MAT470
Exercices sur la résolution de systèmes d'équations linéaires

par Stéphane Lafrance

1. Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour triangulariser les systèmes linéaires suivants. (Utiliser la commande *ref* de votre *TI.*) En déduire la solution du système $AX = B$ et le déterminant de la matrice A.
   a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. On veut appliquer la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire suivant :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   Déterminer si ce système linéaire admet une solution unique. Si ce n'est pas le cas, combien y a t-il de solutions ?

3. a) Utiliser la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire suivant :
$$\begin{bmatrix} 2 & -6a \\ 3a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ b \end{bmatrix}$$

b) Déterminer la déterminant de la matrice A.

c) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice A n'est pas inversible.

d) Que pouvez-vous conclure à propos de ce système lorsque $a = \frac{1}{3}$ et $b = 1$?

e) Que pouvez-vous conclure à propos de ce système lorsque $a = \frac{1}{3}$ et $b = 3/2$?

4. Résoudre les systèmes linéaires suivants par factorisation LU (selon la méthode de Crout, sans permutation de lignes).
a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. Résoudre le système linéaire suivant par factorisation LU avec la *TI* (selon la méthode de Doolittle, avec permutation de lignes).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 17 \\ 10 \end{bmatrix}$$

6. La matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

admet la factorisation LU suivante (notation compacte, selon la méthode de Crout, sans permutation de lignes) :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Utiliser cette factorisation LU pour répondre aux questions suivantes.

a) Calculer $\det(A)$.

b) Résoudre le système linéaire $AX = B$ où

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}$$

c) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2X = B$, pour B donné ci-dessus.

7. Soit le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{lcrcrcrcrcr} E_1 & : & 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & & & = & -11 \\ E_2 & : & & & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & -11 \\ E_3 & : & 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ E_1 & : & -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \end{array} \right.$$

a) Montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel ne convergent pas lorsqu'on isole simplement les x_i de l'équation E_i.

b) Réordonner les équations de façon à assurer la convergence des deux méthodes (puis résoudre).

8. Résoudre le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 9x & - & 2y & + & z & = & 13 \\ -x & + & 5y & - & z & = & 9 \\ x & - & 2y & + & 9z & = & -11 \end{array} \right.$$

à l'aide des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel à partir de l'approximation initiale $X^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. (Faire seulement les cinq premières itérations.)

9. Déterminez les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

e) $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Réponses

1. a) Matrice augmentée triangularisée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Solution : $X = [1 \; -1 \; 1]^T$

Déterminant : $\det(A) = -1$.

b) Matrice augmentée triangularisée :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -15/2 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right]$$

Solution : $X = [3 \; -1 \; 4 \; 2]^T$

Déterminant : $\det(A) = -180$.

2. On obtient la matrice augementée triangularisée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Puisque $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, le système n'admet pas une solution unique. De plus, la dernière ligne de la matrice augementée triangularisée correspond à l'équation $0 = 2$; ce système possède donc aucune solution.

3. a) Matrice augementée triangularisée :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3a & 3/2 \\ 0 & 9a^2-1 & b - \frac{9a}{2} \end{array}\right]$$

Si $9a^2 - 1 \neq 0$, la solution unique est

$$x = \frac{3(2ab-1)}{2(9a^2-1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{2b-9a}{2(9a^2-1)}$$

b) $\det(A) = 18a^2 - 2$

c) Résoudre $\det(A) = 0$, qui donne $a = \pm\frac{1}{3}$ et $b \in \mathbb{R}$

d) Puisque $a = \frac{1}{3}$, $\det(A) = 0$ et le système n'admet pas une solution unique. Puisque $b = 1$, la dernière équation devient $0 = \frac{-1}{2}$ et le système n'admet aucune solution.

e) Puisque $a = \frac{1}{3}$, $\det(A) = 0$ et le système n'admet pas une solution unique. Puisque $b = \frac{3}{2}$, la dernière équation devient $0 = 0$ et le système admet une infinité de solutions.

