Travaux Dirigés n°3

EXERCICE 1 Algorithme du gradient à pas constant

On veut résoudre le système $Ax=b$, $x \in \Re^n$ (avec A symétrique, définie, positive) par une méthode de gradient à pas constant. Soit $\bar{x}$ la solution de ce système. On propose l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_0,\ r_0 = b - Ax_0 \\ x_{k+1} = x_k + \alpha r_k \\ où\ r_k = b - Ax_k \end{cases} \text{, } \alpha \text{ est un réel constant.}$$

a. Soit $e_k = x_k - \bar{x}$ (pour k ≥0) ; montrer que $e_k = (I - \alpha A)^k e_0$ (pour k ≥0).
b. Soient $0 \leq \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \ldots \lambda_2 \leq \lambda_1$ les valeurs propres de A. montrer que l'algorithme converge si et seulement si $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$.
c. Montrer que le meilleur choix de α est $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

EXERCICE 2

Soit $J(v) = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle$ avec A matrice symétrique définie positive N×N de spectre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_{N-1} \leq \lambda_N$ et b vecteur de $\Re^n$. Notons w le point minimum de *J*.

a. Montrer que l'algorithme de gradient à pas fixe
$$u_{n+1} = u_n - \mu J'(u_n)$$
converge pour $0 < \mu < 2/\lambda_N$.
b. Donner la valeur de μ qui assure la vitesse maximale de convergence et montrer que pour cette valeur $\lim_{n \to \infty} \|u_n - w\|^{1/n} \leq (\lambda_N - \lambda_1)/(\lambda_N + \lambda_1)$.

EXERCICE 3 Algorithme du gradient conjugué

On note (x, y) le produit scalaire euclidien de R^n, ${}^t xy$ sous forme matricielle, u_i le vecteur propre associé à une valeur propre λ_i et W_k le sous-espace engendré par les k vecteurs propres $(u_i)_{i=1,..,k}$. A est une matrice symétrique, définie positive dont les valeurs propres λ_i sont rangées par ordre décroissant. On appelle ***quotient de Rayleigh*** de la matrice A l'application de $R^n - \{0\}$ vers R définie par :

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

Montrer que :

a. $\lambda_k = R_A(u_k)$.
b. $\lambda_k = \min_{x \in W_k} R_A(x)$.
c. $\lambda_k = \max_{x \in w_k^{\perp}} R_A(x)$.
d. Pour x ≠ 0 et λ un scalaire quelconque, on définit $\eta = Ax - \lambda x$.
Montrer que
$$\max_{i \in \{1,..,n\}} |\lambda - \lambda_i| \leq \frac{\|\eta\|_2}{\|x\|_2}$$