Série Temporelle
Exercices Corrigés

Josephson Junior R.

February 23, 2024

Table des matières

Un processus AR(p) ou ARMA(p,0) s'ecrit comme suit :

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Il admet les propriétés suivantes :

- **Coefficients** :

$$|\alpha_i| < 1 \;\; ; \;\; \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| < 1 \quad \forall i \in [1, p]$$

- **Polynôme retard** :

$$\psi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L^i$$

- **Inversible** : il peut être réécrit de manière à ce que chaque valeur actuelle du processus soit exprimée comme une combinaison linéaire de ses valeurs passées et d'un terme d'innovation (**i.e. un choc aléatoire**).

- **Stationnaire** : les racines du polynôme sont à l'exterieur du cercle unité ($|\mathbf{L}| > \mathbf{1}$) pour dire que **les effets des racines décroit dans le temps**.
- **Fonction d'autocovariance** :

$$\gamma_{(h)} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \gamma_{(h-i)} = 0$$

- **Fonction d'autocorrélation** : de cette égalité on a les **équations de Yule-Walker** qui permet de trouver les coefficients du processus.

$$\rho_{(h)} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \rho_{(h-i)} = 0$$

Exercice 1 :

Soit le processus défini par :

$$y_t = 1.4 + 0.35 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \quad \sigma_\varepsilon^2 = 7.5 \; ; \; \gamma_1 = 2.83$$

1. De quel type de processus s'agit-il ? Justifier votre réponse.
2. Est-il stationnaire ? Justifier.
3. Déterminer son esperance et sa variance.
4. Déterminer les trois premiers termes de sa fonction d'autocorrélation.
5. Tracer le corrélogramme.

Identification

Il s'agit d'un processus AR(1) puisqu'il s'exprime par une observation antérieure de retard 1 (y_{t-1}). Avec notamment $\alpha_1 = 0.35$.

Condition de stationnarité

Soit le polynôme retard de ce processus :

$$\psi(L) = 1 - 0.35L$$

Il suffit de résoudre l'équation $\psi(L) = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{0.35} = 2.857 > 1$$

Alors le processus y_t est **stationnaire** car $L > 1$.

Espérance et Variance

- Espérance :

$$E(y_t) = \mu = 1.4 + 0.35\mu \Rightarrow \mu = \frac{1.4}{1 - 0.35} = \mathbf{2.154}$$

- Variance :

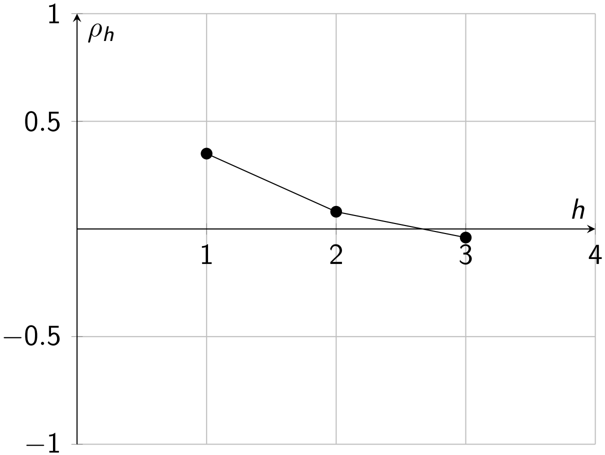
$$V(y_t) = \gamma_0 = E(y_t^2) - [E(y_t)]^2 = 0.35\gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 + 2\mu - \mu^2 = \mathbf{8.16}$$

Fonction d'autocorrélation

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} \quad ; \quad \gamma_h = E(y_t \; y_{t-h}) - [E(y_t)E(y_{t-h})]$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.35 \; ; \; \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0.08 \; ; \; \rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = -0.04$$

Corrélogramme



Exercice 2 :
Le processus y_t est défini par :

$$y_t = 0.85y_{t-1} - 0.12y_{t-2} + \varepsilon_t \ ; \ \gamma_2 = 1.375 \ ; \ \rho_2 = 0.6$$

