ÉCOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
1ère année

2022-2023
Intégration et Probabilité

Série d'exercices N°1

Théorème de convergence Monotone, Dominée et Lemme de Fatou

Exercice 1

Calculer les limites éventuelles suivantes :

1.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,n[} \ln(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,\frac{\pi}{4}[} (\tan t)^n \, d\lambda(t)$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, d\lambda(x)$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} e^{-n\sin^2 x} f(x)\, d\lambda(x)$$
où f est une fonction intégrable au sens de Lebesgue.

5.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1[} f\left(t^n\right) d\lambda(t)$$
où $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Exercice 2

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur (X, T).

1. Montrer que
$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n\right) d\mu$$

2. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\Phi(s)$$

où Γ est la fonction d'Euler et $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

Hint : On pourra utiliser la suite de fonctions $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\chi_{[0,\infty[}$.

Exercice 3

Soit $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit

$$f_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad f = 0.$$

1. Montrer que f_n converge uniformément ver f sur $\mathbb{R}$ mais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu < \int_X f \, d\mu$$

2. Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Exercice 4

Soit, pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, la suite de fonctions f_n tel que :

$$f_n(x) = nx\,(1-x)^n\,\chi_{[0,1]}$$

1. Montrer que $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \geq 1$, on a :

$$|f_n\,(x)\,| \leq 1$$

2. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} nx\,(1-x)^n\,dx$$

Exercice 5

Soit (X, T, μ) un espace mesuré et f_n une suite décroissante de fonctions mesurables, positives et qui converge presque sûrement vers f. On cherche à étudier l'hypothèse $\mathcal{H}$ qui dit que :

$$\int_X f_0 d\mu < +\infty$$

1. On suppose que $\mathcal{H}$ est vraie. Montrer que

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

2. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas que $\mathcal{H}$ est vraie ?

Serie d'exercice N°1

Exercice 1

1) $\lim_{n \to +\infty} \int_{]0,n[} \ln(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$

•) On pose $f_n(x) = \ln(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]0,n[}$

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = ?$

$$f_n(x) = \ln(x) \cdot e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \mathbb{1}_{]0,n[}$$

DL : $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)$

$$f(x) = \ln(x) \cdot e^{-x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}$$

••) Mq $\exists g \in \mathcal{L}^1$ tq $|f_n| \leq g$

On sait que $\ln(1+y) \leq y$ $\quad y \leq -1$

$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n}$

$n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x$

$e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x}$

$|f_n(x)| \leq \ln(x) e^{-x} = f(x)$

D'après le Théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{]0,n[} f_n(x) \, d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} f(x) \, d\lambda(x).$$

$$= \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$$

Reste le calcul de cette integrale

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{]0, \frac{\pi}{4}[} (\tan t)^n d\lambda(t)$

.) Convergence

On pose $f_n(t) = (\tan t)^n$

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{4}[\quad \tan t < 1$

$(\tan(t))^n$ est une suite géométrique de raison $0 < r < 1$

alors $\forall t \in]0, \frac{\pi}{4}[\ ; (\tan t)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

..) Domination:

$\forall t \in]0, \frac{\pi}{4}[$, on a $|\tan t| < 1$

et donc $\forall t \in]0, \frac{\pi}{4}[\ |(\tan(t))^n| < 1$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

or la fonction $g(t) = 1$ constante est bien intégrable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$

Donc d'après le TCD : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0 . dt = 0$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \frac{1 + nx}{(1+x)^n} d\lambda(x)$

.) Convergence: on pose $f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n} \mathbb{1}_{[0,1]}$

$f_n(x) = (1+nx) e^{n \ln(1+x)} \mathbb{1}_{[0,1]}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = ?$

$Dl \Rightarrow \ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$n \ln(1+x) \geq (x - \frac{x^2}{2}) n$

$e^{-n \ln(1+x)} \leq e^{-n(x - \frac{x^2}{2})}$

$f_n(x) \leq (1+nx) e^{-n(x - \frac{x^2}{2})} \sim nx e^{-n(x - \frac{x^2}{2})}$

$\sim nx e^{-nx} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f(t^n)\, d\lambda(t)$; $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue.

·) Convergence $\forall t \in [0,1]$ $t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par continuité $f(t^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ par continuité

or une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Alors $\exists M > 0$ tq $|f(t^n)| \leq M \in \mathcal{L}^1$

Toute fonction $g(t) = M$ sont integrables

D'après TCD $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f(t^n) = \int \lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n) = \int f(0) = f(0)$

Exercice 2: $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions mesurables positives sur $(X, \mathcal{T})$

1) Mq $\int_X \left|\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n \, d\mu.$ (Résultat de cours Corollaire)

2) Mq $\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\, \Phi(s)$

avec $\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

Posons: $g_n(x) = n^{s-1} e^{-nx} \chi_{[0,\infty[}$ les g_n sont des fonctions mesurables et positive.

