Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U: 2021-2022
2$^{ème}$ Année

# Session principale
# Processus stochastique

**Durée: 1H30.**
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

### Exercice 1 "Compréhension du cours et TD"

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans un espace dénombrable $E$.
1- Vrai/faux, justifier: Soit $x$ dans $E$ et $N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{(X_n=x)}$ le nombre de passage en $x$. Si $N_x < +\infty$ $P_x - p.s$ alors $E_x(N_x) < +\infty$.
2- Vrai/faux, justifier: Si la chaîne est irréductible et $E$ est fini, alors la chaîne est récurrente positive.
3- Vrai/faux, justifier: Si la chaîne de Markov est irréductible sur $E$ et s'il admet un état transitoire, alors l'espace d'états $E$ est infini.
4- Vrai/faux: Deux états d'une même classe, alors tous les deux sont réccurents où bien transitoires.
5- Vrai/faux, justifier: Si une chaîne de Markov est récurrente, alors les états de la chaîne se communiquent.
6- Soit $\mu$ la loi initiale de la chaîne et $Q$ sa matrice de transition.
6-1- Exprimer la quantité $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$ en fonction de $\mu$ et $Q$.
6-2- Exprimer $P(X_0 = x, X_n = y)$, puis $P(X_n = y)$ en fonction de $\mu$ et $Q$.

### Exercice 2

On étudie une file d'attente à un guichet où le temps de service d'un client est constant et pris comme unité de temps. On note $Y_n$ le nombre de clients arrivant pendant la $n^{éme}$ période de temps et on suppose que les variables $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, identiquements distribuées de loi $\mu$; un client arrivant dans cette période ne peut être servi avant l'instant $(n+1)$; même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note $X_n$ le nombre de clients dans la file d'attente à l'intant $n$; et l'on suppose $X_0$ indépendant de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.
1-$a$- Vérifier que:

$$X_{n+1} = X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + Y_{n+1}; n \geq 0.$$

1-b- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
1-c- Déterminer sa matrice de transition en fonction de $\mu$.
2-a- Vérifier que:

$$X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - n; n \geq 1.$$

2-b- Montrer que si $E(Y_1) > 1$, alors $X_n \to +\infty$ P.p.s.
2-c- Déduire que la chaîne est transitoire.
3-a- Vérifier que:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - n + \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{0\}}(X_k); n \geq 1.$$

3-b- Montrer que si $E(Y_1) < 1$, l'état 0 est récurrent ( Ind: On pourra raisonner par l'absurde).

## Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que:
* $X_0 = k \in \{0, ..., N\}, N \in \mathbb{N}$.
* la loi conditionnelle de $X_{n+1}$ sachant $F_n$ (où $F_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$) est une loi binomiale de paramètres $(N, X_n/N)$.

1- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$.
2- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque surement et en moyenne quadratique vers une variable aléatoire $X_\infty$.
3- On pose $M_n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n X_n(N - X_n)$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$.
4- Calculer $E(X_\infty)$ et $E(X_\infty(N - X_\infty))$.
5- Déterminer la loi de $X_\infty$.

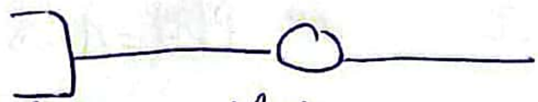
## Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathcal{M}$=$\{1,...,6\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les classes de communication et classifier les états.
2- La chaîne est-elle irréductible?
3- Soit $T_x = \inf\{n \geq 1; X_n = x\}$. Calculer $P_5(T_1 = n)$ et $P_5(T_6 = n)$ pour tout $n \geq 1$.
4- Soit $u(x) = E_x(T_5)$ pour tout $x \in \mathcal{M}$. Déterminer et résoudre l'équation linéaire satisfaite par la fonction $u$.

Exercice 2



Salle d'attente. serveur

$X_n$ = nombre de clients dans la file à l'instant $n$.

