

DS DU MODULE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**Exercice 1 (4pt)** Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s/c} & 2x_1 - 3x_2 \geq -2 \\ & 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ & 5x_1 + 6x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \text{ qcq} \end{cases}$$

1. Déterminer la forme standard du Programme linéaire (P_L) .
2. Donner le dual de (P_L) .
3. A quoi est égal le dual du dual de (P_L) ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (6pt) Une compagnie produit des Jeux d'échecs et des Backgammon. Chaque jeux d'échec rapporte un profit de 9D et chaque backgammon un profit de 3D.

La compagnie utilise trois types de machines : A, B et C. Pour la prochaine période, l'entreprise dispose de 20 heures de machines A, 50 heures de machine B et 30h de machine C. La fabrication de chaque jeux d'échec nécessite 1h de travail sur des machines de type A et 1h de travail sur des machines de type B.

La fabrication de chaque backgammon nécessite 7h de travail sur des machines de type A, 1h de travail sur des machines de type B et 1h de travail sur des machines de type C. Assumons (pour simplifier) que les coûts d'achat des ressources et de production ont été comptabilisés dans les profits unitaires et que la compagnie pourra vendre toute sa production.

1. Donner le Programme linéaire associé (fontion objectif et contraintes).
2. Combien de jeux d'échecs et de backgammons produire afin de maximiser les profits? Résoudre graphiquement le Programme linéaire.

Exercice 3 (10pt) Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s/c} & x_1 - 7x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1. Ecrire le Programme linéaire sous forme standard avec variables d'écarts.
2. Est-ce que la base $x_B = (x_4, x_5)$, $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ est une solution réalisable?
3. Appliquer la méthode *Big M* afin de trouver une solution optimale au problème.
4. En déduire, grâce au dernier tableau du simplexe, la solution du dual.

Bon Travail,
Ines Abdeljaoued.

CORRECTION DU DS DU MODULE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**Exercice 4 (4pt)** Considérons le Programme linéaire (P_L) .

1. La forme standard du Programme linéaire
- (P_L)
- est égale à

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x'_1 + 3x'_2 - 3x''_2 \\ \text{s/c} & 2x'_1 + 3x'_2 - 3x''_2 \leq 2 \\ & -3x'_1 + 4x'_2 - 4x''_2 \leq 7 \\ & 3x'_1 - 4x'_2 + 4x''_2 \leq -7 \\ & -5x'_1 + 6x'_2 - 6x''_2 \leq 3 \\ & x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Le dual de
- (P_L)
- est égal à

$$(P_L) = \begin{cases} \min & 2y_1 + 7y_2 - 7y_3 + 3y_4 \\ \text{s/c} & 2y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 5y_4 \geq 2 \\ & 3y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 6y_4 \geq 3 \\ & -3y_1 - 4y_2 + 4y_3 - 6y_4 \geq -3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. Le dual du dual de
- (P_L)
- est égal à
- (P_L)
- .

Exercice 5 (6pt) Une compagnie produit des Jeux d'échecs et des Backgammon. On note x_1 le nombre de jeux d'échecs produits et x_2 le nombre de backgammons fabriqués. Chaque jeux d'échec rapporte un profit de 9D et chaque backgammon un profit de 3D. La fonction objectif est donc égal à $9x_1 + 3x_2$ qu'on cherche à maximiser.

La compagnie utilise trois types de machines : A, B et C. Pour la prochaine période, l'entreprise dispose de 20 heures de machines A, 50 heures de machine B et 30h de machine C. La fabrication de chaque jeux d'échec nécessite 1h de travail sur des machines de type A et 1h de travail sur des machines de type B.

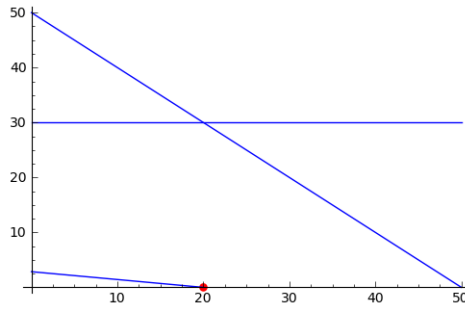
La fabrication de chaque backgammon nécessite 7h de travail sur des machines de type A, 1h de travail sur des machines de type B et 1h de travail sur des machines de type C.

1. Les contraintes pour chaque type de machine sont données par : $x_1 + 7x_2 \leq 20$, $x_1 + x_2 \leq 50$, $x_2 \leq 30$.
2. La solution graphique est donnée par $x^* = (20, 0)$.

Exercice 6 (10pt) Considérons le Programme linéaire (P_L)

1. Le Programme linéaire sous forme standard avec variables d'écart est égal à

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s/c} & x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$



2. La base $x_B = (x_4, x_5)$, $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ n'est pas une solution réalisable.
3. En appliquant la méthode *Big M*, nous trouvons

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline x_6 & -1 & 7 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ & 2-M & 7M+5 & M & -M & 0 & 0 & 2M \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline x_2 & -\frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ x_5 & \frac{8}{7} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{33}{7} \\ & \frac{19}{7} & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 & -M - \frac{5}{7} & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ x_1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{33}{8} \\ & 0 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{19}{8} & -M - \frac{3}{8} & -\frac{101}{8} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ x_4 & 8 & 0 & 6 & 1 & 7 & -1 & 33 \\ & -3 & 0 & -5 & 0 & -5 & -M & -25 \end{array} \right)$$

Sachant que la variable artificielle devient une variable hors base, la solution optimale au problème est égale à $x^* = (0, 5, 0, 33, 0)$ avec $z^* = 25$.

4. En éliminant la variable artificielle, on déduit le dictionnaire à l'optimum :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ & 8 & 0 & 6 & 1 & 7 & 33 \\ & -3 & 0 & -5 & 0 & -5 & -25 \end{array} \right)$$

D'où la solution du dual est égale à $y^* = (0, 5)$ avec $w^* = 25$.