string > >& relations)
{
if (!unique_word(word, A_ofr))
return;

vector<string> word_now = word_vector(word);

int sch = 2;
while (sch <= max_w)
{
for (int i = word_now.size() - 1; i >= 0; --i)
{
if (sch > word.size() || sch > i + 1)
break;
int j;
string f_part = "";
for (j = i; j > i - sch; --j)
f_part = word_now[j] + f_part;
string s_pair = "";
if (!unique_word_on_pair(f_part, relations, s_pair))
```

```
{
rec_word = "";
vector<string> part_ = word_vector(s_pair);

for (int k = 0; k < j; ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

rec_word = rec_word + s_pair;

for (int k = i + 1; k < word_now.size(); ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

if (rec_word.size() < word.size())
{
A_ofr.push_back(word);
A_ofr.push_back(rec_word);
return;
}
else if (!unique_word(rec_word, A_ofr))
return;
else {
th_alg(rec_word, A_ofr, max_w, new_word, rec_word, relations);
}
}
if (!unique_word(word, A_ofr))
return;
}
sch++;
}

if (rec_word.size() == word.size() && rec_word < word
&& unique_word(word, A_ofr) && unique_word(rec_word, A_ofr))
{
S.push_back(rec_word);
```

```
A_ofr.push_back(word);
A_ofr.push_back(rec_word);
return;
}

S.push_back(word);
A_ofr.push_back(word);
A_ofr.push_back(rec_word);
return;
}

int main()
{
setlocale(LC_ALL, "Rus");
vector <char> mnojestvo;
vector <char> podmnojestvo;
vector <string> A;
vector <string> A_ofr;
vector < vector < vector <int> > > all_matr;
vector < vector < vector <int> > > res_all_matr;
int sposob, i, j, N, M, T, matr_count, R_count, R;
int max_w = 0;
cout << "Введите, что хотите сделать: " << endl;
cout << "1 - построение подполугрупп по таблице Кэли" << endl;
cout << "2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному
порождающему множеству" << endl;
cout << "3 - построение полугруппы по порождающему множеству и
определяющим соотношениям" << endl;
cin >> sposob;

if (sposob == 1)
{

cout << "Введите размерность полугруппы: " << endl;
```

```
cin >> N;
if (N == 0) {
cout << "Ошибка";
return 0;
}
cout << "Введите множество для полугруппы S: " << endl;
char vv;
for (int i = 0; i < N; i++) {
cin >> vv;
mnojestvo.push_back(vv);
}
char** keli;
keli = new char* [N];
cout << "Таблица Кэли полугруппы S: " << endl;
for (int i = 0; i < N; i++) {
keli[i] = new char[N];
for (int j = 0; j < N; j++) {
cin >> keli[i][j];
}
}
cout << "Введите размерность подмножества: " << endl;
cin >> M;
if (M == 0) {
cout << "Ошибка";
return 0;
}
cout << "Введите подмножество X: " << endl;
char podvv;
for (int i = 0; i < M; i++) {
cin >> podvv;
podmnojestvo.push_back(podvv);
}
proverka_1(N, mnojestvo, M, podmnojestvo, keli);
}
```

```
else if (sposob == 2)
{
cout << "Введите размерность : " << endl;
cin >> N;
if (N == 0) {
cout << "Ошибка";
return 0;
}
cout << "Количество матриц : " << endl;
cin >> matr_count;
if (matr_count == 0) {
cout << "Ошибка";
return 0;
}
for (int l = 0; l < matr_count; l++)
{
cout << "Введите матрицу бинарного отношения №"
<< l + 1 << ": " << endl;
vector < vector <int> > matrix1(N);
for (int i = 0; i < N; i++) {
for (int j = 0; j < N; j++) {
int vvod_ch;
cin >> vvod_ch;
matrix1[i].push_back(vvod_ch);
}
}
res_all_matr.push_back(matrix1);
}

second_bin(N, res_all_matr, matr_count);
}
else if (sposob == 3) {
cout << "Введите количество символов в алфавите A: " << endl;
int T;
```

