$\hat{\theta}$ est un estimateur sans biais de θ ssi $E_\theta[\hat{\theta}] = \theta$

X d'espérance μ et de variance σ^2

$\bar{X}_n$ est un estimateur de μ.

$E_\theta[\bar{X}_n] = E_\theta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \mu$ ($\bar{X}_n$ sans biais de μ)

S_n^2 estimateur de σ^2

$$E_\theta[S_n^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i - \bar{X}_n]^2$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2 \text{ König}$$

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E(X_i - \mu)^2}_{\sigma^2} - \underbrace{E(\bar{X}_n - \mu)^2}_{Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

S_n^2 est un estimateur biaisé de σ^2

$$\frac{n}{n-1}S_n^2 = \underbrace{S_{n-1}^2}_{\text{notation (variance corrigée)}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \text{ estime sans biais } \sigma^2$$

* $\hat{\theta}$ estimateur biaisé de θ

$b(\theta) = E_\theta[\hat{\theta}] - \theta$ le biais
- $>0 \Rightarrow \hat{\theta}$ estime θ
- $<0 \Rightarrow \hat{\theta}$ sous estime θ

* $\hat{\theta}$ sans biais de θ, g mesurable, $g(\hat{\theta})$ n'est pas nécessairement sans biais de $g(\theta)$

X d'espérance μ et de variance σ^2

$\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de μ.

$g : x \mapsto x^2$

$E_\theta(\bar{X}_n) = \mu$

$$E_\theta[g(\bar{X}_n)] = E(\bar{X}_n^2) = var(\bar{X}_n) + (E[\bar{X}_n])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \neq \mu^2 = g(E(\bar{X}_n))$$

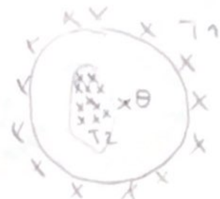
$\hat{\theta}$
- sans biais: $\hat{\theta}$ est évalué via $Var(\hat{\theta}) = E_\theta[\hat{\theta} - \underbrace{\theta}_{E(\hat{\theta})}]^2$
- biaisé: $\hat{\theta}$ est évalué via l'erreur quadratique $Q(\hat{\theta}) = E_\theta[\hat{\theta} - \underbrace{\theta}_{\neq E(\hat{\theta})}]^2$

$$Q(\hat{\theta}) = \underbrace{E_\theta[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2}_{\text{variance de } \hat{\theta}} + (\underbrace{E(\hat{\theta}) - \theta}_{\text{biais}})^2$$

- T_1 et T_2 sans biais => on choisit celui qui a la variance la plus petite
- T_1 et T_2 biaisés => on choisit celui qui a l'erreur quadratique la plus petite

- T_1 sans biais
- T_2 biaisé

} $EQM(T_2) < Var(T_1)$



$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \; ; \; E(T_1) = E_\theta[X_i-\mu]^2 = \sigma^2$$

$$T_2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X}_n)^2 \; ; \; E_\theta[T_2] = \sigma^2$$

$$* \; Var(T_1) = \frac{1}{n^2} var\left(\left(\sum X_i-\mu\right)^2\right) = \frac{\sigma^4}{n^2} Var\Big(\underbrace{\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\chi^2_n}\Big) = \frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}$$

$$* \; var(T_2) = \frac{1}{(n-1)^2} var\left(\sum(X_i-\bar{X})^2\right)$$

$$= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} var\Big(\underbrace{\sum\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2}_{\chi^2_{n-1}}\Big) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$Var(T_1) < Var(T_2)$ => T_1 plus efficace que T_2.

