

SOMMAIRE**DUREE : 3H**

<u>1. INTRODUCTION</u>	2
<u>2. PRINCIPE DE NUMERATION</u>	2
2.1. <u>FORMULE DE DECOMPOSITION D'UN NOMBRE</u>	2
2.2. <u>LES BASES DE NUMERATION</u>	3
<u>3. TRANSCODAGE OU CONVERSION D'UNE BASE DANS UNE AUTRE</u>	5
3.1. <u>CONVERSION DECIMAL → BINAIRE</u>	5
3.2. <u>CONVERSION BINAIRE → DECIMAL</u>	6
3.3. <u>CONVERSION BINAIRE ↔ HEXADECIMAL</u>	6
3.4. <u>CONVERSION DECIMAL ↔ BCD OU DCB</u>	7
<u>4. REPRESENTATION BINAIRE DES NOMBRES POSITIFS</u>	7
4.1. <u>LE CODE BINAIRE NATUREL</u>	7
4.2. <u>LE CODE DECIMAL CODE BINAIRE : DCB</u>	8
4.3. <u>LE CODE GRAY</u>	8
4.4. <u>LE CODE ALPHANUMERIQUE</u>	9
<u>5. REPRESENTATION BINAIRE DES NOMBRES SIGNES</u>	11
5.1. <u>NOTATION EN COMPLEMENT A 1 (COMPLEMENT RESTREINT)</u>	11
5.2. <u>NOTATION EN COMPLEMENT A 2 (COMPLEMENT VRAI)</u>	11
<u>6. EXERCICES :</u>	13

LES SYSTEMES DE NUMERATION

1. INTRODUCTION

Dans ce cours, nous serons amenés à utiliser des termes techniques. Pour vous aider à suivre voici quelques définitions :

- **Bit** : contraction de binary digit, c'est le plus petit élément qui constitue l'information binaire.
- **Digit** : contraction de digital unit, c'est un élément d'information numérique (binaire, décimal ou autre).
- **Mot** : il est composé de plusieurs digits ou bits.
- **Octet** :
- **Quartet** :
- **LSB** (Least Significant Bit) :
- **MSB** (Most Significant Bit) :

2. Principe de numération

De nombreux systèmes de numération sont utilisés en technologie numérique. Les plus courants sont les systèmes de numération :

- Décimal
- Binaire
- Octal
- Hexadécimal

Le système que vous connaissez le mieux est sans aucun doute puisque vous l'utilisez tous les jours le système décimal.

Nous allons étudier les caractéristiques de ce système. Cette étude nous permettra ensuite d'aborder les autres systèmes de numération.

2.1. Formule de décomposition d'un nombre

La numération traditionnelle représente un nombre par la juxtaposition de symboles appelés Chiffres, choisis parmi un ensemble.

Pour le système décimal, cet ensemble se caractérise par les chiffres :

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Le système décimal, autrement nommé base 10, s'est naturellement imposé à l'homme puisqu'il possède 10 doigts. Ce système est dit à poids positionnels ou pondéré car la valeur d'un chiffre dépend de sa position (son rang) dans le nombre.

Par exemple, lorsqu'on lit le nombre 1998, on le parcourt deux fois :

- la première lecture sert à déterminer le nombre de chiffres
- la deuxième lecture permet de lire « mille neuf cent quatre vingt dix huit ».

La position (rang) respective des chiffres détermine leur poids :

....millier, centaine, dizaine, unité, dizième.....

Question : dans le nombre 1998, quels sont les chiffres qui possèdent respectivement le poids le plus fort et le poids le plus faible. ?

Réponse :

Question : exprimez sous la forme de somme de puissances de dix les nombres 245 et 89,67. ?

Réponse :

Pour résumer, la base B est constituée de B symboles ou chiffres utilisés pour dénombrer.
Un nombre N de la forme N : $a_n a_{n-1} \dots a_0$ peut s'écrire :

$$N = a_n.B^n + \dots + a_1.B^1 + a_0.B^0$$

Cette formule définit la façon d'écrire tous les nombres, quelle que soit la base du système de numération.

