Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

Année Universitaire
2014-2015
Première Année

Tests Paramétriques
Examen de rattrapage : juin 2015

(aucun document autorisé)

Enseignants : H.Mallek et H.Rammeh

Durée : 1 heure 30

Exercice 1 *Le nombre d'accidents à un carrefour est modélisé par une variable de Poisson de moyenne* 2.5 *accidents par semaine. Les ingénieurs du trafic travaillant pour la ville où est situé le carrefour décident de dimunuer la vitesse sur les routes du carrefour afin, espèrent-ils, de réduire à* 2 *le nombre moyen d'accidents par semaine dans ce carrefour.*

1. *Déterminer les hypothèses* H_0 *et* H_1*. (justifier vos réponses).*
2. *Après avoir explicité la variable aléatoire associée au modèle ainsi que l'échantillon de taille* n *que l'on doit observer, écrire la vraisemblance.*
3. *Déterminer la statistique du test et construire un test UPP de niveau* α*.*
4. *Quelle est la loi de cette statistique sous* H_0 *et sous* H_1*.*
5. *On a relevé que durant la dernière année* 114 *accidents ont eu lieu à ce carrefour. Effectuer un test en utilisant une approximation normale de la statistique trouvée en 3 (*$\alpha = 0.05$*).*
6. *Donner la fonction puissance associée à ce test. Qu'en est-il de sa monotonie?*

Exercice 2 *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un* n*-échantillon d'une variable aléatoire* X *de densité*

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & si\ x \in]0,1[\\ 0 & sinon \end{cases}, \quad \theta \in \Theta =]1, +\infty[.$$

1. *Donner la loi de* $Y = -\ln X$*.*
2. *Déterminer* $\widehat{\theta}_n$*, l'estimateur du maximum de vraisemblance de* θ*.*
3. *On souhaite tester l'hypothèse nulle* $H_0 : 1 < \theta \leq 2$ *contre l'hypothèse alternative* $H_1 : \theta > 2$*. Déterminer la région critique du test le plus puissant de niveau* α*.*

4. *Préciser π, la fonction puissance de ce test et étudier sa monotonie en θ.*

5. *Déterminer l'erreur du seconde espèce en fonction de α.*

6. *Donner $\widehat{\alpha}$, la p-valeur associée au test.*

Exercice 3 *Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\theta})$, où le paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.On teste l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = 1$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta > 1$.*

1. *Vérifier que le rapport de vraisemblance est strictement monotone en une statistique que l'on déterminera.*

2. *Proposer un test uniformément plus puissant de niveau α.*

3. *Exprimer la fonction puissance de ce test en fonction de la loi de χ^2.*

Tests Paramétriques
Corrigé Examen de rattrapage : juin 2015

Corrigé Exercice 1 $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\theta)$

1. *$H_0 : \theta = 2.5$ contre $H_1 : \theta < 2.5$(ou $\theta = 2$).*

   En effet, il est plus préjudiciable de rejeter à tort H_0 car ;c'est une hypothèse qui ne nécessite aucun changement et donc aucune dépense.

2. *Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'accidents survenus au carrefour, lors d'une semaine donnée. Pour obtenir l'échantillon, on observe cette variable sur n semaines sélectionnées au hasard*

   $P_\theta[X = x] = \frac{\theta^x}{x!}\exp(-\theta)\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x) = \exp(x\ln\theta - \theta - \ln x!)\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$

   $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \exp\left(\ln\theta\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i!\right)\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$

3. *Ecrivons le rapport de vraisemblance. Soient θ_1 et θ_2 tels que $0 < \theta_1 < \theta_2$.*

   $\frac{\mathcal{L}(\underline{x}, \theta_2)}{\mathcal{L}(\underline{x}, \theta_1)} = \exp\left((\ln\theta_2 - \ln\theta_1)\sum_{i=1}^{n} x_i - n(\theta_2 - \theta_1)\right)$

   Le rapport est strictement croissant en $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. $T(\underline{x})$ permet donc de construire un test UPP.

   $$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i > c \\ 1 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i < c \\ \gamma \text{ si } \sum_{i=1}^{n} x_i = c \end{cases} \qquad \text{avec } E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha.$$

   $$\phi(\underline{x}) = \mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i < c\right\}} + \gamma\mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_{i=c}\right\}} \qquad \text{avec } E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha.$$

4. *$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sous $H_0, \theta = \theta_0 = 2.5$ et $T(\underline{X}) \rightsquigarrow \mathcal{P}(2.5 * n)$.*

   Sous $H_1, \theta < 2.5$ et $T(\underline{X}) \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\theta)$.

