$\mu = \mathcal{L}(x_0)$ $P_\mu(X_1 = y) = P_\mu\left((X_1 = y) \cap \left(\bigcup_{x \in E} (X_0 = x)\right)\right) = \sum_{x \in E} P_\mu(X_1 = y, X_0 = x)$

$= \sum_{x \in E} P_\mu(X_0 = x) P_\mu(X_1 = y / X_0 = x) = \sum_{x \in E} \mu(x)\, Q(x,y) = (\mu Q)(y) \quad \forall y \in E$

$\mathcal{L}(X_0) Q = \mathcal{L}(X_1)$ car $P(X_1 = y) = \sum_{x \in E} P(X_0 = x)\, Q(x,y)$. $\forall y \in E$

$\mathcal{L}(X_m) Q = \mathcal{L}(X_{m+1})$

$P(X_{m+1} = y) = P\left((X_{m+1} = y) \cap \left(\bigcup_{x \in E} (X_m = x)\right)\right) = \sum_{x \in E} P(X_m = x) \underbrace{P(X_{m+1} = y / X_m = x)}_{Q(x,y)}$

mesure de prob ≠ applic

Le vecteur ligne

$\mathcal{L}(X_0) Q = \mathcal{L}(X_1)$ | $\mathcal{L}(X_m) Q = \mathcal{L}(X_{m+1})$

$\mathcal{L}(X_1) Q = \mathcal{L}(X_2)$ | $\Rightarrow \mathcal{L}(X_0) . Q^m = \mathcal{L}(X_m)$

$\Downarrow$

$\mathcal{L}(X_{m-1}) Q = \mathcal{L}(X_m)$ | $\mathcal{L}(X_m) . Q^m = \mathcal{L}(X_{m+m})$

$P(X_m = y) = \sum_{x \in E} P(X_0 = x) . Q^m(x,y) \quad \forall y \in E$; $P_x(X_m = y) = Q^m(x,y)$

$P(X_{m+m} = y) = \sum_{x \in E} P(X_m = x) . Q^m(x,y)$

$E_x(f(X_m)) = \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{P_x(X_m = y)}_{Q^m(x,y)} = (Q^m f)(x)$

$E(f(X_m) / X_0) = (Q^m f)(X_0)$

$E(f(X_{m+m}) / X_m = x) = \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{P(X_{m+m} = y / X_m = x)}_{Q^m(x,y)}$

$E(f(X_{m+m}) / X_m = x) = Q^m f(x)$

$\Rightarrow Q^m f(X_m) = E(f(X_{m+m}) / X_m)$

$E(f(X_{m+m})) = E(E(f(X_{m+m}) / X_m)) = E(K(X_m))$ avec

$E_{/X_m = x}(f(X_{m+m})) = Q^m f(x)$

$K(x) = E(f(X_{m+m}) / X_m = x)$

$= \sum_{y \in E} f(y) Q^m(x,y) = (Q^m f)(x)$

$Q^m(x,y) = P_x(X_m = y)$

$K(X_m) = (Q^m f)(\cancel{X})$

$Q^m f(x) = E_x(f(X_m))$

$E_{/X_m}(f(X_{m+m})) = E(f(X_{m+m}) / X_m) = (Q^m f)(X_m)$

II / Propriétés simple de Markov et propriétés fortes de Markov :

E : ensemble au plus dénombrable

$E^{\mathbb{N}} : \{x = (x_k)_{k \geq 0} / x_k \in E \ \forall k \geq 0\}$: l'ensemble des suites à valeurs dans E

On va définir une tribu sur $E^{\mathbb{N}}$ (qui s'appelle tribu cylindrique de la manière suivante : $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E^{\mathbb{N}})$ / pour tout $A \in \mathcal{G}$ alors $\exists m \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

$x \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_m) \in B$

$\mathcal{G}$ n'est pas stable par réunion au plus dénombrable

Posons $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G})$ = tribu cylindrique - tribu engendrée par $\mathcal{G}$

$X = (X_m)_{k \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de loi initiale μ et de matrice de transition Q

Posons $\mu_m\{(x_1, \dots, x_m)\} = P_\mu(\overset{X_1}{x_1}, \dots, \overset{X_m}{x_m}) = \mu(x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m)$

$B \in \mathcal{P}(E^{m+1}) \quad \mu_m(B) = \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in B} \mu_m(\{x_0, \dots, x_m\})$

μ_m est une mesure de probabilité sur $(E^{m+1}, \mathcal{P}(E^{m+1}))$

De plus, on a $\mu_{m+1}(B \times E) = \mu_m(B)$, $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

en effet; $\mu_{m+1}(B \times E) = \sum_{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in B \times E} \mu(x_0) Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m) Q(x_m, x_{m+1})$

$= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in B} \mu(x_0) \times Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m) \cdot \left(\sum_{x_{m+1} \in E} Q(x_m, x_{m+1}) \right) = \mu_m(B)$

Grâce au thm de Kolmogorov (ci-dessous), il existe une unique mesure de probabilité sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ qu'on la note μ tq: Pour tout $A \in \mathcal{G}$ ($\Leftrightarrow \exists m_A \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$) $x = (x_k)_{k \geq 0} \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_m) \in B \Rightarrow \mu(A) = \mu_m(B)$

La mesure de probabilité μ s'appelle la loi du processus.