$X_{n+1} = X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + Y_{n+1}$ nouveaux clts qui arrivent à $n+1$

$Y_n$ v.a iid de loi $\nu$ sur $\mathbb{N}$

$X_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1})$

$H(x,z) = x - 1_{\{x \geq 1\}} + z$

$F = E = \mathbb{N}$

$H : E \times F \to E$

$(x,z) \mapsto H(x,z)$

$X_n$ est une récurrence aléatoire donc $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov

1) $Q(x,y) = \sum_{z \in F / H(x,z) = y} \nu(z) = \begin{cases} \nu(y) & \text{si } x = 0 \\ \nu(y - x + 1) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$x - 1_{\{x \geq 1\}} + z = y$

2-a)

$X_{n+1} = X_n - 1_{(X_n \geq 1)} + Y_{n+1}$

$X_n = X_{n-1} - 1_{(X_{n-1} \geq 1)} + Y_n$

$\vdots$

$X_1 = X_0 - 1_{(X_0 \geq 1)} + Y_1$

$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=0}^{n-1} 1_{(X_k \geq 1)}$.

$\Rightarrow X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - n$

2) b) $\frac{X_n}{n} \geq \frac{X_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} Y_k - 1$ $\Rightarrow \lim \frac{X_n}{n} \geq E(Y_1) - 1 > 0$

$\frac{X_0}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \sum Y_k \to E(Y_1)$ (LF.GN)

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = +\infty$ p.p.s

2) c)

$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega / X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty\}$ $P(\tilde{\Omega}) = 1$

Soit $x \in E$ $\quad N_x(\omega) = \sum_{k=0} \mathbb{1}_{(X_k(\omega)=x)}$

$N_x < +\infty$ sur $\tilde{\Omega}$ avec $P(\tilde{\Omega}) = 1 \Rightarrow x$ est transient.

6- 3) b) $E(Y_1) < 1$ ; $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\mathbb{1}_{(X_k \geq 1)}}_{1 - \underbrace{\mathbb{1}_{(X_k \geq 1)^c}}_{X_k = 0}}$

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k=0)} - n$$

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Y_k}_{\downarrow \; E(Y_1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k=0)} - 1 \longrightarrow E(Y_1) - 1 < 0$$

$(X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ absurde

Supposons que 0 est transient : $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_k=0)} < +\infty$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(X_k=0)} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_k=0)} \longrightarrow 0$

Donc l'état 0 est récurrent.

---

Ex 1 :

① $N_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(X_k=n)}$ $\quad N_n < +\infty \Rightarrow n$ est transient

$E_n(N_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(n,n) < +\infty$

② Vrai énoncé théorème irréductible..

③ irréductible / E fini $\Rightarrow$ il $\exists$ au moins un état récurrent $\quad$ ~~Vrai~~

↳ absurde

④ Vrai $\quad x \leftrightarrow y$ donc toutes deux sont récurrents ou bien transients. cl

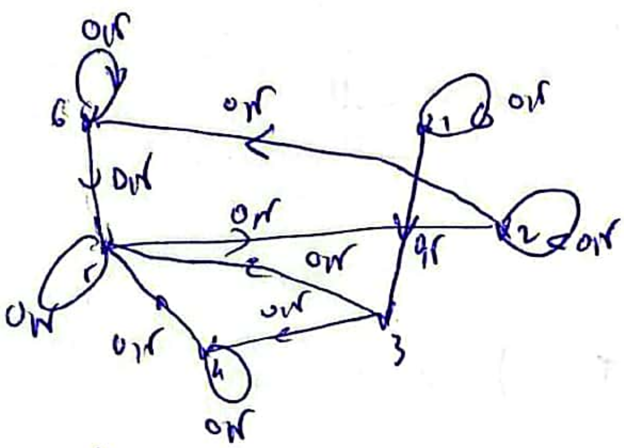
⑤ Faux $\quad$ contre ex : $E = \{1,2,3\}$

cl $\quad Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (columns 1 2 3)

