1

C. proc stoc

Preuve

$(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale (resp sur martingale) $\%$ $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

$\Rightarrow (X_n^T)_{n\geq 0}$ est " " " " " " "

Martingale. $E(X_n^T) = E(X_{n+1}^T) = \cdots = E(X_0^T)$.

Sur-marting. $E(X_{n+1}^T) \leq E(X_n^T) \leq \cdots \leq E(X_0^T)$.

a) T est bornée $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \,/\, T \leq m$.

$$X_n^T = \sum_{k=0}^{n} X_k \mathbb{1}_{(T=k)} + X_n \mathbb{1}_{(T>n)}.$$

$n \geq m \Rightarrow \mathbb{1}_{(T>n)} = 0$ et $\mathbb{1}_{(T=k)} = 0$ si $k > m$.

. $n \geq m$ $\quad X_n^T = \sum_{k=0}^{m} X_k (\mathbb{1}_{T=k}) \Rightarrow |X_n^T| \leq \sum_{k=0}^{m} |X_k| = Y \in L^1(\mathbb{P})$

. $X_n^T = X_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T$

Grâce au th de CVD $\lim_{n\to+\infty} E(X_n^T) = E(\lim_{n\to+\infty} X_n^T) = E(X_T)$

$= E(X_0)$ marting

$\leq E(X_0)$ sur-marting.

$\Rightarrow$

b) $T < +\infty$ P ps et $(X_n^T)_{n\geq 0}$ bornée dans $L^\infty(\mathbb{P})$.

(càd : $\exists M > 0 \;/\; |X_n^T| \leq M^{?}$ P.ps)

$$X_n^T = X_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T \quad \text{sur } (T<+\infty) \text{ et } P(T<+\infty) = 1$$

càd $X_n^T \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T$ P.ps .

$|X_n^T| = |X_{n\wedge T}| \leq M$ P.ps . $E(M) = M < +\infty$

Grâce au th. CVD, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n^T) = E(\lim_{n\to+\infty} X_n^T) = E(X_T) .$$

c) $T \in L^1(\mathbb{P})$ et $(\Delta X_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{P})$

(càd $\exists M > 0 \;/\; |\Delta X_n| \leq M$ P.ps $\forall n\geq 0$) .

- $E(T) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(T<+\infty) = 1 \Rightarrow X_n^T = X_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T$ P.ps
- $X_n^T = X_{n\wedge T} = (X_{n\wedge T} - X_{(n\wedge T)-1})$

$$+ (X_{(n\wedge T)-1} - X_{(n\wedge T)-2})$$

$$+ \;--\; + (X_1 - X_0) + X_0 ,$$

$$|X_n^T| \leq \sum_{n=1}^{n\wedge T} \underbrace{|\Delta X_k|}_{\leq M} + |X_0| \leq M.(n\wedge T) + |X_0|$$

$$\leq M.T + |X_0| \in L^1(\mathbb{P})$$

Grâce au th CVD $\lim_{n\to+\infty} E(X_{n\wedge T}) = E(\lim_{n\to+\infty} (X_{n\wedge T})) = E(X_T) = E(X_0)$ m.

$\leq E(X_0)$ sur

② C. proc stoc

III - Théorèmes de convergence :

Th. 1 "admis"

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale % à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq}$; bornée dans $L^1(P)$ (càd : $\sup\limits_{n\geq 0} E(|X_n|) < +\infty$).

Alors : $\exists$ une v.a.r. X_∞, tq $E(|X_\infty|) < +\infty$

et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P_{ps}} X_\infty$.

Attention : La convergence de $(X_n)_{n\geq 0}$ vers X_∞ n'est pas forcément dans $L^1(P)$ (càd : $E(|X_n - X_\infty|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Pas toujours)

Contre exemple :

$(U_k)_{k\geq 1}$ v.a. iid / $P(U_k=0) = P(U_k=2) = \frac{1}{2}$.

$\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$; $X_n = \prod\limits_{k=1}^{m} U_k$; $n \geq 1$
$X_0 = 0$.