2.2. Les bases de numération.

A la place du décimal, nous pouvons utiliser la numération binaire, qui ne fait appel qu'à deux types de symboles, le 0 et le 1.

En informatique, où nous traitons couramment des nombres de 8 à 16 éléments binaires, nous utilisons l'hexadécimal.

Tableau récapitulatif :

BASE	Système	Symboles														
2	Binaire	0	1													
8	Octal															
10	Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
16	hexadécimal															

- La base 2 (binaire) est la base la plus utilisée en électronique pour traduire les états d'un système logique.
- La base 8 (octal) autrefois très utilisée, elle tend aujourd'hui à disparaître au profit de la base 16 (hexadécimal).
- La base 16 (hexadécimal).est apparue avec la logique microprogrammée et les microprocesseurs. Cette forme de numération permet de traduire plus facilement un nombre binaire et autorise une représentation plus conviviale des grands nombres.
- La base 10 est universellement employée par l'homme depuis qu'il sait compter sur ses doigts.

Dans un système numérique, il peut arriver que ces systèmes de numération cohabitent, d'où l'importance de savoir convertir un système dans un autre.

Par exemple, lorsque vous composez un nombre décimal sur le clavier de votre calculatrice (ou d'un ordinateur), les circuits internes convertissent ce nombre décimal en une valeur binaire.

Les opérations que vous demandez se font dans le code le plus efficace et le plus rapide, puis le résultat est converti en valeur décimale pour être affiché sur votre écran.

Tableau de correspondance entre les différentes bases :

Base 2	Base 8	Base 10	Base 16
0000 0000		0	
		1	
		2	
		3	
		4	
		5	
		6	
		7	
		8	
		9	
		10	
		11	
		12	
		13	
		14	
		15	
		16	
		17	
		18	
		19	

3. Transcodage ou conversion d'une base dans une autre

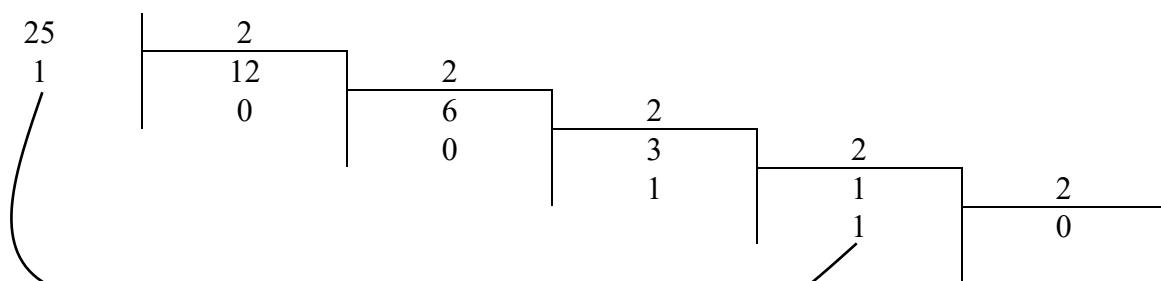
3.1. Conversion décimal → binaire.

Méthode des divisions successives :

La méthode consiste à répéter la division par 2 du nombre décimal à convertir et au report des restes jusqu'à ce que le quotient soit 0.

Le nombre binaire résultant s'obtient en écrivant le premier reste à la position du bit de poids le plus faible et le dernier reste à la position du bit de poids le plus fort.

Exemple : convertir 25 en binaire.



D'où : $(25)_{10} = (11001)_2$

Question : quel est le code binaire correspondant à ces nombres décimaux : $(56)_{10}$; $(41)_{10}$?

Réponse :

Remarque :

En ce qui concerne les nombres fractionnaires, la partie fractionnaire est convertie par multiplication par 2.

Exemple : conversion de $(39,4375)_{10}$ en binaire.

$$(39)_{10} = (100111)_2.$$

$$0,4375 \times 2 = 0,875$$

$$0,875 \times 2 = 1,75$$

$$0,75 \times 2 = 1,5$$

$$0,5 \times 2 = 1$$

$$(0,4375)_{10} = (0111)_2$$

$$(39,4375)_{10} = (100111,0111)_2.$$

3.2. Conversion binaire → décimal.

Méthode des additions successives :

Chaque bit étant affecté d'un poids qui dépend de sa position par rapport au bit de poids le plus faible, il suffit d'additionner les poids des diverses positions où se trouve une valeur « 1 ».

