THEORIE DU PRODUCTEUR

Exercice 13 : Productivité moyenne et marginale

Un output (Q) est obtenu à partir de deux facteurs de production : du travail L et du capital K. En courte période, on suppose le capital fixe. La production du bien varie alors en fonction du nombre d'unités de travail (une unité de travail = 1 heure de travail ouvrier) selon le tableau suivant :

Unités de travail	Unités d'output produites
0	0
1	64
2	224
3	432
4	640
5	800
6	864
7	864

1- Calculer les valeurs des productivités moyennes et marginales par rapport au travail.
2- Représenter graphiquement la production totale ainsi que les productivités marginale et moyenne en fonction du travail.

Exercice 14 : Isoquantes

Soient les fonctions de production à partir de capital K et de travail L :

$$Y = f(K,L) = \begin{cases} K^{\frac{1}{4}} (L-1)^{1/4} & si\ L \geq 1 \\ 0 & si\ L < 1 \end{cases}$$

$Y = g(K,L) = K^{\alpha} L^{\beta}$ $\qquad$ α et β étant > 0

$Y = h(K,L) = K + \sqrt{L}$

Représenter pour chacune des fonctions, l'isoquante correspondant à un niveau d'output y, en étudiant la convexité et en indiquant si elle coupe les axes.

Exercice 15 : TMST

On considère les trois fonctions de production suivantes :

$Q_1 = K^{0,2} L^{0,5}$

$Q_2 = 2 L^{3/4} K^{\beta}$

$Q_3 = 2 \sqrt{L} \sqrt{K}$

Q représente le produit, L et K respectivement le travail et le capital.

1- Exprimer le TMST du travail par le capital pour les fonctions Q_1 et Q_2.
2- Quelle sera la valeur du TMST dans la fonction Q_1 lorsque Q_1=2 et L=3 ?

Exercice 16 : Rendements d'échelle

On considère la production d'un output à partir de deux inputs x et y. Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature des rendements d'échelle :

$$Q = f(x,y) = \frac{x^{2/3}y^{2/3}}{x+y}$$

$$Q = g(x,y) = (x^{1/2} + y^{1/2})^3$$

Exercice 17 : Substitution capital travail

Soit la fonction de production à partir de capital K et de travail L :

$$Y = f(K,L) = \begin{cases} K^{\frac{1}{4}}(L-1)^{1/4} & si\ L \geq 1 \\ 0 & si\ L < 1 \end{cases}$$

On raisonne sur le long terme.

1- Représenter l'isoquante correspondant à y=1. Commenter.
2- Soit r le prix unitaire du capital et w le prix unitaire du travail. Quelles quantités de facteurs minimisent le coût de production de la quantité y = 1 dans chacun des cas suivants : (r=1, w=1) et (r=2, w=3). Interpréter.

Exercice 18 : Effets d'une variation du prix d'un facteur sur le coût de production

Soient les fonctions de production suivantes :

$$Y = f(x,y) = \text{Min}(x,y)$$

$$Y = g(x,y) = x^{1/2}\, y^{1/2}$$

1- Les prix unitaires des deux facteurs sont égaux à un. Quelles sont les quantités d'inputs qui permettent de minimiser les coûts de production d'une quantité donnée y ?
2- Le prix du facteur x reste constant mais le prix du facteur y augmente de a. Expliquer sans faire de calcul pourquoi l'accroissement du coût moyen qui en résulte est plus grand avec f qu'avec g.
3- Vérifier le raisonnement fait par un calcul adéquat.

Exercice 19 : Fonction de coût

Soit la fonction de production :

$$Y = f(x_1,x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$$

Le prix du facteur 1 est $p_1 = 3$ et celui du facteur 2 est $p_2 = 1$.

1- Représenter l'isoquante correspondant à un niveau donné d'output Y.
2- Déterminer les demandes de la firme en facteurs.
3- Déterminer la fonction de coût total et la représenter graphiquement.

Exercice 20 : Coût à CT et à LT

La fonction de production d'une entreprise s'écrit :

$$Y = f(x_1,x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1x_2} - 1 & si\ x_1x_2 \geq 1 \\ 0 & si\ x_1x_2 < 1 \end{cases}$$

A court terme, le facteur 2 est fixe. Les prix des facteurs sont tous deux égaux à 1.

1- Déterminer les fonctions de coût marginal et coût moyen à long terme et les représenter.
2- Déterminer les fonctions de coût moyen et de coût marginal à court terme lorsque l'entreprise dispose de deux unités du facteur 2. Les représenter sur le graphique de la question 1.
3- Quelle quantité de facteur 2 l'entreprise doit-elle acquérir si elle prévoit de produire Y=3 ? Si elle achète effectivement cette quantité de facteur 2 et si elle produit en fait Y=4, quel surcoût supporte-t-elle par unité produite, par comparaison avec le cas où elle aurait choisi la bonne quantité de facteur 2 ?

