Correction Exercice 1 (chapitre 2)

1) $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y$

$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{1}{250} \begin{pmatrix} 18 & 16 & -10 \\ 16 & 42 & 5 \\ -10 & 5 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 220 \\ -75,6 \\ 31,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,76 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $SCT = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2 = \sum y_t^2 - T\bar{y}^2$

$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{T} = \frac{220}{25} = 8,8$

$\Rightarrow SCT = 1975,96 - 25 \times (8,8)^2 = 39,96$

3) * $SCR = Y'Y - \hat{\beta}' X'Y$

$= 1975,96 - \begin{pmatrix} 9,76 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 220 \\ -75,6 \\ 31,04 \end{pmatrix}$

$= 1975,96 - 1964,96$

$\Rightarrow SCR = 11$

* $SCE = SCT - SCR = 39,96 - 11 = 28,96$

4) $\bar{R}^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \times \frac{T-1}{T-K}$

$\Rightarrow \bar{R}^2 = 1 - \frac{11}{39,96} \times \frac{24}{22} = 0,7$

$\Rightarrow$ bonne qualité d'ajustement du modèle.

5) $\hat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$

or, $\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-K} = \frac{11}{22} = 0,5$

$$\Rightarrow \hat{V}(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} \hat{V}(\hat{\beta}_0) & \widehat{cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) & \widehat{cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_2) \\ & \hat{V}(\hat{\beta}_1) & \cdots \\ \vdots & & \hat{V}(\hat{\beta}_2) \end{pmatrix} = 0,5 \times \frac{1}{250} \begin{pmatrix} 18 & 16 & -10 \\ 16 & 42 & 5 \\ -10 & 5 & 75 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{V}(\hat{\beta}_1) = 0,5 \times \frac{1}{250} \times 42 = 0,084$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_1)} = 0,29$$

$$\cdot \hat{V}(\hat{\beta}_2) = 0,5 \times \frac{1}{250} \times 75 = 0,15$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_2)} = 0,387$$

6) $* IC_{95\%}(\beta_1) = \left[\hat{\beta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \times t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ avec $t_{\frac{\alpha}{2}} \rightsquigarrow St(T-K) = St(22)$

$$\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{\alpha}{2}}(22) = 2,074$$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\beta_1) = \underbrace{\left[2 \pm 0,29 \times 2,074\right]}_{0,601} = [1,399 ; 2,601]$$

$* IC_{95\%}(\beta_2) = \left[\hat{\beta}_2 \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} \times t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ avec $t_{\frac{\alpha}{2}} \rightsquigarrow St(22)$

$$\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}(22) = 2,074$$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\beta_2) = \underbrace{\left[-1 \pm 0,387 \times 2,074\right]}_{0,803} = [-1,803 ; -0,197]$$

7) * Test de significativité pour β_1 :

$H_0 : \beta_1 = 0$ contre $H_1 : \beta_1 \neq 0$

On a : $0 \notin IC_{95\%}(\beta_1)$ donc on accepte $H_1 : \beta_1 \neq 0$

$\Rightarrow \beta_1$ est statistiquement significatif.

* Test de significativité pour β_2 :

$H_0 : \beta_2 = 0$ contre $H_1 : \beta_2 \neq 0$

On a : $0 \notin IC_{95\%}(\beta_2)$ donc on accepte $H_1 : \beta_2 \neq 0$

$\Rightarrow \beta_2$ est statistiquement significatif.

8) Test de significativité globale du modèle :

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ contre H_1 : $\exists$ au moins $\beta_j \neq 0$

$$F_c = \frac{T-K}{K-1} \times \frac{SCE}{SCR} \rightsquigarrow F(K-1, T-K) = F(2, 22) = 3,44$$

$$F_c = \frac{22}{2} \times \frac{28,96}{11} = 28,96 > F(2,22) = 3,44$$

Donc on accepte H_1 : Le modèle est globalement significatif.

9) . $IP_{95\%}(Y_{T+1}) = \left[Y^p_{T+1} \pm \hat{\sigma}_{ep} \times t_{\alpha/2} \right]$

. $\dfrac{Y_{T+1} - Y^p_{T+1}}{\hat{\sigma}_{ep}} \rightsquigarrow St(22) \Rightarrow t_{\alpha/2}(22) = 2,074$

. $Y^p_{T+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{T+1} + \hat{\beta}_2 z_{T+1} = 10,76$

. $\hat{\sigma}^2_{ep} = \hat{\sigma}^2 \cdot \left[1 + X'_{T+1} (X'X)^{-1} X_{T+1} \right]$

$(1 \ x \ z)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{\varepsilon p} = 0,814 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\varepsilon p} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon p}} = \sqrt{0,814} = 0,902$

$\Rightarrow IP_{95\%}(y_{T+1}) = [10,76 \pm \underbrace{0,902 \times 2,074}_{1,871}]$

$= [8,889 \; ; \; 12,631]$