Devoir Surveillé

Microéconomie I

1) La courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité U_0 est :

$$CI = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2+} \ / \ U(x_1, x_2) = U_0 \}$$

$$U(x_1, x_2) = U_0 \iff x_1^{1/2} + x_2 = U_0$$

$$x_2 = U_0 - x_1^{1/2} \quad \text{avec } x_1 \leq U_0^2$$

On pose $f(x_1) = (U_0 - x_1^{1/2})$ avec $x_1 \leq U_0^2$

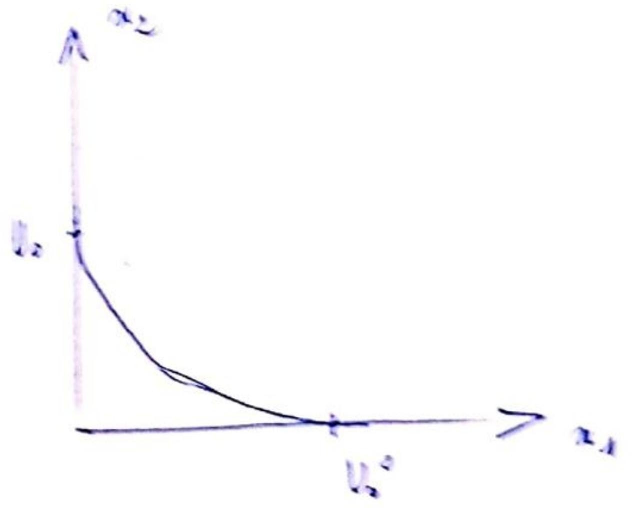
$$D_f = [0, U_0^2]$$

$f'(x_1) = -\frac{1}{2} x_1^{-1/2} < 0 \implies CI$ est strictement décroissante

$f''(x_1) = \frac{1}{4} x_1^{-3/2} > 0 \implies CI$ est convexe.

$f(0) = U_0 \implies CI$ coupe l'axe des x_2 en $(0, U_0)$.

$f(x_1) = 0 \implies x_1 = U_0^2 \implies CI$ coupe l'axe des x_1 en $(U_0^2, 0)$



② Programme du C^teur :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2 \\ x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_2 \geq 0 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R \end{cases}$$

Les C.P.O :

$$\begin{cases} TMS = \frac{P_1}{P_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} x_1^{-1/2} = \frac{P_1}{P_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{P_2^2}{4P_1^2} \\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{P_2}\left(R - \frac{P_2^2}{4P_1}\right) \end{cases}$$

② $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ est la solution au programme si $\tilde{x} \geq 0$ et $\tilde{x}_2 \geq 0$

$$\Longleftrightarrow \quad R \geq \frac{P_2^2}{4P_1}.$$

si $R < \frac{P_2^2}{4P_1} \Longrightarrow$ la solution en coin : $\left(\frac{R}{P_1}, 0\right)$ ou $\left(0, \frac{R}{P_2}\right)$

si $R \geq \frac{P_2^2}{4P_1} \Longrightarrow$ demandes $\left(x_1^* = \frac{P_2^2}{4P_1^2} \; ; \; x_2^* = \frac{1}{P_2}\left(R - \frac{P_2^2}{4P_1}\right)\right)$

③ a- $p_1 = 1$; $p_2 = 2$ R variable

(a) si $R \geq 1 \Rightarrow \left(x_1^* = 1 ; x_2^* = \frac{R-1}{2}\right)$

si $R < 1 \Rightarrow$ solution en coin $\left(\frac{R}{1}, 0\right)$ ou $\left(0, \frac{R}{2}\right)$

$U(R,0) = R^{1/2}$ et $U\left(0,\frac{R}{2}\right) = \frac{R}{2}$

$U\left(0,\frac{R}{2}\right) > U(R,0)$

$\frac{R}{2} > R^{1/2} \Rightarrow \frac{R}{R^{1/2}} > 2 \Rightarrow R^{1/2} > 2$

$\Rightarrow \boxed{R > 4}$

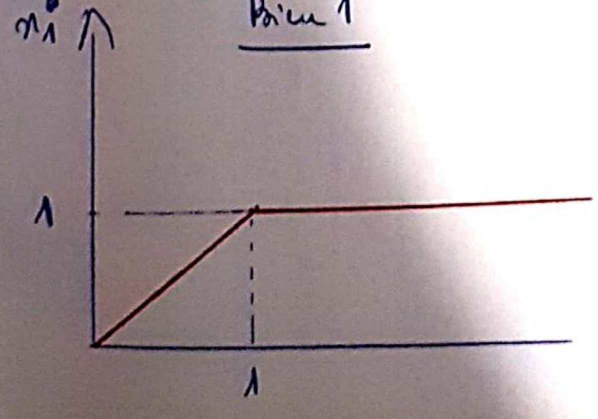
OR nous sommes dans le cas $R < 1 \Leftrightarrow (R,0)$ est la solution

les demandes en bien 1 et bien 2 :

