Économétrie
Exercices Corrigés Partie 2

Josephson Junior R.

May 5, 2024

Table des matières

Soit le modèle défini par :

$$\begin{cases} Y = & X\beta + \varepsilon \quad & \varepsilon \sim AR(1) \\ \varepsilon_i = & \rho\varepsilon_{i-1} + \mu_t \quad & \mu_i \sim BB(0, \sigma_\mu^2) \end{cases}$$

Propriétés du terme ε_i

- $E(\varepsilon_i) = 0$
- La variance est donnée par :

$$V(\varepsilon_i) = \sigma_\mu^2 \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \right)$$

- La covariance :

$$E(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-j}) = \sigma_\mu^2 \; \rho^j \left(\frac{1}{1 - \rho^2} \right)$$

Exercice 1 :

L'estimation d'un modèle de régression a fourni les résultats suivants :

$$\hat{y}_i = -7.5 + 3.8x_i + 2.4z_i \quad ; \quad N = 33 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{33} (y_i - \bar{y})^2 = 25$$

$$\sum_{i=1}^{33} \hat{\varepsilon}_i^2 = 5 \; ; \; \sum_{i=1}^{33} \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_{i-1} = -3.6 \; ; \; \sum_{i=2}^{33} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2 = 17.2$$

1. Calculer et interpréter le coefficient de détermination R^2.
2. Tester au seuil de 5% la significativité globale du modèle.
3. Tester l'hypothèse d'autocorrélation des erreurs d'ordre 1. S'il y a autocorrélation, estimer le coefficient.

Coefficient de détermination R^2

R^2 représente la **proportion de la variation** de la variable dépendante qui est expliquée par la ou les variables indépendantes.

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{5}{25} = 0.8$$

Significativité globale

Les hypothèses :

$$\begin{cases} H0: & \beta = 0 \\ H1: & \beta \neq 0 \end{cases}$$

La statistique du test est :

$$F_c = \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{N - K}{K - 1} \sim \mathcal{F}(K - 1, N - K)$$

Après calcul $F_c = 60 > \mathbf{F}_{5\%}(2, 30) = 3.32$ alors le modèle est significatif.

Test de Durbin-Watson

Les hypothèses :

$$\begin{cases} H0: & \rho = 0 \\ H1: & \rho \neq 0 \end{cases}$$

La statistique de DW est donnée par :

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{33} \left(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{33} \hat{\varepsilon}_i^2}$$

La règle de décision :

0 $\rho < 0$ d_1 ? d_2 H0 2 H0 $4 - d_2$? $4 - d_1$ $\rho > 0$ 4

1.32 **1.58** **2.42** **2.68**

Après calcul **DW** $=$ **3.44** qui est dans le champ où $\rho > 0$ alors le modèle admet une autocoréllation d'ordre 1 et on a :

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = -0.72 < 0$$

Remarques

Les valeurs de $\mathbf{d_1}$ et $\mathbf{d_2}$ se trouvent sur la table de Durbin-Watson. Dans la table **k** désigne le nombre de variables explicatives ; après il suffira de voir la colonne **n** pour le nombre d'observations.

Exercice 2 :

On considère le modèle suivant :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad ; \quad u_t = 0.5u_{t-1} + \varepsilon_t$$

On dispose du tableau des données suivant :

Y_t	0.4	1.2	3.6	3.8	6.9	9.45
X_t	1.2	1.6	2.8	4.4	6.2	8.1

1. Expliquer la procédure d'estimation de ce modèle
2. Estimer les paramètres α et β

Procédure d'estimation

On remarque que les erreurs $u_t \sim AR(1)$ donc elles sont autocorrélées d'ordre 1 $\Rightarrow$ la MCO n'est pas plus valide.
On applique la MCG au modèle initial ce qui revient à appliquer la MCO au modèle quasi-différence suivant :
$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \alpha(1 - \hat{\rho}) + \beta(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + v_t$

$$\Longrightarrow y_t = A + \beta x_t + v_t$$

Estimation des paramètres

$$y_1 = Y_1\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} = 0.4\sqrt{1 - (0.5)^2} = 0.346 \ ; \ y_2 = 1 = 1$$

$$y_3 = Y_3 - \hat{\rho} Y_2 = 3 \ ; \ y_4 = 2 \ ; \ y_5 = 5 \ ; \ y_6 = 6$$

$$x_1 = X_1\sqrt{1 - \hat{\rho}^2} = 1.039 \ ; \ x_2 = X_2 - \hat{\rho} X_1 = 1$$

$$x_3 = 2 \ ; \ x_4 = 3 \ ; \ x_5 = 4 \ ; \ x_6 = 5$$

MCO :

$$\hat{\beta}_{MCO} = \frac{\sum_{t=1}^{6} x_t y_t - 6\bar{x}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{6} x_t^2 - 6\bar{x}^2} = \frac{16.99}{13.2046} = 1.287$$

$$\hat{A} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 2.891 - 1.287(2.673) = -0.549 = \hat{\alpha}(1 - \hat{\rho})$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{A}}{1 - \hat{\rho}} = -\frac{0.549}{1 - 0.5} = -1.098$$

