Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information
Année universitaire 2020/2021

Intégration et Probabilité 2
TD 2. Vecteurs gaussiens

Exercice 1.
Soit $X = (X_1,\, X_2)^t$ un vecteur gaussien de moyenne $m = (1,\, 2)^t$ et de matrice de covariance

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner la loi du vecteur $Y = (X_1 + 2X_2,\, \frac{X_1}{2} + X_2)^t$.

2. Donner la fonction caractéristique du vecteur Y. Le vecteur Y admet-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue? (justifier votre réponse). Si oui, la donner.

3. Reprener les questions 1 et 2 avec le vecteur $Z = X + Y$.

Exercice 2.
Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ tel que $E[(X_i)^2] < +\infty \;\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$.

1. Montrer que la matrice de covariance de X définie par $K_X = cov((X_i,\, X_j))_{i,\, j=1, \cdots, n}$ est symétrique et semi-définie positive (positive) au sens où $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité suivante

$$aK_Xa^t = \sum_{i\,j=1}^{n} a_i cov(X_i,\, X_j) a_j \geq 0.$$

Exercice 3.
On considère X et Y deux vecteurs gaussiens centrés et i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
Soit $X_\varphi = X\cos(\varphi) + Y\sin(\varphi)$ et $Y_\varphi = -X\sin(\varphi) + Y\cos(\varphi)$, avec $\varphi \in [0,\, 2\pi]$.
Déterminer la loi de X_φ et de Y_φ et étudier l'indépendance.

Exercice 4.
Soit une v.a.r X suivant la loi normale centrée réduite. Y est une v.a.r. qui suit une loi de Rademacher, telle que:

$$P\{Y = 1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}.$$

On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$. Déterminer la loi de Z et démontrer que X et $|X|Y$ ont même loi. Peut-on dire que Le veteur aléatoire (X, Z) est gaussien?

Exercice 5.
Soit X un veteur gaussien centré et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
1) Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

1. Les composantes de X sont indépendantes.
2. $E[e^{i(X_1+X_2)}] = E[e^{iX_1}]E[e^{iX_2}]$

2) L'équivalence entre les assertions précedente reste-elle valable dans le cas où X est un veteur gaussien centré et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$?
3) Soit X un veteur gaussien centré et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $u = (u_1,\, u_2,\, u_3) \in \mathbb{R}^3$, on a l'égalité suivante:

$$E[e^{i\sum_{k=1}^{3} u_k X_k}] = \prod_{k=1}^{3} E[e^{iu_k X_k}].$$

Les composantes de X $(X = (X_1,\, X_2,\, X_3))$ sont-elles indépendantes?

Exercice 6.
Soit $X = (X_0,\, \cdots,\, X_d)$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ tel que:

1. $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\, 1)\ \ \forall\ i \in \{0,\, 1,\, \cdots,\, d\}$.
2. $cov(X_0,\, X_j) = p$ pour $1 \leq\ j\ \leq\ d$.
3. $cov(X_i,\, X_j) = p^2$ pour $1 \leq\ j \neq\ i \leq\ d$.

Soit $Y = (X_0,\, Y_1,\, \cdots,\, Y_d)$ un vecteur aléatoire tel que

$$Y_j = (1 - p^2)^{-\frac{1}{2}}(X_j - pX_0)$$

pour $1 \leq\ j\ \leq\ d$. Déterminer la loi de Y et celle de $S = \sum_{j=1}^{d} X_j$.

Exercice 7

1. Soient X et Y deux v.a.r. continues indépendantes admettant respectivement pour densités f_X et f_Y. Montrer que $X \neq Y$ p.s.

2. On considère une v.a.r. X admettant une densité notée f_X. Déteminer f_{X^2} en fonction de f_X.

3. Soit une v.a.r X suivant la loi normale centrée réduite. Calculer $E[X^4]$

4. Soit le veteur aléatoire (X, Y) telle que $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_2)$. Soient les deux variables aléatoires Z et Q telles que

$$Z = \frac{(X+Y)}{2} \quad et \quad Q = \frac{(X-Y)}{2}.$$

   On pose

$$U = \frac{(X-Z)^2 + (Y-Z)^2}{2}.$$

   Calculer la matrice de covariance du vecteur (Z, Q).

5. Calculer $E[U]$ et $Var[U]$.

6. Etudier l'indépendance des deux variables aléatoires Z et U.

7. Donner P_U.