En appliquant la formule de décomposition d'un nombre donnée précédemment avec $B=2$ car la numération est binaire.

$$N = a_n \cdot 2^n + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Question : quel est la valeur décimale correspondant à ces codes binaires :
 $(1100111001)_2$ et $(11011)_2$?

Réponse :

3.3. Conversion binaire ↔ hexadécimal.

Dans cette écriture, on regroupe les bits par paquets de 4 en commençant par le LSB. Si le nombre de bits n'est pas un multiple de 4, on rajoute un ou plusieurs zéros puis on converti chaque quartet en son équivalent hexadécimal.

Pour passer d'un nombre hexadécimal en son équivalent binaire, il faut connaître la suite des nombres binaires de 4 bits (0000 à 1111) ainsi que le symbole hexadécimal qui lui correspond. Dès que cette correspondance devient un réflexe, les conversions se font rapidement sans calculatrice. C'est ce qui explique pourquoi le système hexadécimal est si pratique pour représenter les grands nombres binaires.

Question : quel est le code hexadécimal correspondant à ces codes binaires :
 $(1100111001)_2$; $(110110010011)_2$ et $(1010011000101)_2$?

Réponse :

Question : quel est le code binaire correspondant à ces codes hexadécimaux :
 $(A10)_{16}$ et $(1FB)_{16}$?

Réponse :

Remarque : il faut toujours préciser que le nombre est écrit en hexadécimal. Pour cela, on peut écrire sur une feuille $(14C5)_{16}$ ou bien $(14C5)_h$. Sur un clavier (dans un programme), on doit employer la convention motorola qui demande d'écrire \$14C5 ou bien la convention intel 14C5h.

3.4. Conversion décimal ↔ BCD ou DCB.

Chaque chiffre décimal doit être transcodé en binaire sur 4 bits (et inversement).

Question : quel est le code BCD correspondant à ces nombres décimaux :
; $(792)_{10}$; $(417)_{10}$; $(1998)_{10}$?

Réponse :

4. Représentation binaire des nombres positifs.

4.1. Le code binaire naturel.

C'est le code qu'utilisent les microprocesseurs et les microcontrôleurs pour effectuer diverses opérations arithmétiques et logiques

Exemple de construction sur 4 bits :

$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$	Equivalent décimal
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

Répondre : avec 4 bits, il est possible de coder valeurs

Avec n bits, il est possible de coder valeurs

La plus grande valeur décimale qu'on peut coder avec n bits est :.....

4.2. Le code Décimal Codé Binaire : DCB.

La méthode consiste à conserver la représentation décimale d'un nombre et à coder chacun de ses chiffres de 0 à 9 au moyen du binaire naturel.

La représentation d'un chiffre décimal nécessitant au maximum 4 bits on aura donc autant de quartets qu'il y aura de chiffres dans le nombre décimal.

La représentation est beaucoup plus proche de la représentation humaine.

Exemple : $(145)_{10} = (0001\ 0100\ 0101)_{BCD}$

Question : quel est le code BCD correspondant au nombre décimal $(5317)_{10}$?

Réponse :

Question : quels sont les codes binaires qui n'apparaissent jamais dans le code BCD ?

Réponse :

Question : combien faut-il de bits pour représenter un nombre décimal de 8 chiffres dans le code BCD ?

Réponse :

Comme seuls dix des 16 quartets sont utilisés, si l'une des combinaisons non autorisée apparaît dans une machine utilisant le code BCD c'est généralement le signe d'un dysfonctionnement de celle-ci.

