TD Théorie du producteur

EX 14 Isoquantes

Soient les fonctions de production à partir de capital K et de travail L

1) $y = f(K,L) = \begin{cases} K^{\frac{1}{4}}(L-1)^{1/4} & si\ L \geq 1 \\ 0 & si\ L < 1 \end{cases}$

• quand $L \geq 1$

on a

• $f(K,L) = y = K^{1/4}(L-1)^{1/4}$

$\Leftrightarrow \quad K(L-1) = y^4$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{K = \frac{y^4}{L-1} = \varphi(L)}$

• $\varphi'(L) = \frac{-y^4}{(L-1)^2} < 0$

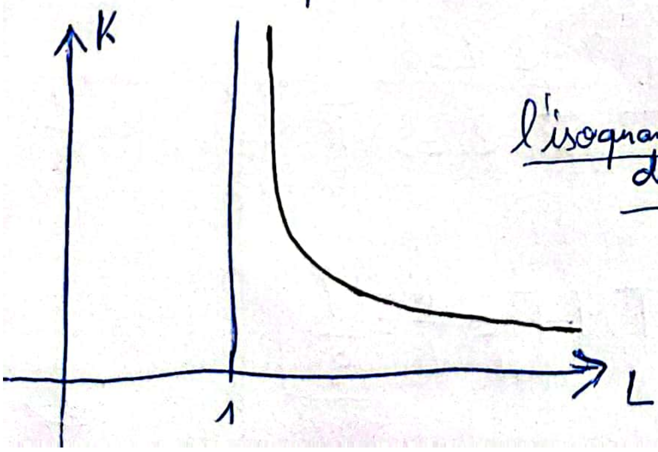
• $\varphi''(L) = \frac{2y^4}{(L-1)^3} > 0$ (puisque $L \geq 1$)

↳ décroissante, convexe

. pour $L \to 1^+$, $K \to +\infty$

. pour $L \to +\infty$, $K \to 0$

↳ ne touche pas les axes.



l'isoquante de f

2) $y = g(K,L) = K^{\alpha}L^{\beta}$; α et $\beta > 0$

pour $y > 0$, $y = K^{\alpha}L^{\beta}$

$\Leftrightarrow \quad K^{\alpha} = yL^{-\beta}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{K = y^{1/\alpha}L^{-\beta/\alpha} = \Psi(L)}$

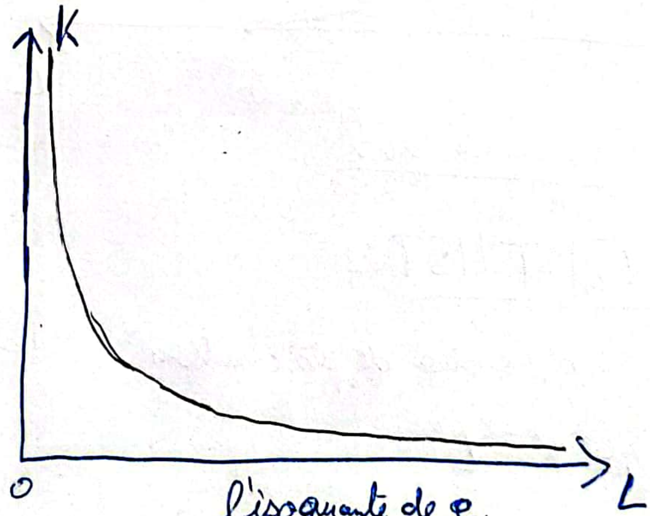
• $\Psi'(L) = -\frac{\beta}{\alpha}y^{1/\alpha}L^{-\beta/\alpha-1} < 0$.

• $\Psi''(L) = +\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}+1\right)y^{1/\alpha}L^{-\frac{\beta}{\alpha}-2} > 0$.

• pour $L \to 0^+$; $K \to +\infty$
asymptote verticale

• pour $L \to +\infty$, $K \to 0$
asymptote horizontale

↳ décroissante, convexe et ne touche pas les axes.



l'isoquante de g.