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$,

. X_n est $\mathcal{F}_n$ - mesurable $\Rightarrow (X_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

. $X_n \geq 0$ $E(X_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} E(U_k) = (E(U_1))^n = 1$

$\Rightarrow \sup\limits_{n\geq 0} E(|X_n|) = 1 < +\infty$. $E(U_1) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

$$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = E(X_n U_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n\, E(U_{n+1}/\mathcal{F}_n)$$

X_n est $\mathcal{F}_n$-mes.

$$U_{n+1} \perp \mathcal{F}_n \quad = X_n\, E(U_{n+1})$$

$$1 = E(U_1) = \dots = E(U_{n+1}) \quad = X_n\, E(U_1)$$

$$= X_n$$

① D'après le th. précédent : $X_n \longrightarrow X_\infty$ P.ps.

et $E(|X_\infty|) < +\infty$

$$(X_n \neq 0) = (U_1 \neq 0, \dots, U_n \neq 0) \Rightarrow P(X_n \neq 0) = (P(U_1 \neq 0))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$E(\mathbb{1}_{(X_n \neq 0)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{1}_{(X_n \neq 0)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{1}_{(X_\infty \neq 0)} \\ |\mathbb{1}_{(X_n \neq 0)}| \leq 1 \in L^1(P) \end{array}\right] \Rightarrow E(\mathbb{1}_{(X_n \neq 0)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(\mathbb{1}_{(X_\infty \neq 0)})$$

$$\Rightarrow E(\mathbb{1}_{(X_n \neq 0)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(\mathbb{1}_{(X_\infty \neq 0)}) = P(X_\infty \neq 0) = 0.$$

càd $X_\infty = 0$ P.ps.

$$E(|X_n - X_\infty|) = E(|X_n|) = E(X_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

③ C. proc stoc

Théorème: " convergence dans $L^2(\mathbb{P})$ "

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale bornée dans $L^2(\mathbb{P})$.
(càd: $\sup_{n\geq 0} E(X_n^2) < +\infty$)

alors: $(X_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbb{P}$.ps et dans $L^2(\mathbb{P})$

vers une v.a.r X_∞, avec $E(X_\infty^2) < +\infty$.

(càd: $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}.ps} X_\infty$ et $E((X_n - X_\infty)^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

Preuve:

- $X_n = (X_n - X_{n-1}) + \cdots + (X_1 - X_0) + X_0 = \sum_{k=0}^{n} \Delta X_k$
  $\hookrightarrow \Delta X_0 = X_0$.
- $E(\Delta X_k \cdot \Delta X_l) = 0$; pour $k \neq l$.

NB: $E(X_{n+m} / \mathcal{F}_n) = X_n$

$\Rightarrow E(\underbrace{E(X_{n+m} / \mathcal{F}_{n+m-1})}_{X_{n+m-1}} / \mathcal{F}_n)$.

$$E(X_{n+m} / \mathcal{F}_n) = E(X_{n+m-1} / \mathcal{F}_n)$$ } m iteration.
$$= E(X_n / \mathcal{F}_n)$$
$$= X_n$$

$l < k$:

$\underline{\underline{\;k-1 \geq l\;}}$

$$E(\Delta X_k \Delta X_l) = E\left(E(\Delta X_k \Delta X_l / \mathcal{F}_l)\right)$$

$$= E\left(\Delta X_l \, E(\Delta X_k / \mathcal{F}_l)\right)$$

$$= E\Big[\Delta X_l \big(\underbrace{E(X_k / \mathcal{F}_l)}_{X_l} - \underbrace{E(X_{k-1} / \mathcal{F}_l)}_{X_l}\big)\Big]$$

$$= 0 .$$

$$E(X_n^2) = E\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \Delta X_k\right)^2\right) = \sum_{\substack{k=0,\dots,n \\ l=0,\dots,n}} E(\Delta X_k \Delta X_l)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E\left((\Delta X_k)^2\right)$$

$$\sup_{n \geq 0} E(X_n^2) < +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} E\left((\Delta X_k)^2\right) < +\infty .$$

$\underline{m < n}$: $$(X_n - X_m)^2 = \left(\sum_{k=m+1}^{n} \Delta X_k\right)^2$$

$$\Rightarrow E\left((X_n - X_m)^2\right) = \sum_{k=m+1}^{n} E\left((\Delta X_k)^2\right) \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}]{} 0 .$$

$(X_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(P)$, or $L^2(P)$ est complet.

$\underline{\text{càd}}$: $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2(P)} Y$ $\left(E((X_n - Y)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right)$

où $Y \in L^2(P)$

$E(|X_n|) \leq \left(E(X_n^2)\right)^2$, or $\sup_n E(X_n^2) < +\infty \Rightarrow \sup_n (E|X_n|) < +\infty$

4

C. proc stoc

Grâce au th. précédent : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P.p.s} Z$ $E(|Z|) < +\infty$.

La c.v en moyenne quadratique (càd $L^2(P)$)

$\Rightarrow$ c.V en Proba.

La c.v P.ps $\Rightarrow$ La c.V en Proba.

L'unicité P.ps. de la v.a. "limite" pour la c.V en Probabilité $\Rightarrow$ $Y = \underset{X_\infty}{\overset{\shortparallel}{Z}}$ P.ps.