Notions importantes du cours : Produit de Kronecker et les projecteurs orthogonaux Intra –Within- et Inter – Between :

1) $\Rightarrow$ Produit de Kronecker permet de rendre plus commodes les écritures et les calculs matriciels dans beaucoup de modèles économétriques et notamment les modèles de données de panel.

- **Définition,** Pour deux matrices A et B de dimensions respectives (m,n) et (p,q) , on définit le produit kronecker entre ces deux matrices par la matrice P dont le bloc générique est $a_{ij}B$ où les a_{ij} sont les éléments de la matrice A :

$$P_{(mp,nq)} = A_{(m,n)} \otimes B_{(p,q)} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & & \cdots\cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Remarquons que :

- aucune condition de compatibilité n'était nécessaire dans cette opération : A est de taille (m,n) et B est de taille (p,q) alors $A \otimes B$ est de taille $(mp,\ nq)$.
- le produit Kronecker n'est pas commutatif dans le sens que $A \otimes B \text{ est généralement différent de } B \otimes A$.

- **Exemple,** Calcul du produit Kronecker des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a & b & 2a & 2b \\ c & d & 2c & 2d \\ 3a & 3b & 4a & 4b \\ 3c & 3d & 4c & 4d \\ 2a & 2b & a & b \\ 2c & 2d & c & d \end{bmatrix}_{(6,4)}$$

- Ces propriétés,
  - $(A+B)\otimes C = (A\otimes C) + (B\otimes C)$
  - $(A\otimes B)\cdot\ (C\otimes D) = AC\otimes BD$ dès lors que les produits $A\cdot C\ et\ B\cdot D$ sont définis.
  - $\alpha A\otimes\beta B = \alpha\beta(A\otimes B),\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$
  - $(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes\ B^{-1}$, pour A, B deux matrices inversibles.
  - $(A\otimes B)' = A'\otimes\ B'$, où « ‘ » désigne le transposé de la matrice.
  - $Trace(A\otimes B) = Tr(A)\cdot Tr(B)$, où A, B deux matrices carrées et Tr désigne l’opérateur trace.
  - $rang\ (A\otimes B) = rang(A)\cdot rang(B)$,
  - Pour $A\ et\ B$ deux matrices carrées de dimensions (m,m) et (n,n), on a :

$$Det(A\otimes B) = (DetA)^n(DetB)^m$$

2) ⇒ Les projecteurs orthogonaux Intra –Within- et Inter –Between :Appelés aussi des opérateurs.

- Opérateur Within ou Intra, noté $W_{(NT,NT)}$, donne l’information d’ordre temporel. Il est défini par

$$W_{(NT,NT)} = I_N\otimes\left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)$$

Où il réalise la transformation $\left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)$ qui est la moyenne des écarts, i.e. il définit les écarts aux moyennes individuelles sur chacune des composantes y_i de Y.

- Opérateur Between ou Inter, noté $B_{(NT,NT)}$, donne l’information entre les individus. Il est défini par

$B_{(NT,NT)} = I_N\otimes\frac{J_T}{T}$ ⇛ il réalise la transformation $\frac{J_T}{T}$ sur chacune des composantes y_i de Y.

- A propos des transformations $\left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)$ et $\frac{J_T}{T}$:

  On a

$$J_T = S_T S'_T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(T,T)} \quad où \; S_T = [1]_{(T,1)} \quad \Rightarrow \frac{J_T}{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \end{bmatrix}_{(T,T)}$$

$$et$$

$$\frac{J_T}{T} \; idempotente: \frac{J_T}{T} . \frac{J_T}{T} = \frac{J_T}{T} \; et \; symétrique: \left(\frac{J_T}{T}\right)' = \frac{J_T}{T}.$$

