École Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information	Classe : 3ème Année
Année Universitaire : 2024-2025	Date : 29.10.2024
Devoir Surveillé de Statistique Bayésienne	**Durée : 1h 30**

يحيى الشمامي .

Exercice 1 :

1. Déterminer l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique et une loi à priori π. Avec $L(\theta,\delta) = (\theta-\delta)^T(\theta-\delta) = \|\theta-\delta\|^2$ **[Faites la démonstration du résultat dans le cas où $\Theta \subset E = \mathbb{R}$]**.
2. On considère maintenant la fonction perte L^1 avec $\Theta = \mathbb{R}$ c-à-d : $L(\theta,\delta) = |\theta - \delta|$
Montrer que δ^π est la médiane de la loi à postériori.

Exercice 2 :

Dana la suite on considère :

- $X \hookrightarrow Bn(n,p)$; $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$
- π La loi à priori $\hookrightarrow \pi(u) = \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}$; $u \in]0,1[$; $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

1. Déterminer $f(x,p)$
2. Déterminer $m_\pi(x)$
3. En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$
4. Déterminer l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

Exercice 3 :

Dans la suite, on suppose que :

- $X = (X_1, ..., X_n)$ n observations indépendantes distribuées selon la loi $N(\theta, \sigma^2)$; σ^2 connue.
- π La loi à priori sur θ de la forme $\mathbb{N}(a, b^2)$

1. Déterminer $L((X_1, X_2, ..., X_n)/\widetilde{\Theta} = \theta)$
2. Déterminer $L(X_1, X_2, ..., X_n, \widetilde{\Theta})$
3. Montrer que $f(x_1, ..., x_n, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\sigma^n b} exp[-\frac{1}{2}(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2})(\theta - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{a}{b^2}))^2] exp[-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{a}{b^2})^2)]$
4. Déterminer la loi à postériori $L(\widetilde{\Theta}/(X_1, X_2, ..., X_n,) = (x_1, x_2, ..., x_n))$

5. Montrer que $\delta^\pi(X_1, ..., X_n) = \frac{b^2}{b^2+\frac{\sigma^2}{n}}\overline{X_n} + \frac{\frac{\sigma^2}{n}a}{\frac{\sigma^2}{n}+b^2}$ est l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.
6. Déduire alors $\lim_{n\hookrightarrow+\infty} \delta^\pi(X_1, ..., X_n)$.
7. Déterminer l'expression de l'estimateur Bayésien δ^π dans le cadre de la fonction perte L^1
8. Déterminer $\hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$

Exercice 4 :

Dana la suite on considère :

- $X \hookrightarrow U]0, \theta[$;
- π La loi à priori $\hookrightarrow U]0, 1[$

Déterminer l'expression de l'estimateur Bayésien δ^π dans le cadre de la fonction perte quadratique.