

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и
криптографии

Комбинаторная теория полугрупп
ОТЧЁТ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ПРИКЛАДНАЯ УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА»

студента 3 курса 331 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Яхина Шамяля Илдусовича

Преподаватель
профессор, д.ф.-м.н.

_____ В. А. Молчанов
подпись, дата

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1	Теория	4
1.1	Понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества .	4
1.2	Понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений	5
2	Результаты работы	8
2.1	Алгоритм построения подполугрупп по таблице Кэли	8
2.2	Алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству	8
2.3	Алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям	8
3	Код программы	10
4	Результаты тестирования программ	28
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	31

Цель работы — изучение основных понятий теории полугрупп.

1 Теория

1.1 Понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества

Полугруппа – это алгебра $S = (S, \cdot)$ с одной ассоциативной бинарной операцией \cdot , т.е. выполняется $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in S$.

Если полугрупповая операция называется умножением, то полугруппу называют мультипликативной.

Лемма 1. Для любого непустого множества X множество всех бинарных отношений на множестве X с операцией композиции является полугруппой. Такая полугруппа называется симметрической полугруппой бинарных отношений на множестве X и обозначается символом $\beta(X)$.

В случае конечного n - элементного множества $S = s_1, s_2, \dots, s_n$ операция умножения на S задаётся таблицей Кэли размерности $n \times n$, строки и столбцы которой помечены элементами множества S и в которой на пересечении i -ой строки и j -го столбца стоит произведение $s_i \cdot s_j$ элементов s_i, s_j .

\cdot	s_1	s_2	\dots	s_n
s_1	$s_1 \cdot s_1$	$s_1 \cdot s_2$	\dots	$s_1 \cdot s_n$
s_2	$s_2 \cdot s_1$	$s_2 \cdot s_2$	\dots	$s_2 \cdot s_n$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
s_n	$s_n \cdot s_1$	$s_n \cdot s_2$	\dots	$s_n \cdot s_n$

Рисунок 1 – Таблица Кэли операции умножения

Классификация элементов полугруппы

Элемент s полугруппы S называется:

1. нулевым, если $s \cdot x = x \cdot s = s$ для всех $x \in S$ (при мультипликативной записи операции полугруппы такой элемент обозначается символом 0 и называется нулем);
2. нейтральным (единичным), если $s \cdot x = x \cdot s = x$ для всех $x \in S$ (при мультипликативной записи операции полугруппы такой элемент обозначается

символом 1 и называется единицей);

3. обратимым, если для некоторого $x \in S$ выполняется свойство: $x \cdot s = s \cdot x = 1$ (такой элемент x называется обратным для элемента s и обозначается символом s^{-1});
4. идемпотентом, если $s \cdot s = s$, т.е. $s^2 = s$.

Если в 1) выполняется лишь равенство $x \cdot s = s$ для всех $x \in S$, то s называется правым нулем. Аналогично определяется левый нуль и односторонние единицы.

Подмножество X полугруппы S называется подполугруппой, если X устойчиво относительно операции умножения, т.е. для любых $x, y \in X$ выполняется свойство: $x \cdot y \in X$.

В силу общего свойства подалгебр пересечение любого семейства $X_i (i \in I)$ подполугрупп полугруппы S является подполугруппой S и, значит, множество $Sub(S)$ всех подполугрупп полугруппы S является системой замыканий. Следовательно, для любого подмножества X полугруппы S существует наименьшая подполугруппа S , содержащая множество X . Такая полугруппа обозначается символом $\langle X \rangle$ и называется подполугруппой S , порождённой множеством X . При этом множество X называется также порождающим множеством подполугруппы $\langle X \rangle$.

В частности, если $\langle X \rangle = S$, то X называется порождающим множеством полугруппы S и говорят, что множество X порождает полугруппу S .

Легко видеть, что полугруппа $\langle X \rangle$ состоит из всевозможных конечных произведений $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ элементов $x_1, \dots, x_n \in X$, т.е. выполняется равенство: $\langle X \rangle = \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n : n \in N \text{ и } x_1, \dots, x_n \in X\}$.

