Introduction à la Statistique Bayésienne

Bases théoriques et applications

Partie III

F. Mhamdi[1,2]

[1]Laboratoire des Signaux et Smart Systèmes (L3S-ENIT)

[2]Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information (ESSAI)

ESSAI, 2024-2025

Table of Contents I

Estimateur du maximum à postériori (MAP)

Contexte

$X_1, ..., X_n$ n-échantillon de X.
$L(X/\widetilde{\Theta} = \theta) \hookrightarrow \mathbb{P}_\theta = f(x/\theta)\mu$
$L((X_1, ..., X_n)/\widetilde{\Theta} = \theta) \hookrightarrow \mathbb{P}_\theta^n = \Pi_{k=1}^n f(x_k/\theta)\mu^{\otimes n}$
$\pi = \pi(\theta)\beth$: la loi à priori.
On a : $\Pi_{k=1}^n f(x_k/\theta)\pi(\theta) = \pi(\theta/x_1, ..., x_n) m_\pi(x_1, ..., x_n)$

Estimateur du maximum à postériori (MAP)

Contexte

$X_1, ..., X_n$ n-échantillon de X.
$L(X/\widetilde{\Theta} = \theta) \hookrightarrow \mathbb{P}_\theta = f(x/\theta)\mu$
$L((X_1, ..., X_n)/\widetilde{\Theta} = \theta) \hookrightarrow \mathbb{P}_\theta^n = \Pi_{k=1}^n f(x_k/\theta)\mu^{\otimes n}$
$\pi = \pi(\theta)\beth$: la loi à priori.
On a : $\Pi_{k=1}^n f(x_k/\theta)\pi(\theta) = \pi(\theta/x_1, ..., x_n)m_\pi(x_1, ..., x_n)$

Définition : Estimateur par maximum à postériori

L'estimateur du maximum à postériori (MAP) associé à π qu'on le note $\hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$ est solution de :

$$\max_{\theta \in \Theta} \pi(\theta/X_1, ..., X_n)$$

ou bien

$$\max_{\theta \in \Theta} \Pi_{k=1}^n f(x_k/\theta)\pi(\theta)$$

Lois impropres

Dans les sections précédentes, l'espace du paramètre est "gouverné" par une loi de probabilité qu'on appelle loi à priori.
On peut étendre les notions ci-dessus à des mesures plus générales : les mesures σ-finies.
Soit $\gimel$ une mesure σ-finie à priori sur $\Theta(\subset E)$. Avec (E, d) un espace métrique (généralement $E = \mathbb{R}^m$).

Lois impropres

Dans les sections précédentes, l'espace du paramètre est "gouverné" par une loi de probabilité qu'on appelle loi à priori.
On peut étendre les notions ci-dessus à des mesures plus générales : les mesures σ-finies.
Soit $\gimel$ une mesure σ-finie à priori sur $\Theta(\subset E)$. Avec (E, d) un espace métrique (généralement $E = \mathbb{R}^m$).

Définition : lois impropres

Une loi impropre est une mesure positive σ-finie, qui vérifie :
$\int_\Theta \pi(\theta) d\gimel(\theta) = +\infty$.
On suppose que $m_\pi(x) = \int_\Theta f(x/\theta)\pi(\theta) d\gimel(\theta) < +\infty$ μ.p.p.

Exemple :

$$X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2); \pi(\mu) = 1; \mu = \theta \in \Theta = \mathbb{R}.$$

Exemple :

$$X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2); \pi(\mu) = 1; \mu = \theta \in \Theta = \mathbb{R}.$$

$m_\pi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2] d\mu < +\infty$

Donc la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est une loi impropre qu'on peut utiliser.

Définition : Estimateur Bayésien généralisé

On appelle estimateur bayésien généralisé associé à X (resp $(X_1, ..., X_n)$), la fonction de perte $L(.,.)$ et la mesure à priori $\beth$ et qu'on le note $\hat{\theta}^{B.G}(X)$ (resp. $\hat{\theta}_n^{B.G}(X_1, ..., X_n)$) l'estimateur qui minimise le risque bayésien généralisé pour la mesure $\beth$.

$$R_\pi^{B.G}(\hat{\theta}^{B.G}(X)) = \min_{\hat{\theta}(X)\in E} \int_\Theta R(\theta, \hat{\theta}) d\beth(\theta)$$

resp.

$$R_\pi^{B.G}(\hat{\theta}_n^{B.G}(X_1, ..., X_n)) = \min_{\hat{\theta}_n(X_1,...,X_n)\in E} \int_\Theta R(\theta, \hat{\theta}_n(X_1, ..., X_n)) d\beth(\theta)$$

EXERCICE 1

Soient :

- $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$; σ^2 connue; $\eta = \frac{1}{\sigma^2}$
- La loi à priori pour $\mu \hookrightarrow N(\mu_0, \eta_0^{-1})$; avec $\eta_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}$

1- Déterminer pour cet exemple la loi à postériori $\pi(./x)$

2- Comparer les espérances et les variances à postériori et à priori.

3- Déterminer $\delta^\pi(X)$ l'estimateur Bayésien avec la fonction perte quadratique.

4- Montrer que pour $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de X on obtient :

$\pi(\mu/x_1, ..., x_n) \propto exp[-\frac{1}{2}(n.\eta + \eta_0)(\mu - \frac{n.\eta\hat{X}_n + \eta_0\mu_0}{n.\eta + \eta_0})^2]$

5- En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$.

6- Déterminer

$$\hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$$

avec $\theta = \mu$.

7- Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$

Exercice 2

Soient :

- $X \hookrightarrow Bn(n, p)$;
- π La loi à priori $\hookrightarrow \pi(u) = \frac{1}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}}$

1- Montrer que $f(x, p) = \frac{C_n^x}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} p^{x-\frac{1}{2}} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}$

2- Déduire que :

$$m_\pi(x) = \frac{\beta(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2})}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} C_n^x$$

3- En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$

4- Déterminer l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

Exercice 3

Soient :

- $X = (X_1, ..., X_n)$ n observations indépendantes distribuées selon la loi $N(\theta, \sigma^2)$; σ^2 connue.
- π La loi à priori sur θ de la forme $\mathbb{N}(\tau, \zeta^2)$

1- Déterminer $L((X_1, X_2, ..., X_n)/\widetilde{\Theta} = \theta)$

2- Déterminer $L((X_1, X_2, ..., X_n), \widetilde{\Theta})$

3- Montrer que

$$f((x_1, ..., x_n), \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\sigma^n\zeta} exp[-\frac{1}{2}(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\zeta^2})(\theta - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\zeta^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{\tau}{\zeta^2}))^2] exp[-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{\tau^2}{\zeta^2} - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\zeta^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{\tau}{\zeta^2})^2)]$$

4- En déduire la loi à postériori.