Cours 4 : dualité

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

En route vers la dualité (1/5)

$$
\begin{array}{lrl}
\max & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\
s.c. & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & \leq 1 \\
& 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 & \leq 55 \\
& -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 & \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

En route vers la dualité (1/5)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
s.c. & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\
 & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\
 & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Algo du simplexe $\Longrightarrow$ borne inférieure de la fonction objectif

En route vers la dualité (1/5)

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & & \\
s.c. & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 & \leq & 55 \\
 & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 & \leq & 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Algo du simplexe $\Longrightarrow$ borne inférieure de la fonction objectif

Et si on voulait une borne supérieure ?

$$\begin{array}{lrl} \max & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\ s.c. & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 & \leq 1 \\ & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 & \leq 55 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 & \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Algo du simplexe $\Longrightarrow$ borne inférieure de la fonction objectif

Et si on voulait une borne supérieure ?

2ème contrainte $\times \frac{5}{3}$: $\quad \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$

or $z \leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \Longrightarrow \boxed{z \leq \frac{275}{3}}$

En route vers la dualité (2/5)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & & \\
s.c. & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 55 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & \leq & 3 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}$$

Somme des 2ème et 3ème contraintes :

$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$

$\Longrightarrow \boxed{z \leq 58}$

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ s.c. & x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Somme des 2ème et 3ème contraintes :

$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$

$\Longrightarrow \boxed{z \leq 58}$

principe valable pour toute combinaison linéaire à coeffs ≥ 0

En route vers la dualité (3/5)

Principe du dual

- faire une combinaison linéaire des contraintes :
  $\sum_{i=1}^{m} y_i \times$ $i$ème contrainte, avec $y_i \geq 0$
- z inférieur à la combinaison linéaire $\Longrightarrow z \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$

$$\begin{array}{lrrrrl}
\max & 4x_1 + & x_2 + & 5x_3 + & 3x_4 & \\
s.c. & x_1 - & x_2 - & x_3 + & 3x_4 & \leq 1 \\
& 5x_1 + & x_2 + & 3x_3 + & 8x_4 & \leq 55 \\
& -x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 - & 5x_4 & \leq 3 \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
y_1 \times (\ \ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1\ ) \\
y_2 \times (\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55\ ) \\
y_3 \times (\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3\ ) \\
\hline
(\ \ y_1 + 5y_2 - y_3\ ) \times x_1 + \\
(\ -y_1 + y_2 + 2y_3\ ) \times x_2 + \\
(\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3\ ) \times x_3 + \\
(\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3\ ) \times x_4 \leq (y_1 + 55y_2 + 3y_3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\ \ y_1 + 5y_2 - \ \ y_3\ ) \times x_1 + \\
(\ -y_1 + \ \ y_2 + 2y_3\ ) \times x_2 + \\
(\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3\ ) \times x_3 + \\
(\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3\ ) \times x_4 \leq (y_1 + 55y_2 + 3y_3)
\end{array}$$

Or fonction objectif = $4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l}
(\ \ y_1 + 5y_2 - \ \ y_3\ ) \geq 4 \\
(\ -y_1 + \ \ y_2 + 2y_3\ ) \geq 1 \\
(\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3\ ) \geq 5 \\
(\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3\ ) \geq 3
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
(\ \ y_1 + 5y_2 - \ \ y_3\ ) \times x_1 + \\
(\ -y_1 + \ \ y_2 + 2y_3\ ) \times x_2 + \\
(\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3\ ) \times x_3 + \\
(\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3\ ) \times x_4 \leq (y_1 + 55y_2 + 3y_3)
\end{array}
$$

