ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 2h00
Novembre 2007

Correction de l'Examen du module Analyse Numérique

Exercice 1 (4pt).

1. La méthode de la puissance consiste à calculer la suite $x_n = \frac{Ax_{n-1}}{\|Ax_{n-1}\|}$ avec $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Nous obtenons ainsi $\lambda_1 = 4.56$ associée au vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.26 \\ -0.26 \end{pmatrix}$.
2. L'algorithme de la méthode de la puissance inversée prend en entrée la matrice A,une précision de calculs ϵ et un vecteur x_0 et retourne la valeur propre λ_n de plus petit module associée à A ou un message d'erreur. Il s'agit de calculer la suite $x_{n+1} = \frac{A^{-1}x_n}{\|A^{-1}x_n\|}$ qui converge vers le vecteur propre associé à λ_n (à ϵ près lorsque x_0 ne lui est pas colineaire) sinon l'algorithme diverge (dans ce cas, il suffira de choisir un autre vecdteur initial). La valeur propre de plus petit module associée à A est égale à $\lambda_n = \frac{A^{-1}x_n[1]}{x_n[1]}$.

   Ici, nous avons supposé que la matrice A est inversible et qu'elle admet n valeurs propores distinctes.

Exercice 2 (4pt). Etant donnés une matrice A triangulaire inférieure de taille (n, n) avec des 1 sur la diagonale inversible et un vecteur b de taille n, la méthode de descente est donnée par l'algorithme suivant :

Début
  $x_1 := b_1$
  Pour i allant de 2 à n Faire
    $x_i := b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{i,j}x_j$
  Fin Pour.
Fin.

Le nombre d'opérations élémentaires de la méthode de descente appliquée au système $Ax = b$

est égal à $\sum_{i=2}^{i=n} i$ additions et $\sum_{i=2}^{i=n}(i-1)$ multiplications. La complexité est de l'ordre de $o(n^2)$.

Problème (12pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 1, & f_1 = 0, & f_2 = 1, & f_3 = 4. \end{array}$$

1. Afin de déterminer une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire, nous appliquerons la méthode des moindres carrés discrets qui consiste à minimiser la somme des distances aux carrés,nous obtenons grâce à cette minimisation, le système d'équations linéaires suivant :
   (a) $\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$
   (b) La décomposition LU de A est donnée par $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$.
   (c) Le système $LU \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ est équivalent à $U \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ a_1 \end{pmatrix} = y$ et $Ly = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   Nous obtenons $y_1 = 8$, $y_2 = \frac{10}{3}$ grâce à une descente et $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$ grâce à une remontée.
2. Le polynôme de Lagrange P sur les points (x_i, f_i) pour i entre 0 et 3 est égal à

$$P(x) = x^2$$

3. Le polynôme de Lagrange P passe nécessairement par tous les points d'interpolation. En outre et contrairement à la droite de régression linéaire $y = x + 1$, le degré de P est de l'ordre du nombre de points interpolés. La droite de régression résume un comportement du nuage de points...
4. Le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction f de classe C^2 suppose que f' et f'' soient non nuls sur $[a, b]$ et que f soit stable sur ce même intervalle. Ainsi pour tout $x_0 \in [a, b]$ vérfiant $f(x_0).f''(x_0) > 0$, la suite définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est convergente vers l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$.
   Ce théorème ne s'applique pas au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec $x_0 = 1$ en revanche toutes les hypothèses sont satisfaites pour $x_0 =$.

Bonne Continuation,

Ines Abdeljaoued.