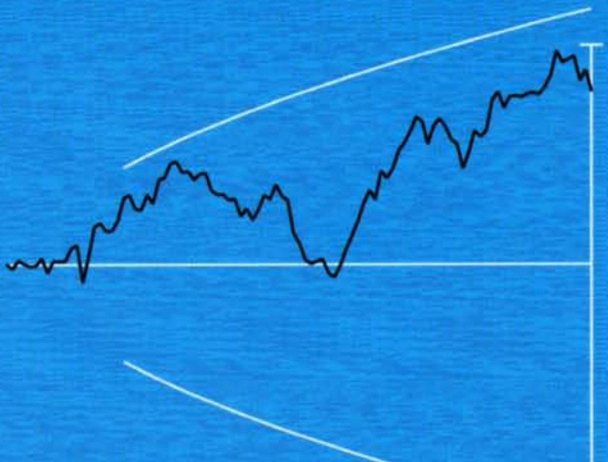
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3M1

Probabilité

EXERCICES CORRIGÉS

Hervé Carrieu



EDP SCIENCES

PROBABILITÉ
Exercices corrigés

Hervé Carrieu

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0006-3

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce recueil d'exercices corrigés complète le livre *Probabilité* de Ph. Barbe et M. Ledoux édité dans la même collection. Il regroupe l'ensemble des énoncés des chapitres I à VIII (excepté l'un d'eux du chapitre VIII) ; les références au cours sont notées en caractères gras et gardent la même numérotation.

Je remercie très sincèrement Philippe Barbe et Michel Ledoux de l'accueil qu'ils ont fait à ce projet de rédaction.

J'espère que cet ouvrage constituera une aide efficace et agréable aux étudiants, en leur rappelant que la recherche active de solutions d'exercices est indispensable à l'assimilation de notions nouvelles et qu'elle apporte souvent plus que la solution elle-même.

Je remercie les éditions EDP Sciences et D. Guin, directeur de la collection, d'avoir accepté et accompagné la publication de cet ouvrage.
Merci enfin à Patrice Lassère pour son aide et ses encouragements.

Cauterets, juillet 2007

Hervé Carrieu

I

THÉORIE DE LA MESURE

Énoncés

I.1 Soit E une partie (fixée) d'un ensemble Ω, et soit

$$\mathcal{E} = \{ A \in \mathcal{P}(\Omega) \ : \ A \subset E \} .$$

Déterminer l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{E}$.

I.2 Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des tribus sur Ω, on pose

$$\mathcal{J} = \{ A_1 \cap A_2 \ : \ A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \}$$
$$\mathcal{U} = \{ A_1 \cup A_2 \ : \ A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \}.$$

Démontrer que $\sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{U})$.

I.3 Soit $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ un espace mesuré produit. Si $A \in \mathcal{A}$, montrer que pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$, la section $A_{\omega_1} = \{ \omega_2 \in \Omega_2 \ : \ (\omega_1, \omega_2) \in A \}$ est mesurable.

I.4 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace métrique (E, d) muni de sa tribu borélienne. On suppose que f_n converge ponctuellement vers f (i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$). Montrer que f est mesurable.

Indication : pour tout ouvert U de E et $r \in \mathbb{N}$ considérer $U_r = \{ x \in U : d(x, E \setminus U) > 1/r \}$. Vérifier que $f^{-1}(U) = \bigcup_{r,m} \bigcap_{n\geq m} f_n^{-1}(U_r)$.

I.5 Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\phi(x)$ le vecteur x ordonné par ordre croissant, i.e. dans le cas où tous les x_i sont distincts, on a $\phi(x) = (x_{1,n}, \ldots, x_{n,n})$, où $x_{1,n} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ et

$$x_{i,n} = \min\bigl(\{\, x_i \,:\, 1 \leq i \leq n \,\} \setminus \{\, x_{j,n} \,:\, 1 \leq j \leq i-1 \,\}\bigr)\,, \quad 2 \leq i \leq n\,.$$

Montrer que ϕ est mesurable.

Indication : on pourra commencer par montrer que $x \mapsto x_{i,n}$ est mesurable pour tout $1 \leq i \leq n$ en considérant les ensembles $\{\, x_{i,n} \leq a \,\}$, $a \in \mathbb{R}$.

