ЛР №5

Яхин Ш.И.
331 гр

Вариант 4

$\boxed{1}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$k = a, b, c, d$

Проверим на ассоциативность полугруппу $((x \cdot k) \cdot z = x \cdot (k \cdot z) \ \forall x, z \in)$

Для $k = a$:

$(x \cdot a) \cdot z$	a	b	c	d
$a \cdot a = a$	a	b	c	d
$b \cdot a = b$	b	c	d	a
$c \cdot a = c$	c	d	a	b
$d \cdot a = d$	d	a	b	c

$x \cdot (a \cdot z)$	$a \cdot a = a$	$a \cdot b = b$	$a \cdot c = c$	$a \cdot d = d$
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Для $k = b$:

$(x \cdot b) \cdot z$	a	b	c	d
$a \cdot b = b$	b	c	d	a
$b \cdot b = c$	c	d	a	b
$c \cdot b = d$	d	a	b	c
$d \cdot b = a$	a	b	c	d

$x \cdot (b \cdot z)$	$b \cdot a = b$	$b \cdot b = c$	$b \cdot c = d$	$b \cdot d = a$
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

Для $k = c$:

$(x \cdot c) \cdot z$	a	b	c	d
$a \cdot c = c$	c	d	a	b
$b \cdot c = d$	d	a	b	c
$c \cdot c = a$	a	b	c	d
$d \cdot c = b$	b	c	d	a

$x \cdot (c \cdot z)$	$c \cdot a = c$	$c \cdot b = d$	$c \cdot c = a$	$c \cdot d = b$
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

Для $k = d$:

$(x \cdot d) \cdot z$	a	b	c	d
$a \cdot d = d$	d	a	b	c
$b \cdot d = a$	a	b	c	d
$c \cdot d = b$	b	c	d	a
$d \cdot d = c$	c	d	a	b

$x \cdot (d \cdot z)$	$d \cdot a = d$	$d \cdot b = a$	$d \cdot c = b$	$d \cdot d = c$
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

Полугруппа ассоциативна

Найдем подполугруппу $\langle a \rangle$:

$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$, где $a^2 = a, a^3 = a, \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle a \rangle = \{a\}$

Левый идеал:

$[a) = S^1 a = \{a\} \cup Sa = \{a, b, c, d\}$

Правый идеал:

$(a] = aS^1 = \{a\} \cup aS = \{a, b, c, d\}$

Двусторонний идеал:

$[a] = S^1 a S^1 = \{a\} \cup SaS = \{a, b, c, d\}$

$ord(a) = 1$ (порядок элемента a)

Найдем подполугруппу $\langle b \rangle$:

$\langle b \rangle = \{b, b^2, b^3, \ldots\}$, где $b^2 = c, b^3 = d, b^4 = a$, $b^5 = b, \ldots$

$\Rightarrow \langle b \rangle = \{a, b, c, d\}$

Левый идеал:

$[b) = S^1 b = \{a, b, c, d\} \cup Sb = \{a, b, c, d\}$

Правый идеал:

$(b] = bS^1 = \{a, b, c, d\} \cup bS = \{a, b, c, d\}$

Двусторонний идеал:

$[b] = S^1 b S^1 = \{a, b, c, d\} \cup SbS = \{a, b, c, d\}$

$ord(b) = 4$

Найдем подполугруппу $\langle c \rangle$:

$\langle c \rangle = \{c, c^2, c^3, \dots\}$, где $c^2 = a$, $c^3 = c$, $c^4 = a, \dots$

$\Rightarrow \langle c \rangle = \{a, c\}$

Левый идеал:

$[c) = S^1 c = \{a, c\} \cup Sc = \{a, b, c, d\}$

Правый идеал:

$(c] = cS^1 = \{a, c\} \cup cS = \{a, b, c, d\}$

Двусторонний идеал:

