ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION
Département Statistique
1ère année

Série d'exercices N°1

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue On pose :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} \end{aligned}$$

1. Montrer que A est ouvert et B est fermé.
2. Montrer les relations suivantes :
   (a) $A \subset \overset{o}{B}$
   (b) $\overline{A} \subset B$

Exercice 2

Les fonctions suivantes admet-elle des limites à l'origine ?

1. $$f(x,y,z) = \frac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

2. $$f(x,y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} sin(x), \frac{sin(x^2) + sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

3. $$f(x,y) = \frac{1 - cos(xy)}{xy^2}$$

Exercice 3

Soient $\alpha, \beta > 0$. Déterminer, suivant les valeurs de α et β, si la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$$

admet une limite en $(0,0)$.

ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION
Département Statistique
1ère année

2022-2023
Calcul différentiel
& Optimisation dynamique

Série d'exercices N°2

Exercice 1

1. Donner la notion de Coercivité.
2. Les fonctions, définies ci-dessous, sont-elles coercives ?
   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^3 + x + 1$
   (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2(x, y) = (x^2 + 2y^2) + e^{x-y}$
   (c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_3(x, y) = 2x^2 + y^3 + 2y^2$

Exercice 2

Déterminer les extremums locaux éventuels de la fonction f dans chacuns des cas suivants :

1.
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & x^2 + y^2 - xy \end{array}$$

2.
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & x^2 + y^3 \end{array}$$

Exercice 3

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = (x + y)^2 - 4y^3 + y^4$.

   (a) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
   (b) Calculer la matrice hessienne de f en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Déterminer la nature du point critique $(-3, 3)$.

2. Trouver les points critiques et la nature de chacun d'eux, pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définies ci-dessous :

   (a) $f_1(x, y) = (x - 5)^2 + (y - 2)^2$
   (b) $f_2(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 12y + 10$
   (c) $f_3(x, y) = \sin x + y^2 + 2y + 1$
   (d) $f_4(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = e^{xy}(x+y)$$

Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer de f est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

2. Montrer que f est continue sur $(0,0)$.

3. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

4. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

5. Calculer, si elles existent, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

6. La fonction f est-elle différentiable deux fois à l'origine ? Justifier la réponse.

Série d'Exercices N° 1.

$\bar{A}$: l'adhérence de A = la fermeture

$\overline{]0,1[} = [0,1]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

→ le plus petit fermé contenant A

- $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$
- $\bar{A} = A$ ssi A fermé
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

$\mathring{A}$: interieur de A (int A) le plus grand ouvert inclus dans A

- $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
- $\mathring{A} = A$ ssi A ouvert.
- $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

∂A : frontière de A.

$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

EX 1:

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} = f^{-1}(]0,+\infty[)$

on a $\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \\ ]0,+\infty[\text{ est ouvert} \end{cases} \Rightarrow$ A est un ouvert

A ouvert
si $\forall x \in A \ \exists r > 0$
$\forall y \in B_r(x) \Rightarrow y \in A$
$\underset{\|}{} \ ]x-r, x+r[$.

soit $x \in]0, +\infty[$

$r = |x|$
$y \in]x - |x|, x + |x|[$ or $x > 0$.

$\overset{\|}{]0, 2x[} \subset]0, +\infty[$

$y \in]0, +\infty[$

. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, +\infty[)$.

or f continue
$[0, +\infty[$: ferme $\Big\}$ B fermé.

2) $A \subset B$ d'où $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ or A est ouvert donc $A \subset \mathring{B}$

$A \subset B$ donc $\overline{A} \subset \overline{B}$ or B fermé $\Rightarrow \overline{A} \subset B$ $(\overline{B} = B)$

Ex2 :
$f(x) = (f_1(x), \text{———}, f_m(x))$
f continue en a ssi $\forall k \in [1, m]$ f_k est cont en a.

1) $f(x, y, z) = \dfrac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 z z^2}$

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0\right) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{3}$.

$f\left(\frac{1}{n}, 0, 0\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 0\right) \neq f\left(\frac{1}{n}, 0, 0\right) \Rightarrow$ donc c n'admet pas de lim.

2) $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x} \sin(x), \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \left(-1, \frac{2\sin\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\cos(x^2-y^2)}{\sqrt{}} \right.$

$\left| \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (-1, 0)$

$\frac{1-\cos(\cancel{t})}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$

$f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2} = x \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}$

$\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{1}{2}$

$x \cdot \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

EX3:

$$f(x,y) = \frac{x^{\alpha} y^{\beta}}{x^2+y^2}$$

a $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$, $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$.

$$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}.$$

- si $\alpha+\beta > 2$; $f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$
- si $\alpha+\beta \leq 2$ on a $f\left(\frac{1}{n},0\right)=0 \Rightarrow f \to 0$

or $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} n^{2-\alpha-\beta}$. $f \not\to 0$

f n'admet pas de li

Calcul diff:

- $f'(x,y) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + hy) - f(x_0)}{h}$

- si y est un vecteur unitaire $(\|y\| = 1)$

  $f'(x_0 ; y)$: dérivée directionnelle de f en x_0 selon la direction y.