Exercice 3 :

On considère le modèle économétrique suivant :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

On donne le tableau des valeurs suivant :

y	-3	8	1	12	-10	0	-1	2	6	9
x	1	0	0	1	-1	-1	1	0	1	0

1. Estimer par les MCO les paramètres du modèle (1).
2. Calculer la SCR et en déduire R^2.
3. Quel test peut-on effectuer pour tester l'autocorrélation des erreurs d'ordre 1 ? Rappeler son principe.
4. Procéder à ce test de deux manières différentes et conclure.

$$\left(A'A\right)^{-1} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 117 & -25 & 3 \\ . & 207 & -3 \\ . & . & 4 \end{pmatrix} \; ; \; A'\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 8.145 \\ 8.141 \\ -137.393 \end{pmatrix}$$

Estimation par MCO

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{24 - 10(0.48)}{6 - 10(0.04)} = 3.429$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1.7142$$

SCR et R^2

Les residus s'obtiennent par : $\hat{\varepsilon}_i = \hat{y}_i - y_i$

$$SCR = \sum_{i=1}^{10} \hat{\varepsilon}_i^2 = 316.571$$

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{316.571}{382.4} = 0.1721$$

Tester l'autocorrélation d'ordre 1

Puisque $n < 15$ on ne peut pas faire le test de Durbin-Watson, il faut passer au test de **Breusch-Godfrey**.
Son principe : estimer par MCO l'équation intermédiaire suivante :

$$\hat{\varepsilon}_i = a + bx_i + \rho\hat{\varepsilon}_{i-1} + v_i$$

Rappel :

$$SCR_{(1)} = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} - \hat{\beta}X'Y \Rightarrow SCR_{(2)} = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} - \hat{\beta}'\hat{A}'\hat{\varepsilon}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} = \left(A'A\right)^{-1}\hat{A}'\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0.337 \\ 1.894 \\ -0.55 \end{pmatrix}$$

$$SCR_{(2)} = 316.571 - 93.73 = 222.841$$

$$R^2_{(2)} = 1 - \frac{SCR_{(2)}}{SCR_{(1)}} = 1 - \frac{222.841}{316.571} = 0.296$$

Test de Fisher

Sous les hypothèses :

$$\begin{cases} H0 : & \rho = 0 \\ H1 : & \rho \neq 0 \end{cases}$$

La statistique de test est :

$$F = \frac{R^2_{(2)}}{1 - R^2_{(2)}} \frac{n - K - 2p}{p} \sim \mathcal{F}(p, n - K - 2p)$$

p est l'ordre de l'autocorrélation.
Après calcul : $F = 2.523 < F_{5\%}(1, 6) = 5.99$ donc le modèle admet une autocorrélation d'ordre 1.

Test LM

$$\chi_c^2 = (n-p)R^2_{(2)} \sim \chi^2(p)$$

Après calcul : $\chi_c^2 = 2.664 < 3.841$ alors on accepte H0 c-à-d il existe un problème d'autocorrélation d'ordre 1 des erreurs.

1. Une procédure pour tester l'hypothèse l'absence de cointégration

On parle de l'algorithme en deux étapes d'Engel et Granger (1987) :

- **Etape 1** : Tester l'ordre d'intégration des variables. Deux séries ne peuvent être cointégrées que si **elles ont le même ordre d'intégration**. Pour rétrouver l'ordre d'intégration des séries on applique le test de **Dickey-Fuller** ou l'ADF aussi.
- **Etape 2** : Estimer par MCO la relation de LT définit par :

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

Pour que la relation de cointégration soit acceptée il faut que $\hat{\varepsilon}_t$ soit stationnaire c'est-à-dire :

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t \sim \mathbf{I(0)}$$

2.a) Le modèle retenu pour le test ADF

C'est le modèle (3) défini comme suit :

$$\mathbf{\Delta TCER_t = b\Delta TMM_t + u_t}$$

2.b) Nombre de retard retenu pour effectuer ce test

On a retenu un nombre de retard égal à **0** pour effectuer ce test (**lags(0)**).

