

Exercice-Examen Mai2019 & Correction

Le temps de réponse en millisecondes¹ a été déterminé pour trois types de circuits différents utilisés dans un mécanisme de fermeture automatique de vannes². Les résultats sont définis comme suit,

Tableau1:

types circuits	temps réponse				
1	9	12	10	8	15
2	20	21	23	17	30
3	6	5	8	16	7

Tableau2:

Traitement	Mean difference	DF	Sdandard Error	$t - test$ $s. H_0: coeff = 0$	$Prob > t $
1 vs 2	?	1	2.6	-4.38	0.0009
1 vs 3	?	1	2.6	0.92	0.3742
2 vs 3	?	1	2.6	5.31	0.0002

1. Tester l'hypothèse que les trois types de circuit ont le même temps de réponse. Justifier votre réponse³.
2. Calculer les moyennes traitements. Comparer et interpréter le résultat.
3. Compléter la colonne de différence moyennes du tableau2.
4. Comparer les paires de moyennes traitements en appliquant:
 - i. La procédure de Tukey-Test⁴ et conclure.
 - ii. La méthode Fisher LSD⁵ et conclure.
 - iii. Est ce que les deux méthodes donnent le même résultat? Justifier votre réponse en définissant théoriquement les deux procédures respectives, Tukey-Test et Fisher LSD.
5. Pour un niveau de confiance $(1 - \alpha)\%$, calculer les intervalles de confiances associés à toutes paires de moyennes traitements.
6. Construire un ensemble de contrastes orthogonaux, en supposant qu'au début de l'expérience, on soupçonne⁶ que le temps de réponse du circuit type 2 était bien différent de celui des deux autres types

¹ un millièème de seconde.

² Dispositif mobile utilisé dans les barrages, les usines hydroélectriques, les écluses, etc., susceptible d'être manœuvré en charge et permettant à volonté d'intercepter ou de laisser libre le passage de l'eau.

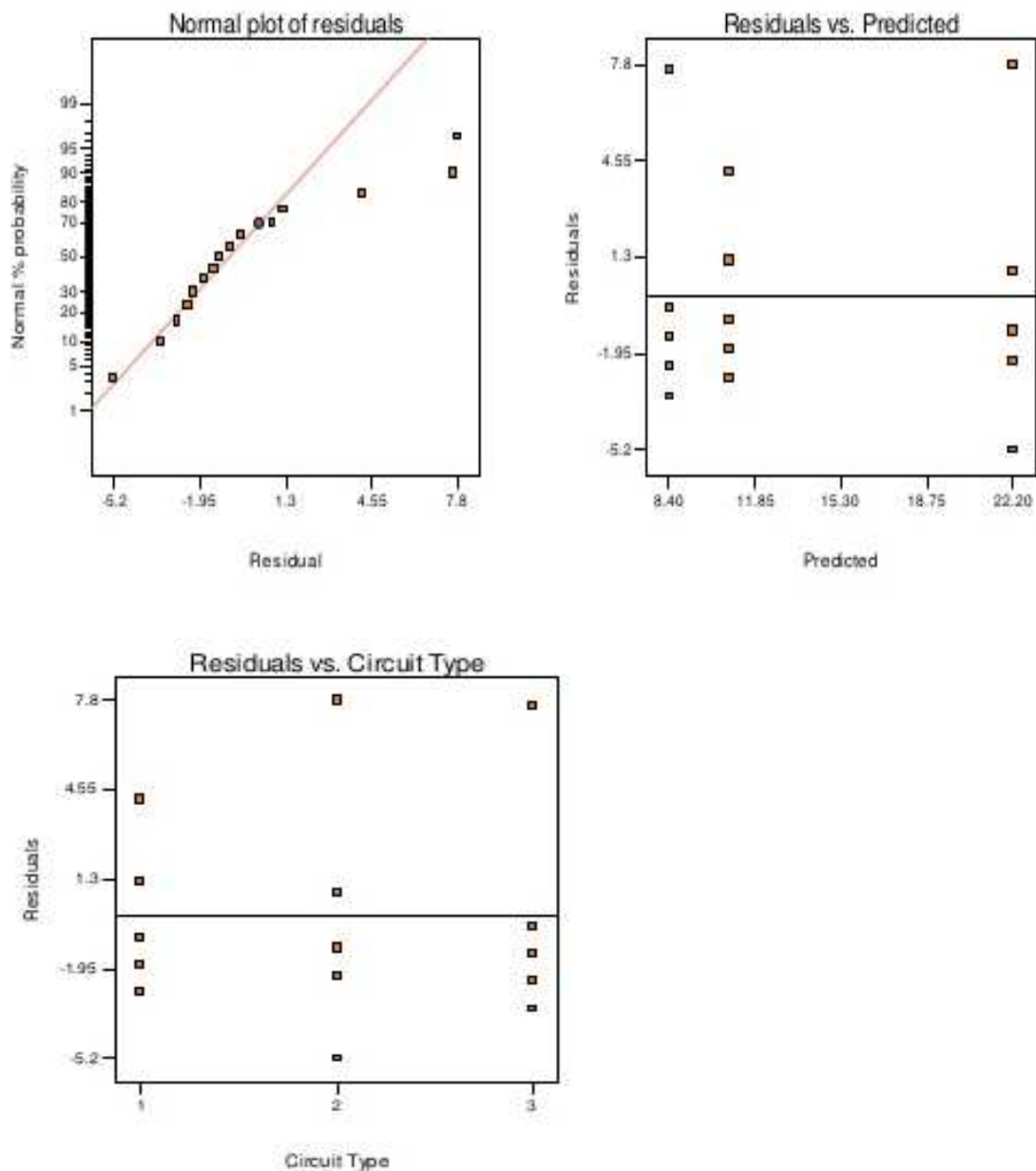
³ Seuil $\alpha = 5\%$, $F^c = 3,89$.