Alors,

$$\frac{J_T}{T} . y_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \end{bmatrix}_{(T,T)} \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{it}}{T} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{it}}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i.} \\ \vdots \\ y_{i.} \end{bmatrix}_{(T,1)} = [y_{i.}]_{(T,1)} = \overline{y_{i.}}_{(T,1)}$$

$$où \quad \overline{y_{i.}}_{(T,1)} \; est \; le \; vecteur \; des \; moyennes \; individuelles \; répétées \; T \; fois,$$

$$i.e.$$

$$c'est \; la \; moyenne \; individuelle \; de \; y_{it} \; \text{pour l'unité spatiale i.}$$

$$et$$

$$\left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) y_i = I_T \, y_i - \frac{J_T}{T} \; y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} - y_{i.} \\ \vdots \\ y_{iT} - y_{i.} \end{bmatrix}_{(T,1)} = [y_{it} - y_{i.}]_{(T,1)} = [y_i - \bar{y}_{i.}]_{(T,1)}$$

$$c'est \; une \; transformation \; de \; la \; moyenne \; des \; écarts$$

$$Avec$$

$$\bar{y}_{i.} \; \text{renseigne sur le niveau moyen auquel se situe l'individu i}$$

$$(exple \; le \; niveau \; moyen \; des \; effectifs \; d'une \; entreprise).$$

$$et$$

$$y_i - \bar{y}_{i.} \; \text{fournit pour l'individu i les fluctuations observées}$$

$$dans \; la \; période \; autour \; de \; son \; niveau \; moyen.$$

$$Aussi, on \; définit \; la \; nullité \; de \; la \; moyenne \; des \; écarts \; à \; la \; moyenne \; par:$$

$$\left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) \frac{J_T}{T} = 0 \; car \; de \; façon \; évidente, on \; a \; \frac{J_T}{T} \; idempotente.$$

$$A \; ce \; niveau, on \; marque \; l'orthogonalité \; de \; deux \; grandeurs \; \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) \; et \; \frac{J_T}{T}$$

$$ce \; qui \; signifie \; qu'à \; partir \; des \; observations \; disponibles \; pour \; l'individu \; i, y_{i\,(T,1)}, on \; peut$$

$$décomposer \; par \; projection \; l'information \; en \; deux \; composantes \; orthogonales \; (i.e. \, y_i - \bar{y}_{i.} \; \text{et} \; \bar{y}_{i.}).$$

- Propriétés et Opérations sur les projecteurs orthogonaux Within et Between :

  - <u>Symétriques :</u> $B' = B \; et \; W' = W$

- Idempotentes: $B^2 = B \; et \; W^2 = W$
- Calculs des opérateurs Within et Between :

- On a

$$B\,W = \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right)\left[I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)\right]$$
$$= I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)\frac{J_T}{T}$$
$$= 0$$
$$Même\ chose\ pour\ W\ B = 0$$
$$Ceci\ correspond\ à\ la\ nullité\ des\ moyennes\ individuelles.$$

- On a

$$W + B = \left[I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)\right] + \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right)$$
$$= I_N \otimes \left[\left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) + \frac{J_T}{T}\right] \quad car\ on\ a\ (A + B)\otimes C = (A\otimes C) + (B\otimes C)$$
$$= I_N \otimes I_T$$
$$= I_{NT}$$
$$car, on\ a$$
$$I_N \otimes I_T = \begin{bmatrix} 1.\,I_T & 0.\,I_T \cdots & 0.\,I_T \\ 0.\,I_T & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.\,I_T & 0.\,I_T & 1.\,I_T \end{bmatrix} = I_{NT}$$

- Soit le processus aléatoire

$$Y_{(NT,1)} = [y_{it}]_{(NT,1)} = \begin{pmatrix} y_{1\,(T,1)} \\ \vdots \\ y_{i\,(T,1)} \\ \vdots \\ y_{N\,(T,1)} \end{pmatrix} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N\ et\ \ t = 1, \cdots, T$$
$$qui\ est\ le\ vecteur\ des\ observations\ individuelles - temporelles.$$

