

**Problème : A. F. D. sur un tableau de six points.**

On considère le tableau  $X$  suivant croisant trois variables quantitatives  $x^1, x^2$  et  $x^3$  avec un ensemble  $I = \{A, B, C, D, E, F\}$  de  $n = 6$  individus.

	$x^1$	$x^2$	$x^3$
$A$	0	1	1
$B$	2	1	2
$C$	0	0	3
$D$	2	2	3
$E$	1	0	1
$F$	1	2	2

On désire faire l'analyse discriminante quand on considère les deux classes  $I_1 = \{A, B, C\}$  et  $I_2 = \{D, E, F\}$ , chaque individu étant affecté de la masse  $1/6$ .

1. Rappeler brièvement les principes de cette analyse.
2. Calculer les coordonnées des deux centres de gravité  $g^1$  et  $g^2$  des classes  $I_1$  et  $I_2$ .
3. Calculer la matrice variance interclasses  $B$  (i. e., la matrice variance du nuage des deux centres de gravité  $g^1$  et  $g^2$  affectés des masses  $m_1$  et  $m_2$  des deux classes).
4. Calculer la matrice variance intraclasses  $W$ .
5. Quel est l'axe factoriel discriminant non trivial ? On donnera un vecteur  $v$  porté par cet axe en supposant que la première composante de  $v$  positive.
6. Vérifier que la matrice  $V^{-1}$  est égale à :

$$\frac{3}{22} \begin{pmatrix} 15 & -7 & -2 \\ -7 & 15 & -2 \\ -2 & -2 & 12 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer  $V^{-1}v$  et en déduire que

$$b = \sqrt{\frac{3}{22}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est le facteur (ou la combinaison linéaire) discriminant non trivial. Calculer  $b'Bb$  et en déduire la valeur propre  $\lambda$  associée à  $b$ .

8. Montrer que l'abscisse  $z$  (i. e., le score) de la projection d'un point de coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  sur l'axe discriminant est donnée par :

$$z = \sqrt{\frac{3}{22}} (2\alpha + 2\beta - \gamma),$$

et en déduire les coordonnées (après centrage) des projections de  $A, B, C, D, E, F, g^1, g^2$  et  $\frac{1}{2}(g^1 + g^2)$  sur cet axe.

9. Calculez la variance de  $z$  et sa variance interclasses, et retrouver ainsi la valeur de  $\lambda$  donnée en 7). Auriez vous pu donner directement sans calcul la variance de  $z$  ?
10. Affecter chacun des six individus de  $I$  à l'un des deux classes  $I_1$  ou  $I_2$  .
11. Donner le tableau de format  $2 \times 2$  croisant l'appartenance à une classe avec l'affectation à une classe.
12. Dédurre de 11) le taux de bien classés dans la classe  $I_1$ , dans  $I_2$ , ainsi que le taux global de bien classés.