**1 ère année - Corrigé du devoir surveillé d'AD - 13 avril 2021**

**Exercice 1 :**
**(2 pts)** 1) On a g'=(2,1,3) et

$$Y = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & j_1 & j_2 & j_3 \\ \hline i_1 & 1 & 1 & -3 \\ i_2 & 0 & -1 & 2 \\ i_3 & 3 & -1 & -1 \\ i_4 & -2 & 1 & 0 \\ i_5 & 0 & 0 & 0 \\ i_6 & -2 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

**(2 pts)** 2) Le calcul de $V$ est une application directe de la formule $V = \frac{1}{6}YY'$

**(3 pts)** 3) On vérifie facilement que $V\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à une valeur propre nulle. Donc $V$ est au plus de rang égal à 2. Comme $V$ n'est pas de rang 1, sinon toutes les colonnes de $V$ seraient colinéaires, on en déduit que $V$ et donc $Y$ est de rang 2. Le nuage des individus se trouve donc nécessairement sur un plan. vskip0.3cm

**(2 pts)** 4) On a $\lambda_1 = ||\psi_1||^2_{D_p} = \frac{1}{6}(8+2+8+2+8) = \frac{14}{3}$.
Comme $I_T = tr(VM) = \frac{20}{3} = \lambda_1 + \lambda_2$, on a $\lambda_2 = \frac{20}{3} - \frac{14}{3} = 2$.

**(2 pts)** 5) On a $\tau_1 = \frac{\lambda_1}{I_T} = \frac{14}{20}$ et $\tau_2 = \frac{\lambda_2}{I_T} == \frac{6}{20}$

**(2 pts)** 6) On a $COR_1(i) = \frac{(\psi_1^i)^2}{||y_i||^2_M}$. Donc $COR_1(i_2) = \frac{2}{1^2+2^2} = \frac{2}{5}$ et $COR_2(i_2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

**(2 pts)** 7) On a $cov(x^1, \psi_1 = cov(y^1, \psi_1) = \frac{1}{6}(y^1)'\psi_1$. Donc :

$$cov(x^1, \psi_1) = \frac{1}{6}(2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = \frac{7}{3}\sqrt{2}.$$

Par ailleurs, $COR_1(j_1) = \frac{(\eta^1_{j_1})^2}{||y^{j_1}||^2} = \frac{cov(y^1, \frac{\psi_1}{\sqrt{\lambda_1}})^2}{||y^{j_1}||^2} = \frac{cov(y^1,\psi_1)^2}{\lambda_1||y^{j_1}||^2}$. Or :

$$cov(y^1,\psi_1)^2 = \frac{49 \times 2}{9}\ ;\ \lambda_1 = \frac{14}{3}\ ;\ ||y^{j_1}||^2_{D_p} = v_{11} = 3.$$

Par conséquent : $COR_1(j_1) = \frac{7}{9}$.

**Exercice 2 :**

**(2 pts)** 1) L' Intérêt de cette ACP est double

- Déterminer un petit groupes de nouvelles variables (les facteurs) décrivant les chaises hautes,
- Regrouper les marques de chaises hautes ayant les mêmes caractéristiques puis décrire ces groupes.

**(2pt)** 2) Démarche

- Pertinence
- Choix des axes
- justif rotation
- Interp axes : qualité + corr et nom
- carte des indiv et interp

**(2 pts)** 3) Choix du nombre d'axes

- Critère de Kaiser : on a 2 valeurs propres supérieures à 1, donc on doit retenir 2 axes.
- Le taux d'inertie cumulé des 2 premiers axes étant de $3.64 + 1.9/6 = 92.33\%$. D'après ce critère, on devrait retenir les 2 premiers axes.
- Le coude étant au niveau du 3ème axe, on retient soit les 2 premiers, soit les 3 premiers axes selon le critère du coude. Dans ce cas, vu l'écart entre la deuxième et la troisième valeur propre, il serait plus pertinent de retenir les 2 premiers.