I.6 Un exemple d'ensemble non mesurable.
Sur $\mathbb{R}$ on définit la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix (si A est une fonction sur un ensemble I telle que $A(x) \neq \emptyset$ pour tout x de I, il existe une fonction f telle que $f(x) \in A(x)$ pour tout $x \in I$), construire un ensemble $A \subset [\,0,1\,[$ qui contient exactement un point de chaque classe d'équivalence. Supposons A mesurable, et soit $\alpha = \lambda(A)$ sa mesure de Lebesgue. Montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$ et $r \neq s$, alors $(A+s) \cap (A+r) = \emptyset$, où $A + x = \{\, y + x \,:\, y \in A \,\}$, et que $\lambda(A+s) = \lambda(A)$. Remarquer que

$$1 = \lambda([\,0,1\,]) \leq \lambda\Bigl(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]\,-1,1\,[} (A+r)\Bigr) \leq \lambda([\,-1,2\,]) = 3\,.$$

En utilisant la σ-additivité de λ, montrer que cette inégalité conduit d'une part à $\alpha = 0$, d'autre part à $\alpha > 0$. Conclure.

I.7 Théorème d'Egorov.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < \infty$; on considère des applications f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, de Ω dans $\mathbb{R}$, telles que $f_n \to f$ μ-p.p., c'est-à-dire, telles que

$$\mu\bigl(\{\, \omega \,:\, f_n(\omega) \not\to f(\omega) \,\}\bigr) = 0\,.$$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, soit $G_{n,\varepsilon} = \{\, \omega \in \Omega \,:\, |f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \varepsilon \,\}$ et $E_{n,\varepsilon} = \bigcup_{m \geq n} G_{m,\varepsilon}$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\Bigl(\bigcap_n \bigcup_{m \geq n} G_{m,\varepsilon}\Bigr) = 0$$

et en déduire que $\lim_{n \to \infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) = 0$.

b) Déduire de la question précédente que pour tous $\varepsilon, \delta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $B_{\varepsilon,\delta} \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(B_{\varepsilon,\delta}) \leq \delta$ et pour tout $\omega \in \Omega \setminus B_{\varepsilon,\delta}$ et tout $n \geq n_0$, $|f_n(\omega) - f(\omega)| \leq \varepsilon$.

c) Soit $\alpha > 0$; pour tout entier $p \geq 1$, on pose $\varepsilon_p = 1/p$, $\delta_p = \alpha/2^p$, $A_p = B_{\varepsilon_p,\delta_p}$ et $A = \bigcup_{p\geq 1} A_p$. Démontrer que $\mu(A) \leq \alpha$ et que $f_n \to f$ uniformément sur $\Omega \setminus A$.

I.8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \subset \Omega$ est dite μ-négligeable si elle est contenue dans un ensemble mesurable A tel que $\mu(A) = 0$. La tribu $\mathcal{B}$ est dite complète pour μ si elle contient tous les ensembles négligeables.
Si $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des parties μ-négligeables, soit

$$\mathcal{A}_\mu = \{\, A \cup N \,;\, A \in \mathcal{A} \,,\, N \in \mathcal{N} \,\}\,.$$

Montrer que $\mathcal{A}_\mu$ est une tribu, appelée la tribu μ-complétée de $\mathcal{A}$.

I.9 Soient X et Y deux espaces topologiques munis respectivement des tribus boréliennes $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_Y$, μ une mesure sur $\mathcal{B}_X$, et $f : X \to Y$ une fonction continue μ-p.p., c'est-à-dire telle que l'ensemble $N = \{\, x \in X \,:\, f \text{ discontinue en } x \,\}$ soit μ-négligeable. Démontrer que f est mesurable de $(X, \overline{\mathcal{B}}_X)$ dans $(Y, \mathcal{B}_Y)$ où $\overline{\mathcal{B}}_X$ est la tribu complétée de $\mathcal{B}_X$ par rapport à μ.

