Chapitre 3, Modèles à équations simultanées

Un système d'équations simultanées est dit complet lorsqu'il y a autant de variables endogènes que d'équations.

Structure d'un système à équations simultanées: On parle de structures lorsqu'on précise exactement:

- La forme des équations;

- La valeur des coefficients;

- La forme de la distribution des erreurs.

1. Forme structurelle définie par l'économiste: un système à n équations, d'où n variables endogènes et K variables exogènes, définie comme suit,

A l'instant t, le système à n équations simultanées prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \cdots B_{1n}y_{nt} + \alpha_{11}x_{1t} + \alpha_{12}x_{2t} + \cdots + \alpha_{1K}x_{Kt} = \varepsilon_{1t} \text{ éqt relative à } y_1 \\ \beta_{21}y_{1t} + \beta_{22}y_{2t} + \cdots B_{2n}y_{nt} + \alpha_{21}x_{1t} + \alpha_{22}x_{2t} + \cdots + \alpha_{2K}x_{Kt} = \varepsilon_{2t}\text{éqt relative à } y_2 \\ \vdots \\ \beta_{n1}y_{1t} + \beta_{n2}y_{2t} + \cdots B_{nn}y_{nt} + \alpha_{n1}x_{1t} + \alpha_{n2}x_{2t} + \cdots + \alpha_{1nK}x_{Kt} = \varepsilon_{nt}\text{éqt relative à } y_n \end{cases}$$

$$(1) \qquad B_{(n,n)}Y_{t(n,1)} + \mathrm{C}_{(\mathrm{n,K})}X_{t(K,1)} = \varepsilon_t \ \ \forall\, t = 1, \cdots, T \ (appelé\ modèle\ global)$$

$$B_{(n,n)}Matrice\ non\ singulière\ des\ coefs\ structurels\ associés\ aux\ variables\ endogènes,$$
$$Y_{t(n,1)}\ vecteur\ des\ variables\ endogènes,$$
$$\mathrm{C}_{(n,K)}matrice\ des\ coefs\ structurels\ associés\ aux\ variables\ exogènes,$$
$$\varepsilon_t\ vecteur\ des\ erreurs,$$
$$X_{t(K,1)}vecteur\ des\ variables\ exogènes,$$
$$t = 1, \cdots, T$$

$$B_{(n,n)}Y_{t(n,1)} + \mathrm{C}_{(\mathrm{n,K})}X_{t(K,1)} = \varepsilon_{t(n,1)}\ Forme\ struturelles\ du\ syst. d'éqts. simultanées$$

2. La précision du système passe par la précision des erreurs où on a:

$$\begin{cases} E(\varepsilon_{1t}) = 0 \\ E(\varepsilon_{2t}) = 0, \forall\, t \\ E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{is}) = \begin{cases} \sigma_{ii}\ si\ t = s \\ 0\ si\ t \neq s\ pas\ de\ corrélation\ entre\ périodes \end{cases} \end{cases}$$

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{i's}) = \begin{cases} \sigma_{ii'}\ si\ t = s \\ 0\ si\ t \neq s\ \ indépendance \end{cases}$$

De manière générale, on a pour le modèle (1):

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0, \forall\, t \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s{}') = \begin{cases} \Omega \;\; si\; t = s, & \Omega\, matrice\ définie\ positive\ \forall t, s \\ 0 \;\; si\; t = s \end{cases} \\ On\ suppose\ que\ Z_t\ est\ fixe\ et\ indépendante\ de\ \varepsilon_t. \end{cases}$$

* L'hypothèse d'absence de corrélation entre variables explicatives et termes résiduels n'est pas respectée.

Exemple1: On considère le système d'éqts. structurel suivant,

$$C_t = \alpha + \beta R_t + \varepsilon_t, \qquad \forall t$$
$$R_t = C_t + I_t \;\; identité$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

On a

$$\begin{aligned} cov(R_t, \epsilon_t) &= cov(C_t + I_t, \epsilon_t) \\ &= cov(C_t, \epsilon_t) + cov(I_t, \epsilon_t) \\ &= cov\left(\frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} I_t + \epsilon_t, \epsilon_t\right) \\ &= cov\left(\frac{\alpha}{1-\beta}, \epsilon_t\right) + \frac{\beta}{1-\beta} cov(I_t, \epsilon_t) + \frac{1}{1-\beta} cov(\epsilon_t, \epsilon_t) \\ \Leftrightarrow cov(R_t, \epsilon_t) &= \frac{1}{1-\beta} V(\epsilon_t) = \frac{\sigma^2}{1-\beta} \neq 0 \end{aligned}$$

Remarquons la simultanéité du Revenu dans les deux éqts. tantôt variable exogène, tantôt variable endogène, à expliquer; ce qui efface l'expression d'exogénéité du revenu, R_t. Donc, la méthode d'estimation par les moindres carrés, en particulier MCO, donne des estimations non convergentes où $cov(R_t, \epsilon_t) \neq 0$. La méthode adéquate d'estimation des coefs. structurels du modèle est Moindre Carrée Double, MCD.