3) $y = h(K,L) = K + \sqrt{L}$

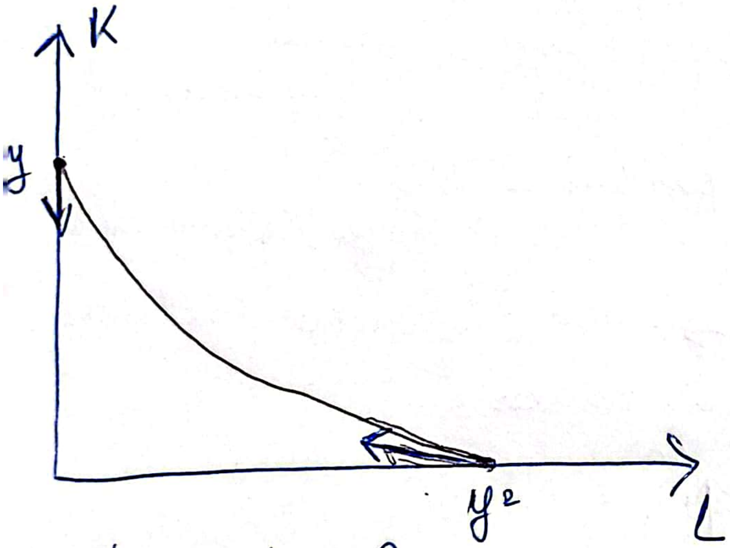
Scanné avec CamScanner

On a pour $y > 0$.

$h(K,L) = y \Leftrightarrow \boxed{K = y - \sqrt{L} = \varphi(L)}$

- $\varphi'(L) = \frac{-1}{2} L^{-1/2} < 0$
- $\varphi''(L) = \frac{1}{4} L^{-3/2} > 0$
- pour $L = y^2$; $K = 0$: tangente oblique de pente $-1/2y$
- pour $L \to 0$; $K = y$: tangente verticale

↳ décroissante, convexe et touche les axes en $(y^2, 0)$ et $(0, y)$.



l'isoquante de h

$\boxed{\text{EX15}}$ TMST :

1) par la fonction de production :

$Q_1 = K^{0,2} L^{0,5}$

- TMST de L par K : la valeur absolue de la pente de l'isoquante au L en abscisse

$$TMST_{K\to L} = \frac{\frac{\partial Q_1}{\partial L}}{\frac{\partial Q_1}{\partial K}}$$

$$= \frac{0,5 K^{0,2} L^{-0,5}}{0,2 L^{0,5} K^{-0,8}} = \frac{0,5}{0,2}\frac{K}{L} = \frac{5}{2}\frac{K}{L}$$

ou bien chercher K en fct $\bar{Q}_1$ et L :

on détermine équation de l'isoquante

$$K^{0,2} L^{0,5} = \bar{Q}_1$$

$$(K^{0,2})^5 = \bar{Q}_1^{\,5} (L^{-0,5})^5$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \bar{Q}_1^{\,5} L^{-2,5}}$$

d'où $\frac{\partial K}{\partial L} = \bar{Q}_1^{\,5}(-2,5) L^{-3,5}$

$$\Rightarrow \boxed{TMST_{K\to L} = \frac{5}{2}\frac{K}{L}}$$

de même pour Q_2. $\boxed{Q_2 = 2L^{3/4}K^{\beta}}$

↳ $\boxed{TMST_{K\to L} = \frac{3}{4\beta}\frac{K}{L}}$

2) $Q_3 = 2\sqrt{L}\sqrt{K}$

$$TMST_{K\to L} = \frac{\frac{\partial Q_3}{\partial L}}{\frac{\partial Q_3}{\partial K}} = \frac{\frac{1}{2} 2 L^{-1/2} K^{1/2}}{\frac{1}{2} 2 L^{1/2} K^{-1/2}} = \frac{K}{L}$$

- pour $Q_3 = 2$, $L = 3$

$$2\sqrt{3}\sqrt{K} = 2 \Rightarrow \sqrt{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{3}}$$

d'où

$$TMST_{K\to L} = \frac{K}{L} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Scanné avec CamScanner

EX16) Rendements d'échelle

la nature des rendements d'échelle ?

· soit $\lambda > 1$

$$y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^{2/3} x_2^{2/3}}{x_1 + x_2}$$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^{2/3} x_1^{2/3} \cdot \lambda^{2/3} x_2^{2/3}}{\lambda (x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{\lambda^{4/3} x_1^{2/3} x_2^{2/3}}{\lambda (x_1 + x_2)} = \lambda^{1/3} \frac{x_1^{2/3} x_2^{2/3}}{x_1 + x_2}$$

$$= \lambda^{1/3} f(x_1, x_2) < \lambda f(x_1, x_2).$$

$\Rightarrow$ Rendement d'échelle décroissant

· $y = g(x_1, x_2) = (x_1^{1/2} + x^{1/2})^3$

$$g(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{3/2} (x_1^{1/2} + x_2)^3 > \lambda (x_1^{1/2} + x_2^{1/2})^3$$

$\Rightarrow$ Rendement d'échelle croissante.

