TD3

Ex1

$$\begin{cases} x_0,\ r_0 = b - A x_0 \\ x_{k+1} = x_k + \alpha r_k \\ r_k = b - A x_k \end{cases}$$

a/ $e_k = x_k - \bar{x}$; Mque $e_k = (I - \alpha A)^k e_0$ pour $k \geq 0$

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \bar{x} = x_k + \alpha r_k - \bar{x} = e_k + \alpha r_k = e_k + \alpha (b - A x_k)$$

or $e_k + \bar{x} = x_k$

$$\Rightarrow e_{k+1} = e_k + \alpha (b - A(e_k + \bar{x})) = (I - \alpha A) e_k + \alpha (\underbrace{b - A\bar{x}}_{0})$$

$$\Rightarrow e_k = (I - \alpha A)^k e_0$$

b/ l'algorithme converge ssi $e_k \longrightarrow 0$ cela est vrai si le rayon spectral ρ de $(I - \alpha A)$ est < 1 ($\rho = \max |\lambda_i|$) or les v.p de $(I - \alpha A)$ sont $(1 - \alpha \lambda_i)_{i = 1, \dots n}$ tq λ_i sont les v.p de A ds l'ordre croissant. il faut que $\operatorname{Max} |1 - \alpha \lambda_i| < 1$

$$-1 < 1 - \alpha\lambda_1 \leq \dots \quad 1 - \alpha \lambda_{n-1} \leq 1 - \alpha \lambda_n < 1$$

car $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$

on aura $\alpha \lambda_n > 0$ vrai car A définie positive

$$-1 < 1 - \alpha \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 < \frac{2}{\alpha} \xRightarrow{\alpha > 0} \boxed{\alpha < \frac{2}{\lambda_1}}$$

c/ $\alpha_{opt} \overset{?}{=} \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Le meilleur choix de α correspont au cas où $\rho(I - \alpha A)$ est min

or $\rho(I - \alpha A) = \max \{|1 - \alpha \lambda_1|, |1 - \alpha \lambda_n|\}$ donc le min du max

$= \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ie: $\max (1 - \alpha \lambda_1, \alpha \lambda_n - 1) = \left\{ \alpha \geq \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \right\}$

EX2

$$J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle$$

$$u_{n+1} = u_n - \mu \underbrace{(Au_n - b)}_{J'(u_n)} = (I - \mu A)u_n + \mu b$$

a/ soit $w = A^{-1}b$ la s° du problème de minimisation.

$$u_{n+1} - w = (I - \mu A)u_n + \mu b - w = (I - \mu A)u_n + \mu A w - w$$

$$= (I - \mu A)(u_n - w)$$

ainsi

$$u_n = (I - \mu A)^n (u_0 - w) + w$$

Pour que l'algorithme converge il faut que $\rho(I - \mu A) < 1$

le v.p de A sont $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_{N-1} \leq \lambda_N$

$\Rightarrow$ les v.p de $(I - \mu A)$ sont $1 - \mu\lambda_N \leq 1 - \mu\lambda_{N-1} \dots 1 - \mu\lambda_2 \leq 1 - \mu\lambda_1$

$\Rightarrow$ il faut que $\left.\begin{array}{l} 1 - \mu\lambda_1 < 1 \\ -1 < 1 - \mu\lambda_N \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \mu < \frac{2}{\lambda_N}$

b/

$$\min \max \{|1 - \mu\lambda_1|, |1 - \mu\lambda_N|\} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_N}$$

le max est atteint pour $\mu = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_N}$

càd $\max\{|1 - \mu\lambda_1|, |1 - \mu\lambda_N|\} = \frac{\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_N + \lambda_1}$

$$\Rightarrow \lim_{+\infty} \|u_n - w\|^{1/n} = \lim_{+\infty}\left[\rho(I - \mu A)^n (u_0 - w)\right]^{1/n} = \lim_{+\infty} c\, \rho(I - \mu A)$$

$$\leq \frac{\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_N + \lambda_1}$$

EX 3

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

a/ u_i vect propre associé à la v-p λ_i

$\lambda_i u_i = A u_i \Rightarrow \lambda_k u_k = A u_k \Rightarrow (\lambda_k u_k, u_k) = (A u_k, u_k)$

$\Rightarrow \lambda_k (u_k, u_k) = (A u_k, u_k) \Rightarrow \lambda_k = R_A(u_k)$

b/ $x \in W_k \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} x u_i$ (i.e. W_k base orthonormé engendré par les $(u_1, \dots u_k)$)

$\Rightarrow (Ax, x) = \left(\sum_1^k x_i A u_i, \sum_1^k x_j u_j\right) = \left(\sum_1^k x_i \lambda_i u_i, \sum_1^k x_j u_j\right)$

$= \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i x_i x_j (u_i, u_j)$

or $(u_i, u_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ car $(u_i)_{i=1\dots k}$ est une base orthonormé de W_k

$\Rightarrow (Ax, x) = \sum_1^k \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_1^k x_i^2 = \lambda_k \|x\|^2$

$\Rightarrow \min_{x \in W_k} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \geq \lambda_k$ (le min est atteint pour $x = u_k$)

d/ on pose $r = Ax - \lambda x$

$\|r\|_2^2 = \|Ax - \lambda x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)^2 x_i^2 \geq \left(\min_{i=1\dots n} |\lambda_i - \lambda|\right)^2 \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \frac{\|r\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq (\min |\lambda_i - \lambda|)^2$

$\Rightarrow \min |\lambda_i - \lambda| \leq \frac{\|r\|_2}{\|x\|_2}$