Solutions

I.1 Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{E}$. Il est clair que $\mathcal{A}$ contient toutes les parties de E et toutes les parties de Ω contenant $\overline{E}$, c'est-à-dire :

$$\{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \subset E \text{ ou } A \supset \overline{E}\}.$$

Et ce dernier ensemble de parties est une algèbre de Boole. Ainsi

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \subset E \text{ ou } A \supset \overline{E}\}.$$

Remarque : c'est aussi l'ensemble de toutes les parties A de Ω vérifiant

$$A \cap \overline{E} = \overline{E} \quad \text{ou} \quad A \cap \overline{E} = \emptyset.$$

I.2 Remarquons que les complémentaires d'ensemble de $\mathcal{J}$, c'est-à-dire les ensembles de la forme $\overline{(A_1 \cap A_2)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$, sont dans $\mathcal{U}$. Cela implique que $\sigma(\mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{U})$. Par le même argument on a l'inclusion réciproque et donc l'égalité de ces deux tribus.
De plus, puisque $\mathcal{J}$ contient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ (car $A = A \cap \Omega$), on a $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subset \sigma(\mathcal{J})$. Enfin, une tribu étant stable par union, l'inclusion de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ dans $\sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ montre que $\sigma(\mathcal{U}) \subset \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. Ainsi

$$\sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{U}).$$ □

I.3 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A},\ \forall \omega_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\}.$$

Il est clair que $\mathcal{M}$ contient tous les pavés de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
Vérifions que $\mathcal{M}$ est une tribu.

- $\Omega \in \mathcal{M}$ car $\Omega_2 \in \mathcal{A}_2$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}$ et tout $\omega_1 \in \Omega_1$, on a $\left(\overline{A}\right)_{\omega_1} = \overline{(A_{\omega_1})} \in \mathcal{A}_2$.
- Pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de $\mathcal{M}$ et tout $\omega_1 \in \Omega_1$, on a

$$\left(\bigcup_n A_n\right)_{\omega_1} = \bigcup_n (A_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2.$$

Par définition de la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, on en déduit que $\mathcal{M} = \mathcal{A}$. □

I.4 On suppose donc que $\forall \omega \in \Omega$, $f_n(\omega) \to f(\omega)$. Par la **Proposition I.1.14**, il suffit de vérifier que, quel que soit l'ouvert $U \subset E$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. Or pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\omega \in f^{-1}(U) &\iff f(\omega) \in U \\
&\iff \lim_n f_n(\omega) \in U \\
&\iff \exists r \in \mathbb{N}^*,\ f_n(\omega) \in U_r \text{ à partir d'un certain rang } m \\
&\iff \omega \in \bigcup_{r,m} \bigcap_n f_n^{-1}(U_r).
\end{aligned}$$

Or quels que soient n et r, $f_n^{-1}(U_r) \in \mathcal{A}$, donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. □

I.5 Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x_{i,n} \leq a\} = \bigcup_I \left(\bigcap_{k \in I} \{x_k \leq a\} \right),$$

où I parcourt l'ensemble des parties à i éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. La fonction $x \mapsto x_{i,n}$ est alors mesurable (voir **Exemples I.1.8** et **Proposition I.1.14**).
Enfin, par la **Proposition I.2.1**, ϕ est mesurable. □

I.6 S'il existe $x, y \in A$, distincts, tels que $x + r = y + s$, alors x et y sont dans la même classe d'équivalence, ce qui contredit la définition de A. D'où $(A + r) \cap (A + s) = \emptyset$. On en déduit que la réunion

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A + r)$$

est une réunion de parties disjointes deux à deux.
D'autre part, la mesure de Lebesgue étant invariante par translation, quel que soit r, $\lambda(A + r) = \lambda(A) = \alpha$. D'où

$$\lambda\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A + r) \Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} \lambda(A) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} \alpha. \tag{I.1}$$

Étant donné que

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A + r) \subset [-1, 2],$$

on a nécessairement

$$\lambda\Big(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap]-1,1[}(A+r)\Big)\leq 3,$$

et la somme dans (I.1) est donc bornée, d'où $\alpha = 0$.
Enfin, par construction de A,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap]-1,1[}(A+r)\supset[0,1],$$

d'où

$$\lambda\Big(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap]-1,1[}(A+r)\Big)\geq 1.$$

Ce qui contredit l'assertion $\alpha = 0$. Donc la partie A n'est pas mesurable.