```
cin >> T;
cout << "Введите конечное множество символов A (алфавит): " << endl;
string vvod_A;
for (int i = 0; i < T; i++) {
cin >> vvod_A;
A.push_back(vvod_A);
S.push_back(vvod_A);
A_ofr.push_back(vvod_A);
}
cout << "Введите количество пар в определяющем соотношении R: " << endl;
int R_count;
cin >> R_count;
vector < pair < string, string > > relations;
relations.resize(R_count);
cout << "Введите определяющее соотношение R (так: R1 R2): " << endl;
for (int i = 0; i < R_count; i++) {
string vvod_R1;
string vvod_R2;
cin >> vvod_R1 >> vvod_R2;
if (vvod_R1.size() > max_w)
max_w = vvod_R1.size();
if (vvod_R2.size() > max_w)
max_w = vvod_R2.size();
if (vvod_R1.size() < vvod_R2.size())
relations.push_back(make_pair(vvod_R2, vvod_R1));
else if (vvod_R1.size() > vvod_R2.size())
relations.push_back(make_pair(vvod_R1, vvod_R2));
else
{
if (vvod_R1 < vvod_R2)
relations.push_back(make_pair(vvod_R2, vvod_R1));
else
relations.push_back(make_pair(vvod_R1, vvod_R2));
}
```

```
}
int len = 1;
vector <string>  dop_A;
dop_A = A;
string new_word;
string rec_word;
while (!dop_A.empty())
{
++len;
for (int i = 0; i < dop_A.size(); i++)
{
string word_w = dop_A[i];
for (int i = 0; i < A.size(); i++)
{
string let = A[i];
string word_w_let = word_w + let;
rec_word = "";
th_alg(word_w_let, A_ofr, max_w, new_word, rec_word, relations);
}
}
dop_A.clear();
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
if (S[i].size() == len)
dop_A.push_back(S[i]);
}
}

cout << "Полная система представителей: S = { ";
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
cout << S[i] << " ";
}
cout << " }" << endl;
```

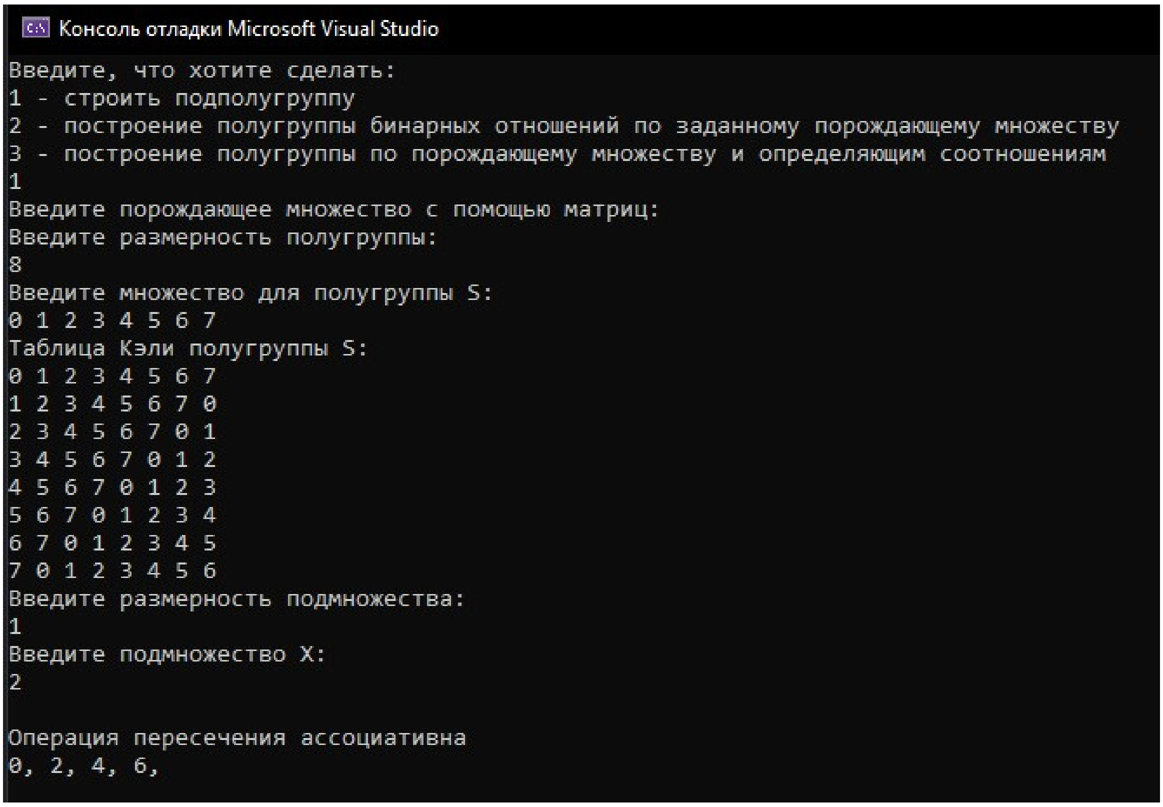
```
int max_sist_pred = 0;
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
if (S[i].size() > max_sist_pred)
max_sist_pred = S[i].size();
}
vivod_keli(S, relations, max_w, max_sist_pred);
}
else
cout << "Ошибка" << endl;