Suite de l'exemple1:

On a

$$C_t = \alpha + \beta R_t + \varepsilon_t, \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum(C_t - \bar{C})(R_t - \bar{R})}{\sum(R_t - \bar{R})^2} = \frac{m_{CR}}{m_{RR}}$$

$$\Rightarrow \widehat{\beta_{mco}} = \sum w_t C_t$$

$$\text{où } w_t = \frac{R_t - \bar{R}}{\sum(R_t - \bar{R})^2} \quad et \sum_t w_t = 0$$

$$\Rightarrow \widehat{\beta_{mco}} = \sum w_t(\alpha + \beta R_t + \varepsilon_t) = \beta + \sum_t w_t \varepsilon_t$$

$$et\ p \lim_{T \to \infty} \widehat{\beta_{mco}} = \beta + \sum_t w_t \varepsilon_t$$

$$= \beta + \frac{p \lim_T \frac{1}{T} \sum_t (R_t - \bar{R}) \varepsilon_t}{p \lim_T \frac{1}{T} \sum (R_t - \bar{R})^2}$$

$$et \frac{1}{T} \sum_t (R_t - \bar{R}) \varepsilon_t \neq 0 \text{ étant donné que } cov(R_t, \epsilon_t) \neq 0$$

3. <u>Procédure d'estimation des paramètres structurels du SES</u>: exprime l'ens. des variables endogènes $(y_1, \cdots, y_n)$ en fonction uniquement des variables exogènes $(x_1, \cdots, x_K)$ afin de garantir l'absence de corrélation entre partie certaine et résidu.

On se donne le modèle global suivant où on suppose l'inversibilité de la matrice $B_{(n,n)}$,

$$(1) \qquad B_{(n,n)} Y_{t(n,1)} + \mathrm{C}_{(\mathrm{n,K})} X_{t(K,1)} = \varepsilon_t \ \ \forall\, t = 1, \cdots, T$$

$$\Rightarrow B_{(n,n)}{}^{-1}(1) \Rightarrow Y_{t(n,1)} = -B_{(n,n)}{}^{-1} \mathrm{C}_{(\mathrm{n,K})} X_{t(K,1)} + B_{(n,n)}{}^{-1} \varepsilon_t \Leftrightarrow (3)$$

$$Y_{t(n,1)} = \Pi_{(\mathrm{n,K})} X_{t(K,1)} + U_t \text{Forme Réduite du SES} \text{où } \Pi_{(\mathrm{n,K})} = -B_{(n,n)}{}^{-1} \mathrm{C}_{(\mathrm{n,K})} = [\pi_{ik}]; U_t = B_{(n,n)}{}^{-1} \varepsilon_t$$

Dans chaque éqts. de la Forme Réduite du SES, il n'y a qu'une variable endogène qui intervient dans l'analyse.

L'estimation de la FR eqt (3) est définie par MCO qui donne des estimateurs convergents, π_{ik}, où $cov(X_t, U_t) = 0, \forall t$. Après, on calcule les coefficients structurels de $\hat{B} et\ \hat{C}$ en utilisant les relations algébriques existantes entre les deux matrices de coefs, $\widehat{\Pi} \longrightarrow \hat{B}, \hat{C}$: Méthode d'estimation des Moindres Carrés Indirectes, MCI.

<u>Inconvénients de la Méthode d'estimation MCI:</u>

* Relations algébriques entre paramètres de la FR et ceux de la FS ne sont pas tjs facile à formuler;

* Les solutions ne sont pas uniques parfois ou même ils n'existent pas.

Suite de l'exemple1:

$$C_t = \alpha + \beta R_t + \varepsilon_t, \qquad \forall t$$
$$R_t = C_t + I_t \ \ identit\acute{e}$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_t \\ R_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \ B_{(n,n)} Y_{t(n,1)} + \mathrm{C}_{(\mathrm{n,K})} X_{t(K,1)} = \varepsilon_t \quad FS$$
$$\Leftrightarrow Y_{t(n,1)} = \Pi_{(\mathrm{n,K})} X_{t(K,1)} + U_t \qquad FR$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ I_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$
$$avec \ \Pi = -B^{-1} C \qquad ; \ B^{-1} = \frac{1}{1-\beta} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{1-\beta} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow y_{1t} = \pi_{11} + \pi_{12} I_t + u_{1t}$$
$$y_{2t} = \pi_{21} + \pi_{22} I_t + u_{2t}$$
$$\Leftrightarrow y_{1t} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} I_t + u_{1t} \quad et \ \ y_{2t} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + u_{2t}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \hat{\beta} = \widehat{\pi_{22}}^{-1} \widehat{\pi_{12}} \\ \hat{\alpha} = \widehat{\pi_{22}}^{-1} \widehat{\pi_{11}} \end{array}$$
$$et \ \ \hat{\alpha} = \widehat{\pi_{22}}^{-1} \widehat{\pi_{21}} \ , or \ \pi_{21} \ n'est \ pas \ n\acute{e}cessairement \ \acute{e}gale \ \grave{a} \ \pi_{11}.$$

Remarquons que l’application de MCI fournit une relation pour estimerβ, mais deux équations pour l’identification de α.