$[c] = S^1 c S^1 = \{a, c\} \cup ScS = \{a, b, c, d\}$

$ord(c) = 2$

Найдем подполугруппу $\langle d \rangle$:

$\langle d \rangle = \{d, d^2, d^3, \dots\}$, где $d^2 = c$, $d^3 = b$, $d^4 = a$, $d^5 = d, \dots$

$\Rightarrow \langle d \rangle = \{a, b, c, d\}$

Левый идеал:

$[d) = S^1 d = \{a, b, c, d\} \cup Sd = \{a, b, c, d\}$

Правый идеал:

$(d] = dS^1 = \{a, b, c, d\} \cup dS = \{a, b, c, d\}$

Двусторонний идеал:

$[d] = S^1 d S^1 = \{a, b, c, d\} \cup SdS = \{a, b, c, d\}$

$ord(d) = 4$.

Задание 2

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Отношение Грина:

$R: (x,y) \in R \Leftrightarrow (x] = (y] \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

$L: (x,y) \in R \Leftrightarrow [x) = [y) \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

$J: (x,y) \in J \Leftrightarrow [a] = [b] \Rightarrow$

$\Rightarrow J = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

$H = R \cap L = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

$D = R \cup L = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$.

Классы эквив-ти $R: \{\{a, b, c, d\}\}$

Классы эквив-ти $L: \{\{a, b, c, d\}\}$

Классы эквив-ти $D: \{\{a, b, c, d\}\}$

Построим Egg-box картину:

	$\{a, b, c, d\}$
$\{a, b, c, d\}$	a, b, c, d

Задание 3

$S = \langle x, y : xy = yx,\ x^2 = y,\ y^3 = x \rangle$

x(вкл)

y(вкл)

$x^2 = y$

y^2(вкл)

xy(вкл)

$yx = xy$

$yyx = yxy = xyy$ (вкл)

$yyy = x$

$xyx = xxy = y^2$

$xyy =$

$xyyx = xyxy = xxyy = yyy = x$

$xyyy = x\cancel{x} = y$

$\Rightarrow S = \{x, y, xy, yy, xyy\}$

Таблица Кэли:

	x	y	xy	y^2	xy^2
x	y	xy	y^2	xy^2	x
y	xy	y^2	xy^2	x	y
xy	y^2	xy^2	x	y	xy
y^2	xy^2	x	y	xy	y^2
xy^2	x	y	xy	y^2	xy^2

Отн-ия Грина:

$R: (a,b) \in R \Leftrightarrow (a] = (b] \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \{(x,y), (x,x), (x,xy), (x,y^2), (x,xy^2),$

$(y,x), (y,y), (y,xy), (y,y^2), (y,xy^2),$

$(xy,x), (xy,y), (xy,xy), (xy,y^2), (xy,xy^2),$

$(y^2,x, (y^2,y), (y^2,xy), (y^2,y^2), (y^2,xy^2),$

$(xy^2,x), (xy^2,y), (xy^2,xy), (xy^2,y^2), (xy^2,xy^2)\}$

$L: (a,b) \in L \Leftrightarrow [a) = [b)$.

L будет совпадать с R в данном случая

$J: (a,b) \in J \Leftrightarrow [a] = [b]$

J будет совпадать с L и R в данном случая

$H = R \cap L$

H будет совпадать с R и L в данном случае

$D = R \cup L$

D будет совпадать с R и L в данном случае

Классы экв-ти R: ~~$\{\{1,2,3,4,5\}\}$~~ $\{\{x, y, xy, y^2, xy^2\}\}$

Классы экв-ти L: ~~$\{\{1,2,3$~~ $\{x, y, xy, y^2, xy^2\}\}$

Классы экв-ти D: $\{\{x, y, xy, y^2, xy^2\}\}$

Построим Egg-box картину:

	$\{x, y, xy, y^2, xy^2\}$
$\{x, y, xy, y^2, xy^2\}$	x, y, xy, y^2, xy^2