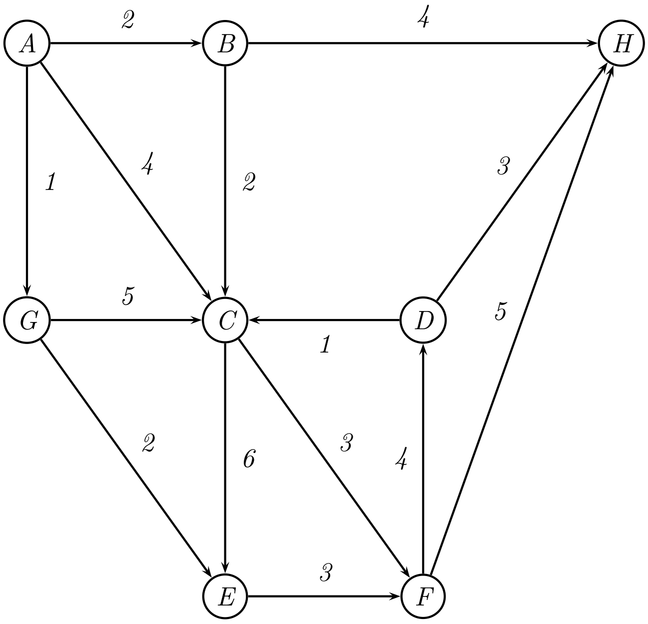
Exercices de révision

Ines Abdeljaoued-Tej *

8 mars 2010

Exercice 1 *Le graphe ci-dessous détaille le réseau de chemin de fer tunisien. Les noeuds représentent les principales villes tunisiennes, les arêtes représentent les lignes de chemins de fer reliant ces villes et le poids d'une arête représente la capacité (en milliers de tonnes/heure) de la ligne de chemin de fer associée.*



1. *Donner le dictionnaire des précédents associé au réseau de sistribution d'eau défini ci-dessus.*
2. *Afin d'améliorer la productivité du réseau, nous cherchons les chemins de plus faible capacité partant de la ville A. Pour cela, déterminer le plus court chemin partant de la ville A vers toutes les autres villes en utilisant l'algorithme de Moore-Dijkstra.*
3. *Peut-on appliquer l'algorithme de Moore-Dijkstra en cas de présence de valuations négatives ? Justifier votre réponse.*

Exercice 2 Considérons le Programme Linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \text{Max} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s/c} & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement (P_L).
2. Ecrire le PL sous forme standard.
3. Résoudre par la méthode du Simplexe le PL modifié.

4. Le Programme Dual du Programme Primal

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \text{Max} & cx \\ \text{s/c} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

* inestej@gmail.com, http://bit.ly/5vjgUs

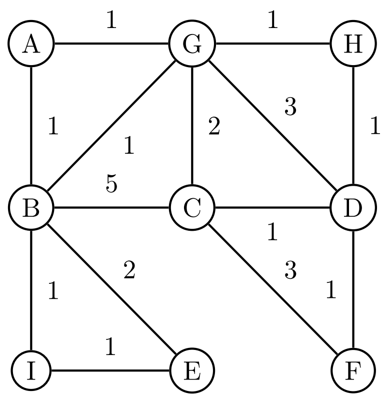
est

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \text{Min} & yb \\ \text{s/c} & Ay \geq c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que le Dual du Programme Dual est le Programme Linéaire d'origine.

5. Donner le Programme Dual de (P_L).

Exercice 3 Rechercher un arbre de poids minimum et de racine A sur le graphe de la figure ci-dessous en utilisant l'algorithme de Kruskal :



Exercice 4 La réalisation d'un projet demande d'effectuer un certain nombre de tâches. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité. Les durées sont exprimées en mois :

Tâche	**Durée**	**Antécédents**
A	7	-
B	3	A
C	1	B
D	8	A
E	2	D, C
F	1	E
G	1	D, C
H	3	F
I	2	-
J	1	E,G,H

1. En tenant compte du rang de chaque tâche, dessiner le graphe potentiels-tâches associé à ce projet (graphe MPM).
2. Dessiner le graphe-potentiels-étape associé à ce projet (graphe PERT).
3. Former le tableau des prédécesseurs et calculer les dates au plus tôt de début de chaque tâche. En déduire à quelle date au plus tôt l'on pourra-t-il finir le projet ?
4. Rechercher les dates de début au plus tard de ce problème d'ordonnancement.
5. Déterminer le chemin critique de ce projet.
6. Si un quelconque retard est pris sur une des tâches critiques, que peut-on dire de la durée minimale du projet ?