⁴ Pour la valeur critique du test, voir Tables statistiques en pages 4-5.

⁵ $t_{\frac{\alpha}{2}, ddl} = 3,428$.

NB: il est demandé de définir le Corps d'hypothèses incluant ces contrastes orthogonaux, de calculer cet ensemble C de contrastes orthogonaux et de mener le test approprié à ce corps pour la prise de décision.

7. Pour un ingénieur concepteur qui souhaite réduire le temps de réponse, quel type de circuit doit-il choisir?
8. Analyser les résidus de l'expérience. Les hypothèses de base de l'analyse de la variance sont-elles vérifiées? Justifier votre réponse.



⁶ En observant les données temps-réponses des types circuits du Tableau1.

VIII. Percentage Points of the Studentized Range Statistic (continued)

f	$q_{0.05}(p, f)$																			
	p																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	18.1	26.7	32.8	37.2	40.5	43.1	45.4	47.3	49.1	50.6	51.9	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6	
2	6.09	8.28	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.36	16.57	16.77	
3	4.50	5.88	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.16	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.12	11.24	
4	3.93	5.00	5.76	6.31	6.73	7.06	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.67	8.80	8.92	9.03	9.14	9.24	
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21	
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.04	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59	
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.80	5.99	6.15	6.29	6.42	6.54	6.65	6.75	6.84	6.93	7.01	7.08	7.16	
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87	
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.65	
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.12	6.20	6.27	6.34	6.41	6.47	
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.14	6.20	6.27	6.33	
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21	
13	3.06	3.73	4.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.06	6.11	
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.79	5.86	5.92	5.98	6.03	
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.79	5.85	5.91	5.96	
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90	
17	2.98	3.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84	
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79	
19	2.96	3.59	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75	
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.55	5.59	
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48	
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82	4.90	4.98	5.05	5.11	5.17	5.22	5.27	5.32	5.36	
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24	
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13	
∞	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.84	4.98	4.93	4.97	5.01	

Correction

1) ANOVA :

$$Y_{ij} = \mu_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_j = 0 \\ H_1 : \exists j / \alpha_j \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} SS_{\text{trait}} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \\ &= 5 \cdot \sum_{i=1}^3 \bar{Y}_i^2 - N \bar{Y}^2 \end{aligned}$$

$$= 543.6$$

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 (Y_{ij} - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 Y_{ij}^2 - N \bar{Y}^2 \\ &= 746.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSE &= SST - SS_{\text{trait}} \\ &= 202.8 \end{aligned}$$

$$F(q-1, N-q) = F(2, 12) = \frac{SS_{\text{trait}} / 2}{SSE / 12}$$

$$= 16.08 > 3.99$$

\Rightarrow on rejette H_0

~~Il y'a une différence significative.~~

La différence du temps de réponse des trois circuits est significative.