1.2 Понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений

Полугруппа с единичным элементом называется моноидом. Другими словами, моноид $M = (M, \cdot, 1)$ – это алгебра с ассоциативной бинарной операцией и выделенным единичным элементом 1. При этом полугруппа (M, \cdot) называется полугруппой моноида $M = (M, \cdot, 1)$.

Для любой полугруппы $S = (S, \cdot)$ канонически определяется моноид $M(S)$ по следующему правилу: $M(S) = S \cup 1$ для некоторого элемента $1 \notin S$ и умножение в $M(S)$ на новый элемент 1 определяется по формуле: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. Полугруппа моноида $M(S)$ обозначается символом S^1 и называется полугруппой

пой с внешне присоединенной единицей.

Моноид называется группой, если в нем все элементы обратимы.

Лемма. Для любого моноида M множество всех обратимых элементов M^* с операцией умножения моноида является группой, т.е. для любых $a, b \in M^*$ выполняется условие $a \cdot b \in M^*$

Подгруппой полугруппы S назовем подполугруппу T из S , являющуюся группой относительно бинарной операции, определенной в S . Это эквивалентно тому, что T есть подполугруппа из S , в которой для любых $a, b \in T$ существуют $x, y \in T$ такие, что $ax = b$ и $ya = b$. Отсюда легко получить, что подмножество T полугруппы S является подгруппой тогда и только тогда, когда $aT = Ta = T$ для любого $a \in T$.

Единица e подгруппа T полугруппы S является идемпотентом, но не обязательно единицей полугруппы S .

Пусть A – произвольное множество, называемое алфавитом. Элементы $a \in A$ называются буквами. Словом над алфавитом A называется конечная последовательность букв a_1, \dots, a_n алфавита A .

Обозначим символом A^+ множество всех непустых слов над алфавитом и символом A^* - множество слов $A^* = A^+ \cup \Lambda$.

Теорема (О представлении полугрупп словами). Любая полугруппа S является фактор-полугруппой некоторой полугруппы слов A^+ , т.е. $S \cong A^+/\epsilon$ для некоторой конгруэнции ϵ полугруппы A^+ .

Таким образом, для любой конечной полугруппы S найдется такой конечный алфавит A , что для некоторого отображения $\phi : A \rightarrow S$ выполняется равенство $\langle \phi(A) \rangle = S$ и, значит, $S \cong A^+/\ker \phi$. В этом случае множество A называется множеством порождающих символов полугруппы S (относительно отображения $\phi : A \rightarrow S$).

Если при этом для слов $w_1, w_2 \in A^+$ выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, т.е. $w_1 \equiv w_2(\ker \phi)$, то говорят, что на S выполняется соотношение $w_1 = w_2$ (относительно отображения $\phi : A \rightarrow S$).

Очевидно, что в общем случае множество таких соотношений $w_1 = w_2$ для всех пар $(w_1, w_2) \in \ker \phi$ будет бесконечным и не представляется возможности эффективно описать полугруппу S в виде полугруппы классов конгруэнции $\ker \phi$. Однако в некоторых случаях можно выбрать такое сравнительно простое подмножество $\rho \subset \ker \phi$, которое однозначно определяет конгруэнцию $\ker \phi$

как наименьшую конгруэнцию полугруппы A^+ , содержащую отношение ρ , т.е. $\ker \rho\phi = f_{con}(\rho) = f_{eq}(f_{reg}(\rho))$.

Так как в случае $(w_1, w_2) \in \rho$ по-прежнему выполняется равенство $\phi(w_1) = \phi(w_2)$, то будем писать $w_1 = w_2$ и называть такие выражения определяющими соотношениями.

2 Результаты работы

2.1 Алгоритм построения подполугрупп по таблице Кэли

Вход: Полугруппа S с таблицей Кэли и подмножество $X \subset S$.

Выход: Подполугруппа $\langle X \rangle \subset S$.

1. Положим $i = 0, X_0 = X$;
2. Для X_i вычислим $\overline{X_i} = x \cdot y : x \in X_i \wedge y \in X$ и положим $X_{i+1} = X_i \cup \overline{X_i}$.
3. Вычисляем $\langle X \rangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$.

