Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunisie

2ème année
Durée : 1h30
Janvier 2014

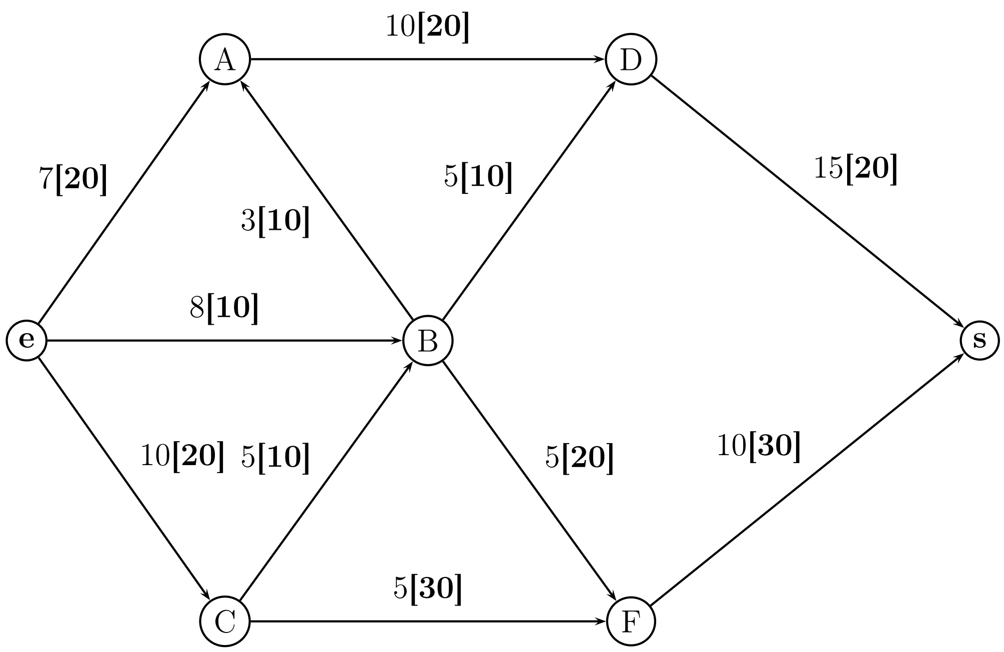
Examen du module Recherche Opérationnelle - Session Principale

Ines Abdeljaoued Tej - inestej@gmail.com

Prenez le temps de bien lire les questions. On appréciera les réponses claires et concises. Les algorithmes et les démonstrations doivent êtres présentés avec soin. L'épreuve comprend **??** *questions sur un total de* **??** *points. Aucun document n'est autorisé.*

Question1 (10 points)

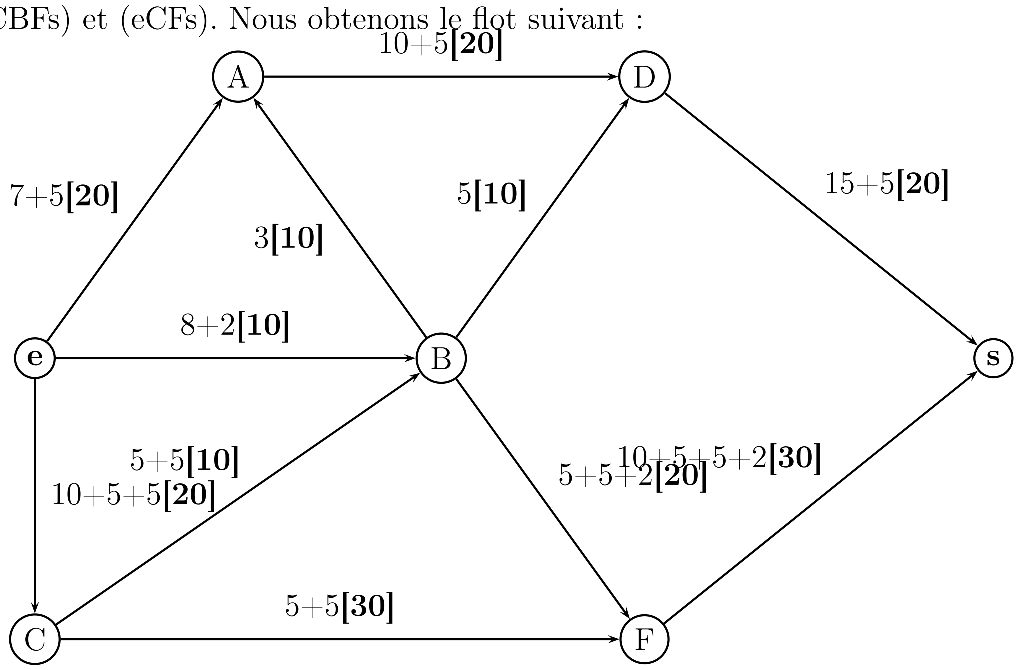
Soit le réseau de transport suivant :



