Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information
Année universitaire 2017/2018
1 ère année

Examen: Suites de variables aléatoires

**Questions de cours:** *(5 points)*
1) Quels sont les liens entre ces différentes convergences de variables aléatoires: en loi, presque sûre, en probabilité, $L^1$, $L^p$ pour $p > 1$?
2) Citer le théorème de la limite centrale vectoriel.
3) Citer le théorème de Lévy.

**Preuve de cours:** *(5 points)*
Énoncer et prouver le lemme de Borel.

**Exercice** 1. *(5 points)*
1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire réelle constante $a$. Montrer que la convergence a lieu aussi en probabilité.
2) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que $P_{X_n} \Rightarrow P_X$ et $P_{Y_n} \Rightarrow P_Y$. On suppose que les variables $X_n$ et $Y_n$ sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables $X$ et $Y$ sont aussi indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

**Exercice** 2. *(5 points)*
On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la trajectoire d'une particule qui partie de $O$, choisit à chaque instant $k \in \mathbb{N}$ une direction au hasard et parcourt une distance 1 dans cette direction, avant de choisir une nouvelle direction à l'instant $k+1$.

1) Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. On pose $X = \cos U$ et $Y = \sin U$. Calculer l'espérance du vecteur aléatoire $(X, Y)$.

2) Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi et $f$ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer en utilisant la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} E[f(U_1)].$$

3) Revenant à la marche aléatoire décrite en introduction, on note $M_n$ la position occupée par la particule à l'instant $n$, avec $M_0 = O = (0, 0)$. En notant $S_n$ et $T_n$ les coordonnées de $M_n$ dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$M_n = (S_n, T_n), \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos U_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \sin U_k,$$

où $(U_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ représentant la succession des choix de direction au hasard. En vous appuyant sur les questions précédentes, montrer que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \quad \text{et} \quad \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$$

4) En notant que la distance $OM_n$ de la particule à l'origine à l'instant $n$ vérifie

$$(\frac{OM_n}{n})^2 = (\frac{S_n}{n})^2 + (\frac{T_n}{n})^2,$$

expliquer pourquoi presque-sûrement, la distance $OM_n$ est un $o(n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

5) En posant $Z_k = (\cos U_k, \sin U_k)$, montrer que le TLC vectoriel appliqué à la suite $(Z_k)_{k\geq 1}$ donne

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n, T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} W$$

où $W$ est un vecteur aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}((0, 0), K)$ avec $K$ est la matrice de covariance du vecteur $Z_1 = (\cos U_1, \sin U_1)$.

$\sqrt{n}\,(\frac{1}{n}\sum - E($

$\frac{1}{n}\sum$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \underbrace{\sum X_i}_{n S_n .}$

$\sum Z_k = (\sum \cos u, \sum \sin u).$

$\frac{1}{\sqrt{n}}\,( n S_n \quad n T_n )$

$\sqrt{n}\,(S_n, T_n)$