

Résumé — Actuariat Non-Vie

Formules usages

Basé sur : Cours Actuariat Non-Vie (ESSAI)

Table des matières

1	Introduction à l'Assurance Non-Vie	2
1.1	Concepts Fondamentaux	2
1.2	Branches d'Assurance Non-Vie	2
2	Tarification	2
2.1	Composition de la Prime	2
2.2	Modèle Fréquence-Coût	2
2.3	Système Bonus-Malus	2
2.4	Modèles Statistiques	3
2.5	Méthodes de Sélection de Variables	3
3	Provisionnement	3
3.1	Provisions sur Primes	3
3.2	Provisions sur Sinistres	3
3.3	Méthodes Déterministes	4
3.4	Méthodes Stochastiques	4
4	Solvabilité II	5
4.1	Les Trois Piliers	5
4.2	Calcul des Provisions Techniques	5
4.3	Calcul du Capital Requis	5
4.4	Modèle de Merz-Wüthrich (Risque à 1 an)	6
5	Validation des Modèles	6
5.1	Tests Statistiques	6
5.2	Critères de Sélection	6
6	Mesures de Performance	6
6.1	Ratios Techniques	6
6.2	Indicateurs de Rentabilité	6
7	Application au Marché Tunisien	7
7.1	Caractéristiques du Marché	7
7.2	Tarification Tunisienne	7
8	Conseils Pratiques et Bonnes Pratiques	7
8.1	Recommandations Générales	7
8.2	Choix des Méthodes	7
8.3	Gestion des Incertitudes	7

1 Introduction à l'Assurance Non-Vie

1.1 Concepts Fondamentaux

- **Mutualisation** : Principe où beaucoup d'assurés paient pour indemniser les quelques sinistrés
- **Transfert de risque** : Cession du risque au réassureur
- **Rétrocession** : Réassureur se réassure à son tour
- **Cycle de production inversé** : Prime encaissée avant de connaître le coût réel des sinistres

1.2 Branches d'Assurance Non-Vie

- **IARD** : Incendie, Accidents, Risques Divers
- **Principales branches** : Automobile, Santé, Transport, Incendie, Risques Divers, Engineering
- **Marché tunisien** : 78% des primes proviennent du non-vie (2019)

2 Tarification

2.1 Composition de la Prime

$$\text{Prime Commerciale} = \underbrace{\text{Prime pure}}_{\mathbb{E}[\text{pertes}]} + \text{Frais et Taxes} + \text{Marge Bénéficiaire}$$

Décomposition détaillée :

- **Prime pure** : Espérance mathématique des pertes
- **Frais de gestion** : Coûts de traitement des dossiers
- **Taxes** : Taxe d'assurance (2% en général)
- **Marge bénéficiaire** : Profit de l'assureur

2.2 Modèle Fréquence-Coût

Formule générale :

$$S = \sum_{i=1}^N C_i + I_G \times G$$

- $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$: Nombre de sinistres
- $C_i \sim \text{Gamma ou Log-normal}$: Coût unitaire
- I_G : Indicateur de sinistre grave
- $G \sim \text{Pareto}$: Coût sinistre grave

Prime pure conditionnelle :

$$E[S|X] = E[N - I_G|X] \times E[C|X] + P(I_G = 1|X) \times E(G|X)$$

2.3 Système Bonus-Malus

- **Bonus** : Réduction de prime après année sans sinistre
- **Malus** : Majoration après sinistre
- Coefficient conservé en cas de changement d'assureur

2.4 Modèles Statistiques

Modèle Linéaire Classique

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Usage : Modélisation de variables continues (coûts moyens)

GLM (Generalized Linear Models)

Structure générale :

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}, \quad \mu_i = \mathbb{E}[Y_i]$$

Lois utilisées en tarification :

- **Montants sinistres** : Gamma, Log-normal, Exponentielle
- **Nombre sinistres** : Poisson, Binomiale Négative
- **Vie/décès** : Bernoulli, Binomiale

