

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	Bloc n°1 BAC PRO CIEL LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
Page 1 sur 31			

Algèbre de BOOLE Introduction

- ⊕ En algèbre de Boole ou **algèbre logique**, le raisonnement se fait uniquement sous **forme binaire**. Une chose **est** ou **n'est pas**.
- ⊕ La variable booléenne est susceptible de prendre deux valeurs distinctes et non simultanées.

Ces deux états seront notés par les symboles '0' et '1'.

- ⊕ Cette forme de raisonnement s'applique parfaitement à l'étude des automatismes ou les appareils et les circuits ne peuvent prendre que deux états.
 - ✓ L'information logique d'une entrée d'un système automatisé se représente par un contact électrique.
 - ✓ Un contact électrique permet d'établir ou d'interrompre un circuit.
 - ✓ Un contact « e » est une variable binaire, il pourra être actionné :

On dira « e » = 1 ou non actionné « e » = 0

Les contacts seront appelés variables d'entrées.

Remarque :

- Il existe deux types de contacts **NO** ou **NF**

(NO = normalement ouvert)



(NF = normalement fermé)

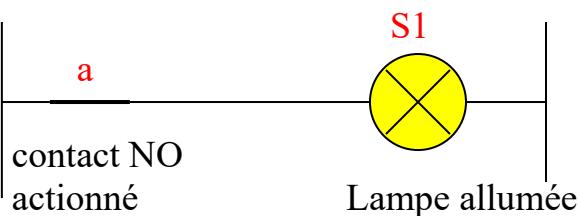
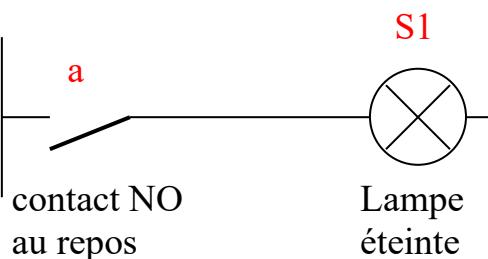


- Par convention, une action sur « e » sera noté **e**

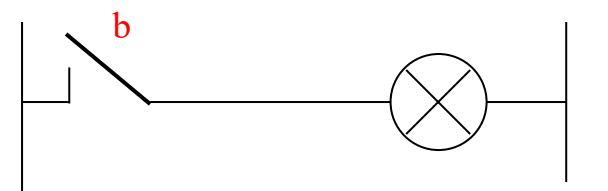
une non action sur « e » sera noté **\bar{e}**

Représentation physique

SCHEMA 1



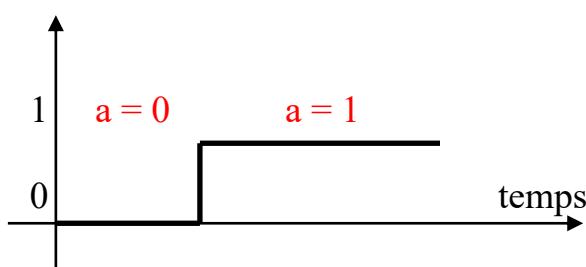
SCHEMA 2



Représentation binaire

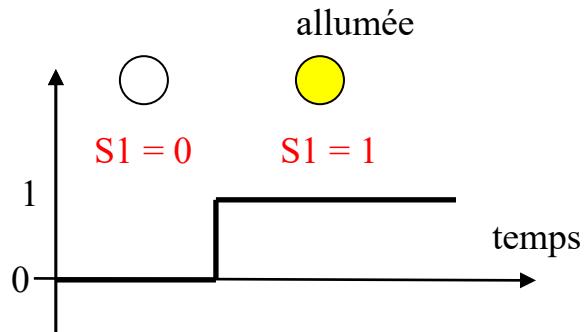
Variable d'entrée

Etat logique



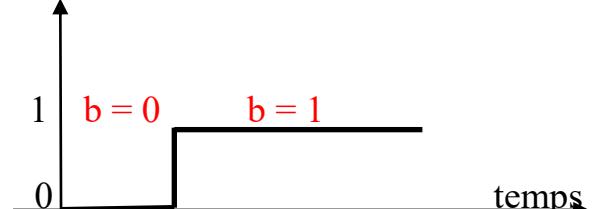
Variable de sortie

Etat logique



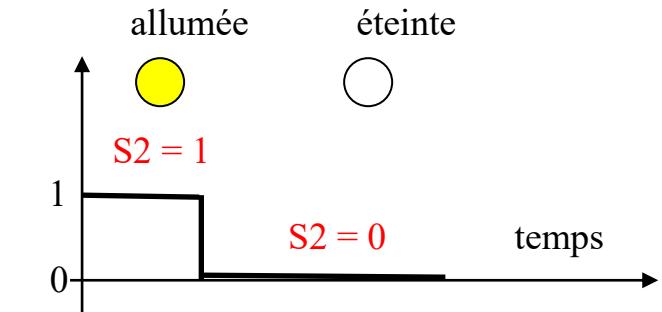
Variable d'entrée

Etat logique



Variable de sortie

Etat logique



4 formes d'analyses

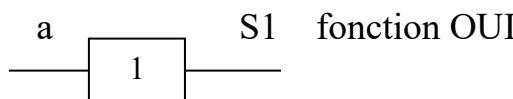
✓ Forme littérale

Lorsqu'il y a action sur a, la lampe s'allume.