$* \; H_1$: $\forall x \in E$, $f(x,\theta) > 0$
$\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$

$* \; H_2$: $\nabla_\theta \ln(f(x,\theta))$ existe => on peut dériver $\ln(f(x,\theta))$ par rapport à tous les θ_i

$* \; H_3$: on peut dériver au moins 2 fois par rapport à θ sous le signe $\int$, $\ln f(x,\theta)$

$$I(\theta) = E\left[(\nabla_\theta \ln f(X,\theta))(\nabla_\theta \ln f(X,\theta))'\right]$$

$$I_{ij}(\theta) = \left[\frac{\partial \ln}{\partial\theta_i} f(X,\theta) \cdot \frac{\partial \ln}{\partial\theta_j} f(X,\theta)\right]$$

$$K=1 \rightarrow I[\theta] = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2$$

$X \to b(\theta) \quad \theta \in]0,1[$

$f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \, \mathbb{1}(x)$

$\ln f(x,\theta) = x \ln \theta + 1-x \ln(1-\theta)$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta} = \frac{x-\theta x - \theta + \theta x}{\theta(1-\theta)} = \frac{x-\theta}{\theta(1-\theta)}$$

$$I(\theta) = E\left[\frac{X-\theta}{\theta(1-\theta)}\right]^2 = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} \operatorname{var}(X) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

H_1, H_2, H_3 valides, $I(\theta)$ existe

$$I(\theta) = \operatorname{var}[\nabla_\theta \ln f(x,\theta)]$$

$k=1$, $I(\theta) = \operatorname{var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta)\right]$

Preuve : ($k=1$, cas continu)

$$\operatorname{var}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta)\right] = \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta)\right]^2}_{I(\theta)} - \left(E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta)\right]\right)^2$$

$$E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta)\right] = \int_{X(\Omega)} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta) \times f(x,\theta)\, dx = \int_{X(\Omega)} \frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\, dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \int_{X(\Omega)} f(x,\theta)\, dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x,\theta) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)}{f(x,\theta)}$$

* H_1, H_2, H_3 valides $\Rightarrow$ $I(\theta)$ si elle existe a pour terme générale

$$I_{ij}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln f(x,\theta)\right]$$

$k=1$; $I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x,\theta)\right]$

Exemples: * $X \sim b(\theta)$, $\theta \in]0,1[$

$$f(x,\theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

$$\ln f(x,\theta) = x \ln\theta + (1-x) \ln(1-\theta) \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}$$

$$I(\theta) = -E\left[\frac{-x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}\right] = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $\theta = (\mu, \sigma^2)$

$$f(x,\theta) = \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln 2\pi\right]$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}(x-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\mu^2} = \frac{-1}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\mu\,\partial\sigma^2} = \frac{-1}{\sigma^4}(x-\mu)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\sigma^4} = -\frac{1}{\sigma^6}(x-\mu) + \frac{1}{2\sigma^4}$$

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}(X-\mu) \\ 0 & -\frac{1}{\sigma^6}(X-\mu)^2 + \frac{1}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \underbrace{\frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^4}}_{\frac{1}{2\sigma^4}} \end{bmatrix}$$

H_1 H_2 H_3 valides

X de loi P_θ
Y de loi Q_θ
X et Y indépendants

$I_{(X,Y)}(\theta) = I_X(\theta) + I_Y(\theta)$

$X \sim \mathcal{P}(\theta) \quad \theta > 0$

$f(x,\theta) = e^{-\theta} \dfrac{\theta^x}{x!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$

$Y \sim \mathcal{P}(2\theta) \qquad f(y,\theta) = e^{-2\theta} \dfrac{\theta^y 2^y}{y!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y)$

$\ln f(x,\theta) = -\theta + x \ln\theta - \ln x! \quad \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$

$\cancel{\ln f(x,\theta) = -\theta + x\ln\theta}$

$\dfrac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2} = -\dfrac{x}{\theta^2} \qquad I_X(\theta) = -E\left[\dfrac{-X}{\theta^2}\right] = \dfrac{1}{\theta}$

$\ln f(y,\theta) = -2\theta + y \ln\theta + y \ln 2 - \ln y! \quad \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(y)$

$\dfrac{\partial^2 \ln f(y,\theta)}{\partial\theta^2} = \dfrac{-y}{\theta^2}$

$I_Y(\theta) = -E\left[\dfrac{-1}{\theta^2}\right] = \dfrac{2}{\theta} = 2 I_X(\theta)$