4. a) Factorisation LU (sous forme compacte) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Solution intermédiaire : $Y = [0, -3/2, 1]^T$ Solution $X = [1, -1, 1]^T$.

b) Factorisation LU (sous forme compacte) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -1/2 & 5/4 \\ 4 & -6 & -5 & 3/2 \\ -3 & 7 & 19/2 & -9 \end{bmatrix}$$

Solution intermédiaire : $Y = [13, -1/2, 7, 2]^T$ Solution $X = [3, -1, 4, 2]^T$.

5. Factorisation LU (sous forme compacte) :

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -1/2 & 7 & 3/2 \\ 1/4 & 0 & 25/4 \end{bmatrix}$$

avec la matrice des permutations :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution intermédiaire : $Y = [17, 37/2, 75/4]^T$ Solution : $X = [1, 2, 3]^T$.

6. a) $\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

   b) $Y = [-1\ 18\ 12]^T$ et $X = [-4\ -6\ 12]^T$

   c) On doit résoudre $LULUX = B$. Il suffit de résoudre (dans l'ordre) $LY_1 = B$, $UY_2 = Y_1$, $LY_3 = Y_2$ et $UX = Y_3$. On trouve (voir a)) $Y_1 = [-1\ 18\ 12]^T$, $Y_2 = [-4\ -6\ 12]^T$, $Y_3 = [-2\ 2\ 1]^T$ et $X = [-2\ 0\ 1]^T$.

7. b) Il faut réordonner les équations de telle sorte que la nouvelle matrice admette une diagonale strictement dominante : E_3, E_4, E_1, E_2.

8. Les cinq premières itérations de la méthode de Jacobi :

$$\begin{array}{rlrrrl}
X^{(0)} = & [& 0 & 0 & 0 &]^T \\
X^{(1)} = & [& 1.444\,444 & 1.800\,000 & -1.222\,222 &]^T \\
X^{(2)} = & [& 1.980\,247 & 1.844\,444 & -0.982\,716 &]^T \\
X^{(3)} = & [& 1.963\,512 & 1.999\,506 & -1.032\,373 &]^T \\
X^{(4)} = & [& 2.003\,487 & 1.986\,228 & -0.996\,056 &]^T \\
X^{(5)} = & [& 1.996\,501 & 2.001\,486 & -1.003\,448 &]^T
\end{array}$$

   Les cinq premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{array}{rlrrrl}
X^{(0)} = & [& 0 & 0 & 0 &]^T \\
X^{(1)} = & [& 1.444\,444 & 2.088\,889 & -0.918\,519 &]^T \\
X^{(2)} = & [& 2.010\,700 & 2.018\,436 & -0.997\,092 &]^T \\
X^{(3)} = & [& 2.003\,774 & 2.001\,336 & -1.000\,122 &]^T \\
X^{(4)} = & [& 2.000\,311 & 2.000\,038 & -1.000\,026 &]^T \\
X^{(5)} = & [& 2.000\,011 & 1.999\,997 & -1.000\,002 &]^T
\end{array}$$

   La méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement vers la solution $[2\ 2\ -1]$.

9. a) $\lambda_1 = 4$ avec $\vec{v}_1 = (2, 3)$ et $\lambda_2 = -1$ avec $\vec{v}_2 = (-1, 1)$

   b) $\lambda_1 = 5$ avec $\vec{v}_1 = (2, 1)$ et $\lambda_2 = -2$ avec $\vec{v}_2 = (-1, 3)$

   c) $\lambda_1 = -1.3615$ avec $\vec{v}_1 = (0.5501, 0.4270, -0.7177)$, $\lambda_2 = -0.8326$ avec $\vec{v}_2 = (0.7888, -0.5308, 0.3099)$ et $\lambda_3 = 3.5289$ avec $\vec{v}_3 = (0.8033, 0.4732, 0.3617)$

   d) $\lambda_1 = 1$ avec $\vec{v}_1 = (3, 0, 1)$, $\lambda_2 = 1$ avec $\vec{v}_2 = (-2, 1, 0)$ et $\lambda_3 = 3$ avec $\vec{v}_3 = (1, 3, 1)$

   e) Il y a une seule valeur propre $\lambda = 1$, et tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (sauf le vecteur nul) sont des vecteurs propres.