Lorsque a est au repos, la lampe s'éteint

✓ Forme schématique électrique

voir schéma 1

✓ Forme logigramme : symbole logique✓ Forme arithmétique : table de vérité

a	S1
0	0
1	1

✓ Forme algébrique : équation logique

$$S1 = 1 \text{ quand } a = 1$$

D'où $S1 = a$

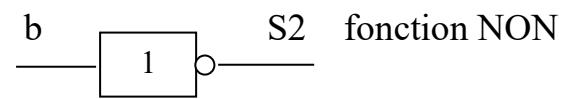
✓ Forme littérale

Lorsque le contact b est au repos, la lampe est allumée.

Lorsqu'il y a action sur b, la lampe s'éteint.

✓ Forme schématique électrique

voir schéma 2

✓ Forme logigramme : symbole logique✓ Forme arithmétique : table de vérité

b	S2
0	1
1	0

✓ Forme algébrique : équation logique

$$S2 = 1 \text{ quand } b = 0$$

D'où $S2 = \bar{b}$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 4 sur 31	

Remarques :

La **table de vérité** est un tableau ordonné qui permet de faire l'inventaire de toutes les **combinaisons possibles** des **variables** d'entrées. Les variables d'entrées sont codées en binaire naturel en fonction du nombre de BIT.

Les équations logiques traduisent la table de vérité.

Construction d'une table de vérité

Opérateurs logiques de base.

