Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U: 2021-2022

# Examen: Suites des variables aléatoires

**Durée: 1H30**

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

**Exercice 1**

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,\theta]$, où $\theta$ est un paramètre réel strictement positif. Pour $n \geq 1$, on pose $\widehat{\theta_n} = \max(X_1, ..., X_n)$.
1-Déterminer la fonction de répartition de $\widehat{\theta_n}$.
2- Montrer que $\widehat{\theta_n}$ converge en moyenne quadratique vers $\theta$, lorsque $n \to +\infty$.
3- Montrer que $\widehat{\theta_n}$ converge presque surement vers $\theta$.
*Ind: On pourra utiliser le lemme de Borel Contelli.*
4- Montrer que $n(\widehat{\theta_n} - \theta)$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$. Quelle est cette loi limite?
5- Soient $a$ et $b$ de nombres réels, tels que $1 \leq a < b$.
Calculer $P_\theta(\theta \in [a\widehat{\theta_n}, b\widehat{\theta_n}])$.

**Exercice 2**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.
1- On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}, \qquad n \geq 1.$
1-a- Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle $Y_n$.
1-b- Pour tout $\alpha > 0$, calculer $P(Y_n \geq \alpha)$.
1-c- Vérifier que pour tout $\beta > 1$, $P(\limsup A_n^\beta) = 0$, avec $A_n^\beta = \{Y_n \geq \beta \log(n)\}$.
2- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = Y_{2n}$.
2-a- Vérifier que les variables aléatoires réelles $Z_n$ sont indépendantes et de même loi de probabilité que l'on précisera.
2-b- Montrer que $P(\limsup B_n) = 1$, avec $B_n = \{Z_n \geq \log(2n)\}$.
2-c- Déduire que presque sûrement on a $\limsup \dfrac{Y_n}{\log n} = 1$.

**Exercice 3**

Un restaurant peut servir 75 repas. La pratique montre que 15% des clients ayant réservés ne viennent pas.
1- Le restaurateur accepte 90 réservations, quel est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients? plus 75?
2- Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité égale à 0, 95 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront.

**Exercice 4**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité, de densité:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}1_{[1,+\infty[}(x).$$

1- Est-ce que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geq 1}$ converge $P$ presque sûrement?

2- Est-ce que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geq 1}$ diverge $P$ presque sûrement?

Pour la suite, on considère les variables aléatoires $Z_k$ définis par:

$$Z_k = 1_{\{X_k<X_{k+1}\}}, \text{ pour } k = 1, ..., n.$$

3- Quelle est la loi de $Z_k$? les variables alétoires $Z_k$ sont elles indépendantes?

4- Calculer $E(Z_k Z_{k+1})$. En déduire $Var(\sum_{k=1}^{n} Z_k)$.

5- Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique et presque sûrement. Quelle est sa limite?

**Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information**

**A.U : 2021/2022**
**1ère Année**

# Examen de rattrapage
# Suite de V.A

Durée : 1H30
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

### Exercice 1

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,\theta]$, où $\theta$ est un paramètre réel strictement positif Pour $n \geq 1$, on pose $\widehat{\theta_n} = \max(X_1, ..., X_n)$.
1-Déterminer la fonction de répartition de $\widehat{\theta_n}$.
2- Montrer que $\widehat{\theta_n}$ converge en moyenne quadratique vers $\theta$, lorsque $n \to +\infty$.
3- Montrer que $\widehat{\theta_n}$ converge presque surement vers $\theta$.
*Ind: On pourra utiliser lemme de Borel Contelli.*
4- Montrer que $n(\widehat{\theta_n} - \theta)$ converge en loi lorsque $n \to +\infty$. Quelle est cette loi limite?
5- Soient $a$ et $b$ de nombres réels, tels que $1 \leq a < b$.
Calculer $P_\theta(\theta \in [a\widehat{\theta_n}, b\widehat{\theta_n}])$.

### Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$ de densité définie par:

$$f(x) = \lambda \exp(-x)\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x),$$

où $\theta$ est un paramètre réel strictement positif. On pose:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k + \alpha \qquad \text{et} \qquad Z_n = \min(X_1, ..., X_n).$$

1- Exprimer le paramètre $\lambda$ en fonction de $\theta$. Calculer l'espérance et la variance de $X$. Donner l'expression de la fonction de répartition $F$ de $X$.
2- Déterminer le paramètre $\alpha$ de sorte que $E(Y_n) = \theta$.
3- Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement et moyenne quadratique vers une limite que l'on déterminera.
4- Vérifier que la suite $(\sqrt{n}(Y_n - \theta))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi que l'on précisera.
5- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z_n$.
6- Calculer l'espérance et la variance de $Z_n$.
7- Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers $\theta$.
8- Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$converge presque surement vers $\theta$.
*Ind: On pourra utiliser lemme de Borel Contelli.*

Examen . 2021 - 2022.