1. De quel type de processus s'agit-il ? Justifier votre réponse.
2. Comment jugeriez-vous sa stationnarité ?
3. Déterminer ρ_1.
4. Calculer la variance du terme d'erreurs.
5. Tracer le corrélogramme pour h = 1,...,5

Identification

Il s'agit d'un processus AR(1) puisqu'il s'exprime par une observation antérieure de retard 2 (y_{t-2}). Avec notamment $\alpha_1 = 0.64$ et $\alpha_2 = -0.48$.

Condition de stationnarité

Soit le polynôme retard associé à ce processus :

$$\psi(L) = 1 - 0.85L + 0.12L^2$$

Il suffit de résoudre $\psi(L) = 0$:

$$\Delta = 0.2425 \quad ; \quad L_1 = 1.49 \quad ; \quad L_2 = 5.59$$

On vérifie aisément que L_1 et L_2 sont > 1 donc le processus y_t est **stationnaire**.

Calcul de ρ_1

D'après les équations de Yule-Walker :

$$\begin{cases} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 \ (1) \\ \rho_2 &= \alpha_2 + \alpha_1\rho_1 \ (2) \end{cases}$$

Le (2) nous donne :

$$\rho_1 = \frac{\rho_2 - \alpha_2}{\alpha_1} = 0.847$$

Calul de σ_ε^2

On a que :

$$\gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 - \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2$$

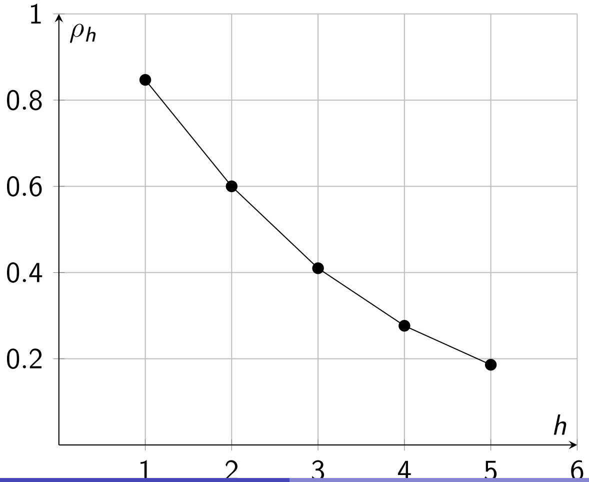
Ce dont on a besoin pour le calcul :

$$\gamma_0 = \rho_2\gamma_2 = 0.825 \ ; \ \gamma_1 = \rho_1\gamma_0 = 0.7 \ ; \ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2 = 0.395}$$

Corrélogramme

Pour $h > 3$: $\rho_{(h)} = \alpha_1 \rho_{(h-1)} + \alpha_2 \rho_{(h-2)}$

$$\rho_3 = 0.41 \; ; \; \rho_4 = 0.2765 \; ; \; \rho_5 = 0.186$$



Un processus MA(q) ou ARMA(0,p) s'ecrit comme suit :

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Il admet les propriétés suivantes :

- **Coefficients** :

$$|\theta_j| < 1 \quad \forall j \in [1, q]$$

- **Polynôme retard** :

$$\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^{q} \theta_i L^j$$

- **Stationnaire** : il s'expirme en fonction des innovations (**Bruits Blancs**).