2)

	\bar{Y}_i
1	10.8
2	22.2
3	8.4

On a le circuit 3 et le temps de réponse moyen le plus faible alors que le circuit 2 possède le temps de réponse moyen le plus élevé.

Les circuits ① et ③ sont proches en matière de temps de réponse moyen des 5 observations alors que le circuit ② est très élevé par rapport à eux.

3)

	Mean diff
1 vs 2	-11.4
1 vs 3	2.4
2 vs 3	13.8

4) i) Tukey Test :

$$\begin{cases} H_0 : \mu_i = \mu_{i'} \\ H_a : \mu_i \neq \mu_{i'} \end{cases}$$

$$q_\alpha = \frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_{i'}}{\sqrt{\frac{CNSSSE}{n}}}$$

$$\begin{aligned} T_\alpha &= q(\alpha, f) \sqrt{\frac{CNSSSE}{n}} \quad \text{avec } f = \text{ddl } CNSSSE \\ &= 9.95 \times \sqrt{\frac{16.9}{5}} \\ &= 3.77 \times \sqrt{\frac{16.9}{5}} \\ &= 6.93 \end{aligned}$$

- 1 vs 2 : $|-11.4| > T_\alpha \Rightarrow$ on rejette H_0 (la différence des moyennes diffère significativement)
- 1 vs 3 : $|2.4| < T_\alpha \Rightarrow$ on accepte H_0 (la différence des moyennes ne diffère pas significativement)
- 2 vs 3 : $|13.8| > T_\alpha \Rightarrow$ on rejette H_0 (la différence des moyennes diffère significativement)

ii) LSD Fisher LSD :

$$n = 5 \\ n_1 = 2 \quad n_2 = 5$$

$$\begin{aligned} LSD &= t_{\alpha/2, N-9} \sqrt{\frac{2 \text{ CASSE}}{5}} \\ &= 3,428 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{16,9}{5}} \\ &= 8,9128 \end{aligned}$$

- 1 vs 2 $|-11,4| > LSD \Rightarrow$ la différence des moyennes diffère significativement
- 1 vs 3 $|2,4| < LSD \Rightarrow$ les moyennes ne diffèrent pas significativement
- 2 vs 3 $|13,8| > LSD \Rightarrow$ les moyennes diffèrent significativement.

iii) On remarque que les deux méthodes donnent le même résultat. La seule différence entre les deux c'est que le Tukey Test est basé sur les rangs standardisés alors que le Fisher LSD est basé sur la distribution t-student.

$$\boxed{5} \quad I_C^{(1-\alpha)\%} : \mu_i - \mu_j \in (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) \pm T_\alpha$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ vs } 2 : \quad I_C^{(1-\alpha)\%} : & [-11,4 \pm 6,93] = \text{etc} \\ & = [-18,33 ; 4,47] \end{aligned}$$

$$1 \text{ vs } 3 : \quad I_C^{(1-\alpha)\%} : [2,4 \pm 6,93] = [-4,53 ; 9,33]$$

$$2 \text{ vs } 3 : \quad I_C^{(1-\alpha)\%} : [13,8 \pm 6,93] = [6,87 ; 20,73]$$

6)

	\mathbb{Q}	C
$Y_{1.}$	54	1
$Y_{2.}$	111	-2
$Y_{3.}$	42	1

Prez ce contraste afin tel que $\sum C_i = 0$

et

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = 0 \\ H_a : \mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$SSC = \frac{\left(\sum C_i Y_{i.} \right)^2}{n \sum C_i^2}$$

$$= \frac{(54 - 2 \cdot 111 + 42)^2}{n \sum C_i^2}$$

8) Les résidus suivent une loi normale d'après le graphique des résidus ~~libre~~ (Normal plot) les points sont presque tous alignés sur une même droite.

Il n'y a pas d'anomalie d'après le scatter plot.

En plus la variance des résidus est constante.