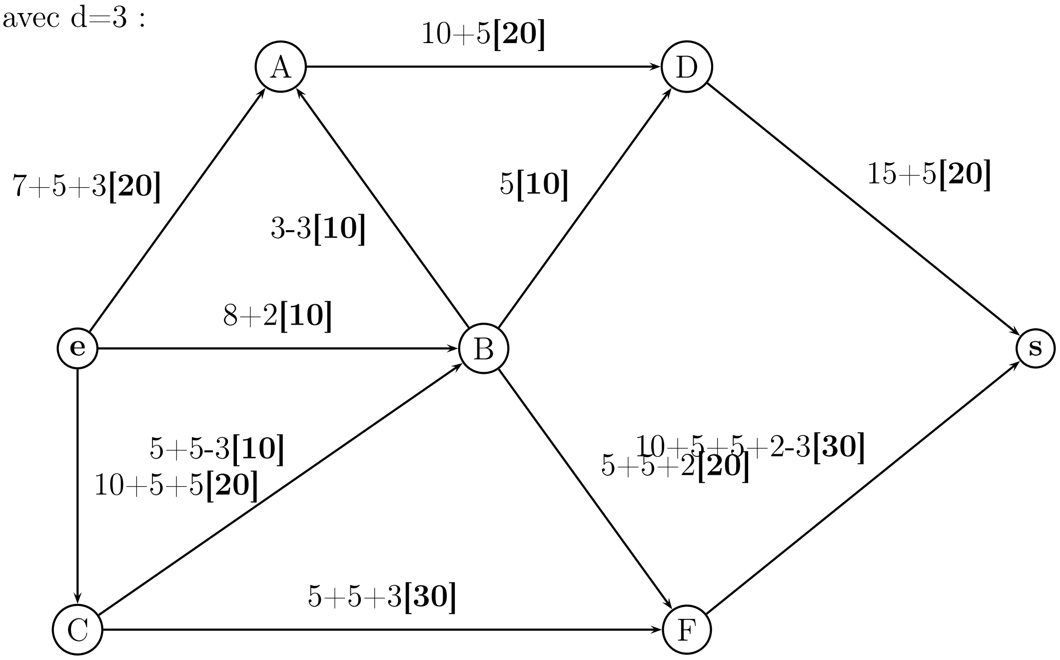
1. Vérifiez qu'il s'agit bien d'un flot ? Justifiez votre réponse.
2. Complétez le réseau par l'arc de retour de capacité infinie et de flux ϕ_0.
3. Est-ce que le flot est complet ? Sinon complétez-le.
4. Appliquez l'étape de marquage de l'algorithme de Ford-Fulkerson afin de déterminer le flot maximal traversant ce réseau. Quelle est la valeur maximale de ϕ_0 ?
5. En déduire la coupe de capacité minimale.

Solution :

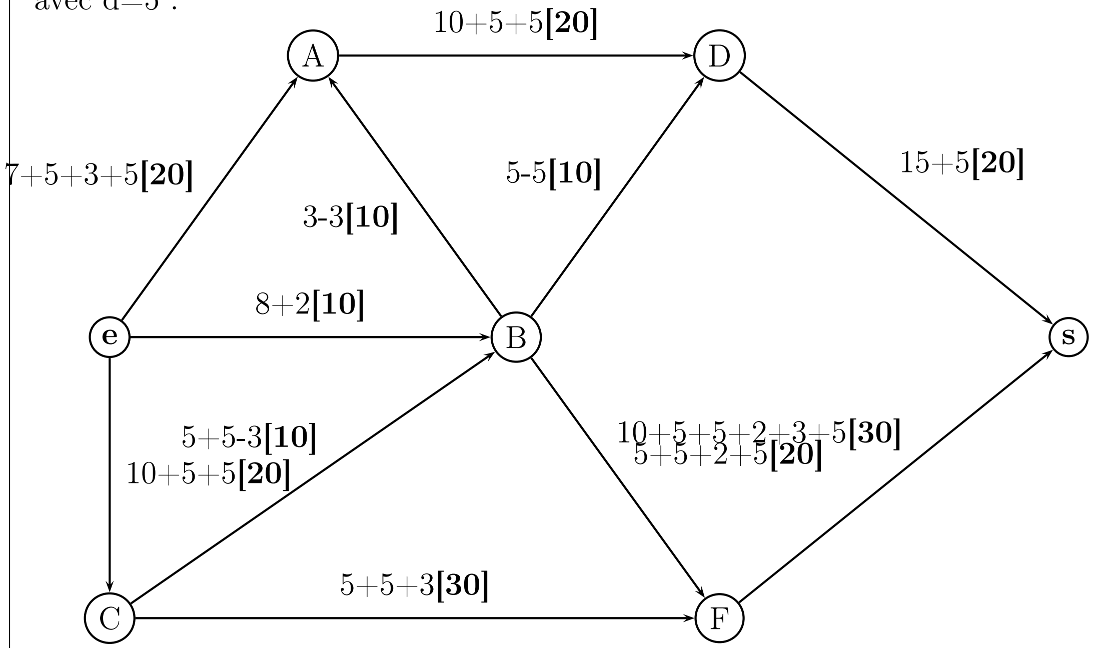
Le flot est complet suite à la saturation des chemins suivants : (eADs), (eBFs), (eCBFs) et (eCFs). Nous obtenons le flot suivant :