SYMBOLES

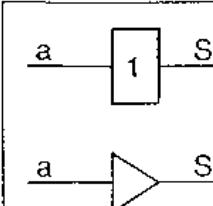
TABLES DE VERITE

EQUATIONS

SCHEMAS ELECTRIQUES

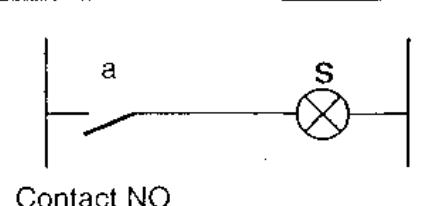
• Opérateur logique OUI

OUI



a	S
0	0
1	1

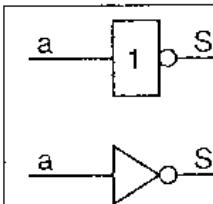
$S = a$



Contact NO

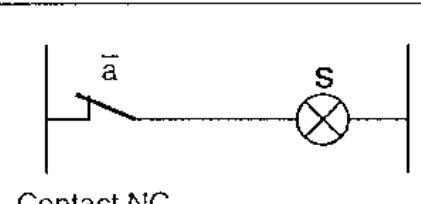
• Opérateur logique NON

NON



a	S
0	1
1	0

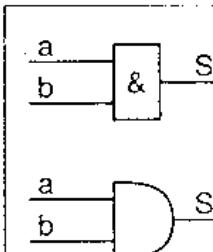
$S = \bar{a}$



Contact NC

• Opérateur logique ET

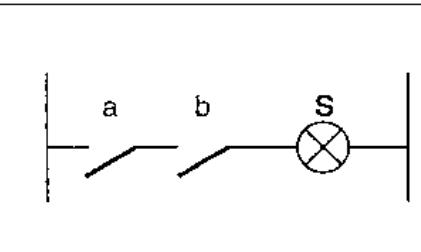
ET



a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

signe ET

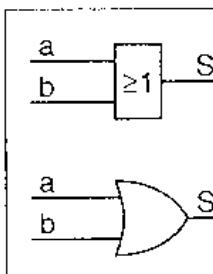
$S = a \cdot b$

Lire :
S égal a ET b

2 contacts en série

• Opérateur logique OU

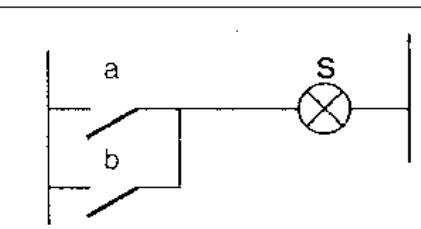
OU



a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

signe OU

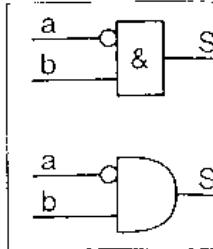
$S = a + b$

Lire :
S égal a OU b

2 contacts en parallèle

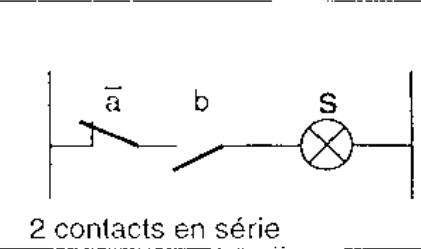
• Opérateur logique INHIBITION

INHIBITION



a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$S = \bar{a} \cdot b$



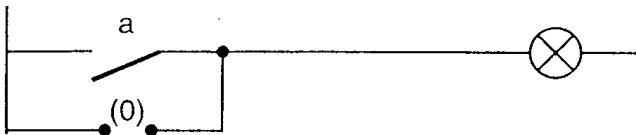
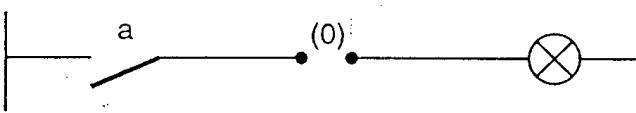
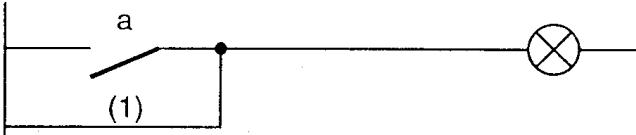
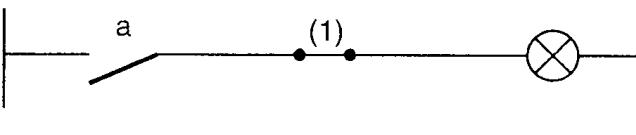
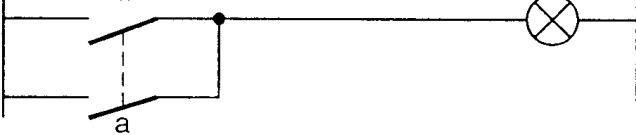
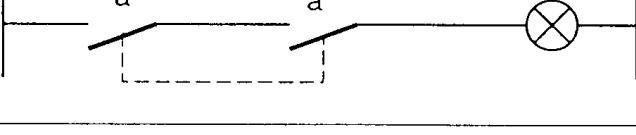
2 contacts en série

LES FONCTIONS LOGIQUES

Relations particulières (propriétés).

Les relations particulières permettent de simplifier des expressions logiques lorsqu'elles se présentent sous la forme des équations suivantes.

- ✓ écrire les équations d'après les représentations électriques suivantes.

REPRESENTATION ELECTRIQUE	EQUATIONS
	$a + 0 = a$
	$a \cdot 0 = 0$
	$a + 1 = 1$
	$a \cdot 1 = a$
	$a + a = a$
	$a \cdot a = a$
	$a + \bar{a} = 1$
	$a \cdot \bar{a} = 0$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 7 sur 31	

Propriétés (suite).

Commutativité.

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Associativité.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivité.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Identités remarquables.

$$a + a \cdot b = a$$

$$a + \overline{a} \cdot b = a + b$$

Exemples:

$$Y = ab\bar{d} + a\bar{b}\bar{d} = a\bar{b}(d + \bar{d}) = a\bar{b} \cdot 1 = \boxed{a\bar{b}}$$

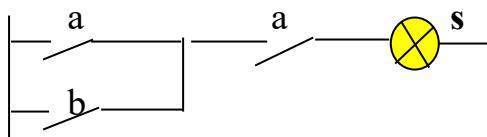
$$Z = (\bar{a} + b) \cdot (a + b) =$$

$$W = (\bar{a}bcd) + (acd) =$$

Simplification des expressions logiques.

Problème 1 : simplifier l'équation logique $S = a (a + b)$

Analyse électrique



$S = 1$ quand a et b actionné
quand a actionné seul donc

$$S = a$$

Analyse algébrique

$$S = a.a + a.b$$

$$S = a + a.b$$

$$S = a (b + 1)$$

$$S = a$$

Conclusion :

- Lorsqu'une somme logique contient un terme et un multiple de ce terme, on peut supprimer ce multiple. Ex : $a + \cancel{a.b}$
- Inversement, on peut ajouter à une somme, un multiple d'un terme de cette somme, soit : $S = a$ et $S = a + ab$ **(relation d'absorption)**
- Lorsqu'une somme logique contient un terme et qu'un autre terme contient le complément de ce terme, on peut supprimer ce complément. Ex : $a + \cancel{a}.b$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1 <i>Page 9 sur 31</i>
-----------------------------------	---	--------	-------------------------------------

Exercices 1.

Résoudre les équations suivantes :

$$1^\circ \ a + a + a + a =$$

$$2^\circ \ a + \overline{a} =$$

$$3^\circ \ a + a + \overline{a} =$$

$$4^\circ \ b + bc + ab =$$

$$5^\circ \ a \cdot 1 =$$

$$6^\circ \ a + 1 =$$

$$7^\circ \ a \cdot 0 =$$

$$8^\circ \ a + 0 =$$

$$9^\circ \ a (bc \cdot 0) =$$

$$10^\circ \ abc + a + \overline{a} =$$

$$11^\circ \ bc (1 + 0) =$$

$$12^\circ \ abc + ac + ab + \overline{a} + a =$$

$$13^\circ \ abcd + cd + bc + 1 + bc \cdot 0 =$$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	<i>Activité E1</i>
		<i>Page 10 sur 31</i>	

Exercices 1(suite).

