Exercice 1 :

①

- $\int_1^2 \frac{(y'(x))^2}{x^2} dx$; $y(1) = 0$ et $y(2) = 1$

$$F(x, y') = \frac{(y'(x))^2}{x^2}$$

⊙ F ne dépend pas de y donc c'est une intégrale première.

Par conséquent, l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \iff \frac{2y'}{x^2} = C \iff \frac{y'}{x^2} = C_1 \iff y'(x) = C_1 x^2$$

$$\iff y(x) = C_1 x^3 + C_2$$

Déterminons C_1 et C_2

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(2) = 4C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 4C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 3C_1 = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad C_1 = \frac{1}{3} \text{ et } C_2 = -\frac{1}{3}$$

Alors $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$.

⊙ La condition de Legendre :

$$F_{y'y'}(x, y, y') = \frac{2}{x^2} > 0$$

• La condition de Jacobi

* L'équation de Jacobi :

$$\frac{d}{dx}\left[F_{y'y'}\eta'\right] = \left[\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{F_{yy}} - \frac{d}{dx}(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f_{yy'}})\right]\eta$$

donc

$$\frac{d}{dx}\left[f_{y'y'}\,\eta'\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{x^2}\eta'(x)\right] = c$$

alors

$$\frac{2}{x^2}\,\eta'(x) = C \quad \text{donc } \eta'(x) = kx^2 \iff \eta(x) = k_1 x^3 + k_2$$

avec $\eta(1) = \eta(2) = 0$

donc $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ \\ 8k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \iff k_1 = k_2 = 0$

alors $\eta(x) = 0$

$\forall \lambda ;\ \lambda \neq 1$ on a $\eta(\lambda) = \eta(1) = 0$ et $f_{y'y'}(\lambda, y, y')\,\eta'(x) = 0$

donc pas de points conjugués.

D'où y est un minimum du problème

(3)

$\cdot \int_{x_1}^{x_2} (1+y'^2(x))\, dx \quad ; \quad y(x_1)=0$ et $y(x_2)=1$

$$F(y') = 1+y'^2$$

F ne dépend pas de y alors l'équation d'Euler-Lagrange se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \iff 2y'(x) = C$$

$$\iff y'(x) = C_1 \iff y(x) = k_1 x + k_2$$

on a $\begin{cases} y(x_1) = k_1 x_1 + k_2 = 0 \\ y(x_2) = k_1 x_2 + k_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k_2 = -k_1 x_1 \\ k_1 x_2 - k_1 x_1 = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k_2 = -k_1 x_1 \\ k_1(x_2 - x_1) = 1 \end{cases} \overset{x_1 \neq x_2}{\iff} \begin{cases} k_2 = -\dfrac{x_1}{x_2 - x_1} \\ k_1 = \dfrac{1}{x_2 - x_1} \end{cases}$

alors $y(x) = \dfrac{1}{x_2 - x_1} x - \dfrac{x_1}{x_2 - x_1}$

⊙ La condition de Legendre :

$$F_{y'y'}(x,y,y') = 2 > 0$$

⊙ La condition de Jacobi :

* L'équation de Jacobi :

$\dfrac{d}{dx}[2y'] = 0 - 0 = 0$ alors $2y'(x) = 0$

alors $y(x) = c$ avec $y(x_1) = y(x_2) = 0$

donc $y(x) = 0$

Par conséquent, il n'y a pas aucun point conjugué à x_1

D'où y est un minimum du problème.

- $\int_0^1 (y'^2 + 2xy)\,dx$; $y(0) = y(1) = 8$

$$f(x, y, y') = y'^2 + 2xy$$

⊙ L'équation d'Euler-Lagrange :

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y''(x) = x \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

on a $\begin{cases} y(0) = c_2 = 8 \\ y(1) = \frac{1}{6} + c_1 + c_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 8 \\ c_1 = 8 - 8 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \end{cases}$

donc $y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} + 8$

⊙ La condition de Legendre :

$$F_{y'y'}(x,y,y') = 2 > 0$$

⊙ La condition de Jacobi :

* L'équation de Jacobi :

$$\frac{d}{dx}[2y'] = \Big[0 - \frac{d}{dx}(\underbrace{F_{yy'}}_{0})\Big] y$$

donc $\frac{d}{dx}[2y'] = 0$

alors $2y'(x) = C \iff y'(x) = k \iff y(x) = kx$

avec $y(0) = y(1) = 0$

alors $y(x) = 0 \Rightarrow$ Pas de points conjugués à 0.

Donc y est un minimum du problème.

$\cdot \int_0^1 (y'(x)-1)^2 dx$, $y(0)=0$ et $y(1)=1$

$$F(x,y,y') = (y'(x)-1)^2$$

⊙ F ne dépend pas de y alors l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \Leftrightarrow 2(y'(x)-1) = C \Leftrightarrow 2y'(x)-2 = C$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = k \Leftrightarrow y(x) = kx$$

on a $y(0)=0$ et $y(1)=k=1$

donc $y(x)=x$

⊙ La condition de Legendre

$$F_{y'y'}(x,y,y') = 2 > 0$$

⊙ La condition de Jacobi.

* L'équation de Jacobi :

$$\frac{d}{dx}\left[2\eta'\right] = 0 \Leftrightarrow 2\eta'(x) = C \Leftrightarrow \eta'(x) = C$$

$$\Leftrightarrow \eta(x) = Cx$$

avec $\eta(0) = \eta(1) = 0$ alors $\eta(x) = 0$

donc pas de points conjugués

D'où y est un minimum du problème.

