Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information
Année universitaire 2020/2021

Intégration et Probabilité 2
TD 2. Vecteurs gaussiens

Exercice 3.
a) Puisque X et Y sont i.i.d telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^d}, \Gamma)$, alors la fonction caractéristique de X_φ notée Φ_{X_φ} est telle que

$$\Phi_{X_\varphi}(u) = E[e^{i<u,\cos(\varphi)X+\sin(\varphi)Y>}] = E[e^{i<u,\cos(\varphi)X>}]E[e^{i<u,\sin(\varphi)Y>}] = \Phi_X(u).$$

Idem pour $\Phi_{Y_\varphi}(u)$. Donc on déduit que Y_φ et X_φ suivent la même loi que X.
b) En remarquant que (X_φ, Y_φ) est un vecteur Gaussien en tant qu'image du vecteur Gaussien (X, Y), donc pour montrer l'indépendance de X_φ et Y_φ on doit montrer que la matrice de covariance du vecteur (X_φ, Y_φ) est diagonale par blocs. Or, puisque X et Y sont i.i.d. et sont gaussiennes centrées de matrice de covariance $\Gamma = A\,{}^tA$, avec ${}^tA$ est la matrice transposée de A, alors on peut supposer que X admet la même loi que AI_1 telle que I_1 est gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire $I_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_{\mathbb{R}^d})$) de même pour Y qui admet la même loi que AI_2 avec I_2 est gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$ et telle que I_1 et I_2 sont indépendantes. Par la suite on déduit que:

$$\begin{pmatrix} X_\varphi \\ Y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \\ -\sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \\ -\sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_{\mathbb{R}^d} \\ 0_{\mathbb{R}^d} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en notant $Cov(X_\varphi, Y_\varphi)$ et $Cov(I_1, I_2) = Id_{\mathbb{R}^d}$ les matrices de covariance des vecteurs aléatoires (X_φ, Y_φ) et (I_1, I_2), on aura:

$$Cov(X_\varphi, Y_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \\ -\sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_{\mathbb{R}^d} \\ 0_{\mathbb{R}^d} & A \end{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^d}\ {}^t\begin{pmatrix} A & 0_{\mathbb{R}^d} \\ 0_{\mathbb{R}^d} & A \end{pmatrix}\ {}^t\begin{pmatrix} \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \\ -\sin(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} & \cos(\varphi).I_{\mathbb{R}^d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma & 0_{\mathbb{R}^d} \\ 0_{\mathbb{R}^d} & \Gamma \end{pmatrix}$$

ce qui implique que X_φ et Y_φ sont indépendantes.

Exercice 4.
Soit une v.a.r X suivant la loi normale centrée réduite. Y est une v.a.r. qui suit une loi de Rademacher, telle que:

$$P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}.$$

On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z=XY$.
a)

$$\begin{aligned}P(Z\in A)&=P(XY\in A)=P(X\in A,\,Y=1)+P(-X\in A,\,Y=-1)\\&=P(X\in A)P(Y=1)+P(-X\in A)P(Y=-1)=P(X\in A),\end{aligned}$$

car X est symétrique.
a)

$$\begin{aligned}P(|X|Y\in A)&=P(X\in A,\,X>0,\,Y=1)+P(-X\in A,\,X>0,\,Y=-1)\\&+P(-X\in A,\,X<0,\,Y=1)+P(X\in A,\,X<0,\,Y=-1)\\&\frac{1}{2}P(X\in A)+\frac{1}{2}P(-X\in A)=P(X\in A).\end{aligned}$$

c) On a:

$$<\begin{pmatrix}X\\XY\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>=X+XY.$$

Or $P(X+XY=0)=P(X=-XY)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}\Rightarrow X+XY$ ne peut pas être une v.a.r. Gaussienne$\Rightarrow\begin{pmatrix}X\\XY\end{pmatrix}$ n'est pas Gaussien.

