Resumé Stat Bayes

- DS -.

Lois Usuelles :

Binomiale :
$X \sim \beta(n,p) : \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ np. \end{cases}$

Poisson :
$X \sim \mathcal{P}(\lambda) : \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ \lambda. \end{cases}$

geometrique :
$X \sim G(p)$,
$\begin{cases} p(1-p)^{k-1} \leftarrow f(x/y) \\ \frac{1}{p}. \leftarrow E(X) \end{cases}$

loi LogNormale :
$X \sim N(\mu, \sigma^2) : \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(-(x-\mu)^2)). \\ \mu. \end{cases}$

loi expo
$X \sim \mathcal{E}(\lambda) : \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}. \\ \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$

loi Uniforme :
$X \sim \mathcal{U}([a,b])$
$\begin{cases} \frac{1}{b-a}. \\ \frac{a-b}{2}. \end{cases}$

loi Gamma
$X \sim \gamma(a,\lambda) : \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}. \\ \frac{a}{\lambda}. \end{cases}$

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

loi Beta :
$X \sim \beta(a,b) : \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \\ \frac{a}{a-b}. \end{cases}$

$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}$

$\prod e^{x_i} = e^{\sum x_i}$

↳ Domaine de Df de chaque loi. /!\

Th de Bayes : $P(\theta/D) = \dfrac{P(D/\theta)\,P(\theta)}{P(D)}$..

Loi à Priori : $\pi(\theta)$.

Loi à Posteriori : $\pi(\cdot/x) = \dfrac{f(x,P)}{m_\pi(x)} = \left[\dfrac{f(x/P)\,\pi(P)}{m\,\pi(x)}\right.$

$\propto f(x/P)\,\pi(P)$.

Jexp

avec : $f(x,P)$: loi de couple.
$f(x/P)$: densité de loi de x.
$\pi(P)$: loi à Priori
$m_\pi(x)$: proba marginale.

Rq
$\int_\theta \pi(\theta/x)d\theta = 1$
↳ car densité de proba.

$m_\pi(x) = \int_\theta f(x,\theta) = \int_\theta f(x/\theta)\,\pi(\theta)$.

$L((x_1,\dots x_n)/\theta) = \prod_k^n f_k(x_k/\theta)$.

$L((x_1,\dots x_n),\theta) = \prod_k^n f_k(x_k,\theta) = \prod_k^n f_k(x_k/\theta)\cdot\pi(\theta)$

Risque à Posteriori :

$R_p = \int L(\theta,\hat{\theta}_n)\,\pi(\theta/x)\,d\theta$.

argmax $f(\theta/(x_1\dots x_n))$

Estimateur de Bayes

MAP : est la Sol° de. $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Max}\,\pi(\theta/x) \\ \Leftrightarrow \\ \dfrac{\partial f(\theta/x)}{\partial\theta} = 0 \text{ et } \dfrac{\partial^2 f(\theta/x)}{\partial\theta} < 0. \end{array}\right.$

δ^π min R_p $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Min}\,R_p. \\ \dfrac{\partial r(\theta,\delta/x)}{\partial\delta} = \dfrac{\partial}{\partial\delta}\int_\theta L(\theta,\delta/x)\,\pi(\theta/x)\,d\theta = 0. \end{array}\right.$

lié à la perte quadratique
$\delta^\pi(x) = E(\hat{\theta}/x)$

Risque fréquentiste.
$R_F = \int L(\theta,\delta(x))\,f(x/\theta)\,dx$

Perte Quadratique :
$L(\theta,d) = (\theta-d)^2$.
$= |\theta-\delta|$

Perte de dépassement. seuil de dép
$L(\theta,\delta) = 1\{\|\theta-\delta\|>A\}$.