

# Résumé complet — Actuariat de l'assurance vie

Cours: Actuariat de l'assurance vie (Med Achraf SLAMIA) — synthèse LaTeX

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et définitions</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Notations usuelles</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Tables de mortalité</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Rappels de mathématiques financières</b>	<b>3</b>
4.1	Capitalisation et actualisation . . . . .	3
4.2	Principe d'équivalence financière . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Valeur actuelle probable (VAP)</b>	<b>3</b>
5.1	Formule générale . . . . .	4
5.2	Formule fondamentale . . . . .	4
<b>6</b>	<b>Fonctions de commutation</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Rentes viagères</b>	<b>4</b>
7.1	Rente viagère immédiate (perpétuelle) . . . . .	4
7.2	Rente temporaire n années . . . . .	5
7.3	Rente différée (s années) puis temporaire t ans . . . . .	5
7.4	Rentes croissantes . . . . .	5
<b>8</b>	<b>Capitaux au décès</b>	<b>5</b>
8.1	Capital versé en fin d'année du décès (1 unité) . . . . .	5
8.2	Capital temporaire décès n années . . . . .	5
8.3	Capital différé et temporaire . . . . .	5
8.4	Usage : . . . . .	5
<b>9</b>	<b>Contrats mixtes</b>	<b>5</b>
9.1	Exemple : Mixte classique . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Tarification et primes</b>	<b>6</b>
10.1	Principe d'équité actuarielle . . . . .	6
10.2	Composition des primes . . . . .	6
10.3	Primes pures . . . . .	6
10.4	Chargements . . . . .	6
10.5	Formules de prime commerciale . . . . .	6
<b>11</b>	<b>Provisions mathématiques (PM)</b>	<b>6</b>
11.1	Définition et objectif . . . . .	6
11.2	Méthode prospective . . . . .	7
11.3	Cas particuliers . . . . .	7
11.4	Autres méthodes . . . . .	7

<b>12 Assurance Non-Vie (Complément)</b>	<b>7</b>
12.1 Modèle fréquence-coût . . . . .	7
12.2 Prime pure en non-vie . . . . .	7
12.3 Système Bonus-Malus . . . . .	7
12.4 GLM (Generalized Linear Models) . . . . .	7
<b>13 Provisions techniques en non-vie</b>	<b>8</b>
13.1 PPNA (Provision Pour Primes Non Acquises) . . . . .	8
13.2 PANE (Primes Acquises Non Emises) . . . . .	8
13.3 PSAP (Provisions pour Sinistres À Payer) . . . . .	8
<b>14 Types de Sinistres</b>	<b>8</b>
<b>15 Modèles de mortalité</b>	<b>8</b>
15.1 Gompertz (1825) . . . . .	8
15.2 Makeham (1860) . . . . .	8
15.3 Lee-Carter (1992) . . . . .	8
<b>16 Exemples de Calculs Concrets</b>	<b>9</b>
16.1 Prime commerciale avec chargements . . . . .	9
16.2 Mixte à primes annuelles . . . . .	9
16.3 Temporaire décès à primes annuelles . . . . .	9
<b>17 Aspects pratiques &amp; conseils pour les calculs</b>	<b>9</b>
<b>18 Annexes : formules utiles résumées</b>	<b>10</b>

## 1 Introduction et définitions

- **Contrat d'assurance vie** : engagement de l'assureur de verser un capital ou une rente conditionné par la survie ou le décès d'un assuré.
- **Principes fondamentaux** : mutualisation, transfert de risque, réassurance, rétrocession
- **Objectifs** : protection, épargne, retraite
- **Types de contrats** : cas de vie, cas de décès, contrats mixtes
- **Notions clés** : prime, prestation, table de mortalité, provision mathématique, valeur actuelle probable

## 2 Notations usuelles

- $T$  : durée de vie aléatoire (âge futur de décès)
- $x$  : âge de référence (actuel)
- $T_x = T - x$  : durée de vie résiduelle
- $l_x$  : nombre de survivants à l'âge  $x$
- $d_x = l_x - l_{x+1}$
- $q_x = d_x/l_x$  : probabilité de décès entre  $x$  et  $x + 1$
- $p_x = 1 - q_x$
- $np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$  : probabilité de survie de  $x$  à  $x + n$
- $nq_x = 1 - np_x$
- $i$  : taux d'intérêt actuariel (annuel)
- $v = (1 + i)^{-1}$  : facteur d'actualisation par période
- $V^k = v^k = (1 + i)^{-k}$
- $w$  : âge limite de la table

