

Examen final

Janvier 2022

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (3 points)

1. Donner les négations des assertions suivantes :

- a) $p \wedge (q \wedge r)$,
- b) $p \vee (q \wedge r)$.

2. Exprimer à l'aide de quantificateurs, puis donner les négations des assertions suivantes :

- a) Il existe un entier naturel plus petit que tous les autres,
- b) Le carré de tout entier relatif est un entier naturel.

Exercice 2 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = A + I_3$.

- 1. Montrer que B est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
- 2. Pour tout entier naturel n , développer $(B - I_3)^n$ par la formule du binôme de Newton et simplifier.
- 3. En déduire A^n , pour tout entier naturel n .

Exercice 3 (3 points)

Soit $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$. Montrer que 1 est une racine de P et donner son ordre de multiplicité. En déduire l'écriture de P comme un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 4 (4 points)

Soient $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.

- 1. Déterminer le pgcd, puis le ppcm de P et Q .
- 2. Trouver deux polynômes U et V tels que $PU + QV = X + 1$.

Exercice 5 (2 points)

Déterminer le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes de $S = X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $T = X^2 + X + 1$ à l'ordre 2.

Exercice 6 (4 points)

On considère la fraction rationnelle $F = \frac{X^5 + 2X^3 + X}{X^3 - X}$.

- 1. Trouver un représentant irréductible de F .
- 2. Déterminer la parties entière et la partie fractionnaire de F .
- 3. Décomposer la fraction rationnelle $G = \frac{4}{X^2 - 1}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.
- 4. En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle F .

Devoir surveillé
Mardi 29 novembre 2022

Durée : 1h30mn

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices est interdit.

Exercice 1 (2 points)

Etablir le théorème de logique de distributivité de et sur ou :

$$[(p \vee r) \wedge r] \iff [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)].$$

Exercice 2 (8 points)

1. On considère l'application $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ de $\mathbb{R} - \{1\}$ dans \mathbb{R} . L'application f est-elle injective, surjective ? Quelle est son image ?
2. Etant donnée l'application bijective g de $[2, +\infty[$ dans $[3, +\infty[$ définie par $g(x) = x^2 - 4x + 7$, donner son inverse. (*On ne demande pas de montrer que g est bijective.*)
3. Déterminer, si elles existent, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 3 (6 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Montrer que B est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
2. Pour tout entier n , développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme de Newton et simplifier.
3. En déduire A^n , pour tout entier n .

Exercice 4 (4 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour calculer l'inverse de la matrice A .
2. En déduire la résolution du système :

$$(S) \begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x + y + 2z = b \\ -x - 2y - 2z = c \end{cases} .$$

Où, a, b, c sont des nombres réels.