Devoir Processus stochastique

EX1 : 20/21

1) $Z \sim \mathcal{E}(1) \qquad Y = 1_{[a,1]}(Z)$

$$E(Z/Y) = \underbrace{E(Z/Y=0)}_{\frac{1}{P(Y=0)} E(1_{(Y=0)} Z)} \underbrace{1_{(Y=0)}}_{1-Y} + \underbrace{E(Z/Y=1)}_{\frac{1}{P(Y=1)} E(1_{(Y=1)} Z)} \underbrace{1_{(Y=1)}}_{Y}$$

$$P(Y=1) = P(1 < Z < 2) = F_Z(2) - F_Z(1)$$
$$= (1-e^{-2}) - (1-e^{-1})$$
$$= e^{-1} - e^{-2}$$

$$E(1_{(Y=1)} Z) = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} E(H(Z)) = \int_0^{+\infty} H(z) e^{-z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[1,2]}(z) z e^{-z} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*} dz$$

$$= \int_1^2 z e^{-z} dz \left(\text{par partie} \right)$$

$E(\cancel{(1-Y)Z}) = \cancel{\frac{1}{P}}$

$$\frac{1}{P(Y=0)} E(1_{Y=0} Z) \; E(1_{(Y=0)} Z) = \frac{1}{1-(e^{-1}-e^{-2})} E((1-Y)Z)$$

$$1_{(Y=1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(\omega) = 1 \\ 0 & \text{si } Y(\omega) = 0 \end{cases} = Y$$

$$1\!\!1_{A^c} = 1 - 1\!\!1_A$$

$Y = 1_{[1,2]}(Z) = H(Z)$ donc Y est $\sigma(Z)$ - mesurable

$E(Y/Z) = Y$

$E(1_A/1_B) = E(1_A/\underbrace{1_B}) \, (1_B = 0) + E(1_A/1_B) \, (\underbrace{1_B = 1})$

$= E(1_A/B^c)(1 - 1_B) + E(1_A/B) \, 1_B$

$= \frac{1}{P(B^c)} E(1_{B^c} 1_A)(1 - 1_B) + \frac{1}{P(B)} E(1_A 1_B) \, 1_B$

$= P(A/B^c)(1 - 1_B) + P(A/B) \, 1_B$

$E(1_A/1_B) = P(A/B^c)(1 - 1_B) + P(A/B) \, 1_B$

$= \left(P(A/B) - P(A/B^c)\right) 1_B + P(A/B^c)$

2-1) $E(|X_n|) < +\infty \quad \forall n \geq 1$

posons $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \dots X_n) \quad n \geq 1$

- Y_n est $\mathcal{F}_n^X$-mesurable, $\forall n \geq 1$ c-à-d $(Y_n)_{n \geq 1}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 1}$

  $Z_n = Y_n + \text{cst}$ donc Z_n est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 1}$

- $|Y_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |X_k| \Rightarrow E(|Y_n|) \leq \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|)$

$\Rightarrow E(|Z_n|) \leq E(|Y_n|) + \sum_{k=1}^{n} |E(X_k)| < +\infty$

$E(Z_{n+1} - Z_n / \mathcal{F}_n^X) = E(X_{n+1} - E(X_{n+1}) / \mathcal{F}_n^X)$

$= E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n^X) - E(X_{n+1} / \cancel{\mathcal{F}_n^X})$

$\underset{X_{n+1} \perp \mathcal{F}_n^X}{=} E(X_{n+1}) - E(X_{n+1}) = 0$

3-2 $\quad E(X_n^2) < +\infty$

$$T_n = Y_n^2 - \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) \rightarrow F_n^X \text{ - mesurable}$$

$$E(|T_n|) \leq E(Y_n^2) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)$$

$$Y_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,n}} X_k X_l \Rightarrow E(Y_n^2) = \sum_{\substack{k=1\dots n \\ l=1\dots n}} E(X_k X_l) < +\infty$$

T_n est dans $L^1(P)$

$$T_{n+1} - T_n = Y_{n+1}^2 - Y_n^2 - E(X_{n+1}^2)$$

$$= (Y_n + X_{n+1})^2 - Y_n^2 - E(X_{n+1}^2)$$

$$= \cancel{Y_n^2} + 2X_{n+1}Y_n + X_{n+1}^2 - \cancel{Y_n^2} - E(X_{n+1}^2)$$

$$= 2X_{n+1}Y_n + X_{n+1}^2 - E(X_{n+1}^2)$$

$$E(T_{n+1} - T_n / F_n^X) = 2E(X_n Y_n / F_n^X) + E(X_{n+1}^2 / F_n^X) - E(E(X_{n+1}^2) / F_n^X)$$

