ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 2h00
Avril 2005

Correction de l'Examen d'Analyse Numérique

Exercice (5pt).

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbf{R}$ avec $f(a).f(b) < 0$. Nous allons utiliser la sécante passant par les points d'abscisses x_n et x_{n-1} pour en déduire x_{n+1}. L'équation de la sécante s'écrit sous la forme :

$$S(x) = f(x_n) + (x - x_n)\tau_n \qquad avec \qquad \tau_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad .$$

On définit x_{n+1} comme étant l'intersection de la sécante $S(x)$ avec l'axe des x : $S(x_{n+1}) = 0$ et on obtient

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad .$$

L'explication géométrique suffit.

2. Théorème du cours : Soit f une fonction de Classe C^2. Si x^* est une racine simple de f, alors la méthode de Newton est au moins d'ordre 2.

Problème (15pt). Nous considérons l'ensemble des points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = -4, & f_1 = -1, & f_2 = -2, & f_3 = 5. \end{array}$$

1. Afin de déterminer une approximation du nuage de points (x_i, f_i) pour i de 0 à 3, calculer la droite de régression linéaire P_0 par la méthode des moindres carrés discrets. $P_0(x) = 2.6 * t - 1.8 = \frac{13}{5}t - \frac{9}{5}$.

2. Citer deux méthodes permettant de calculer le polynôme de Lagrange : Aitken, Neville, différences divisées, Interpolation de Lagrange.

3. Montrer que les polynômes d'interpolation de Lagrange vérifient $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ pour tout i et $j \neq i$ de 0 à 3 : trivial.

4. Calculer le polynôme de Lagrange P sur les points (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) et (x_3, f_3) : $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - x - 1$.

5. Quelle est la différence entre P et P_0 : le degré, la nature de la construction.

6. Vérifier que $P(x_i) = f_i$ pour i de 0 à 3 et montrer qu'il existe une unique racine de P sur l'intervalle $[0, 3]$.
7. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2 :[Convergence globale de la méthode de Newton] Soit f une fonction de Classe C ^{2} sur $[a, b]$ et $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Si f vérifie :
   (a) $f(a).f(b) < 0$
   (b) $\forall x \in [a, b]$, $f^{'}(x) \neq 0$ (c'est la stricte monotonie),
   (c) $\forall x \in [a, b]$, $f^{''}(x) \neq 0$ (concavité dans le même sens).

   Alors en choisissant $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0).f^{''}(x_0) > 0$, la suite (x_n) définie par x_0 et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.
8. Calculer la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ par la méthode de Newton avec $x_0 = 3$. La précision des calculs est à 10^{-6} près : $x_1 = 2.219512195$, $x_2 = 1.772561952$, $x_3 = 1.579079696$, $x_4 = 1.538687685$, $x_5 = 1.536976780 = x_6 = x^*$.
9. Ecrire l'algorithme de Newton qui prend en entrée les points x_0, $a < b$ et une fonction f et rend la racine de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ ou bien un message d'erreur.
   1. $n := 1$;
   2. **Tant que** $n \leq N$ **Faire** $c := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;
   3. **Si** $| c - x_0 | \leq \epsilon$ **Alors** c ; $n := N + 2$ **Fin Si** ;
   $n := n + 1$;
   $x_0 := c$;
   Fin Tant que ;
   Si $n = N + 2$ **Alors** Imprimer(c) **Sinon**
   Erreur **Fin Si** ;
   Fin.

Ines Abdeljaoued.