EX17) Substitution capital-travail

soit la fonction de production à partir du Kapital K et de travail L

$$y = f(K, L) = \begin{cases} K^{1/4} (L-1)^{1/4} & \text{si } L \geq 1 \\ 0 & \text{si } L < 1 \end{cases}$$

On raisonne sur le long terme

1) l'isoquante à $y = 1$?

· $K^{1/4} (L-1)^{1/4} = y$ pour $L \geq 1$

$$K(L-1) = y^4$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{y^4}{(L-1)}$$

puis, comme $y = 1$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{L-1} =: \varphi(L)}$$

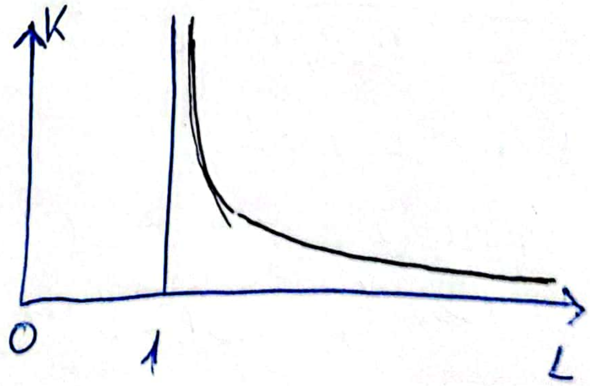
· $\varphi'(L) = -\frac{y^4}{(L-1)^2} < 0$

· $\varphi''(L) = \frac{y^4}{(L-1)^3} > 0$

· pour $L \to 1^+$; $K \to +\infty$
↳ asymptote verticale

· pour $L \to +\infty$; $K \to 0$
↳ asymptote horizontale

$\Rightarrow$ Décroissante, convexe et ne touche pas les axes.



2) Soit r le prix unitaire du capital et w le prix unitaire du travail

· Quantités de facteurs minimisent le coût de production de la quantité $y = 1$?

Scanné avec CamScanner

Cas 1 : (pour $y=1$, $r=1$, $w=1$).

$$\begin{cases} \min\ (rK + wL = K+L) \\ f(K,L) = 1 \\ K \geq 0\ ;\ L \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min(K+L) \\ K(L-1) = 1 \\ K \geq 0\ ;\ L \geq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ isoquant ne touche pas les axes, dérivable et convexe

·Résolution par CPO:

$$\begin{cases} TMST = \frac{r}{w} = 1 \\ f(K,L) = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} (L-1)^{1/4}}{\frac{1}{4} K^{1/4} (L-1)^{-3/4}} = \dfrac{L-1}{K} = 1 \\ K(L-1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = (L-1) \\ K(L-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow (L-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 2}$$

et $\boxed{K = 1}$

EX18 Effets d'une variation du prix d'un facteur sur le coût de production

$$y = f(x_1, x_2) = Min(x_1, x_2)$$

$$y = g(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

1) Les prix unitaires des 2 facteurs sont égaux à un.

Quelles sont les quantités d'inputs qui permettent de minimiser les coûts de production d'une quantité donnée x_2 ?

· Combinaison optimale d'inputs :

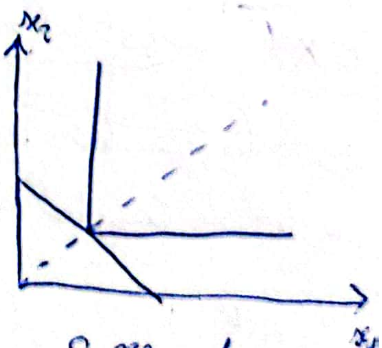
$$x_1 = x_2 = y.$$

$$\Rightarrow C_1(y) = 2y \Rightarrow \boxed{CM_1 = 2}$$

g est une fonction de production de Cobb-Douglas $\Rightarrow$ dérivable, convexe et ne touche pas les axes.