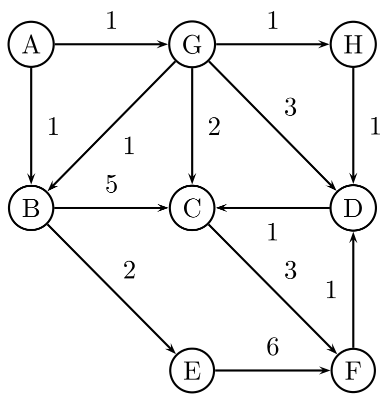
Exercice 5 Soit le problème d'ordonnancement suivant :

Tâche	Durée	antécédents
A	5	B
B	3	aucun
C	2	aucun
D	10	C,A

1. Calculer le rang de chacune des tâches.

2. Dessiner le graphe potentiels-étapes (PERT) associé à ce projet.
3. En tenant compte du rang de chaque tâche, dessiner le graphe potentiels-tâches (MPM) associé à ce projet.
4. Calculer les dates au plus tôt et au plus tard de début d'exécution de chaque tâche.
5. Donner les marges totales et les marges libres de chacune des tâches.
6. En déduire le(s) tâches critiques et le(s) chemins critiques.

Exercice 6 Rechercher un arbre de poids minimum et de racine A sur le graphe de la figure ci-dessous en utilisant un des algorithmes vus en cours :

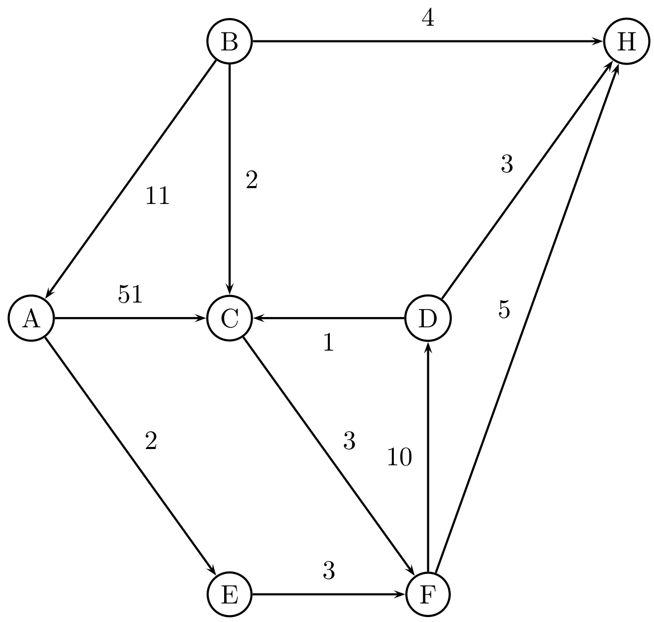


Exercice 7 Très préoccupé du déroulement de vos prochains examens, vous avez décidé de procéder scientifiquement. Pour cela, vous avez déterminé l'ensemble des tâches indispensables à la bonne préparation de vos examens, puis estimé la durée de chacune des tâches et établi les liens de précédence entre tâches. Vous avez alors obtenu le tableau suivant :

Tâche	**Description des tâches**	**Durée (jours)**	**Antécédents**
A	Lire le cours de Stat	10	-
B	Rechercher des exercices	5	A,E,F
C	Réaliser des fiches	2	B
D	Faire les exercices	5	B,C
E	Lire le cours de RO	4	-
F	Lire le cours de BD	6	-

1. Calculer le rang de chacune des tâches.
2. Dessiner le graphe potentiels-étapes (PERT) associé à ce projet.
3. En tenant compte du rang de chaque tâche, dessiner le graphe potentiels-tâches (MPM) associé à ce projet.
4. Calculer les dates au plus tôt et au plus tard de début d'exécution de chaque tâche.
5. Calculer les marges totales et les marges libres des tâches.
6. En déduire le ou les chemins critiques de ce projet.