Exercice 2 : (7)

$$J[y] = \int_a^b f(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$F(x,y') = f(x)\sqrt{1+y'^2}$$

F ne dépend pas de y alors c'est une intégrale première : et l'équation d'Euler-Lagrange est :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \iff \frac{f(x)\,y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\iff f^2(x)(y'(x))^2 = C^2(1+y'^2)$$

$$\iff (y'^2(x))(f^2(x)-C^2) = C^2$$

$$\iff y'^2(x) = \frac{C^2}{f^2(x)-C^2}$$

$$\iff y'(x) = \frac{K}{\sqrt{f^2(x)-C^2}}$$

$$\iff y(x) = \int_a^x \frac{K}{\sqrt{f^2(t)-C^2}}\,dt + \varphi$$

Exercice 3 :

$$J[y] = \int_2^3 y^2(1-y')^2\,dx \qquad y(2) = 1,\ y(3) = \sqrt{3}$$

$F(y, y') = y^2(1-y')^2$ ne dépend pas de x

donc c'est une intégrale première et l'équation d'E-L est :

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

$$y^2(1-y')^2 - y' \times -2y^2(1-y') = C$$

$$\Rightarrow y^2(1-2y'+y'^2) + 2y^2y' - 2y'^2y^2 = C$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y'^2y^2 = C$$

$$\Leftrightarrow y^2(1-y'^2) = C \quad (*)$$

On utilise la méthode de séparation pour résoudre (*)

En effet : on a :

$$y^2 - y^2 \times y'^2 = C$$

$$\Leftrightarrow y'^2y^2 = y^2 - C$$

$$\Leftrightarrow y'^2 = \frac{y^2-C}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2-C}{y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{y^2-C}}{|y|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pm|y|}{\sqrt{y^2-C}}dy = dx \Rightarrow \frac{C_1\, y}{\sqrt{y^2-C}}dy = dx$$

maintenant, on intègre :

$$C_1 \int \frac{y}{\sqrt{y^2-c}}\, dy = \int dx$$

alors

$$C_1 \sqrt{y^2-c} + K_1 = x + K_2$$

alors

$$\sqrt{y^2-c} + K = x + K_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2-c} = x + \varphi$$

$$\Rightarrow y^2 - c = (x+\varphi)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = (x+\varphi)^2 + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{(x+\varphi)^2 + C}$$

or on a $y(1) = 1 > 0$

donc $y(x) = \sqrt{(\varphi+x)^2 + C}$

Exercice 4 :

(19)

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2xy)\,dx$$

$$S = \{ y \in C^1([0,1]) \; ; \; y(0) = y(1) = 0 \}$$

- L'équation d'Euler - Lagrange :

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$-2y + 2x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$-2y + 2x - 2y'' = 0$$

$$y'' + y = x \quad (*)$$

on résout l'équation homogène c'est à dire

$$y'' + y = 0 \quad (H)$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0 \qquad a = 1, \; b = 0, \; c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4 < 0$$

si $\Delta < 0$ alors la solution de (H) est donnée par

$$y_h(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \right)$$

avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

dans ce cas : $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$

alors $y_H(x) = A\cos x + B\sin x$

On détermine alors une solution particulière.

On voit que $y_p(x) = x$ est une solution de (*)

donc la solution générale de (*) est

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$= A\cos x + B\sin x + x$$

On a $\quad y(0) = A = 0$

et
$$y(1) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{A}\cos(1) + B\sin(1) + 1 = 0$$

donc $\quad B = -\dfrac{1}{\sin(1)}$

Donc $\quad y(x) = -\dfrac{1}{\sin(1)}\sin x + x$

⊙ La condition de Legendre :

$$F_{y'y'}(x, y, y') = 2 > 0$$

$$F_{yy} = -2 \quad , \quad F_{y'} = 2y' \text{ donc } F_{yy'} = 2$$

⊙ La condition de Jacobi :

* L'équation de Jacobi :
$$\frac{d}{dx}(2\eta') = \left[F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right]\eta = -2\eta$$

alors $y_H(x) = A\cos x + B\sin x$

On détermine alors une solution particulière.

On voit que $y_p(x) = x$ est une solution de $(*)$

donc la solution générale de $(*)$ est

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$= A\cos x + B\sin x + x$$

On a $\quad y(0) = A = 0$

et $\quad y(1) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{A}\cos(1) + B\sin(1) + 1 = 0$

donc $\quad B = -\dfrac{1}{\sin(1)}$

Donc $\quad y(x) = -\dfrac{1}{\sin(1)}\sin x + x$

⊙ La condition de Legendre :

$$F_{y'y'}(x,y,y') = 2 > 0$$

$$F_{yy} = -2 \quad , \quad F_{y'} = 2y' \text{ donc } F_{yy'} = 2$$

⊙ La condition de Jacobi :

* L'équation de Jacobi :

$$\frac{d}{dx}(2\eta') = \left[F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right]\eta = -2\eta$$

$2y''(x) + 2y(x) = 0 \Leftrightarrow y''(x) + y(x) = 0$ (13)

avec $y(0) = y(1) = 0$

L'équation caractéristique :

$r^2 + 1 = 0$

$y(x) = A\cos x + B\sin x$

$$\begin{cases} y(0) = A = 0 \\ y(1) = B\sin(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$y(x) = 0 \Rightarrow$ Pas de points conjugué à 0

D'où y est une solution minimum du problème.