Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information

A.U: 2018-2019
$\mathbf{1}^{ére}$ Année

Examen: Integration et Probabilité 2

Durée: 1H30.

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice

Soit (X, Y) la variable aléatoire vectorielle gaussienne de moyenne $(1, 2)$ et de matrice de covariance $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Soit $Z = 2X + Y - 2$.
1- Déterminer la fonction caractéristique de (X, Y).
2- Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
3- On pose $W = \alpha X + Y$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire vectorielle (W, Z).
4- Déterminer α pour que W soit indépendante de Z.

Problème

Pour tout $a, b > 0$, on appelle loi $\gamma(a, b)$ la loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie 1
Soit X une variable aléatoire de loi $\gamma(a, b)$.
1- Vérifier que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Déduire que $\Gamma(n+1) = n!$
2- Calculer $E(X^k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
3- Déduire que $E(X) = \dfrac{p}{\lambda}$ et $Var(X) = \dfrac{p}{\lambda^2}$.
4- Soit $a > 0$. Déterminer la loi de aX.
Partie 2
Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de loi $\gamma(a', b)$. On pose $S = X + Y$ et $R = \dfrac{X}{X+Y}$.
5- Déterminer la densité de la variable aléatoire vectorielle (S, R).
6- Vérifier que les variables aléatoires S et R sont indépendantes.
7- Déduire que S suit une loi Gamma de paramètres à préciser.

8- Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle R.
9- Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Déduire la loi de la moyenne empirique $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$.

Partie 3

Soit $U_1, ..., U_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $N(0, 1)$. On pose $V_k = U_k^2$, pour $k = 1, ..., n$.
10- Déterminer la densité de la variable aléatoire V_k.
11- On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle Z_n (La loi de Z_n s'appelle la loi de Khi-Deux (χ_n^2) avec n degré de liberté).
12- Déduire la loi de $\frac{1}{n} Z_n$.

Partie 4

Soit W_n le temps qui s'écoule entre les arrivées des $(n-1)$ ième et n ième clients d'un magasin. On suppose que jamais deux clients arrivent simultanément et que les W_n $(n \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi de probabilité de fonction de répartition F. Soit N_t la variable aléatoire représentant le nombre de clients du magasin pendant l'intervalle du temps $[0, t]$, avec $t \in \mathbb{R}_+$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = W_1 + W_2 + ...W_n$.
13- Vérifier que $N_t = Card\{n \geq 0 \ / \ S_n \leq t\} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_k)$.
14- Exprimer l'événement $(N_t = n)$ en fonction de S_n, S_{n+1} et t.
15- Déduire que:

$$P(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t) \qquad \text{et} \qquad E(N_t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t),$$

16- On suppose que W_n suit une loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_n et déduire la loi de la variable aléatoire N_t.