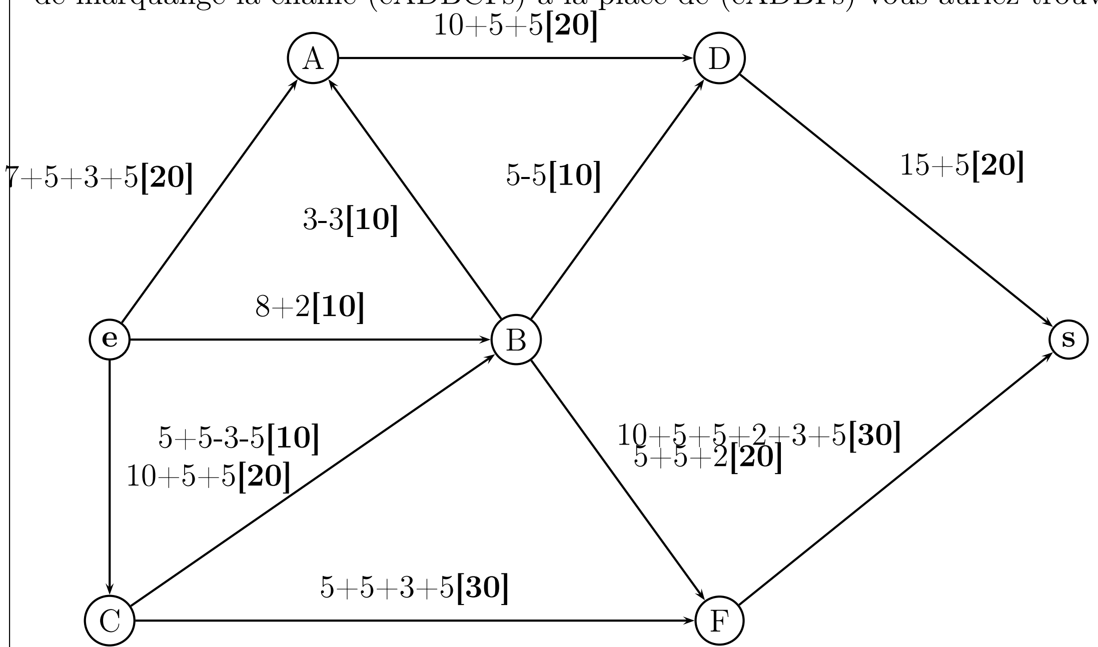
Nous trouvons, suite au marquage, une chaîne non saturée (eABCFs) qu'on sature avec d=3 :



Nous trouvons, suite au marquage, une chaîne non saturée (eADBFs) qu'on sature avec d=5 :



N.B. Ce n'est pas l'unique configuration : si vous aviez choisi à la dernière étape de marquange la chaîne (eADBCFs) à la place de (eADBFs) vous auriez trouvé :



Nous obtenons ainsi un flot maximal avec une coupe de capacité minimale égale à $\Omega = \{(eA), (eB), (eC)\}$ et $\phi_0 = 50$.

Question2 (2 points)

Que représente cette figure ? Donnez une brève description des tâches ainsi que de la durée du projet.

