Exercices MN
Série 3: Systèmes Linéaires

Pr. Christophe Prud'homme*

2008-2009

1 Systèmes Linéaires

1.1 Objectifs

1. Savoir écrire la méthode de factorisation de Gauss avec pivot
2. Savoir écrire la méthode de factorisation de Cholesky
3. Savoir écrire la méthode de Jacobi
4. Savoir écrire la méthode de Gauss-Seidel
5. Savoir calculer un rayon de convergence

1.2 Exercices

Exercise 1

On veut résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

1. Vérifier que l'algorithme de Gauss ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.
2. On considère la matrice de permutation P suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ecrire le système linéaire équivalent à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (c.-à-d. ayant la même solution $\mathbf{x}$) qui a PA comme matrice associée.
3. Appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice PA, et calculer la factorisation LU de PA.
4. Calculer $\mathbf{x}$ en résolvant le système linéaire équivalent du point b), à partir de la factorisation trouvée et en utilisant les algorithmes de substitution progressive et rétrograde.

Exercise 8

*Page web du cours: `http://ljk.imag.fr/membres/Christophe.Prudhomme/courses/mn`

On considère les deux systèmes linéaires suivants :

$$A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \qquad \text{où} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

et

$$A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \qquad \text{où} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A_1.
2. Résoudre le système linéaire $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.
3. Vérifier que l'algorithme de factorisation LU sans pivoting pour la matrice A_2 ne peut pas être exécuté jusqu'au bout.
4. Trouver une matrice P de permutation de façon à ce que la matrice PA_2 soit factorisable, puis calculer la factorisation LU de PA_2.
5. Résoudre le système linéaire $A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ en utilisant la factorisation trouvée au point précédent.
6. Calculer le déterminant de la matrice A_2 en utilisant sa factorisation LU (*Sugg.* on sait que

$$\det(A_2) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U)). \tag{3}$$

)

Exercise 9

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Détérminer pour quelles valeurs du paramètre réél $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la matrice A est symétrique définie positive (*Sugg.* utiliser le *critère de Sylvester* : une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie positive si et seulement si les mineurs principaux dominants de A sont tous positifs).
2. Soit maintenant $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une méthode directe ; quelle factorisation de la matrice A envisageriez-vous ? Justifiez votre réponse.
3. En considérant $\varepsilon = 2$, vérifier que dans ce cas la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky $A = HH^T$.
4. En supposant que $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$, résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la factorisation de Cholesky calculée au point c).