

Interpolation polynomiale

1. Interpolation de Lagrange

1.1. Base de Lagrange

Soit x_0, x_1, \dots, x_n $n + 1$ réels donnés **distincts**. On définit $n + 1$ polynômes l_i pour $i = 0$ à n par

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Le numérateur de chacun de ces polynômes est un produit de n termes $(x - x_k)$ et est donc un polynôme de degré n . Le dénominateur est une constante. On a donc

- i) l_i est un polynôme de degré n
- ii) $l_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ et $0 \leq k \leq n$
- iii) $l_i(x_i) = 1$.

Réciproquement, pour i fixé, il existe un unique polynôme l_i vérifiant les trois propriétés précédentes. En effet, on en a déjà construit un qui convenait. Supposons qu'il y en ait deux l_i et p_i , alors $l_i - p_i$ est un polynôme de degré au plus n et ayant $n + 1$ racines distinctes x_0, \dots, x_n , c'est donc le polynôme nul.

Définition 1 – Les polynômes $l_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ associés aux points x_0, \dots, x_n .

Proposition 2 – Les polynômes $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration : il suffit de montrer que ce système de polynômes est libre, puisqu'il est formé de $n + 1$ éléments d'un espace de dimension $n + 1$; supposons qu'il existe $n + 1$ réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout réel x

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x) = 0 \text{ alors, pour } x = x_k$$
$$\sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x_k) = \alpha_k = 0.$$

On a prouvé le résultat. □

1.2. Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction donnée définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et x_0, x_1, \dots, x_n $n + 1$ réels donnés distincts.

Interpoler la fonction f par un polynôme de degré n aux points x_0, x_1, \dots, x_n consiste à résoudre le problème suivant

Problème (1.3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un polynôme } p \text{ de degré } \leq n \text{ tel que} \\ p(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n. \end{array} \right.$

Si un tel polynôme existe, il s'écrit de manière unique

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x)$$

car les l_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En prenant $x = x_k$ pour $0 \leq k \leq n$ et en utilisant que $l_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $l_k(x_k) = 1$, on obtient

$$\alpha_k = p(x_k) = f(x_k).$$

Proposition 4 – L'unique solution du problème (3) est donc

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x).$$

Définition 5 – Ce polynôme s'appelle l'interpolant de la fonction f de degré n aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

Remarque – Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_0, x_1, \dots, x_n d'un polynôme de degré $\leq n$ est lui-même.

Si l'on prend pour f le polynôme constant égal à 1, d'après la remarque précédente, f est égale à son interpolant et on obtient

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1.$$

Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction f plus ou moins compliquée par une fonction plus simple car polynomiale, mais pour justifier cet échange, il nous faut une estimation de l'erreur commise. On rappelle le théorème de Rolle :

Théorème 6 – Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.3. Estimation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange

Avant de donner une estimation de l'erreur, nous allons démontrer le lemme suivant

Lemme 7 – Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$ alors, si f possède au moins $n + 2$ zéros distincts sur $[a, b]$, f' possède au moins $n + 1$ zéros distincts sur $[a, b]$.

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de f
 \square

Corollaire 8 – Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Si f possède au moins $n + 2$ zéros distincts sur $[a, b]$, alors $f^{(n+1)}$ a au moins un zéro sur $[a, b]$.

Démonstration : il suffit de faire une récurrence en appliquant le lemme précédent
 \square

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ et soit $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$, $n + 1$ points de $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_0, \dots, x_n .

Théorème 9 – On suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, alors

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi \in [a, b], f(x) - P(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Démonstration : si $x = x_i$, alors la relation est vérifiée.

Soit $x \in [a, b]$ fixé, x différent de tous les x_i . Posons $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ et

$$W(t) = f(t) - P(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P(x)).$$

La fonction W est de classe \mathcal{C}^{n+1} comme f et s'annule pour $t = x, x_0, x_1, \dots, x_n$; elle admet donc au moins $n + 2$ zéros. D'après le corollaire 8, il existe au moins un nombre $\xi \in [a, b]$ tel que $W^{(n+1)}(\xi) = 0$. On en déduit la relation. \square

Le point ξ étant inconnu, on cherche une majoration et on a le corollaire immédiat :

Corollaire 10 – Si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, b]$, alors

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|}{(n + 1)!} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

2. Polynômes de Chebyshev

2.1. Choix des points d'interpolation

D'après le corollaire 10, pour obtenir la meilleure estimation possible pour une fonction f donnée, il faut choisir les $n + 1$ points d'interpolation x_0, \dots, x_n de manière à minimiser le maximum sur $[a, b]$ de la fonction $|(x - x_0) \dots (x - x_n)|$. Si on appelle $E_{n+1}([a, b])$ l'ensemble des polynômes de degré $n + 1$ unitaires, le meilleur choix des x_i est donné par le polynôme $q \in E_{n+1}([a, b])$ tel que

$$\forall p \in E_{n+1}([a, b]), \sup_{x \in [a, b]} |q(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |p(x)|.$$

Il faudra de plus s'assurer que le polynôme q trouvé admet bien $n + 1$ racines distinctes sur l'intervalle $[a, b]$. On va montrer l'existence de ce polynôme qu'on appellera polynôme de Chebyshev normalisé.

Remarque - En faisant le changement de variable

$$t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \iff x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

on peut toujours se ramener à une étude sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Définition 11 – On appelle polynôme de Chebyshev de degré n le polynôme T_n défini sur $[-1, 1]$ par

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$

La formule donnée dans le théorème ne fait pas apparaître de manière évidente un polynôme. Cependant, on peut tout de suite noter que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) \in [-1, 1]$.

