Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U: 2021-2022
$2^{ème}$ Année

Session principale
Processus stochastique

Durée: 1H30.

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 "Compréhension du cours et TD"

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace dénombrable E.

1- Vrai/faux, justifier: Soit x dans E et $N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{(X_n=x)}$ le nombre de passage en x. Si $N_x < +\infty$ $P_x - p.s$ alors $E_x(N_x) < +\infty$.

2- Vrai/faux, justifier: Si la chaîne est irréductible et E est fini, alors la chaîne est récurrente positive.

3- Vrai/faux, justifier: Si la chaîne de Markov est irréductible sur E et s'il admet un état transitoire, alors l'espace d'états E est infini.

4- Vrai/faux: Deux états d'une même classe, alors tous les deux sont réccurents où bien transitoires.

5- Vrai/faux, justifier: Si une chaîne de Markov est récurrente, alors les états de la chaîne se communiquent.

6- Soit μ la loi initiale de la chaîne et Q sa matrice de transition.

6-1- Exprimer la quantité $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$ en fonction de μ et Q.

6-2- Exprimer $P(X_0 = x, X_n = y)$, puis $P(X_n = y)$ en fonction de μ et Q.

Exercice 2

On étudie une file d'attente à un guichet où le temps de service d'un client est constant et pris comme unité de temps. On note Y_n le nombre de clients arrivant pendant la $n^{éme}$ période de temps et on suppose que les variables $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, identiquements distribuées de loi μ; un client arrivant dans cette période ne peut être servi avant l'instant $(n+1)$; même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'intant n; et l'on suppose X_0 indépendant de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.

1-*a*- Vérifier que:

$$X_{n+1} = X_n - 1_{\{X_n\geq 1\}} + Y_{n+1}; n \geq 0.$$

1-*b*- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
1-*c*- Déterminer sa matrice de transition en fonction de μ.
2-*a*- Vérifier que:

$$X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - n; n \geq 1.$$

2-*b*- Montrer que si $E(Y_1) > 1$, alors $X_n \to +\infty$ *P.p.s.*
2-*c*- Déduire que la chaîne est transitoire.
3-*a*- Vérifier que:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - n + \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{0\}}(X_k); n \geq 1.$$

3-*b*- Montrer que si $E(Y_1) < 1$, l'état 0 est récurrent (Ind: On pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que:
* $X_0 = k \in \{0, ..., N\}, N \in \mathbb{N}$.
* la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant F_n (où $F_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$) est une loi binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$.
1- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$.
2- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque surement et en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X_∞.
3- On pose $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$.
4- Calculer $E(X_\infty)$ et $E(X_\infty(N - X_\infty))$.
5- Déterminer la loi de X_∞.

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathcal{M}$=$\{1,...,6\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les classes de communication et classifier les états.
2- La chaîne est-elle irréductible?
3- Soit $T_x = \inf\{n \geq 1; X_n = x\}$. Calculer $P_5(T_1 = n)$ et $P_5(T_6 = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4- Soit $u(x) = E_x(T_5)$ pour tout $x \in \mathcal{M}$. Déterminer et résoudre l'équation linéaire satisfaite par la fonction u.

$$X_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1}) \qquad H(x,z) = x - \mathbb{1}_{(x \geq 1)} + z = y$$

1

$$H(x,y) = \sum_{z \in F / H(x,z)} \mu(z) \quad \begin{cases} x \geq 0 & \mu(z) \\ x \geq 1 & \mu(y-x+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) a)

$$X_{n+1} = X_n - \mathbb{1}_{(X_n \geq 1)} + Y_{n+1}$$

$$X_n = X_{n-1} - \mathbb{1}_{(X_{n-1} \geq 1)} + Y_n$$

$$\vdots$$

$$X_1 = X_0 - \mathbb{1}_{(X_0 \geq 1)} + Y_1$$

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k \geq 1)}$$

2) ~~b)~~

$$-\mathbb{1}_{(X_k \geq 1)} \geq -1$$

$$-\sum \mathbb{1}_{(X_k \geq 1)} \geq -n$$

$$\Rightarrow X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - n$$

2) b)

$$\frac{X_n}{n} \geq \underbrace{\frac{X_n}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k}_{\to E(Y_1) \text{ P.p.s (Grâce à LFGN)}} - 1 \Rightarrow \lim \frac{X_n}{n} \geq E(Y_1) - 1 > 0 \text{ P.p.s}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = +\infty \text{ P.p.s}$$

2) c) $\tilde{\Omega} = \{ \omega \in \Omega \,/\, X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \}$ $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$

Soit $x \in E$ $\quad N_x(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{N}}^{+\infty} \mathbb{1}(X_n(\omega) = x)$

$N_x < +\infty$ sur $\tilde{\Omega}$, avec $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$

$\Rightarrow x$ est transient

$\Rightarrow \mathbb{P}_x(N_x < +\infty) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 0$

3) a)
$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\mathbb{1}(X_k \geq 1)}_{1 - \mathbb{1}\underbrace{(X_k \geq 1)^c}_{X_k = 0}}$$

