Chapitre 1. Notions de base

1.1. Eléments de logique

- Une assertion (ou : propriété) p peut être vraie (V) ou fausse (F) (l'une des deux, mais pas les deux à la fois). La table de vérité ci-contre consigne ces deux possibilités :

p
V
F

Un théorème, proposition, corollaire ou lemme est une assertion vraie.

- La négation d'une assertion p est l'assertion notée non p (ou : $\neg p$), définie par la table de vérité ci-dessous

p	$\neg p$
V	F
F	V

On remarque que $\neg(\neg p)$ est équivalente à p.

- les connecteurs logiques :

→ disjonction : et (notée $\wedge$)

→ Conjonction : ou (notée $\vee$)

→ Implication : $\Longrightarrow$

→ Equivalence logique : $\Longleftrightarrow$

sont définis par :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

- Dans l'implication $p \Rightarrow q$, p s'appelle l'hypothèse, q la conclusion.
- On peut exprimer $p \Rightarrow q$ de l'une des façons suivante :

  Pour que p, il faut que q

  Pour que q, il suffit que p

  si p, alors q

  p est une condition suffisante pour q

  q est une condition nécessaire de p.
- L'équivalence logique $p \Leftrightarrow q$ peut s'exprimer par :

  Pour que p, il faut et suffit que q

  p est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour q

  p si et seulement si (ssi) q.
- $q \Rightarrow p$ s'appelle la réciproque de l'implication $p \Rightarrow q$.
- La contraposée de l'implication $p \Rightarrow q$ est l'implication équivalente $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Théorème

Soient p et q deux assertions.

i) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

ii) Lois de Morgan :

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

iii) $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$: Principe de contraposition

iv) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

v) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

Dém. La démonstration est donnée par la table de vérité ci-dessous

I			II				III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	q	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V

Ainsi i) I $\Leftrightarrow$ II

ii) III $\Leftrightarrow$ V

IV $\Leftrightarrow$ VI

iii) VII $\Rightarrow$ X

iv) VII $\Leftrightarrow$ VIII

v) $\neg(p \Rightarrow q) \overset{iv)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg p \wedge q) \overset{ii)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg p) \wedge \neg q$

$\overset{i)}{\Leftrightarrow} p \wedge \neg q$

- p et $\neg p$ est une contradiction
- Raisonnement par l'absurde

Pour établir que $p \Rightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et q est fausse et on montre que cela entraîne une contradiction.

2. Ensemble

- Un ensemble est une collection d'objets.

  Par exemple : $\{-1, 3, 10\}$, $\{\triangle, \square, ⌂\}$, $[0,4[$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- La notation $x \in E$ signifie x appartient à E (ou : x est un élément de E).

  La négation de $x \in E$ est $x \notin E$.
- On note $\emptyset$ l'ensemble vide qui n'a aucun élément.
- Un ensemble ayant un élément x et un seul est appelé singleton et noté $\{x\}$.
- Le quantificateur universel $\forall$ se lit "pour tout" ou "quel que soit".
- Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit " il existe au moins un élément".
- La notation $\exists!$ signifie : il existe un et un seul élément.
- $\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg P(x))$

  Par exemple $\neg(\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} ; n^2 \notin \mathbb{N})$
- $\neg(\exists x \in E ; P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg P(x))$

  Par exemple $\neg(\exists n \in \mathbb{Z} ; n^2 \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z} ; n^2 \notin \mathbb{N})$.

Remarque

On ne peut pas, a priori, modifier l'ordre des quantificateurs. Par exemple,
($\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \leq m$) est vraie, mais
($\exists m \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \leq m$) est fausse.

3. Inclusion

3.1. Définition

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F (ou : que E est une partie de F, ou : F contient E) et on note $E \subset F$ (ou : $F \supset E$) si
$\forall x \in E, x \in F$ (ou : $x \in E \Longrightarrow x \in F$)
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

3.2. Remarques

- $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E.
- $E \subset E$ pour tout ensemble E.
- La négation de $E \subset F$ est notée $E \not\subset F$ et on a :
  $E \not\subset F \Longleftrightarrow (\exists x \in E, x \notin F)$
- $E = F \Longleftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in E \Longrightarrow x \in F \\ x \in F \Longrightarrow x \in E \end{cases}$
  $\Longleftrightarrow (x \in E \Longleftrightarrow x \in F)$.

3.3. Exemples

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
- $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\},$
  $\{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

3.4. Définition

On appelle cardinal d'un ensemble E et l'on note $\mathrm{Card}\,E$, le nombre d'éléments de E si E est fini, sinon, $\mathrm{Card}\,E = +\infty$.