- si $y = e_k$ ($k^{ème}$ vecteur unitaire)

  $f'(x_0 ; y)$: dérivée partielle

- f est Gâteaux - dérivable en x_0 :

  ssi $\begin{cases} ① \ f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ \% à toutes les } y. \\ ② \ f'(x_0, y) \text{ linéaire.} \end{cases}$

- f est différentiable ssi :

  - $1^{ère}$ méthode : en un pt (a, b)

    $\lim_{(h,k) \to (0,0)} A(h,k) = 0$

    $A(h,k)$: taux d'accroissement.

    $A(h,k) = \dfrac{|f(a+h, b+k) - f(a,b) - ah + bk|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$

  - $2^{ème}$ méthode (domaine)

    Mq f est de classe C^1

    - f admet des dérivées partielles
    - ces dérivées partielles sont continues.

EX4:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$A(h,k) = \frac{\left|\frac{h^2k^3}{h^2+k^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h^2k^3|}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)}$$

$$= \underbrace{\frac{h^2}{h^2+k^2}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1} \leq k^2 \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 .$$

EX5:

$g : (x,y) \longrightarrow e^{xy}(x+y)$: continue sur $\mathbb{R}$.

① $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}(x+y) + e^{xy}$.

① continue sur $\mathbb{R}$

② : $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}(x+y) + e^{xy}$.

continue sur $\mathbb{R}$

alors les derivées partiels de g son C

$\Rightarrow g$ est C

$\Rightarrow g$ differentiable sur $\mathbb{R}^2$.

EX6:

1) $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ est une fonction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \Rightarrow f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,0\}$.

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

or $|x^2-y^2| \leq |x^2+y^2|$

don $\dfrac{|x^2-y^2|}{|x^2+y^2|} \leq 1.$

d'où

$$|f(x,y)| = \left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = |xy|\,\frac{|x^2-y^2|}{|x^2+y^2|}$$

$$\leq |xy| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

donc f est continue en $(0,0)$

3) $A(h,k) = \dfrac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$$= \frac{\left|hk\,.\,\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot\underbrace{\frac{|h^2-k^2|}{|h^2+k^2|}}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{k^2+h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

$\Rightarrow f$ est différentiable en $(0,0)$.

inégalité de young:

$$|xy| \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right|$$

or $\left| y\,\underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq |y| + \left|\frac{4x^2y^3}{(2xy)^2}\right| \leq |y| + |y| \underset{y\to 0}{\to 0}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ est C en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2yx^2 - \cancel{2y^3} - 2yx^2 + \cancel{2y^3}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) - 4\,\frac{y^2x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left| x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq r\,\frac{r^2}{r^2} + 4\,\frac{r^3 r^2}{r^4}$$

soit $r = \sqrt{x^2+y}$ $\qquad \leq r + 4r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

q: $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$ et cont sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$.

q4: $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$ et cont en $(0,0)$

$\Rightarrow f$ est diff sur $\mathbb{R}^2$

5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$

$$= \lim \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$$

$$= \frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1.$$

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \end{vmatrix}$$

$H(f)$ sym $\Rightarrow f$ — diff.

6) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

d'après le théo de Schwarz f n'est différentiable deux fois à l'origine.

$n \geq 2$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$x \longrightarrow f(x)$

condition nécessaire.

$\cdot) f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$

f admet un min local en $\bar{x}$

$\Longrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$

$\cdot) f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$

f admet un min local en $\bar{x}$

$\Longrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$ — éq. d'Euler.

$H_f(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x})$ semi définie positive (matrice ≥ 0)

condition suffisante :

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ \text{et } Hf(\bar{x}) \text{ est définie } \oplus \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ admet un min local en } \bar{x}.$$

point critique $\longrightarrow Hf$
$\nabla f = 0$

- d. pos : min
- d.n : max
- S.d. p : point selle

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$A > 0$ $\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{ A symétrique} \\ \text{- déterminant des mineurs } > 0 \end{array}\right.$

~~[illegible]~~

2) a) $f(x) = x^3 + x + 1$ non

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $f_2(x, y) = x^2 + 2y^2 + e^{x-y}$

$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} f(x) \overset{?}{=} +\infty$

Soit $t = \sqrt{x^2+y^2}$, $t^2 = x^2 + y^2$ oui

$f_2(x,y) > x^2 + 2y^2 > x^2 + y^2 = t^2 \xrightarrow[t^2 \to \infty]{} \infty$

c) $f_3(x,y) = 2x^2 + y^3 + 2y^2$

si $y \longrightarrow -\infty$, $\lim_{y \to -\infty} 2x^2 + y^3 + 2y^2 = \lim_{y \to -\infty} y^3 = -\infty$

donc non coercive.

