Chap 2 : Martingales en temps discret

I - Définitions : Filtration, temps d'arrêt et martingale

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité

Définition :
Une suite de sous tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est dite une filtration, si $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, $\forall n \geq 0$.

Exemple et définition :
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ (càd : $(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X_n} (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est une va $\forall n \geq 0$)

Posons $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$

$$\mathcal{F}_n^X = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^{-1}(A) \,/\, A \in \mathcal{A}^{\otimes n+1} \right\}$$

= est la plus petite tribu sur Ω, qui rend mesurable les va $X_0, \ldots, X_n$.

On constate que : $\mathcal{F}_n^X \subseteq \mathcal{F}_{n+1}^X$

$(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 0}$ s'appelle la filtration naturelle associée au processus à temps discret $(X_n)_{n\geq 0}$ ↳ indice temps

$X_n = 1$ si j'obtient Face à la $n^{ième}$ lancée
$\;\;\;\;\; = 0$ sinon

$\mathcal{F}_n$ est la plus petite tribu contenant les résultats jusqu'à l'instant n.

Définitions:

Soient : * $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité
* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ une filtration

Alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, P)$ s'appelle espace de probabilité filtré.

Définition:

Soient:
* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité filtré.
* $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus discret à valeurs dans $(X, \mathcal{A})$

On dit que le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ si:
X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\forall n \geqslant 0$.

Remarques:

1- $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adaptée à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geqslant 0}$ et $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$.

2- Si $(X_n)_n$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, alors $\mathcal{F}_n^X \subseteq \mathcal{F}_n$, $\forall n \geqslant 0$.

Définitions:

Soient:
* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité filtré.
* $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus à temps discret à valeurs

dans $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$.

On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale (resp sur-martingale resp sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si :

* $(X_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (càd : X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\forall n \geq 0$)
* $E(|X_n|) < +\infty$, $\forall n \geq 0$.
* $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ P ps (resp $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n$ P ps, resp $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq X_n$ P ps) $\forall n \geq 0$.

Exemple :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{on obtient pile au } n^{\text{ième}} \text{ lancer} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$P(\{\text{Pile}\}) = p \in]0,1[$
$P(\{\text{Face}\}) = 1 - p$

$X_0 = x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ $\qquad \mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$
$S_0 = x_0$
$S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n$ = Fortune juste après la $n^{\text{ième}}$ lancer.

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ $n \geq 1$

S_n est $\mathcal{F}_n^X$-mesurable, $\forall n \geq 0$.

$\Rightarrow (S_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geq 0}$

. $|S_n| \leq x_0 + n \in \mathcal{L}^1(P) \Longrightarrow E(|S_n|) < +\infty, \forall n \geq 0$

. $E(S_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(S_n + X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$

$= E(S_n/\mathcal{F}_n) + E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$

$= S_n + E(X_{n+1})$; $E(X_{n+1}) = 1 \times p + (-1)(1-p)$
$= 2p - 1$

$\downarrow$

S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable
$X_{n+1} \perp \mathcal{F}_n$

$= S_n + (2p-1)$ Pps

Cas 1 : $p = \frac{1}{2}$

$(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale

Cas 2 : $p < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p-1 < 0$

$E(S_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq S_n$ Ip

$(S_n)_{n\geq 0}$ est une sur martingale

Cas 3 : $p > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p-1 > 0$

$(S_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.

Jeudi 13/10/2022

Définition:

Soient :

* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré.
* T une va à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

On dit que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, si $(T \leq n) \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \geq 0$.

Propriété et exemple:

1- Soient :

* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ espace de probabilité filtré.
* T une va à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ssi $(T = n) \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \geq 0$.

En effet:

"$\Rightarrow$"

$$(T = n) = \underbrace{(T \leq n)}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{(T \leq n-1)}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n, \text{ car } \mathcal{F}_n \text{ est une tribu}$$

"$\Leftarrow$"

$$(T \leq n) = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{(T = k)}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n \quad k \leq n} \in \mathcal{F}_n, \text{ car } \mathcal{F}_n \text{ est une tribu}$$

2- Soient :

* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré.
* $(Y_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$
* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Posons $T = \inf \{n \geq 0 \,/\, Y_n \in A\}$ $\quad \inf \phi = +\infty$

T est un t.a % $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, en effet :

$$(T = n) = (Y_0 \in A^c, \ldots, Y_{n-1} \in A^c ; Y_n \in A)$$

$$= \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}^{-1} (A^c \times \cdots \times A^c \times A) \in \mathcal{F}_n$$

$\hookrightarrow$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

$$(T = n) = \{\omega \in \Omega \,/\, T(\omega) = n\}$$

$$= \{\omega \in \Omega \,/\, Y_0(\omega) \in A^c, \ldots, Y_{n-1}(\omega) \in A^c, Y_n(\omega) \in A\}.$$

يبعث بالغدا
نوقف

prévisible

Ex :

$S_0 = x_0$

$S_n = x_0 + H_1 X_1 + \cdots + H_n X_n$

$A = [a, b]^c$

$T = \inf \{x \geq 0 \,/\, S_n \notin [a, b]\}$

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ $\qquad S_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

II - Théorèmes d'arrêt :

Définition :

Soient :

* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ espace de probabilité filtré
* T un t.a % $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$
* $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs

dans $(X, \mathcal{A})$.