Временная сложность алгоритма построения подполугрупп по таблице Кэли $= O(n^2 * m)$, где m - количество элементов в подмножестве X , а n - это размер множества для полугруппы S .

2.2 Алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству

Вход: Конечное множество множество X бинарных отношений (булевых матриц).

Выход: Полугруппа $\langle X \rangle$.

1. Пока не будет добавлена ни одна новая матрица за весь цикл, выполняется:
 - a) Запускается цикл for с g_now от 0 до размера списка матриц res_all_matr , который обходит все матрицы из res_all_matr и в нем запускается еще один цикл for с g от 0 до размера списка матриц res_all_matr .
 - i. Создается матрица с нулевыми элементами $matrix_res$
 - ii. Если $g_now[i][k] == 1$ и $g[k][j] == 1$, то в результирующей матрице $matrix_res[i][j]$ присваивается 1.
 - iii. Если полученной матрицы $matrix_res$ еще нет в res_all_matr , то она вносится туда.
2. Возвращается res_all_matr .

Временная сложность алгоритма построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству $= O(m^2 * n^3 * p)$, где n - это размерность матриц, m - количество матриц в res_all_matr , а p - число раз, когда в цикле находилась хотя бы одна новая матрица

2.3 Алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям

Вход: Конечное множество символов A и конечное множество R определяющих соотношений.

Выход: Полугруппа $\langle A|R \rangle$, таблица Кэли операции умножения слов из $\langle A|R \rangle$.

1. Создается полная система представителей $\langle A|R \rangle$, т.е. список, куда будут заноситься слова, эквивалентные относительно конгруэнции ϵ ранее занесенным туда словам.
2. Все слова из конечного множества символов A вносятся в $\langle A|R \rangle$.
3. Пока все слова, полученные в цикле не будут эквивалентны относительно конгруэнции ϵ словам из $\langle A|R \rangle$, выполняется:
 - а) Рассматриваются все слова w , полученные умножением справа элементов конечного множества символов A к внесенным в $\langle A|R \rangle$ на предыдущем шаге словам. К каждому из полученных слов применяются преобразования R до того момента, когда не подойдет ни одно из определяющих соотношений.
 - б) Если полученное на шаге 3 слово не эквивалентно относительно конгруэнции ϵ словам из $\langle A|R \rangle$, то это слово кладется в $\langle A|R \rangle$.
4. Возвращаются $\langle A|R \rangle$ и таблица Кэли операции умножения слов из $\langle A|R \rangle$.

Временная сложность алгоритма построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям $= O(m^2 * n^2 * p)$, где m - размер конечного множества R , n - длина слова, а p - максимальная длина слова.

3 Код программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <math.h>
#include <algorithm>
#include <string>

using namespace std;

int CharInt(int N, char c, vector <char> mnojestvo) {
for (int i = 0; i < N; i++)
{
if (mnojestvo[i] == c)
return i;
}
}

bool proverka_Ass(int N, char** keli, vector <char> mnojestvo) {
bool prov = true;
for (int x = 0; x < N; x++)
{
for (int y = 0; y < N; y++)
{
for (int z = 0; z < N; z++)
{
if (keli[x][CharInt(N, keli[y][z], mnojestvo)]
!= keli[CharInt(N, keli[x][y], mnojestvo)][z])
prov = false;
}
}
}
return prov;
}
```

```

bool true_elems(vector <char> X_i, vector <char> X_i_next) {
    if (X_i.size() != X_i_next.size())
        return true;
    else {
        for (int j = 0; j < X_i.size(); j++) {
            if (X_i[j] != X_i_next[j])
                return true;
        }
    }
    return false;
}

```

```

bool unique_elem(vector <char> ch, char elem) {
    for (int j = 0; j < ch.size(); j++) {
        if (elem == ch[j])
            return false;
    }
    return true;
}

```