Résoudre les équations suivantes :

$$14^\circ (abc + a + bc + c + ab + b).a.\overline{a} =$$

$$15^\circ a + \overline{a} + ab + \overline{ab} + a.\overline{a} =$$

$$16^\circ cb + c + b + cc + b.\overline{b} =$$

$$17^\circ (ab).(c + 1).(b.\overline{b} + a) =$$

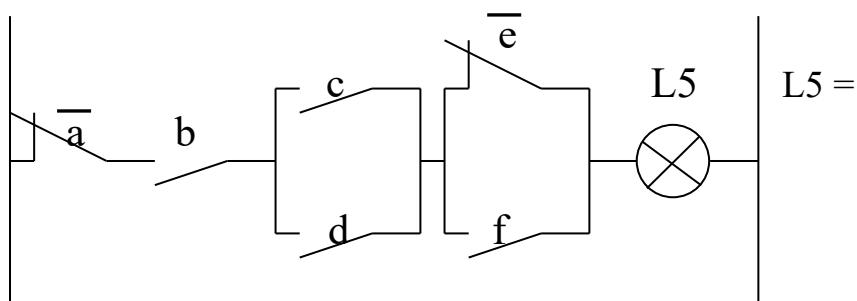
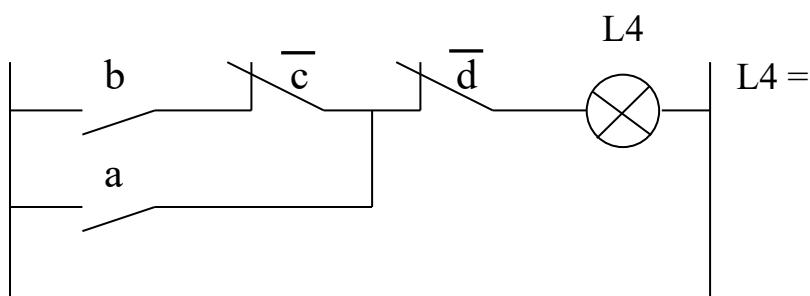
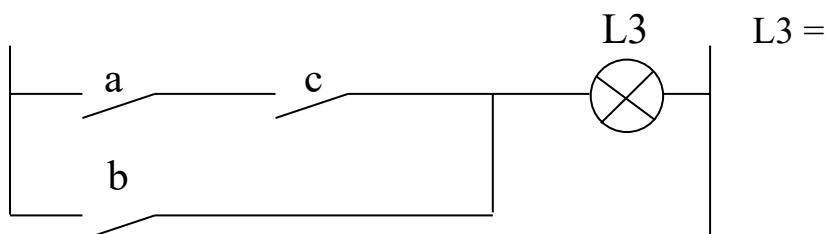
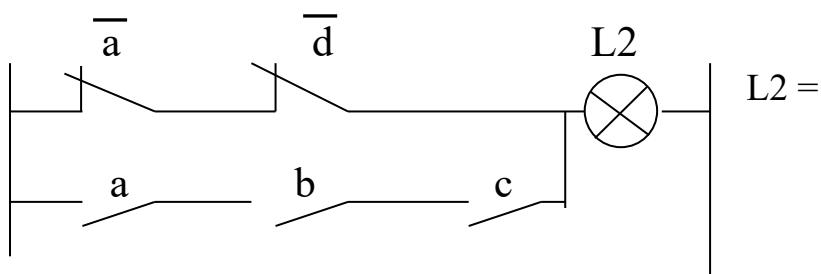
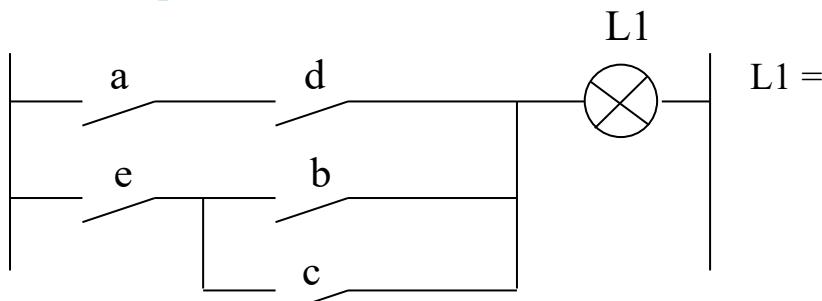
$$18^\circ (\overline{b}.b) + (b + \overline{b}) =$$

