Optimisation

Documents autorisés : Aucun.
Calculatrice autorisée.
Les trois exercices sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction.
On veillera en particulier à expliquer les calculs et à justifier les réponses.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 2 + xy - x^2y - xy^2$$

1. Montrer que les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
2. Calculer la matrice Hessienne en $(0, 0)$ et en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En déduire la nature de ces points critiques.

Correction
1. On calcule les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy = x(1 - x - 2y)$$

Pour trouver les points critiques, il faut donc résoudre

$$y(1 - 2x - y) = 0$$
$$x(1 - x - 2y) = 0$$

La première équation donne $y = 0$ ou $y = 1 - 2x$. Si $y = 0$ alors la deuxième équation devient $x(1 - x) = 0$ donc $x = 0$ $x = 1$. Si maintenant $y = 1 - 2x$ alors la deuxième équation devient $x(3x - 1) = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ (et $y = 1$ dans ce cas) ou $x = \frac{1}{3}$ (et $y = \frac{1}{3}$ dans ce cas). On retrouve donc tous les points critiques donnés dans l'énoncé.

2. Pour calculer la Hessienne, on doit calculer les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - 2x - 2y$$

La matrice Hessienne en $(0,0)$ est donc

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $H(0,0)$ sont 1 et -1, la matrice est donc indéfinie, et le point critiques ne correspond pas à un extremum.

La matrice Hessienne en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est donc

$$H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sont -1 et $-\frac{1}{3}$, elles sont strictement négatives, le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ correspond donc à un maximum de f qui vaut $\frac{55}{27}$.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(X,Y,Z) = X - Y + 2Z$$
$$g(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 4$$

On veut trouver les extrema de f sous la contrainte $g = 0$.

1. Ecrire le Lagrangien L de ce problème.
2. Montrer que L a deux points critiques

$$X = -1, Y = 1, Z = -1, \lambda = \frac{1}{2}$$
$$\text{et } X = 1, Y = -1, Z = 1, \lambda = -\frac{1}{2}$$

3. Calculer la matrice Hessienne de L (dans les variables X, Y, Z) et en déduire la nature des points critiques.

4. On pose $X = 1 + x$, $Y = -1 + y$ et $Z = 1 + z$. Développer la relation $g(X, Y, Z) = 0$ pour obtenir une relation entre x, y et z. Utiliser cette relation pour écrire le développement de $f(1 + x, -1 + y, 1 + z)$. Conclusion ?

Correction

1. Le Lagrangien de ce problème est

$$L(X, Y, Z, \lambda) = X - Y + 2Z + \lambda(X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 4)$$

2. On doit annuler les dérivées partielles de L

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial X} &= 1 + 2\lambda X = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial Y} &= -1 + 2\lambda Y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial Z} &= 2 + 4\lambda Z = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 4 = 0
\end{aligned}$$

Les premières équations donnent $X = -\frac{1}{2\lambda}$, $Y = \frac{1}{2\lambda}$ et $Z = -\frac{1}{2\lambda}$. En utilisant ces expressions dans la dernière équation, on trouve $\lambda^2 = \frac{1}{4}$.

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors $X = -1$, $Y = 1$ et $Z = -1$. Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, alors $X = 1$, $Y = -1$ et $Z = 1$.

3. La matrice Hessienne s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, H est définie positive (valeurs propres 1,1 et 2), donc le point $(-1, 1, -1)$ correspond à un minimum local de f sous la contrainte $g = 0$. Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, H est définie négative (valeurs propres -1,-1 et -2), donc le point $(1, -1, 1)$ correspond à un maximum local de f sous la contrainte $g = 0$.

4. On développe $g(X, Y, Z)$

$$\begin{aligned}
g(X, Y, Z) &= (1 + x)^2 + (-1 + y)^2 + 2(1 + z)^2 - 4 \\
&= 1 + 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 2 + 4z + 2z^2 - 4 \\
&= 2(x - y + 2z) + x^2 + y^2 + 2z^2
\end{aligned}$$

On en déduit la relation suivante

$$x - y + 2z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2z^2)$$

On écrit maintenant le développement de f

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z) &= (1 + x) - (-1 + y) + 2(1 + z) \\ &= 4 + x - y + 2z \\ &= 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2z^2) \end{aligned}$$

On en déduit que $f(X, Y, Z) \leq 4$ pour toutes les valeurs de (X, Y, Z), donc $(1, -1, 1)$ correspond à un maximum global de f sous la contrainte $g = 0$, ce maximum vaut 4.

Exercice 3

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant un engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, de sa variété de blé s'écrit

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

où B est la quantité de semences de blé utilisées et N la quantité d'engrais azoté pulvérisée.

1. Dans cette question $N = 0$. On note alors $F(B)$ le rendement (égal à $f(B, 0)$). La fonction F a-t-elle un maximum ? Pourquoi ? Si oui, que vaut ce maximum et en quelle valeur est-il atteint ?
2. Montrer que f a un point critique. Calculer la valeur de f pour ce point. Calculer la Hessienne de f en ce point, ainsi que la forme quadratique associée. En déduire la nature du point critique. Comparer les valeurs obtenues avec celles de la question 1.
3. BONUS – Sachant que B et N sont reliés par la contrainte $B + 5N = 23$ (l'unité d'engrais coûte 5 fois plus que l'unité de semence, et le budget est fixé), déterminer les extrema de f sous cette contrainte (on ne demande que le calcul du point critique). Comparer les valeurs avec celles de la question 2.

Correction
1. La fonction F est

$$F(B) = 120B - 8B^2$$

Sa dérivée est $F'(B) = 120 - 16B$ elle s'annule en $B = 15/2$ et $F''(15/2) = 120 > 0$, on a donc un maximum local en $B = 15/2$. Ce maximum est global car F est une fonction polynôme du second degré. Le rendement maximum vaut alors $F(15/2) = 450$.

2. On annule les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f}{\partial B} = 120 - 16B + 4N = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial N} = 4B - 4N = 4(B - N) = 0$$

La deuxième équation donne $B = N$. En reportant dans la première équation on trouve $120 - 12B = 0$ donc le point critique est $B = N = 10$.

La matrice Hessienne est

$$H = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

La forme quadratique associée est

$$Q(x, y) = -16x^2 + 8xy - 4y^2 = -(4x - y)^2 - 3y^2$$

La forme Q est donc définie négative, et le point critique correspond à un maximum de f. Le rendement en ce point vaut $f(10, 10) = 600$. Le rendement est donc amélioré.

3. On définit le Lagrangien

$$L(B, N, \lambda) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2 + \lambda(B + 5N - 23)$$

On doit annuler les dérivées partielles de L

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 120 - 16B + 4N + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial N} = 4B - 4N + 5\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = B + 5N - 23 = 0$$

La deuxième équation donne $N = B + \frac{5}{4}\lambda$. En utilisant cette expression dans la première équation on trouve $120 - 12B + 6\lambda = 0$, donc $B = 10 + \frac{1}{2}\lambda$ et $N = 10 + \frac{7}{4}\lambda$. La dernière équation donne $60 + \frac{37}{4}\lambda = 23$ c'est-à-dire $\lambda = -4$, $B = 8$ et $N = 3$.

On peut vérifier que cela correspond à un maximum de f sous la contrainte $B + 5N = 23$. Dans ce cas le rendement maximum est de 526 (donc inférieur à celui trouvé en 2.).