Considérons la formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. Pour $\theta \in [0, \pi]$, posons $x = \cos \theta$, alors $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$. On en déduit que

$$\cos n\theta = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} (-1)^i x^{n-2i} (1 - x^2)^i.$$

En particulier T_n est un polynôme de degré n .

Exemple -

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1 \\T_1(x) &= x \\T_2(x) &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

Les formules d'addition des fonctions trigonométriques donnent

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta.$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 12 – Les polynômes de Chebyshev vérifient la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Le coefficient du terme en x^n de T_n est 2^{n-1} .

Démonstration : le coefficient s'obtient par récurrence.

Théorème 13 – T_n a des zéros simples aux n points

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

T_n atteint son extremum sur l'intervalle $[-1, 1]$ aux $n+1$ points

$$x'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

pour lesquels il prend alternativement les valeurs 1 et -1 .

Démonstration : calculons $T_n(x_k)$.

$$T_n(x_k) = \cos\left(n \operatorname{Arccos}\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) = \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0 \text{ car } \frac{2k-1}{2}\pi \in [0, \pi].$$

On a donc trouvé n racines distinctes, or T_n est un polynôme de degré n ; on les a donc toutes. On montre de même $T_n(x'_k) = (-1)^k$. □

Définition 14 – On appelle polynôme normalisé de Chebyshev le polynôme \overline{T}_n défini par $\overline{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

2.2. Estimation de l'erreur avec les polynômes de Chebyshev

On va montrer que ce polynôme \overline{T}_n est le polynôme que l'on cherchait.

Théorème 15 – Pour tout polynôme p de $E_n([-1, 1])$, on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x \in [-1, 1]} |\overline{T}_n(x)| \leq \sup_{x \in [-1, 1]} |p(x)|.$$

Démonstration : supposons qu'il existe $p \in E_n$ tel que $\sup_{x \in [-1, 1]} |p(x)| < 1/2^{n-1}$.

Considérons le polynôme $\overline{T}_n - p$. C'est un polynôme de degré $\leq n-1$. De plus,

$r(x'_k) = \overline{T}_n(x'_k) - p(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x'_k)$ pour $k = 0, \dots, n$. Cette quantité prend alternativement le signe $+$ ou $-$. On en déduit que r a au moins n racines, or c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $r = 0$. On obtient $\overline{T}_n = p$. Contradiction. □

En utilisant le changement de variable définie plus haut, on a donc montré le théorème

Théorème 16 – Sur l'intervalle $[a, b]$, en choisissant les points d'interpolation

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \text{ pour } k = 0, \dots, n$$

on obtient la majoration suivante :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

C'est la meilleure majoration globale que l'on puisse obtenir.

Remarque - La formule de Taylor-Lagrange montre que, si l'on approche la fonction f par la fonction polynômiale

$$P_f : x \longrightarrow f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

on a alors

$$|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Cette estimation montre la supériorité de la méthode de Chebychev.

3. Introduction aux polynômes orthogonaux

3.1. Définition des polynômes orthogonaux

On se donne une fonction w définie sur $]a, b[$, intégrale sur $[a, b]$ et à valeurs positives ou nulles. Cette fonction est appelée **pooids**.

On définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ par la relation

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t) dt.$$

A ce produit scalaire, on associe la norme $\|f\|^2 = \int_a^b [f(t)]^2 w(t) dt$.

Définition 17 – On appelle **polynômes orthogonaux** relativement au poids w la suite des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ ayant les propriétés suivantes

1 – Pour tout n , P_n est de degré n et le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

2 – (P_0, \dots, P_n) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On admet la proposition suivante

Proposition 18 – Quelqusoit la fonction poids w , il existe une unique suite de polynômes orthogonaux.

3.2. Exemple : les polynômes de Chebyshev

On prend $a = -1$, $b = 1$ et $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. La fonction w est bien définie sur $] -1, 1[$ à valeurs positives et $\int_{-1}^1 w(x) dx = [\text{Arcsin}(x)]_{-1}^1 = \pi$.

On a vu que \overline{T}_n est de degré n et que le coefficient de son terme de plus haut degré est 1. Il reste à montrer que $(\overline{T}_0, \dots, \overline{T}_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit

scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Le changement de variables $t = \cos \theta$ donne

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^\pi P(\cos \theta)Q(\cos \theta) d\theta.$$

On en déduit que, si $n \neq l$,

$$\begin{aligned}(T_n, T_l) &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(l\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(n+l)\theta + \cos(n-l)\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+l)\theta}{n+l} + \frac{\sin(n-l)\theta}{n-l} \right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

3.3. Approximation au sens des moindres carrés

Soit f une fonction définie sur l'intervalle réel $[a, b]$ et w une fonction poids. L'approximation au sens des moindres carrés consiste à trouver un polynôme P de degré n qui minimise la valeur de $\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 w(x) dx = \|f - P\|^2$. Ce polynôme, s'il existe, est appelé approximation de f de degré au plus n au sens des moindres carrés.

On admettra qu'un tel polynôme existe et qu'il est unique.

C'est en fait la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ et il est donné par $P = \sum_{i=0}^n (f, P_i) P_i$

où (P_0, \dots, P_n) est la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ associée à w .

On est alors ramené à un calcul d'intégrales.

INTERPOLATION POLYNOMIALE

1. Interpolation de Lagrange	1
1.1. Base de Lagrange	1
1.2. Interpolation de Lagrange	1
1.3. Estimation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange	2
2. Polynômes de Chebyshev	3
2.1. Choix des points d'interpolation	3
2.2. Estimation de l'erreur avec les polynômes de Chebyshev	4
3. Introduction aux polynômes orthogonaux	5
3.1. Définition des polynômes orthogonaux	5
3.2. Exemple : les polynômes de Chebyshev	5
3.3. Approximation au sens des moindres carrés	6