Fonction de vraisemblance famille exponentielle :

$$f(y_{i,j}; \theta_{i,j}; \phi) = \exp \left\{ \frac{y_{i,j} \cdot \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{a(\phi)} \omega_{i,j} + c(y_{i,j}; \phi; \omega_{i,j}) \right\}$$

2.5 Méthodes de Sélection de Variables

- **Ascendante** : Ajout progressif des variables
- **Descendante** : Élimination progressive
- **Critères** : AIC, BIC, Déviance

3 Provisionnement

3.1 Provisions sur Primes

PPNA (Provision pour Primes Non Acquises)

$$\text{PPNA} = \frac{\text{Jours restants}}{\text{Période couverture totale}} \times \text{Prime nette}$$

PANE (Primes Acquises Non Emises)

$$\text{PANE} = \frac{\text{Jours écoulés}}{\text{Période couverture totale}} \times \text{Prime nette}$$

3.2 Provisions sur Sinistres

Cycle de Vie d'un Sinistre

1. Survenance → Déclaration → Ouverture dossier
2. Évaluation initiale → Paiements partiels
3. Recours → Clôture (ou réouverture)

Décomposition Solvabilité II

PSAP = Provision Dossier/Dossier + Provision IBNR

$$\text{IBNR} = \text{IBNER} + \text{IBNYR}$$

- **IBNER** : Incurred But Not Enough Reported (sous-estimation dossiers connus)
- **IBNYR** : Incurred But Not Yet Reported (sinistres survenus non déclarés)

3.3 Méthodes Déterministes

Chain Ladder

Facteurs de développement :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Projection :

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} \times \hat{f}_j$$

Calcul des provisions :

$$\begin{aligned} R_i &= C_{i,n} - C_{i,n-i} \\ R &= \sum_{i=1}^n R_i \end{aligned}$$

Facteur de Queue (Tail Factor)

$$\begin{aligned} f_{ult} &= \prod_{j=J}^{J(\text{ultime})-1} f_j \\ C_{i,\text{ultime}} &= C_{i,J} \times f_{ult} \end{aligned}$$

Bornhuetter-Ferguson

$$\begin{aligned} \hat{R}_i &= \overline{LR}_i \times P_i \times (1 - \hat{Z}_{n+1-i}) \\ \hat{Z}_k &= \frac{1}{\hat{f}_k \times \hat{f}_{k+1} \times \cdots \times \hat{f}_n} \end{aligned}$$

London Chain Ladder

$$\begin{aligned} C(i, j+1) &= f_j^{LC} \cdot C(i, j) + a_j^{LC} \\ f_j^{LC} &= \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}^-}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2} \\ a_j^{LC} &= \bar{C}_{j+1}^- - f_j^{LC} \bar{C}_j \end{aligned}$$

3.4 Méthodes Stochastiques

Modèle de Mack

Variance des facteurs :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

MSEP (Mean Squared Error of Prediction) :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = C_{i,n}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{C_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)$$

MSEP provision totale :

$$MSEP(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left\{ MSEP(\hat{R}_i) + C_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n C_{k,n} \right) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \cdot \sum_{u=0}^{n-j} C_{u,j}} \right\}$$

Bootstrap avec GLM

Procédure :

1. Ajustement du modèle et estimation des $\hat{\mu}_{ij}$
2. Calcul des résidus de Pearson : $r_{ij}^p = \frac{x_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$
3. Rééchantillonnage avec remise des résidus
4. Construction des pseudo-triangles
5. Estimation des provisions pour chaque échantillon

Estimation finale :

$$E^B(\hat{R}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}^b$$

$$sep = \sqrt{\hat{V}(R) + Var^B(\hat{R})}$$

4 Solvabilité II

4.1 Les Trois Piliers

- **Pilier I** : Exigences quantitatives (SCR, MCR, provisions)
- **Pilier II** : Exigences qualitatives (gouvernance, ORSA)
- **Pilier III** : Discipline de marché (transparence)

