**Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information**

A.U: 2021-2022
$3^{\acute{e}me}$ Année

Partiel
Statistique bayésienne

Durée: 1H30.

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1

Soit $X_1, ...X_n$ n-échantillons d'une variable aléatoire X de densité sur $\mathbb{R}$

$$f(x/\theta) = \frac{1}{4\theta\sqrt{|x|}} \exp(-\frac{\sqrt{|x|}}{\theta}).$$

1- Montrer que que les $Y_k = \sqrt{|X_k|}$, $k = 1, ..., n$ sont *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $1/\theta$.

2- On se place maintenant dans un cadre bayésien, et on suppose que θ suit une loi a priori $\Gamma^{-1}(1/2, 1/2)$ (gamma inverse). Calculer la loi a postériori associée à $X = x$.

3- En déduire l'estimateur bayésien et le risque a postériori associés à la fonction de perte quadratique et la loi a priori $\Gamma^{-1}(1/2, 1/2)$. risque bayesien

4- Calculer la loi a priori de Jeffreys.

5- En déduire la loi a postériori associée à la loi a priori de Jeffreys.

6- Soit la fonction de perte suivante sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$L(\theta, a) = \frac{(\theta - a)^2}{\sqrt{\theta}} \exp(1/\theta).$$

Calculer $\widehat{\theta_n^B}$ l'estimateur bayésien associée à la fonction de perte $L(.,.)$ et la loi a priori de Jeffreys.

7- L'estimateur $\widehat{\theta_n^B}$ est-il biaisé? Consistant?

8- Etudier la convergence en loi sous P_θ de $\sqrt{n}(\widehat{\theta_n^B} - \theta)$.

Rappel: La densité d'une variable aléatoire Z suivant une loi gamma inverse $\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$ est

$$f(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1/z)^{\alpha+1} \exp(-\beta/z) 1_{\mathbb{R}_+^*}(z).$$

Exercice 2

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon d'une variable aléatoire entière X de loi de Poisson de paramètre θ. On rappelle que la loi de Poisson est donnée par:

$$P(X = x) = \frac{\theta^x}{x!} \exp(-\theta),\ x \in \mathbb{N}.$$

On considère loi a priori sur θ une loi Gamma $\gamma(a, a)$, avec $a > 0$. On rappelle que la loi Gamma $\gamma(a, b)$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx),\ x > 0$$

1- Déterminer la loi a postériori de θ.

2- Calculer l'estimateur bayésien $\widehat{\theta_n^b}$ de θ associé à la fontion de perte quadratique.

3- Calculer l'estimateur MAP $\widehat{\theta_n^{MAP}}$ de θ.

Stat Bayésienne :

$$f(x|\theta) = \frac{1}{4\theta\sqrt{|x|}} \exp\left(-\frac{\sqrt{|x|}}{\theta}\right)$$

1) Soit $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$E(H(Y_1)) = E(H(\sqrt{|X_1|}))$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(\sqrt{|x|})}{4\theta\sqrt{|x|}} \exp\left(-\frac{\sqrt{|x|}}{\theta}\right) dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{H(\sqrt{x})}{4\theta\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{\sqrt{x}}{\theta}\right) dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{H(y)}{4\theta y} \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) 2y\, dy$$

avec $y = \sqrt{x}$, $dy = \frac{+1}{2y} dx$

$$= \int_0^{+\infty} H(y) \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \exp\left(\frac{-y}{\theta}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(y) \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{-y}{\theta}\right) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}\, dy$$

$dx = E(H(y))$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$

2) $\theta \hookrightarrow \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\theta)$$

(densité de la loi à priori)

Formule de Bayes :

$$\pi(\theta / x_1, \dots, x_n) \propto \prod_{k=1}^{n} f(x_k | \theta)$$

$$\propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+\frac{3}{2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|x_k|}}{\theta} + \frac{1}{2\theta}\right)$$

$$\propto \frac{1}{\theta^{n+\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{|x_k|} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

La loi à posteriori a pour densité

$$\Gamma^{-1}\left(n + \frac{1}{2}, \sum_{k=1}^{n} \sqrt{|x_k|} + \frac{1}{2}\right)$$

$\Gamma(a) = \Gamma(a-1)(a-1)$

3) $X \hookrightarrow \gamma(a, b)$

$$Z = \frac{1}{X} \hookrightarrow \gamma^{-1}(a, b)$$

$$E(Z) = E\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a-1)} x^{a-1-1} e^{-bx} dx\right)}_{1} \frac{\Gamma(a-1)}{b^{a-1}}$$

$$\hat{\theta}_n^B = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{|x_k|} + \frac{1}{2}}{n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} Y_k + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{\bar{Y}_n + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}}$$

