Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information à Tunis

Année Universitaire
2013-2014
Première Année

Méthodes d'Estimation

Série n°2 : Identifiabilité, Exhaustivité

Exercice 1 *Parmi les paramétrisations suivantes, lesquelles sont identifiables ?*

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sont supposées indépendantes,* $X_i \leadsto \mathcal{N}(\alpha_i + \nu, \sigma^2)$. *Le paramètre considéré est* $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \nu, \sigma^2)$ *avec* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *appartenant à l'ensemble* $\{(a_1, \ldots, a_n) / \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$ *et* P_θ *est la distribution de* $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
2. X *et* Y *indépendantes de lois* $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ *et* $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, *avec* $\theta = (\mu_1, \mu_2)$ *et en observant* $Y - X$.
3. $X = (X_{i,j}), i = 1, \ldots, n$ *et* $j = 1, \ldots, p$ *indépendantes, de loi* $\mathcal{N}(\mu_{i,j}, \sigma^2)$ *où* $\mu_{i,j} = \nu + \alpha_i + \lambda_j$, $\theta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \nu, \sigma^2)$.

Exercice 2 *Par définition, on dit que deux statistiques* T_1 *et* T_2 *sont équivalentes si* $T_1(\underline{x}) = T_1(\underline{y}) \Longleftrightarrow T_2(\underline{x}) = T_2(\underline{y})$.

Les statistiques suivantes sont-elles équivalentes ?

1. $\prod_{i=1}^{n} x_i$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i, x_i > 0$.
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i, x_i > 0$.
3. $(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ *et* $(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2)$.

Exercice 3 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *un n-échantillon de loi de Poisson* $\mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$.

1. *Montrer que* $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *est exhaustive directement puis à l'aide du théorème de factorisation.*
2. *Montrer que cette statistique est complète.*

Exercice 4 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ *un n-échantillon de loi* P_θ, *de densité* f_θ, *trouver une statistique exhaustive pour* θ, *a étant fixé, si :*

1. $f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}$, $0 < x < 1$ *et* $\theta > 0$
2. $f(x, \theta) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a)$, $0 < x$, $\theta > 0$ *et* $a > 0$
3. $f(x, \theta) = \theta a^\theta / x^{\theta + 1}$, $a < x$, $\theta > 0$ *et* $a > 0$.

Exercice 5 *Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $v_1, ..., v_{k+1}$ avec les probabilités $\theta_1, ..., \theta_{k+1}$.*

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de même loi que X.

On suppose que $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{k+1}) \in \Theta$

avec $\Theta = \{(\theta_1, ..., \theta_{k+1}) \ / \ \theta_i \geq 0, 1 \leq i \leq k+1$ et $\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i = 1\}$.

Soit N_j le nombre de X_i qui prennent la valeur v_j.

1. *Montrer par l'intermédiaire du théorème de factorisation,que $N = (N_1, ..., N_{k+1})$ est exhaustive pour $\theta \in \Theta$.*
2. *Déterminer la loi de $N = (N_1, ..., N_{k+1})$ et redémontrer directement l'exhaustivité de la statistique N.*

Exercice 6 *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi*

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}), \ \text{si } x \geq \mu \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

et on pose $\Theta = \{(\mu, \sigma) \ / \ \mu \in I\!R, \sigma > 0\}$.

1. *Montrer que $\min(X_1, ..., X_n)$ est exhaustive pour μ quand σ est fixé.*
2. *Trouver une statistique exhaustive pour σ quand μ est fixé.*
3. *Trouver une statistique exhaustive pour θ.*

Exercice 7 *Les familles de lois suivantes sont-elles des familles exponentielles à un paramètre? On proposera chaque fois que cela est possible, une statistique exhaustive.*

1. *La famille $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$, θ réel positif non nul.*
2. *La famille de densités $f(x, \theta) = \exp[-2\ln\theta + \ln(2x)]1\!\!1_{]0,\theta]}(x), \theta > 0$.*
3. *$P_\theta(x) = 1/9$, $x \in \{0.1 + \theta, 0.2 + \theta, \ldots, 0.9 + \theta\}, \theta > 0$.*
4. *$\mathcal{N}(\theta, \theta^2)$, pour $\theta > 0$.*
5. *$P_\theta(x) = 2(x + \theta)/(1 + 2\theta)$, $0 < x < 1$ et $\theta > 0$.*

Exercice 8 *:*

1. *Pour les lois usuelles qui suivent, déterminer celles qui appartiennent à la famille exponentielle à un paramètre et donner, chaque fois que cela est possible, une statistique exhaustive associée au modèle :*
   (a) *Binomiale $\mathcal{B}(n, \theta)$,$\theta \in]0 \ ; \ 1[$.*
   (b) *Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$.*
   (c) *Cauchy $\mathcal{C}(\theta)$, $\theta > 0$.*
   (d) *Student $\mathcal{T}(\theta)$,$\theta \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Déterminer celles qui appartiennent à la famille exponentielle à 2 paramètres et donner, chaque fois que cela est possible, une statistique exhaustive associée au modèle.*
   (a) *Gamma $\gamma(a, \lambda)$, $a > 0, \lambda > 0$.*
   (b) *Lognormale$\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.*