· Le programme de minimisation du coût

$$\begin{cases} \min(x_1 + x_2) \\ g(x_1, x_2) = y. \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



C.P.O:

$$\begin{cases} TMST = \frac{P_1}{P_2} \\ g(x_1, x_2) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 1 \\ x_1^{1/2} x_2^{1/2} = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = y \Rightarrow C_2(y) = 2y.$$

$$\boxed{CM_2 = 2}$$

Scanné avec CamScanner

2) Le prix du facteur x_1 reste est le prix du x_2 augmente de a.

$P_1 = 1$ et $P_2 = a$.

Sans faire de calcul pourquoi l'accroissement du coût moyen qui en résulte est plus grand avec f qu'avec g ?

. Avec f $\forall$ les prix des inputs, on choisit tjrs la combinaison $x_1 = x_2 = y$.

Si le prix du facteur 2 augmente de a. il supportera un coût supp

$\Delta C_1 = a x_2 = a y$

$\Rightarrow \boxed{\Delta CM_1 = a}$

. avec g, si le prix P_2 augment, il y a la possibilité de substituer le bien 1 au bien 2. Elle a tjrs la possibilité d'utiliser les 1er solution $x_1 = x_2 = y$ mais ce n'est certainement pas la combinaison optimale.

$\Rightarrow \Delta C_2 < a y \Rightarrow \boxed{\Delta CM_2 < a}$

3) vérifier le raisonnement fait par un calcul adéquat ?

. Avec f, $x_1 = x_2 = y$

$\Rightarrow C_1(y) = (2+a) y$

$CM_1 = 2 + a \Rightarrow \boxed{\Delta CM_1 = a}$

Avec g :

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{(1+a)} \\ x_1^{1/2} x_2^{1/2} = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y(1+a)^{1/2} \\ x_2 = y(1+a)^{-1/2} \end{cases}$$

$C_2(y) = 2(1+a)^{1/2} y$.

$CM_2 = 2(1+a)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\Delta CM_2 = 2(1+a)^{1/2} - 2}$

. Soit $h(a) = \Delta CM_2 - \Delta CM_1$

$= 2(1+a)^{1/2} - a - 2$.

$h'(a) = \dfrac{1}{(1+a)^{1/2}} - 1 < 0 \Rightarrow h \searrow$

. $\forall a \geq 0$, $h(a) \leq h(0) = 0$

$\Rightarrow \Delta CM_2 \leq \Delta CM_1$; $\forall a \geq 0$

$\boxed{EX\ 19}$ Fonction de coût

$$\boxed{y = f(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}}$$

facteur 1 : prix $p_1 = 3$

facteur 2 : prix $p_2 = 1$

1) L'isoquante correspondant au niveau donné d'output y ?

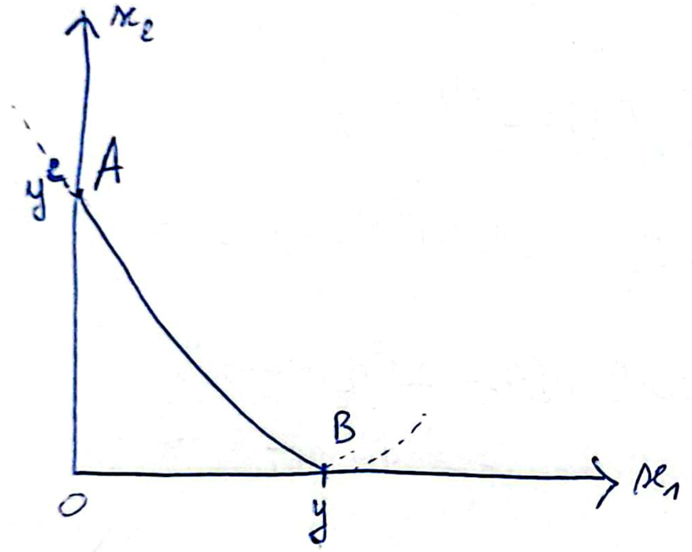
Scanné avec CamScanner

$y = x_1 + \sqrt{x_2}$

$\sqrt{x_2} = y - x_1 \Rightarrow x_1 \leq y$ car $x_2 \geq 0$

$x_2 = (y - x_1)^2$

$\Rightarrow$ décroissante, convexe et touches les axes en $(x_1 = 0 \; ; x_2 = y^2)$ A et $(x_1 = y \; ; x_2 = 0)$ B



2) Déterminer les demandes de la firme en facteurs ?