$$19^\circ (\overline{b}.b).(\overline{b} + b) =$$

$$20^\circ (abcde + abcd + abc).(abc + \overline{a} + a).(abca) =$$

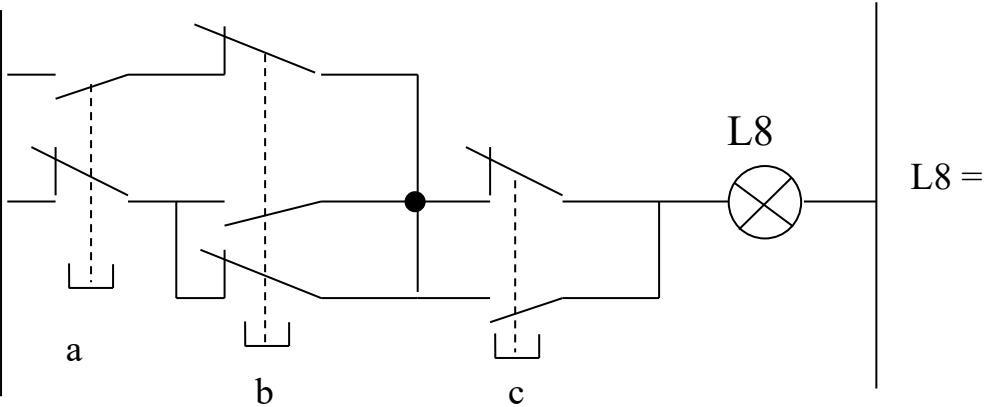
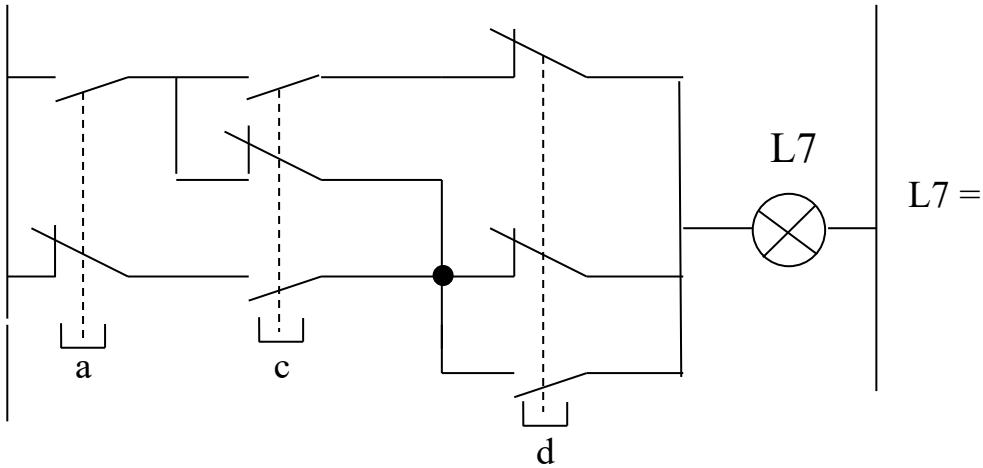
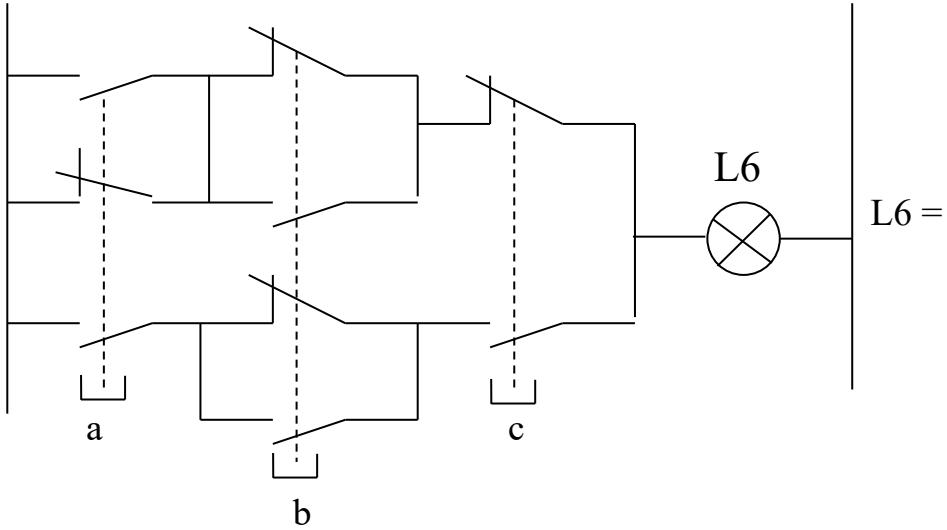
Exercices 2.

Etablir les équations des schémas suivants :



Exercices 2 (suite).

Etablir les équations des schémas suivants.



C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
			<i>Page 13 sur 31</i>

Exercices 3.

Etablir les schémas électriques pour les équations suivantes :

- 1° $KA1 = \overline{c}.\overline{b} + \overline{a}.d$
- 2° $KA2 = \overline{b}.a + d(\overline{c} + e)$
- 3° $KA3 = \overline{a}.(b + ka3)$
- 4° $KA4 = c + (\overline{a}.ka4)$
- 5° $KA5 = b.[\overline{d}.e + a.(\overline{c} + f)]$
- 6° $KA6 = \overline{b}.a + \overline{a}.\overline{c}.\overline{d}$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 14 sur 31	

Exercices 4.

Faire les logigrammes des équations suivantes en utilisant des cellules ET ; OUI ; NON et OU :

$$M = (a + b).c \quad N = (b + c)(a + d) \quad P = b + (\bar{c}.a.e.d)$$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
			<i>Page 15 sur 31</i>

Exercices 4(suite).

Etablir les logigrammes des équations L1 à L5 (voir p 11), en utilisant des cellules ET ;OU ;OUI et NON.

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
<i>Page 16 sur 31</i>			

Exercices 4(suite).

Opérateurs logiques dérivés.

