ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 2h00
Novembre 2009

Examen du module Analyse Numérique

Ines Abdeljaoued et Walid Miladi

Exercice 1 (6pt). Notons $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique définie positive d'ordre n. La factorisation de la matrice A par la méthode de Cholesky est détaillée comme suit :

$r_{1,1}$ = $\sqrt{a_{1,1}}$
pour i de 2 à n faire :

$$r_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{k=j-1} r_{ik} r_{jk}}{r_{j,j}} \quad \text{pour} \quad j = 1..i-1$$

et

$$r_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{k=i-1} r_{i,k}^2}.$$

1. Ecrire l'algorithme de la méthode de Cholesky qui prend en entrée A et qui calcule une matrice R triangulaire vérifiant $A = R^t R$.
2. Supposons que la fonction racine nécessite au plus 9 opérations élémentaires. Déterminer la complexité de la méthode de factorisation de Cholesky de A en fonction de n.
3. Donner la factorisation de Cholesky de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (4pt). Calculer par la méthode de la puissance la valeur propre et le vecteur propre dominants de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Problème (10pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 0, & f_1 = -1, & f_2 = 0, & f_3 = 3. \end{array}$$

1. Calculer le poynôme de Lagrange P sur les points d'interpolation x_i, $i = 0..3$.
2. Donner le théorème de convergence de la méthode du point fixe pour une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2, 0]$ avec $g(x) = \frac{1}{2}P(x) + x$ et $X_0 = 0$? Si oui, calculer la racine de P sur $[-2, 0]$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$ par une descente puis une remontée (suite à une factorisation LU).
4. En déduire une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire $p_1(x) = a_0 x + a_1$.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 1h30
Juin 2010

Examen de contrôle du module Analyse Numérique

Exercice (8pt).

1. Etant donné une matrice $A = (a_{ij})$, λ une de ses valeurs propres associé au vecteur propre v et i l'indice de la coordonné v_i de v vérifiant $\mid v_i \mid = max_{1 \leq j \leq n} \mid v_j \mid$. Montrer que
$$\mid \lambda - a_{ii} \mid \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} \mid a_{ij} \mid .$$
2. Calculer la valeur propre et le vecteur propre dominants de A par la méthode de la puissance :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. Que se passe-t-il lorsqu'on considère $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Problème (12pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points
$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 0, & f_1 = -1, & f_2 = 0, & f_3 = 3. \end{array}$$

1. Calculer le poynôme de Lagrange P sur les points d'interpolation x_i, $i = 0..3$.
2. Donner le théorème de convergence de la méthode du point fixe pour une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 2]$ avec $g(x) = \frac{1}{2}P(x) + x$ et $X_0 = 0$?
3. Soit $A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix}$. Donner la décomposition LU de A.
4. Résoudre le système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$ par une descente puis une remontée.
5. En déduire une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire $p_1(x) = a_0 x + a_1$.
6. Quelle est la différence entre le polynôme de Lagrange et la droite de régression linéaire ?

Bon Travail,

Walid Miladi et Ines Abdeljaoued.