5. *Durée d'observation : une année.*

   $n = 52. \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 114 \qquad \alpha = 0.05.$

Comme n est assez grand, on approxime la loi de Poisson par la loi nomale de mêmes paramètres.

$E_{\theta_0}\left[\phi\left(\underline{X}\right)\right]=\alpha \Longleftrightarrow P_{\theta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i<c\right]+\gamma P_{\theta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i=c\right]=\alpha.$

La loi étant continue, on prend $\gamma=0$.

$$P_{\theta_0}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i<c\right]=\alpha \Longleftrightarrow P_{\theta_0}\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0}}<\frac{c-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0}}\right]=\alpha.$$

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{c-n\theta_0}{\sqrt{n\theta_0}}\right)=\alpha \Longleftrightarrow c=n\theta_0+\sqrt{n\theta_0}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\alpha\right)$$

D'où $c=52*2.5-\sqrt{52*2.5}*1.645=111.24$.

On observe $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=114>c$. Donc on décide H_0.

6. $\pi:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow[0\ ;\ 1]\qquad \pi\left(\theta\right)=\mathbb{E}_\theta\left[\phi\left(\mathbb{X}\right)\right]=\mathbb{P}_\theta\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<111.24\right]$

   $$\pi\left(\theta\right)=F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{111.24-52\theta}{\sqrt{52\theta}}\right).$$

   D'après le théorème de Neyman Pearson, π est nécessairement décroissante.

Corrigé Exercice 2

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & si\ x\in]0,1[\\ 0 & sinon\end{cases},\ \theta\in\Theta=]1,+\infty[.$$

1. $f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}\left(x\right)=\exp\left(\theta\ln x+\ln\theta-\ln x\right)\mathbb{1}_{]0,1[}\left(x\right)$

   $Y=-\ln X.$

   $F_Y\left(y\right)=P_\theta\left[Y<y\right]=P_\theta\left[-\ln X<y\right]=P_\theta\left[X>\exp\left(-y\right)\right]=1-P_\theta\left[X<\exp\left(-y\right)\right]$

   $F_Y\left(y\right)=1-F_X\left[\exp\left(-y\right)\right]$

   $f_Y\left(y\right)=\exp\left(-y\right)\cdot f_X\left[\exp\left(-y\right)\right]=\exp\left(-y\right)\exp\left(-\theta y+\ln\theta+y\right)\mathbb{1}_{]0,1[}\left(\exp\left(-y\right)\right)$

   $f_Y\left(y\right)=\exp\left(\ln\theta-\theta y\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\left(y\right).$

   D'où $Y=-\ln X\rightsquigarrow\mathcal{E}\left(\theta\right)$.

2. $\mathcal{L}\left(\underline{x},\theta\right)=\exp\left(\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i+n\ln\theta-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\mathbb{1}_{]0,1[^n}\left(\underline{x}\right)$

   Nous avons une famille exponentielle à un paramètre sous forme canonique. La statistique exhaustive est $T\left(\underline{X}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$. $d:\theta\longmapsto n\ln\theta$ et $\Theta=]1,+\infty[$ est un ouvert. Alors l'estimateur du maximum de vraisemblance est solution de l'équation $E_\theta\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=-d'\left(\theta\right)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = -d'(\theta) = -\frac{n}{\theta} \Longleftrightarrow \theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

D'où $\widehat{\theta}_n = -\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

3. $H_0 : 1 < \theta \leq 2$ *contre* $H_1 : \theta > 2 \qquad \theta_0 = 2$.

   S'agissant d'une famille exponentielle où c est strictement croissante et $T(\underline{X})$ *n'est pas dégénérée. Alors le test* ϕ *qui suit est UPP.*

$$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \ln x_i < a \\ 1 \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \ln x_i > a \\ \gamma \text{ si } \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = a \end{cases} \qquad \text{avec } E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha.$$

$$\phi(\underline{x}) = \mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i > a\right\}} \qquad \text{avec } E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha.$$

   On prend $\gamma = 0$ *car la loi est continue.*

   $E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha \Longleftrightarrow P_{\theta_0}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > a\right] = \alpha \qquad$ (a *est nécessairement négatif car* $\sum_{i=1}^{n} \ln X_i < 0$).

