Exercices sur la Théorie des Graphes

Ines Abdeljaoued-Tej *

15 février 2010

Exercice 1 *Soit $G = (X, U)$un graphe orienté. Montrer que*

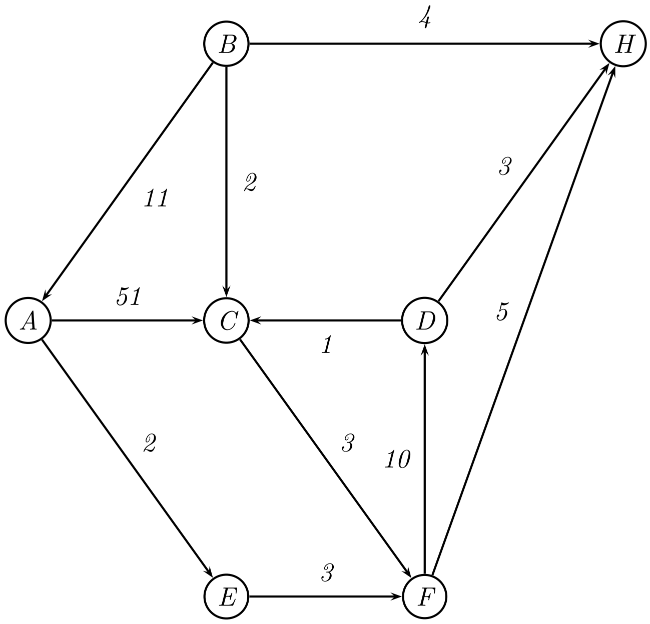
$$\sum_{i \in X} d^{+}(i) = \sum_{i \in X} d^{-}(i).$$

Exercice 2 *Soit G un graphe simple orienté d'ordre n et M la matrice d'adjacence de G. Montrer que si M^n n'est pas nulle, alors le graphe G contient des cycles. Etudier la réciproque.*

Exercice 3 Soit un graphe G sans circuit.

1. Donner l'algorithme du rang.
2. Supposons que le graphe G admette un circuit. Comment peut-on détecter l'existence d'un circuit à l'aide de l'algorithme du rang modifié ?

Exercice 4 *Le graphe ci-dessous détaille le réseau de chemin de fer tunisien. Les noeuds représentent les principales villes tunisiennes, les arêtes représentent les lignes de chemins de fer reliant ces villes et le poids d'une arête représente la capacité (en milliers de tonnes/heure) de la ligne de chemin de fer associée.*



1. *Donner le dictionnaire des précédents associé au réseau ferroviaire défini ci-dessus.*
2. *Afin d'améliorer la productivité du réseau ferroviaire tunisien, nous cherchons les chemins de plus faible capacité partant de la ville B. Pour cela, déterminer le plus court chemin (en milliers de tonnes/heure) partant de la ville B vers toutes les autres villes en utilisant l'algorithme de Moore-Dijkstra.*
3. *Peut-on appliquer l'algorithme de Moore-Dijkstra en cas de présence de cycle ? de circuit ? et en cas de présence de circuit absorbant ? Justifier votre réponse.*

* inestej@gmail.com, http://bit.ly/5vjgUs

Exercice 5 La réalisation d'un pavillon demande d'effectuer un certain nombre de tâches [1]. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité. Les durées sont exprimées en semaines :

Tâche	Description des tâches	Durée	Antécédents
A	Travaux de maçonnerie	7	-
B	Charpente de la toiture	3	A
C	Toiture	1	B
D	Installation sanitaire et électrique	8	A
E	Façade	2	D, C
F	Fenêtre	1	D, C
G	Aménagement du jardin	1	D, C
H	Travaux de plafonnage	3	F
I	Mise en peinture	2	H
J	Emménagement	1	E,G,I

1. En tenant compte du rang de chaque tâche, dessiner le graphe potentiels-tâches associé à ce projet.
2. Former le tableau des prédécesseurs et calculer les dates au plus tôt de début de chaque tâche. En déduire à quelle date au plus tôt l'entrepreneur pourra-t-il finir son chantier ?
3. Rechercher les dates de début au plus tard de ce problème d'ordonnancement.
4. Déterminer le chemin critique de ce projet.
5. Si un quelconque retard est pris sur une des tâches critiques, que peut-on dire de la durée minimale de construction de la villa ?

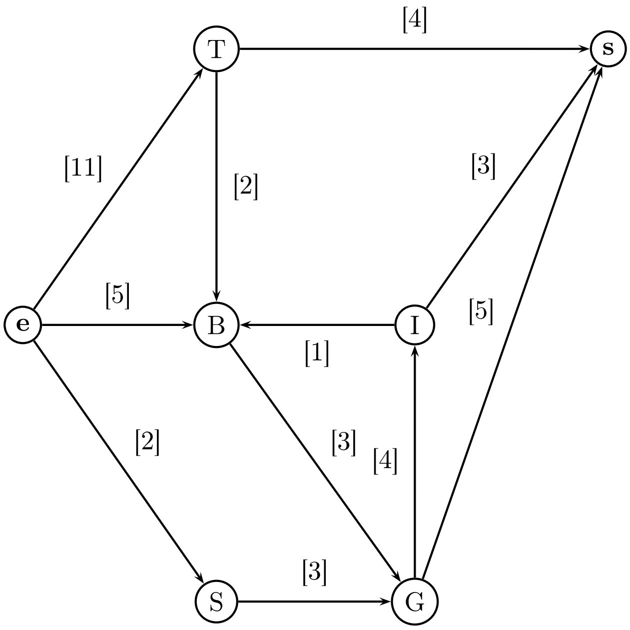
Exercice 6 Soit le problème d'ordonnancement suivant :

Tâche	Durée	antécédents
A	5	B
B	3	aucun
C	2	A,B
D	10	C,A

1. En tenant compte du rang de chaque tâche, dessiner le graphe potentiels-tâches (MPM) associé à ce projet.
2. Calculer les dates au plus tôt et au plus tard de début d'exécution de chaque tâche.
3. Donner les marges totales et les marges libres de chacune des tâches.
4. En déduire le(s) tâches critiques et le(s) chemins critiques.

Exercice 7 Une société de fret dispose de 2 centres : un à Tunis, le deuxième à Bizerte. Trois destinations sont possibles : l'Italie, la Suède, la Grèce.
Chacun des centres de fret a une capacité maximale de transport ainsi qu'un stock initial de marchandises. De même, chaque pays d'arrivée a une demande maximale pour les importations.
L'algorithme de Ford-Fulkerson va permettre d'optimiser ces flux à l'aide d'un outil de modélisation mathématique. La structure sous-jacente est représentée par un graphe orienté dont le sommet de gauche symbolise le stock initial. Celui-ci est relié à chacun des premiers arcs ou arêtes.

1. Exercice tiré du livre de M. Minoux et M. Gondran, *Graphes et Algorithmes*, Editions Eyrolles, 1995.



1. Compléter le graphe ci-dessus en intialisant le flot à 0 et déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel (détailler l'algorithme de Ford-Fulkerson).
2. Donner la coupe minimale correspondante.

Exercice 8 Rechercher une arborescence de poids minimum et de racine 1 sur le graphe de la figure ci-dessous en utilisant un des algorithmes vus en cours :