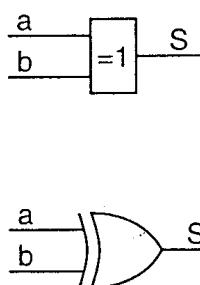
SYMBOLES

TABLE DE VERITE

EQUATIONS

SCHEMAS ELECTRIQUES

• Opérateur logique OU exclusif



a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

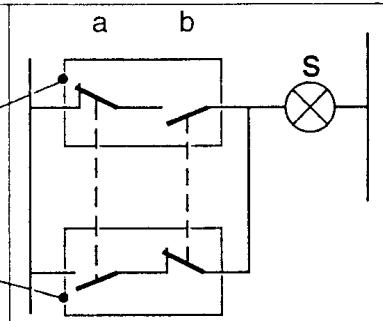
$S = 1$ pour :

$\bar{a} b$ OU $a \bar{b}$

$$S = \bar{a} b + a \bar{b}$$

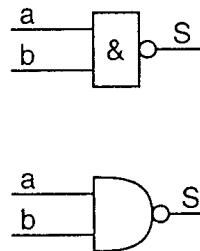
$$S = a \oplus b$$

↑
OU exclusif



VA et VIENT

• Opérateur logique NAND (NON ET)



a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$S = \bar{a} \bar{b} + \bar{a} b + a \bar{b}$$

$$S = \bar{a} + \bar{b} \Rightarrow$$

NON

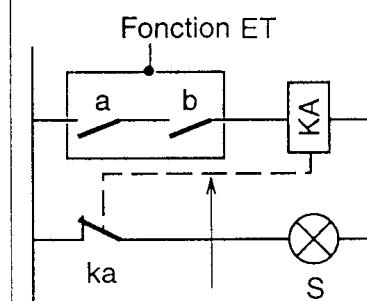
↓

$$S = \overline{a \cdot b}$$

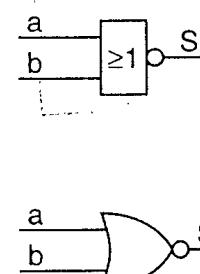
↑

ET

$S = \bar{a} + \bar{b}$

Fonction
NON

• Opérateur logique NOR (NON OU)



a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NON

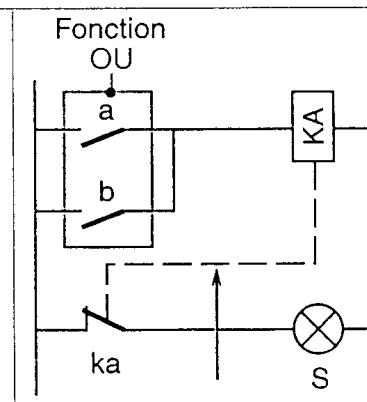
↓

$$S = \overline{a + b}$$

↑

OU

$S = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Fonction
NON

Nota: KA est un relais auxiliaire. Son contact normalement fermé permet de complémenter la sortie S.

Théorème de DE MORGAN

Interprétation des analyses précédentes.

- OPÉRATEUR LOGIQUE NAND

- L'équation de sortie se présente sous deux formes

$$S = \overline{a \bullet b}$$

$$S = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$$

- Théorème de DE MORGAN

- La complémentarité d'un

produit est égale à la

somme de chaque

terme complémenté

$$a \bullet b = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$$

- OPÉRATEUR LOGIQUE NOR

- L'équation de sortie se présente sous deux formes

$$S = \overline{a + b}$$

$$S = \overline{\overline{a} \bullet \overline{b}}$$

- Théorème de DE MORGAN

- La complémentarité d'une

somme est égale au

produit de chaque

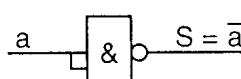
terme complémenté

$$a + b = \overline{\overline{a} \bullet \overline{b}}$$

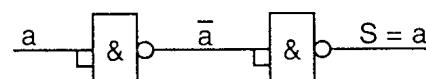
• Exemple d'application

- Réaliser toutes les fonctions logiques de base en associant que des fonctions NAND (à 2 entrées).

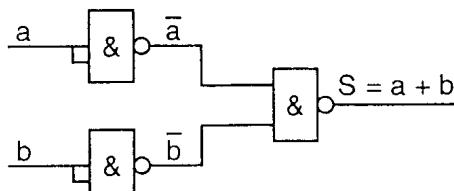
Fonction NON



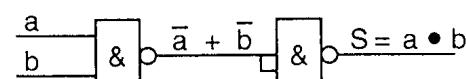
Fonction OUI



Fonction OU



Fonction ET



C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
			<i>Page 19 sur 31</i>

Exercice 5.

Etablir les logigrammes de ces équations en utilisant que des fonctions NOR.

$$S = a + (b \cdot c) \quad T = (b + a) (a + c) \quad U = [(a + c) \cdot e] [b + d]$$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 20 sur 31	

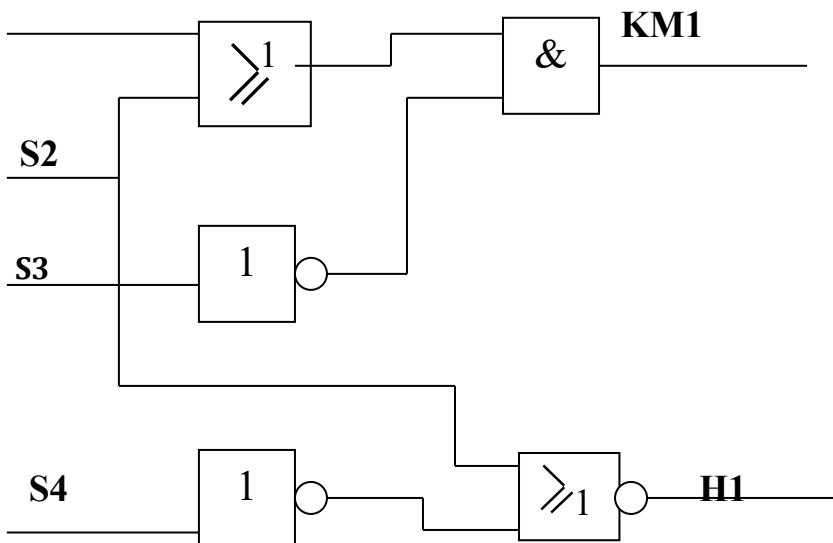
Exercice 5 (suite).