Or fonction objectif = $4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$$
\Longrightarrow
\begin{array}{l}
(\ \ y_1 + 5y_2 - \ \ y_3\ ) \geq 4 \\
(\ -y_1 + \ \ y_2 + 2y_3\ ) \geq 1 \\
(\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3\ ) \geq 5 \\
(\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3\ ) \geq 3
\end{array}
$$

$$
\Longrightarrow \boxed{z \leq (y_1 + 55y_2 + 3y_3)}
$$

$$
\begin{array}{l}
(\;\; y_1 + 5y_2 - \;\; y_3\;) \times x_1 + \\
(-y_1 + \;\; y_2 + 2y_3\;) \times x_2 + \\
(-y_1 + 3y_2 + 3y_3\;) \times x_3 + \\
(\;3y_1 + 8y_2 - 5y_3\;) \times x_4 \leq (y_1 + 55y_2 + 3y_3)
\end{array}
$$

Or fonction objectif = $4x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$$
\Longrightarrow
\begin{array}{l}
(\;\; y_1 + 5y_2 - \;\; y_3\;) \geq 4 \\
(-y_1 + \;\; y_2 + 2y_3\;) \geq 1 \\
(-y_1 + 3y_2 + 3y_3\;) \geq 5 \\
(\;3y_1 + 8y_2 - 5y_3\;) \geq 3
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \boxed{z \leq (y_1 + 55y_2 + 3y_3)}$$

meilleure borne $\Longrightarrow$ $\boxed{\min y_1 + 55y_2 + 3y_3}$

Problème dual

Définition du dual

- problème d'origine : le primal :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

- le problème dual :

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Comparaison primal – dual (1/2)

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right.$$

- $(x_1, \ldots, x_n)$ solution du primal
- $(y_1, \ldots, y_m)$ solution du dual

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$$

Comparaison primal – dual (1/2)

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{array} \right.$$

- $(x_1, \ldots, x_n)$ solution du primal
- $(y_1, \ldots, y_m)$ solution du dual

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i$$

Comparaison primal – dual (1/2)

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

- $(x_1, \ldots, x_n)$ solution du primal
- $(y_1, \ldots, y_m)$ solution du dual

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i}$$

Comparaison primal – dual (2/2)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ solution du primal
- $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ solution du dual

alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Longrightarrow (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ solution du primal
- $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ solution du dual

alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Longrightarrow (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

Démonstration :

transparent précédent : $\forall\ (x_1, \ldots, x_n),\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ solution du primal
- $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ solution du dual

alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Longrightarrow (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

Démonstration :

transparent précédent : $\forall\ (x_1, \ldots, x_n)$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$

transparent précédent : $\forall\ (y_1, \ldots, y_m)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

Théorème de D. Gale, H.W. Kuhn & A.W. Tucker (1951)

Théorème de la dualité

- Si le primal a une solution optimale $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$
- Alors le dual a une solution optimale $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Démonstration :

supposons que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ solution optimale du primal

transparents précédents :

$\exists\ (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Longrightarrow (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimal

Démonstration :

supposons que $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ solution optimale du primal

transparents précédents :

$$\exists\ (y_1^*, \dots, y_m^*) \text{ tel que } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Longrightarrow (y_1^*, \dots, y_m^*) \text{ optimal}$$

$\Longrightarrow$ il suffit de montrer qu'il existe une solution du dual telle que :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Problème d'origine :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Introduction des variables d'écart :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

À l'optimum du primal :

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \widehat{c}_k x_k, \qquad \text{avec les } \widehat{c}_k \leq 0$$

Démonstration du théorème de la dualité (3/7)

Définition des y_i^* : $y_i^* = -\widehat{c_{n+i}}$

⚠ les y_i^* sont bien ≥ 0

y_i^* = -coeff dans z de la variable d'écart de la *i*ème contrainte

Démonstration du théorème de la dualité (3/7)

Définition des y_i^* : $y_i^* = -\widehat{c_{n+i}}$

⚠ les y_i^* sont bien ≥ 0

y_i^* = -coeff dans z de la variable d'écart de la *i*ème contrainte

Reste de la démo : montrer que $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ est réalisable

À l'optimum du primal :

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \widehat{c_k} x_k$$

Définition des y_i^* : $\boxed{y_i^* = -\widehat{c_{n+i}}}$

⚠ les y_i^* sont bien ≥ 0

y_i^* = -coeff dans z de la variable d'écart de la $i$ème contrainte

Reste de la démo : montrer que $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ est réalisable