- **Inversible** : les racines du polynôme sont à l'exterieur du cercle unité ($|\mathbf{L}| > \mathbf{1}$) pour dire que l'on peut réecrire $MA(q)$ en fonction de $AR(\infty)$.
- **Fonction d'autocovariance** :

$$\gamma_{(h)} = E(\varepsilon_t Y_{t-h}) - \sum_{j=1}^{q} \theta_j E(\varepsilon_{t-j} Y_{t-h})$$

- **Fonction d'autocorrélation** : .

$$\rho_{(h)} = 0 \iff h > q$$

Exercice 3 :
Soit le processus qui s'exprime de la manière suivante :

$$y_t = \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1}$$

1. De quel type de processus s'agit-il ? Justifier votre réponse.
2. Est-il inversible ?
3. Ecrire ce processus sous la forme $AR(\infty)$ et déduire ses coefficients.
4. Déterminer la variance de ce processus. On donne $\sigma_\varepsilon^2 = 1.65$
5. Déterminer sa fonction d'autocorrélation. Conclure.

Identification

Il s'agit d'un processus MA(1) car y_t s'exprime en fonction du terme d'erreur de retard 1 (ε_{t-1}). Notamment le coefficient associé $\theta_1 = -0.8$

Condition d'inversibilité

Soit le polynôme retard associé au processus :

$$\phi(L) = 1 - 0.8L$$

En resolvant $\phi(L) = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{0.8} = 1.25 > 1$$

Alors le processus est **inversible**.

MA(1) = AR(∞)

On remarque que :

$$\varepsilon_t = y_t \left(\frac{1}{1 - 0.8L} \right) = y_t \left(\lim_{q \to +\infty} (1 + 0.8L + ... + 0.8^q L^q) \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{y_t = -0.8y_{t-1} - ... - 0.8^{\infty} y_{t-\infty} + \varepsilon_t}$$

Ses coefficients sont :

$$\alpha_1 = \theta_1 \ ; \ \alpha_2 = \theta_1^2 \ ; \ . \ . \ . \ \alpha_\infty = \theta_1^\infty$$

Variance du processus

$$V(y_t) = \gamma_0 = E(y_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2) = \mathbf{2.706}$$

Fonction d'autocorrélation

$$\gamma_1 = -\sigma_\varepsilon^2 \theta_1 = 1.32 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.488$$

Pour h $>$ 1 les coefficients d'autocorrélation sont nuls donc le corrélogramme montre la stationnarité dans la temps du processus MA(1).

Exercice 4 :
On considère le processus suivant :

$$y_t = 0.2 + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.75\varepsilon_{t-2}$$

1. De quel type de processus s'agit-il ? Justifier votre réponse.
2. Est-il inversible ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de ce processus. On donne $\sigma_\varepsilon^2 = 1.56$
4. Détermnier les coefficients d'autocorrélation du processus.
5. Tracer le corrélogramme.

Type du processus

Il s'agit d'un processus MA(2) car y_t s'exprime en fonction du terme d'erreur de retard 2 (ε_{t-2}). Notamment les coefficients du modèle sont :
$\theta_1 = -0.5 \quad \theta_2 = 0.75$

Condition d'inversibilité

Soit le polynôme retard associé au processus y_t :

$$\phi(L) = 1 - 0.5L - 0.75L^2$$

En resolvant $\phi(L) = 0$

$$\Delta = 3.25 \Rightarrow L_1 = 0.87 < 1 \quad ; \quad L_2 = -1.535$$

Le processus **n'est pas inversible** car $L_1 < 1$

Espérance et Variance

- Espérance : $E(y_t) = 0.2$
- Variance :

$$V(y_t) = \gamma_0 = E(y_t^2) - [E(y_t)]^2$$

$$E(y_t^2) = E[(\theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})]$$

$$\Rightarrow E(y_t^2) = \theta_0^2 + \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) = 2.8675$$