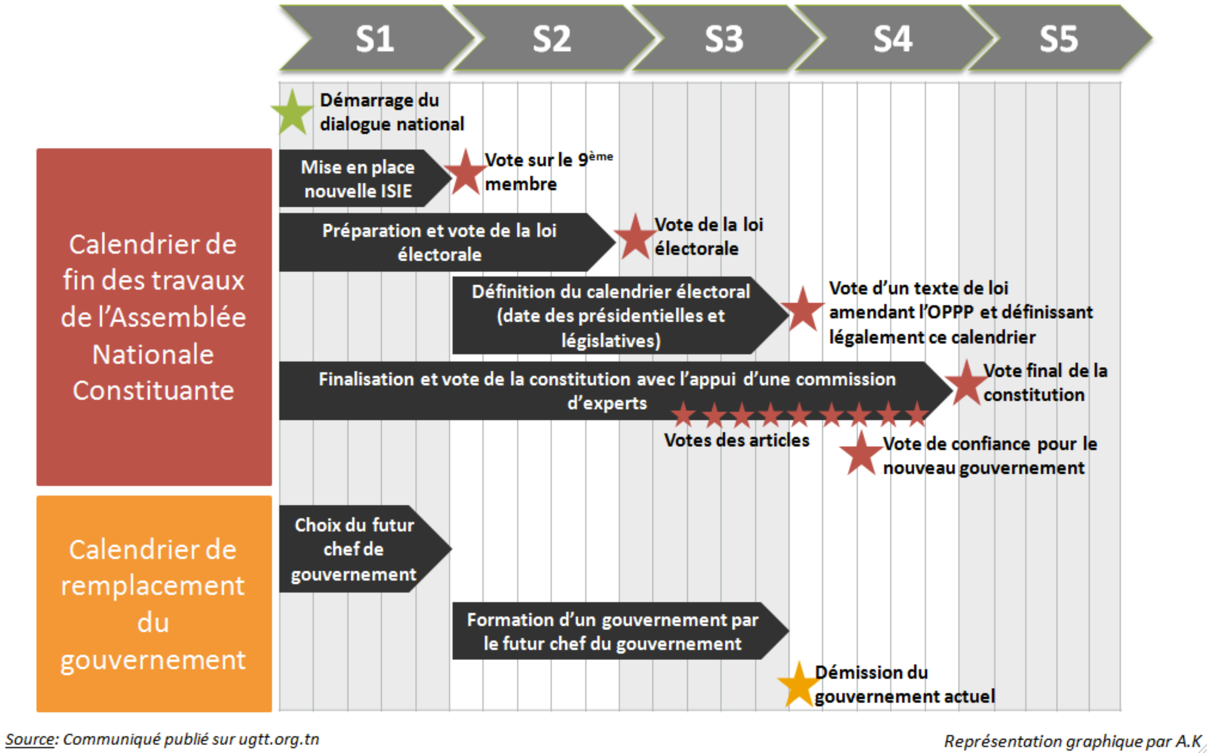


FIGURE 1 – La proposition de feuille de route de l'UGTT/UTICA/LTDH/ONAT

Solution :
Il s'agit d'un diagramme de GANTT représentant la feuille de route de l'UGTT, l'UTICA, la LTDH et l'ONAT. Il s'agit de 6 tâches différentes, dont la dernière tâche se termine à la quatrième semaine.

Question3 (8 points)

Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s/c} & 2x_1 \leq 6 \\ & 6x_2 \leq 18 \\ & x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

1. Quelle est la solution graphique du (P_L).
2. Donnez la résolution du (P_L) obtenue par la méthode du simplexe ? Est-ce qu'elle correspond à la solution graphique ?
3. Donnez le dual de (P_L) et en déduire sa solution de la question 2.

4. Vérifier que le dual du dual de (P_L) est le primal (P_L).

Solution :
La solution graphique est donnée par le point G de coordonnées $(3, 3)$ avec une valeur de la fonction objectif égale à 15 :

On définit et on résout le problème suivant (en introduisant les variables d'écart) :

$$Maximiser\ z = 2x_1 + 3x_2$$

sous les contraintes

$$2x_1 + x_3 = 6$$

$$6x_2 + x_4 = 18$$

avec $x_i \geq 0, i = 1..4$.
Avec les variables d'écart, nous obtenons une solution de base réalisable triviale : $(0, 0, 3, 3)$. Avec cette première solution réalisable, nous pouvons entamer l'algorithme du simplexe.
Soit le premier dictionnaire du simplexe :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	2	0	1	0	6
x_4	0	6	0	1	18
z	2	3	0	0	0