À l'optimum du primal :

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \widehat{c_k} x_k = z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c_k} x_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \widehat{c_k} x_k$$

Définition des y_i^* : $\boxed{y_i^* = -\widehat{c_{n+i}}}$

les y_i^* sont bien ≥ 0

y_i^* = -coeff dans z de la variable d'écart de la *i*ème contrainte

Reste de la démo : montrer que $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ est réalisable

À l'optimum du primal :

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \widehat{c}_k x_k = z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k x_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \widehat{c}_k x_k$$

$$= z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{n+i}$$

Variables d'écart : $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$

Variables d'écart : $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow z &= z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{n+i} \\
&= z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)
\end{aligned}$$

Variables d'écart : $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow z &= z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* x_{n+i} \\
&= z^* + \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \\
&= \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j
\end{aligned}$$

À l'origine $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

algo du simplexe : opérations algébriques

$\Longrightarrow \forall$ tableaux, $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

À l'origine $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

algo du simplexe : opérations algébriques

$\Longrightarrow \forall$ tableaux, $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$\Longrightarrow$ d'après le transparent précédent :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

Démonstration du théorème de la dualité (6/7)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

équation valable pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) \Longrightarrow z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j$$

équation valable pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) \Longrightarrow z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$(x_j = 1, x_k = 0 \; \forall \; k \neq j) \Longrightarrow c_j = \widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j$$

équation valable pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) \Longrightarrow z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$(x_j = 1, x_k = 0\ \forall\ k \neq j) \Longrightarrow c_j = \widehat{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Or condition d'arrêt du simplexe : $\widehat{c}_k \leq 0$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Démonstration du théorème de la dualité (7/7)

Conclusion :

- Si $y_i^* = -\widehat{c_{n+i}}$ alors :
- $y_i^* \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$

$\Longrightarrow (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ est une solution réalisable du dual

Conclusion :

- Si $y_i^* = -\widehat{c_{n+i}}$ alors :
- $y_i^* \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$

$\Longrightarrow (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ est une solution réalisable du dual

- $\displaystyle z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

$\Longrightarrow (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ solution optimale

CQFD

Application (1/2)

Problème d'origine :

$$
\begin{array}{llcl}
\max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 & & \\
s.c. & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Après introduction des variables d'écart :

$$
\begin{array}{lcl}
{\color{red}x_4} & = & 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
{\color{red}x_5} & = & 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
{\color{red}x_6} & = & 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
z & = & \phantom{8 - {}} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0$$

Application (2/2)

Dictionnaire à l'optimum :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned}$$

- solution du primal : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$

Dictionnaire à l'optimum :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ \ 2 - 2x_2 - 2x_4 + \ \ x_6 \\
x_5 &= \ \ 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_3 &= \ \ 1 + \ \ x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
z \ &= 13 - 3x_2 - \ \ x_4 - \ \ x_6
\end{aligned}$$

- solution du primal : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$
- solution du dual : $(y_1, y_2, y_3) = (-\widehat{c}_4, -\widehat{c}_5, -\widehat{c}_6) = (1, 0, 1)$

Application (2/2)

Dictionnaire à l'optimum :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned}$$

- solution du primal : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 1, 0, 1, 0)$
- solution du dual : $(y_1, y_2, y_3) = (-\widehat{c}_4, -\widehat{c}_5, -\widehat{c}_6) = (1, 0, 1)$

⚠ dans le simplexe sous forme tabulaire, on a $-z$
$\Longrightarrow$ ne pas multiplier les coeffs de la dernière ligne par -1

Relations entre primal et dual (1/4)

Expression d'un problème dual

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Or $\min f = -\max -f$

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Expression d'un problème dual

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Or $\min f = -\max -f$

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Expression d'un problème dual

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Or $\min f = -\max -f$

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

le dual est un nouveau primal !