cout << endl;
}
```

4 Результаты тестирования программ

Тестирование №1:

Построение подполугрупп по таблице Кэли.



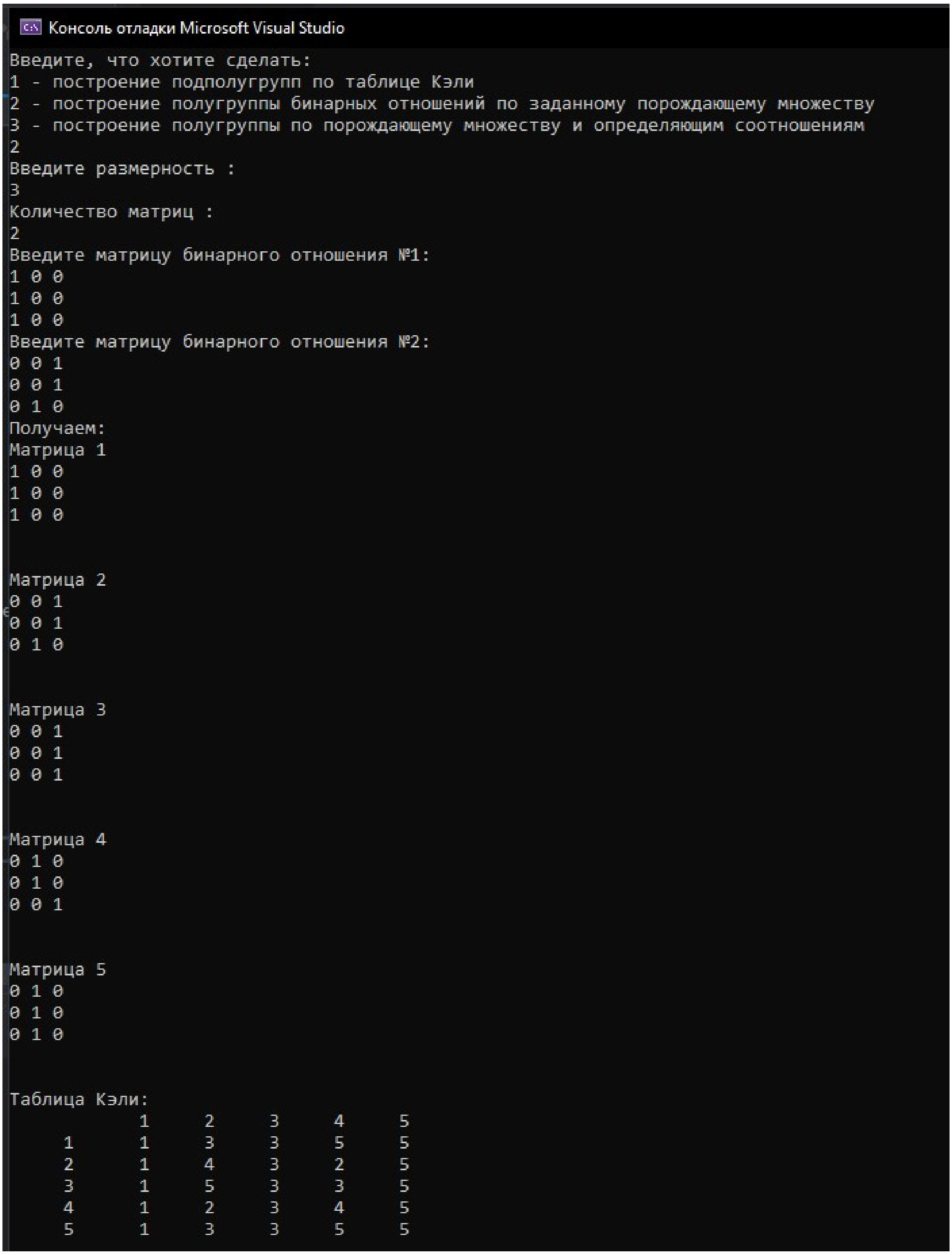
```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
Введите, что хотите сделать:
1 - строить подполугруппу
2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству
3 - построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям
1
Введите порождающее множество с помощью матриц:
Введите размерность полугруппы:
8
Введите множество для полугруппы S:
0 1 2 3 4 5 6 7
Таблица Кэли полугруппы S:
0 1 2 3 4 5 6 7
1 2 3 4 5 6 7 0
2 3 4 5 6 7 0 1
3 4 5 6 7 0 1 2
4 5 6 7 0 1 2 3
5 6 7 0 1 2 3 4
6 7 0 1 2 3 4 5
7 0 1 2 3 4 5 6
Введите размерность подмножества:
1
Введите подмножество X:
2