## 3 Tables de mortalité

- **Table du moment** (statique) : mortalité observée sur une année calendaire, hypothèse de mortalité constante
- **Table de génération** (prospective) : dépend à la fois de l'âge et de l'année (prise en compte de l'évolution de la mortalité)
- **Utilisation** : calcul des probabilités  $np_x$  et  $nq_x$  nécessaires au calcul des valeurs actuelles probables (VAP)
- **Construction** : observation d'une cohorte  $l_x$  individus, suivi des décès  $d_x$

## 4 Rappels de mathématiques financières

### 4.1 Capitalisation et actualisation

$$C(T, i) = C(1 + i)^T \quad (\text{capitalisation composée})$$

Valeur actuelle :  $VA = C(1 + i)^{-T} = Cv^T$

Facteur d'escompte :  $v = \frac{1}{1 + i}$

### 4.2 Principe d'équivalence financière

- Capital  $C$  aujourd'hui  $\equiv C(1 + i)^T$  dans  $T$  années
- Capital  $C$  dans  $T$  années  $\equiv \frac{C}{(1 + i)^T}$  aujourd'hui

## 5 Valeur actuelle probable (VAP)

**Principe** : on pondère chaque flux par la probabilité qu'il soit effectivement versé (survie/décès) puis on actualise.

## 5.1 Formule générale

Si un flux  $S$  est versé à l'instant  $k$  seulement si l'assuré est en vie (ou décédé) selon la condition, la VAP est :

$$VAP = \sum_k v^k \cdot S_k \cdot P(\text{condition à } k).$$

## 5.2 Formule fondamentale

Pour un capital  $S$  versé dans  $T$  années à une personne d'âge  $x$  :

$$VAP(x, i, T) = S \cdot v^T \cdot \frac{L_{x+T}}{L_x}$$

**Usage** : évaluation de tout engagement conditionnel à la survie ou au décès

## 6 Fonctions de commutation

Ces fonctions condensent des sommes pondérées (pratiques en calcul actuariel). Pour un taux  $i$  et  $v = (1 + i)^{-1}$  on définit :

$$\begin{aligned} D_x &= l_x v^x \\ N_x &= \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k} \\ S_x &= \sum_{k=0}^{w-x} N_{x+k} \\ C_x &= d_x v^{x+1} \\ M_x &= \sum_{k=0}^{w-x} C_{x+k} \\ R_x &= \sum_{k=0}^{w-x} M_{x+k} \end{aligned}$$

**Usage** : simplifier l'écriture des rentes et des capitaux ; ex.  $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$  et  $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ .

## 7 Rentes viagères

### 7.1 Rente viagère immédiate (perpétuelle)

— Rente versée à *terme échu* (fin de période) de 1 unité si la personne est en vie :

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

— Rente versée à *terme anticipé* (début de période) :

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

— Relation :  $a_x = \ddot{a}_x - 1$ .

## 7.2 Rente temporaire n années

$${}_{n|}a_x = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

## 7.3 Rente différée (s années) puis temporaire t ans

$${}_{s|t}a_x = \sum_{k=s+1}^{s+t} v^k {}_k p_x = {}_s p_x {}_t a_{x+s}.$$

## 7.4 Rentes croissantes

- Rente croissante (1,2,3,...) à terme anticipé :

$$I \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_k p_x.$$

- Rente croissante différée :

$${}_{s|t}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=s}^{s+t-1} (k+1) v^k {}_k p_x.$$

**Usage :** modéliser rentes indexées linéairement.

## 8 Capitaux au décès

### 8.1 Capital versé en fin d'année du décès (1 unité)

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}.$$

### 8.2 Capital temporaire décès n années

$${}_{n|}A_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

### 8.3 Capital différé et temporaire

$${}_{s|t}A_x = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = {}_s p_x \cdot {}_t A_{x+s}.$$

## 8.4 Usage :

- Tarification des garanties décès
- Calcul des primes pures (ex : prime unique  $\Pi = K A_x$  pour capital  $K$ )
- Évaluation des engagements de l'assureur

## 9 Contrats mixtes

Assurance mixte (capital en vie ou au décès) : combinaison de  $A_x$  et  ${}_n p_x$  selon le contrat.