```

void postr_podpol(int N, vector <char> mnojestvo, int M,
    vector <char> X, char** keli) {
    int i = 0;
    vector <char> X_i;
    vector <char> X_i_next;
    vector <char> X_dop;
    vector <char> X_res;
    for (int j = 0; j < M; j++) {
        X_i.push_back(X[j]);
        X_res.push_back(X[j]);
        X_i_next.push_back(X[j]);
    }
    for (int j = 0; j < X_i.size(); j++) {
        for (int k = 0; k < X_i.size(); k++) {

```

```

char x_y = keli[CharInt(N, X_i[j], mnojestvo)]
[CharInt(N, X_i[k], mnojestvo)];
if (unique_elem(X_dop, x_y)) {
X_dop.push_back(x_y);
}
}
}
for (int j = 0; j < X_dop.size(); j++) {
if (unique_elem(X_res, X_dop[j])) {
X_res.push_back(X_dop[j]);
}
if (unique_elem(X_i_next, X_dop[j])) {
X_i_next.push_back(X_dop[j]);
}
}

int sch = 1;
while (true_elems(X_i, X_i_next) || sch == 1) {
sch = 0;
X_i.clear();
for (int j = 0; j < X_i_next.size(); j++) {
X_i.push_back(X_i_next[j]);
}
X_dop.clear();
for (int j = 0; j < X_i.size(); j++) {
for (int k = 0; k < X_i.size(); k++) {
int x_y = keli[CharInt(N, X_i[j], mnojestvo)]
[CharInt(N, X_i[k], mnojestvo)];
if (unique_elem(X_dop, x_y)) {
X_dop.push_back(x_y);
}
}
}
}
for (int j = 0; j < X_dop.size(); j++) {

```

```

    if (unique_elem(X_i_next, X_dop[j])) {
        X_i_next.push_back(X_dop[j]);
    }
}

for (int j = 0; j < X_i_next.size(); j++) {
    if (unique_elem(X_res, X_i_next[j])) {
        X_res.push_back(X_i_next[j]);
    }
}

sort(X_res.begin(), X_res.end());
if (X_res.size() == N) {
    for (int j = 0; j < X_res.size(); j++) {
        cout << X_res[j] << ", ";
    }
    break;
}

for (int j = 0; j < X_res.size(); j++) {
    cout << X_res[j] << ", ";
}

}

void proverka_1(int N, vector <char> mnojestvo, int M,
vector <char> podmnojestvo, char** keli) {

    cout << endl;
    if (proverka_Ass(N, keli, mnojestvo) == true) {
        postr_podpol(N, mnojestvo, M, podmnojestvo, keli);
    }
    else
        cout << "Не асоциативна" << endl;

}

```

```

bool unique_matr(vector < vector <int> >matrix_res,
    vector < vector < vector <int> > > res_all_matr) {
for (int i = 0; i < res_all_matr.size(); i++)
{
if (matrix_res == res_all_matr[i])
return false;
}
return true;
}

```

```

void second_bin(int N,
vector < vector < vector <int> > > res_all_matr) {
int razmer = res_all_matr.size();
int dps = 0;
while (res_all_matr.size() != razmer || dps == 0) {
razmer = res_all_matr.size();
dps = 1;
for (int g_now = 0; g_now < razmer; g_now++)
{
for (int g = 0; g < razmer; g++)
{
vector < vector <int> > matrix_res;
vector <int> s(N, 0);
for (int jh = 0; jh < N; jh++)
{
matrix_res.push_back(s);
}
for (int i = 0; i < N; i++)
{
for (int j = 0; j < N; j++)
{
for (int k = 0; k < N; k++) {
if (res_all_matr[g_now][i][k] == 1

```

```

&& res_all_matr[g][k][j] == 1) {
matrix_res[i][j] = 1;
break;
}
}
}
}
if (unique_matr(matrix_res, res_all_matr)) {
res_all_matr.push_back(matrix_res);
}
}
}
}
cout << "Получаем: " << endl;
for (int g = 0; g < res_all_matr.size(); g++)
{
for (int i = 0; i < N; i++) {
for (int j = 0; j < N; j++) {
cout << res_all_matr[g][i][j] << " ";
}
cout << endl;
}
cout << endl;
cout << endl;
}
}

bool unique_word(string A_i, vector <string> s_predst) {
for (int i = 0; i < s_predst.size(); i++)
{
if (A_i == s_predst[i])
return false;
}
return true;
}

```

