$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow a^2b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$(bx - ay)^2 + 2abxy = a^2b^2$

ESSAI — ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique

1ère année

2022-2023

Intégration et Probabilité

Série d'exercices N°4

Intégration sur un espace produit II

$bx = ay$.

$y \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 4 \quad | \quad x^2 \geq 4 - y^2$

Exercice 1

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$. Calculer l'aire du domaine D de deux manières différentes.

$A = \int_D$

Exercice 2

Calculer l'aire de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha x < y^2 < \beta x \quad \text{et} \quad ay < x^2 < by\}$ où $0 < \alpha < \beta$, et $0 < a < b$. On pourra poser : $x^2 = uy$ et $y^2 = xv$. $/ \ u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}$

Exercice 3

Déterminer le volume de la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre o et de rayon $R > 0$. On utilisera les coordonnées sphériques.

$\iint_D dx\,dy =$

Exercice 4

Calculer $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d\lambda_3$ où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

si on pose $x^2 = u \cdot y$

$2x\,dx = 2y\,du$

Exercice 5

1. Montrer que l'application f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
$$g(x, y) = e^{-(x^2+2xy+2y^2)}$$

sont intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son intégrale.

$y^2 = xv$

$2y\,dy = x\,dv$

2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) = \sqrt{\pi}$$

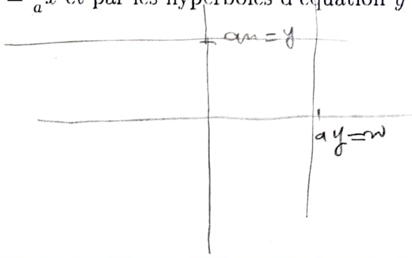
$dy = \frac{x}{2y} dv$

$dx = \frac{y}{2x} du.$

$\int = dv\,du$

Exercice 6

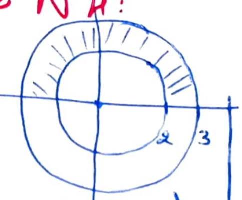
Calculer l'aire du compact D du quart du plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ délimité par les droites d'équation $y = ax$ et $y = \frac{1}{a}x$ et par les hyperboles d'équation $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.



$\Phi :]\alpha, \beta[\times]a, b[\longrightarrow D$

$(u, v) \longmapsto ($

Serie d'exercice N°4 :



autre méthode

$$\mathcal{A} = \frac{9\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

Exercice 1 :

On pose $\Phi :]2,3[\times]0,\pi[\longrightarrow \mathcal{D}$

$$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{D}} dx.dy = \iint_{]2,3[\times]0,\pi[} |J_\Phi|\, dr.d\theta = \iint_{]2,3[\times]2,\pi[} r\,dr.d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_2^3 r.dr = \frac{5\pi}{2}.$$

Théorème d'inversion local de sert

Exercice 2 :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha x < y^2 < \beta x,\ a\cdot y < x^2 < by\}$$

$0 < a < b$ $\qquad x^2 = u y \Rightarrow u = \dfrac{x^2}{y}$

$0 < \alpha < \beta$ $\qquad y^2 = v x \Rightarrow v = \dfrac{y^2}{x}$

$\Rightarrow \alpha < v < \beta$ et $a < u < b$

$\Phi :]a,b[\times]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathcal{D}$

$(u,v) \longmapsto (x = \dots, y = \dots)$ ça sera compliqué

$\Phi^{-1} : \mathcal{D} \longrightarrow]a,b[\times]\alpha,\beta[$

conséquence du Théorème ⚠

$(x,y) \longmapsto \left(\dfrac{x^2}{y}, \dfrac{y^2}{x}\right)$

$\Phi : U \to V$, $y \mapsto x = \Phi(y)$

$f : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

$$J_{\Phi^{-1}} = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3, \quad J_\Phi = \left(J_{\Phi^{-1}}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{D}} d\lambda(x,y) = \iint_{]a,b[\times]\alpha,\beta[} = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(b-a)$$

Exercice 3 :

