Introduction : Série temporelle

Une série temporelle ou série chronologique ou chronique est constituée par une suite ordonnée d'observation $\{y_1, \dots, y_T\}$

→ les méthodes d'analyse des série temporelle consiste à effectuer une prévision (exprimer y en fonction de valeurs passées du terme d'erreur)

Le modèle autoregressif d'ordre p :

$AR(P) = y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

Le modèle moyen mobile d'ordre q :

$y_t \sim MA(q)$ moving average

$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

Le modèle ARMA (P,q) :

$y_t \sim ARMA(P,q)$

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

Le modèle ARIMA (P,d,q) :

ARMA intégré, non stationnaire

d = ordre d'intégration

L'approche Box Jenkins permet d'avoir les prévisions les plus précises lorsque les données ont une structure probabiliste stable au cours du temps et assez nombreuse $(T \geq 30)$

Les propriétés stochastiques : Les structure probabilistes : les moments d'ordre 1 et 2 : E, V, COV, ...

Le concept de stationnarité

Il faut étudier les caractéristiques stochastiques de la série chronologique

→ Si E, V, Cov se modifie dans le temps alors la série est non stationnaire.

Stationnaire : Si E, V et COV sont invariant au cours du temps càd sont indépendants du temps.

Le processus $\{y_t\}$ est stationnaire

ssi
- $E(y_t) = \mu = E(y_{t-k})$
- $V(y_t) = \gamma_0 = V(y_{t-k})$
- $Cov(y_t, y_{t-k}) = Cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k$

$\{u_t\}$: processus stationnaire

Si de plus la loi jointe de proba de la série temporelle est invariant dans le temps : $f(y_1, \dots, y_T) = f(y_{1+k}, \dots, y_{T+k})$

alors la série temporelle est stationnaire au sens stricte / fort

⇒ le coeff d'autocorrélation

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{V(y_t)V(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Estimation des caractéristiques stochastiques d'un processus stationnaire :

l'échantillon : $\{y_1, \dots, y_T\}$

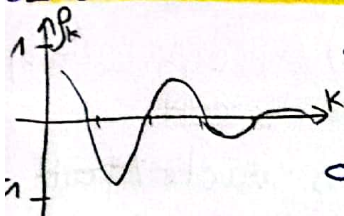
- $E(y_t) = \mu \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{T} \sum y_t$
- $V(y_t) = \gamma_0 \Rightarrow \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum (y_t - \bar{y})^2$
- $Cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k \Rightarrow \hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-K} (y_t - \bar{y}) \times (y_{t+k} - \bar{y})$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_k = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum (y_t - \bar{y})^2}$$

$\hat{\rho}_k = 0 \Rightarrow$ Absence d'autocorrélation entre y_t et y_{t+k}

Corrélogramme : la représentation des autocorrélations en fonction de K qui permet de définir la nature du processus étudié où $K \leq T/4$

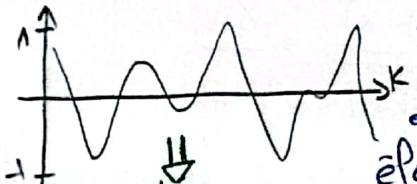
• **Proc. stationnaire:**



• évolution amorti

• Décroissance rapide des coeff d'autoc $\hat{\rho}_k$

• **Proc. non stationnaire:**



• avoir une résonnance

• des valeurs élevées de $\hat{\rho}_k$ existant très lointain

ne sont pas intéressants sur le plan prévisionnel

Les modèles univariés des séries temporelles

L'opérateur décalage à gauche/retard:

$L^p y_t = y_{t-p}$: la série retardé de p périodes

→ **Le polynôme retard:**

$$B(L) = 1 + \alpha L + \dots + \alpha^p L^p = \frac{1-(\alpha L)^{p+1}}{1-\alpha L}$$

avec $|\alpha L| < 1 \Rightarrow B(L) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{1-\alpha L}$

$B(L) x_t \Rightarrow |\alpha| < 1$

L'opérateur décalage à droite/avance:

$F^p y_t = y_{t+p}$: La série avancé de p périodes

Remarque: $(LF)^p y_t = y_t$

L'opérateur/Filtre de différentiation:

noté Δ où $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

→ La série en différence 1er

$\Rightarrow \Delta = 1 - L = F - 1$

Série en différence seconde:

$$\Delta^2 y_t = (1-L)^2 y_t = y_t + y_{t-2} - 2y_{t-1}$$

Processus/Modèle AR(P):

$$y_t \sim AR(P) \Leftrightarrow y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{bruit blanc}} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$Cov(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$

$|\alpha_i| < 1 \quad \forall i = 1, \dots, p$ et $|\sum \alpha_i| < 1$

Condition de stationnarité et inversibilité:

AR(P)	MA(q)
toujours inversible	toujours stationnaire
stationnaire si:	inversible si:
Les racines de A(L) sont tq $\lvert L_i \rvert > 1$ $\forall i = 1, \dots, p$	Les racines de B(L) sont tq $\lvert L_i \rvert > 1$ $\forall i = 1, \dots, p$
C-à-d si $(A(L))^{-1}$ existe $\Rightarrow y_t = (A(L))^{-1} \varepsilon_t$ où $A(L) y_t = \varepsilon_t$	

Le processus AR(1):

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ où $|\alpha_1| < 1$

Si $|L| > 1 \Rightarrow$ Le processus est stationn

$E(y_t) = \mu = \alpha_1 \mu \Leftrightarrow \mu = 0 \Leftrightarrow E(y_t) = 0$

Si $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

$E(y_t) = \mu = \alpha_1 \mu + \alpha_0 \Leftrightarrow E(y_t) = \mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$

• $Var(y_t) = \gamma_0 = Var(\alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)$

$Cov(\varepsilon_t, f(\varepsilon_{t-1})) = 0$ $= \alpha_1^2 \gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$

$\Leftrightarrow Var(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha_1^2}$

• Covariance d'ordre K: $K \geq 1$

$Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k = \alpha_1^k \cdot \gamma_0$

$\Rightarrow \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha_1^k$

Si $K = 0 \Rightarrow Cov(y_t, y_t) = V(y_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha_1^2}$

$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t)$

$= \Delta(y_t - y_{t-1})$

$= (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$