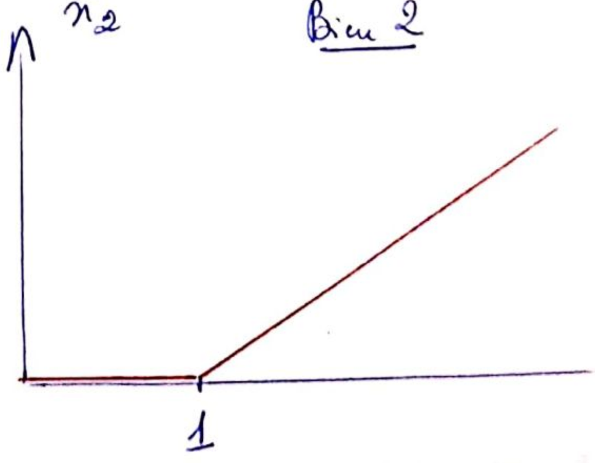
$$x_1^* = \begin{cases} R & \text{si } R < 1 \\ 1 & \text{si } R \geq 1 \end{cases} \qquad x_2^* = \begin{cases} 0 & \text{si } R < 1 \\ \frac{R-1}{2} & \text{si } R \geq 1 \end{cases}$$

(b) - les courbes d'Engel

<u>Bien 1</u>



<u>Bien 2</u>



Les deux Biens sont normaux :

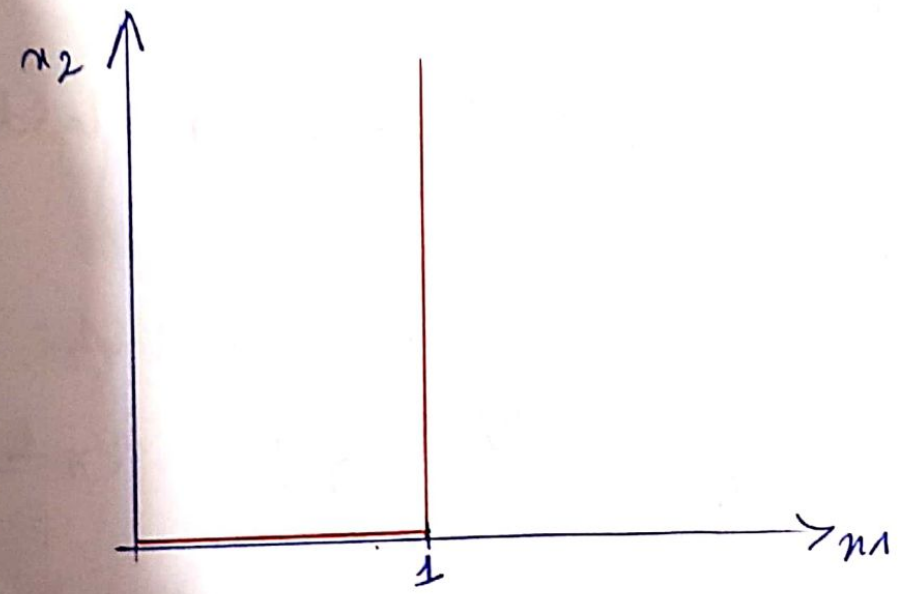
Bien 1 : Bien prioritaire (concave).

Bien 2 : Bien de Luxe (convexe)

© La courbe de consommation-Revenu comporte deux parties :

$R < 1$ $\quad \begin{cases} x_1^* = R \\ x_2^* = 0 \end{cases}$ correspond au segment $\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$R \geq 1$ $\quad \begin{cases} x_1^* = 1 \\ x_2^* = \frac{R-1}{2} \end{cases}$ Correspond à la demi droite $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$



Courbe de consommation Revenu

E-(a)

$R = 4$

situation initiale : $P_1 = P_2 = 1$

pour $R = 4 > \frac{P_2^2}{4P_1} = \frac{1}{4}$

$$(E) = \begin{cases} x_1^* = \frac{1}{4} \\ x_2^* = \frac{1}{1}\left(4 - \frac{1^2}{4 \times 1}\right) = \frac{15}{4} \end{cases}$$