Ex 1 :

$\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

$(X_n)$ de variable aleatoires independantes.

1) $F_{\hat{\theta}_n}(x) = P(\hat{\theta}_n \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P(X_1 < x, \dots, X_n < x)$

$= (P(X_1 \leq x))^n = (F_{X_1}(x))^n.$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0. \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 \leq x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$ ← loi uniforme.

2) $E((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$ (convergence quadratique).

$E((\hat{\theta}_n - \theta)^2) = E(\hat{\theta}_n^2) - 2\theta E(\hat{\theta}_n) + \theta^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ . (*)

$f_{\hat{\theta}_n}(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x).$

- $E(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta x n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta \xrightarrow[n \to \infty]{} \theta.$
- $E(\hat{\theta}_n^2) = \int_0^\theta \frac{n x^{n+1}}{\theta^n} dx = \frac{n \theta^2}{n+2} \longrightarrow \theta^2$

d'où le resultat (*)

3) d'après 2) $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{Prob.}} \theta \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0.$ $P(A_{n,\varepsilon}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$P(0 \leq X_k \leq \theta) = 1.$ $\forall k = 1, \dots, n.$ $A_{n,\varepsilon} = \{|\theta_n - \theta| > \varepsilon\}.$

$\Rightarrow |\theta_n - \theta| = \theta - \hat{\theta}_n$ P.ps (à montrer).

$P(A_{n,\varepsilon}) = P(\theta - \theta_n > \varepsilon) = P(\theta_n < \theta - \varepsilon) = P(\theta_n \leq \theta - \varepsilon) = F_{\theta_n}(\theta - \varepsilon).$

cas 1 : $\theta - \varepsilon \leq 0.$ $F_{\hat{\theta}_n}(\theta - \varepsilon) = 0.$

cas 2 : $\theta - \varepsilon > 0$ $F_{\hat{\theta}_n}(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$

geo

$\left.\right\}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{n,\varepsilon}) < +\infty.$ $\forall \varepsilon > 0.$

$\Rightarrow$ d'après le lemme de Borel - Cantelli

$\hat{\theta}_n \xrightarrow[P\,ps]{n \to +\infty} \theta$

4) $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(n(\hat{\theta}_n - \theta) \leq x) = P(\hat{\theta}_n \leq \theta + \frac{x}{n}) = F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \frac{x}{n})$.

cas 1 : $x \geq 0$ $\quad F_{Z_n}(x) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

cas 2 : $x < 0$

$\exists n_0(x) \mid \forall n \geq n_0. \quad 0 < \theta + \frac{x}{n} < \theta$.

$F_{Z_n}(x) = F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \frac{x}{n}) = \left(\frac{\theta + x/n}{\theta}\right)^n = \exp(n \log(1 + \frac{x}{\theta} \cdot \frac{1}{n}))$

$\log(1+u) \underset{0}{\sim} u \Rightarrow F_{Z_n}(x) \underset{\infty}{\sim} \exp(\frac{x}{\theta})$.

càd : $F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(\frac{x}{\theta})$.

par remarque :

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \exp(\frac{x}{\theta}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On pose : $T \xrightarrow{\text{suit}} \mathcal{E}(1/\theta)$ : loi exp de paramètre $(1/\theta)$.

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t/\theta} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(-T \leq z) = P(T \geq -z)$.

$= 1 - F_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ \exp(z/\theta) & \text{si } z < 0 \end{cases}$

càd : $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{loi}} -T$. où $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1/\theta)$

5) $1 \leq a < b$.

$P(\theta \in [a\hat{\theta}_n, b\hat{\theta}_n]) = P(a\hat{\theta}_n \leq \theta \leq b\hat{\theta}_n) = (*)$

$a\hat{\theta}_n \leq \theta \leq b\hat{\theta}_n \Leftrightarrow \frac{\theta}{b} \leq \hat{\theta}_n \leq \frac{\theta}{a}$.

