

## Modèles linéaires (exercices chapitre 2)

### Exercice 1 :

On considère le modèle suivant :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 z_t + u_t \quad \text{avec } t = 1, \dots, 25$$

Où :

-  $u_t$  est la variable aléatoire vérifiant les hypothèses de la MCO ;

-  $\beta_0, \beta_1$  et  $\beta_2$  sont les paramètres du modèle.

Soit  $X$  la matrice des observations des variables explicatives y compris la constante. On vous fournit les informations suivantes :

$$X'X = \begin{bmatrix} 25 & -10 & 4 \\ -10 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}; (X'X)^{-1} = \frac{1}{250} \begin{bmatrix} 18 & 16 & -10 \\ 16 & 42 & 5 \\ -10 & 5 & 75 \end{bmatrix}; X'Y = \begin{bmatrix} 220 \\ -75,6 \\ 31,04 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Y'Y = \sum y_t^2 = 1975,96.$$

- 1) Déterminer les estimateurs des MCO de  $\beta_0, \beta_1$  et  $\beta_2$ .
- 2) Calculer la SCT.
- 3) Calculer la SCR. En déduire la SCE.
- 4) Calculer le coefficient de détermination ajusté  $\bar{R}^2$ . Interpréter.
- 5) Déterminer les écarts-types estimés de  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$ .
- 6) Construire un intervalle de confiance à 95% pour  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .
- 7) Tester au seuil de 5% la significativité individuelle des coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .
- 8) Le modèle est-il globalement significatif au risque de 5% ?
- 9) Pour la période  $T+1$ , on donne :  $x_{T+1} = z_{T+1} = 1$ . Construire un intervalle de prévision au niveau de 95% pour  $y_{T+1}$ .

### Exercice 2 :

Pendant 23 ans, nous avons relevé les rendements de la culture de blé ( $y$ ), la température moyenne ( $x_1$ ) et le niveau des précipitations ( $x_2$ ).

L'ajustement de ce modèle conduit aux résultats suivants :  $\hat{y}_t = 0,51x_{1t} - 0,35x_{2t} + 27,3$ .

On donne aussi les informations suivantes :

$$T = 23; R^2 = 0,937; (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0009 & -0,08 & 0,3 \\ -0,08 & 0,0025 & 0,02 \\ 0,3 & 0,02 & 0,02 \end{pmatrix} \text{ et } SCT = \sum (y_t - \bar{y})^2 = 317,46.$$

On demande de tester les deux hypothèses suivantes :

- 1) Existe-t-il une influence d'au moins un des facteurs ?
- 2) Le coefficient de la température est-il significativement deux fois plus élevé que celui des précipitations ?