• Programme de minimisation du coût

$$\begin{cases} Min(3x_1 + x_2) \\ x_1 + \sqrt{x_2} = y \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rq: l'isoquante touche les axes.

Deux cas possibles:

• soit la solution est intérieur, càd $x_1 > 0$, $x_2 > 0 \Rightarrow$ elle vérifie le CPO

• soit la sotion en coin

1er cas:

CPO:

$$\begin{cases} TMST = \frac{P_1}{P_2} = 3 \\ x_1 + \sqrt{x_2} = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} x_2^{-1/2}} = 2x_2^{1/2} = 2\sqrt{x_2} = 3 \\ x_1 + \sqrt{x_2} = y. \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = y - \frac{3}{2}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{9}{4}}$

C'est bien une solution intérieur quand $\boxed{y > \frac{3}{2}}$

• Dans le cas inverse $\boxed{y \leq \frac{3}{2}}$ c'est soit A soit B

en A : $C(A) = 3x_1 + x_2 = y^2$

en B : $C(B) = 3x_1 + x_2 = 3y$.

$C(A) - C(B) = y(y-3) < 0$ pour $y \leq \frac{3}{2}$

donc A est meilleur et correspond à la combinaison optimale.

donc les demandes :

$$x_1 = \begin{cases} y - \frac{3}{2} & \text{si } y > \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 9/4 & \text{si } y > \frac{3}{2} \\ y^2 & \text{si } y \leq 3/2 \end{cases}$$

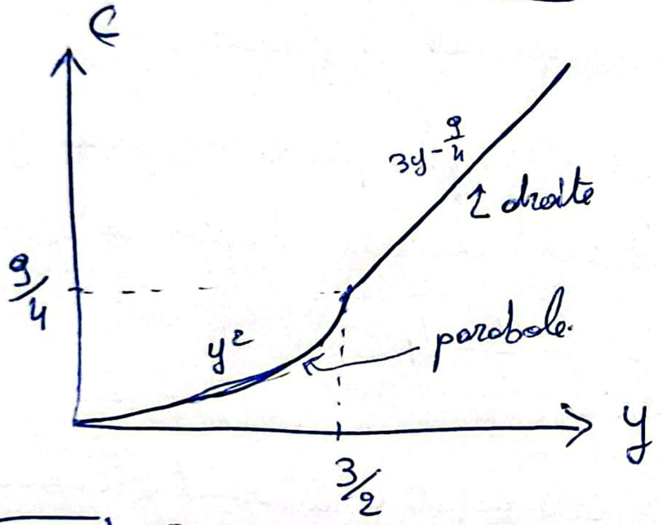
Scanné avec CamScanner

3) Déterminer la fonction de coût total et la représenter graphiquement ?

• $C(y)$: La fonction de coût Totale

$$C(y) = 3x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} 3y - \frac{9}{4} & \text{si } y > \frac{3}{2} \\ y^2 & \text{si } y \leq \frac{3}{2} \end{cases}}$$



EX 20 Coût à CT et à LT

$$y = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1 x_2} - 1 & \text{si } x_1 x_2 \geq 1 \\ 0 & \text{si } x_1 x_2 < 1 \end{cases}$$

à CT, le facteur 2 = fixe ; $p_1 = p_2 = 1$

La différence entre coûts à LT et CT c'est les coûts fixes. À LT tous les coûts sont variable

1) Déterminer les fonctions de coût marginal et coût moyen à long terme et les représenter ?

• Les fonctions de coût moyen et marginal à LT.

$$\cdot\ y > 0 \quad \begin{cases} \text{Min } x_1 + x_2 \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \end{cases}$$

on a bien $x_1 x_2 \geq 1$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

CPO :

$$\begin{cases} TMST = \frac{P_1}{P_2} = 1 \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \dfrac{\frac{1}{2} x_2^{1/2} x_1^{-1/2}}{\frac{1}{2} x_1^{1/2} x_2^{-1/2}} = 1 \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 \quad (1) \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \quad (2) \end{cases}$$

on remplace (1) dans (2)

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2} - 1 = y \Rightarrow y = x_1 - 1 \\ \boxed{x_1 = y + 1} \\ \text{et donc } \boxed{x_2 = x_1 = y + 1} \end{cases}$$

