Exercice 1 : Méthode d'Estimateur des Moments Caractéristiques de l'estimateur.

- Soit une v.a X de densité de proba $f(x,\theta) = \frac{e^{-|x-\theta|}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

et soit un échantillon aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ pour la v.a X.

1) Donner l'Estimateur par la méthode des moments de θ ; noté $\hat{\theta}_{mn}$

2) $\hat{\theta}_{mn}$ est-il sans biais et convergent ?

3) Soit un autre estimateur de θ définie par $\hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n^2}$

   a) L'estimateur $\hat{\theta}_2$ est-il sans biais et convergent ?

   b) Lequel des deux Estimateurs $\hat{\theta}_{mn}$ et $\hat{\theta}_2$, est le plus efficace ? (Justifier votre réponse).

Exercice 2 : Méthode de Maximum de Vraisemblence Caractéristique de l'estimateur.

- Soit $(X_1, \dots, X_n)$ échantillon aléatoire d'une variable aléatoire X, définie par sa densité de proba

$$\begin{cases} f(x,\theta) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{\theta} \\ \forall x = 1, \dots, \infty \\ \text{où} \\ E(x) = \theta \\ \text{et} \\ V(x) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\theta^2. \end{cases}$$

1) Estimateur MVS pour le Coef θ ?

2) $\hat{\theta}_{MVS}$ est-il efficace ?

3) Quel est l'estimateur MVS du paramètre $\lambda = \frac{n}{\theta}$?

Exercice 3 : Soit X une v.a qui suit la loi de Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$ de paramètre inconnue θ.

1) Via un Echantillon aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de la va X,

   a) Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_{MVS}$.

b) $\hat{\theta}_{MVS}$ est-il sans biais, convergent et efficace ?

c) Estimateur de θ pour la Méthode des Moments ?

2) Soient deux échantillons aléatoires, indépendantes de la va X de tailles resp n_1 et n_2 où $n_1 + n_2 = n$.

Et soient les estimateurs de coef θ définies par :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i = \overline{X}_1 \quad ; \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_i = \overline{X}_2$$

$$\theta_3 = \frac{n_1 \overline{X}_1 + n_2 \overline{X}_2}{n_1 + n_2}.$$

Lequel de ces 3 estimateurs est le meilleur ?

Justifier votre réponse.

Exercice 4 :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ v.a indépendantes et de même loi (i.i.d) de moments existent $E(X_i) = m$ et $V(X_i) = \sigma^2$

On pose $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$; $S'^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \overline{X})^2$

et $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \overline{X})^2$

1) Mq $\overline{X}$ converge en Proba et en Loi vers des Limites qu'on définira

2) Mq $S'^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - m)^2 - (\overline{X} - m)^2$

En déduire la valeur de $E(S^2)$

3) Montrer que $S'^2 \longrightarrow \sigma^2$ en proba

En déduire que $S^2 \longrightarrow \sigma^2$ en proba.

Exercice 5 :

Une enquête menée au près de 100 étudiants indique que 51% de ceux interrogés souhaitent qu'un cours d'info soit enseigné durant les 4 années d'études.

1) Construire un intervalle de confiance de niveau $(1-\alpha)\% = 95\%$ pour la proportion p des étudiants favorables à ce cours.

. $\hat{m}$ quest pour $n = 1000$.

2) Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour que l'intervalle ~~de~~ soit de longueur inférieure à 4% ?

Exercice 6 :

Soit une va X définie par densité de proba

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 2\theta^2 x\, e^{-\theta^2 x^2}, & si\ x > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

où θ param inconnu

1) Pour un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a X, chercher l'estimateur MVS de θ.

2) Mq $E(X^2) = \frac{N}{\theta^2}$

3) L'estimateur $\hat{\theta}_{MVS}$ trouvé,

a) est-il convergent ?

b) est-il sans biais ?

Remarques - Notions de Cours :

Soit une va X définie sur l'ech $(X_1, \dots, X_n)$

1) Déf :

* $I(X)$ est un Intervalle aléatoire si l'une au moins de ces bornes est une variable aléatoire.

* soit $X \hookrightarrow \mathcal{L} : f(x, \theta)$ où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$

on appelle Intervalle de Confiance pour le paramètre θ, un inte aléatoire $I(X)$ qui contient la vraie valeur du paramètre θ avec une $P(I(X) \ni \theta) \geqslant 1-\alpha$

avec $(1-\alpha)\%$: niveau de confiance qu'on se donne à l'IC.

et $\alpha\%$ = (seuil de signification)

= Proba pour que l'intervalle $I(X)$ ne contient pas θ la vraie valeur du paramètre θ.

* Fonction pivotale pour le paramètre θ est une fonction Z $Z(X_1, \dots, X_n, \theta)$ loi de proba est bien indépendante du coef inconnu θ. (i.e la loi reste fixe $\forall \theta$)

* Construction d'1 IC passe par 4 étapes :

  1- Définir un estimateur ponctuel pour le coef θ, noté $\hat{\theta}$.

  2- De cet estimateur ponctuel, on lui définit sa fct pivotale de loi bien indépendantes du/des coeff(s) inconnu(s) θ ; notée $g(\hat{\theta}) = Z(X_1, \dots, X_n, \theta)$

  3- Les bornes z_1 et z_2 / $P(z_1 < Z(x_i, \theta) < z_2) = 1-\alpha$

  et avec un système d'eq, on calcule z_1 et z_2 à partir des tables stat qui fournissent la loi de Z.

  4- Résoudre le sys d'inégalité $z_1 < Z(X_1, \dots, X_n, \theta) < z_2$ par % à $\theta \longrightarrow$ AN

Exercice 7 :

On procède à une série de 9 mesures avec un même appareil. On suppose que le résultat d'une mesure est une v.a.

$X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$.

Les valeurs observés des 9 mesures sont (15,2 - 15,8 - 14,7 - 15,3 - 15,9 - 15,1 - 15,6 - 14,9 - 14,9)

1) On suppose σ^2 connue et $\sigma^2 = 0,25$.

a) Construire un IC(.) I_1 à $1-\alpha = 90\%$ pour m ;

b) Construire un IC(.) I_2 à 95 % pour m aussi.

Comparer I_1 et I_2.

c) Comment peut on obtenir un $IC_{(m)}^{(1-\alpha)\%}$ de même longueur que I_1 et de même niveau que I_2 ?

2) Soit σ^2 inconnue.

a) Construire un $IC_{(m)}^{(1-\alpha)\%}$ à 90% de confiance.

b) Construire $IC_{(\sigma^2)}^{(1-\alpha)\%}$ à 95% de confiance pour les 3 cas suivants :

(i) Unilatéral à droite.

(ii) Bilatéral dissymétrique (où $\alpha_1 = 0,03$ et $\alpha_2 = 0,02$)

(iii) Bilatéral symétrique (où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ avec $\alpha = 5\%$ seuil de signification standard)