$y_t = a + b x_t + c z_t + u_t$ ${}^tXX = 3\times 3$

. Interprétation des paramètres :

$b = \frac{dy_t}{dx_t}$: l'élasticité de la (y_t) par rapport à (x_t)

$c = \frac{dy_t}{dz_t}$: l'élasticité de la (y_t) par rapport à (z_t)

. les rendements d'échelle sont const lorsque $b + c = 1$

→ Test d'hypothèse jointe.

. Les variables explicatives sont-elles colinéaires ?

. Test de Klein pour détecter la présence de la multicolinéarité.

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xz} \\ \rho_{xz} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{seulement comparer } \rho^2_{xz} \text{ et } R^2$$

. Test de Farrar et Glauber $\det \rho \rightarrow \chi^2_c \quad \chi^2_\alpha$

⇒ 2ème test est plus puissant que le 1er test.

$y_t = a x_t + b z_t + u_t$ modèle sans constante

c-à-d <u>les variables sont centrées</u>

alors ${}^tXX = 2\times 2$

$$ {}^tXX = \begin{pmatrix} \sum (x_{1t} - \bar{x}_1)^2 & \cdot \\ \sum (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{2t} - \bar{x}_2) & \sum (x_{2t} - \bar{x}_2)^2 \end{pmatrix}$$

dans l'autre cas : avec constante : c-à-d les variables ne sont pas centrées.

$$ {}^tXX = \begin{pmatrix} T & \sum x_{1t} & \sum x_{2t} \\ \cdot & \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t} x_{2t} \\ \cdot & \cdot & \sum x_{2t}^2 \end{pmatrix}$$

---

m obs $\longrightarrow \hat{\beta}_{1nco}$ $\rho_{x_1x_2} = 0{,}998$

$\neq$ de l'instabilité des coeff du modèle

m-1 obs $\longrightarrow \hat{\beta}_{2nco}$

faible modification du nbr d'obs entraîne une profonde modification des valeurs estimées des coeff $\hat{\beta}_{nco}$. cela est dûe à la forte corrélation entre x_1 et x_2. ceci implique que le risque de multicolin est important à cause

- x est un facteur déterminant du y :
  test de significativité du coeff de x.

Estimation par MCO $\longrightarrow$ $\hat{y} = \dots$

Erreur de mesure $\longrightarrow$ VI $\longrightarrow$ $\hat{y} = \dots$ var endog

Quelle méthode d'estimation doit-on retenir :

test d'endogénéité d'Hausmans detecter $Cov(x_t, \varepsilon_t) = ?$

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}_{VI}} = \begin{pmatrix} \hat{V}(\hat{\beta}_0) & \cdot \\ \hat{Cov}(\beta_0, \beta_1) & \hat{V}(\hat{\beta}_1) \end{pmatrix} \qquad \hat{V}(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} \longrightarrow (\cdot)$$

$Cov = 0 \longrightarrow$ MCO $\qquad$ sinon $\longrightarrow$ VI
il y a prob d'endog

Si on a l'homoscedasticité des erreurs alors on peut estimer les paramètres par la méthode des MCO

$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 . x_t^h$. l'estimateur des MCO est-il BLUE?

$\rightarrow$ l'estimateur des MCO n'est pas BLUE car l'hypothèse d'homoscedasticité des erreurs de MCO n'est pas vérifiée puisque $V(\varepsilon_t) = \sigma^2 . x_t^h$. $\quad V = \begin{pmatrix} x_1^h & \\ & \ddots & \\ & & x_T^h \end{pmatrix}$ $\quad V = 2\begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^2 = 2$, $\; v = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots & \\ & & T \end{pmatrix}$

$Var(u_t) = 2t$ $\longrightarrow$ diviser par $\sqrt{t}$

Proposer une méthode alternative d'estimations

sous l'hypoth d'hétéroscédasticité la méthode approp est la MCG qui revient à appliquer la MCO sur le modèle transformé

$$\frac{y_t}{\sqrt[2]{x_t^h}} = \frac{\cdot}{\sqrt[2]{x_t^h}}$$

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}_{MCG}} = ({}^tX . \Omega_{\varepsilon}^{-1} X)^{-1} = \sigma^2 ({}^tX . V^{-1} X)^{-1}$$

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \; \forall t \neq s \Rightarrow$ absence d'autocorrélation

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0 \Rightarrow$ on a un problème d'autocorrélation

