CHAPITRE III : LA VALUE AT RISK

Compte tenu de ce qui a été dit, un indice permettant d'évaluer le risque de marché auquel est confronté un investisseur devrait :

- être indépendant de toute hypothèse distributionnelle
- ne concerner que le mauvais risque, celui de pertes
- mesurer d'une certaine manière le risque en question
- être valable pour tout type d'actif

D'où la nécessité de développer des mesures de risque de perte : Étudier les comportements des queues de distribution des pertes.

I- DEFINITION DE LA VALUE AT RISK OU VaR

La VaR représente **la perte potentielle maximale, exprimée en dinars ou euros**, d'un investisseur sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs et passifs financiers soumis à des risques de marché, compte tenu d'un horizon de détention et d'un intervalle de confiance.

Elle permet de répondre à la question suivante :

Combien l'établissement financier peut-il perdre au maximum avec une probabilité α pour un horizon de temps h fixé ?

Deux éléments sont donc indispensables pour interpréter la VaR:

- La période de détention (*holding period*) qui correspond à la période sur laquelle la variation de valeur du titre ou du portefeuille est mesurée;
- Le seuil de confiance alpha = α = q qui correspond à la probabilité d'observer une perte inférieure à la valeur en risque.

Considérons un actif dont le prix à l'instant t est noté p_t. La variation observée pour cette actif durant la période [s ;t] se note $\Delta p_{s,t}$ et est donc définie par :

$\Delta p_{s,t} = p_t - p_s$

Remarquons que si $\Delta p_{s,t}$ est positif, il s'agit d'un bénéfice, une valeur négative correspondant quant à elle à une perte.

La seule hypothèse que l'on formule est que la valeur de cet actif évolue de manière stationnaire[1]. On remplacera dès lors l'intervalle [s ;t] par l'intervalle [o ; t-s] et la variable Δ p n'aura plus pour indice que la seule durée de l'intervalle. On a donc la définition suivante :

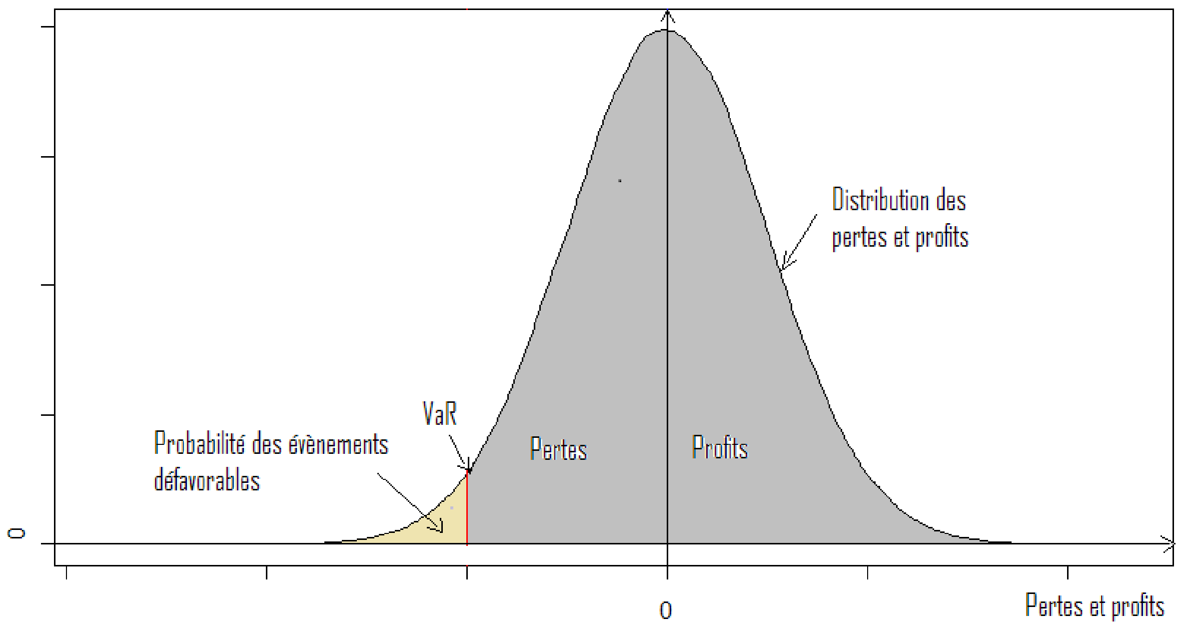
$PnL_t = \Delta p_t = p_t - p_0$

La Value at Risk de l'actif en question pour la durée t et le niveau de probabilité q se définit comme un montant noté VaR tel que la variation Δp observée pour cet actif durant l'intervalle [o ;t] ne sera inférieur à VaR qu'avec une probabilité (1-q). La VaR au seuil de confiance q est :