$$= 2Y_n E(X_{n+1} / F_n^X) + E(X_{n+1}^2 / F_n^X) - E(X_{n+1}^2)$$

Y_n est F_n^X - mesurable

$$= 2Y_n E(X_{n+1}) + E(X_{n+1}^2) - E(X_{n+1}^2)$$

$X_{n+1} \perp F_n^X$

$X_{n+1}^2 \perp F_n^X$

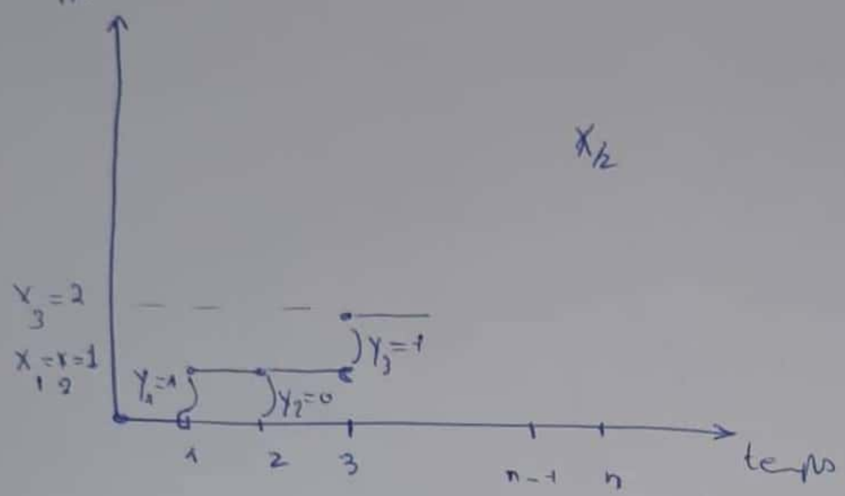
$$= 0$$

Exercice 02: (20-21)

$(Y_n)_{n\geq 1}$ v.a iid $\sim \mathcal{B}er(p)$

$X_0 = 0 \quad X_n = Y_1 + \cdots + Y_n \quad n \geq 1$

On fix ω



1/ Mq $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ P p.s

$$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \bar{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{E(Y_1)}_{= p} \text{ P.p.s (L.F.G.N)}$$

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \omega \in \Omega \;/\; \frac{X_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p \right\}$$

$P(\tilde{\Omega}) = 1$

soit $\omega \in \tilde{\Omega}$ $\quad \frac{X_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p \Rightarrow X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

càd $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ sur $\tilde{\Omega}$ $\quad P(\tilde{\Omega}) = 1$

D'où $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P\text{ p.s}} +\infty$

2/ $y \in \mathbb{N}^*$ $\quad T_y = \inf\{ n \geq 1 \;/\; X_n = y \}$

Posons $\mathcal{F}_n^Y = \sigma(Y_1 - Y_n) \; n \geq 1 \quad \mathcal{F}_0^Y = \{\emptyset, \Omega\}$

X_n est $\mathcal{F}_n^Y$ - mesurable $\Rightarrow (X_n)_{n\geq 0}$ est adapté à la filtrat

$A = \{y\}^c \in \beta(\mathbb{R})$ le complémentaire d'un ouvert

$T_y = \inf\{n \geq 1 \,/\, X_n \in A\}$ est un T.a $/ (\mathcal{F}_n^Y)_{n \geq 0}$

car $(X_n)_{n \geq 0}$ est adapté à la filtration

$(T_y = n) = (X_1 \neq y\,;\, X_2 \neq y\,;\, \dots\,;\, X_{n-1} \neq y\,;\, X_n = 0) \in \mathcal{F}_n^Y$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{est } \mathcal{F}_n^Y\text{ - mesurable}} \left(A^c \times \dots \times A^c \times A \right) \in \mathcal{F}_n^Y$$

2) b) $P(T_y < +\infty) = 1$?

$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega \,/\, X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty\}$

$\omega \in \tilde{\Omega} \Rightarrow \exists\, n_0(\omega) \,/\, \forall n \geq n_0 \quad X_n(\omega) > y$

$A = y > 0$

$\Rightarrow T_y(\omega) < +\infty$, càd : $T_y < +\infty$ sur $\tilde{\Omega}$

$P(\tilde{\Omega}) = 1$

$\Rightarrow P(T_y < +\infty) = 1$

3) $|X_n| \leq n \Rightarrow E(|X_n|) < +\infty$

- X_n est $\mathcal{F}_n^Y$ - mesurable
- $E(M_{n+1} - M_n / \mathcal{F}_n^Y)$

$= E(Y_{n+1} - p / \mathcal{F}_n^Y)$

$= \underbrace{E(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n^Y)}_{E(Y_{n+1}) = p} - p = 0$

$\Rightarrow (M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale $/ (\mathcal{F}_n^Y)_{n \geq 0}$

$\Rightarrow (M_n^T)_{n \geq 0}$ " "

$M_n^T = M_{n \wedge T} = X_{n \wedge T} - (n \wedge T)p$

$\downarrow n \to +\infty$ P.p.s

M_T

(3)