## 9.1 Exemple : Mixte classique

Capital  $K$  payé au décès si avant  $n$  ans, sinon à terme  $n$  :

$$VAP = {}_n p_x K v^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} K = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

# 10 Tarification et primes

## 10.1 Principe d'équité actuarielle

La prime doit satisfaire l'égalité entre la VAP des flux payés par l'assuré et la VAP des engagements de l'assureur :

$$VAP_{\text{assuré}}(\text{primes}) = VAP_{\text{assureur}}(\text{prestations}).$$

## 10.2 Composition des primes

- **Prime pure** = Coût du risque seul
- **Prime d'inventaire** = Prime pure + Chargements de gestion
- **Prime commerciale** = Prime d'inventaire + Chargements d'acquisition

## 10.3 Primes pures

- **Prime unique** pour un capital  $K$  au décès :  $\Pi = K A_x$
- **Prime périodique** avec paiement annuel (primes constantes) :

$$\Pi \ddot{a}_x = K A_x \quad \Rightarrow \quad \Pi = K \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

## 10.4 Chargements

- **Frais d'acquisition** : commercialisation, commissions
- **Frais de gestion** : administration, relation client
- **Frais de règlement** : paiement des sinistres
- **Marge de profit** : bénéfice de l'assureur

## 10.5 Formules de prime commerciale

- **Prime unique commerciale** :

$$\Pi'' = \frac{\Pi(1+r) + f + g_2 \ddot{a}_G}{(1-\alpha)}$$

- **Prime annuelle commerciale** :

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2 \frac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H} + f}{(1-\alpha)}$$

# 11 Provisions mathématiques (PM)

## 11.1 Définition et objectif

Les PM représentent la dette probable de l'assureur vis-à-vis des assurés. Ce sont des réserves financières pour faire face aux engagements futurs.

## 11.2 Méthode prospective

La provision à la date  $t$  pour un contrat sur une tête d'âge  $x$  est :

$${}_tV_x = VAP_{\text{assureur restant}} - VAP_{\text{assuré restant}} = \text{VAP des engagements futurs} - \text{VAP des primes futures.}$$

## 11.3 Cas particuliers

- **Capital décès prime unique** :  ${}_tV_x = C A_{x+t}$
- **Contrat retraite** :

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < k < n : {}_kV_x &= R \cdot {}_{n-k}|a_{x+k} - \Pi \cdot {}_{n-k}\ddot{a}_{x+k} \\ \text{Si } k \geq n : {}_kV_x &= R \cdot a_{x+k} \end{aligned}$$

## 11.4 Autres méthodes

- **Méthode rétrospective** : PM = capitalisation viagère de l'écart entre primes versées et prestations payées
- **Méthode comptable** : itérative, fondée sur hypothèses de provisionnement (taux technique, tables, chargements)

## 12 Assurance Non-Vie (Complément)

### 12.1 Modèle fréquence-coût

$$S = \sum_{i=1}^N C_i + I_G \cdot G$$

**Usage** : Modélisation de la charge sinistre en IARD, avec :

- $N$  : nombre de sinistres (loi de Poisson)
- $C$  : coût unitaire (loi Gamma ou log-normale)
- $I_G$  : indicatrice de sinistre grave
- $G$  : coût sinistre grave (loi Pareto)

### 12.2 Prime pure en non-vie

$$E[S|X] = E[N - I_G|X] \times E[C|X] + P(I_G = 1|X) \times E[G|X]$$

### 12.3 Système Bonus-Malus

Modulation de prime selon sinistralité passée :

- **Bonus** : réduction de prime en l'absence de sinistre
- **Malus** : majoration de prime après sinistre
- Coefficient BM évolue à chaque échéance

### 12.4 GLM (Generalized Linear Models)

Cadre pour modéliser fréquence et coût :

