Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

Année Universitaire
2014-2015
Première Année

Méthodes d'estimation
Corrigé du devoir surveillé : Mai 2015

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\frac{x}{\beta})1_{]0,+\infty[}(x).$$

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\frac{x}{\beta})dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{(\alpha+1)-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\frac{x}{\beta})dx$

   $E(X) = \alpha\beta\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{(\alpha+1)-1}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}\exp(-\frac{x}{\beta})dx = \alpha\beta$

   (densité d'une loi gamma $\left(\alpha+1, \frac{1}{\beta}\right)$*)*

   $E(X^2) = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\frac{x}{\beta})dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{(\alpha+2)-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\frac{x}{\beta})dx$

   $E(X^2) = \alpha\,(\alpha+1)\,\beta^2\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{(\alpha+2)-1}}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}\exp(-\frac{x}{\beta})dx = \alpha\,(\alpha+1)\,\beta^2$

   (densité d'une loi gamma $\left(\alpha+2, \frac{1}{\beta}\right)$*)*

   $Var(X) = \alpha\,(\alpha+1)\,\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2.$

2. $\mathcal{L}\left(\underline{x},\theta\right) = \exp(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n x_i + \alpha\sum_{i=1}^n \ln x_i - n\ln\Gamma(\alpha) - n\alpha\ln\beta - \sum_{i=1}^n \ln x_i)1_{]0,+\infty[^n}\left(\underline{x}\right).$

3. $\mathcal{L}\left(\underline{x},\theta\right) = \underbrace{\exp\left(-\dfrac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n x_i + \alpha\sum_{i=1}^n \ln x_i - n\ln\Gamma(\alpha) - n\alpha\ln\beta\right)}_{g(T(\underline{x}),\theta)}\underbrace{\exp\left(-\sum_{i=1}^n \ln x_i\right)1_{]0,+\infty[^n}\left(\underline{x}\right)}_{h(\underline{x})}.$

   D'après le théorème de factorisation, $T\left(\underline{x}\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n \ln x_i\right)$ *est exhaustive.*

4. *On a*

   $$\left\{\begin{array}{l} E(X) = \alpha\beta \\ Var(X) = \alpha\beta^2 \end{array}\right. \iff \left(\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 - m_1^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \alpha\beta \\ \alpha\beta^2 \end{array}\right)$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} = \alpha \\ \dfrac{m_2 - m_1^2}{m_1} = \beta \end{array}\right. \iff \theta = \left(\frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}, \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}\right)$$

On a donc $\widehat{\theta}_{MM} = \left(\frac{\widehat{m}_1^2}{\widehat{m}_2 - \widehat{m}_1^2}, \frac{\widehat{m}_2 - \widehat{m}_1^2}{\widehat{m}_1}\right) = \left(\frac{\overline{X}^2}{S_n^2}, \frac{S_n^2}{\overline{X}}\right)$

5. On a $\theta = h(m_1, m_2) = \left(\frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}, \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}\right)$ *et* h *est continue. de plus, la loi gamma possède des moments jusqu'à l'ordre 4.* $\widehat{\theta}_{MM}$ *est donc fortement consistant de* θ.

   Autre réponse *:* $(\alpha\beta, \alpha\beta^2) = q(\theta) = E_\theta(g(X))$, *avec* $g(x) = \left(x, (x - \overline{x})^2\right)$.

   g est *continue et bornée et* q *est de classe* C^1, *alors* $\widehat{\theta}_{MM}$, *l'estimateur par substitution des moments, est fortement consistant de* θ.

Partie 2

α *est connu.*

1. $L(\underline{x}, \beta) = \exp(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n x_i - n\alpha\ln\beta + \alpha\sum_{i=1}^n \ln x_i - n\ln\Gamma(\alpha) - \sum_{i=1}^n \ln x_i) 1_{]0,+\infty[^n}(\underline{x})$.

   Le modèle appartient à la famille exponentielle à un paramètre

   avec $c(\beta) = -\frac{1}{\beta}, T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i, d(\beta) = -n\alpha\ln\beta$ *et* $A = 0, +\infty[^n$, *indépendant de* β.

