ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
2$^{\text{éme}}$ année

2022-2023
Méthodes de simulation

TP1 : Méthodes de la fonction inverse et de transformation

Objectif

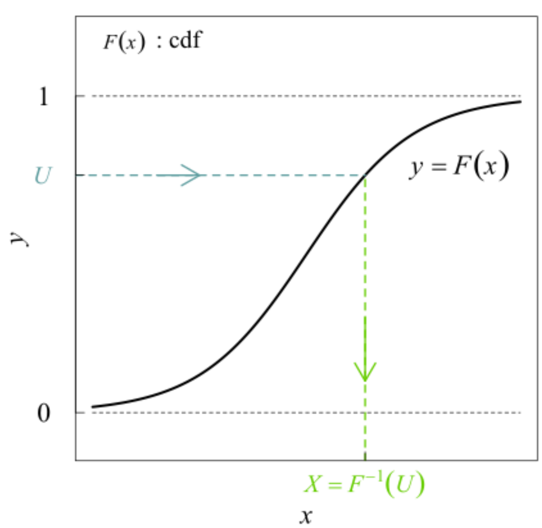
Il s'agit de mettre en oeuvre les méthodes de la fonction inverse et de transformation afin de simuler un grand nombre $(x_1, ..., x_n)$ de réalisations d'une variable aléatoire X à partir d'un générateur de la loi uniforme sur $[0, 1]$ (notée $U([0, 1])$).

Principe

Le principe de la méthode de transformée inverse est une technique couramment utilisée en probabilité et statistiques pour générer des nombres aléatoires à partir d'une distribution de probabilité donnée. Elle repose sur le fait que si on a une variable aléatoire X avec une fonction de répartition F(X), alors la variable aléatoire U=F(X) suit une loi uniforme sur [0,1]. Le but est de générer des échantillons aléatoires de la variable aléatoire X à partir de U.

Les étapes à suivre pour appliquer la méthode de la transformée inverse sont :

1. Obtenir la fonction de répartition à partir de $f_X(x)$.
2. Trouver l'inverse de la fonction de répartition $F_X^{-1}(u)$.
3. Générer les valeurs aléatoires :
   — Générer u de la loi Uniforme $(0, 1)$.
   — Calculer $x = F_X^{-1}(u)$



Exercice 1 :

1. Écrire une fonction pour générer n nombres aléatoires à partir de la distribution qui a pour densité : $f_X(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$.

2. Visualiser la distribution théorique.

3. Visualiser la distribution empirique (compte)

4. Visualiser la distribution empirique (densité).

5. Visualiser dans la même figure les distributions empiriques et théoriques. Conclure.

Exercice 2 :

Soit X une v.a. discrète qui prend les valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$. On considère la loi de X par : $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.2$, $P(X = 3) = 0.3$ et $P(X = 4) = 0.4$. On souhaite simuler la variable aléatoire discrète.

1. Trouver la fonction de répartition de X.

2. Générer un nombre aléatoire u compris entre 0 et 1.

3. Simuler une réalisation de X. Il s'agit de trouver l'indice j tel que $F(j-1) < u \leq F(j)$ et associer la valeur $X = j$.

4. Simuler plusieurs réalisations de X.

5. Vérifier que la distribution empirique de X correspond à la distribution théorique en traçant un histogramme.

Exercice 3 :

1. Simuler un échantillon de taille 1000 de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$ en utilisant la méthode d'inversion.

2. Vérifier que la moyenne empirique de l'échantillon simulé est proche de la moyenne théorique de la loi exponentielle.

3. Tracer l'histogramme de l'échantillon simulé pour visualiser sa distribution.

Exercice 4 :

Supposons que le nombre de clients dans une file d'attente suit une distribution de Poisson avec un taux moyen de 3 clients par minute. Simuler 100 observations de cette distribution de probabilité.

Indications

— La fonction *runif* permet de simuler des réalisations d'une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $U([0,1])$.

rbeta	beta distribution	**rlnorm**	log-normal distribution
rbinom	binomial distribution	**rmultinom**	multinomial distribution
rcauchy	Cauchy distribution	**rnbinom**	negative binomial distribution
rchisq	chi-squared distribution	**rnorm**	normal distribution
rexp	exponential distribution	**rpois**	Poisson distribution
rf	F distribution	**rt**	Student's t distribution
rgamma	gamma distribution	**runif**	uniform distribution
rgeom	geometric distribution	**rweibull**	Weibull distribution
rhyper	hyper-geometric distribution		