E' = Equilibre finale $P_1' = 2$ $P_2 = P_2' = 1$

pour $R = 4 > \frac{P_2'^2}{4P_1'} = \frac{1^2}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$

$$(E') = \begin{cases} x_1' = \frac{1}{16} \\ x_2' = \frac{31}{8} \end{cases}$$

L'effet Globale $\begin{cases} \Delta x_1 = x_1' - x_1 = -\frac{3}{16} \\ \Delta x_2 = x_2' - x_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$

5- Équilibre intermédiaire :

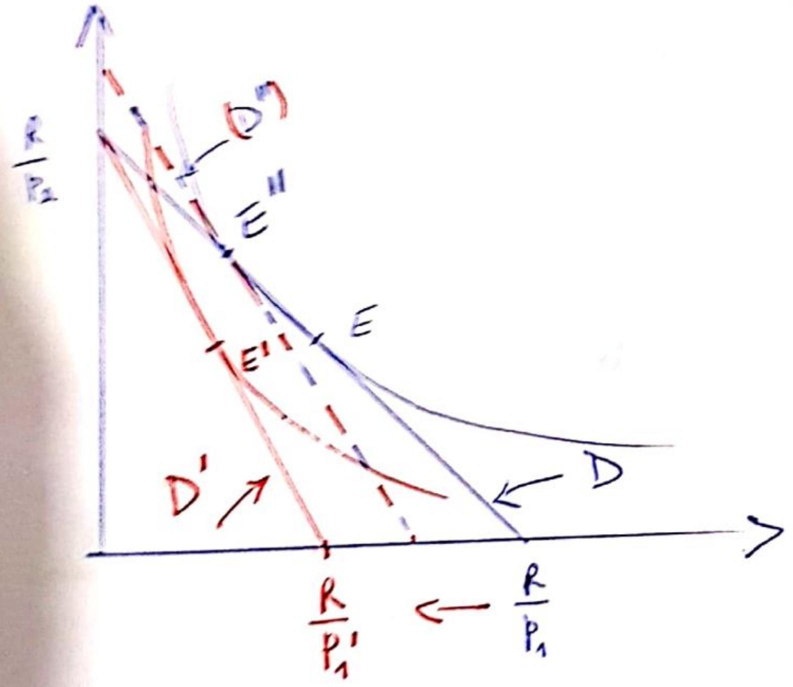
$$\begin{cases} TMS = \frac{P_1'}{P_2} \\ U(E'') = U(E) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} x''^{-1/2} = 2 \\ U(E'') = \frac{17}{4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1'' = \frac{1}{16} \\ x_2' = 4 \end{cases}$$

il suffit de Remplacer x_1'' dans la fonction d'utilité pour trouver x_2''.

$$(x_1'')^{1/2} + x_2'' = U(E'')$$

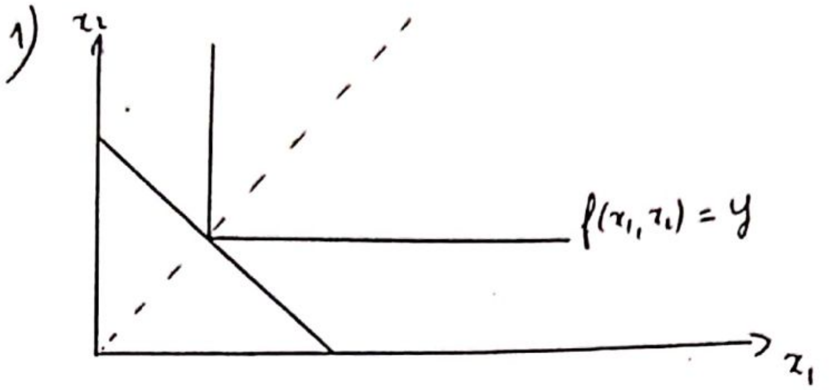
$$\left(\frac{1}{16}\right)^{1/2} + x_2'' = \frac{17}{4}$$



	Effet de substitution	Effet de Revenu
Bien 1	$x_1'' - x_1 = -\frac{3}{16}$	$x_1' - x_1'' = 0$
Bien 2	$x_2'' - x_2 = \frac{1}{4}$	$x_2' - x_2'' = -\frac{1}{8}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 18

