Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information à Tunis

Année Universitaire
2013-2014
Première Année

Méthodes d'Estimation
Série n°3 : Estimation ponctuelle

Exercice 1 *Considérons une population constituée de trois types d'individus ayant des probabilités d'apparition θ^2, $2\theta(1-\theta)$ et $(1-\theta)^2$, où $0 < \theta < 1$.*

1. *Montrer que $T_3 = \dfrac{N_1}{n} + \dfrac{N_2}{2n}$ est un estimateur obtenu par la méthode des moments de θ.*
2. *En utilisant l'estimateur obtenu en (1), donner un estimateur obtenu par la méthode des moments de $\lambda = \theta/(1-\theta)$. Quelle est sa loi asymptotique ?*
3. *Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.*

   A.N. : $n = 3; x_1 = 1; x_2 = 2$ et $x_3 = 1$

Exercice 2 *Considérons n objets ayant des durées de vie $X_1, ..., X_n$, supposées iid, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$:*

1. *Trouver deux estimateurs de λ par la méthode des moments.*
2. *Trouver un estimateur de $P(X_1 \geq 1)$ par la méthode des moments.*
3. *Supposons que la durée de vie de ces n objets suit une loi $\Gamma(\theta, \lambda)$, θ et λ inconnus. Montrer que les estimateurs par la méthode des moments sont :*

$$T_1 = \frac{\bar{X}^2}{S_n^2} \quad et \quad T_2 = \frac{\bar{X}}{S_n^2}$$

   où S_n^2 est la variance empirique.

Exercice 3 *Soit $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ inconnu.*

1. *Montrer que l'estimateur par la méthode des moments déterminé à partir de $E(X^2)$ est*

$$\widehat{\theta} = \frac{-1 + \sqrt{1 + (4/n)\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}{2}$$

2. *Déterminer la distribution asymptotique de $\widehat{\theta}$.*

   Indication : Rappelons que si X suit une loi de Poisson de paramètre θ, alors $Var(X^2) = 4\theta^3 + 6\theta^2 + \theta$.

Exercice 4 *Soit $X_1, .., X_n$ un n-échantillon ayant les densités suivantes, trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ :*

1. $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, x \geq 0, \theta > 0$.
2. $f(x, \theta) = \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)}, x \geq c$, *c constante strictement positive,* $\theta > 0$.
3. $f(x, \theta) = c\theta^{c} x^{-(c+1)}, x \geq \theta$, *c constante strictement supérieure à 1,* $\theta > 0$.
4. $f(x, \theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 \leq x \leq 1, \theta > 1$.
5. $f(x, \theta) = (x/\theta^2) \exp(-x^2/2\theta^2), x > 0, \theta > 0$.
6. $f(x, \theta) = \theta c x^{c-1} \exp(-\theta x^{c}), x \geq 0$, *c constante strictement supérieure à 1 et* $\theta > 0$.

Exercice 5 *On observe un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une variable aléatoire X de densité*

$$f(x, \theta) = \exp(\theta - x) \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}, \quad \theta > 0$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T de θ et montrer que T est une statistique exhaustive pour θ.

Exercice 6 *Supposons que $X_1, ..., X_n$ soit un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ et σ inconnus mais strictement positifs. Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de (μ, σ^2).*

Exercice 7 *Soit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon issu d'une loi de probabilité de fonction densité*

$$f(x, \theta) = \theta (1 - x)^{\theta-1}_{]0,1[} \mathbb{1}(x)$$

1. *Calculer $E_\theta(X)$ et $Var(X)$.*
2. *Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_1$ de θ par la méthode des moments.*
3. *Donner la loi asymptotique de $\widehat{\theta}_1$.*
4. *La densité $f(x, \theta)$ appartient-elle à la famille exponentielle ?*
5. *Proposer une statistique exhaustive pour le modèle et calculer son espérance.*
6. *Déterminer $\widehat{\theta}_2$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.*

Exercice 8 *Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi jointe est définie par*

$$P(X = s, Y = t) = p_{st}, \quad (s,t) \in \{1,2\}^2$$

Soit $\underline{X} = ((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ *un* n*-échantillon de même loi que* (X, Y)*, on pose*

$$N_{st} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i = s\}} \mathbb{1}_{\{Y_i = t\}}$$

1. *Quelles sont les lois marginales de* X *et de* Y *?*
2. *On suppose que l'ensemble des paramètres est défini par*

   $$\Theta = \left\{ \theta = (p_{11}, p_{12}, p_{21}) \in [0,1]^3, et\ p_{22} = 1 - p_{11} - p_{12} - p_{21} \in [0,1] \right\}$$

   Le modèle $(P_\theta,\ \theta \in \Theta)$*, où* P_θ *est la loi de* (X, Y)*, est-il identifiable ?*
3. *Si* $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ *sont des observations du* n*-échantillon* $\underline{X}$*, calculer la fonction vraisemblance de* θ*.*
4. *Donner une statistique exhaustive, autre que le* n*-échantillon* $\underline{X}$*, pour le paramètre* θ*.*
5. *Donner un estimateur de* θ *par la méthode des moments.*
6. *Donner la distribution asymptotique de l'estimateur calculé dans la question 5.*