```
}
```

```
void third_sootn(int T, vector <string> A, int R,  
    vector < pair < string, string > > relations) {  
    vector <string> s_predst;  
    //длина слова = 1  
    for (int i = 0; i < T; i++)  
    {  
        if (unique_word(A[i], s_predst)) {  
  
        }  
    }  
}
```

```
bool unique_word_on_pair(string word,  
    vector < pair < string, string > > relations, string& sec_pair) {  
    for (int i = 0; i < relations.size(); i++)  
    {  
        if (word == relations[i].first) {  
            sec_pair = relations[i].second;  
            return false;  
        }  
    }  
    return true;  
}
```

```
vector<string> word_vector(string word)  
{  
    vector<string> convert_word;  
    for (int i = 0; i < word.size(); ++i)  
        convert_word.push_back(word.substr(i, 1));  
  
    return(convert_word);  
}
```



```

vector <string> res_keli_elems;

void find_res_word(string keli_word, vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations, int max_w,
int max_sist_pred);

bool dop_proverka(string keli_word, vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations, int max_w,
int max_sist_pred) {
int start_size = res_keli_elems.size();
find_res_word(keli_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);

if (start_size != res_keli_elems.size()) {
if (res_keli_elems.size() == 1 ||
res_keli_elems[res_keli_elems.size() - 1]
== res_keli_elems[res_keli_elems.size() - 2]) {
if (res_keli_elems.size() != 1) {
res_keli_elems.erase(res_keli_elems.begin()
+ res_keli_elems.size() - 1);
}
return true;
}
return false;
}
return true;
}

void find_res_word(string keli_word, vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations, int max_w,
int max_sist_pred) {
if (!unique_word(keli_word, S)) {
//cout << keli_word << " ";

```

```

res_keli_elems.push_back(keli_word);
return;
}
else {
string rec_word;
vector<string> word_now = word_vector(keli_word);

int sch = 2;
while (sch <= max_w)
{
for (int i = word_now.size() - 1; i >= 0; --i)
{
if (sch > keli_word.size() || sch > i + 1)
break;
int j;
string f_part = "";
for (j = i; j > i - sch; --j)
f_part = word_now[j] + f_part;
string s_pair = "";
if (!unique_word_on_pair(f_part, relations, s_pair))
{
rec_word = "";
if (s_pair == "abbb") {
int kk = 1;
}
vector<string> part_ = word_vector(s_pair);

for (int k = 0; k < j + 1; ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

rec_word = rec_word + s_pair;

for (int k = i + 1; k < word_now.size(); ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

```

```

if (rec_word.size() < keli_word.size())
{
//dop_proverka = rec_word;
/*if () {

}*/
//else
res_keli_elems.push_back(rec_word);
if (dop_proverka(rec_word, S, relations, max_w, max_sist_pred)) {
//cout << rec_word << " ";
return;
}
else
find_res_word(rec_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);
}
else
find_res_word(rec_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);
}
}
sch++;
}
}
}

void vivod_keli(vector <string> S,
vector < pair < string, string > > relations,
int max_w, int max_sist_pred) {
cout << endl;
cout << "Операция умножения таких слов определяется
по следующей таблице Кэли : "
<< endl;
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{

```

```

for (int j = 0; j < S.size(); j++)
{

    if (i == 2 && j == 4) {
        int k = 1;
    }

    string keli_word = S[i] + S[j];
    find_res_word(keli_word, S, relations, max_w, max_sist_pred);
    cout << res_keli_elems[res_keli_elems.size() - 1] << " ";
    res_keli_elems.clear();
}
cout << endl;
}
}

```

```

vector <string> S;

```

```

void th_alg(string& word, vector <string>& A_ofr, int& max_w,
string& new_word, string& rec_word,
vector < pair < string, string > >& relations)
{
    if (!unique_word(word, A_ofr))
        return;

```