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}(X_k = 0) - n$$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}(X_k = 0) - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} E(Y_1) - 1 < 0$$

Mq 0 est récurrent. Supposons 0 est transient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}(X_k = 0) < +\infty \quad \text{p.s}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}(X_k = 0) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}(X_k = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{p.s}$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

absurde

Exercice 01 :

1] vrai $N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{(X_n = x)}$ $N_x < +\infty$ p.s $\Rightarrow$ x est transient

$$E_x(N_x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x) < +\infty$$

2] vrai

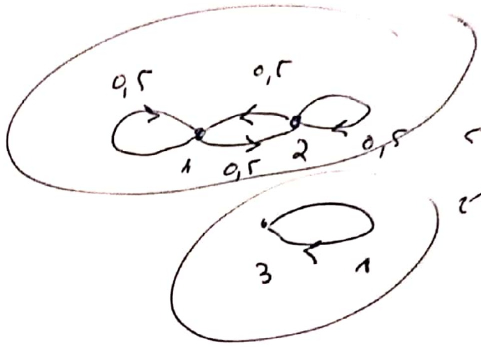
3] vrai E fini et irreductible $\Rightarrow$ chaîne récurrent.

alors que la chaîne admet un état transient

contre exemple:

5] faux $E = \{1, 2, 3\}$

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

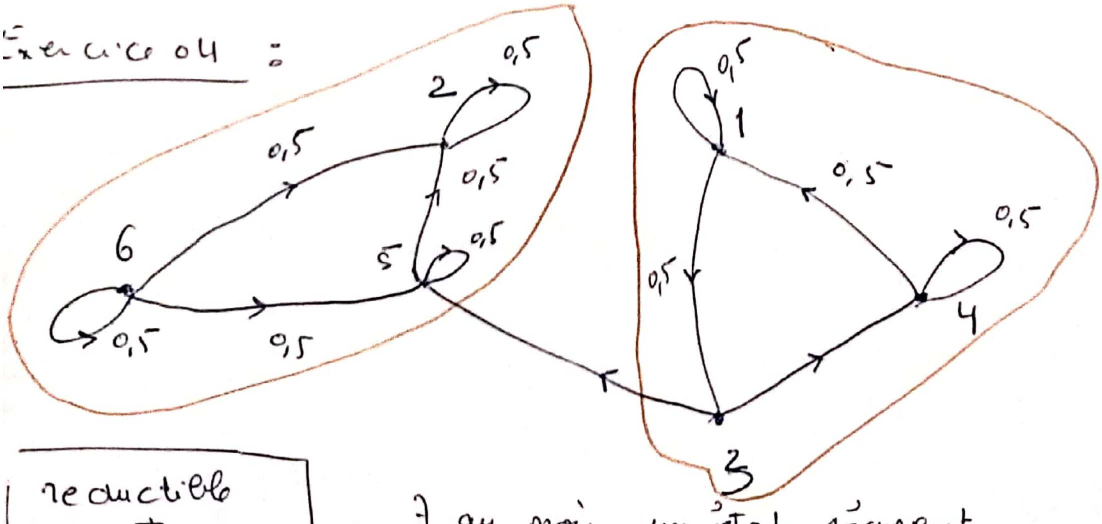


deux classe

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \underbrace{P(X_0 = x_0)}_{\mu(x_0)} Q(x_0, x_1) Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{n-1}, x_n)$$

$$P(X_0 = x ; X_n = y) = \underbrace{P(X_n = y / X_0 = x)}_{Q^n(x,y)} \underbrace{P(X_0 = x)}_{\mu(x)}$$

Exercice 04 :



$\boxed{\text{reductible} + |E| = 6 < +\infty}$ $\rightarrow$ $\exists$ au moins un état récurent

$C(2) = \{2, 5, 6\}$ = est une classe récurrente

$C(1) = \{1, 3, 4\}$ = ———— transiante

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 6 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$$

⟶ si la sous matric associé a une classe est de transition

⇓

la classe est récurrente

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{array} \neq 1$$

μ mesure irréductible $\quad \mu Q = \mu$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\mu} Q_1 = \tilde{\mu} \\ \tilde{\mu}(\{2,5,6\}) = 1 \end{array}\right\}$$

$\tilde{\mu}$ est l'unique mesure qui vérifie

~~μ mesure irreduc~~

3) soit $T_x = \inf\{ n \geq 1 ; X_n = x \}$.

$$P_5(T_1 = n) = 0$$

~~$P_5(T_6 = n) = P(X_0 = 5, X_1 = 5, X_2 = 5, \ldots,$~~

$$P_5(T_6 = n)$$

$$= P\Big(\bigcup_{k+l=n} (\underbrace{X_0 = 5 ; X_1 = 5 ; X_2 = 5, \ldots, \boxed{X_{k-1} = 5 ; X_k = 2}}_{k \text{ boucle en } 5} ; \underbrace{X_{k+1} = 2 ; \ldots ; X_{n-1} = 2}_{n-1-k} ; X_n = 6)\Big)$$

$$= \sum_{k+l=n} P(\_\_) \qquad = (n+1)(0{,}5)^n$$