Лабораторная работа №4 Яхин Ш.И.

5 вариант 331гр.

Задание 1.

$X = \{1, 2, 3\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $S = \langle f, g \rangle = ?$

Элемент g явл-ся правым нулём, поэтому умножать на него справа не имеет смысла

$$ff = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$gf^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 3 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f$$

$$gf^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 3 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 2 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = g$$

$$S = \langle f, g \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

	f	g	f^2	gf	f^3	gf^2
f	f^2	g	f^3	gf	f	gf^2
g	gf	g	gf^2	gf	g	gf^2
f^2	f^3	g	f	gf	f^2	gf^2
gf	gf^2	g	g	gf	gf	gf^2
f^3	f	g	f^2	gf	f^3	gf^2
gf^2	g	g	gf	gf	gf^2	gf^2

Задание 2

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \{1,2,3,4,5\}$, $k = ?$, $m = ?$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a^3 = a^2 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a^4 = a^3 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Ответ:** индекс $k = 1$, период $m = 4 - 1 = 3$

Задание 3

$S = \langle x, y : xy = yx, x^3 = x^2, y^2 = x \rangle$

Шаг 1 (длина 1): x и y не экв. между собой $\Rightarrow$ вносим их в сист. предст.

Шаг 2 (длина 2): x^2, $xy = yx$, yx, $y^2 = x$. Из этих слов только слова x^2 и yx не экв. отн. конгр. ε другим ранее выделенным словам $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ вносим x^2 и yx в сист. представителей.

Шаг 3 (длина 3): $x^3 = x^2$, $x^2y = xxy = xyx = yx^2$, yx^2, $yxy = y^2x = x^2$. Из этих слов только слово yx^2 не экв. отн. конгр. ε другим ранее выделенным словам $\Rightarrow$ вносим yx^2 в сист. представителей.

Шаг 4 (длина 4): $yx^3 = yx^2$, $yx^2y = yxyx = yyxx = x^3 = x^2$. Все эти слова экв. отн. конгр. ε ранее выделенным словам.

Значит, $S = \{x, y, x^2, yx, yx^2\}$ - полная система представителей классов конгр. ε.

Ответ: $S = \{x, y, x^2, yx, yx^2\}$