Corrigés des exercices du chapitre 2 : Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 : Méthode de Gauss

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ - & x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait d'abord $\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 - 2\mathcal{L}_1$ pour éliminer x_1 dans les lignes 2, 3 et 4. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}\right.$$

On fait ensuite $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 6x_2 & + & \dfrac{3}{2}x_3 & & & = & -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

puis $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 - 6\mathcal{L}_3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & & + & \dfrac{15}{2}x_3 & & & = & -\dfrac{15}{2} \end{array}\right. .$$

On a alors $\left\{\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_2 = 1 + x_3 = 0 \\ x_4 = \dfrac{5 + 2x_2 + x_3}{2} = 2 \\ x_1 = 2 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right.$, soit $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2)}$.

Exercice 2 : Décomposition LU

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A ($i.e.$ $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = {}^t\begin{pmatrix} 1.5 & 4 & -14 & -6.5 \end{pmatrix}$.

3) Soit $B = {}^tU\, A\, {}^tL$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

---

1) Vérifions tout d'abord que, $\forall\, k = 1, \ldots, 4$, $\det \Delta_k \neq 0$:

$$\det \Delta_1 = -2 \neq 0 \;;$$
$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \;;$$

$$\begin{aligned}\det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & -12 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -12 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(4) - 1(-24+16) - 1(-2) = 2 \neq 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det \Delta_4 = \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -6 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -6 & -13 & 10 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -1\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -2(5-2) = -6 \neq 0.\end{aligned}$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :
$\rightarrow$ Étape 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$Étape 2 :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_2E_1A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ <u>Étape 3 :</u>

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ <u>Système $L\tilde{x} = b$:</u>

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} & \tilde{x}_1 & & & & = 1.5 \\ - & \tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = 4 \\ & 2\tilde{x}_1 & -3x_2 & +\tilde{x}_3 & & = -14 \\ & \tilde{x}_1 & & -2\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = -6.5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 1.5 \\ \tilde{x}_2 = 4 + \tilde{x}_1 = 5.5 \\ \tilde{x}_3 = -14 - 3 + 16.5 = -0.5 \\ \tilde{x}_4 = -6.5 - 1.5 - 1 = -9 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ <u>Système $Ux = \tilde{x}$:</u>

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1.5 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5.5 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -0.5 \\ & & & & & - & 3x_4 & = & -9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 3 \\ x_3 = 0.5 + x_4 = 3.5 \\ x_2 = 5.5 + 2x_4 - 3x_3 = 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}(1.5 - x_2 + x_3 - x_4) = -0.5 \end{array} \right.$$

3) $B = {}^tU(LU)\,{}^tL = ({}^tUL)(U\,{}^tL)$. U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure donc ${}^tU$ est triangulaire inférieure et ${}^tL$ triangulaire supérieure. Ainsi, ${}^tUL$ est triangulaire inférieure et $U\,{}^tL$ est triangulaire supérieure et on a bien $B = L'U'$ avec $L' = {}^tUL$ et $U' = U\,{}^tL$.

Exercice 3 : <u>Décomposition LU</u>

1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = {}^t(0, 2, -1, 5)$.

3) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

1) Vérifions tout d'abord que, $\forall\, k = 1, \ldots, 4$, $\det \Delta_k \neq 0$:

$$\det \Delta_1 = -1 \neq 0 \ ;$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \ ;$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-11) - 1 - 3 \times 4 = -2 \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_4 = \det A &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} \\ &= -\left[-5 \times 13 + 8 - 3 \times (2 \times 13 + 1) + 8 \times (2 \times 8 + 5)\right] \\ &\quad -\left[-5 \times 13 + 8 - 3 \times (-2 \times 13 + 3) + 8 \times (-2 \times 8 + 3 \times 5)\right] \\ &\quad -3\left[2 \times 13 + 1 - (-2 \times 13 + 3) + 8 \times (-2 - 3 \times 2)\right] \\ &= -(-57 - 81 + 168) - (-57 + 69 - 8) - 3(27 + 23 - 64) \\ &= -30 - 4 + 3 \times 14 = 8 \neq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :

$\rightarrow$ <u>Étape 1 :</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ <u>Étape 2 :</u>

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Étape 3 :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3E_2E_1A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1L_2L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & \tilde{x}_1 & & & & & & = & 0 \\ - & \tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & & & & = & 2 \\ & 2\tilde{x}_1 & & & + & \tilde{x}_3 & & = & -1 \\ - & 3\tilde{x}_1 & + & 2\tilde{x}_2 & - & \tilde{x}_3 & + \ \tilde{x}_4 & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 2 + \tilde{x}_1 = 2 \\ \tilde{x}_3 = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 \\ \tilde{x}_4 = 5 + 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 5 - 4 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & 0 \\ & & & 2x_2 & & & + \ 8x_4 & = & 2 \\ & & & & & x_3 & - \ x_4 & = & -1 \\ & & & & & & - \ 4x_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = -1 + x_4 = -1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(2 - 8x_4) = 1 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 = 4 \end{array}\right.$$

3) $A^2x = b \Leftrightarrow A(Ax) = b \Leftrightarrow Ax = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; résolvons ce système par la méthode utilisée à la question 2)

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & \tilde{x}_1 & & & & & & = & 4 \\ - & \tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & & & & = & 1 \\ & 2\tilde{x}_1 & & & + & \tilde{x}_3 & & = & -1 \\ - & 3\tilde{x}_1 & + & 2\tilde{x}_2 & - & \tilde{x}_3 & + \ \tilde{x}_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 4 \\ \tilde{x}_2 = 1 + \tilde{x}_1 = 1 + 4 = 5 \\ \tilde{x}_3 = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 - 8 = -9 \\ \tilde{x}_4 = 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 12 - 10 - 9 = -7 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & 4 \\ & & & 2x_2 & & & + \ 8x_4 & = & 5 \\ & & & & & x_3 & - \ x_4 & = & -9 \\ & & & & & & - \ 4x_4 & = & -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = \dfrac{7}{4} = 1,75 \\ x_3 = -9 + x_4 = -\dfrac{29}{4} = -7,25 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(5 - 8x_4) = -\dfrac{9}{2} = -4,5 \\ x_1 = 4 + x_2 - 3x_3 = \dfrac{53}{4} = 13,25 \end{array}\right.$$

Exercice 4 : Décomposition de Cholesky.