```

vector<string> word_now = word_vector(word);

```

```

int sch = 2;
while (sch <= max_w)
{
    for (int i = word_now.size() - 1; i >= 0; --i)
    {
        if (sch > word.size() || sch > i + 1)

```

```

break;
int j;
string f_part = "";
for (j = i; j > i - sch; --j)
f_part = word_now[j] + f_part;
string s_pair = "";
if (!unique_word_on_pair(f_part, relations, s_pair))
{
rec_word = "";
vector<string> part_ = word_vector(s_pair);

for (int k = 0; k < j; ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

rec_word = rec_word + s_pair;

for (int k = i + 1; k < word_now.size(); ++k)
rec_word = rec_word + word_now[k];

if (rec_word.size() < word.size())
{
A_ofr.push_back(word);
A_ofr.push_back(rec_word);
return;
}
else if (!unique_word(rec_word, A_ofr))
return;
else
th_alg(rec_word, A_ofr, max_w, new_word, rec_word, relations);
}
if (!unique_word(word, A_ofr))
return;
}
sch++;

```

```
}
```

```
if (rec_word.size() == word.size() && rec_word < word &&
unique_word(word, A_ofr) && unique_word(rec_word, A_ofr))
{
S.push_back(rec_word);
A_ofr.push_back(word);
A_ofr.push_back(rec_word);
return;
}
```

```
S.push_back(word);
A_ofr.push_back(word);
A_ofr.push_back(rec_word);
return;
}
```

```
int main()
{
setlocale(LC_ALL, "Rus");
vector <char> mnojestvo;
vector <char> podmnojestvo;
vector <string> A;
vector <string> A_ofr;
vector < vector < vector <int> > > all_matr;
vector < vector < vector <int> > > res_all_matr;
int sposob, i, j, N, M, T, matr_count, R_count, R;
int max_w = 0;
cout << "Введите, что хотите сделать: " << endl;
cout << "1 - построение подполугрупп по таблице Кэли" << endl;
cout << "2 - построение полугруппы бинарных отношений по
заданному порождающему множеству" << endl;
cout << "3 - построение полугруппы по порождающему множеству
и определяющим соотношениям" << endl;
```

```

cin >> sposob;

if (sposob == 1)
{

cout << "Введите размерность полугруппы: " << endl;
cin >> N;
if (N == 0) {
cout << "Ошибка";
return 0;
}
cout << "Введите множество для полугруппы S: " << endl;
char vv;
for (int i = 0; i < N; i++) {
cin >> vv;
mnojestvo.push_back(vv);
}
char** keli;
keli = new char* [N];
cout << "Таблица Кэли полугруппы S: " << endl;
for (int i = 0; i < N; i++) {
keli[i] = new char[N];
for (int j = 0; j < N; j++) {
cin >> keli[i][j];
}
}
cout << "Введите размерность подмножества: " << endl;
cin >> M;
if (M == 0) {
cout << "Ошибка";
return 0;
}
cout << "Введите подмножество X: " << endl;
char podvv;

```

```

for (int i = 0; i < M; i++) {
    cin >> podvv;
    podmnojestvo.push_back(podvv);
}
proverka_1(N, mnojestvo, M, podmnojestvo, keli);
}
else if (sposob == 2)
{
    cout << "Введите размерность : " << endl;
    cin >> N;
    if (N == 0) {
        cout << "Ошибка";
        return 0;
    }
    cout << "Количество матриц : " << endl;
    cin >> matr_count;
    if (matr_count == 0) {
        cout << "Ошибка";
        return 0;
    }
    for (int l = 0; l < matr_count; l++)
    {
        cout << "Введите матрицу бинарного отношения №"
        << l + 1 << ": " << endl;
        vector < vector <int> > matrix1(N);
        for (int i = 0; i < N; i++) {
            for (int j = 0; j < N; j++) {
                int vvod_ch;
                cin >> vvod_ch;
                matrix1[i].push_back(vvod_ch);
            }
        }
        res_all_matr.push_back(matrix1);
    }
}

```