Exercice 21 : Maximisation du profit dans le court terme

Pour produire y unités d'un certain bien, une entreprise supporte à court terme des coûts variables CV(y) et des coûts fixes CF, avec :

$$CV(y) = \frac{1}{2} y^3 - y^2 + 4y$$

$$CF = 4$$

L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit.

1- Quelles sont les équations des fonctions de : coût moyen CM(y), coût marginal Cm(y), coût variable moyen CVM(y) et coût fixe moyen CFM(y) ?
2- Représenter les fonctions de CM(y), Cm(y) et CVM(y) sur un même graphique, en déterminant explicitement les niveaux de production où elles atteignent un minimum. Définir le seuil de fermeture et le seuil de rentabilité.
(Remarque : l'équation $y^3 - y^2 - 4 = 0$ admet comme unique solution positive $y = 2$)
3- L'entreprise vend sa production sur un marché de concurrence pure et parfaite à un prix unitaire égal à p. Déterminer la production choisie lorsque p = 3, p = 4 et p = 6. Calculer dans chaque cas le profit réalisé, et commenter les résultats obtenus.

Exercice 22 : Offre de l'entreprise et effet de la variation du prix de l'output

Soit la fonction de coût total CT(x) d'une entreprise qui produit un bien X en quantité x :

$$CT(x) = 4\,x^3 - 90\,x^2 + 1000\,x + 500$$

1- Déterminer la quantité optimale et le profit maximum pour un prix p = 400

2- Déterminer la fonction d'offre de l'entreprise.

3- Calculer l'élasticité prix de l'offre au point optimal et interpréter le résultat pour une augmentation de p de 25%. En déduire la situation de l'entreprise si cette augmentation du prix se réalisait.

Exercice 23 : Maximisation du profit et demande de facteurs

La fonction de production d'une entreprise est donnée par :

$Y = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$

Les prix unitaires des deux facteurs sont égaux à l'unité, on note p le prix de l'output.

On raisonne sur le long terme. On suppose que la firme se comporte de manière parfaitement concurrentielle.

1- Déterminer la fonction de coût total. En déduire la fonction d'offre de l'entreprise et la demande de chaque facteur en fonction de p.

2- Retrouver les résultats de la question 1 par un calcul direct (càd sans passer par le calcul de la fonction de coût).

Exercice 24 : Demande de facteurs, fonction de coût et fonction d'offre

Soient les fonctions de production suivantes :

$Y = (2K + L)^{1/2}$

$Y = K^{1/3}\, L^{1/3}$

Les prix unitaires du capital K et du travail L sont respectivement égaux à 3 et 1. On note p le prix de l'output. On raisonne sur le long terme.

Dans chaque cas, représenter l'isoquante qui correspond à un niveau donné Y, et déterminer :

1- Les fonctions de demande de facteurs (à Y fixé)

2- La fonction de coût total

3- La fonction d'offre

4- La demande de capital et de travail exprimée par l'entreprise lorsque p=4.

Exercice 25 : Equilibre à court terme

Nous étudions l'équilibre à court terme d'un marché de concurrence parfaite comprenant 100 entreprises identiques. Chaque entreprise peut produire au maximum une quantité total $y = 2$.

Le coût total de fabrication es donné par :

$CT(y) = \log(2) - \log(2-y)$

1- Les entreprises subissent-elles un coût fixe. Déterminer et représenter les fonctions de coût marginal et de coût moyen d'une entreprise. Quel est le seuil de fermeture ?
2- Déterminer et représenter la fonction d'offre totale. On notera p le prix du bien échangé sur le marché.
3- La demande totale au prix p est donnée par :

   $D(p) = \frac{200}{p} - 100$

   Calculer le prix d'équilibre ainsi que la production et le profit de chaque entreprise.

Exercice 26 : Calcul de l'offre et de la demande globale et équilibre de court terme

Une économie comporte 200 consommateurs consommant deux biens X et Y et 120 entreprises produisant le bien X. Nous nous intéressons au marché du bien X.

Les consommateurs sont de deux types : 100 consommateurs de type 1 avec chacun un revenu $R_1=4$ et 100 consommateurs de type 2 avec chacun un revenu $R_2=8$.

Tous ces consommateurs ont les mêmes goûts représentés par la fonction d'utilité :

$U(x,y) = x^{1/2}\, y^{1/2}$

Les biens X et Y sont de prix respectifs $p_x=p$ et $p_y=1$.

Les entreprises produisent le bien X avec la même fonction de coût :

$CT(x) = (9/10)\, x^2$

1- Calculer la demande de chaque type de consommateurs. En déduire la demande globale en bien X.
2- Calculer l'offre de chaque entreprise ainsi que l'offre globale S(p)
3- Calculer l'équilibre du marché (prix, quantité échangée et profit de chaque entreprise).