Posons $X_n^T = X_{n\wedge T} = \begin{cases} X_n & \text{si } n \leqslant T \\ X_T & \text{si } n \geqslant T \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} a\wedge b = \min(a,b) \\ a\vee b = \max(a,b) \end{array}}$

Le processus $(X_n^T)_{n\geqslant 0}$ s'appelle le processus arrête du processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ par le temps d'arrêt T.

Propriétés:

Sous les notations de la définition ci-dessus, on a:

1- $X_n^T = X_{n\wedge T} = \sum_{k=0}^{n} X_k \mathbb{1}_{(T=k)} + X_n \mathbb{1}_{(T>n)}$

En effet:

$$X_{n\wedge T} = X_{n\wedge T} \cdot \mathbb{1}_{\Omega} = X_{n\wedge T} \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{k=0}^{n}(T=k)\cup(T>n)}$$
$$= X_{n\wedge T}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(T=k)} + \mathbb{1}_{(T>n)}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} X_{n\wedge T} \mathbb{1}_{(T=k)} + X_{n\wedge T} \mathbb{1}_{(T>n)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} X_m \mathbb{1}_{(T=k)} + X_n \mathbb{1}_{(T>n)}$$

2- Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, alors $(X_n^T)_{n\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$

En effet:

$\in \mathcal{F}_k \Rightarrow \mathbb{1}_{(T=k)}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable

$\Rightarrow \mathbb{1}_{(T=k)}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

$\underbrace{(T\leqslant n)^c}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathbb{1}_{(T>n)}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

$$X_n^T = \sum_{k=0}^{n} X_k \mathbb{1}_{(T=k)} + X_n \mathbb{1}_{(T>n)}$$

$\mathcal{F}_k$-mesurable $\underset{k\leqslant n}{\Rightarrow}$ $\mathcal{F}_n$-mesurable

est $\mathcal{F}_n$-mesurable. D'où $(X_n^T)_{n\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Scanned with CamScanner

3- Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est dans $L^1(P)$ (càd : $E(|X_n|)<+\infty, \forall n\geq 0$), alors $(X_n^T)_{n\geq 0}$ est dans $L^1(P)$.

En effet : $|X_n^T| \leq \sum_{k=0}^{n} |X_k| + |X_n| \in L^1(P)$

4- $X_{n+1}^T - X_n^T = (X_{n+1} - X_n)\, \mathbb{1}_{(T>n)}$

En effet :

$$X_{n+1}^T - X_n^T = \sum_{k=0}^{n+1} X_k\, \mathbb{1}_{(T=k)} + X_{n+1}\, \mathbb{1}_{(T>n+1)} - \sum_{k=0}^{n} X_k\, \mathbb{1}_{(T=k)} - X_n\, \mathbb{1}_{(T>n)}$$

$$= X_{n+1}\, \mathbb{1}_{(T=n+1)} + X_{n+1}\, \mathbb{1}_{(T>n+1)} - X_n\, \mathbb{1}_{(T>n)}$$

$$= X_{n+1}\, \mathbb{1}_{(T=n+1)\cup(T>n+1)} - X_n\, \mathbb{1}_{(T>n)}$$

$$= X_{n+1}\, \mathbb{1}_{\underbrace{(T\geq n+1)}_{T>n}} - X_n\, \mathbb{1}_{(T>n)}$$

$$= (X_{n+1} - X_n)\, \mathbb{1}_{(T>n)}$$

5- Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale (resp sur-martingale, resp sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, alors $(X_n^T)_{n\geq 0}$ est une martingale (resp sur-martingale, resp sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

En effet :

$$E(X^T_{n+1} - X^T_n / \mathcal{F}_n) = E((X_{n+1} - X_n) 1_{(T>n)} / \mathcal{F}_n)$$

$E(XY/\beta) = YE(X/\beta)$

Y est β-mesurable

$$\overset{P.ps}{=} 1_{(T>n)} E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n)$$

$(T>n) \subset (T \leq n)^c \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow 1_{(T>n)}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

Cas 1: $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale

$$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n \Leftrightarrow E(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) = 0$$

X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable

$$E(X^T_{n+1} - X^T_n/\mathcal{F}_n) = 0 \Leftrightarrow E(X^T_{n+1}/\mathcal{F}_n) - E(X^T_n/\mathcal{F}_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow E(X^T_{n+1}/\mathcal{F}_n) \overset{P.ps}{=} X^T_n.$$

Cas 2: $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sur martingale

$$\Rightarrow E(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) \leq 0 \Rightarrow E(X^T_{n+1} - X^T_n/\mathcal{F}_n) \leq 0$$

$\Rightarrow (X^T_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale.

Cas 3: $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.

Identique.

Définition:

Soient: * $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

* $(C_n)_{n\geq 0}$ ——

Posons $(C.X)_0 = 0$

$$(C.X)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \Delta X_k \quad n \geqslant 0$$

$$\Delta X_k = X_k - X_{k-1} \qquad k \geqslant 1.$$

Le processus $((C.X)_n)_{n\geqslant 0}$ s'appelle le transformé du processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ par le processus $(C_n)_{n\geqslant 0}$.

Remarque :

$$(C.X)_{n+1} - (C.X)_n = \boxed{C_{n+1}}(X_{n+1} - X_n)$$

$$X^T_{n+1} - X^T_n = (X_{n+1} - X_n) \mathbb{1}_{\boxed{T \geqslant n+1}}$$

$T > n$

Le processus arrêté est un cas particulier de transformation du processus quitte à prendre $C_n = \mathbb{1}_{(T \geqslant n)}$