ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 2h00
Novembre 2008

Examen du module Analyse Numérique

Exercice 1 (6pt).

1. Donner le théorème de Gershgorin appliqué à une matrice A de taille $n \times n$ quelconque.
2. Expliquer la méthode de la puissance appliqée à une matrice A en donnant l'algorithme.
3. Calculer les deux premières itérations de la méthode de la puissance apliquée à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (4pt). **Exercice :** Soient (x_i, f_i) pour $i = 0..n$ des points réels ou complexes. Ecrire un algorithme permettant de calculer le polynôme de Lagrange se basant sur les polynômes d'interpolation $L_i(x)$ pour $i = 0..n$.
Déterminer la complexité de cet algorithme en fonction de n.

Problème (10pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 1, & f_1 = 0, & f_2 = 1, & f_3 = 4. \end{array}$$

1. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec $x_0 = 1$?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix}$. Donner la décomposition LU de A.
3. Résoudre le système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$ par une descente puis une remontée.
4. En déduire une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire.
5. Quelle est la différence entre le polynôme de Lagrange et la droite de régression linéaire ?

Bon Travail,

Ines Abdeljaoued.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 1h30
Juin 2009

Examen de contrôle du module Analyse Numérique

Problème 1 (10pt). Notons A une matrice symétique définie positive d'ordre n.

```
r_{1,1} = sqrt(a_{1,1})
pour i de 2 à n faire :
```

$$r_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{k=j-1} r_{ik} r_{jk}}{r_{j,j}} \quad \texttt{pour} \quad j = 1..i-1$$

et

$$r_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{i,k}^2}.$$

1. Ecrire l'algorithme de la méthode de Cholesky
2. Supposons que la fonction racine suppose au plus 9 opérations élémentaires. Déterminer la complexité de la méthode de factorisation de Cholesky de A en fonction de n.
3. Donner les 2 premières itérations de cette méthode appliquée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problème 2 (10pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 1, & f_1 = 0, & f_2 = 1, & f_3 = 4. \end{array}$$

1. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec $x_0 = 1$?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix}$. Donner la décomposition LU de A.
3. Résoudre le système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$ par une descente puis une remontée.
4. En déduire une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire.
5. Quelle est la différence entre le polynôme de Lagrange et la droite de régression linéaire ?

Bon Travail,

Ines Abdeljaoued.