```

second_bin(N, res_all_matr);
}
else if (sposob == 3) {
cout << "Введите количество символов в алфавите A: " << endl;
int T;
cin >> T;
cout << "Введите конечное множество символов A (алфавит): " << endl;
string vvod_A;
for (int i = 0; i < T; i++) {
cin >> vvod_A;
A.push_back(vvod_A);
S.push_back(vvod_A);
A_ofr.push_back(vvod_A);
}
cout << "Введите количество пар в определяющем соотношении R: "
<< endl;
int R_count;
cin >> R_count;
vector < pair < string, string > > relations;
relations.resize(R_count);
cout << "Введите определяющее соотношение R (так: R1 R2): "
<< endl;
for (int i = 0; i < R_count; i++) {
string vvod_R1;
string vvod_R2;
cin >> vvod_R1 >> vvod_R2;
if (vvod_R1.size() > max_w)
max_w = vvod_R1.size();
if (vvod_R2.size() > max_w)
max_w = vvod_R2.size();
if (vvod_R1.size() < vvod_R2.size())
relations.push_back(make_pair(vvod_R2, vvod_R1));
else if (vvod_R1.size() > vvod_R2.size())

```

```

relations.push_back(make_pair(vvod_R1, vvod_R2));
else
{
if (vvod_R1 < vvod_R2)
relations.push_back(make_pair(vvod_R2, vvod_R1));
else
relations.push_back(make_pair(vvod_R1, vvod_R2));
}
}
int len = 1;
vector <string> dop_A;
dop_A = A;
string new_word;
string rec_word;
while (!dop_A.empty())
{
++len;
for (int i = 0; i < dop_A.size(); i++)
{
string word_w = dop_A[i];
for (int i = 0; i < A.size(); i++)
{
string let = A[i];
string word_w_let = word_w + let;
rec_word = "";
th_alg(word_w_let, A_ofr, max_w, new_word,
rec_word, relations);
}
}
dop_A.clear();
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
if (S[i].size() == len)
dop_A.push_back(S[i]);
}
}

```

```

    }
}

cout << "Полная система представителей: S = { ";
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
    cout << S[i] << " ";
}
cout << " }" << endl;
int max_sist_pred = 0;
for (int i = 0; i < S.size(); i++)
{
    if (S[i].size() > max_sist_pred)
        max_sist_pred = S[i].size();
}
vivod_keli(S, relations, max_w, max_sist_pred);
}
else
    cout << "Ошибка" << endl;

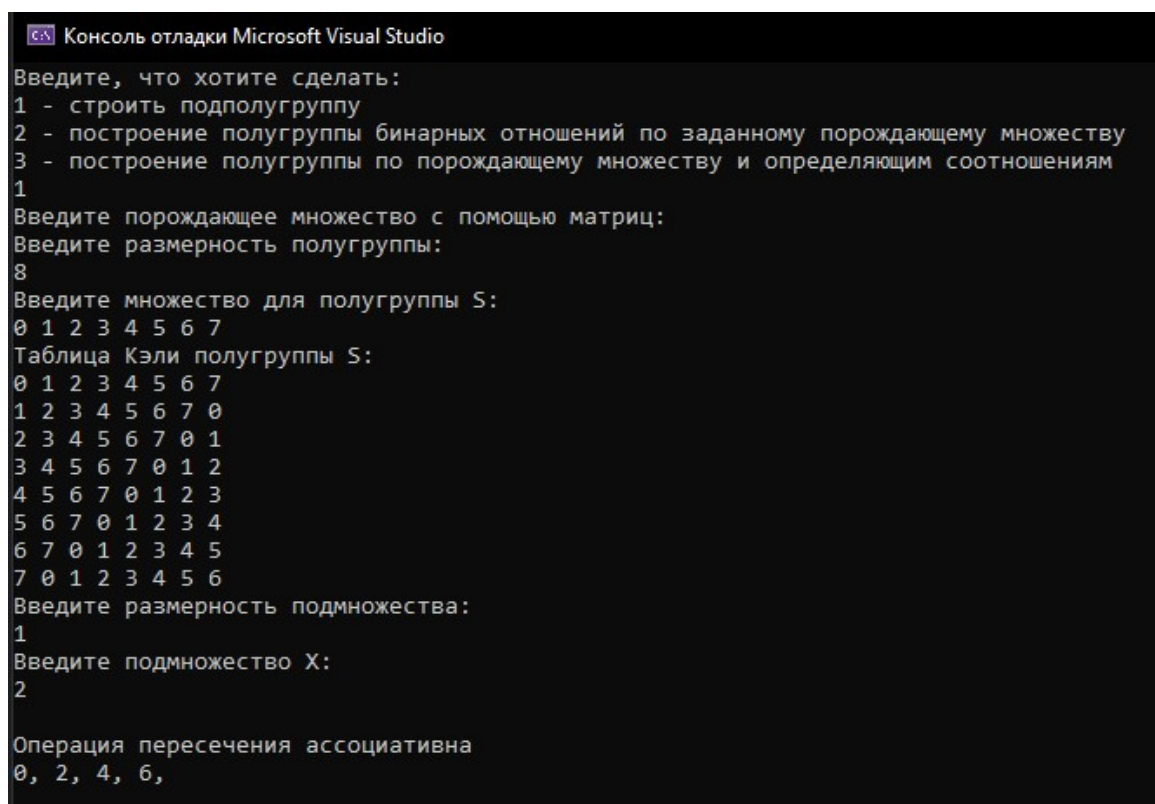
cout << endl;
}
}

```

4 Результаты тестирования программ

Тестирование №1:

Построение подполугрупп по таблице Кэли.