Exercice 5.
1) D'après les cours on a toujours $1\Rightarrow 2$.
Démontrons que $2\Rightarrow 1$:
La matrice de covariance de $X={}^t(X_1,\,X_2)$ ait la forme suivante:

$$\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\Phi_X\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}&=E[e^{i(X_1+X_2)}]=e^{\frac{-1}{2}<(1,1),\begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>}\\&=e^{\frac{-1}{2}(2c+a+b)}=E[e^{iX_1}]E[e^{iX_2}]=e^{\frac{-1}{2}(a+b)},\end{aligned}$$

D'où, $c=0=cov(X_1,\,X_2)\Rightarrow\ X_1\ et\ X_2$ sont indépendantes.

2) D'après les cours on a toujours $1\Rightarrow 2$.
Démontrons que $2\Rightarrow 1$ n'est pas vraie dans le cas où X est un vecteur Gaussien de $\mathbb{R}^3$.
La matrice de covariance de $X={}^t(X_1,\,X_2,\,X_3)$ ait la forme suivante

$$V_X=\begin{pmatrix}a&e&f\\e&b&g\\f&g&c\end{pmatrix}$$

Donc, on aura:

$$\Phi_X\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=e^{[\frac{-1}{2}{}^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&e&f\\e&b&g\\f&g&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}]}=e^{-[\frac{a+b+c}{2}+e+f+g]}=e^{-\frac{a+b+c}{2}}$$

Ainsi, on aura

$$e+f+g=0=cov(X_1,\,X_2)+cov(X_1,\,X_3)+cov(X_3,\,X_2).$$

Or, on peut trouver un vecteur Gaussien centrée tel que

$$cov(X_1,\,X_2)+cov(X_1,\,X_3)+cov(X_3,\,X_2)=0,$$

pourtant $(X_i)_{i\in\{1,\,2,\,3\}}$ ne sont pas indépendantes. Comme exemple, on peut prendre Y une v.a.r. gaussienne centré et soit $X={}^t\,(X_1,\,X_2\,X_3)={}^t\,(Y,\,aY\,bY)$, avec $(a,\,b)\in\mathbb{R}^*$. On remarque que X est un vecteur Gaussien centré de $\mathbb{R}^3$ et $(X_i)_{i\in\{1,\,2,\,3\}}$ ne sont pas indépendantes et pourtant, on a

$$cov(X_1,\,X_2)+cov(X_1,\,X_3)+cov(X_3,\,X_2)$$

$$=cov(Y,\,aY)+cov(Y,\,bY)+cov(bY,\,aY)=(a+b+ab)V_Y=0,\ pour\ b=\frac{-a}{a+1}.$$

3) Soit X un veteur gaussien centré et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $u=(u_1,\,u_2,\,u_3)\in\mathbb{R}^3$, on a l'égalité suivante:

$$E[e^{i\sum_{k=1}^{3}u_kX_k}]=\prod_{k=1}^{3}E[e^{iu_kX_k}].$$

Les composantes de X $(X=(X_1,\,X_2,\,X_3))$ sont indépendantes:

$$\Phi_X\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=e^{[\frac{-1}{2}{}^t\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&e&f\\e&b&g\\f&g&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}]}=\Phi_{X_1}(u_1)\Phi_{X_2}(u_2)\Phi_{X_3}(u_3)=e^{-\frac{1}{2}(u_1^2a+u_2^2b+u_3^2c)}.$$

Par la suite, on aura

$$eu_1u_2+fu_1u_3+gu_3u_2=0,\ \ \forall(u_1,\,u_2\,u_3)\in\mathbb{R}^3.$$

$\Rightarrow\ e=f=g=0\Rightarrow(X_i)_{i\in\{1,\,2,\,3\}}$ sont indépendantes.

Exercice 6.
Soit $X=(X_0,\,\cdots,\,X_d)$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ tel que:

1. $X_i\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\,1)\ \ \forall\ i\in\{0,\,1,\,\cdots,\,d\}$.

2. $cov(X_0,\, X_j) = p$ pour $1 \leq\, j \leq\, d$.

3. $cov(X_i,\, X_j) = p^2$ pour $1 \leq\, j \neq\, i \leq\, d$.