- **Fonction de lien** :  $g(E[Y_i]) = x'_i \beta$
- **Lois utilisées** : Poisson (fréquence), Gamma (coût), Binomiale négative
- **Méthodes de sélection** : ascendante/descendante
- **Critères** : AIC, BIC, Déviance

## 13 Provisions techniques en non-vie

### 13.1 PPNA (Provision Pour Primes Non Acquises)

$$PPNA = \frac{\text{Jours restants}}{\text{Période totale}} \times \text{Prime nette}$$

**Usage :** constater la part des primes se rapportant à la période après l'inventaire

### 13.2 PANE (Primes Acquises Non Emises)

$$PANE = \frac{\text{Jours écoulés}}{\text{Période totale}} \times \text{Prime nette}$$

**Usage :** produits non encore facturés mais acquis

### 13.3 PSAP (Provisions pour Sinistres À Payer)

$$PSAP = \text{Provision Dossier/Dossier} + \text{Provision IBNR}$$

avec IBNR = IBNER + IBNYR

- **IBNER** : sinistres déclarés mais sous-estimés
- **IBNYR** : sinistres survenus mais non déclarés

## 14 Types de Sinistres

- **Attritionnels** : Forte fréquence, faible gravité (ex : petits dommages)
- **Graves** : Faible fréquence, forte gravité (ex : accident corporel)
- **CAT (catastrophes)** : Très faible fréquence, impact extrême (ex : tremblement de terre)

## 15 Modèles de mortalité

### 15.1 Gompertz (1825)

Force de mortalité :  $\mu_x = b c^x$  (avec  $c > 1, b > 0$ )

**Usage :** modélisation croissante de la mortalité par âge (vieillissement)

### 15.2 Makeham (1860)

$\mu_x = a + b c^x$  (ajoute un terme constant  $a$  pour risques exogènes)

**Usage :** meilleure adaptation lorsque accidents/maladies externes sont importants

### 15.3 Lee-Carter (1992)

Modèle temporel pour la projection des taux instantanés :

$$\log \mu_x(t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t},$$

avec contraintes d'identifiabilité :  $\sum_x b_x = 1$ ,  $\sum_t k_t = 0$

**Usage :** projection de la mortalité et calcul de provisions pour risque de longévité

## 16 Exemples de Calculs Concrets

### 16.1 Prime commerciale avec chargements

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2 \frac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H} + f}{(1-\alpha)}$$

où :

- $P$  = prime pure
- $f$  = frais fixes
- $\alpha$  = frais d'acquisition (% prime)
- $g_1, g_2$  = frais de gestion
- $r$  = marge de risque

### 16.2 Mixte à primes annuelles

$$P_r = C_{ap} \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$$

Usage : calcul de prime annuelle pour contrat mixte

### 16.3 Temporaire décès à primes annuelles

$$P_a = C \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$$

## 17 Aspects pratiques & conseils pour les calculs

- **Vérifier les conventions** : paiement à terme échu vs anticipé, périodicité des flux
- **Utiliser les commutations** : fonctions  $D, N, C, M$  pour gagner en efficacité et réduire les erreurs
- **Inclure tous les chargements** : acquisition, gestion, risque dans les primes commerciales
- **Contrôler les hypothèses** : taux technique, tables de mortalité, durée de paiement
- **Sensibilité aux paramètres** : petite modification des bases peut changer fortement les résultats
- **Validation** : utiliser outils informatiques (R, Python, Excel) pour les calculs complexes

## 18 Annexes : formules utiles résumées

$$\begin{aligned}
v &= (1 + i)^{-1}, \\
{}_n p_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_n q_x = 1 - {}_n p_x, \\
a_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}, \\
\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_x}{D_x}, \\
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}, \\
{}_n A_x &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \\
{}_{s|t} a_x &= {}_s p_{xt} a_{x+s}, \\
\Pi_{\text{prime unique capital}} &= K A_x, \\
{}_t V_x &= VAP_{\text{assureur futur}} - VAP_{\text{assuré futur}}.
\end{aligned}$$

**Remarque :** Ce document est un résumé complet destiné à couvrir l'ensemble du programme d'actuariat vie. Pour des calculs professionnels, toujours vérifier rigoureusement les conventions utilisées et les hypothèses de provisionnement.