$Pr [PnL_t < -VaR] = 1-q$, ou $Pr (PnL_t > - VaR) = q$

La VaR est donc le quantile (1-q) de la distribution Δp.

En notant $f_{\Delta p}$ la densité de la variable aléatoire Δp, on retrouve la définition de la VaR ci-dessous graphiquement :



Le choix de l'horizon temporel dépend de l'utilisation de la VaR. Un trader va calculer une VaR à un jour pour pouvoir réajuster rapidement son portefeuille. Si la gestion est moins active, on peut choisir un horizon temporel plus long.

Les autorités de supervision des banques, soit le comité de Bâle, imposent une période de détention de 10 jours pour calculer les fonds propres et une période de détention d'un jour

[1] Variable aléatoire stationnaire en série temporelle : espérance, variance et covariance constante et finie.

pour l'exercice de backtesting. Ils autorisent les banques à convertir la VaR 1 jour en VaR 10 jours par scaling.

Lorsque les risques de marché sont pris en considération, les analystes calculent en premier lieu la VaR sur un horizon temporel d'un jour. L'hypothèse habituelle est :

VaR à N jours = $\sqrt{N}$ VaR à 1 jour

Cette formule est exacte si les variations de la valeur du portefeuille sont indépendantes et ont une distribution normale, de moyenne nulle, sur N jours successifs. Sinon, cette formule est approximative.

Exemple 1 :

Un projet sur un an a 98% de chances de générer un gain de 2 M€, 1,5% de chances d'engendrer une perte de 4 M€ et 0,5% de chances de conduire à une perte de 10 M€.

Quelle est sa VaR au seuil de 99%, à l'horizon d'un an ?

Sa VaR au seuil de 99,5% à l'horizon d'un an ?

Agrégation de la VaR :

L'entreprise ayant calculé les VaR (avec le même seuil de confiance et le même horizon temporel) pour ses différents départements peut être intéressée par le calcul de la VaR total. La formule suivante permet d'effectuer ce calcul :

$$VaR_{totale} = \sqrt{\sum_i \sum_j VaR_i VaR_j \, \rho_{ij}}$$

Où VaR_i est la VaR du département i, la VaR_j est la VaR du département j et ρ_{ij} le coefficient de corrélation entre les pertes des départements i et j. Cette équation est parfaitement exacte lorsque les PnL suivent une distribution normale à espérance nulle, mais fournit aussi des approximations satisfaisantes par ailleurs.

Exemple 2 :

Supposons que les VaR de deux départements soient égales à 60 et 100 millions de dinars respectivement. On estime à 0,4 la corrélation entre les pertes. Déterminer la VaR totale.

<u>Inconvénients de la VaR:</u>

- elle repose sur l'hypothèse que les marchés suivent des lois de distribution normales, une approximation qui sous-évalue la fréquence des valeurs extrêmes.
- Elle ne renseigne pas sur la perte potentielle qui intervient au-delà de l'intervalle de confiance.

II- LES METHODES D'ESTIMATION DE LA VAR

Il existe trois méthodes de calcul de la VaR :

- la méthode historique
- la méthode paramétrique
- la VaR Monte-Carlo

Les trois méthodes utilisent les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Cela suppose implicitement que le futur se comporte comme le passé : nous supposons donc que la variation de la valeur du portefeuille est stationnaire.

1- La VaR paramétrique :

L'hypothèse de normalité (ou lognormalité) est très répandue en finance pour modéliser les facteurs de risque, surtout pour les rendements des actions.