Soit $Y = (X_0,\, Y_1,\, \cdots,\, Y_d)$ un vecteur aléatoire tel que $Y_j = (1-p^2)^{-\frac{1}{2}}(X_j - pX_0)$ pour $1 \leq\, j \leq\, d$.
a) En remarquant que

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ \frac{X_1 - pX_0}{\sqrt{1-p^2}} \\ \frac{X_2 - pX_0}{\sqrt{1-p^2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{X_d - pX_0}{\sqrt{1-p^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{-p}{\sqrt{1-p^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{-p}{\sqrt{1-p^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-p}{\sqrt{1-p^2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_d \end{pmatrix}$$

et puisque X est Gaussien, alors Y est est aussi Gaussien centré de matrice de covariance notée V_Y telle que $V_Y = MV_X^t M$, avec

$$V_X = \begin{pmatrix} 1 & p & p & \cdot & \cdot & \cdot & p \\ p & 1 & p^2 & \cdot & \cdot & \cdot & p^2 \\ p & p^2 & 1 & p^2 & \cdot & \cdot & p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p & p^2 & \cdot & \cdot & \cdot & p^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminons la loi de $S = \sum_{j=1}^{d} X_j$.
Soit $u \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_S(u) = E[e^{iuS}] = E[e^{iu\sum_{j=1}^{d}}] = E[e^{i<^t\begin{pmatrix} 0, & u, & u, & \cdot & \cdot & \cdot, & u \end{pmatrix}, X>}] = \Phi_X(x),$$

avec $x = \begin{pmatrix} 0, & u, & u, & \cdot & \cdot & \cdot, & u \end{pmatrix}$.
D'où,

$$\Phi_S(u) == e^{\frac{-1}{2}{}^t x V_X x} = e^{\frac{-1}{2}u^2[d + d(d-1)p^2]}$$

$\Rightarrow\ S \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\, \sigma^2)\ \ avec\ \sigma^2 = d + d(d-1)p^2.$

Exercice 7

1. Soient X et Y deux v.a.r. continues indépendantes admettant respectivement pour densités f_X et f_Y. Montrer que $X \neq Y$ p.s.
   Puisque X et Y sont indépendante et admettant des densités, alors le vecteur $(X,\, Y)$ admet aussi une densité notée $f_{(X,Y)}$ telle que $f_{(X,Y)} = f_X f_Y$, par la suite on aura

$$P(X = Y) = \int_{\Delta} f_{(X,Y)}(x,\, y)\, dxdy = 0,\ \ \Delta = \{(x,\, x);\, x \in \mathbb{R}\}.$$

2. On considère une v.a.r. X admettant une densité notée f_X. Déteminer f_{X^2} en fonction de f_X.

$$F_{X^2}(a) = P(X^2 \leq a) = \begin{cases} 0 \; si\, a < 0 & ; \\ F_X(\sqrt{a}) - F_X(-\sqrt{a}) \; si\, a \geq 0 & . \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$f_{X^2}(a) = F'_{X^2}(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(f_X(\sqrt{a}) + f_X(-\sqrt{a}))\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(a)$$

3. Soit une v.a.r X suivant la loi normale centrée réduite. Calculer $E[X^4]$
Soit Φ_X la fonction caractéristique de la v.a.r gaussienne centrée réduite X. On a

$$E[X^4] = i^4\Phi_X^{(4)}(0) = 3.$$

4. Soit le veteur aléatoire (X, Y) telle que $(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_2)$. Soient les deux variables aléatoires Z et Q telles que

$$Z = \frac{(X+Y)}{2} \quad et \quad Q = \frac{(X-Y)}{2}.$$

On pose

$$U = \frac{(X-Z)^2 + (Y-Z)^2}{2}.$$

Calculer la matrice de covariance du vecteur (Z, Q).
En remarquant que

$$\begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alors, ${}^t(Z, Q)$ est un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance $AId_{\mathbb{R}^2}\,{}^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5. Calculer $E[U]$ et $Var[U]$.
$U = Q^2$, d'où,

$$E[U] = E[Q^2] = V_Q = \frac{1}{2}.$$

En vertu de la troisième question on a:

$$V_U = V_{Q^2} = E[Q^4] - E[Q^2]^2 = E[(\frac{G}{\sqrt{2}})^4] - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

avec G est Gaussienne standard.