On retrouve le code BCD dans les instruments numériques qui sont alimentés par des nombres décimaux (clavier de calculatrice) ou qui fournissent des nombres décimaux en sortie (afficheurs 7 segments). C'est le cas des voltmètres numériques, des fréquencemètres et des horloges numériques qui fournissent des informations décimales

4.3. Le code Gray.

Le code Gray, également appelé code reflex ou code binaire réfléchi est un code non pondéré c'est à dire que les positions binaires des groupes codés ne sont affectées d'aucun poids. C'est pourquoi ce code ne permet pas d'effectuer des calculs arithmétiques.

On retrouve ce code dans les applications d'entrée et de sortie (capteurs numérique de position).

Ce code est caractérisé par le fait que contrairement au code binaire naturel, lorsqu'on passe d'un chiffre à celui qui le suit, il n'y a qu'un seul bit qui change.

Exemple d'utilisation du code Gray :

Dans un système chargé de compter des objets, on va trouver la succession de nombres binaires au fur et à mesure que les objets sont détectés. Pour un codage binaire pur, le passage (transition) de la valeur $(7)_{10} = (0111)_2$ à la valeur $(8)_{10} = (1000)_2$ se traduit par le changement de 4 bits. Cette commutation n'étant pas instantanée, on peut avoir la succession d'états :

$(0111)_2 \rightarrow (0110)_2 \rightarrow (0100)_2 \rightarrow (0000)_2 \rightarrow (1000)_2$
t1 t2 t3 t4 t5

Suivant l'instant d'observation t_i , on risque d'avoir un résultat faux. Cette situation est impossible avec le code Gray car un seul bit change à la fois.

Décimal	Code binaire		Code Gray
0	0000	N	0000
1	0001	O	0001
2	0010	N	0011
3	0011		0010
4	0100	P	0110
5	0101	O	0111
6	0110	N	0101
7	0111	D	0100
8	1000	E	1100
9	1001	R	1101
10	1010	E	1111
11	1011		1110
12	1100		1010
13	1101		1011
14	1110		1001
15	1111		1000

4.4. Le code alphanumérique.

Un ordinateur ne serait pas d'une grande utilité s'il était incapable de traiter l'information non numérique. Un ordinateur doit reconnaître des codes qui correspondent à des nombres, des lettres et des caractères spéciaux. Les codes de ce genre sont dits alphanumériques.

En tout, il y a 96 symboles. à représenter soit la nécessité de 7 éléments binaires car :

$$2^6 = 64 < 87 \text{ donc } 2^7 = 128.$$

Le code alphanumérique le plus connu est le code ASCII (American Standard Code for Information Interchange). C'est le code universel utilisé pour représenter les différentes touches du clavier d'un ordinateur.

Question : combien de bits sont nécessaire pour coder les 96 symboles ?

Réponse :

Question : un opérateur compose au clavier d'un ordinateur l'instruction suivante codée en ASCII. Trouvez ce que signifie cette instruction.

100 1010 ; 100 0101 ; 010 0000 ; 101 0110 ; 100 0001 ; 100 1001 ; 101 0011 ; 010 0000 ; 100 0111 ; 100 0001 ; 100 0111 ; 100 1110 ; 100 0101 ; 101 0010.

Réponse :

LISTE PARTIELLE DU CODE ASCII

CARACTERES	ASCII A 7 ELEMENTS	HEXADECIMAL
A	100 0001	41
B	100 0010	42
C	100 0011	43
D	100 0100	44
E	100 0101	45
F	100 0110	46
G	100 0111	47
H	100 1000	48
I	100 1001	49
J	100 1010	4A
K	100 1011	4B
L	100 1100	4C
M	100 1101	4D
N	100 1110	4E
O	100 1111	4F
P	101 0000	50
Q	101 0001	51
R	101 0010	52
S	101 0011	53
T	101 0100	54
U	101 0101	55
V	101 0110	56
W	101 0111	57
X	101 1000	58
Y	101 1001	59
Z	101 1010	5A
0	011 0000	30
1	011 0001	31
2	011 0010	32
3	011 0011	33
4	011 0100	34
5	011 0101	35
6	011 0110	36
7	011 0111	37
8	011 1000	38
9	011 1001	39
BLANC	010 0000	20
.	010 1110	2E
(010 1000	28
+	010 1011	2B
\$	010 0100	24
*	010 1010	2A
)	010 1001	29
-	010 1101	2D
/	010 1111	2F
,	010 1100	2C
=	011 1101	3D

5. Représentation binaire des nombres signés.

Pour le moment, nous n'avons traité que la représentation binaire des nombres positifs. La plupart des ordinateurs traitant aussi bien les nombres négatifs que les nombres positifs, il a fallut adopter une certaine convention pour représenter le signe du nombre (+ ou -).