Etablir les logigrammes de ces équations en utilisant que des fonctions NAND.

$$V = a + (b \cdot c) \quad W = (b + a) \cdot (a + c) \quad X = [(a + c) \cdot e] \cdot [b + d]$$

Exercice 6.

S1

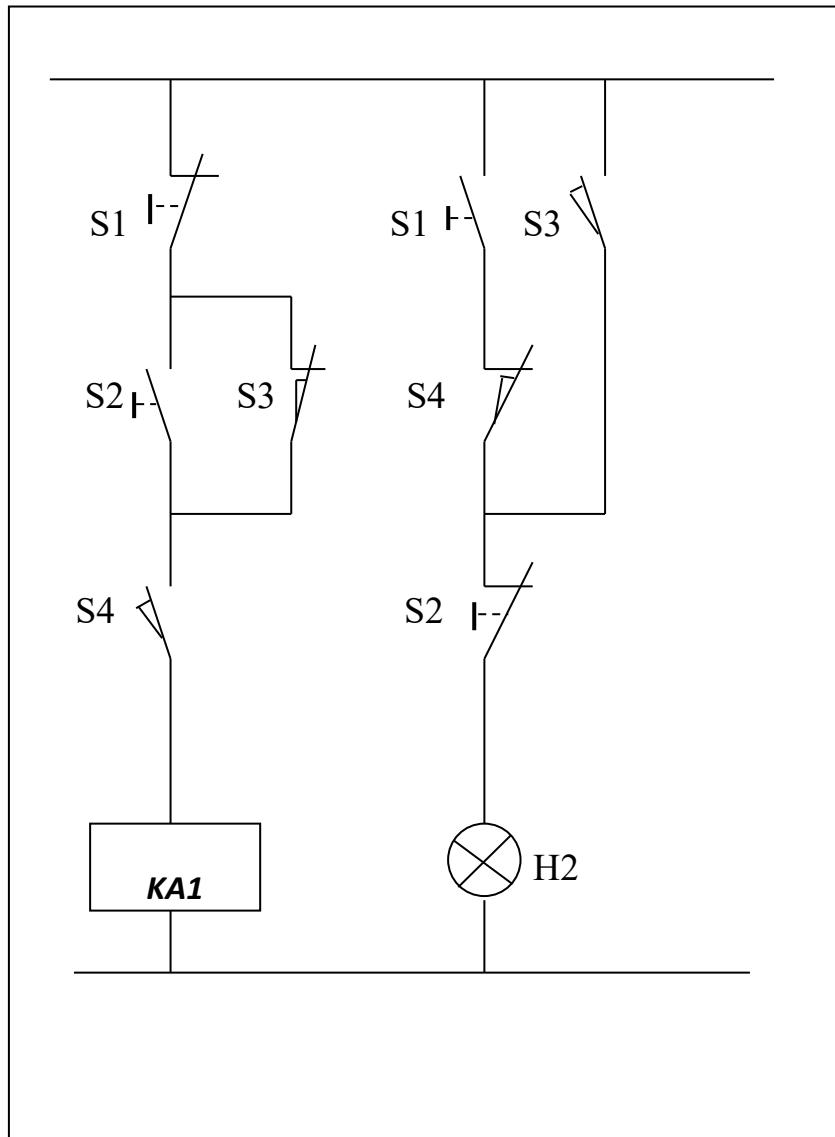
Travail demandé.

- 1° Donnez les équations de KM1 et de H1
- 2° Simplifier par le théorème de DE MORGAN
- 3° Réaliser le schéma électrique équivalent
- 4° Faire la table de vérité
- 5° Effectuer la vérification de la table de vérité pour H1 et KM1
- 6° Vérifier vos résultats en affectant 2 valeurs différentes 1011 et 1001 aux entrées dans l'ordre S1, S2, S3, S4 et en complétant les niveaux intermédiaires et terminaux obtenus (à faire sur le logigramme).
Utiliser 2 couleurs différentes pour les combinaisons.

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
			<i>Page 22 sur 31</i>

Réponse exercice 6.

Exercice 7.

**▣ Travail demandé.**

- 1° Donnez les équations des récepteurs
- 2° Faire la table de vérité
- 3° Réaliser les logigrammes correspondants.
- 4° Vérifier vos résultats en affectant 2 valeurs différentes 0100 et 0111 aux

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 24 sur 31	

Exercice 8.

Simplification des équations logiques par la méthode algébrique d'une amplification sonore.

- ✓ Les trois haut-parleurs d'une salle de cinéma (appelés a, b, c) sont branchés sur un amplificateur à deux sorties.
 - une sortie d'impédance 4 ohms (sortie S4)
 - une sortie d'impédance 8 ohms (sortie S8)
- ✓ Les données sont les suivantes :
 - un seul haut-parleur doit être relié à la sortie 8 ohms
 - Deux haut-parleurs doivent être reliés à la sortie 4 ohms
 - Le fonctionnement simultané des trois haut-parleurs est interdit

Travail demandé.