$(*)$ : $P(\hat{\theta}_n \leq \theta/a) \setminus (\hat{\theta}_n < \frac{\theta}{b})$ $\quad (\hat{\theta}_n < \frac{\theta}{b}) \subset (\hat{\theta}_n \leq \frac{\theta}{a})$

$= P(\hat{\theta}_n \leq \frac{\theta}{a}) - P(\hat{\theta}_n \leq \frac{\theta}{b}) = F_{\hat{\theta}_n}(\frac{\theta}{a}) - F_{\hat{\theta}_n}(\frac{\theta}{b})$.

$= \left(\frac{\theta/a}{\theta}\right)^n - \left(\frac{\theta/b}{\theta}\right)^n = \frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}$ (2)

EX 3 :

$n = 75$ repas. $\quad X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le k-ème client se présente au Resto.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$P(X_k = 1) = 0{,}85$. $\quad X_k \rightsquigarrow B(p) \quad p = 0{,}85$.

$n = 90 \quad S_n = \sum X_k$ : nb des client qui se presente au restaurant.

$A = (S_n > 50)$. $\quad E(S_n) = np \quad Var(S_n) = np(1-p)$.

$np = 90 \times 0{,}85 = 76{,}5 \quad np(1-p) = 11{,}475$

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

$$A = (S_n > 50) = \left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n(p-1)p}} > \frac{50 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \left(Z_n > \frac{-26{,}5}{\sqrt{11{,}475}}\right)$$

$$P(A) = P(Z_n > -7{,}8) = 1 - P(Z_n < -7{,}8) = 1 - F_{Z_n}(-7{,}8)$$

$$\simeq 1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-7{,}8)$$

$B = (S_n < 75)$. $$= F_{\mathcal{N}(0,1)}(7{,}8) = 0{,}999.$$

$$P(B) = P\left(Z_n > \frac{75 - 76{,}5}{\sqrt{11{,}475}}\right) = P\left(Z_n \geq \frac{-1{,}5}{\sqrt{11{,}475}}\right)$$

$$= P(Z_n > -0{,}44).$$

$P(B) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(0{,}44) \simeq 0{,}67$

$P(S_n > 75) = 0{,}05$

$$P\left(Z_n > \frac{75 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0{,}05 \Rightarrow 1 - P\left(Z_n \leq \frac{75 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0{,}05$$

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{75 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0{,}95.$$

$$\frac{75 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = 1{,}65 \quad (1)$$

(1) $(75 - np)^2 = (1{,}65)^2 np(1-q)$

$np^2 - 150\,np + 75^2 = 0{,}35\,n$.

$0{,}72\,n^2 - 127{,}85\,n + 5625 = 0$.

$x_1 = 82 \quad x_2 = \cancel{86}$

## Ex 4 :

$(X_n)_{k\geq 1}$ va iid. $\hookrightarrow \frac{1}{x^2} 1\!\!1_{[1,+\infty[}$ $\qquad E(X_1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty.$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

$Z_k = 1\!\!1_{\{X_1 < X_2\}} \rightsquigarrow B(p).$ $\quad p.$

$E(1(X_1<X_2)) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\frac{1}{y^2} 1\!\!1(x<y)\, d\mathbb{R}^2(x,y).$

Th de Fubini $\Rightarrow = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\int_x^{+\infty}\frac{1}{y^2}dy\right)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[-\frac{1}{y}\right]_x^{+\infty} dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$

$= \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{2}$

autre manière :

$\Omega = (X_1<X_2)\cup(X_2<X_1)\cup(X_2=1).$ $\quad \not\Rightarrow \bar{X}_n$ div ps.

2 à 2 disjoints.

$P(X_2 = X_1) = 0.$

$1 = P(X_1<X_2) + P(X_2<X_1) \Rightarrow P(X_1<X_2) = 1/2.$

$Z_1 = 1\!\!1_{(X_1<X_2)}$ $\qquad Z_2 = 1\!\!1(X_2<X_3).$

$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2) = \underbrace{E(Z_1Z_2)}_{1/6} - \underbrace{E(Z_1)}_{1/2}\underbrace{E(Z_2)}_{1/2}. \quad \neq 0.$

$Z_1Z_2 = 1(X_1<X_2<X_3).$

$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) = \mathrm{cov}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k, \sum_{k=1}^{n} Z_k\right) = \sum_{k=1} \mathrm{cov}(Z_k, Z_k) = E(Z_k Z_{k+1})$

$= E\left(1(X_k<X_{k+1})1(X_{k+1}<X_{k+2})\right)$

$= E(1, \dots) = 1/6 = \frac{1}{4} + n(n-1).$

$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{4}.$

$= \frac{3n}{12} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{-n^2+44}{12}$

rattrapage : 2021 - 2022

Ex 2 :

1) $1 = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-x} dx \Leftrightarrow \lambda [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lambda e^{-\theta} = 1 \Rightarrow \lambda = e^{\theta}$.