Ex2:

condition nécessaire :

- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

f admet un min local en $x^* \Longrightarrow f'(x^*) = 0$

- $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

f admet un min local en $x^* \Longrightarrow f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \geq 0$

condition suffisante

$f \in \mathcal{C}^2$

$f'(x^*) = 0$

$f''(x^*) > 0$

$\Longrightarrow$ f admet un min local en x^*

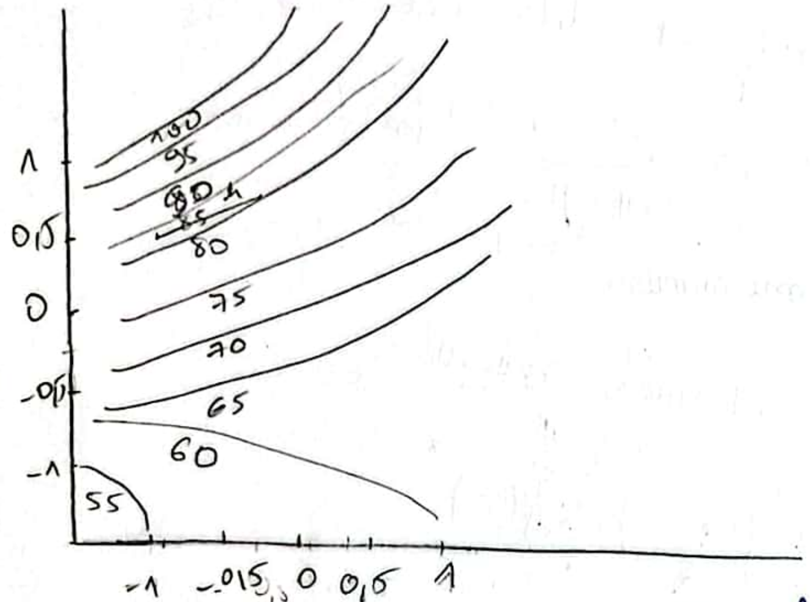
Calcul diff et Optimisation dynamique

Complément de cours : courbes de Niveau.

But: on peut utiliser l'information que nous donnent les courbes de Niveau d'une fonction pour estimer les dérivées partielles de la fonction en ≠ pts.

exemple : utiliser la représentation des courbes de Niveaux / ou courbes implicites pour estimer $f_x(-1, 0,5)$ et

$f_y(0, -0,5)$



$\cdot f_x(-1, 0,5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h, 0,5) - f(-1, 0,5)}{h}$

(variation locale vers la droite du pt $(-1, 0,5)$ on s'arrête à l'intersection d'une des courbes de niveau la valeur de h estimée est la distance parcourue).

$h \approx 0,5$

$\approx \frac{f(\overbrace{-1+0,5}^{-0,5}, 0,5) - f(-1, 0,5)}{1/2}$

$\approx \frac{87 - 90}{1/2} = -6$: le taux de variation instantané de la fonction lorsqu'on se en

$f_y(0,-0,5)$

$h \sim 0,25$

$$f_y(0,-0,5) \sim \frac{f(0,-0,5+h)-f(0,0,5)}{h} \sim \frac{f(0,-0,25)-f(0,0,5)}{0,25}$$

$$\sim \frac{72-67}{0,25} = 20.$$

EX1:

1) coercivité :

une fonction f définie sur un espace normé X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est dite coercive sur une partie non bornée P de X si $\lim\limits_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in P}} f(x) = +\infty$

Proposition : existence de minimum :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{continue, coercive}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

$\exists x^* \in \mathbb{R}^n$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $f(x^*) \leq f(x)$

$\Updownarrow$

f admet un min global

$\Updownarrow$

le problème $(P) : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

admet au moins une solution.

$n = 2 \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \cdot\ M \text{ sym} \Rightarrow c = b \\ \cdot\ a > 0 \\ \cdot\ ad - c^2 > 0 \end{cases}$

EX3:

1) a) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ 2(y+x) - 12y^2 + 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ \underbrace{2x + 2y}_{0} - 12y^2 + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ y^2(-12 + 4y) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = 3 \end{cases}$

$(0,0)$ et $(-3,3)$ 2 pts critiques.

2) $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 - 24y + 12y^2 \end{pmatrix}$

. Hf sym

. $2 > 0$

. $\det(Hf) = 24y^2 - 48y = 72 > 0$

$\Rightarrow (-3, 3)$ est un min local.

EX2:

1) $\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0$

point critique $(0,0)$

2) $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Symétrique.

$\det H_f = 2 \times 2 - 1 = 3 > 0$.

au pt critique $(0,0)$ donc

donc H_f est défini $+$

f admet un min local en pt $(0,0)$.

2) $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ pt critique $(0,0)$

$$Hg = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(Hf) = 0$$

$\Rightarrow Hf$ est semi - définit $\oplus$ on dit que $(0,0)$ est un pt de selle.

EX3:

1) a) $$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-5) \\ 2(y-2) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 5 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$; $\det Hf = 4 > 0$ déf $\oplus$

$\Rightarrow (5,2)$ min local.

b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 12$$

$$\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 2y - 12 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$$