Dual

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Dual du dual

$$-\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq (-b_i) & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Dual

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Dual du dual

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq (-b_i) & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Dual

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Dual du dual

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Dual

$$-\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Dual du dual

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

le dual du dual = primal

Relations entre primal et dual (3/4)

Relations primal – dual

- le dual du dual = le primal

Relations entre primal et dual (3/4)

Relations primal – dual

- le dual du dual = le primal
- primal a un optimum $\Longleftrightarrow$ dual a un optimum

Relations entre primal et dual (3/4)

Relations primal – dual

- le dual du dual = le primal
- primal a un optimum $\iff$ dual a un optimum
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

  $\Longrightarrow$ primal non borné $\Longrightarrow$ dual non réalisable

Relations entre primal et dual (3/4)

Relations primal – dual

- le dual du dual = le primal
- primal a un optimum $\Longleftrightarrow$ dual a un optimum
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

  $\Longrightarrow$ primal non borné $\Longrightarrow$ dual non réalisable
- dual non borné $\Longrightarrow$ primal non réalisable

Relations primal – dual

- le dual du dual = le primal
- primal a un optimum $\Longleftrightarrow$ dual a un optimum
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

  $\Longrightarrow$ primal non borné $\Longrightarrow$ dual non réalisable
- dual non borné $\Longrightarrow$ primal non réalisable

⚠ primal et dual peuvent être tous deux non réalisables :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

		Dual		
		$\exists$ optimum	non réalisable	non borné
Primal	$\exists$ optimum	✔	✖	✖
	non réalisable	✖	✔	✔
	non borné	✖	✔	✖

Relations entre primal et dual (4/4)

		Dual		
		$\exists$ optimum	non réalisable	non borné
Primal	$\exists$ optimum	✔	✖	✖
	non réalisable	✖	✔	✔
	non borné	✖	✔	✖

$\Longrightarrow$ si le primal et le dual ont des solutions réalisables alors ils ont un optimum

Conséquence pratique

Il peut être avantageux d'appliquer l'algo du simplexe sur le dual plutôt que sur le primal

tableau du dual à l'optimum $\Longrightarrow$ solution optimale du primal

Exemple : problème primal à 9 variables et 99 contraintes

$\Longrightarrow$ 100 lignes dans le primal et 10 lignes dans le dual

nb d'itérations du simplexe $\approx$ proportionnel au nb de lignes

$\Longrightarrow$ moins d'itérations dans le dual

algo révisé du simplexe $\Longrightarrow$ itérations pas plus coûteuses avec le dual

Théorème de complémentarité

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$: solution réalisable du primal
- $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$: solution réalisable du dual

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ soient optimaux simultanément :

- $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ ou } x_j^* = 0 \text{ (ou les 2)} \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

et

- $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ ou } y_i^* = 0 \text{ (ou les 2)} \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m$$

Démonstration :

$$\text{dual} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* \geq c_j x_j^*$$

Démonstration :

$$\text{dual} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* \geq c_j x_j^*$$

$$\text{primal} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq b_i \Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq b_i y_i^*$$

Démonstration :

$$\text{dual} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* \geq c_j x_j^*$$

$$\text{primal} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq b_i \Longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* \leq b_i y_i^*$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Démonstration du théorème de complémentarité (2/3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Si $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

alors théorème de la dualité $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Si $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

alors théorème de la dualité $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^*$$

Démonstration du théorème de complémentarité (2/3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Si $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

alors théorème de la dualité $\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^*$$

dual $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* = c_j x_j^*$

$$\Longrightarrow x_j^* = 0 \quad \text{ou} \quad c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

Démonstration du théorème de complémentarité (2/3)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Si $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

alors théorème de la dualité $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^*$$

dual $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* = c_j x_j^*$

$$\Longrightarrow x_j^* = 0 \quad \text{ou} \quad c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

démo similaire pour $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \quad \text{ou} \quad y_i^* = 0$

Démonstration du théorème de complémentarité (3/3)

Réciproque

$$\text{Si } \left[x_j^* = 0 \quad \text{ou} \quad c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right] \ \textcolor{red}{\text{et}} \ \left[y_i^* = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \right]$$

$$\text{alors } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

théorème de la dualité $\Longrightarrow$ $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimaux

