ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
$2^{\text{ème}}$ année

2023-2024
Méthodes de simulation

Examen

NB : L'utilisation des calculatrices est autorisée

Exercice 1 :

Pour $a > 0$ donné, on désigne par f la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver une constante k telle que kf soit une densité de probabilité.

2. Trouver une constante $c_1 > 1$ telle que $kf(x) \leq \frac{c_1}{a} I_{[0,a]}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Trouver une constante $c_2 > 1$ telle que $kf(x) \leq c_2 I_{[0,+\infty[}(x) e^{-x}; x \in \mathbb{R}$.

4. On veut mettre en place une méthode de rejet pour simuler la loi de densité kf en utilisant la loi uniforme sur $[0, a]$ ou la loi exponentielle de paramètre 1. Laquelle vaut-il mieux choisir ?

5. Donner l'algorithme de simulation de kf par la méthode de rejet en utilisant la densité propositionnelle choisie.

Exercice 2 :

Soit

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Donner l'inverse de la fonction F.

2. Donner l'algorithme de simulation de données, par la méthode d'inversion. de la distribution de fonction de répartition F.

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$. On s'intéresse au calcul de

$$p = \mathbb{P}(X \geq 5) = \int_5^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx.$$

1. Donner la valeur de p.

2. En considérant $x_1, ..., x_n$ des réalisations de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$, donner l'estimateur de Monte Carlo classique de p.

3. Justifier que l'on peut écrire p sous la forme :
$$p = \int_0^{1/5} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx,$$

4. Donner l'algorithme qui permet d'estimer p par la méthode d'échantillonnage préférentiel.

5. Laquelle des deux méthodes d'estimation utilisée permettra de donner variance plus petite ?

6. Donner une condition théorique pour que la densité instrumentale donne un estimateur d'échantillonnage préférentiel de variance minimale.

Exercice 4 :

On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^u \, du$.

1. Rappeler la formule de l'estimation Monte-Carlo standard $\hat{I}_n$ et le Théorème Central Limite auquel il obéit.

2. Calculer la variance σ^2 qu'il faut intervenir et donner un estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ de σ^2.

3. Donner un estimateur $\hat{I}_n$ de I à base de variables antithétiques.

4. Quelle est sa variance théorique s^2 ?

5. Par rapport au Monte-Carlo standard, par combien (environ) a-t-on divisé le temps de calcul pour atteindre la même précision ?

Soit c une constante et $X_c = \exp(U) + c(U - \frac{1}{2})$, où U est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

6. Quelle est la moyenne de la variable X_c ?

7. Exprimer la variance de X_c en fonction de c et des variances et covariance de U et $\exp(U)$.

8. En déduire la valeur c^* de c rendant cette variance minimale et préciser $\mathrm{Var}(X_{c^*})$. Comparer à s^2.