---

~~Expliquer la procédure d'estimation de ce modèle:~~

Reg multiple :

$$\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1} \cdot {}^tXY$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \qquad \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$$

$$SCT = \sum (y_t - \bar{y})^2 = {}^tYY - T\bar{y}^2$$

$$SCE = \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 = {}^t\hat{Y}\hat{Y} - T\bar{y}^2$$

$$SCR = \sum \hat{\varepsilon}_t^2 = {}^t\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon}$$

$$SCR = {}^tYY - {}^t\hat{\beta}\,{}^tXY$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-K}$$ K : le nombre des var à estimer

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 ({}^tXX)^{-1} = \hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{Var}(\hat{\beta}_0) & & \\ & \ddots & \\ \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & & \hat{Var}(\hat{\beta}_K) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim St(T-K)$$

Test d'hypothèses jointes :

$H_0 : a_1\beta_i + a_2\beta_j = c$ contre

$H_1 : a_1\beta_i + a_2\beta_j \neq c$

- $$\frac{a_1\hat{\beta}_i + a_2\hat{\beta}_j - c}{\sqrt{\hat{V}(a_1\hat{\beta}_i + a_2\hat{\beta}_j)}} \sim St(T-K)$$

- $t_c \leq t_{\alpha/2}^{T-K} \Rightarrow H_0$ est vrai

  Sinon $\Rightarrow H_1$ est vrai

Test de significativité globale :

$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_K = 0$ contre $H_1 : \exists i$ tq $\beta_i \neq 0$

- $$\frac{T-K}{K-1} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} \sim St(K-1, T-K)$$

$F_c \leq F_\alpha \Rightarrow$ le modèle est globalement non signific

Sinon $\Rightarrow H_1$ est vrai $\Rightarrow$ le modèle est globalement sig

Remarque :

$${}^tXX = \begin{pmatrix} T & \sum x_t & \sum z_t \\ & \sum x_t^2 & \sum x_t z_t \\ & & \sum z_t^2 \end{pmatrix}$$

$${}^tXY = \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_t y_t \\ \sum z_t y_t \end{pmatrix}$$

R^2 proche de 1
$\rightarrow$ bonne Ajustement

R^2 proche de 0
$\rightarrow$ mauvaise ajustement

Expliquer la procédure d'estimation de ce modèle : $y_t = a + \beta x_t + u_t$
et $u_t = 0{,}5\, u_{t-1} + \varepsilon_t$ avec ε_t : bb

Comme $\varepsilon_t \sim AR(1)$ donc elle sont autocorrélées d'ordre 1
donc la MCO n'est pas valide alors on applique le MCG càd
la MCO sur le modèle quasi diff.

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = \alpha (1 - \hat{\rho}) + \beta (x_t - \hat{\rho} x_{t-1}) + v_t$$

↳ Estimer α et β : $Y_t = A + \beta X_t + v_t$

$$\begin{array}{l|l|l}
Y_1 = y_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2} & X_1 = x_1 . \sqrt{1 - \hat{\rho}^2} & \Rightarrow \bar{X} \quad \bar{Y} \\
Y_2 = y_2 - \hat{\rho} y_1 & X_2 = x_2 - \hat{\rho} x_1 & \hat{\beta} = \dfrac{\sum X_t Y_t - T \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_t^2 - T \bar{X}^2} \\
\vdots & \vdots & \\
Y_T = y_T - \hat{\rho} y_{T-1} & X_T = x_T - \hat{\rho} x_{T-1} & \hat{A} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}
\end{array}$$

$$= \hat{\alpha} (1 - \hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\alpha} = ?$$

Reg simple :

$$\left.\begin{array}{l}
\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} \\
\hat{b} = \dfrac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2}
\end{array}\right\} \hat{y} = \hat{a} + \hat{b} x_t$$

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t$$

$$\underset{\sum (y_t - \bar{y})^2}{SCT} = \underset{\sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{SCE} + \underset{\sum \hat{u}^2 = \sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{SCR}$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

$$SCE = \hat{b}^2 \sum (x_t - \bar{x})^2$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T - 2}}$$

$$\boxed{\hat{V}(\hat{b}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}}$$

$$\hat{V}(\hat{a}) = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right)$$

Les tests :

- $H_0 : b \leq b_0$ contre $H_1 : b > b_0$

$$\frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim st(T-2)$$

$\dfrac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}$ $t_c \leq t_{\alpha/2}^{T-2} \Rightarrow H_0$ vrai
sinon $\Rightarrow H_1$ est vrai

- $H_0 : b = b_0$ contre $H_1 : b \neq b_0$

$$\frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim st(T-2)$$

m̀ décis

- $H_0 : b = 0$ contre $H_1 : b \neq 0$

si H_0, $\dfrac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim st(T-2)$

$t_c \leq t_{\alpha/2}^{T-2} \Rightarrow H_0$ vrai
b est stat non significatif
sinon $\Rightarrow H_1$: b est stat significatif