CQFD

Théorème de complémentarité

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$: solution réalisable du primal
- $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$: solution réalisable du dual

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ soient optimaux simultanément :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$ ou $x_j^* = 0$ (ou les 2) $\quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$

et

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$ ou $y_i^* = 0$ (ou les 2) $\quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m$

$$\Longrightarrow \text{si } x_j^* > 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \qquad \text{si } y_i^* > 0 \text{ alors } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$$

Complémentarité : corollaire

Corollaire du théorème de complémentarité

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$: solution réalisable du primal
- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ optimal si et seulement si $\exists\ (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j & \quad \text{dès que} \quad x_j^* > 0 \\ y_i^* = 0 & \quad \text{dès que} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \end{aligned}$$

et tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j & \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n \\ y_i^* \geq 0 & \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Problème : maximisation du profit d'une fabrique de meubles

$\Longrightarrow$ utilise des matières premières et en produit des meubles

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Problème : maximisation du profit d'une fabrique de meubles

$\Longrightarrow$ utilise des matières premières et en produit des meubles

$\Longrightarrow$ $x_j =$ nombre de meubles d'un certain type (chaises, bureaux) fabriqués

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Problème : maximisation du profit d'une fabrique de meubles

$\Longrightarrow$ utilise des matières premières et en produit des meubles

$\Longrightarrow$ $x_j =$ nombre de meubles d'un certain type (chaises, bureaux) fabriqués

$c_j =$ prix en € d'une unité de produit

Interprétation économique des variables duales (1/5)

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Problème : maximisation du profit d'une fabrique de meubles

$\Longrightarrow$ utilise des matières premières et en produit des meubles

$\Longrightarrow$ $x_j =$ nombre de meubles d'un certain type (chaises, bureaux) fabriqués

$c_j =$ prix en € d'une unité de produit

$a_{ij} =$ quantité de la $i$ème matière première nécessaire à la construction d'une unité du $j$ème type de meuble

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Problème : maximisation du profit d'une fabrique de meubles

$\Longrightarrow$ utilise des matières premières et en produit des meubles

$\Longrightarrow$ x_j = nombre de meubles d'un certain type (chaises, bureaux) fabriqués

c_j = prix en € d'une unité de produit

a_{ij} = quantité de la *i*ème matière première nécessaire à la construction d'une unité du *j*ème type de meuble

b_i = quantité de la *i*ème matière première disponible

x_j = nombre de meubles d'un certain type (chaises, bureaux) fabriqués
c_j = prix en € d'une unité de produit
a_{ij} = quantité de la $i$ème matière première nécessaire à la construction d'une unité du $j$ème type de meuble
b_i = quantité de la $i$ème matière première disponible

---

variable	unité
x_j	unité de produit j
c_j	€ par unité de produit j
a_{ij}	unité de ressource i par unité de produit j
b_i	unité de ressource i

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

variable	unité
c_j	€ par unité de produit j
a_{ij}	unité de ressource i par unité de produit j

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \Longrightarrow$ (unité de ressource i par unité de produit j)$\times$
unité de y_i = € par unité de produit j

$\Longrightarrow$ y_i exprimé en € par unité de ressource i

Interprétation économique

y_i mesure l'apport d'une unité de ressource i au profit de l'entreprise

Interprétation économique des variables duales (4/5)

Interprétation économique

y_i mesure l'apport d'une unité de ressource i au profit de l'entreprise

on augmente d'1 le nombre d'unités de ressource $i \Longrightarrow$ le profit augmente de y_i

$\Longrightarrow$ on est prêt à payer cette unité de ressource au maximum un prix de y_i

les y_i sont souvent appelés «*prix marginaux*»

Théorème

Si le primal a au moins une solution optimale non dégénérée, alors $\exists\ \epsilon > 0$ tel que si $|t_i| \leq \epsilon\ \forall i = 1, 2, \ldots, m$ alors :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

a une solution optimale et dont la valeur est $z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i$

où $y_1^*, \ldots, y_m^*$ = solution optimale du dual