1) 

combinaison optimale d'inputs : $x_1 = x_2 = y$

$$\Rightarrow C_1(y) = 2y \Rightarrow CM_1 = 2$$

g est une fonction de production de Cobb-Douglas ⇒ dérivable, convexe et ne touche pas les axes

Le programme de minimisation du coût

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ f(x_1, x_2) = y \\ x_1 \geq, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

peut être résolu par les c.p.o

$$\begin{cases} TMST = \frac{P_1}{P_2} \\ f(x_1, x_2) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 1 \\ x_1^{1/2} x_2^{1/2} = y \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = y \Rightarrow C_2(y) = 2y \Rightarrow CM_2 = 2$$

② $P_1 = 1$ reste est

$P_2 = x$

Avec f $\forall$ les prix des inputs, la firme choisit tjs la combinaison $x_1 = x_2 = y$. Si le prix du facteur 2 augmente de x, la firme supportera un coût supp $\Delta C_1 = x \cdot x_2 = x y$

$$\Longrightarrow \Delta CM_1 = x$$

Avec g si le prix du facteur 2 augmente, la firme a la possibilité de substituer le bien 1 au bien 2. Elle a tjs la possibilité d'utiliser la 1ère solut° $x_1 = x_2 = y$ mais ce n'est certainement pas la ~~solution~~ combinaison optimale.

$$\Longrightarrow \Delta C_2 < x \cdot y \Longrightarrow \Delta CM_2 < x \checkmark$$

③ – Avec f $\quad x_1 = x_2 = y \Longrightarrow C_1(y) = (2 + x)\, y$

$$CM_1 = 2 + x \Longrightarrow \Delta CM_1 = x$$

Avec g $\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{1+x} \\ x_1^{1/2} x_2^{1/2} = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y(1+x)^{1/2} \\ x_2 = y(1+x)^{-1/2} \end{cases}$

$$C_2(y) = 2(1+x)^{1/2}\, y$$

$$CM_2 = 2(1+x)^{1/2} \Longrightarrow \Delta CM_2 = 2(1+x)^{1/2} - 2$$

$((U)^n)' = n U' U^{n-1}$

Soit $h(x) = \Delta CM_2 - \Delta CM_1 = 2(1+x)^{1/2} - x - 2 - 2$

$h'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{1/2}} - 1 < 0 \Longrightarrow h \searrow$

$\forall x \geq 0 \quad h(x) \leq h(0) = 0 \Longrightarrow \Delta CM_2 \leq \Delta CM_1 \ \forall x \geq 0$

Exercice N° 19 :

1-

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{x_2}$$

facteur 1 = prix = $p_1 = 3$

facteur 2 = prix = $p_2 = 1$

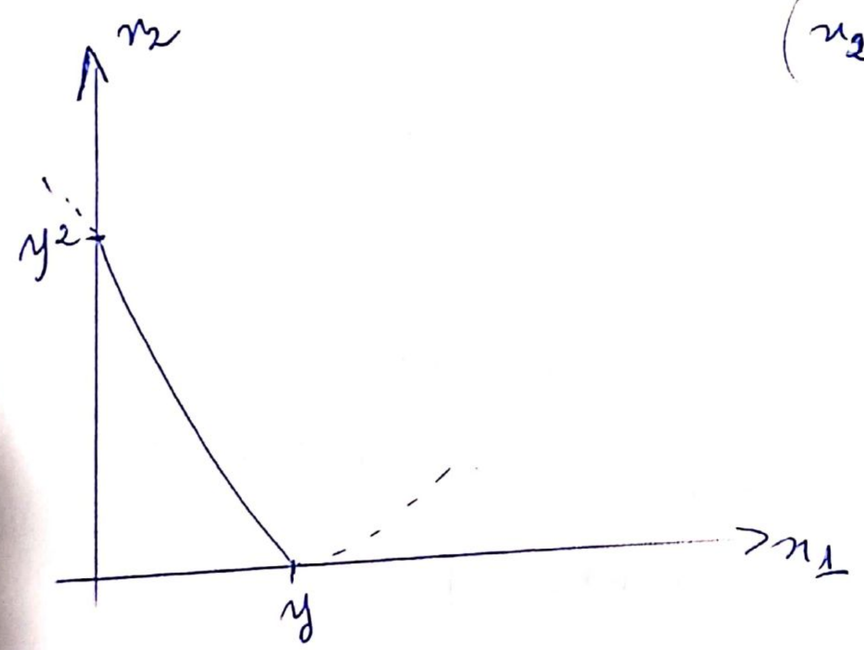
$$y = x_1 + \sqrt{x_2}$$

$$\sqrt{x_2} = y - x_1 \implies x_1 \leq y$$

$$x_2 = (y - x_1)^2$$

$\implies$ décroissante, convexe et touche les axes en $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = y^2 \end{pmatrix}$

$(x_2 = 0 \implies x_1 = y)$



② Programme de minimisat° du coût

$$\begin{cases} Min\ 3x_1 + x_2 \\ x_1 + \sqrt{x_2} = y \\ x_1 \geq 0 \ ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

R1. On doit faire attention pour que l'isoquante touche les axes

Deux cas possibles.

