① C. proc stoc

Produit à droite

$\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ = l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$

E_μ ; P_μ on veut dire que $\mathcal{L}(X_0)=\mu$.

E_x, P_x on veut que $\mathcal{L}(X_0)=\delta_x$ (d'une manière certaine, la chaîne part de x).

☞ On suppose que $|E|=m$, $E=\{x_1,\dots,x_m\}$.

L'application f de E dans $\mathbb{R}$ s'identifie au vecteur colonne $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & x_1 \quad \cdots \quad x_j \quad \cdots \quad x_m \\ \hline \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & Q(x_i,x_j) & \cdots & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array} \boxed{\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (Qf)(x_1) \\ \vdots \\ (Qf)(x_m) \end{pmatrix}$$

$$Qf(x) = \sum_{j=1}^{m} Q(x_i,x_j)\, f(x_j)$$

$$\mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{Q}} \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto Qf \;/\; Qf(x) = \sum_{y\in E} Q(x,y)\, f(y)$$

② Cet opérateur sera noté encore Q.

$$E_\mu(f(x_1)) = E_\mu\big(\underbrace{E_\mu(f(X_1)/X_0)}_{L(X_0)}\big) = E_\mu(L(X_0))$$

$$= \sum_{x\in E} L(x)\underbrace{P_\mu(X_0=x)}_{\mu(x)}$$

Si $\mu = \delta_z$, alors $E_z(f(X_1)) = L(z) = E_z(f(X_1)/X_0=z)$

$$E_z(f(X_1)/X_0=z) = \sum_{y\in E} f(y)\underbrace{P(X_1=y/X_0=z)}_{Q(z,y)} = Qf(z)$$

$$E_\mu(f(X_1)) = \sum_{x\in E} L(x)\mu(x)$$

$$L(x) = E_\mu(f(X_1)/X_0=x) = \sum_{y\in E} f(y)P_\mu(X_1=y/X_0=x)$$

$$= \sum_{y\in E} f(y)Q(x,y) = (Qf)(x).$$

À retenir

$$\boxed{\begin{aligned} E(f(X_1)/X_0=x) &= Qf(x) = E_x(f(X_1)) \\ &= L(x). \\ E(f(X_1)/X_0) &= Qf(X_0) \end{aligned}}$$

$$E(f(X_{n+1})/X_n=x) = \sum_{y\in E} f(y)\underbrace{P(X_{n+1}=y/X_n=x)}_{Q(x,y)}.$$

③ $= Qf(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{E(f(X_{n+1})/X_n) = Qf(X_n)}$

<u>Produit à gauche</u>

$\mathcal{P}$ = l'ensemble des mesures positives sur E.

Si $|E| = m$ $E = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

une mesure positive μ sur E s'identifie au vecteur ligne $(\mu(x_1); \ldots; \mu(x_m))$

$$\boxed{(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_m))} \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} x_1 \qquad x_j \qquad x_m \\ \begin{pmatrix} & & \\ & Q(x_i, x_j) & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= ((\mu Q)(x_1), \ldots, (\mu Q)(x_m))$$

$$\mu . Q(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(x_i)\, Q(x_i, x_j).$$

ll

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \mu & \longmapsto & \mu . Q \,/\, (\mu . Q)(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) . Q(x, y) \end{array}$$

(4) $\underline{(\mu \cdot Q)(E)} = \sum_{y \in E} (\mu \cdot Q)(y) = \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \mu(x) Q(x,y)$.

$$= \sum_{x \in E} \mu(x) \left(\sum_{y \in E} Q(x,y) \right) = \sum_{x \in E} \mu(x) = \underline{\mu(E)}$$

Si μ est une mesure de probabilité, alors $\mu \cdot Q$ est aussi une mesure de probabilité

$\mu = \mathcal{L}(X_0)$;

$$P_{\mu}(X_1 = y) = P_{\mu}\left((X_1 = y) \cap \left(\bigcup_{x \in E} (X_0 = x) \right) \right)$$

$$= \sum_{x \in E} P_{\mu}(X_1 = y ; X_0 = x).$$

$$= \sum_{x \in E} \underbrace{P_{\mu}(X_0 = x)}_{\mu(x)} \underbrace{P_{\mu}(X_1 = y / X_0 = x)}_{Q(x,y)}.$$

$$= \sum_{x \in E} \mu(x) Q(x,y) = (\mu \cdot Q)(y), \ \forall y \in E.$$

$$\mathcal{L}(X_0) \cdot Q = \mathcal{L}(X_1) \Leftrightarrow P(X_1 = y) = \sum_{x \in E} P(X_0 = x) Q(x,y),$$