I.7

a) Notons E l'ensemble mesurable sur lequel la suite d'applications converge et soit ε strictement positif. Par définition, on a

$$\forall\omega\in E,\ \exists n\in\mathbb{N},\ \forall m\geq n,\ |f_m(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon.$$

Autrement dit

$$E\subset\bigcup_n\bigcap_{m\geq n}\overline{G_{m,\varepsilon}}.$$

Or $\mu(E)=1$ donc

$$\mu\left(\bigcup_n\bigcap_{m\geq n}\overline{G_{m,\varepsilon}}\right)=1.$$

Prenant l'évènement contraire, on a

$$\mu\left(\bigcap_n\bigcup_{m\geq n}G_{m,\varepsilon}\right)=0.$$ □

Remarquons que cet évènement de mesure nulle est décrit comme l'intersection d'une suite décroissante d'évènements, car la suite $(\bigcup_{m\geq n}G_{m,\varepsilon})_n$ est décroissante, et la mesure μ étant finie, on a (voir **Proposition I.4.3.(iv)**) :

$$\mu\left(\bigcap_n\bigcup_{m\geq n}G_{m,\varepsilon}\right)=\lim_n\mu\left(\bigcup_{m\geq n}G_{m,\varepsilon}\right)=\lim_n\mu\left(E_{n,\varepsilon}\right)=0.$$ □

b) Soit $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \ \mu(E_{n,\varepsilon}) < \delta.$$

On pose $B_{\varepsilon,\delta} = E_{n_0,\varepsilon}$ et donc $\mu(B_{\varepsilon,\delta}) \leq \delta$.
D'autre part si $\omega \in \Omega \setminus B_{\varepsilon,\delta}$ alors, quel que soit $n \geq n_0$, $\omega \in \overline{G_{n,\varepsilon}}$ et donc

$$\forall \omega \in \Omega \setminus B_{\varepsilon,\delta}, \ \forall n \geq n_0, \ |f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon. \qquad \square$$

c) L'ensemble mesurable A vérifie :

$$\mu(A) \leq \sum_{p \geq 1} \mu(A_p) \leq \frac{\alpha}{2^p} = \alpha.$$

Montrons alors que la suite $(f_n))$ converge uniformément sur $\Omega \setminus A$.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $p_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $1/p_0 < \varepsilon$. On a

$$\omega \notin A \Longrightarrow \forall p, \ \omega \in \overline{A_p}.$$

En particulier $\omega \in \overline{A_{p_0}}$ et donc par construction de A_p, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus A, \ \forall n \geq n_0, \ |f_n(\omega) - f(\omega)| \leq \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Donc la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus A$. $\square$

I.8 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathcal{A}_\mu$. On pose alors

$$A_n = A_n^1 \cup N_n^1, \quad \text{avec} \quad A_n^1 \in \mathcal{A}, \ N_n^1 \subset N_n^2 \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mu(N_n^2) = 0.$$

On a

$$\bigcup_n A_n = \underbrace{\left(\bigcup_n A_n^1\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_n N_n^1\right)}_{\in \mathcal{N}},$$

où $\cup_n N_n^1 \in \mathcal{N}$ car

$$\bigcup_n N_n^1 \subset \bigcup_n N_n^2 \quad \text{et} \quad \mu\left(\bigcup_n N_n^2\right) \leq \sum_n \mu(N_n^2) = 0.$$

On en déduit que $\cup A_n \in \mathcal{A}_\mu$.
Concernant le passage au complémentaire, pour A élément de $\mathcal{A}_\mu$, on pose

$$A = A_1 \cup N_1 \quad \text{avec} \quad A_1 \in \mathcal{A}, \ N_1 \subset N_2 \quad \text{et} \quad \mu(N_2) = 0.$$

On a
$$\overline{A} = \overline{A_1 \cup N_1} = \overline{A_1} \cap \overline{N_1}.$$
Il est clair que $\overline{A_1} \in \mathcal{A}$ et d'autre part
$$\overline{N_1} = \overline{N_2} \cup \left(\overline{N_1} \setminus \overline{N_2}\right).$$
Or $\overline{N_1} \setminus \overline{N_2} = N_2 \setminus N_1 \in \mathcal{N}$ car inclus dans N_2. On obtient donc
$$\overline{A} = \underbrace{\left(\overline{A_1} \cap \overline{N_2}\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\overline{A_1} \cap \left(\overline{N_1} \setminus \overline{N_2}\right)\right)}_{\in \mathcal{N}} \in \mathcal{A}_\mu.$$
Enfin, il est évident que $\Omega \in \mathcal{A}_\mu$, donc $\mathcal{A}_\mu$ est une tribu. □