   On a $Y = -\ln X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta)$ *et les* X_i *sont i.i.d. Donc* $-\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \rightsquigarrow \gamma(n, \theta)$.

   D'où $-2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \rightsquigarrow \chi^2_{2n}$.

$$P_{\theta_0}\left[\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > a\right] = \alpha \Longleftrightarrow P_{\theta_0}\left[-2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \ln X_i < -2\theta_0 a\right] = \alpha$$

$$\Longleftrightarrow F_{\chi^2_{2n}}(-2\theta_0 a) = \alpha \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2\theta_0} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha) = -\frac{1}{4} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha).$$

$$\phi(\underline{x}) = \mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > -\frac{1}{4} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)\right\}}$$

   Ou encore $R = \left\{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > -\frac{1}{4} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)\right\}$.

4. $\pi(\theta) = E_\theta[\phi(\underline{X})] = P_\theta\left[\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > -\frac{1}{4} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)\right]$

$$\pi(\theta) = P_\theta\left[-2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i < \frac{\theta}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)\right] = F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{\theta}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)\right).$$

   π *est strictement croissante en* θ.

5. *Pour* $\theta > 2$, *l'erreur de 2nde espèce n'est rien d'autre que* $\beta = 1 - \pi(\theta)$.

   $\beta = 1 - F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{\theta}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)\right)$.

6. $\widehat{\alpha} = \sup\limits_{1<\theta\leq 2} P_\theta\left[\sum\limits_{i=1}^n \ln X_i > \sum\limits_{i=1}^n \ln x_i\right] = \sup\limits_{1<\theta\leq 2} P_\theta\left[-2\theta\sum\limits_{i=1}^n \ln X_i < -2\theta\sum\limits_{i=1}^n \ln x_i\right]$

   $\widehat{\alpha} = \sup\limits_{1<\theta\leq 2}\left(F_{\chi^2_{2n}}\left(-2\theta\sum\limits_{i=1}^n \ln x_i\right)\right)$

   $\widehat{\alpha} = F_{\chi^2_{2n}}\left(-4\sum\limits_{i=1}^n \ln x_i\right)$

Corrigé Exercice 3 $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{\theta})$ $\theta \in \mathbb{R}_+^*$

1. $H_0 : \theta = 1$ *contre* $H_1 : \theta > 1$ $\quad \theta_0 = 1$.

   $f(x,\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta}{2}x^2\right) = \exp\left(-\frac{\theta}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln\theta - \frac{1}{2}\ln 2\pi\right)$

   $\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 + \frac{n}{2}\ln\theta - \frac{n}{2}\ln 2\pi\right)$

   Soient θ_1 *et* θ_2 *tels que* $\theta_2 > \theta_1$.

   $\frac{\mathcal{L}(\underline{x},\theta_2)}{\mathcal{L}(\underline{x},\theta_1)} = \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 + \frac{n}{2}(\ln\theta_2 - \ln\theta_1)\right)$.

   Ce rapport est strictement décroissant en $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$.

2. *On a*

   $$\phi(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \ si \ \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 > c \\ 1 \ si \ \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < c \\ \gamma \ si \ \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = c \end{cases} \qquad avec \ E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha.$$

   $\phi(\underline{x}) = \mathbb{1}_{\left\{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < c\right\}} \qquad avec \ E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha.$

   $E_{\theta_0}[\phi(\underline{X})] = \alpha \Longleftrightarrow P_{\theta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < c\right] = \alpha$

   $\Longleftrightarrow P_{\theta_0}\left[\theta_0\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < \theta_0 c\right] = \alpha$

   $c = \frac{1}{\theta_0}F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha) = F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha)$. *On rejettera* H_0 *avec un risque inférieur à* α *si* $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 < F^{-1}_{\chi^2_n}(\alpha)$.

3. $\pi : [1\ ;\ +\infty[\qquad \pi(\theta) = E_\theta\left[\phi\left(\underline{x}\right)\right] = E_\theta\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < F_{\chi_n^2}^{-1}(\alpha)\right]$

$$\pi(\theta) = E_\theta\left[\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \theta F_{\chi_n^2}^{-1}(\alpha)\right] = F_{\chi_n^2}\left(\theta F_{\chi_n^2}^{-1}(\alpha)\right).$$