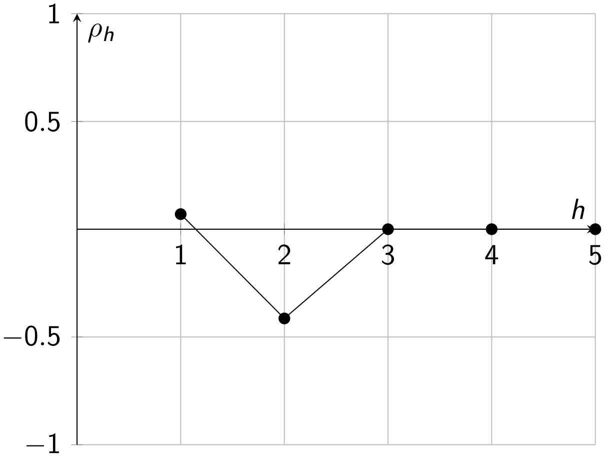
$$\gamma_0 = \mathbf{2.8275}$$

Coefficients d'autocorrélation

$$\rho_1 = \frac{\theta_1\theta_2 - \theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{(0.75 \times -0.5) - (-0.5)}{1 + (-0.5)^2 + (0.75)^2} = 0.07$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{-0.75}{1.8125} = -0.414$$

Corrélogramme



Un processus est dit ARMA mixte lorsqu'il comporte une partie AR(p) et une partie MA(q). Il s'écrit comme suit :

$$\psi(L)y_t = \phi(L)\varepsilon_t$$

Ses propriétés sont telles que :

- $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation **MA(**∞)

$$Y_t = \frac{\phi(L)}{\psi(L)}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \varepsilon_{t-j}; \quad h_0 = 1$$

- $\{y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation **AR(**∞)

$$\varepsilon_t = \frac{\psi(L)}{\phi(L)} Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j Y_{t-j}; \quad \pi_0 = 1$$

- Fonction d'autocorrélation

$$\gamma_{(h)} - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \gamma_{(h-i)} = E(\varepsilon_t Y_{t-h}) - \sum_{j=1}^{q} \theta_j E(\varepsilon_{t-j} Y_{t-h})$$

Remarque

$\mathbf{E(Y_{t-h}\varepsilon_{t-j}) = 0 \text{ si } t-h < t-j}$. Pour $h > q$ on rétrouve l'équation de récurrence d'ordre comme dans le cas d'un processus AR(p) :

$$\gamma_h - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \gamma_{h-j} = 0$$

Exercice 5 :
Soit le processus $\{y_t\}$ qui s'ecrit comme suit :

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

1. De quel type de processus s'agit-il ? Justifier votre réponse.
2. Enoncer la condition d'inversibilité et de stationnarité de ce processus.
3. Ecrire le devéloppement en $MA(\infty)$ de ce processus
4. Determiner les expressions de γ_0 et γ_1
5. Vérifier l'égalité suivante :

$$\gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 = -\sigma_\varepsilon^2 \theta_1$$

6. Quelle serait l'expression de γ_2 ? Existe-il une relation avec AR(1) ?

Identification

Il s'agit d'un processus ARMA (1,1) car il est exprimé à l'aide d'une partie AR(1) et MA(1). A noter la présence des termes y_{t-1} et ε_{t-1}.

Inversibilité et stationnarité

- **Inversibilité** : déjà tout processus AR est inversible donc il suffit que la partie MA soit inversible pour faire le tout

$$\phi(L) = 0 \Rightarrow |L| = \frac{1}{|\theta_1|} > 1$$

- **Stationnarité** : d'autre part tout processus MA est stationnaire alors la condition de stationnarité s'applique à la partie AR

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow |L| = \frac{1}{|\alpha_1|} > 1$$

Représentation en **MA**(∞)

On peut réecrire y_t par les polynômes retards :

$$y_t = \frac{1-\theta_1 L}{1-\alpha_1 L}\varepsilon_t$$

En faisant un développment en série géométrique on a:

$$y_t = \varepsilon_t + (\alpha_1 - \theta_1)\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{t-j}$$

Expression de γ_0 et γ_1

Il faut juste savoir que le processus ARMA(1,1) est inversible donc on a les expressions de chaque $\mathbf{y_{t-h}} \;\; \forall \mathbf{h} \in [\mathbf{1}, +\infty]$. On a :

$$\gamma_h = E(\varepsilon_t Y_{t-h}) + (\alpha_1 - \theta_1)\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_1^{j-1} E\left(\varepsilon_{t-j} Y_{t-j}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + (\alpha_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_1^{2(j-1)}\right] = \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1 - 2\alpha_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \alpha_1^2}\right]$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \alpha_1\sigma_\varepsilon^2 \left[1 + (\alpha_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_1^{2(j-1)}\right] = \alpha_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2$$