VaR d'un actif : Cas d'une distribution normale

Dans le cas particulier où la variable aléatoire Δp_t suit une loi normale de moyenne $E(\Delta p_t)$ et d'écart type $\sigma(\Delta p_t)$, la définition peut se transformer en :

$$\Pr\left[\frac{\Delta p_t - E(\Delta p_t)}{\sigma(\Delta p_t)} \leq \frac{VaR_q - E(\Delta p_t)}{\sigma(\Delta p_t)}\right] = 1-q$$

Ce qui montre que l'expression $\frac{Var_q - E(\Delta p_t)}{\sigma(\Delta p_t)}$ est le quantile de la distribution normale réduite, ordinairement noté z_{1-q} (table de la distribution normale); Comme $z_{1-q} = -z_q$, ceci permet donc d'écrire la VaR sous une forme très simple en fonction de l'espérance et de l'écart type de la perte :

$$VaR_q = E(\Delta p_t) - z_q.\sigma(\Delta p_t)$$

VaR pour un portefeuille d'actifs[2]

Soit un portefeuille constitué de N actifs en nombres respectifs n_1, …. n_N. Si on note p_j le prix du j-ième titre, le prix p_p du portefeuille sera donné par : $p_p = \sum_{j=1}^{N} n_j p_j$

et la variance de prix obéira à la même relation :

[2] Dans le cas où les prix sont remplacés par les rendements, les nombres d'actifs en portefeuille doivent être remplacés par les proportions représentant les capitalisations boursières respectives des différents titres.

$$\Delta p_p = \sum_{j=1}^{N} n_j \Delta p_j = \sum_{j=1}^{N} n_j p_j(t) r_j(t+1) = p_p \sum_{j=1}^{N} \theta_j r_j(t+1)$$

Avec θ_j : proportion du titre j dans le portefeuille, $\theta_j = \frac{n_j p_j}{p_p}$ dans le cas de prise en compte de rendement

Et $r_j(t+1) = \frac{p_j(t+1) - p_j(t)}{p_j(t)}$

Remarques :

- Etant donné que **l'hypothèse de normalité** est généralement **vérifiée** pour la rentabilité ou **rendement** des actions, souvent on utilise le rendement au lieu de la variation de prix (l'espérance et variance des rendements sont connues)
- La modélisation classique des variations de prix repose sur l'hypothèse de normalité :

$Log(1+r_{t+1}) = Log(p_{t+1}/p_t)$

Donc $Log(p_{t+1}) - Log(p_t) = r_{t+1}$ lorsque r_{t+1} tend vers 0

Ce rendement suit une loi normale d'espérance et de variance définies.

Il est cependant possible de trouver l'espérance et la variance de Δp_p à partir de l'espérance, de la variance et des covariances des différents Δp_j :

$$E(\Delta p_p) = \sum_{j=1}^{N} n_j E(\Delta p_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} n_j p_j(t) E(r_j) = p_p \sum_{j=1}^{N} \theta_j E(r_j)$$

$$V(\Delta p_p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} n_i n_j \operatorname{cov}(\Delta p_i, \Delta p_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} n_i n_j \rho_{ij} \sigma_i(\Delta p_i) \sigma_j(\Delta p_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \rho_{ij} \sigma_i(r_i) \sigma_j(r_j) n_i n_j p_i(t) p_j(t) = p_p^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \theta_i \theta_j \operatorname{cov}(r_i, r_j)$$

Sous **l'hypothèse de normalité**, la VaR du portefeuille peut alors se calculer comme étant :

$VaR_q = E(\Delta p_p) - z_q\ \sigma(\Delta p_p)$

Remarque :

Nous notons que cette méthode repose sur deux hypothèses :

- l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille
- la normalité des facteurs

Exemple 3 :

Nous avons un portefeuille composé de 2 titres A (position longue : si le prix augmente on gagne), un titre B (position courte : si le prix augmente on perd) et un titre C (position longue). Les prix actuels de A,B et C sont respectivement : 244, 135 et 315 dinars.

Les rendements journaliers sont en moyenne égaux à 50bp (0,50%), 30 bp et 20 bp ; et les volatilités journalières sont égales à 2%, 3% et 1%. La matrice de corrélation entre les trois rendements des trois actifs est égale à :

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0{,}5 & 1 & \\ 0{,}25 & 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}$$

2- La VaR historique

Contrairement à la VaR empirique, celle-ci ne fait pas d'hypothèse sur la distribution de probabilité des pertes ou rendements. Elle utilise directement la distribution empirique des facteurs. Elle suppose que les chocs observés dans le passé vont se reproduire dans le futur.

