ESSAI — ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
1$^{\text{ère}}$ année

2022-2023
Intégration et Probabilité

Série d'exercices N°3

Intégration sur un espace produit I

Exercice 1

On considère l'espace mesuré $(]0,+\infty[\times]a,b[, \mathbb{B}(]0,+\infty[\times]a,b[), \lambda_2)$ où λ_2 est la mesure de Lebesgue et a, b deux réels strictement positifs avec $a < b$.

1. Montrer que l'application f définie sur $]0,+\infty[\times]a,b[$ par
$$f(x,y) = e^{-xy}$$
est intégrable.
2. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} d\lambda(x).$$

Exercice 2

On donne :
$$\int_{]0,+\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son intégrale.

Exercice 3

Soit (X, T, μ) un espace mesuré, où μ est une mesure σ-finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}^2$ une fonction mesurable. Montrer que
$$\int_E f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x; f(x) \geq t\}) dt$$

Exercice 4

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ où $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ est une mesure σ-finie. Soit la fonction définie sur $]0,1[\times\mathbb{R}_+$ et donnée par :

$$f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$$

Démontrer que

$$\int_{]0,1[}\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)d\mu_2(y)d\mu_1(x) \neq \int_{\mathbb{R}_+}\int_{]0,1[} f(x,y)d\mu_1(x)d\mu_2(y).$$

Exercice 5

Soit $(\mathbb{N}^2, P(\mathbb{N}^2))$ un espace mesurable muni de $\nu = \mu \otimes \mu$ produit des mesures de comptage sur $\mathbb{N}$. On définit la fonction f de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & si \quad m = n \\ -1 & si \quad m = n+1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer $\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)d\mu(m)d\mu(n)$ et $\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)d\mu(n)d\mu(m)$.
2. Qu'en déduisez vous ?
3. Retrouver ce résultat directement.

$\int_{\mathbb{N}}\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\,d\mu(m)d\mu(n) =$

$= \sum_{n}\sum_{m} f(n$

Série d'excercice N°3

Exercice N°1 :

$\ast$ $f :]0,+\infty[\times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bien une fonction mesurable positive
$(x,y) \longmapsto e^{-xy}$
(car continue)

$\ast$ λ_2 est ~~une~~ la mesure de Lebesgue donc σ-finie

$\Rightarrow$ D'après le Théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\int_{[a,b]} e^{-xy} \, dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_a^b e^{-xy} \, dy \right] dx$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\int_a^b \int_0^{+\infty} e^{-xy} \, dx \, dy = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{[a,b]} e^{-xy} \, dy \, dx = \int_{[a,b]} \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-xy} \, dx . dy$

et par suite D'après Fubini-Tonelli f est bien intégrable.

Exercice N°2 :

$\ast$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien continue donc mesurable et positive
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

$\ast$ la mesure de Lebesgue est σ-finie

Donc D'après Fubini-Tonelli puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \right) dy \underset{\text{après calcul}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dy \right) dx = \pi$$

Ce qui donne f est intégrable

Exercice 3 : * * *

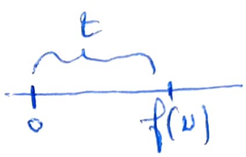
$$\mu(\{x ; f(x) \geq t\}) = \int_E \mathbb{1}_{\{x, f(x)\geq t\}}(u)\, d\mu(u)$$

or $\mathbb{1}_{\{x, f(x) \geq t\}}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(u) \geq t \\ 0 & \text{si } f(u) < t \end{cases}$

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{x, f(x) \geq t\})\, dt = \int_0^{+\infty} \int_E \mathbb{1}_{\{x, f(x) \geq t\}}(u)$$

D'après Fubini

$$= \int_E \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x, f(x) \geq t\}}(u)\, dt\, d\mu(u)$$



$$= \int_E \int_0^{f(u)} 1\, dt\, d\mu(u) = \int_E f(u)\, d\mu(u)$$

Exercice 4 :

Soit $y > 0$. on a une fonction continue $\longrightarrow$ Riemann.

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\, dx = \left[-\frac{1}{y}\left(e^{-2xy} - e^{-xy}\right)\right]_0^{y} = 0$$

D'autre part, pour $x > 0$

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = \left[-\frac{1}{x}\left(e^{-xy} - e^{-xy}\right)\right] = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

Supposons que $e^{-x} - e^{-2x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^{-2x} \Rightarrow x = 2x$

or $x \neq 0$ donc $1 = 2$ absurde !

Exercice 5 :

1) • $\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(m) = \sum_{m=0}^{+\infty} f(m,n) = f(n,m) = f(n,n) + f(n+1,n) = 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(m)\, d\mu(n) = 0$ (I_1)

• $\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(m,n)$ or comme $f(m,n) = 0$

on a $m = n$ ou $m = n+1 \Rightarrow n = m$ ou $n = m-1$

- Si $m = 0$ $\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f(0,n)\, d\mu(n) = f(0,0) = 1$
- Si $m > 0$ $\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(n) = f(m,m-1) + f(m,m) = 0$

$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(n)\, d\mu(m)$

$\sum_{m=0}^{+\infty} \int f(m,n)\, d\mu(n) = 1$ (I_2)

$_{\mathbb{N}}\,_{\mathbb{N}}$

$$= \sum_{n} \sum_{m} f(n$$

2) Comme $I_1 \neq I_2$
D'après le Théorème de Fubini, f ne peut pas être integrable,
par rapport à la mesure ν (car n'est pas σ- finis)
et f n'est pas positif.

3) $$\int_{\mathbb{N}} |f(m,n)| = 1 + |-1| + 0 + 0 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 = \infty .$$