UNIVERSITÉ DE CARTHAGE
ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2014-2015
PREMIÈRE ANNÉE

Tests Paramétriques
Examen Final : Mai 2015

(aucun document autorisé)

Enseignants : H.Mallek et H.Rammeh

Durée : 1 heure 30

Exercice 1 *Soit X une variable aléatoire de loi P_θ dépendant d'un paramètre inconnu $\theta \in \{0, 1\}$.*

- *Si $\theta = 0$ alors P_0 est la loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.*
- *Si $\theta = 1$ alors P_1 est la loi normale centrée et réduite.*

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de X.

1. *Proposer un test de l'hypothèse nulle $H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta = 1$ de niveau α.*
2. *Exprimer la puissance du test en fonction de la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.*
3. *Etudier le comportement de la puissance quand n tend vers l'infini.*

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire de loi Gamma de paramètres $\beta > 0$ et $a > 0$ et de densité*

$$f_{a,\beta}(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)\beta^a} \exp(-\frac{1}{\beta}x) 1_{]0,+\infty[}(x).$$

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de X. On suppose connu le paramètre a.

On considère le test d'hypothèse nulle $H_0 : \beta > \beta_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \beta \leq \beta_0$, avec $\beta_0 > 0$.

1. *Donner la vraisemblance de l'échantillon.*
2. *Ecrire le rapport de vraisemblance et vérifier qu'il est monotone en fonction d'une statistique que l'on déterminera.*
3. *En déduire un test de Neyman Pearson de niveau $\alpha \in]0 ; 1[$, pour les hypothèses H_0 contre H_1 (on donnera avec précision la région de rejet).*

4. *Quelle est l'expression de π, la fonction puissance de ce test? Etudier sa monotonie.*

5. *Donner l'expression de $\widehat{\alpha}$, la p-valeur associée à ce test.*

Exercice 3 *On suppose que le diamètre des billes de roulement destinées à un appareil de levage suit la loi normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma_0^2)$, σ_0^2 étant connu.*

1. *Ecrire un test de niveau α, pour $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta \neq \theta_0$.*

2. *On mesure le diamètre de* 10 *billes prises au hasard et on obtient les valeurs suivantes (en mm) :*

   73.2 ; 72.6 ; 74.5 ; 75.0 ; 75.5 ; 73.7 ; 74.1 ; 75.8 ; 74.8 ; 75.0.

   Sachant que $\sigma_0^2 = 1$, quelle décision doit-on prendre si $\theta_0 = 75mm$ et $\alpha = 0.05$?

   Indication : $F_{(0,1)}(1.96) = 0.975$.

Corrigé Exercice 1 *:*

1. *$H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta = 1$ de niveau α.*
   $R = \left\{ \overline{X} > c \right\}$
   $P_{\theta=0} \left[\overline{X} > c \right] \leq \alpha$
   Comme $\overline{X}$ est de loi uniforme sous H_0 (loi continue), on profite de toute l'erreur :
   $P_{\theta=0} \left[\overline{X} > c \right] = \alpha \Longleftrightarrow F_{\mathcal{U}_{[0,1]}}(c) = 1 - \alpha \Longleftrightarrow c = F^{-1}_{\mathcal{U}_{[0,1]}}(1-\alpha) = 1 - \alpha$
   Règle de décision : si $\overline{x} > 1 - \alpha$, on rejettra H_0 avec un risque inférieur à 5% ; sinon, on décidera H_0.
2. *Fonction puissance :* $\pi : \{0, 1\} \longrightarrow [0, 1]$; $\pi(\theta) = P_\theta \left[\overline{X} > 1 - \alpha \right]$.
   $\pi(0) = \alpha$
   $\pi(1) = P_{\theta=1} \left[\overline{X} > 1 - \alpha \right] = P_{\theta=1} \left[\sqrt{n}\overline{X} > \sqrt{n}(1-\alpha) \right] = 1 - F_{\mathcal{N}_{(0,1)}}\left(\sqrt{n}(1-\alpha)\right) = F_{\mathcal{N}_{(0,1)}}\left(-\sqrt{n}(1-\alpha)\right)$.
   Puissance du test : $\pi_0 = \inf\limits_{\theta=1} \pi(\theta) = \pi(1) = F_{\mathcal{N}_{(0,1)}}\left(-\sqrt{n}(1-\alpha)\right)$.
3. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \pi_0 = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} F_{\mathcal{N}_{(0,1)}}\left(-\sqrt{n}(1-\alpha)\right) = 0$.