4.2 Calcul des Provisions Techniques

Best Estimate

BE = Valeur actuelle des flux de trésorerie futurs probables

Marge pour Risque

$$RM = CoC \times \sum_{m>0} \frac{SCR_{RU_m}}{(1 + r_{m+1})^{m+1}}$$

4.3 Calcul du Capital Requis

SCR Global

$$SCR_{global} = BSCR + SCR_{op} + Adj$$

Formule d'agrégation

$$SCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Value-at-Risk

$$VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

4.4 Modèle de Merz-Wüthrich (Risque à 1 an)

Claims Development Result (CDR)

$$CDR_i(I+1) = E[R_i^I | D_I] - (X_{i,I-i+1} + E[R_i^{I+1} | D_{I+1}])$$

MSEP du CDR

$$MSEP_{CDR_i|D_I}(\overline{CDR}_i(I+1)) = E[(CDR_i(I+1) - \overline{CDR}_i(I+1))^2 | D_I]$$

5 Validation des Modèles

5.1 Tests Statistiques

- **Normalité** : Shapiro-Wilk
- **Indépendance** : Ljung-Box
- **Homoscédasticité** : Test de White, Breusch-Pagan

5.2 Critères de Sélection

- **AIC** : $AIC = -2 \log(L) + 2k$
- **BIC** : $BIC = -2 \log(L) + k \log(n)$
- **Déviance** : Mesure de la qualité d'ajustement

6 Mesures de Performance

6.1 Ratios Techniques

Loss Ratio

$$\text{Loss ratio} = \frac{\text{Sinistres réglés} + \text{Provisions}}{\text{Primes acquises}}$$

Ratio Combiné

$$\text{Ratio combiné} = \text{Loss ratio} + \text{Expense ratio}$$

6.2 Indicateurs de Rentabilité

- **Combined Ratio < 100%** : Rentabilité technique positive
- **Return on Equity** : Rentabilité des fonds propres
- **Return on Assets** : Rentabilité des actifs

7 Application au Marché Tunisien

7.1 Caractéristiques du Marché

- **Taux de pénétration** : 2.4% (2022)
- **Densité d'assurance** : 270 DT/habitant (2022)
- **Nombre de compagnies** : 24 (dont 1 réassureur)
- **Répartition** : 40.4% Automobile, 28.4% Vie, 14.6% Maladie

7.2 Tarification Tunisienne

RC Automobile (Classe 4 - Usage privé)

- 2 CV : 85.000 DT
- 3-4 CV : 99.000 DT
- 5-6 CV : 127.000 DT
- 7-10 CV : 141.000 DT

Garanties Complémentaires

- **Vol** : 15.000 DT + 2.6% de la valeur vénale
- **Incendie** : 10.000 DT + 3% de la valeur vénale
- **Défense et recours** : 20.000 DT

8 Conseils Pratiques et Bonnes Pratiques

8.1 Recommandations Générales

- **Segmentation** : Toujours séparer fréquence et coût
- **Validation** : Tester les hypothèses des modèles
- **Documentation** : Bien documenter les choix méthodologiques
- **Actualisation** : Mettre à jour régulièrement les modèles

8.2 Choix des Méthodes

- **Chain Ladder** : Données stables, historique suffisant
- **Bornhuetter-Ferguson** : Données récentes peu fiables
- **GLM** : Segmentation fine nécessaire
- **Bootstrap** : Estimation de la distribution des provisions

8.3 Gestion des Incertitudes

- **Analyse de sensibilité** : Variation des paramètres
- **Scénarios** : Tests sous différentes hypothèses
- **Back-testing** : Comparaison prévisions/réalisations

Conclusion

Ce résumé couvre l'ensemble des concepts, formules et méthodes vus dans le cours d'actuariat non-vie. Il sert de référence pour :

- La tarification des produits d'assurance
- Le provisionnement des engagements
- Le calcul du capital réglementaire
- L'analyse de la rentabilité technique

Références

Résumé basé sur le cours fourni : *Cours Actuariat Non-Vie (ESSAI)*, année académique 2025-2026.