Deux variables, x_1 et x_2, sont candidates pour entrer en base. On choisit x_1. x_3 sort de la base car elle a un ratio test minimal (elle borne le plus la croissance de x_1). On obtient le dictionnaire suivant :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1/2	0	3
x_4	0	6	0	1	18
z	0	3	-1	0	-6

La variable x_2 entre en base et x_4 sort de la base car elle a un ratio test minimal. On obtient le dictionnaire suivant :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	1/2	0	3
x_2	0	1	0	1/6	3
z	0	0	-1	-1/2	-15

La solution optimale est donc égale à $(3, 3)$ avec une fonction objectif optimale égale à 15.
Le dual de (P_L) est égal à :

$$(D_L) = \begin{cases} \text{min} & 6y_1 + 18y_2 \\ \text{s/c} & 2y_1 \geq 2 \\ & 6y_2 \geq 3 \\ & y_1 \leq 0,\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

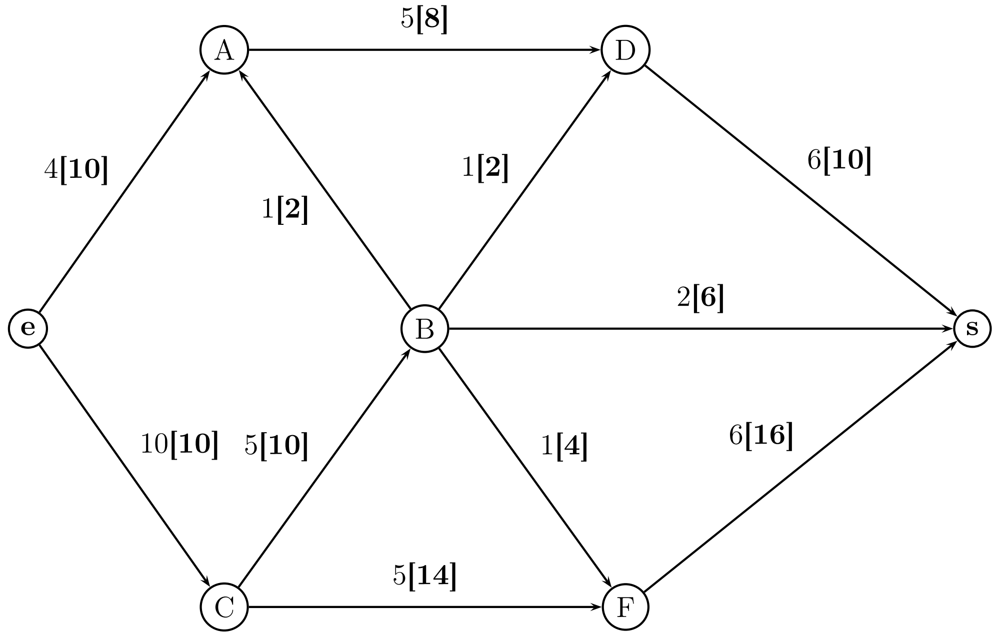
et la solution du dual est égal à $(1, 1/2)$ avec une fonction coût égal à 15.

Bon travail.

Examen du module Recherche Opérationnelle - Session de Contrôle

Ines Abdeljaoued Tej - Durée de l'épreuve : 1h30'

Exercice 1 (10) Soit le réseau de transport suivant :



1. Vérifiez qu'il s'agit bien d'un flot ? Justifiez votre réponse.
2. Complétez le réseau par l'arc de retour de capacité infinie et de flux ϕ_0.
3. Est-ce que le flot est complet ? Sinon complétez-le.
4. Appliquez l'étape de marquage de l'algorithme de Ford-Fulkerson afin de déterminer le flot maximal traversant ce réseau. Quelle est la valeur maximale de ϕ_0 ?
5. En déduire la coupe de capacité minimale.

Exercice 2 (10pt) Soit le problème d'ordonnancement suivant :

Tâche	Durée	antécédents
A	3	aucun
B	4	A,C
C	2	aucun
D	6	A,C
E	2	D

1. Calculer le rang de chaque tâche puis déssiner le graphe Potentiels-tâche (Méthode des Potentiels Métras ou MPM) associé.

2. Calculer les dates de début d'exécution de chacune des tâches au plus tôt et au plus tard.
3. Déterminer les marges totales et les marges libres des tâches.
4. En déduire les tâches critiques ainsi que le(s) chemin(s) critique(s) associé(s) à ce problème.
5. Donner le diagramme de Gantt associé à ce problème d'ordonnancement.

Bon travail.