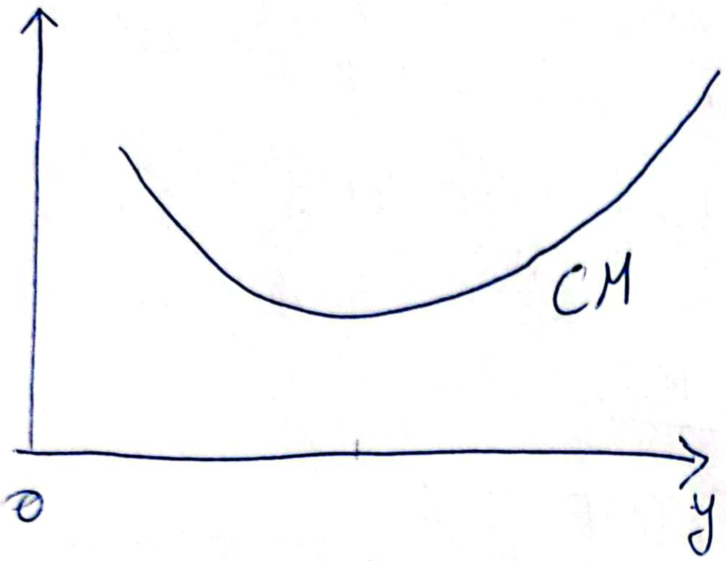
• pour $y = 0$, $\boxed{x_1 = x_2 = 1}$

$$\boxed{C(y) = \begin{cases} 2(y+1) & \text{si } y > 0 \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases}}$$

$$\cdot\ CM(y) = \frac{2y+2}{y} = 2 + \frac{2}{y} \quad ; y > 0$$

$$\cdot\ Cm(y) = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = \frac{\partial (2y+2)}{\partial y} = 2$$

Scanné avec CamScanner



2) Déterminer les fonctions de coût moyen et marignal à CT lorsque l'entreprise dispose de 2 unités du facteur 2 ?

$$x_2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2x_1} - 1$$

$$\sqrt{2x_1}^2 = (y+1)^2$$

$$2x_1 = (y+1)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{(y+1)^2}{2}}$$

$$\boxed{C^{CT}(y) = \frac{(y+1)^2}{2} + 2 = \frac{1}{2}y^2 + y + \frac{5}{2}}$$

- $CM^{CT}(y) = \frac{C^{CT}}{y} = \frac{y^2/2 + y + 5/2}{y}$

$$= \boxed{\frac{y}{2} + 1 + \frac{5}{2y}}$$

- $Cm^{CT}(y) = \frac{\partial C^{CT}}{\partial y} = \frac{2y}{2} + 1 = \boxed{y+1}$

3) Quelle quantité de facteur 2 l'entreprise doit-elle acquerir si elle prévoit de produit $y=3$? Si elle achète effectivement cette quantité de facteur 2 et si elle produit en fait $y=4$? Quel surcoût supporte-elle par unité produite, par comparaison avec le cas où elle aurait choisi la bonne quantité de facteur 2 ?

- Si L'entreprise prevoit de produit $y=3$ elle doit acquerir d'après la qst 1

$$\boxed{x_2 = y + 1 = 4}$$

- Si elle achète effectivement cette quantité sur le CT

$$y = \sqrt{4x_1} - 1 = 2\sqrt{x_1} - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x_1} = y + 1$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{(y+1)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow CT = \frac{(y+1)^2}{4} + 4 = \frac{y^2 + 2y + 1}{4} + 4$$

$$CT = \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{16}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{CT = \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{17}{4}}$$

Scanné avec CamScanner

$\cdot\ CM(y) = \dfrac{CT(y)}{y} = \boxed{\dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{17}{4y}}$

• Si elle produit $y=4$

$\Rightarrow CM^{CT}(y=4) = \dfrac{41}{16}$

alors qu'i aurait été de $\dfrac{5}{2}$, si l'entreprise avait disposé de la quantité optimal de x_2 ($x_2 = y+1 = 5$

$\Rightarrow CM^{LT}(y=4) = 2 + \dfrac{2}{4} = 2 + \dfrac{1}{2}$)

$$\boxed{CM^{LT}(y) = 2 + \frac{2}{y}}$$

$\Rightarrow$ L'entreprise supporte un surcoût égal à $\dfrac{41}{16} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{16} > 0$

dû à sur erreur et à la rigidité de CT.

les prise et les quantités ne s'ajuste pas instantanéement parcequ'il existe des rigidités, des délais d'ajustement.

Scanné avec CamScanner