D'après la 1ère question

$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X g_n \, d\mu$

Or d'autre part

$\int g_n \, d\mu = \int_X n^{s-1} e^{-nx} \chi_{[0,+\infty[} \, dx$

$= \int_0^{+\infty} n^{s-1} e^{-nx} \, dx$

Par changement de variable

$y = nx \longrightarrow dy = n\, dx.$

.) Dominance. Par prise en compte des polynomes et des puissance :

$$|f_n(x)| \leqslant \chi_{[0,1]} \in \mathcal{L}^1$$

$$|f_n(x)| \leqslant 1, \ \forall x \in [0,1] \in \mathcal{L}^1$$

D'après TCD : $\lim \int f_n = \int \lim f_n = \int 0 = 0$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-n \sin^2 x} \cdot f(x) \, d\lambda(x)$ f : fonction integrable au sens de Lebesgue

.) Convergence : On pose $h_n(x) = e^{-n \sin^2 x} f(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x) = ?$

× $\begin{cases} \to \text{Pour } x = k\pi \\ \quad h_n(x) = f(x) \chi_{\mathbb{R}_+} \end{cases}$ Lebesgue $\mathbb{R}^n$

✓ $\begin{cases} \to \text{Pour } x \neq k\pi \\ \lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x) = 0 \end{cases}$ λ p.p ⚠

$A = \{k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ dénombrable donc negligeable au sens de Lebesgue.

Alors $h_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\underline{\lambda \text{ PP}}$

..) Convergence.

$$|h_n(x)| \leqslant f(x) \in \mathcal{L}^1$$

TCD $\lim \int h_n = \int \lim h_n = 0$

$x = \frac{y}{n} \longrightarrow dx = \frac{dy}{n}$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} y^{s-1} e^{-y} \frac{1}{n} dy = \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y} dy = \frac{1}{n^2} \Gamma(s)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Gamma(s) = \varphi(s) \Gamma(s)$$

D'autre part

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx$$

or $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x - 1}$ $= \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{x}-1} dx$

D'où l'égalité

Exercice 3:

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ μ : mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

$f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}$ $n \in \mathbb{N}$ $f = 0$

Mq $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ càd.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $|f_n - f| < \varepsilon$.

on a $\forall n \geq n_0 > n_0 - 1$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0 - 1}$

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{n_0 - 1}$

$|f_n - f| < \varepsilon$

alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ tq $\forall n \geq n_0$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow f_n$ converge uniformément vers f dans

Le lemme de Fatou ne s'applique pas car les f_n ne sont pas à valeurs positives.

Exercice 4 :

$\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0,1]$

1) Mq $|f_n(x)| \leqslant 1$

On Remarque que $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ est positive

Cherchons le maximum de f_n sur $[0,1]$ par dérivation

$$f'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1}$$

$$= n(1-x)^n (1-(n+1)x)$$

$$f_n'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 1-(n+1)x = 0$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{n+1}$$

On a donc

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(x_n)$$

$$\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\leqslant 1$$

2) $f_n(x) = nx(1-x)^n$; $x \in [0,1]$

•) si $x = 0$ ou $x = 1$

$$f_n(x) = 0 \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

car $(1-x) \in]0,1[$

donc $(1-x)^n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

D'après le critère de croissance comparées : $(1-x)^n \cdot nx \xrightarrow[+\infty]{} 0$ $\forall x \in]0,1[$

Alors

+) $f_n(x) \longrightarrow 0$ $\forall x \in [0,$

+) on a $|f_n(x)| \leqslant 1 \in \mathcal{L}'$ sur $[0,1]$

D'après le Théorème de convergence dominée :

$$\lim_{+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{+\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= 0$$

Exercice 5 :

1) On pose $g_n = f_0 - f_n$; g_n est une suite croissante qui converge vers $f_0 - f$. D'après le Théorème de convergence monotone.

$$\int g_n \longrightarrow \int f_0 - f$$ or d'après la linéarité de l'intégrale.

$$\int_X f_0 - f_n = \int_X f_0 - \int_X f_n$$

$$\int_X f_0 - f = \int_X f_0 - \int_X f$$

Si on simplifie par $\int f_0 \, d\mu$ car on a H.

On obtient le résultat.

méthode 2 :

- $f_n \longrightarrow f$
- $0 \leq f_n \leq f_0$ or $f_0 \in \mathcal{L}^1$ car on a H

D'après le TCD $\int f_n \longrightarrow \int f$

2) On ne peut pas se passer de l'hypothèse H

Par exemple, si on concidère

$$f_n = \chi_{[n, +\infty[}$$

$f_{n+1} \subset f_n$ donc décroissant.

et pourtant $\int_{\mathbb{R}} f_n = +\infty$ et ne tend pas vers 0.