Par exemple, $\mathrm{Card}\,\{1,4,5\} = 3$, $\mathrm{Card}\,\emptyset = 0$, $\mathrm{Card}\,\{a\} = 1$, $\mathrm{Card}\,\mathbb{N} = \mathrm{Card}\,\mathbb{Z} = \mathrm{Card}\,\mathbb{Q} = \mathrm{Card}\,\mathbb{R} = \mathrm{Card}\,\mathbb{C} = +\infty$

3.5. Remarque

$\mathrm{Card}\,E = n \Rightarrow \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

4. Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

4.1. Définition

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit les parties suivantes de $\mathcal{P}(E)$:

- $A \cup B = \{x \in E ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$, réunion de A et B
- $A \cap B = \{x \in E ;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$, intersection de A et B.
- $C_E(A) = \{x \in E ;\ x \notin A\}$, complémentaire de A dans E.
- $A - B = \{x \in E ;\ x \in A,\ x \notin B\}$, différence A moins B
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, différence symétrique de A et B.

4.2. Remarques

- On note parfois $A \setminus B$ au lieu de $A - B$ et $\bar{A}$ au lieu de $C_E(A)$ s'il n'y a pas risque de confusion.
- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

4.3. Exemple

Soient $E = [\![0, 9]\!]$, $A = \{1, 3, 5, 6\}$ et $B = \{0, 2, 5, 6, 8\}$

On a :

$A \cap B = \{5, 6\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8\}$

$A - B = \{1, 3\}$

$B - A = \{0, 2, 8\}$

$A \Delta B = \{1, 3, 0, 2, 8\}$

$\bar{A} = \{0, 2, 4, 7, 8, 9\}$

$\bar{B} = \{1, 3, 4, 7, 9\}$

5. Produit d'ensembles

5.1. Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F et l'on note $E \times F$, l'ensemble

$E \times F = \{(x, y) ; x \in E, y \in F\}$

5.2. Remarques

- L'ensemble $E \times E$ est souvent noté E^2
- On peut écrire $\forall x, y \in E$, au lieu de $\forall (x, y) \in E^2$.
- $(x, y) = (x', y') \iff (x = x' \text{ et } y = y')$

5.3. Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$, alors

$E \times F = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

et $F \times E = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$.

6. Applications

6.1. Définition

Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle application f définie sur E et à valeurs dans F, toute loi qui, à tout x de E fait correspondre un unique élément $f(x)$ de F. L'ensemble E (resp. F) s'appelle l'ensemble de départ (resp. d'arrivée) de f. L'élément $f(x) = y$ s'appelle l'image de x par f et x s'appelle un antécédent de y par f.

On note souvent
$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

6.2. Exemples

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x^2 + 1$

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \sqrt{x}$ (mais pas application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ car par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$).

- $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- $f : E \to E$
  $x \mapsto x$ s'appelle l'application identité et se note Id_E.

6.3. Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
On définit la composée de f et g de E dans G.
par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, pour tout $x \in E$.

6.4. Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$

On a : $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

et $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1$$

On remarque que $f \circ g \neq g \circ f$.

6.5. Définition

Soit $f : E \to F$ une application

i) On dit que f est injective si,
$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
En d'autres termes, tout élément de F a au plus un antécédent.

ii) On dit que f est surjective si,

$\forall y \in F, \exists x \in E ; y = f(x)$

En d'autres termes, tout élément de F a au moins un antécédent.

iii) On dit que f est bijective si f est injective et surjective. Càd :

$\forall y \in F, \exists! x \in E ; y = f(x)$

En d'autres termes, tout élément de F a un et un seul antécédent.

6.6. Définition

On appelle bijection réciproque d'une bijection $f : E \to F$, l'application $f^{-1} : F \to E$ définie par $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Il est clair que f^{-1} est aussi bijective.

6.7. Exemple

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective et sa bijection réciproque est $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

6.8. Remarque

Si $f : E \to F$ est bijective, alors

$f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

Càd : $\forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = y$ et $\forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x$

6.9. Definition

Soient $f : E \to F$ une application, $A \in P(E)$ et $B \in P(F)$

i) Si $A \in P(E)$, on appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{ f(x) \, ; \, x \in A \}.$$

On a : $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \, ; \, y = f(x)$.

ii) Si $B \in P(F)$, on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \, ; \, f(x) \in B \}.$$

On a : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

6.10. Remarque

Ne pas confondre l'application $f^{-1} : P(F) \to P(E)$ ainsi définie (qui existe pour toute application f) avec la bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ (qui n'existe que si f est bijective.

6.11. Exemple

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \{0, -1, 1, 2\}$, $B = \{0, 4, -5\}$ et $C = \{-1, -2, -3\}$

On a : $f(A) = \{ f(0), f(-1), f(1), f(2) = \{0, 1, 4\}$

$f^{-1}(B) = \{0, 2, -2\}$

$f^{-1}(C) = \emptyset$

6.12. Définition

Soit $f : E \to F$ une application et $A \in \mathcal{P}(E)$.
On définit la restriction de f à A par

$$f_{|A} : \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

6.13. Exemple

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

f n'est pas bijective.

Mais la restriction

$$f_{|\mathbb{R}_-} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est bijective.