Exercice 8 En Australie, la récolte de canne à sucre est hautement mécanisé. Les cannes fraîchement coupés sont acheminés directement vers une sucrerie dans des wagons qui empruntent un réseau de petites voies ferrées détaillé ci-dessous :



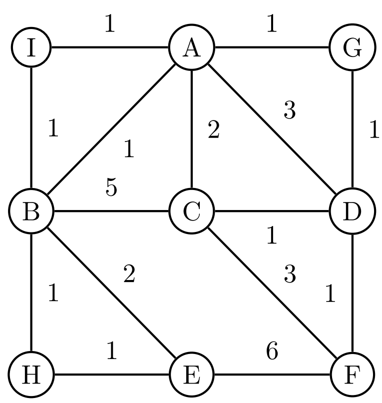
La teneur en sucre des cannes d'un wagon dépend du champ de récolte et de la maturité des cannes. Après récolte, cette teneur diminue rapidement par fermentation, au point que le contenu du wagon devient sans valeur après un certain temps. Des examens ont permis de déterminer - à partir des pertes en sucre de chaque wagon - la durée de vie des lots (en heures), indiquée aux longueurs des arêtes.

1. Donner le dictionnaire des précédents associé au réseau ferroviaire défini ci-dessus.
2. Déterminer le plus court chemin (en heures) partant de la sucrerie B vers toutes les autres sucreries en utilisant l'algorithme de Moore-Dijkstra.
3. Peut-on appliquer l'algorithme de Moore-Dijkstra en cas de présence de cycle ? et en cas de présence de cycle absorbant ?

Exercice 9 *Résoudre graphiquement puis avec le simplexe les programmes linéaires suivants :*

$$(P_8) = \begin{cases} max & 2x_1 + 3x_2 \\ s/c & 2x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad puis \quad (P_9) = \begin{cases} max & 2x_1 + 3x_2 \\ s/c & 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

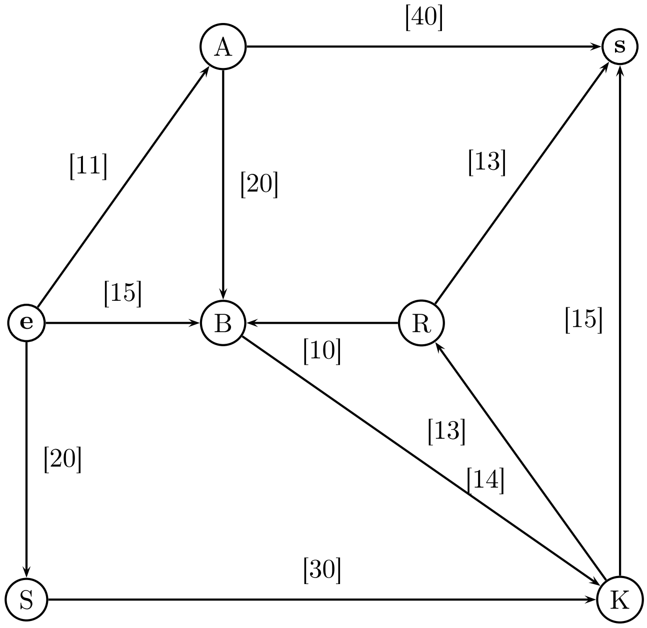
Exercice 10 On considère le graphe suivant où les sommets représentent des habitations isolées, les arêtes, des lignes téléphoniques qu'il est possible d'installer entre les différentes paires d'habitations et les poids des arêtes, les coûts d'installation de ces lignes.



Trouver le réseau téléphonique le moins coûteux reliant toutes les habitations revient alors à construire un arbre couvrant de poids minimal. Appliquer les deux algorithmes vus en cours.

