ESSAI
ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
$1^{\text{ère}}$ année

2022-2023
Intégration et Probabilité

Série d'exercices N°2

Continuité et dérivation des intégrales à paramètre

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par

$$g(x,y) = \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}.$$

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \to g(x,y)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

   On pose :

$$G(y) = \int_{\mathbb{R}_+} g(x,y)\,d\lambda(x), \qquad \forall y \geq 0.$$

2. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Mq $G(y)$ continue $\Leftrightarrow$ $y \mapsto g(x,y)$ continue

3. Calculer

$$\lim_{y \to +\infty} G(y).$$

4. Montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par

$$f(x,t) = e^{-xt}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \chi_{]0,+\infty[}(x).$$

1. Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \to f(x,t)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

   On pose :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,d\lambda(x), \qquad \forall t \in]0,+\infty[.$$

2. Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer F''.

Série d'exercices N°2 :

Exercice 1 : $g : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \dfrac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}$

1)

soit $y \in \mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \dfrac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} = h(x)$ qui est bien intégrable.

$\Rightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, \lambda)$

2) On pose $G(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} g(x,y)\, d\lambda(x) \; ; \forall y \geqslant 0$

*) $\forall y \in \mathbb{R}_+ \, , x \longmapsto g(x,y)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ car $x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}$ est continue

*) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \, , y \longrightarrow g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

*) On a d'après la question précédente

$\exists \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+, \lambda) \; \forall y \in \mathbb{R}_+$

$|g(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$: intégrable

On applique le Théorème de continuité sous signe intégrale.

$\Rightarrow G$ est continue sur $\mathbb{R}$

3) $\forall y \geqslant 0$, $g(x,y)$ converge λ-p.p vers 0

$\forall y \geqslant 0, |g(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{x^2+1} = \varphi(x)$

avec φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

D'après le TCD on a

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g(x,y)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{y \to +\infty} g(x,y)\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} 0 \, d\lambda(x) = 0$$

ainsi $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} G(y) = 0$

4) •) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $y \longmapsto g(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

•) $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto g(x,y)$ est integrable sur $\mathbb{R}_+$

•) $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \dfrac{-x^2}{1+x^2} e^{-x^2 y}$

$$\left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right| = \frac{x^2 e^{-x^2 y}}{1+x^2}$$

$\exists f \in \mathcal{L}^1$ tq $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| \leq f(x)$ μ p.p

Pour montrer la dérivabilité de G $\forall a \in \mathbb{R}_+$

soit $\varepsilon > 0$ tq $a \in [\varepsilon, +\infty[$

alors $\forall y \in]\varepsilon, +\infty[$ et $\forall x \geq 0$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{-x^2}{1+x^2} e^{-x^2 y}\right| \leq e^{-\varepsilon x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

D'après le Théorème de dérivation sous signe integrale.

$$G'(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-x^2 y} \, d\lambda(x)$$

$\forall y \in]\varepsilon, +\infty[$ en particulier en a.

Comme ceci est vrai pour tout a.

G est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 :

1) soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

$$f(x,t) = e^{-xt}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \chi_{]0,+\infty[}(x) \leqslant e^{-xa}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \chi_{]0,+\infty[}(x)$$

$$\leqslant e^{-xa}$$

$x \longmapsto e^{-xa}$ integrable

D'où $\forall t \in]0,+\infty[$ $x \longmapsto f(x,t)$ est integrable sur $\mathbb{R}$

2) $$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, d\lambda(x) \quad \forall\, t \in]0,+\infty[$$

- $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable
- $x \mapsto f(x,t)$ est integrable (question 1)
- $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = \left|-x\, e^{-xt}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \chi_{]0,+\infty[}(x)\right|$$
$$\leq |x|\, e^{-xt}\, \chi_{]0,+\infty[}(t)$$

$\forall t>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

soit $\varepsilon > 0$ $\forall t \in [0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq |x|\, e^{-\varepsilon x} \in \mathcal{L}^1$$

$\Rightarrow$ F est dérivable sur $[\varepsilon, +\infty[$ et ceci $\forall \varepsilon > 0$

Donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$

et on a

$$F'(t) = -\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\, \frac{\sin^2 x}{x}\, d\lambda(x)$$

de même on montre que F' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$F''(t) = \int \frac{\partial f'}{\partial t}\, d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-xt} \sin^2 x\, d\lambda(x)$$

$$= \int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos 2x\, dx}_{\text{Double integration par partie}}$$

$$= \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+4}$$