

**Examen final**

Janvier 2022

Durée : 2 heures

*Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices est interdit.*

**Exercice 1 (3 points)**

- Donner les négations des assertions suivantes :
  - $p \wedge (q \wedge r)$ ,
  - $p \vee (q \wedge r)$ .
- Exprimer à l'aide de quantificateurs, puis donner les négations des assertions suivantes :
  - Il existe un entier naturel plus petit que tous les autres,
  - Le carré de tout entier relatif est un entier naturel.

**Exercice 2 (4 points)**

Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = A + I_3$ .

- Montrer que  $B$  est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
- Pour tout entier naturel  $n$ , développer  $(B - I_3)^n$  par la formule du binôme de Newton et simplifier.
- En déduire  $A^n$ , pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 3 (3 points)**

Soit  $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$ . Montrer que 1 est une racine de  $P$  et donner son ordre de multiplicité. En déduire l'écriture de  $P$  comme un produit de polynômes de degré 1.

**Exercice 4 (4 points)**

Soient  $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$  et  $Q = X^3 + X^2 - X - 1$ .

- Déterminer le pgcd, puis le ppcm de  $P$  et  $Q$ .
- Trouver deux polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $PU + QV = X + 1$ .

**Exercice 5 (2 points)**

Déterminer le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes de  $S = X^4 + X^3 - 2X + 1$  par  $T = X^2 + X + 1$  à l'ordre 2.

**Exercice 6 (4 points)**

On considère la fraction rationnelle  $F = \frac{X^5 + 2X^3 + X}{X^3 - X}$ .

- Trouver un représentant irréductible de  $F$ .
- Déterminer la partie entière et la partie fractionnaire de  $F$ .
- Décomposer la fraction rationnelle  $G = \frac{4}{X^2 - 1}$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- En déduire la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}[X]$  de la fraction rationnelle  $F$ .

**Devoir surveillé**  
Mardi 29 novembre 2022

Durée : 1h30mn

*Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices est interdit.*

**Exercice 1** (2 points)

Etablir le théorème de distributivité de et sur ou :

$$[(p \vee r) \wedge r] \iff [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)].$$

**Exercice 2** (8 points)

1. On considère l'application  $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$  de  $\mathbb{R} - \{1\}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application  $f$  est-elle injective, surjective ? Quelle est son image ?
2. Etant donnée l'application bijective  $g$  de  $[2, +\infty[$  dans  $[3, +\infty[$  définie par  $g(x) = x^2 - 4x + 7$ , donner son inverse. (On ne demande pas de montrer que  $g$  est bijective.)
3. Déterminer, si elles existent,  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 3** (6 points)

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = A - I_3$ .

1. Montrer que  $B$  est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
2. Pour tout entier  $n$ , développer  $(B + I_3)^n$  par la formule du binôme de Newton et simplifier.
3. En déduire  $A^n$ , pour tout entier  $n$ .

**Exercice 4** (4 points)

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour calculer l'inverse de la matrice  $A$ .
2. En déduire la résolution du système :

$$(S) \begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ x + y + 2z = b \\ -x - 2y - 2z = c \end{cases}.$$

Où,  $a, b, c$  sont des nombres réels.