I.9 On rappelle que f est continue en x si quel que soit W, voisinage de $f(x)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X.
Pour tout ouvert O de Y, on a
$$f^{-1}(O) = \left(f^{-1}(O) \cap (X \setminus N)\right) \cup \left(f^{-1}(O) \cap N\right). \tag{I.2}$$
Si f continue en x avec, de plus $f(x) \in O$, alors O étant un voisinage de $f(x)$, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x. Donc $f^{-1}(O) \cap (X \setminus N)$ est un ouvert.
D'autre part $f^{-1}(O) \cap N$ est μ-négligeable car inclus dans N.
Par (I.2), $f^{-1}(O)$ est la réunion d'un ouvert et d'un μ-négligeable, donc est mesurable. □

II

INTÉGRATION

Énoncés

II.1 Un exemple de fonction Lebesgue intégrable qui n'est pas Riemann intégrable : $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, $x \in [0,1]$. Montrer que $\int f\,d\lambda = 0$ mais que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

II.2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Examiner le lemme de Fatou sur l'exemple suivant : $f_{2n} = \mathbb{1}_A$, $f_{2n+1} = \mathbb{1}_B$.

II.3 Soit μ une mesure de probabilité sur $I = [0,1]$. On note

$$\begin{aligned} m &= \textstyle\int_I x\,d\mu(x), & v &= \textstyle\int_I (x-m)^2\,d\mu(x), \\ a &= \textstyle\int_I x^2\,d\mu(x) - m^2, & b &= \left(\tfrac{1}{2} - m\right)^2 + \textstyle\int_I x(1-x)\,d\mu(x). \end{aligned}$$

Exprimer v et b en fonction de a. En déduire que $a \leq 1/4$ et que $a = 1/4$ pour une unique mesure μ que l'on déterminera.

II.4 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, des fonctions mesurables positives intégrables. On suppose que

$$f_n \to f \quad \mu\text{-p.p.} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu\,.$$

En utilisant l'inégalité $(f - f_n)^+ \leq f$, démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)^+\,d\mu = 0$. En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1(\mu)$.

II.5 Soit $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$, infiniment différentiables, à support compact. Montrer que si A est intervalle ouvert, alors $\mathbb{1}_A$ est limite simple de fonctions dans $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$, majorées par 1.

Indication : on pourra d'abord considérer l'intervalle $[0,1]$ *et les fonctions*

$$x \mapsto \begin{cases} \exp(-\varepsilon/x(1-x)) & , \text{ si } x \in]0,1[\\ 0 & , \text{ si } x \notin]0,1[. \end{cases}$$

En déduire que $\sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et qu'une mesure μ est caractérisée par la donnée de $\int f\, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$.

II.6 Si $\mu_1 \ll \mu_2 \ll \mu_3$, montrer que $\dfrac{d\mu_1}{d\mu_3} = \dfrac{d\mu_1}{d\mu_2}\dfrac{d\mu_2}{d\mu_3}$, μ_3 p.p. Si de plus $\mu_2 \ll \mu_1$, alors $\dfrac{d\mu_2}{d\mu_1} = \left(\dfrac{d\mu_1}{d\mu_2}\right)^{-1}$, μ_1 p.p. et μ_2 p.p.

II.7 Cet exercice montre que le dual topologique de $\mathrm{L}^\infty([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda) = \mathrm{L}^\infty$ n'est pas $\mathrm{L}^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda) = \mathrm{L}^1$. En effet, $\mathcal{C}[0,1] \subset \mathrm{L}^\infty \subset (\mathrm{L}^1)^*$ où * désigne le dual. La masse de Dirac δ_0 est dans le dual de $\mathcal{C}[0,1]$ par la dualité $\langle \delta_0, f\rangle = \int f\, d\delta_0 = f(0)$. De plus la norme de $\delta_0 \in \mathcal{C}[0,1]^*$ est 1. Par le théorème de Hahn-Banach, montrer que l'on peut prolonger δ_0 en une forme linéaire Λ sur L^∞, de norme 1. Prouver que Λ n'est pas dans L^1.