1° Rechercher les équations des sorties S4 et S8

2° Etablir les logigrammes des sorties

3° Réaliser le schéma électrique

Réponse :

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 25 sur 31	

Les tableaux de Karnaugh

1 Introduction

La réduction, pour une même expression, du nombre d'opérateurs et/ou du nombre de variables exprimées, conduit à une écriture simplifiée de cette expression.

Il existe un grand nombre de méthodes de simplification d'expression booléenne, parmi lesquelles on peut distinguer :

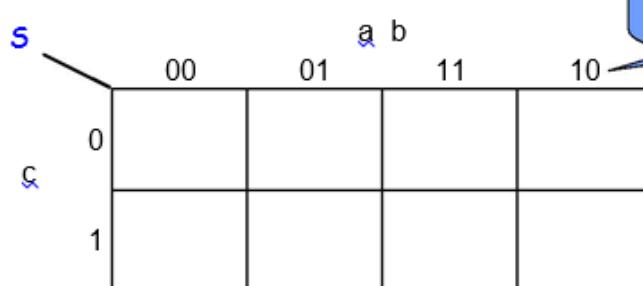
la simplification par le **tableau de Karnaugh**

On construit le tableau de Karnaugh de la fonction à simplifier. On recherche les cases adjacentes qui ont pour valeur 1 et on les regroupe, par puissance de 2, en paquets les plus gros possibles.

À l'usage, cette méthode s'avère la plus performante.

2 Construction du tableau de Karnaugh

a) Tableau à 3 variables



b) Tableau à 4 variables

		a	b		
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
11					
10					

3 Exemples

Simplification de l'équation logique suivante : $S = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + abcd + a\bar{b}cd + abc\bar{d}$, avec le tableau de Karnaugh.

		a	b		
		00	01	11	10
cd	00	0	1	1	0
	01	0	0	0	0
11	0	0	1	1	
	10	0	0	0	0

1^{er} regroupement : a change d'état et est éliminé, il reste : $\bar{b}\bar{c}\bar{d}$.2^{ème} regroupement : b change d'état et est éliminé, il reste : acd .

$S = acd + b\bar{c}\bar{d}$ (équation réduite sous forme polynôme ou canonique en ou).

LES FONCTIONS LOGIQUES

W

	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	0	0	0
10	1	0	0	0

$$W = \bar{a} \bar{b}$$

X

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$X = \bar{b}$$

LES FONCTIONS LOGIQUES

A Karnaugh map for two variables a and b . The columns are labeled $a \ b$ with values 00, 01, 11, and 10. The rows are labeled cd with values 00, 01, 11, and 10. The map shows minterms 1 at positions (00,00), (10,00), (10,10), and (10,11). Blue lines highlight these minterms.

	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$Y = \bar{b} \bar{d}$$

A Karnaugh map for three variables a , b , and c . The columns are labeled $a \ b$ with values 00, 01, 10, and 11. The rows are labeled cd with values 00, 01, 10, and 11. The map shows minterms 1 at positions (01,11) and (10,11). A blue box highlights these minterms.

	00	01	10	11
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
10	0	1	1	0
11	0	0	0	0

Écriture simplifiée par notation de Girard

$$Z = \overline{b} d$$

4 Exercices

- a) Simplifier à l'aide du tableau de Karnaugh l'équation logique suivante :

$$T = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d} + \bar{a} b c \bar{d} + a b c \bar{d} + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + a \bar{b} c \bar{d}$$

LES FONCTIONS LOGIQUES

T

	00	01	a b	11	10
cd	00	0	1	1	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	1	1	1

$$T = b\bar{d} + c\bar{d}$$

b) D'après le tableau de Karnaugh ci-dessous, rechercher l'équation logique réduite.

U

	00	01	a b	11	10
cd	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	0	1
	10	1	1	1	1

Il suffit ici de prendre le 0 et de passer par le théorème de DE MORGAN.

$$\bar{U} = \text{abcd}$$

$$U = \bar{\bar{U}} = \overline{\text{abcd}}$$

$$U = \overline{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}}$$

$$U = \overline{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}}$$

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
		Page 30 sur 31	

Exercice 9.

Simplification des équations logiques par la méthode algébrique d'une serrure de coffre.

- ✓ Quatre responsables (A, B, C, D) d'une société peuvent avoir accès à un coffre. Ils possèdent chacun une clé différente (a, b, c, d).
- ✓ Les données sont les suivantes :
 - le responsable A ne peut ouvrir le coffre qu'en présence du responsable B ou du responsable C.
 - les responsables B, C, D ne peuvent ouvrir le coffre qu'en présence d'au moins deux des autres responsables.

Travail demandé.

1° rechercher l'équation logique de la serrure (S) en fonction des clés des responsables en utilisant le tableau de Karnaugh

2° Etablir le schéma électrique ainsi que le logigramme en utilisant que des fonctions NAND puis que des fonctions NOR.

Réponse :

C 03 PARTICIPER A UN PROJET	<i>Bloc n°1 BAC PRO CIEL</i> LES FONCTIONS LOGIQUES	⊕ : 8h	Activité E1
Page 31 sur 31			

Réponse exercice 9.