Jacobien pour $x = r\cos\theta\cos\varphi$ $= r.\cos\theta.$

$y = r\cos\theta\sin\varphi$

$z = r\sin\theta$

⚠ Il en existe 3 version des coordonnées sphérique

$$V = \iiint_S dx\,dy\,dz = \iiint_R |J_\varphi|\,dr.\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercice 4 :

$$\iiint_D \sqrt{z^2 + y^2 + x^2}\,dx.dy.dz = ?$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$D = \{r^2 \leq 1\} = \{r \in \mathbb{R}$ tq $-1 \leq r \leq 1\}$

$x = r\cos\theta\cos\varphi$

$y = r\cos\theta\sin\varphi$

$z = r\sin\theta$

$J_{\varphi} = r^2\cos\theta$

$$\varphi :]0,1[\times]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\times]-\pi,\pi[\longrightarrow D$$

$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta)$$

r est un rayon donc $0 \leq r \leq 1$

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{+\pi} r.r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\varphi\right]_{-\pi}^{\pi} = 4

ercice 5.

1) * $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ est bien di ~~fence~~, continue donc mesurable et positive

+ La mesure de Lebesgue est σ-finie

Donc D'après Fubini-Tonelli puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx.dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Après Calcul}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx.dy = \pi$$

Ce qui donne f est bien intégrable au sens de Lebesgue

(b) * $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto e^{-(x^2+2xy+2y^2)}$ est bien continue donc mesurable de plus positive

* La mesure de Lebesgue est σ-finie

Donc D'après Fubini-Tonelli
On remarque d'abord que:

$$x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$$

$$g(x,y) = f(x+y,y)$$

Changement de variable $U = x+y$, $V = y$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto (x+y, y)$

$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(U,V) \longmapsto (U-V, V)$

$\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, d\lambda_2(x,y)$

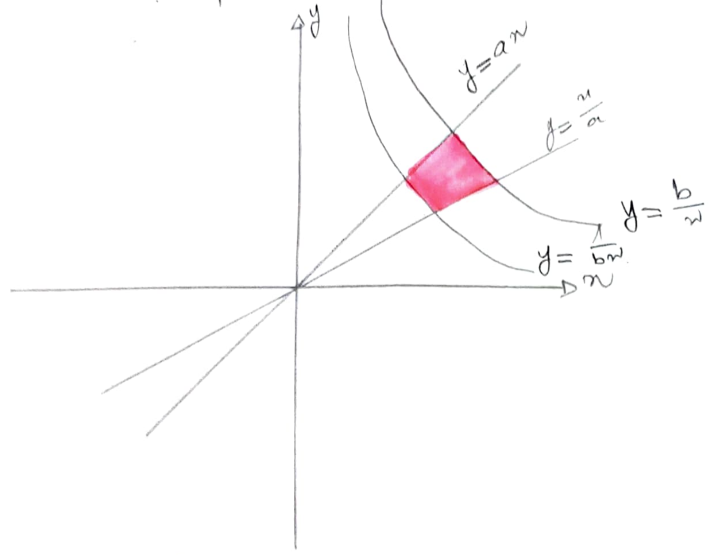
$$J_{\Phi^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} g(\varphi^{-1}(U,V))\,|1|\,d\lambda_2(U,V)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(U^2+V^2)}\,d\lambda_2(U,V) = \pi$$

Exercice 6:

on va imposer que $a \geq \frac{1}{a}$, $b \geq \frac{1}{b}$



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} , y \leq ax , y \geq \frac{1}{a} x , y \leq \frac{b}{x} , y \geq \frac{1}{bx} \right\}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} , \frac{1}{b} \leq xy \leq b , \frac{1}{a} \leq \frac{y}{x} \leq a \right\}$$

Changement de variable: $U = xy$, $V = y/x$

$$\Rightarrow y = \sqrt{U.V} , \quad x = \sqrt{\frac{U}{V}}$$

$$\Phi : \left]\frac{1}{b}, b\right[\times \left]\frac{1}{a}, a\right[\longrightarrow D$$

$$(U,V) \longmapsto \left(\sqrt{\frac{U}{V}} , \sqrt{U.V} \right)$$

$$J_\Phi(U,V) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{U.V}} & -\frac{\sqrt{U}}{2V\sqrt{V}} \\ \frac{\sqrt{V}}{2\sqrt{U}} & \frac{\sqrt{U}}{2\sqrt{V}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2V}$$

$$A = \int_{\frac{1}{b}}^{b} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{2V} \, dU . dV \quad = \left(b - \frac{1}{b}\right) \ln(a)$$