Calul des variations

Exercice 1
Trouver les extremums des problèmes suivants et préciser leurs natures :

— $\displaystyle\int_1^2 \frac{y'^2(x)}{x^2}dx$ avec $y(1) = 0$ et $y(2) = 1$.

— $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2(x))dx$ avec $y(x_1) = 0$ et $y(x_2) = 1$.

— $\displaystyle\int_0^1 (y'^2(x) + 2xy(x))dx$ avec $y(0) = y(1) = 8$.

— $\displaystyle\int_{-1}^1 y^2(x)(2x - y'(x))^2dx$ avec $y(-1) = 0$ et $y(1) = 1$.

— $\displaystyle\int_0^1 (y'(x) - 1)^2dx$ avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$.

Exercice 2
Soit la fonctionnelle

$$J[y] = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

1. Donner la forme générale des extrémales de J.
2. Déterminer la nature de ces extrémales.

Exercice 3
Soit la fonctionnelle

$$J[y] = \int_2^3 y^2(1 - y')^2dx, \quad y(2) = 1,\ y(3) = 0.$$

Vérifier que la solution de l'équation de Euler-Lagrange est sous la forme $y(x) = \sqrt{(x - k)^2 - C^2}$ et déterminer les constantes k et C.

Exercice 4
On définit la fonctionnelle suivante :

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2xy)dx,$$

sur

$$S = \{y \in \mathbb{C}^1([0, 1])|y(0) = 0;\ y(1) = 0\}.$$

— Déterminer er résoudre dans ce cas l'équation d'Euler Lagrange.
— Déterminer la nature de l'extremum trouvé.