Corrigé Exercice 2 $f_{a,\beta}(x) = \dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)\beta^a} \exp(-\frac{1}{\beta}x) 1_{]0,+\infty[}(x)$. *$a$ est connu.*

1. $\mathcal{L}(\underline{x}, \beta) = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{a-1}}{(\Gamma(a))^n \beta^{na}} \exp(-\frac{1}{\beta} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i) 1_{]0,+\infty[^n}(\underline{x})$.
2. *Soient β_1 et β_2 strictement positifs vérifiant $\beta_1 < \beta_2$.*
   $\dfrac{\mathcal{L}(\underline{x}, \beta_2)}{\mathcal{L}(\underline{x}, \beta_1)} = \left(\dfrac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{na} \exp - \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \left(\dfrac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{na} \exp\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)$
   Le rapport de vraisemblance est donc croissant en fonction de $T(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.
3. $\alpha \in \left]0 \,;\, 1\right[$ $\quad$ *$H_0 : \beta > \beta_0$ contre $H_1 : \beta \leq \beta_0$, avec $\beta_0 > 0$.*

   Le rapport de vraisemblance est croissant en fonction de $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Donc pour l'écriture du test de Neyman Pearson, les inégalités sont inversées et le test qui suit est UPP.

$$\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 0 \ si \ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i > c \\ 1 \ si \ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i < c \\ \gamma \ si \ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = c \end{cases} \qquad avec \ E_{\beta_0}\left[\phi(\underline{X})\right] = \alpha$$

$\phi\left(\underline{X}\right)=\mathbb{1}_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<c\right\}}+\gamma\mathbb{1}_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=c\right\}}.$

$E_{\beta_0}\left[\phi\left(\underline{X}\right)\right]=\alpha\Longleftrightarrow P_{\beta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<c\right]+\gamma P_{\beta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=c\right]=\alpha$

La loi de $T\left(\underline{X}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ *étant continue, nous prenons* $\gamma=0$.

$P_{\beta_0}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<c\right]=\alpha.$

$X\rightsquigarrow\gamma\left(a,\dfrac{1}{\beta}\right)\Longrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\rightsquigarrow\gamma\left(na,\dfrac{1}{\beta}\right)\Longrightarrow\dfrac{2}{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\rightsquigarrow\chi^2_{2na}.$

$P_{\beta_0}\left[\frac{2}{\beta_0}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\frac{2}{\beta_0}c\right]=\alpha.\Longleftrightarrow c=\dfrac{\beta_0}{2}F^{-1}_{\chi^2_{2na}}\left(\alpha\right)$

Finalement $\phi\left(\underline{X}\right)=\mathbb{1}_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\frac{\beta_0}{2}F^{-1}_{\chi^2_{2na}}(\alpha)\right\}}$

4. $\pi:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow[\nvdash\ ;\ \nVdash]\qquad\pi\left(\beta\right)=\mathbb{E}_\beta\left[\phi\left(\underline{\mathbb{X}}\right)\right]$

   $\pi\left(\beta\right)=P_\beta\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\frac{\beta_0}{2}F^{-1}_{\chi^2_{2na}}\left(\alpha\right)\right]=P_\beta\left[\frac{2}{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\frac{\beta_0}{\beta}F^{-1}_{\chi^2_{2na}}\left(\alpha\right)\right]$

   $\pi\left(\beta\right)=F_{\chi^2_{2na}}\left(\frac{\beta_0}{\beta}F^{-1}_{\chi^2_{2na}}\left(\alpha\right)\right).$

   π *est strictement décroissante en* β

5. $\widehat{\alpha}=\sup\limits_{\beta>\beta_0}P_\beta\left[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right]=\sup\limits_{\beta>\beta_0}P_\beta\left[\frac{2}{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\frac{2}{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right]$

   $\widehat{\alpha}=P_{\beta_0}\left[\frac{2}{\beta_0}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<\frac{2}{\beta_0}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right]=F_{\chi^2_{2na}}\left(\frac{2}{\beta_0}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)$

Corrigé Exercice 3 *:*

1. *La statistique du test est* $\overline{X}\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(\theta,\frac{\sigma_0^2}{n}\right)$.

   La région de rejet est telle que

   $R^c=\left\{\theta_0-c\leq\overline{X}\leq\theta_0+c\right\}\qquad c>0.$

   Car $\overline{X}$ *est fortement consistant et sous* H_0*, la vraie valeur est* θ_0.

   $$\begin{aligned}P_{\theta_0}\left(R^c\right)=1-\alpha\ &\Longleftrightarrow P\left[-\tfrac{c}{\sigma_0\ /\sqrt{n}}\leq\tfrac{\overline{X}-\theta_0}{\sigma_0\ /\sqrt{n}}\leq\tfrac{c}{\sigma_0\ /\sqrt{n}}\right]=1-\alpha\\&\Longleftrightarrow F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\tfrac{c}{\sigma_0\ /\sqrt{n}}\right)-F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(-\tfrac{c}{\sigma_0\ /\sqrt{n}}\right)=1-\alpha\\&\Longleftrightarrow F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\tfrac{c}{\sigma_0\ /\sqrt{n}}\right)=1-\tfrac{\alpha}{2}\Longleftrightarrow c=\tfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

   On rejettera H_0 *avec un risque inférieur à* α*, dès lors que* $\overline{x}\notin\left[\theta_0-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ;\ \theta_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right.$

2. $n = 10 \qquad \sigma_0^2 = 1 \qquad \overline{x} = 74.42$

$c = \dfrac{1}{\sqrt{10}} * 1.96 = 0.62$

$R^c = [75 - 0.62 \ ; \ 75 + 0.62]$

$R^c \left[74.38 \ ; \ 75.62\right].$

$\overline{x} \in R^c$. *On décide donc de retenir* H_0.