A l'instant t, nous pouvons calculer les n réalisations possibles de PnL, que nous notons $PnL_1,\ldots, PnL_n$, et en déduire le quantile empirique de la perte au seuil de confiance (1-q). Pour cela, nous calculons :

$\mathrm{Min}(PnL_i)=PnL_{1:n} < PnL_{2:n} < \ldots < PnL_{n:n} = \mathrm{Max}(PnL_i)$

La VaR est égale à la valeur absolue de la n*(1-q) i-ième plus petite valeur.

Par exemple, pour un seuil de confiance de 99%, la VaR correspond à la plus petite perte $PnL_{1:100}$ si la taille de l'historique est égale à 100.

Lorsque n*(1-q) n'est pas un entier, la VaR est calculé par interpolation :

$VaR = [PnL_{n^*:n} + (n \,.\, (1\text{-}q) - n^*)\,(PnL_{n^*+1:n} - PnL_{n^*:n})]$

Avec n* = l'entier inférieur le plus proche de n . (1-q)

Exemple 4 :

Nous reprenons le même portefeuille composé de 2 A (long), 1 B (court) et 1 C (long).

Nous avons l'historique de prix des actifs pour les 251 jours précédents. Nous calculons les 250 variations de prix de chaque actif p(t+1) – p(t).

	Prix			Rendements en %			Prix choqués			PnL
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
1	100	110	230							
2	100,9	111,5	228,9	1	1,4	-0,4	246,3	136,8	313,6	1,5
3	99,5	106,7	230,8	-1,4	-4,3	0,8	240,6	129,1	317,5	1,6
4	100,4	105,8	233,1	0,8	-0,9	1	245,9	133,8	318,1	8,2
5	102	105,2	232,5	1,6	-0,6	-0,3	247,9	134,1	314,1	7,9
6	105,3	103,2	232,6	3,2	-2	0,1	251,7	132,3	315,1	18,3
7	106,7	101,8	233,6	1,3	-1,4	0,4	247,1	133,1	316,2	9,4

3- La VaR Monte-Carlo

La VaR Monte-Carlo est basée sur la simulation des facteurs de marché à partir d'une loi de distribution à priori (de préférence admissible avec l'historique).
Si nous considérons n simulations de ces facteurs de marché, nous pouvons calculer n variations simulées de la valeur du portefeuille. Il suffit ensuite de calculer le quantile correspondant comme pour la méthode de la VaR historique. Les deux méthodes sont très semblables. La grande différence est que l'une des méthodes utilise des facteurs historiques, alors que l'autre utilise des facteurs simulés. Une autre différence concerne la taille de l'échantillon pour le calcul du quantile, qui n'est pas contraint dans le cas de la VaR de Monte-Carlo.
La VaR de Monte-Carlo consiste à simuler les réalisations du vecteur ($r_1(t+1)$,…., $r_m(t+1)$) et à calculer les PnL correspondants avec PnL = $\sum_{i=1}^{m} \theta_i p_i(t) r_i(t+1)$

- nécessite un ordinateur très performant car elle est coûteuse en temps de calcul (elle convient difficilement au calcul journalier d'une *VaR* pour un nombre trop grand d'actifs).
- demande un effort important de modélisation puisque celle-ci déterminera entièrement les trajectoires des facteurs de marché que l'on utilise pour le calcul de la *VaR*.

III VaR ET FONDS PROPRES REGLEMENTAIRES

Les régulateurs déterminent le capital requis pour le risque de marché comme un multiple de la VaR au seuil de 99% à l'horizon de 10 jours. En ce qui concerne le risque de crédit et opérationnel, on utilise la VaR à 99,9% à l'horizon d'un an.