$X_k = Z_k + \theta$ où $Z_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- $E(X) = E(Z) + \theta = 1 + \theta$.
- $Var(X) = Var(Z + \theta) = Var(Z) = 1$.
- $F_X(x) = P(X \leq x) = P(Z + \theta \leq x) = F_Z(x - \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ 1 - e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$

où $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$

2) methode : stat inf / $\leq$ V.a.

$E(H(X)) = U(\theta)$

u est injective.

$\hat{\theta}_n = U^{-1}(\frac{1}{n}\sum H(X_n))$

$E(X) = \theta + 1$.

$U(\theta) = \theta + 1$.

$U = \theta + 1 \Rightarrow \theta = U - 1$

$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum X_k - 1 = \bar{X}_n - 1$.

$Y_n = \frac{1}{n}\sum X_k + \alpha \qquad E(Y_n) = E(X_1) + \alpha = \theta \Leftrightarrow \theta + 1 + \alpha = \theta$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$.

3) $Y_n = \bar{X}_n - 1$

- loi fat de Grands nombres $\begin{cases} \bar{X}_n \xrightarrow{Pps} E(X_1) = \theta + 1 . \\ H(U) = U - 1 \text{ Continue.} \end{cases}$ $\begin{cases} H(\bar{X}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{Pps} H(E(X_1)) \\ \bar{Y}_n \xrightarrow{Pps} \theta + 1 - 1 = \theta \end{cases}$

- $E(Y_n) = \theta$

$E((Y_n - \theta)^2) = Var(Y_n) = Var(\bar{X}_n - 1) = Var(\bar{X}_n) = \frac{Var(X_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ en moyenne quadratique.

4) $H(u) = u - 1$.

$E(X_1^2) < +\infty$.

TLC : $\sqrt{n}(\bar{X}_n - E(X_1)) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} N(0, Var(X_1))$.

$N(0,1)$.

Grace à la $\delta$-methode

$\sqrt{n}(H(\bar{X}_n) - H(E(X_1))) \xrightarrow[n\to\infty]{loi} N(0, (H'(E(X_1)))^2 Var(X_1))$.

$\sqrt{n}(Y_n - \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} N(0,1)$ 3

5-

$Z_n = \min(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$

$F_{Z_n} = P(\min(X_1,\dots,X_n) \leq z) = 1 - P(\min(X_1,\dots,X_n) > z) = 1 - (P(X_i > z))^n$

$= 1 - (1 - F_{X_1}(z))^n.$

$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta. \\ 1 - e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$

$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0 & z < \theta \\ 1 - e^{-n(z-\theta)} & \text{si } z \geq \theta \end{cases}$

6- $f_{Z_n} = n e^{-n(z-\theta)} \mathbb{1}_{]\theta, +\infty[}(u)$

$E(Z_n) = \int_0^\infty z e^{-n(z-\theta)} n\, dz = \int_0^\infty \left(\frac{\theta}{n} + \theta\right) e^{-u} du = \frac{1}{n}\Gamma(2) + \theta\Gamma(1)$

$E(Z_n^2) = \int_0^{+\infty} z^2 e^{-n(z-\theta)} dz = \int_0^\infty \left(\frac{\theta}{n} + \theta\right)^2 e^{-u} du. \quad = \frac{1}{n} + \theta.$

$= \frac{1}{n^2}\Gamma(3) + \frac{2\theta}{n}\Gamma(2) + \theta^2\Gamma(1) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2.$

$Var(Z_n) = \frac{2}{n^2} + \frac{2\theta}{n} + \theta^2 + \left(\frac{1}{n} + \theta\right)^2 = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

7:

$E((Z_n - \theta)^2) = \underbrace{E(Z_n^2)}_{\theta^2} - \underbrace{2\theta E(Z_n)}_{-2\theta^2} + \theta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \theta \Rightarrow Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Proba}} \theta.$

8: soit $\varepsilon > 0$ :

$P(|Z_n - \theta| > \varepsilon) = P(Z_n - \theta > \varepsilon) = 1 - F_{Z_n}(\theta + \varepsilon) = e^{-n(\theta + \varepsilon - \theta)}$

$= (e^{-\varepsilon})^n$

Grâce au Lemme de Borel-Cantelli $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{pps} \theta$.
puisque $\sum_{n=1}^\infty (e^{-\varepsilon})^n < \infty.$