Soit la solution est intérieure c'ad $x_1 > 0$; $x_2 > 0 \Longrightarrow$ elle vérifie la CPO

soit la " est en coin

1ér cas:

$$CPO \begin{cases} TMST = \frac{P_1}{P_2} = \frac{3}{1} \\ x_1 + \sqrt{x_2} = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}} = 2x_2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x_2} = 3 \\ \Longrightarrow \sqrt{x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{9}{4} \\ x_1 + \sqrt{\frac{9}{4}} = y \\ \boxed{x_1 = y - \frac{3}{2}} \end{cases}$$

c'est Bien une solution intérieure ssi $y > \frac{3}{2}$

Ds le cas inverse $y \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow$ c'est soit A soit B

en A : $C(A) = 3x_1 + x_2 = y^2$

en B. $C(B) = 3x_1 + x_2 = 3y$

$$C(A) - C(B) = y(y-3) < 0 \quad \text{par } y \leq \frac{3}{2}$$

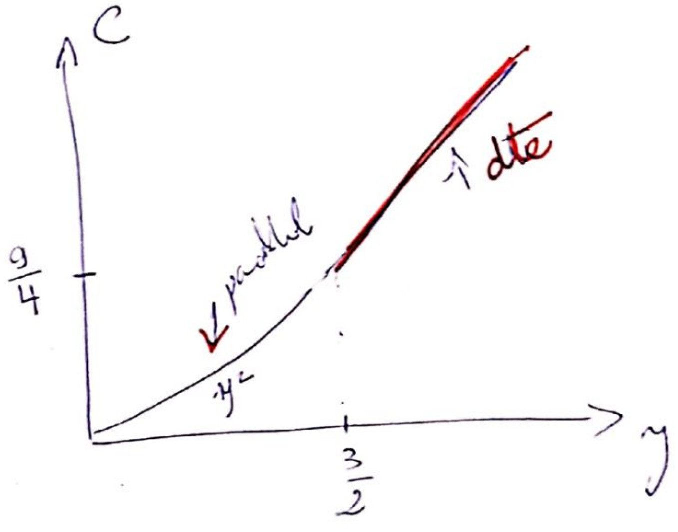
donc A est meilleur et correspond à la combinaison optimale donc les demandes : $x_1 = \begin{cases} y - \frac{3}{2} & \text{si } y > \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

$$x_2 = \begin{cases} \frac{9}{4} & \text{si } y > \frac{3}{2} \\ y^2 & \text{si } y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

③ - $C(y)$ = la fct de coût Totale

$$C(y) = 3x_1 + x_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3y - \frac{9}{4} & \text{si } y > \frac{3}{2} \\ y^2 & \text{si } y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$



Scanné avec CamScanner

Exercice N° 20 :

$$y = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1 x_2} - 1 & \text{si } x_1 x_2 \geq 1 \\ 0 & \text{si } x_1 x_2 < 1 \end{cases}$$

la ≠ce entre coûts à LT et CT c'est les coûts fixes. A LT tous les coûts sont var

A CT le facteur 2 = fixe

par fait. $P_1 = P_2 = 1$

① les fct de coût moyen et marginal à LT.

$$y > 0 \quad \begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \end{cases}$$

on a bien $x_1 \cdot x_2 \geq 1$
$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

CPO
$$\begin{cases} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \dfrac{P_1}{P_2} = 1 \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}} x_2 \cancel{(x_1 \cdot x_2)^{-1/2}}}{\cancel{1/2}\, x_1 \cancel{(x_1 \cdot x_2)^{-1/2}}} = 1 \\ \sqrt{x_1 x_2} - 1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 \quad (1) \\ \sqrt{x_1 \cdot x_2} - 1 = y \quad (2) \end{cases}$$

on remplace (1) ds (2)

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2} - 1 = y \Rightarrow y = x_1 - 1 \\ \qquad x_1 = y + 1 \end{cases}$$