$I_{(X,Y)}(\theta) = \dfrac{3}{\theta}$

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$

$\Rightarrow X_i$ iid

$I_{\underline{X}}(\theta) = n\, I(\theta)$

$k=1$

$I_{\underline{X}}(\theta) = -E\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ell(X,\theta)\right] = I_n(\theta)$

a $X \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$

$f(x,\theta) = \dfrac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}}$$

$$\ell(x,\theta) = -n\ln\theta \; \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}}$$

H_1, H_2, H_3 valides

$I(\theta)$ existe

$T(\underline{X})$

$$I_T(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_T(t,\theta)\right]$$

* H_1, H_2, H_3 $I(\theta)$

$T(\underline{X})$ statistique exhaustive $\Rightarrow I_T(\theta) = nI(\theta)$
$= I_n(\theta)$

$T(\underline{x})$ libre $\Rightarrow I_T(\theta) = 0$.

$X \sim b(\theta)$ $\quad \theta \in]0,1[$ $\quad I(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$

$$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$T(\underline{X}) \sim B(n,\theta)$

$$f_T(x,\theta) = C_n^x \theta^{x_i} (1-\theta)^{n-x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

$$\ln f_T(x,\theta) = x\ln\theta + (n-x)\ln(1-\theta) + \ln C_n^x \quad \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_T(x,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-x}{\theta^2} - \frac{n-x}{(1-\theta)^2}$$

$$I_T(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_T(x,\theta)\right]$$

$$= -\left[-\frac{n}{\theta} - \frac{n}{1-\theta}\right] = \frac{n}{\theta(1-\theta)} = nI(\theta) = I_n(\theta)$$

* H_1, H_2, H_3 valides, $I(\theta)$ dp

$T(\underline{X})$ estimateur sans biais de $\psi(\theta)$

$\Gamma(\theta)$ = matrice de covariance de $T(\underline{X})$

$$\Gamma(\theta) \geq \underbrace{\nabla_\theta' \psi(\theta) \, I_n^{-1}(\theta) \, \nabla_\theta \psi(\theta)}_{BCR}$$

$\Gamma(\theta) - BCR(\psi(\theta))$ au moins s.d.p

* H_1, H_2, H_3, $I(\theta)$ d.p Cramer Rao

$k = 1$

$$Var(T(\underline{X})) \geq \frac{(\psi'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$$

$\psi(\theta) = E_\theta[T(\underline{X})]$

* H_1, H_2, H_3 valides $I(\theta)$ dp

$T(\underline{X})$ efficace pour $\psi(\theta)$ si $T(\underline{X})$ sans biais de $\psi(\theta)$

$Var(T(\underline{X})) = BCR(\psi(\theta))$

* $X \rightsquigarrow P(\theta)$, $\theta > 0$

$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta}$

$\hat{\theta} = \overline{X_n}$ $\quad E[\overline{X_n}] = \theta$

$$BCR(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta}{n}$$

$$Var(\overline{X_n}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\theta}{n} = BCR(\theta).$$

$\overline{X_n}$ est efficace pour θ / pour $E(X)$

(pour rappel $\overline{X}_n$ est l'emv de θ pour la poisson)

* $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{\theta})$

$$f(x,\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{\theta}{2} x^2$$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \exp\left[\frac{-\theta}{2} \sum x_i^2 + \frac{n}{2} \ln\theta - \frac{n}{2} \ln 2\pi\right]$$

$\Theta = \mathbb{R}_+^*$ ouvert

$c : \theta \longmapsto \theta$ $\qquad T(\underline{x}) = -\frac{1}{2} \sum x_i^2$

inj et C^2

$d : \theta \longmapsto \frac{n}{2} \ln\theta$ $\quad C^2$

$$E_\theta(T(\underline{X})) = T(\underline{x}) \iff -\delta(\theta) = -\frac{1}{2} \sum x_i^2 \iff$$

$$\frac{-n}{2\theta} = -\frac{1}{2} \sum x_i^2 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_i^2} \text{ est l'emv}$$

~~$\sum x_i^2 \neq 0$~~ / de mesure nulle.