Généralement, c'est le bit le plus à gauche qui indique le signe du nombre :

- Si le bit le plus à gauche est 0, le nombre est positif (+)
- Si le bit le plus à gauche est 1, le nombre est négatif (-)

ATTENTION :

1. Pour l'écriture des nombres signés, on doit impérativement au préalable, définir le nombre de bits sur lequel est codé le nombre binaire (4 bits ; 8bits ; 16bits ou 32 bits).
2. Le bit le plus à gauche n'est pas le MSB mais le bit de signe.

Question : déterminez la plage de variation (valeurs décimales mini et maxi) que l'on peut obtenir si le nombre binaire signé est codé sur a) 8 bits; b) 16 bits; c) n bits ?

Réponse :

5.1. Notation en complément à 1 (complément restreint)

Elle s'obtient en remplaçant chaque 0 du nombre par un 1 et chaque 1 par un 0. Autrement dit, on complémente le nombre bit à bit.

Exemple : écriture de $(-57)_{10}$ en complément à 1 sur 1 octet

$$(57)_{10} \rightarrow (0011\ 1001)_2$$

$$\text{CA1} \rightarrow (1100\ 0110)_2$$

$$(-57)_{10} \rightarrow (1100\ 0110)_2$$

5.2. Notation en complément à 2 (complément vrai)

Elle s'obtient simplement en prenant la notation en complément à 1 du même nombre et en additionnant 1 au bit de poids faible

Exemple : écriture de $(-57)_{10}$ en complément à 2

$$(57)_{10} \rightarrow (0011\ 1001)_2$$

$$\text{CA1} \rightarrow (1100\ 0110)_2$$

$$\begin{array}{r} + \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{CA2} \rightarrow (1100\ 0111)_2$$

$$(-57)_{10} \rightarrow (1100\ 0111)_2$$

Cette notation permet d'effectuer l'opération de soustraction en réalisant une simple addition (économie pour les circuit numérique).

remarque : pour un nombre binaire positif ou nul, le codage en binaire signé est le même qu'en binaire naturel.

Le complément à 2 ne s'applique que pour les nombres négatifs.

Réaliser la soustraction de 7 - 3 en binaire.

Au lieu d'exécuter une soustraction, nous allons obtenir le même résultat en utilisant le complément à 2 du nombre à soustraire.

Application :

$\begin{array}{r} 00000111 \\ -00000011 \\ \hline 00000100 \end{array}$	$\begin{array}{r} 00000111 \\ +11111101 \\ \hline 100000100 \end{array}$
---	--

Lorsque le résultat d'une opération en complément à 2 fournit un résultat positif, il est directement interprétable en binaire. Par contre, si le résultat est négatif, il est lui-même en complément à 2 et il exige une manipulation inverse qui lui restituera une forme binaire directe mais non signée.

Question : écrivez chacun des nombres décimaux signés que voici dans la notation en complément à 2. Ces nombres seront codés sur 1 octet.

- a) -113 ; b) -9 ; c) -90 ; d) -20

Réponse :

6. Exercices :

1) Trouver l'équivalent binaire de chacun des nombres hexadécimaux que voici :

- a) 743
- b) 3A
- c) F7F7
- d) 257

2) Trouver l'équivalent DCB de chacun des nombres décimaux que voici :

- e) 59
- f) 372
- g) 919
- h) 65536

3) Convertissez en décimal ces nombres hexadécimaux :

- a) 92
- b) 1A6
- c) 37FD
- d) 2C0

4) Convertissez en hexadécimal ces nombres décimaux :

- e) 75
- f) 314
- g) 2048
- h) 25619