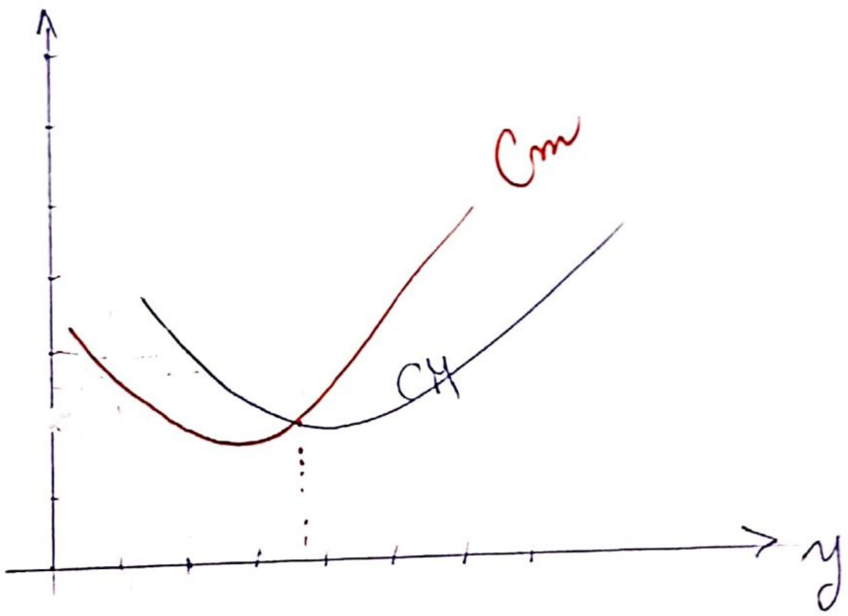
et pourquoi $\boxed{x_1 = x_2 = y + 1}$

$y=0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0$

$$C(y) = \begin{cases} 2(y+1) & \text{si } y>0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$$

$$CM(y) = \frac{2y+2}{y} = 2 + \frac{2}{y} \quad y>0$$

$$Cm(y) = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = \frac{\partial(2y+2)}{\partial y} = 2 \quad y>0$$



(2) – $x_2 = 2 \Longrightarrow y = \sqrt{2x_1} - 1$

$$\sqrt{2x_1}^2 = (y+1)^2$$

$$2x_1 = (y+1)^2$$

$$x_1 = \frac{(y+1)^2}{2}$$

$$C^{CT}(y) = \frac{(y+1)^2}{2} + 2 = \frac{y^2}{2} + y + \frac{5}{2}$$

(y^2+2y+1)

$$CM^{CT}(y) = \frac{C^{CT}}{y} = \frac{\frac{y^2}{2} + y + \frac{5}{2}}{y} = \frac{y}{2} + 1 + \frac{5}{2y}$$

$$Cm^{CT}(y) = \frac{\partial C^{CT}}{\partial y} = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} + 1 = y + 1$$

③ Si l'entreprise prévoit de produire $y = 3$, elle doit acquérir d'après la question N° 1 $x_2 = y + 1 = 4$

Si elle achète effectivement cette qtité sur le CT

$$y = \sqrt{4x_1} - 1 = 2\sqrt{x_1} - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x_1} = y + 1$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{y+1}{2}$$

$$x_1 = \frac{(y+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow CT = \frac{(y+1)^2}{4} + 4 = \frac{y^2 + 2y + 1^2}{4} + 4$$

$$CT = \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{16}{4}$$

$$\boxed{CT = \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{17}{4}}$$

$$CM(y) = \frac{CT(y)}{y} = \frac{\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} + \frac{17}{4}}{y} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} + \frac{17}{4y}$$

Si elle produit $y = 4 \Longrightarrow CM^{CT}(y=4) = \frac{41}{16}$, alors qu'il aurait été de $\frac{5}{2}$ si l'entr avait disposé de la qté optimale de x_2 ($x_2 = y+1 = 5$) $\Longrightarrow CM^{LT}(y=4) = 2 + \frac{2}{4} = 2 + \frac{1}{2}$

$$\text{⑧} \quad \boxed{CM^{LT}(y) = 2 + \frac{2}{y}} = \frac{5}{2}$$

L'Ent supporte un surcoût $= \frac{41}{16} - \frac{5}{2} = \frac{1}{16}$ dû à son erreur et à la rigidité de CT.

les prix et les qtités ne s'ajuste pas instantanément parcequ'il existe des rigidités, des délais d'ajustement.