① C. proc stoc

Chp3 Chaînes de Markov

+ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilité
+ E = espace d'états = ensemble au plus dénombrable
+ $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique à valeur dans E ($X_n : \Omega \to E$ v.a)

I] Définitions et propriétés élémentaires.

Déf Sous les notations ci-dessus, on dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur E, si :

$$P(X_{n+1}=y / X_0 = x_0, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1}=y / X_n = x)$$

$\forall x_0, \dots, x_{n+1}, x, y \in E$.

Si de plus $P(X_{n+1}=y / X_n = x) = P(X_1 = y / X_0 = x)$ $\forall x, y \in E$.
alors on dit que la chaine $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène.

Dans la suite de ce chapitre, on utilise seulement les chaînes de Markov homogène.

Posons $Q(x,y) = P(X_1 = y / X_0 = x)$ $\forall x, y \in E$.

Q est une application de $E\times E \longrightarrow [0,1]$
$(x,y) \longmapsto Q(x,y)$.

tq :
- $0 \leq Q(x,y) \leq 1$; $\forall x, y \in E$.
- $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$; $\forall x \in E$.

En effet :

$$\sum_{y\in E} Q(x,y) = \sum_{y\in E} P(X_1=y \,/\, X_0=x) = P\Big(\bigcup_{y\in E}(X_1=y) \,/\, X_0=x\Big) = 1 .$$

$$(X_1=y) = X_1^{-1}(\{y\})$$

$$\bigcup_{y\in E}(X_1=y) = X^{-1}(E) = \Omega$$

__Déf__

Soit Q une application de $E\times E$ dans $[0,1]$, tq

* $0 \leq Q_1(x,y) \leq 1 \quad \forall\, x,y\in E$.
* $\sum_{y\in E} Q_1(x,y) = 1 \;; \quad \forall\, x\in E$.

Q_1 s'appelle | matrice de transition sur E.
| noyau

$|E| = m$

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \cdots\; x_j & \cdots & x_m \end{array} \\
\begin{pmatrix} Q(x_1,x_1) & \text{---} & \text{---} \\ Q(x_2,x_1) & \text{---} & \text{---} \\ & & \\ \boxed{\text{---} \quad Q(x_i,x_j) \quad \text{---}} & & \\ & \text{---} & \\ & \text{---} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1. \\ \\ \\ \end{array}$$

② C. procstoc

Propriété Soient Q_1 et Q_2 deux matrices de transition sur E.

Posons : $$Q(x,y) = \sum_{z\in E} Q_1(x,z)Q_2(z,y) \ ; \ \forall x,y \in E.$$

Q est une matrice de transition sur E ($Q \equiv Q_1 . Q_2$).

Preuve

- $Q(x,y) \geq 0 \ ; \ \forall x,y \in E$ (évident).
- $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$?

$$\sum_{y\in E} Q(x,y) = \sum_{y\in E}\sum_{z\in E} Q_1(x,z)Q(z,y)$$
$$= \sum_{z\in E} Q_1(x,z)\underbrace{\left(\sum_{y\in E} Q_2(z,y)\right)}_{=1 \text{ car } Q_2 \text{ matrice de transition}} = 1$$ car Q_1 matrice de transition

Proposition : "Equation de chapman - Kolmogorov".

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de loi initiale μ et de matrice de transition Q (c.à.d : $\mu(x) = P(X_0 = x), \forall x \in E$ & $Q(x,y) = P(X_1 = y / X_0 = x) \ \forall x,y \in E$).

$$P(X_0 = x_0 ; X_1 = x_1 ; \ldots ; X_{n-1} = x_{n-1} ; X_n = x_n)$$
$$= \mu(x_0)\, Q(x_0,x_1)\, Q(x_1,x_2) \times \ldots \times Q(x_{n-1},x_n) ; \ \forall x_0, \ldots, x_n \in E.$$

On dit que la loi de chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur E est complètement caractérisée par μ et Q.

Preuve

$$P(\overbrace{X_0 = x_0}^{A_0}, \ldots, \overbrace{X_n = x_n}^{A_n})$$

$$= P(A_0)\, P(A_1 / A_0)\, P(A_2 / A_0 \cap A_1) \times \ldots \times P(A_n / A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

$$= \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \times \ldots \times Q(x_{n-1}, x_n).$$

$$\boxed{\begin{aligned} & P(X_2 = x_2 / X_0 = x_0 ; X_1 = x_1) \\ & = P(X_2 = x_2 / X_1 = x_1) \\ & = P(X_1 = x_1 / X_0 = x_0). \end{aligned}}$$

Exemples et applications

Systèmes dynamiques ou bien récurrences aléatoires

- E ensemble au plus dénombrable.
- F = ensemble quelconque.
- H une application mesurable de $E \times F$ dans E.
- X_0 une v.a à valeurs dans E, de loi μ.

$(P_{X_0}(x) = P(X_0 = x) = \mu(x) \; ; \; \forall x \in E)$.

- $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a i.i.d à valeurs dans F, de loi ν

et $X_0 \perp (Y_n)_{n \geq 1}$.

Posons $X_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1})$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov sur E.

③ C. proc stoc

En effet

$$\left.\begin{array}{l} X_0 = H(X_0, Y_1) \\ X_1 = H(X_1, Y_2) \\ \vdots \\ X_n = H(X_{n-1}, Y_n) \end{array}\right| \quad X_n \text{ s'exprime en fct° de } X_0, Y_1, \ldots, Y_n$$

$$P(X_{n+1} = y / X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)$$

$$= P(\underbrace{H(X_n, Y_{n+1}) = y}_{A} / \underbrace{X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x}_{B}).$$

$$= P(H(x, Y_{n+1}) = y / X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)$$

$$= P(H(x, Y_{n+1}) = y) = P(H(x, Y_1) = y) = Q(x, y).$$

$Y_{n+1} \perp (X_0, Y_1, \ldots, Y_n)$.

dém

$$P(X_{n+1} = y / X_n = x) = P(H(X_n, Y_{n+1}) = y / X_n = x)$$

$$= P(H(x, Y_{n+1}) = y)$$

$$= P(H(x, Y_1) = y)$$

$$= Q(x, y)$$

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$:

* $X_0 = 0$; $(Y_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid / $P(Y_n = 1) = p$

$P(Y_n = -1) = 1-p$.

$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$; $E = \mathbb{Z}$ $F = \{-1, 1\}$.

$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1})$.

$\hookrightarrow H : E \times F \longrightarrow E$

$(x, z) \longmapsto x + z$.

$(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, car $(X_n)_{n\geq 0}$ est une récurrence aléatoire.

↓

si de plus F est au plus dénombrable.

$Q(x, y) = P(H(x, Y_1) = y) = P\left(\bigcup_{z\in F / H(x,z) = y} (Y_1 = z)\right)$

$\bigcup_{z\in F / H(x,z) = y} \{Y_1 = z\} = \{H(x, Y_1) = y\}$,

$= \sum_{z\in F / H(x,z) = y} \underbrace{P(Y_1 = z)}_{\nu(z)} = \sum_{z\in F / H(x,z) = y} \nu(z)$

$Q(x,y) = P(H(x, Y_1) = y) = \sum_{z\in F / \underbrace{H(x,z) = y}_{x + z = y}} \nu(z) = \begin{cases} 1-p & \text{si } y = x-1 \\ p & \text{si } y = x+1 \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$

Graphe de la chaîne