Операция пересечения ассоциативна
0, 2, 4, 6,
```

Рисунок 2 – Тестировние №1

Тестирование №2:

Построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству.



```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
Введите, что хотите сделать:
1 - построение подполугрупп по таблице Кэли
2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству
3 - построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям
2
Введите размерность :
3
Количество матриц :
2
Введите матрицу бинарного отношения №1:
1 0 0
1 0 0
1 0 0
Введите матрицу бинарного отношения №2:
0 0 1
0 0 1
0 1 0
Получаем:
Матрица 1
1 0 0
1 0 0
1 0 0


Матрица 2
0 0 1
0 0 1
0 1 0


Матрица 3
0 0 1
0 0 1
0 0 1


Матрица 4
0 1 0
0 1 0
0 0 1


Матрица 5
0 1 0
0 1 0
0 1 0


Таблица Кэли:
            1     2     3     4     5
     1      1     3     3     5     5
     2      1     4     3     2     5
     3      1     5     3     3     5
     4      1     2     3     4     5
     5      1     3     3     5     5
```

Рисунок 3 – Тестировние №2

Тестирование №3:

Построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям.

```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
Введите, что хотите сделать:
1 - построение подполугрупп по таблице Кэли
2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству
3 - построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям
3
Введите количество символов в алфавите А:
2
Введите конечное множество символов А (алфавит):
a b
Введите количество пар в определяющем соотношении R:
3
Введите определяющее соотношение R (так: R1 R2):
ab ba
aa a
bbb b
Полная система представителей: S = { a b ab bb abb  }

Операция умножения таких слов определяется по следующей таблице Кэли :
a ab ab abb abb
ab bb abb b ab
ab abb abb ab ab
abb b ab bb abb
abb ab ab abb abb
```

Рисунок 4 – Тестировние №3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе были рассмотрены и изучены следующие темы: понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества, понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений. Во второй части работы были реализованы: алгоритм построения подполугрупп по таблице Кэли, алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству, алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям.