ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
2$^{\text{éme}}$ année

2022-2023
Méthodes de simulation

TP4

Objectif

Le but de ce TP est d'appliquer le modèle de Black-Scholes qui est un exemple classique en finance qui utilise le mouvement brownien. Il s'agit d'un modèle d'évaluation d'options financières qui utilise les propriétés du mouvement brownien pour modéliser les fluctuations de prix d'un actif financier.

Simulation d'un mouvement brownien

1. En utilisant que les accroissements d'un mouvement brownien $(W_t)_{0\leq t\leq 1}$ sont indépendants et stationnaires simuler une réalisation du mouvement brownien.

2. Écrire une fonction qui permet de simuler un vecteur gaussien (clin d'oeil sur le TP2).

Estimation avec la méthode Monte-Carlo

On considère un estimateur de la forme $\hat{\delta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$, avec n la taille de l'échantillon et $y = (y_1, ..., y_n)$.

3. Écrire une fonction *MC.estim(y, level)* qui retourne $\hat{\delta}$ ainsi que l'intervalle de confiance *level* associé.

Estimation des prix des options financière avec le modèle de Black-scholes

Soient $(W_t^{(1)})$ et $(W_t^{(1)})$ deux mouvements browniens avec corrélation $\rho = \frac{1}{2}$, *i.e.* $W = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

On souhaite calculer $\mathcal{S} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}e^{-v^2/2+vW^{(1)}} + \frac{1}{2}e^{-v^2/2+vW^{(2)}-1}\right)\mathbb{1}_{\{\frac{1}{2}e^{-v^2/2+vW^{(1)}}+\frac{1}{2}e^{-v^2/2+vW^{(2)}-1}\geq 0\}}\right]$, avec v=1 et $\mathcal{S}$ est une forme simplifiée de l'équation du modèle de Black-Scholes.

4. Estimer $\mathcal{S}$ par la méthode Monte-Carlo.

Rappels du cours (Proposition) :

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit le processus $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par : $W_0 = 0$ et $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \sqrt{t_{n+1} - t_n} Z_n$.

Alors W est une réalisation de trajectoires du mouvement brownien aux instants $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.