2.c) Compléter le tableau

	Stat Calculée	Stat tabulée	Ordre d'intégration
TMM	-1.173	-1.95	1
TCER	-1.656	-1.95	1
ΔTMM	-3.657	-1.95	0
ΔTCER	-4.962	-1.95	0

3.a) Interpretation du coeficient b

b représente la variation mariation du taux d'échange effectif réel par rapport au taux de marché monétaire.

$$\mathbf{b} = \frac{\Delta \mathbf{TCER_t}}{\Delta \mathbf{TMM_t}} \times \frac{\mathbf{TMM_t}}{\mathbf{TCER_t}}$$

Pour significativité on remarque que : $\mathbf{t_{Stat}} = \mathbf{12.68} > \mathbf{t^*} = \mathbf{1.96}$ alors on rejette H0. Donc le coefficient b est significatif.

3.b) Justification

Oui il existe une relation de cointégration entre les variables puisque les résidus sont stationnaires car :

$$\mathbf{t_{ADF}} = -\mathbf{3.4} < \mathbf{t^c(Mackinnon)} = -\mathbf{3.34}$$

3.c) Modèle proposé

Pour modéliser le lien entre ces variables on fait appel au modèle ECM défini par :

$$\mathbf{\Delta TCER_t} = \gamma_\mathbf{0} + \gamma_\mathbf{1}\mathbf{\Delta TMM_t} + \mathbf{c}\hat{\varepsilon}_\mathbf{t-1} + \mathbf{u_t}$$

- $\hat{\varepsilon}_\mathbf{t-1}$: résidu retardé d'une période d'estimation de la relation à LT.
- $\gamma_\mathbf{1}\mathbf{\Delta TMM_t}$: la composante dynamique de court terme du modèle.
- **c** : vitesse d'ajustement de la variable endogène vers l'équilibre de LT (si $< \mathbf{0}$: **force de rappel** ; sinon **force de répulsion et le deséquilibre est toujours persistant**).

1. Significativité des paramètres LT

Oui les paramètres LT sont tous signicatifs car les statistiques calculées sont toutes supérieures à la valeur critique (1.96).

2. Régression factice ou Relation de cointégration ?

Il s'agit bien d'une **relation de cointégration** car les résidus sont stationnaire au vu du test ADF sur les résidus :

$$\mathbf{t_{ADF} = -5.4 < t^c(Mackinnon) = -3.34 : \ rejet\ H0}$$

3. Validité du modèle ECM

Oui le modèle est **valide** car le coefficient correspondant à **R(-1)** est significativement négatif donc on a bien une force de rappel vers l'équilibre de LT.

1. Nombre de retard à rétenir

Après constatation des valeurs de l'AIC et du BIC on regarde la valeur minimale qui est au niveau du retard égal à 6. Donc nous rétiendront **6 retards**.

2. Calcul de l'AIC et du BIC

$$\mathbf{AIC(q) = ln\left(\frac{SCR}{T}\right) + \frac{2q}{T}} \quad ; \quad \mathbf{BIC(q) = ln\left(\frac{SCR}{T}\right) + \frac{q\ lnT}{T}}$$

Déduire SCR ?

$$\mathbf{SCR = T \times exp\left(AIC - \frac{2q}{T}\right) = 38 \times exp\left(9.84 - \frac{12}{38}\right) = 520110,561}$$

3. Ecriture du modèle

Soit $\mathbf{y_t} \sim \mathbf{DL(6)}$:

$$\mathbf{y_t} = \mu + \beta_0 \mathbf{x_t} + \beta_1 \mathbf{x_{t-1}} + \beta_2 \mathbf{x_{t-2}} + \beta_3 \mathbf{x_{t-3}} + \ldots + \beta_6 \mathbf{x_{t-6}} + \varepsilon_\mathbf{t}$$

4. Interprétation

En régardant les valeurs du Prob. on remarque que le coefficient associé à $\mathbf{x_{t-6}}$ est le seul coefficient statistiquement différent de 0 ceci confirme notre choix du retard 6.
L'impact de la variable x_t peut aller jusqu'à un décalage de 6 périodes.

5. Retard moyen

$$\mathbf{RM} = \frac{\mathbf{B'(1)}}{\mathbf{B(1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 + 3\hat{\beta}_3 + 4\hat{\beta}_4 + 5\hat{\beta}_5 + 6\hat{\beta}_6}{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 + \hat{\beta}_5 + \hat{\beta}_6} = \mathbf{3.64 \ Trimestres}$$