**Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information**

A.U: 2023-2024
$2^{\text{éme}}$ Année

Examen
Processus stochastique

Durée: 1H30
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1: "Comphrension du cours "

1- Rappeler la définition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un ensemble E au plus dénombrable.
2- Vrai/faux, justifier: Si une chaîne de Markov est récurrente, alors les états de la chaîne se communiquent entre eux.
3- Vrai/faux, justifier: Si une chaîne de Markov est irréductible sur E et s'il admet un état transitoire, alors l'espace d'états est infini.
4- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de loi initiale μ et de noyau de transition Q.
4-1- Exprimer la quantité $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$ en fonction de μ et Q.
4-2- Exprimer $P(X_0 = x, X_n = y)$, puis $P(X_n = y)$ en fonction de μ et Q.
5- Soit E et F deux sous ensembles au plus dénombrable de l'ensemble des nombres réels. On considère une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E de loi μ; et une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de X_0 et indépendantes entre elles, à valeurs dans F, de même loi ν. On pose $X_{\ n+1} = f(U_{n+1}, X_n)$ pour $n \geq 0$; où f est une fonction de $F \times E$ dans E.
5-1- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
5-2- Exprimer le noyau de transition $(Q(i,j))_{i,j\in E}$ en fonction de f et ν.
6- On lance un dé bien équilibré d'une manière répétitive. On pose:
– X_n la variable aléatoire qui décrit la plus grand résultat obtenu après n lancers.
– Y_n la variable aléatoire qui décrit le nombre de lancers, à l'instant n, depuis le dernier 6.
6-1- Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ (resp $(Y_n)_{n\geq 1}$) est une chaine de Markov sur un espace d'états E que l'on précisera, donner sa matrice de transition.
6-2- Dessiner le graphe dans les deux cas.
6-3- Classifier les états en transients et récurrents dans les deux cas.

Exercice 2

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, ..., M_n)$. On suppose que $M_0 = a \in [0,1]$ et que

$$P(M_{n+1} = \frac{M_n}{2}/\mathcal{F}_n) = 1 - M_n, \qquad P(M_{n+1} = \frac{1+M_n}{2}/\mathcal{F}_n) = M_n.$$

1- Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge $P.p.s$ et dans $L^2(P)$ vers une variable aléatoire Z.
2- Montrer que:

$$E((M_{n+1} - M_n)^2) = \frac{1}{4} E(M_n(1 - M_n)).$$

3- Calculer $E(Z(1-Z))$. Quelle est la loi de Z?

Exercice 3

Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels quelconques. On pose:

$$M_n = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \ pour \ n \in \mathbb{N}^*.$$

1- Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale adaptée à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.
2- Calculer la fonction caractéristique de M_n, et sa limite lorsque n tend vers l'infini.
3- Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sigma^2 < +\infty$, alors $(M_n)_{n\geq 1}$ converge $p.s.$ vers une variable aléatoire M. Déterminer la loi de M.
4- Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$, alors $(M_n)_{n\geq 1}$ est $p.s.$ non convergente.