Les établissements doivent calculer la perte potentielle maximale quotidiennement pour une période de détention de 10 jours avec un seuil de confiance de 99%, notée VaR(t) à la date t. A chaque date t, l'établissement calcule l'exigence de fonds propres FP(t) de la façon suivante :

$FP(t) = \max \left(VaR(t-1), (3+\xi) \times \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR(t-i)\right)$

Avec ξ(xi) le complément éventuel ($0 \leq \xi \leq 1$) qui dépend des résultats du backtesting. Dans des périodes normales, l'exigence de fonds propres sera donc un multiple de la moyenne des valeurs en risque des 60 derniers jours.

IV- LE BACKTESTING DE LA VaR

Le but du backtesting est de confronter la VaR calculée avec les pertes et profits effectivement réalisés pour vérifier l'adéquation de la méthode utilisée pour le calcul de la VaR.

Si nous avons calculé la VaR à 99% à 1 jour. Le backtesting consiste à vérifier le nombre de fois où la perte journalière a effectivement dépassé la VaR.

D'après l'amendement de la BRI, les banques doivent procéder au backtesting de la VaR au seuil de 99% à un jour sur les 250 jours précédant le calcul. Si la perte journalière est supérieure à cette VaR, une exception est enregistrée. Si ces exceptions représentent 1% des jours, on peut considérer que la méthodologie de calcul de la VaR est fiable. En revanche, si elles représentent plus de 1% des jours, la VaR est sous-estimée, de même que le capital réglementaire. Si elles représentent moins de 1% des jours, la VaR est surestimée. (à portefeuille fixe)

La prise en compte de la VaR au niveau du calcul du capital réglementaire dépend alors du nombre d'exceptions enregistrées (effet multiplicateur).

III AUTRES MESURES : l'EXPECTED SHORTFALL ET LE STRESSTESTING

1- L'EXPECTED SHORTFALL

L'une des limites de la VaR est qu'elle ne renseigne pas sur la perte potentielle qui intervient au-delà de l'intervalle de confiance. L'expected Shotfall ou VaR conditionnelle ou perte de queue permet de remédier à cela : Il s'agit de la moyenne des pertes au-delà du seuil de confiance : elle mesure donc la perte moyenne sur un horizon donné dans x% des moins bons cas.

2- STRESSTESTING

L'approche la plus souvent retenue pour le calcul de la VaR est la simulation historique. Selon cette approche, les données historiques constituent un bon indicateur des réalisations futures. Si un évènement particulier n'est pas contenu dans l'historique, alors il n'affectera pas les résultats de la VaR. Le stress test tente de résoudre cette faiblesse de la mesure de la VaR.

Comme le préconisent les autorités réglementaires, les établissements financiers doivent effectuer régulièrement des simulations de crise afin de connaître le montant des pertes potentielles en cas de fluctuations dangereuses et importantes du marché.

Contrairement à la VaR, elles doivent permettre de répondre à la question suivante :

Quel est le montant de perte auquel la banque doit faire face lors de la prochaine crise si le portefeuille de négociation ne change pas ?

Statistiquement, les stress testing font donc référence à un maximum, et non à un quantile. C'est une vision du risque extrême. Les mesures fournies par les stress testing sont avant tout destinées au risk management et à la direction générale. Celles-ci doivent faire l'objet d'une analyse détaillée afin de bien comprendre l'exposition de la banque et afin de bien vérifier que ce risque extrême est à un niveau supportable

Trois grandes familles de stress-testing existent :

1. La première est la plus simple : elle consiste à utiliser les données des crises passées et à employer la méthode de simulation historique sur ces périodes troublées pour calculer une perte potentielle maximale (et non une VaR). L'établissement financier a alors une estimation de ce que causerait la survenance de ces mêmes crises avec le portefeuille de négociation actuel.

2. La deuxième approche est une analyse structurée des scénarios. Les évènements historiques sont utilisés en les appliquant aux conditions actuelles de marché. Par exemple, nous pouvons analyser l'incidence de la hausse des taux de 1994 par la Federal Reserve Bank si elle survenait aujourd'hui.
Contrairement à la première méthode qui utilise les données historiques, cette méthode va donc utiliser des données simulées à partir des données actuelles et des évènements passés.
3. La troisième approche est une analyse de scénarios spécifiques. Pour cela, il convient d'identifier une situation qui risque de menacer l'établissement financier. Cette méthode ne fait donc pas référence aux évènements passés, mais utilisent des hypothèses sur les crises potentielles futures.