Donner la factorisation de Cholesky des matrices :

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$.

---

1) Posons $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. $A = B\,{}^tB$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_{1,1}^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{1,1} = 1 \\ b_{1,1} \times b_{2,1} = -2 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,1} = -2 \\ b_{1,1} \times b_{3,1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,1} = 0 \\ b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 8 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,2} = 2 \\ b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = -6 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,2} = \frac{-6 - (-2) \times 0}{2} = -3 \\ b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 25 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,3} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.}$

Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \;;$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
b_{1,1}^2 = 4 &\quad\Rightarrow\quad b_{1,1} = 2\\
b_{1,1}\times b_{2,1} = 0 &\quad\Rightarrow\quad b_{2,1} = 0\\
b_{1,1}\times b_{3,1} = 12 &\quad\Rightarrow\quad b_{3,1} = \frac{12}{2} = 6\\
b_{1,1}\times b_{4,1} = -6 &\quad\Rightarrow\quad b_{4,1} = \frac{-6}{2} = -3\\
\\
b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 1 &\quad\Rightarrow\quad b_{2,2} = 1\\
b_{2,1}\times b_{3,1} + b_{2,2}\times b_{3,2} = 2 &\quad\Rightarrow\quad b_{3,2} = \frac{2-0}{1} = 2\\
b_{2,1}\times b_{4,1} + b_{2,2}\times b_{4,2} = 1 &\quad\Rightarrow\quad b_{4,2} = \frac{1-0}{1} = 1\\
\\
b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 49 &\quad\Rightarrow\quad b_{3,3} = \sqrt{49-36-4} = \sqrt{9} = 3\\
b_{3,1}b_{4,1} + b_{3,2}b_{4,2} + b_{3,3}b_{4,3} = -4 &\quad\Rightarrow\quad b_{4,3} = \frac{-4-6\times(-3)-2\times 1}{3} = \frac{12}{3} = 4\\
\\
b_{4,1}^2 + b_{4,2}^2 + b_{4,3}^2 + b_{4,4}^2 = 51 &\quad\Rightarrow\quad b_{4,4} = \sqrt{51-9-1-16} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 3 & 0\\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$.

Exercice 5 : Décompositon QR

Chercher la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -46/5 & -43/5\\ 2 & 8 & 23\\ -2 & -28/5 & 26/5 \end{pmatrix}$$

En déduire la solution du système $Ax = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ 1$^{\text{ère}}$ étape : Posons $a_1 = {}^t(1,2,-2)$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ et $e^{i\alpha_1} = 11$;
- $v_1 = {}^t(-2,2,-2)$;
- $H_1 = \mathbb{I}_3 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}(-1,1,-1)}{(-1,1,-1)\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

- $H_1A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -36/5 & 27/5 \\ 0 & 48/5 & 114/5 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ $\underline{2^{\text{ème}} \text{ étape :}}$ Posons $a_2 = {}^t(-36/5, 48/5)$. Alors,

$\| a_2 \|_2 = \frac{1}{5}\sqrt{1296+2304} = \frac{\sqrt{3600}}{5} = \frac{60}{5} = 12$ et $e^{i\alpha_2} = -1$;

$v_2 = {}^t(24/5, 48/5)$;

$\tilde{H}_2 = I_2 - 2\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1,2)}{(1,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ et $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$;

$\boxed{H_2H_1A = R = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}}$;

et $\boxed{Q = (H_2H_1)^{-1} = H_1^{-1}H_2^{-1} = H_1H_2 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 14 & -2 \\ 10 & -5 & -10 \\ -10 & 2 & -11 \end{pmatrix}}$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad QRx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad Rx = {}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car } Q \text{ est unitaire} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = \frac{1}{15}(5+10-10) \\ & -12x_2 & -15x_3 & = \frac{1}{15}(14-5+2) \\ & & -18x_3 & = \frac{1}{15}(-2-10-11) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{15\times 18}(-23) = \frac{23}{270} \\ x_2 = -\frac{1}{12}\left(\frac{11}{15}+\frac{23}{18}\right) = -\frac{181}{1080} \\ x_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{181}{180}-\frac{23}{30}\right) = \frac{103}{540} \end{cases}
\end{aligned}$$

La solution du système $Ax = {}^t(1,1,1)$ est $\boxed{x = {}^t\left(\frac{103}{540}, \frac{181}{1080}, \frac{23}{270}\right)}$.

Exercice 6 : Calcul de déterminant et décomposition LU

1) Expliquer comment on peut calculer le déterminant d'une matrice A d'ordre n à partir de sa factorisation LU.

2) Appliquer cette méthode à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $A = LU$ donc $\det A = \det L \times \det U$ avec $\det L = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii} = 1$ et $\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$. Ainsi, $\boxed{\det A = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}$.

2) Le calcul direct donne $\det A = 30$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U.$$

On a alors $\det A = \det U = 2 \times 3 \times 5 = 30$.