Relation d'égalité

De l'expression du γ_1 ci-dessus on peut avoir l'égalité suivante :

$$\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 = -\sigma_\varepsilon^2\theta_1$$

La relation avec AR(1)

$$\Rightarrow \gamma_2 = \alpha_1 \left[-\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 + \alpha_1 \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + (\alpha_1 - \theta_1)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_1^{2(j-1)} \right] \right] = \alpha_1 \gamma_1$$

Nous pouvons généraliser par :

$$\gamma_{(h)} - \alpha_1 \gamma_{(h-1)} = 0$$

On se retrovue avec une égalité semblable à celle du processus AR(1) puisque pour $\mathbf{h} > \mathbf{1}$ les autocorrélations de la partie MA(1) deviennent nulles.

Exercice 6 (Observation corrélogramme) :
On se donne le processus ARMA(1,1) suivant :

$$y_t = 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.15\varepsilon_{t-1}$$

On donne $\sigma_\varepsilon^2 = 5.3$.

1. Déterminer les coefficients d'autocorrélation pour $h \in [1, 6]$
2. Tracer le corrélogramme.
3. Pourriez-vous conclure sur la stationnarité de ce processus.

Coefficient d'autocorrélation

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \left[\frac{1 - 2\alpha_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \alpha_1^2}\right] = 5.3\left(\frac{0.8425}{0.64}\right) = 6.977$$

$$\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_\varepsilon^2 = 3.3912 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.486$$

$$\gamma_2 = \alpha_1\gamma_1 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0.2916$$

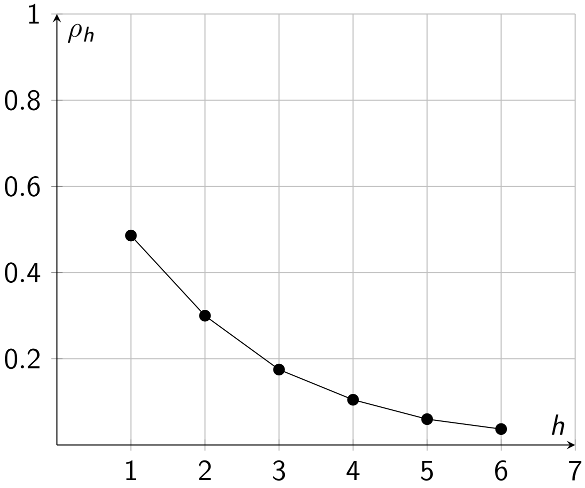
$$\gamma_3 = \alpha_1\gamma_2 \Rightarrow \rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0.17496$$

$$\gamma_4 = \alpha_1\gamma_3 \Rightarrow \rho_4 = \frac{\gamma_4}{\gamma_0} = 0.104976$$

$$\gamma_5 = \alpha_1\gamma_4 \Rightarrow \rho_5 = \frac{\gamma_5}{\gamma_0} = 0.06$$

$$\gamma_6 = \alpha_1\gamma_5 \Rightarrow \rho_6 = \frac{\gamma_6}{\gamma_0} = 0.038$$

Corrélogramme



Conclusion

Le corrélogramme nous donne l'information sur la diminution des coefficients d'autocorrélation ce qui s'apparente à une stationnarité. Puisque à h = 6 le coefficient est presque à 0. Les tests de stationnarité passent par les hypothèses :

$$\begin{cases} H0 & : & \rho_h = 0 \\ H1 & : & \rho_h \neq 0 \end{cases}$$

Par l'analyse graphique du corrélogramme nous pourrions dire que le processus est **stationnaire**.