$$\sum \left(\frac{X_i}{1/\sqrt{\theta}}\right)^2 = \theta \sum X_i^2 \sim \chi_n^2 = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{n\theta}{\theta \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

$$E_\theta[\hat{\theta}] = n\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{n/2 - 1}}{\Gamma(n/2)} \exp\left(\frac{-x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{n\theta}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n/2 - 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)-1} \exp -\frac{x}{2}$$

$\frac{n\theta}{n-2} \Rightarrow$ l'emv est biaisé $\Rightarrow \nexists$ d'estimateur efficace

$* \; X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\ell(\underline{x},\theta) = \underbrace{\frac{\mu}{\sigma^2}}_{C_1(\theta)} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}^{T_1(\underline{x})} \underbrace{- \frac{1}{2\sigma^2}}_{C_2(\theta)} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}^{T_2(\underline{x})} \underbrace{- \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2)}_{d(\theta)} - \frac{n}{2}\ln 2\pi$$

f.e à 2 paramètres

$$T(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$E(T(\underline{x})) = \begin{pmatrix} n\mu \\ n(\mu^2 + \sigma^2) \end{pmatrix}$$

déjà vu

$$\mathrm{Var}(T(\underline{x})) = \begin{pmatrix} n\sigma^2 & 2n\mu\sigma^2 \\ & 2n\sigma^2(2\mu^2+\sigma^2) \end{pmatrix}$$

Déjà vu

Remarque

$\hat{\mu} = \overline{x}_n \qquad \hat{\sigma}^2 = S_{n-1}^2 \qquad \psi(\theta) = E_\theta(T(\underline{x}))$

$E(\hat{\mu}) = \mu \qquad E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$

$$BCR\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \nabla_\theta' \psi(\theta) \, . \, I_n^{-1}(\theta) \, . \, \nabla_\theta \psi(\theta)$$

$$\nabla_\theta(\psi(\theta)) = \begin{pmatrix} n & 2n\mu \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$BCR(T(\underline{x})) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 2n\mu & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2/n & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 2n\mu \\ 0 & n \end{pmatrix} = \mathrm{var}(T(\underline{x}))$$

déjà vu

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\mu}{\sigma^2} \\ \lambda_2 = \frac{-n}{2\sigma^2} \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{l} \frac{-2\lambda_1}{\lambda_2} = \mu \\ \sigma^2 = \frac{-1}{2\lambda^2} \end{array}\right\} \quad d(\theta) = -n\left(-\frac{2\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \Big/ \frac{-2}{2\lambda_2}$$

3.3) Amélioration d'estimateurs

T^* sans biais de $\psi(\theta)$ est UVMB

uniformément de variance minimale parmi les estimateurs sans biais de $\psi(\theta)$

→ si pour tout estimateur T sans biais de $\psi(\theta)$ $Var(T^*) \leq Var(T)$

- Théorème de Rao Blackwell - Lehmann Scheffe

$S(\underline{X})$ sans biais de $\psi(\theta)$ $\left(|\psi(\theta)| < +\infty \right)$

$T(\underline{X})$ statistique exhaustive complète

$$S^* = E\left(S(\underline{X}) \setminus T(\underline{X})\right)$$

$$E(S^*) = \psi(\theta)$$

$$Var(S^*) \leq Var(S(\underline{X}))$$

S^* UVMB

- S^* conditionnée par une statistique exhaustive => la loi de S^* indépendante de θ => S^* candidat pour estimer θ
- S^* est fonction d'une exhaustive complète

Remarque:

$S^* = g(T(\underline{X}))$ avec $T(\underline{X})$ exhaustive complète
S^* sans biais de $\psi(\theta)$

$$S^{**} = E\left[S^* \setminus T[\underline{X}]\right] = E\left[g(T(\underline{X})) \setminus S^*\right] = S^*$$

* $X \sim \mathcal{U}[0,\theta]$

$T[\underline{X}] = \max x_i$ exhaustive complète

$$E(T(\underline{X})) = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$S(\underline{X}) = \frac{n+1}{n} T(\underline{X}) = \frac{n+1}{n} \max x_i.$$