Exercice 11 *Un chocolatier-confisseur confectionne des assortiments de chocolats. Dans ceux-ci, il a convenu d'y placer 3 sortes de chocolats, dénotés chocolats 1,2 et 3, dont chaque kg lui coûte respectivement 4D, 1,45D et 2,40D. Chaque assortiment doit peser un kg et se vendra 8D.*
Le chocolat 1 doit représenter entre 10% et 20% du poids d'un assortiment. Les chocolats 1 et 2 présents dans un assortiment ne doivent pas peser plus de 800g. Au moins la moitié du poids d'un assortiment doit provenir des chocolats 1 et 3.
Quelle proportion de chaque sorte de chocolats, le chocolatier-confisseur doit-il utiliser pour maximiser les revenus nets qu'il tirera de la vente de ses assortiments ?

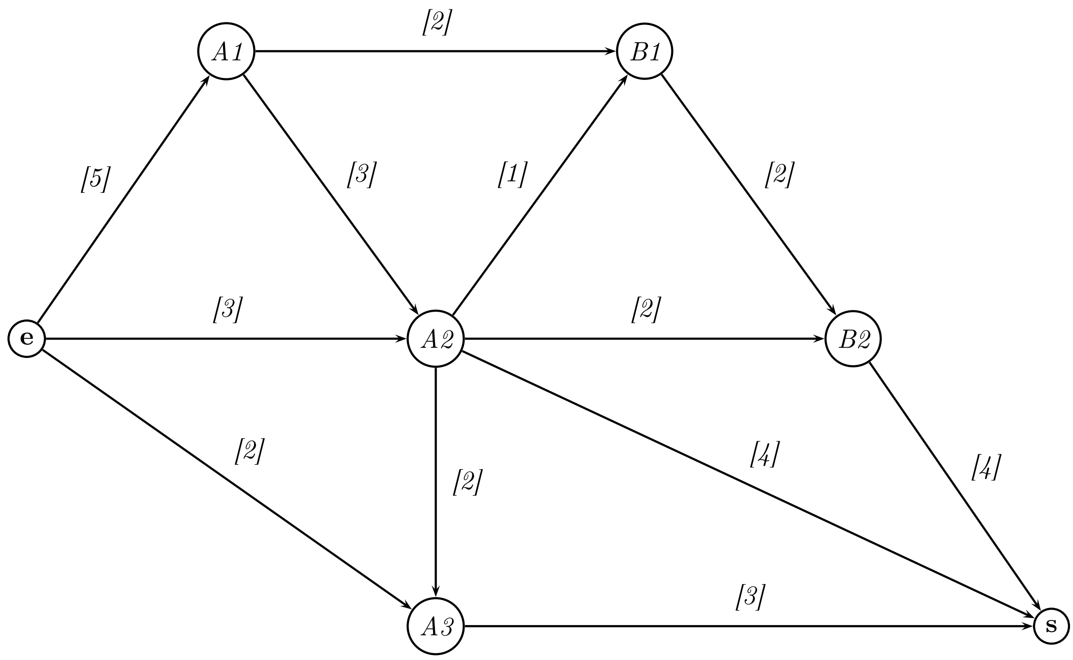
Exercice 12 Une société de distribution dispose de 2 centres : un à l'Ariana et un autre à Rades. Trois destinations sont possibles : Sousse, Ben Arous et Kelibia.
Chacun des centres de distribution a une capacité maximale de transport ainsi qu'un stock initial de marchandises. De même, chaque ville d'arrivée a une demande maximale pour les importations.
L'algorithme de Ford-Fulkerson va permettre d'optimiser ces flux à l'aide d'un outil de modélisation mathématique. La structure sous-jacente est représentée par un graphe orienté dont le sommet de gauche symbolise le stock initial. Celui-ci est relié à chacun des premiers arcs ou arêtes.



1. Compléter le graphe ci-dessus en intialisant le flot à 0 et déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel (détailler l'algorithme de Ford-Fulkerson).
2. Donner la coupe minimale correspondante.