II.8 Soit $\mathrm{L}^1([0,1],\lambda)$ l'espace des fonctions réelles intégrables pour la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$. On considère la suite de fonctions

$$a_n(t) = 2 + \sin(nt)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Démontrer que pour toute fonction f de $\mathrm{L}^1([0,1],\lambda)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f(t) a_n(t)\, d\lambda(t) = 2 \int_{[0,1]} f(t)\, d\lambda(t)\,.$$

Indication : utiliser la densité des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ *dans* $\mathrm{L}^1([0,1],\lambda)$ *et intégrer par parties.*

b) Démontrer que pour toute fonction f de $\mathrm{L}^1([0,1],\lambda)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{f(t)}{a_n(t)}\, d\lambda(t) = \beta \int_{[0,1]} f(t)\, d\lambda(t)$$

où $\beta = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (2+\sin u)^{-1} du$.

Indication : utiliser la densité des fonctions en escalier dans $L^1([0,1],\lambda)$.

c) Prouver que $\beta \neq 1/2$.

II.9 Sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, soient f et g deux fonctions intégrables positives ou nulles telles que $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu = 1$. On définit les mesures (de probabilité) P et Q de densités f et g par rapport à μ. Si $\|P - Q\|$ désigne la distance en variation totale définie par

$$\|P - Q\| = \sup_{A \in \mathcal{A}} \big|P(A) - Q(A)\big| \,,$$

démontrer que

$$\|P - Q\| = \frac{1}{2} \int |f - g| \, d\mu \,.$$

Solutions

II.1 L'ensemble $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. La fonction f est nulle λ-presque partout donc son intégrale de Lebesgue est nulle.
En revanche si $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[0,1]$, on a

$$\sup\left\{\int_0^1 u(x)\,dx,\ u\in\mathcal{E}, u\leq f\right\}=0 \quad\text{et}\quad \inf\left\{\int_0^1 v(x)\,dx,\ v\in\mathcal{E}, v\geq f\right\}=1.$$

Ce qui prouve que la fonction f n'est Riemann intégrable sur $[0,1]$. □

II.2 Pour la suite (f_n) définie par $f_{2n}=\mathbb{1}_A$ et $f_{2n+1}=\mathbb{1}_B$, on a

$$\liminf f_n=\mathbb{1}_{A\cap B}.$$

Le lemme de Fatou :

$$\int \liminf_n f_n(t)\,dt\leq \liminf_n \int f_n(t)\,dt,$$

donne donc ici :

$$P(A\cap B)\leq \inf\{\,P(A),P(B)\,\}.$$

II.3 Par des calculs élémentaires, on obtient :

$$v=a \quad\text{et}\quad b=\frac{1}{4}-a.$$

D'autre part $\int_I x(1-x)\,d\mu(x)\geq 0$ car la mesure μ est portée par $[0,1]$. Donc b est positif et $a\leq\frac{1}{4}$.
Si $\mu=\frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1)$ alors $m=1/2$ et on a

$$b=\left(\frac{1}{2}-m\right)^2+\int_I x(1-x)\,d\mu(x)=0.$$

Pour prouver l'unicité de μ, il suffit de remarquer que $a=1/4$ implique $b=0$ et par suite

$$m=1/2 \quad\text{et}\quad \int_I x(1-x)\,d\mu(x)=0.$$

Ainsi, la mesure μ est portée par l'ensemble $\{\,0,1\,\}$. D'autre part $\int_I x\,dx=1/2$, donc $\mu(0)=\mu(1)$, d'où $\mu=\frac{1}{2}(\delta_0+\delta_1)$. □

II.4 On applique ici le théorème de la convergence dominée à la suite $(f - f_n)^+$:

$$(f - f_n)^+ \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-p.p}} 0 \quad \text{et} \quad |(f - f_n)^+| = (f - f_n)^+ \leq f \text{ intégrable}$$

d'où

$$\int (f - f_n)^+ \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le même raisonnement vaut aussi pour $(f - f_n)^-$ et donc

$$\int |(f - f_n)| \, d\mu = \int (f - f_n)^+ \, d\mu + \int (f - f_n)^- \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

II.5 On pose $\varepsilon = 1/n$ et on définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{n\,x(1-x)}\right) & \text{, si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

Pour tout n, $f_n \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$ et, de plus,

$$0 \leq f_n \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) \underset{n}{\to} \mathbb{1}_{]0,1[}(t).$$

Toute limite simple de fonctions mesurables est mesurable, donc $]0,1[\in \sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}))$. On en déduit que tout intervalle $]a,b[$ est dans $\sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}))$ car :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(a + t(b-a)) \underset{n}{\to} \mathbb{1}_{]a,b[}(t).$$

