Plans d'Expériences
Blocs Aléatoires, Carré Latin et Plans liés

Josephson Junior R.

May 7, 2024

Table des matières

La technique de randomisation du plan d'expérience est utilisée pour se prémunir contre un facteur de nuisance caché. Ce facteur de nuisance peut être connu mais **non contrôlable**. Lorsque la variabilité de source de nuisance est **connue et contrôlable**, on peut eliminer l'effet de nuisance sur les comparaisons statistiques possible entre les traitement par le **Blocking** (formation des blocs).
Le plan RCBD est un plan qui fait **abstraction sur les variabilités possibles entre les effets traitements et procure une nette amélioration de la précision de comparaison**. Notons que ce RCBD plan est une généralisation du concept de plan de comparaisons appariées avec sa procédure du t-test apparié.

Analyse statistique de plan RCBD

En général, on suppose une expérience de a traitements à comparer et b blocs. Etant donné que la randomisation des traitements est à l'intérieure des blocs, on dit que les blocs représentent une restriction à la randomisation.

Pour un plan RCBD, le modèle statistique peut être défini comme **modèle d'effets**, surspécifié où :

$$\mathbf{Y_{ij}} = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + \varepsilon_{\mathbf{ij}} \quad ; \quad \mathbf{j} \in [\mathbf{1}, \mathbf{b}] \text{ et } \mathbf{i} \in [\mathbf{1}, \mathbf{a}]$$

$$\sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{a}} \alpha_{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \quad ; \quad \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{b}} \beta_{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$$

Pour simplifier on pourrait écrire :

$$\mathbf{Y_{ij}} = \mu_{\mathbf{ij}} + \varepsilon_{\mathbf{ij}} \ \text{ où } \ \mu_{\mathbf{ij}} = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}}$$

On cherche à à tester l'égalité des traitements moyens :

$$\begin{cases} \mathbf{H0}: & \mu_{\mathbf{1}} = \ldots = \mu_{\mathbf{a}} \\ \mathbf{H1}: & \mu_{\mathbf{i}} \neq \mu_{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Sachant que :

$$\mu_{\mathbf{i}} = \frac{\sum_{\mathbf{j}} \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}}}{\mathbf{b}} = \mu + \alpha_{\mathbf{i}}$$

Donc on peut tester un corps d'hypothèses équivalent :

$$\begin{cases} \mathbf{H0}: & \alpha_{\mathbf{1}} = \ldots = \alpha_{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H1}: & \alpha_{\mathbf{i}} \neq \alpha_{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Les notations qui changent :

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{i.}} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{b}} \mathbf{Y}_{\mathbf{ij}} \Rightarrow \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i.}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{b}} \mathbf{Y}_{\mathbf{ij}}$$

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mathbf{Y_{ij}} \Rightarrow \bar{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{N}} \text{ où } \mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Décomposition de la variance :

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(Y_{ij} - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[(\bar{Y}_i - \bar{Y}) + (\bar{Y}_j - \bar{Y}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_j - \bar{Y}_i - \bar{Y})\right]^2$$

$$SS_T = b\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + a\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_j - \bar{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$$

$$\Rightarrow SS_T = SS_{Traitement} + SS_{Blocs} + SS_E$$

Au sens de la distribution de Pearson (χ^2)

$$(N - 1) = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1)$$

Du point de vue de l'espérance si les traitements blocs sont fixes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{CM}_{\mathbf{SSBlocs}}) = \sigma^2 + \frac{\mathbf{a}\sum_{\mathbf{j}} \beta_{\mathbf{j}}^2}{\mathbf{a}-\mathbf{1}} \quad ; \quad \mathbf{E}(\mathbf{CM}_{\mathbf{SSTraitement}}) = \sigma^2 + \frac{\mathbf{b}\sum_{\mathbf{i}} \alpha_{\mathbf{i}}^2}{\mathbf{a}-\mathbf{1}-}$$

Sous H0 on définit la statistique :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{CM}_{\mathbf{SSTraitement}}}{\mathbf{CM}_{\mathbf{SSE}}} \sim \mathbf{F}(\mathbf{a}-\mathbf{1}, (\mathbf{a}-\mathbf{1})(\mathbf{b}-\mathbf{1}))$$

On est amené à tester l'hypothèse $\beta_{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$ si les moyennes ne diffèrent pas trop mais cette statistique a été supprimé de la table après **Anderson-Al** :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{0}} = \frac{\mathbf{CM}_{\mathbf{SSBlocs}}}{\mathbf{CM}_{\mathbf{SSE}}} \sim \mathbf{F}(\mathbf{b}-\mathbf{1}, (\mathbf{a}-\mathbf{1})(\mathbf{b}-\mathbf{1}))$$

Estimation du modèle statistique

En prenant le modèle (1) sous conditions de la nullité des sommes de α_i et β_j on aura :

$$\hat{\alpha}_{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i.}} - \bar{\mathbf{Y}} \quad ; \quad \hat{\beta}_{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{.j}} - \bar{\mathbf{Y}} \quad ; \quad \hat{\mu} = \bar{\mathbf{Y}}$$

L'utilité est de calculer les résidus :

$$\hat{\varepsilon}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{ij}} - \hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{ij}}$$

Test de signification de la régression générale

En utilisant les solutions-estimations des équations normales, la réduction en somme de carrés pour ajuster le modèle complet est définie par :

$$\mathbf{R}(\mu, \alpha, \beta) = \hat{\mu}\mathbf{Y} + \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{a}} \hat{\alpha}_{\mathbf{i}} \mathbf{Y}_{\mathbf{i.}} + \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{b}} \hat{\beta}_{\mathbf{j}} \mathbf{Y}_{\mathbf{.j}}$$

$$\mathbf{SS_E} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{b}} \mathbf{Y_{ij}^2} - \mathbf{R}(\mu, \alpha, \beta)$$

Pour tester l'hypothèse de base $\alpha_i = 0$ on ajuste le modèle contraint et on a :

$$\mathbf{R}(\mu, \beta) = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{b}} \hat{\beta}_{\mathbf{j}} \mathbf{Y_{.j}} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}(\alpha/\mu, \beta) = \mathbf{SS_{Traitement}}$$

Aussi pour tester $\beta_j = 0$ on aurait :

$$\mathbf{R}(\mu, \alpha) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{a}} \hat{\alpha}_{\mathbf{i}} \mathbf{Y_{i.}} \;\Rightarrow\; \mathbf{R}(\beta/\mu, \alpha) = \mathbf{SS_{Blocs}}$$