**ESSAI**
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

**1ère année**
Durée : 2h00
Novembre 2008

# Correction de l'Examen d'Analyse Numérique

## Exercice 1 (6pt).

1. Le théorème de Gershgorin appliqué à une matrice $A$ de taille $n \times n$ quelconque donne une borne sur le spectre de $A$ : toute valeur propre appartient à l'un au moins des disques de Gerschgorin :
$$| a_{ii} - \lambda | \leq \sum_{i \neq j} a_{ij}$$
2. La méthode de la puissance appliqée à une matrice $A$ consiste à choisir au hasard un vecteur $y_0$ et à caluler la suite $y_{n+1} = \frac{Ay_n}{\|Ay_n\|}$.
3. Pour $y_0 = \begin{pmatrix} 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$, nous avons $y_1 = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.89 \end{pmatrix}$ et $y_2 = \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.97 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2 (4pt).** Entrée : $(x_i, f_i)$ pour $i = 0..n$
Sortie : Le polynôme de Lagrange P(x).

```
P := 1;
Pour i allant de 0 à n Faire
    L :=1;
    Pour j allant de 0 à n Faire
        Si i <> j alors
            L := L + (x − x_j)/(x − x_i);
        Fin Si;
    Fin Pour;
    P :=P + f_i + L;
Fin Pour;
Afficher(P);
Fin.
```

Il y a $o(4n^2)$ opérations élémentaires. Il s'agit de $o(2n^2)$ additions/soustractions, $o(n^2)$ multiplications et $o(n^2)$ divisions.

**Problème (10pt).** Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 1, & f_1 = 0, & f_2 = 1, & f_3 = 4. \end{array}$$

1. Voir le cours pour le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe $C^2$.
   On ne peux appliquer ce thèorème au calcul de la racine de $P(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 3]$ : il faudra restreindre l'intervalle car $P'(0) = 0$ et $P''(0) = 0$).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. La décomposition LU de $A$ est triviale :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

3. La résolution du système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ par une descente donne $\begin{pmatrix} 8 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ puis la remontée donne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Une approximation du nuage de points $(x_i, f_i)$ est donnée par la droite de régression linéaire d'équation $P_0(x) = x + 1$.
5. Conclure sur la variation en terme de degré, de complexité des calculs et en terme de différence entre interpolation et approximation.

**Bon Travail,**

**Ines Abdeljaoued.**