~~$\forall y \in E$~~

~~$\mathcal{L}(X_0) \cdot Q = \mathcal{L}$~~

⑤ $\mathcal{L}(X_n).Q = \mathcal{L}(X_{n+1})$

$$P(X_{n+1}=y) = P(X_{n+1}=y) \cap \Big(\bigcup_{x \in E} (X_n = x) \Big)$$

$$= \sum_{x \in E} P(X_n = x) \underbrace{P(X_{n+1} = y / X_n = x)}_{Q(x,y)} .$$

$$E_x(f(X_1)) = (Qf)(x) = E(f(X_1) / X_0 = x)$$

$$Qf(X_0) = E(f(X_1) / X_0)$$

$$Qf(X_n) = E(f(X_{n+1}) / X_n)$$

$$\mathcal{L}(X_0).Q = \mathcal{L}(X_1)$$

$$\mathcal{L}(X_n)\, Q = \mathcal{L}(X_{n+1}) .$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(X_0)\, Q &= \mathcal{L}(X_1) \\ \mathcal{L}(X_1)\, Q &= \mathcal{L}(X_2) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}(X_{n-1})\, Q &= \mathcal{L}(X_n) \end{aligned}\right) \quad \mathcal{L}(X_0)\, Q^n = \mathcal{L}(X_n) .$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(X_n).Q &= \mathcal{L}(X_{n+1}) \\ \mathcal{L}(X_{n+1})\, Q &= \mathcal{L}(X_{n+2}) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}(X_{n+m-1})\, Q &= \mathcal{L}(X_{n+m}) \end{aligned}\right) \quad \mathcal{L}(X_n)\, Q^m = \mathcal{L}(X_{n+m}) .$$

⑥ $P(X_n = y) = \sum_{z \in E} P(X_0 = z)\, Q^n(z,y)$; $\forall y \in E$; $P_x(X_n = y) = Q^n(x,y)$

$P(X_{n+m} = y) = \sum_{x \in E} P(X_m = x)\, Q^m(x,y)$;

$E_x(f(X_n)) = \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{P_x(X_n = y)}_{Q^n(x,y)}$; $\cancel{P_x(X_n=y)} = \cancel{Q^n(x,y)}$.

$= (Q^n f)(x)$

$E(f(X_n) / X_0) = (Q^n f)(X_0)$

$E(f(X_{n+m}) / X_n = x) = \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{P(X_{n+m} = y / X_n = x)}_{Q^m(x,y)}$

$E(f(X_{n+m}) / X_n = x) = Q^m f(x)$

$\hookrightarrow \; E(f(X_{n+m}) / X_n) = Q^m f(X_n)$.

$E(f(X_{n+m})) = E(E(f(X_{n+m}) / X_n))$

$E_{/X_n = x}(f(X_{n+m})) = Q^m f(x)$

$\longrightarrow K(x) = E(f(X_{n+m}) / X_n = x)$

$= \sum_{y \in E} f(y)\, Q^m(x,y)$

$= (Q^m f)(x)$

$K(X_n) = (Q^m f)(X_n)$

7 (X_n) est un proc adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ et de $L^1(P)$.

$$X_n = X_0 + M_n + A_n$$; d'une manière unique.

M_n est une martingale % $\mathcal{F}_n$

$(A_n)_n$ proc prévisible tq $A_0 = 0$.

X_n :

- est une ss-martingale $\Rightarrow (A_n)_n \nearrow$
- est une sur-martingale $\Rightarrow (A_n)_n \searrow$.
- est une martingale ; $A_n = 0$

$$A_{n+1} - A_n = E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n).$$

$(U_n)_n$ est une martingale $L^2(P)$.

$(U_n^2)_n$ est une ss-martingale $L^2(P)$.

$$U_n^2 = U_0 + M_n + A_n$$

$$A_{n+1} - A_n = E(U_{n+1}^2 - U_n^2 / \mathcal{F}_n).$$