Exercices MN

Série 5: Systèmes Linéaires et Interpolation (Théorique)

Pr. Christophe Prud'homme*

2008-2009

# 1 Interpolation numérique

## 1.1 Exercices

### Exercise 1

On considère la fonction

$$f(x) = e^{2x}, \qquad x \in [0, 1].$$

Soit $N$ un nombre entier, $H = 1/N$, et $\Pi_1^H f$ le polynôme composite linéaire par morceaux qui interpole la fonction $f$ aux nœuds $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots N$.

1. Calculer le nombre minimal $N$ de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation $E_1^H(f) = \max_{x \in [0,1]} |\Pi_1^H f(x) - f(x)|$ soit inférieure à $10^{-4}$.
2. Soit $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $n$ qui interpole $f$ aux nœuds $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots n$. Est-ce que l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x \in [0,1]} |\Pi_n f(x) - f(x)|$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ ? Est-ce que le nombre de nœuds nécessaires pour que l'erreur soit plus petite que $10^{-4}$ est du même ordre de grandeur que celui du point a) ? Justifier vos réponses.

### Solution de l' Exercise 1

1. L'estimation de l'erreur étant
$$E_1^H(f) \le \frac{H^2}{8} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \frac{1}{8N^2} \max_{x \in [0,1]} |4e^{2x}| = \frac{e^2}{2N^2},$$
il faudra imposer
$$N^2 > \frac{e^2}{2} \cdot 10^4 \quad \Rightarrow N > 100 \frac{e}{\sqrt{2}} \simeq 192.$$
2. L'estimation de l'erreur étant
$$\begin{aligned} E_n(f) &\le \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} \max_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)| = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} \max_{x \in [0,1]} |2^{n+1} e^{2x}| \\ &= \frac{e^2}{4(n+1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$
on voit que $\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0$, car $\dfrac{e^2}{4(n+1)} \to 0$ et $\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \to 0$.

*Page web du cours: `http://ljk.imag.fr/membres/Christophe.Prudhomme/courses/mn`

Le nombre $n$ de nœuds nécessaires pour que l'erreur ne soit pas plus grande que $10^{-4}$ sera beaucoup plus petit que $N$ ; par exemple avec $n = 10$ on a

$$E_n(f) < \frac{e^2}{44} 5^{-11} \ll 10^{-4}.$$

## Exercise 4

1. On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - x^3 - 2$ définie sur l'intervalle $[0, 2]$. Calculer le polynôme de Lagrange $\Pi_2 f(x)$ de degré 2 interpolant la fonction $f$ aux nœuds $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ (*Sugg. : calculer d'abord les polynômes $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ de la base de Lagrange associée aux nœuds donnés ; puis, exprimer $\Pi_2 f(x)$ comme combinaison linéaire des $\varphi_i$*).
2. Calculer maintenant le polynôme de Lagrange $\Pi_3 f(x)$ de degré 3 interpolant la fonction $f$ aux nœuds $x_0 = 0$, $x_1 = e^{-\sqrt{2}}$, $x_2 = 3e^{-\sqrt{1/2}}$ et $x_3 = 2$.
3. On connaît les valeurs d'une fonction $g(x)$ aux points $x = 0, 1, 2, 3$ :

$$g(0) = 3, \quad g(1) = 1, \quad g(2) = 0, \quad g(3) = 6\ .$$

Estimer sa valeur en $x = 1.5$ en interpolant $g$ par un polynôme de degré 3 aux points $x = 0$, 1, 2, 3.

### Solution de l' Exercise 4

1. On peut calculer le polynôme $\Pi_2$ interpolant la fonction $f$ en utilisant les polynômes de la base de Lagrange associée aux nœuds $x_0, x_1, x_2$.
*Polynômes de la base de Lagrange :*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) \\
\varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 2x - x^2 \\
\varphi_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)
\end{aligned}$$

Le polynôme cherché est donc

$$\Pi_2 f(x) = f(0)\varphi_0(x) + f(1)\varphi_1(x) + f(2)\varphi_2(x) = 2(x - 1).$$

2. Il suffit d'observer que $f(x)$ est un polynôme de degré trois et donc on a $\Pi_3 f(x) = f(x)$.
3. On peut construire les polynômes de la base de Lagrange et utiliser la même démarche que au point a). On note $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= -\frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3) & \varphi_1(x) &= \frac{1}{2}x(x - 2)(x - 3) \\
\varphi_2(x) &= -\frac{1}{2}x(x - 1)(x - 3) & \varphi_3(x) &= \frac{1}{6}x(x - 1)(x - 2)
\end{aligned}$$

Finalement, le polynôme interpolant est $\Pi_3 g(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ et sa valeur en $x = 1.5$ est $\Pi_3 g(1.5) = 0$.

Notons que, afin de calculer $\Pi_3 g(x)$, on pourrait imposer directement les conditions d'interpolation. Soit $\Pi_3 g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, avec $a_j$ $(j = 0, \ldots, 3)$ coefficients inconnus. Les conditions d'interpolation $\Pi_3 g(x_i) = g(x_i)$ $(i = 0, \ldots, 3)$ nous donnent le système $4 \times 4$ suivant :

$$\begin{cases} a_0 & & & & & & & = & 3 \\ a_0 & + & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 1 \\ a_0 & + & 2a_1 & + & 4a_2 & + & 8a_3 & = & 0 \\ a_0 & + & 3a_1 & + & 9a_2 & + & 27a_3 & = & 6 \end{cases}$$

On voit donc que cette méthode pour calculer $\Pi_3 g(x)$ est beaucoup plus coûteuse que celle basée sur les polynômes $\varphi_i$.

## Exercise 5

On se donne la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), \qquad x \in I = [0, 1].$$

1. Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ équidistribués. Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x \in I} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ sur l'intervalle $I$, en fonction du degré $n$ du polynôme et étudier son comportement quand $n \to \infty$.
2. Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$. *(Sugg. : essayer pour $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$.)*

### Solution de l' Exercise 5

1. En général, pour estimer l'erreur d'interpolation d'une fonction continue par un polynôme de degré $n$ dans le cas de nœuds équidistribués sur l'intervalle $[a, b]$, on peut utiliser l'inégalité

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{(n+1)} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| , \qquad (5)$$

   où $(b - a)$ est la longueur de l'intervalle d'interpolation. Pour la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$, on a que

$$f^{(1)} = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}\right), \qquad f^{(2)} = -\frac{1}{9} \sin\left(\frac{x}{3}\right), \qquad \ldots$$

   et donc on obtient immédiatement

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{1}{3^{(n+1)}}. \qquad (6)$$

   Dans ce cas, on a donc l'estimation suivante :

$$E_n(f) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)(3n)^{(n+1)}}$$

   qui tend vers zéro quand $n \to \infty$.
2. On a la condition suivante à satisfaire :

$$\frac{1}{4(n+1)(3n)^{(n+1)}} \leq \frac{1}{10^4}. \qquad (7)$$

   D'abord, on peut essayer pour $n = 1$ et $n = 2$, mais on voit que l'inégalité (7) n'est pas vérifié. Finalement, pour $n = 3$, on trouve

$$\frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 9^4} \sim 9.526 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}.$$