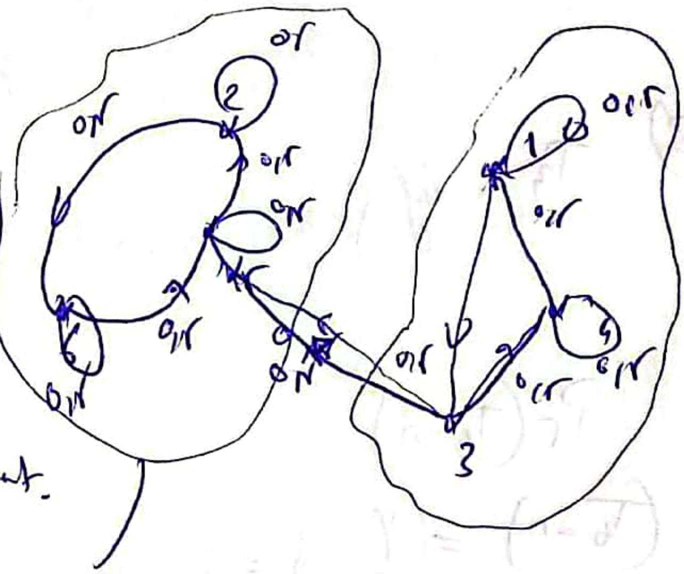
6-1) $P(X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_n=x_n) = \underbrace{P(X_0=x_0)}_{\nu(x_0)} Q(x_0,x_1) \cdots Q(x_{n-1},x_n)$

6-2) $P(X_0=x, X_n=y) = \underbrace{P(X_n=y / X_0=x)}_{Q^n(x,y)} \underbrace{P(X_0=x)}_{\nu(x)}$

Fixons $y$ : $P(X_n=y) = \sum_{x\in E} P(X_0=x, X_n=y) = \sum_{x\in E} \nu(x) Q^n(x,y) = (\nu.Q)^n(y)$.



$\rightsquigarrow$



$|E|=6<+\infty$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ au moins un état récurrent.

$C(2)=\{2,5,6\}$ est une classe récurrente

$C(1)=\{1,3,4\}$ = — — transiente

$2\ 5\ 6 \rightsquigarrow$ Sous

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}_{Q_1} \end{array}$$

est une Matrice de transition

$\Rightarrow$ C'est une classe de ~~transition~~ récurrente

transition $\Rightarrow$

Sous Matrice d'une classe n'est pas une Matrice de transition transiente.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0{,}5} \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow$$

7) La chaîne n'est pas irréductible.

$T_2 = \inf \{ n \geq 1 ; X_n = 2 \}$

$\nu$ mesure invariante :

$\nu \cdot Q = \nu$.

$\tilde{\nu} Q_1 = \tilde{\nu}$ $\sim \tilde{\nu}(2,5,6) = 1$ = $\tilde{\nu}$ est l'unique mes

6x6 ~ 3x3

$\nu(\nu(1), \nu(2), \nu(3), \nu(4), \nu(5), \nu(6))$ $\sim \nu Q = \nu$

$\tilde{\nu}(1)$ $\tilde{\nu}(5)$ $\tilde{\nu}(6)$

3) $T_1 = \inf \{ n \geq 1 , X_n = n \}$. $P_5(T_1 = n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ens + 5 bnh nenhi de P 1

$P_5(T_6 = n)$.

$(T_6 = n) = \bigcup_{k+l=n} ( X_0 = 5 , X_1 = 5 \ldots X_2 = 5, \boxed{X_{k-1} = 5, X_k = 2}; X_{k+1} = 2, \ldots \boxed{X_{n-1} = 2 ; X_n = 6} )$

$(k-1)$ boucle en 5

$n - k - 1 = \ell$

$\ell$ boucle en 2

$n + 1 = k - 1 + 1 + \ell + 1$

$n + 1 = k + \ell + 1$

$P_5(T_6 = n) = \sum_{k+\ell=n} P( \; (0,5)^n \; ) = (n+1)(0,5)^n$