2. *Le modèle appartient à la famille exponentielle, donc les hypothèses* H_1, H_2 *et* H_3 *sont vérifiées et*

$$I_n(\beta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln\mathcal{L}(\underline{X}, \beta)\right]$$

   $\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln L(\underline{X}, \beta) = -\frac{2}{\beta^3}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n\alpha}{\beta^2}$

   $I_n(\beta) = -E\left[-\frac{2}{\beta^3}\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n\alpha}{\beta^2}\right] = \frac{2n}{\beta^3}\alpha\beta - \frac{n\alpha}{\beta^2}$

$$I_n(\beta) = \frac{n\alpha}{\beta^2}$$

3. *Le modèle appartient à la famille exponentielle à un paramètre. L'ensemble des valeurs prises par* β *est* $\mathbb{R}_+^*$, *ouvert.* $c : \beta \longmapsto -\frac{1}{\beta}$ *est injective et de classe* C^2. $d : \beta \longmapsto -n\alpha\ln\beta$ *est de classe* C^2.

   $E[T(\underline{X})] = T(\underline{x}) \iff E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n x_i \iff n\alpha\beta = \sum_{i=1}^n x_i \iff \beta = \frac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^n x_i$.

L'emv est donc $\widehat{\beta}_{MV} = \dfrac{1}{n\alpha}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i == \dfrac{\overline{X}}{\alpha}$.

4. *Soit* $Y = \dfrac{2}{\beta}X$. *On a* $f_Y(y) = \frac{\beta}{2} f_X\left(\frac{\beta}{2}y\right) = \frac{\beta}{2} \cdot \dfrac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\alpha-1} y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \exp(-\frac{y}{2}) 1_{]0,+\infty[}(x)$

   $f_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \dfrac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\frac{y}{2}) 1_{]0,+\infty[}(x)$.

   $Y \rightsquigarrow \gamma\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$ *et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \rightsquigarrow \gamma\left(n\alpha, \frac{1}{2}\right)$.

   Donc $\dfrac{2}{\beta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \gamma\left(n\alpha, \frac{1}{2}\right)$ *ou encore* $\dfrac{2}{\beta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \chi^2_{2n\alpha}$.

   Comme $\widehat{\beta}_{MV} = \dfrac{1}{n\alpha}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, *on aura* $\frac{2n\alpha}{\beta}\widehat{\beta}_{MV} \rightsquigarrow \chi^2_{2n\alpha}$.

5. $E\left(\frac{2n\alpha}{\beta}\widehat{\beta}_{MV}\right) = 2n\alpha \Longrightarrow E\left(\widehat{\beta}_{MV}\right) = \beta$. $\widehat{\beta}_{MV}$ *est donc sans biais.*

   Comme les hypothèses H_1,H_2 *et* H_3 *sont valides et* $I_n(\theta) = \frac{n\alpha}{\beta^2}$ *est finie, alors la suite* $\left(\widehat{\beta}_n\right)$, *solution de l'équation de vraisemblance, est un estimateur fortement consistant.*

6. $Var\left(\frac{2n\alpha}{\beta}\widehat{\beta}_{MV}\right) = 4n\alpha \Longleftrightarrow \dfrac{\beta^2 \cdot 4n\alpha}{(2n\alpha)} = \dfrac{\beta^2}{n\alpha} = I\!\!/_n(\beta)$. $\widehat{\beta}_{MV}$ *est donc efficace de* β.

7. *Les hypothèses* H_1,H_2 *et* H_3 *étant valides et* $I_n(\theta)$ *étant finie, alors* $\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{MV} - \beta)$ *converge en loi vers la loi normale* $N(0, I^{-1}(\beta))$.

   $\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{MV} - \beta) \rightsquigarrow N(0, \dfrac{\beta^2}{n\alpha})$. *Autrement dit,* $\sqrt{\alpha n}\dfrac{\widehat{\beta}_{MV} - \beta}{\beta} \rightsquigarrow N(0,1)$.

   Comme $\widehat{\beta}_{MV}$ *est fortement consistant et donc* $\dfrac{\widehat{\beta}_{MV}}{\beta}$ *converge presque sûrement vers 1, alors*

   $\dfrac{\sqrt{\alpha n}\dfrac{\widehat{\beta}_{MV} - \beta}{\beta}}{\dfrac{\widehat{\beta}_{MV}}{\beta}} = \sqrt{\alpha n}\dfrac{\widehat{\beta}_{MV} - \beta}{\widehat{\beta}_{MV}}$ *converge en loi vers la loi normale* $N(0,1)$.