$\bar{Y}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta$ P.p.s L.F.G.N

$\hat{\theta}_n^B \xrightarrow[n \to +\infty]{P\text{-}p.s} \theta$ fortement consistant

$$E(\hat{\theta}_n^B) = \frac{\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2}}{n - \frac{1}{2}}$$

$$R_{\hat{\theta}_n}(\theta) = E((\hat{\theta}_n^B - \theta)^2)$$

$$= E(\hat{\theta}_n^2 - E(\hat{\theta}_n^B) + E(\hat{\theta}_n) - \theta)^2$$

$$= Var(\hat{\theta}_n^B) + \underbrace{(E(\hat{\theta}_n) - \theta)^2}_{\text{biais } b(\theta)}$$

$$= Var(\hat{\theta}_n^B) + \left(\frac{\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2}}{n - \frac{1}{2}} - \theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2} n \frac{var(Y)}{\theta^2}$$

$$= \frac{n}{(n - \frac{1}{2})^2} \theta^2 - \left(\frac{\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2} - n\theta + \frac{1}{2}\theta}{n - \frac{1}{2}}\right)^2$$

$$E(\theta^2) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\int_0^{+\infty} b^{a-1} \frac{x^{a-2-1}}{\Gamma(a-2)} e^{-bx} dx \right)$$

4) $\log(f(x/\theta)) = \log\left(\frac{1}{4\theta\sqrt{|x|}} \exp\left(-\frac{\sqrt{|x|}}{\theta}\right)\right)$

$= -\log(\theta) - \log(4\sqrt{|x|}) - \frac{\sqrt{|x|}}{\theta}$

$\frac{\partial \log(f(x/\theta))}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{\sqrt{|x|}}{\theta^2}$

$\frac{\partial^2 \log(f(x/\theta))}{\partial^2\theta} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2\sqrt{|x|}}{\theta^3}$

$I_x(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \log(f(x/\theta))}{\partial\theta^2}\right)$

$= -E\left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{2\sqrt{|x|}}{\theta^3}\right)$

$= -\frac{1}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^2}$

$= \frac{1}{\theta^2}$

<u>Loi de Jeffreys</u> : $\pi(\theta) = \sqrt{I_x(\theta)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\theta)$

$= \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\theta)$

5)

$\pi(\theta / X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \propto \frac{1}{\theta^{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\theta)$

Loi a posteriori $\sim \Gamma^{-1}\left(n, \sum_{k=1}^{n} \sqrt{|x_k|}\right) = \Gamma^{-1}(n, n\bar{Y}_n)$

6) fonction perte

$L(\theta, a) = \frac{(\theta - a)^2}{\sqrt{\theta}} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$ (*)

L'estimateur bayesien associé à la fonction perte (*) est solution du Problème

$\int_{\mathbb{R}_+^*} (\hat{\theta}_n - \theta)^2 \pi(\theta / x_1, \dots, x_n)\, d\theta$

$2\int_{\mathbb{R}_+^+} (\hat{\theta}_n - \theta)\pi(\theta / x_1, \dots, x_n)\, d\theta = 0$

$\hat{\theta}_n = \int_{\mathbb{R}_+^+} \theta\, \pi(\theta / x_1, \dots, x_n)\, d\theta$

$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{\sqrt{\theta}} \exp\left(\frac{1}{\theta}\right) \frac{n^n \bar{Y}_n^n}{\Gamma(n)} \times \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+1} \exp\left(\frac{-n\bar{Y}_n}{\theta}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\theta)\, d\theta$

$= \frac{(n\bar{Y}_n)^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} (\hat{\theta}_n - \theta)^2 \frac{1}{\theta^{n+\frac{1}{2}+1}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}(n\bar{Y}_n - 1)\right) d\theta$

$= \frac{(n\bar{Y}_n)^n}{\Gamma(n)} \times \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(n\bar{Y}_n - 1)^2} \int_0^1 (\hat{\theta}_n - \theta)^2 \frac{1}{\theta^{n+\frac{1}{2}+1}} \frac{(n\bar{Y}_n - 1)^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \times$

$\exp\left(-\frac{1}{\theta}(n\bar{Y}_n - 1)\right) d\theta$

Pb : $\min_{\hat{\theta}_n}$ (*) $\Longleftrightarrow$ Pb : $\min_{\theta_n}$

$\hat{\theta}_n^B = \frac{n\bar{Y}_n - 1}{n + \frac{1}{2} - 1} = \frac{n\bar{Y}_n - 1}{n - \frac{1}{2}}$

7) $E(\hat{\theta}_n^B) = \frac{1}{n - \frac{1}{2}}(n E(\bar{Y}_n) - 1)$

$= \frac{1}{n - \frac{1}{2}} . (n\theta - 1) \neq \theta$

$\Rightarrow$ Biaisé

$\hat{\theta}_n^B \xrightarrow[n \to +\infty]{LFGN} \theta \Rightarrow \theta$ est fortement consistant

8) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^B - \theta)$

$\hat{\theta}_n^B - \theta = \frac{n\bar{Y}_n - 1}{n - \frac{1}{2}} - \theta$

$= \frac{n\bar{Y}_n - 1 - \theta}{n - \frac{1}{2}}$

$= \frac{n\bar{Y}_n - 1 - n\theta - \frac{\theta}{2}}{n - \frac{1}{2}}$

$= A_n \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \theta)}{} + B_n$

$A_n \to 1$, $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \theta) \to N(0, Var(Y))$, $B_n \to 0$

Lemme Slutsky