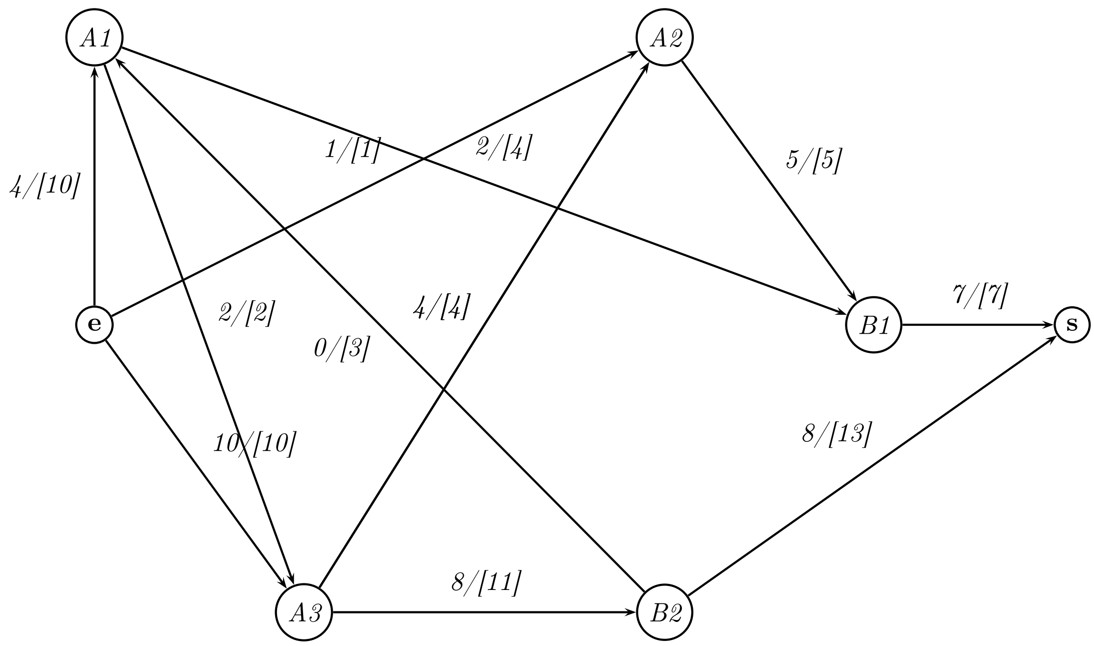
Exercice 13 *Une denrée est disponible en des centres de distribution $A1$ et $A2$, $A3$ la quantité disponible en Ai est notée a_i. Des demandes sont effectuées par des clients $B1$ et $B2$ la quantité demandée par Bj est notee b_j. Le client Bj ne peut être livré que par un sous-ensemble de l'ensemble des centres de distributions. Il s'agit de deéterminer l'approvisionnement maximal de l'ensemble des clients.*

Pour cela, il faut construire un graphe ayant pour sommets les Ai les Bj et deux nouveaux sommets e et s. Ensuite, il faut relier e à chacun des sommets Ai par un arc de capacité a_i et relier chacun des sommets Bj à s par un arc de capacité b_j. Il faut également relier Ai à Bj chaque fois que le centre de dsitribution Ai est à même de livrer de la marchandise à Bj, la capaciteé de cet arc est aussi grande que l'on veut (choisir par exemple $max(a_i, b_j)$) :



Chercher le flot maximal de ce graphe.

Exercice 14 *On peut emmener dans une navette spatiale un certain nombre d'instruments* $A1$*,* $A2$ *et* $A3$ *(le coût de transport d'un instrument Ai est donné dans le graphe ci-dessous sous forme de capacité* a_i*). Des commandes de réalisations d'experiences dans l'espace sont faites (on les dénote par* $B1$*,* $B2$ *et* $B3$ *(le gain réalisé si lon effectue l'experience* Bj *est noté* bj*). La réalisation d'une expérience* Bj *nécessite davoir emporté un sous-ensemble de l'ensemble des instruments. Il sagit de déterminer quels sont les instruments à emporter et quelles sont les expériences à réaliser afin de rendre le bénéfice de l'opération maximal :*



Chercher la coupe de capacité minimale dans ce graphe.