```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
Введите, что хотите сделать:
1 - строить подполугруппу
2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству
3 - построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям
1
Введите порождающее множество с помощью матриц:
Введите размерность полугруппы:
8
Введите множество для полугруппы S:
0 1 2 3 4 5 6 7
Таблица Кэли полугруппы S:
0 1 2 3 4 5 6 7
1 2 3 4 5 6 7 0
2 3 4 5 6 7 0 1
3 4 5 6 7 0 1 2
4 5 6 7 0 1 2 3
5 6 7 0 1 2 3 4
6 7 0 1 2 3 4 5
7 0 1 2 3 4 5 6
Введите размерность подмножества:
1
Введите подмножество X:
2
Операция пересечения ассоциативна
0, 2, 4, 6,
```

Рисунок 2 – Тестирование №1

Тестирование №2:

Построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству.

```

Введите, что хотите сделать:
1 - строить подполугруппу
2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству
3 - построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям
2
Введите размерность :
3
Количество матриц :
3
Введите матрицу бинарного отношения №1:
0 1 1
1 1 0
0 1 1
Введите матрицу бинарного отношения №2:
0 0 0
0 0 0
0 0 0
Введите матрицу бинарного отношения №3:
1 0 1
0 1 0
0 0 1
Получаем:
0 1 1
1 1 0
0 1 1

0 0 0
0 0 0
0 0 0

1 0 1
0 1 0
0 0 1

1 1 1
1 1 1
1 1 1

0 1 1
1 1 1
0 1 1

```

Рисунок 3 – Тестирование №2

Тестирование №3:

Построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям.

```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio

Введите, что хотите сделать:
1 - построение подполугрупп по таблице Кэли
2 - построение полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству
3 - построение полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям
3
Введите количество символов в алфавите A:
2
Введите конечное множество символов A (алфавит):
a b
Введите количество пар в определяющем соотношении R:
3
Введите определяющее соотношение R (так: R1 R2):
ab ba
aa a
bbb b
Полная система представителей: S = { a b ab bb abb }
```



```
Операция умножения таких слов определяется по следующей таблице Кэли :
a ab ab abb abb
ab bb abb b ab
ab abb abb ab ab
abb b ab bb abb
abb ab ab abb abb
```

Рисунок 4 – Тестирование №3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе были рассмотрены и изучены следующие темы: понятия полугруппы, подполугруппы и порождающего множества, понятия подгруппы, порождающего множества и определяющих соотношений. Во второй части работы были реализованы: алгоритм построения подполугрупп по таблице Кэли, алгоритм построения полугруппы бинарных отношений по заданному порождающему множеству, алгоритм построения полугруппы по порождающему множеству и определяющим соотношениям.