Donc $\sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}))$ contient tous les intervalles ouverts. De plus tout ouvert est réunion dénombrable de ses composantes connexes qui sont des intervalles ouverts donc $\sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Le caractère minimal de $\sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}))$ implique que $\sigma(\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Par convergence dominée, on a

$$\int f_n(a + t(b-a)))\, d\mu \to \mu(]a,b[).$$

La connaissance de $\int f\, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R})$ nous donne $\mu(I)$ pour tout intervalle ouvert et donc pour tout intervalle. On connaît ainsi la mesure μ sur l'algèbre de Boole des réunions finies d'intervalles : μ est alors fixée sur la tribu des boréliens. (voir **Proposition I.4.7**) $\square$

D'où la conclusion :

la chaîne est irréductible, récurrente et apériodique si et seulement si k et m premiers entre eux avec $m = 2$ ou m impair. La loi limite est alors la loi uniforme sur $\mathbb{E}$.

Lorsque m et k ne sont pas premiers entre eux et que $d = \mathrm{PGCD}(m, k)$, le nombre de classes est d où dans chaque classe le nombre d'éléments est m/d. À l'intérieur de chaque classe, la matrice de transition est du type de $\mathbb{P}$ où m et k sont respectivement remplaçés par m/d et k/d.

En identifiant $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à l'ensemble des racines m-ième de l'unité, noté $\mathbb{U}_m$, si (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et si X_0 est une variable aléatoire définie sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{U}_m$, alors la suite (X_n) définie par

$$X_{n+1} = X_n \, e^{\varepsilon_n \frac{2ik\pi}{m}}$$

est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$.

VIII.4 Dans tout l'exercice les entiers i et j sont deux entiers fixés distincts. On pose

$$\alpha_k = \sum_{l \neq j} P_{k,l}.$$

Étant donné que les coefficients de la matrice stochastique $\mathbb{P}$ sont tous strictement positifs on a, d'une part $0 < \alpha_k < 1$ pour tout k et, d'autre part, $0 < \max_k \alpha_k < 1$. On pose alors $\rho = \max_k \alpha_k$.

On va montrer par récurrence sur n que $P_i\{T > n\} \leq \rho^n$ pour tout $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on écrit :

$$\{T > 1\} = \{X_1 \neq j\} \quad \text{d'où} \quad P\{T > 1\} = \alpha_i \leq \rho.$$

On suppose alors la propriété vérifiée pour un entier $n \geq 1$. Observant que

$$\{T > n+1\} = \{T > n\} \cap \{X_{n+1} \neq j\},$$

on conclura en utilisant un conditionnement par la tribu $\mathcal{F}_n$:

$$\begin{aligned}
P_i\{T > n+1\} &= E_i\left(\mathbb{1}_{\{T>n\}}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}\neq j\}}\right) \\
&= E_i\left(E\left(\mathbb{1}_{\{T>n\}}\mathbb{1}_{\{X_{n+1}\neq j\}} \mid \mathcal{F}_n\right)\right) \\
&= E_i\left(\mathbb{1}_{\{T>n\}}E(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}\neq j\}} \mid \mathcal{F}_n)\right) \quad \text{car } \mathbb{1}_{\{T>n\}} \in \mathcal{F}_n \\
&= E_i\big(\mathbb{1}_{\{T>n\}}\sum_k \alpha_k \mathbb{1}_{\{X_n=k\}}\big) \quad \text{par la propriété de Markov} \\
&\leq E_i\big(\mathbb{1}_{\{T>n\}}\sum_k \rho\mathbb{1}_{\{X_n=k\}}\big) = E_i(\mathbb{1}_{\{T>n\}}\rho) \leq \rho.\rho^n = \rho^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

VIII.5 Le fait que le graphe soit connexe implique que la chaîne de Markov est irréductible. On pose

$$w = \sum w_i \quad \text{et} \quad \mu_i = \frac{w_i}{w}.$$

On vérifie alors que μ est la probabilité invariante en vérifiant que ${}^t\mathbb{P}\,\mu = \mu$. En effet, pour tout i, on a :

$$\left({}^t\mathbb{P}\,\mu\right)_i = \sum_j P_{j,i}\,\mu_j = \sum_j \frac{w_{i,j}}{w_j}\,\mu_j = \sum_j \frac{w_{i,j}}{w_j}\frac{w_j}{w} = \frac{w_i}{w} = \mu_i.$$

□