On a

$$W_{(NT,NT)}Y_{(NT,1)} = \left[I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)\right]\begin{pmatrix} y_{1\ (T,1)} \\ \vdots \\ y_{i\ (T,1)} \\ \vdots \\ y_{N\ (T,1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) y_{1\ (T,1)} \\ \vdots \\ \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) y_{i\ (T,1)} \\ \vdots \\ \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right) y_{N\ (T,1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} - y_{1\,.} \\ \vdots \\ y_{1T} - y_{1\,.} \end{bmatrix}_{(T,1)} \rightarrow 1er\ indv. \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} y_{i1} - y_{i\,.} \\ \vdots \\ y_{iT} - y_{i\,.} \end{bmatrix}_{(T,1)} \rightarrow i\text{ème}\ indv. \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} y_{N1} - y_{N\,.} \\ \vdots \\ y_{NT} - y_{N\,.} \end{bmatrix}_{(T,1)} \rightarrow N\text{ième}\ indv. \end{pmatrix} = [y_i - y_{i\,.}]_{(NT,1)} \text{ où } y_{i\,.} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{it}}{T}$$

Où WY est le $(NT,1)$ vecteur des écarts aux moyennes individuelles. Il renseigne sur les fluctuations observées dans la période, pour chaque individu, autour de son niveau moyen.

De même, on a :

$$B_{(NT,NT)}Y_{(NT,1)} = \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right) \begin{pmatrix} y_{1\,(T,1)} \\ \vdots \\ y_{i\,(T,1)} \\ \vdots \\ y_{N\,(T,1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{J_T}{T} & & \boxed{0} \\ & \ddots & \\ \boxed{0} & & \frac{J_T}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1\,(T,1)} \\ \vdots \\ y_{i\,(T,1)} \\ \vdots \\ y_{N\,(T,1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{J_T}{T}\ y_{1\,(T,1)} \\ \vdots \\ \frac{J_T}{T}\ y_{i\,(T,1)} \\ \vdots \\ \frac{J_T}{T}\ y_{N\,(T,1)} \end{pmatrix} \quad or \quad \frac{J_T}{T}\ y_{i\,(T,1)} = \begin{bmatrix} y_{i\,.} \\ \vdots \\ y_{i\,.} \end{bmatrix}_{(T,1)} = [y_{i\,.}]_{(T,1)} = \overline{y_{i\,.}}_{(T,1)}$$

$$= \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} y_{1\,.} \\ \vdots \\ y_{1\,.} \end{matrix}\right\} & Tfois \\ & \vdots \\ \left.\begin{matrix} y_{i\,.} \\ \vdots \\ y_{i\,.} \end{matrix}\right\} & Tfois \\ & \vdots \\ \left.\begin{matrix} y_{N\,.} \\ \vdots \\ y_{N\,.} \end{matrix}\right\} & Tfois \end{pmatrix}_{(NT,1)}$$

$$= [y_{i\,.}]_{(NT,1)}$$

BY est le $(NT,1)$ vecteur des moyennes individuelles répétées $Tfois$ pour chaque individu.

Au niveau de BY, l'information individuelle est privilégiée dans le sens qu'elle exploite la variabilité inter-individuelle au lieu du modèle empilé pour toutes les périodes.

$$BY + WY = \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right)\ Y + \left[I_N \otimes \left(I_T - \frac{J_T}{T}\right)\right]\ Y$$
$$= \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right)\ Y + (I_N \otimes I_T)Y\ -\ \left(I_N \otimes \frac{J_T}{T}\right)\ Y$$
$$= I_{NT}\, Y$$
$$= Y_{(NT,1)}$$

$$\Rrightarrow\ La\ décomposition\ du\ vecteur\ des\ observations\ individuelles - temporelles,\ Y, en\ deux\ éléments\ orthogonaux\ (car, on\ a\ BW = 0)$$