Théorème : "Admis" (thm d'extension de Kolmogorov)

- Hypothèse : . $(\mu_m)_{m \geq 0}$ une suite de mesure de probabilité tq μ_m est une mesure de probabilité $(E^{m+1}, \mathcal{P}(E^{m+1}))$
  . On suppose que les μ_m sont compatibles dans le sens suivant : $\mu_{m+1}(B \times E) = \mu_m(B) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$
- Conclusion : Il existe une unique mesure de probabilité μ sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ tq $\mu(A) = \mu_m(B)$ où $A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

$G_m : (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longmapsto (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$

$x = (x_0, \dots, x_m, \dots_\infty) \longmapsto (x_m, x_{m+1}, \dots \infty)$

G_m est mesurable, pour cela, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{G}$, $G_m^{-1}(A) \in \mathcal{G}$. $G_m^{-1}(A) = \{ x = (x_k)_{k \geq 0} \in E^{\mathbb{N}} / G_m(x) \in A \}$

$A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{K+1}) / x = (x_\ell)_{\ell \geq 0} \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_K) \in B$

$G_m(x) = (x_m, x_{m+1}, \dots) \in A \Leftrightarrow (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+K}) \in B \Leftrightarrow$

$(x_0, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+K}) \in E^m \times B$

$G_m^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ $m = n+K-1$ $\mathcal{B} = E^m \times B$

$\Rightarrow G_m$ est mesurable

Théorème: Propriété simple de Markov:

- hypothèses: . $X = (X_m)_{m \geq 0}$ une chaine de Markov sur E de loi initiale μ et de matrice de transition Q
  . $H: (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive ou bien mesurable bornée $\quad F_m = \sigma(X_0, \dots, X_m)$
- Conclusion: $E(H(G_m(X)) / F_m) = U(X_m)$ où $U(x) = E_x(H(X))$

Application:

$K \in \mathbb{N}$, $F: (E^{K+1}, \mathcal{P}(E^{K+1})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive (ou bornée)

$(x_1, \dots, x_K) \longmapsto F(x_1, \dots, x_K)$

Posons $H_F: (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \longmapsto F(x_1, \dots, x_K)$

$H(G_m(X)) = H(X_m, X_{m+1}, \dots) = E(F(X_{m+1}, \dots, X_{m+K}) / F_m) = U(X_m)$ où

$U(X_m) = E_x(H(X)) = E_x(F(X_1, \dots, X_m))$

$E(F(X_m, \dots, X_{m+K})) = E(E(F(X_m, \dots, X_{m+K}) / F_m)) = E(U(X_m)) = \sum_{x \in E} U(x) . P(X_m = x)$

$= \sum_{x \in E} E_x(F(X_0, \dots, X_K)) \mu(x)$ car $\mathcal{L}(X_m) = \mu$

Preuve:

H mesurable positive $H(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Lemme d'approximation: $\lim_{m \to +\infty} H_m = H$ $\quad H_m$ étagée positive

$H_m = \sum_{\ell \in I_m} \alpha_\ell . \mathbb{1}_{\Delta \ell}$ où $\Delta \ell \in \mathcal{G}$, $\alpha_\ell \geq 0$, $|I_m| < +\infty$

Grâce au thm de la convergence monotone conditionnelle.

il suffit de prendre H étagée positive

Grâce à la linéarité de l'espérance conditionnelle

il suffit de prendre $H = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{G}$

Grâce au thm de classe monotone, il suffit de prendre $A \in \mathcal{G}$

$A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{K+1}) / x = (x_\ell)_{\ell \geq 0} \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_K) \in B$

$\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x_0, \dots, x_K)$

$H(G_m(X)) = 1_A(G_m(X)) = 1_A(X_m, X_{m+1}, \dots) = 1_B(X_m, X_{m+1}, \dots X_{m+K})$

Prenons $D \in F_m = \sigma(X_0, \dots X_m)$ ~~donc~~ $D = (X_0, \dots X_m)^{-1}(C)$ où $C \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

$$1_D = 1_C(X_0, \dots X_m)$$

$E(H(G_m(X))\, 1_D) = E(1_B(X_m, X_{m+1}, \dots X_{m+K})\, 1_C(X_0, \dots X_m))$

$$= \sum_{x_0, \dots, x_{m+K} \in E} 1_B(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+K})\, 1_C(x_0, \dots, x_m) \times \mu(x_0) Q(x_0, x_m) \times \dots \times Q(x_{m-1}, x_m)\, Q(x_m, x_{m+1}) \dots Q(x_{m+K-1}, x_{m+K})$$

$$= \sum_{x_0, \dots, x_m \in E} 1_C(x_0, \dots, x_m)\, \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m) \underbrace{\sum_{x_{m+1}, \dots, x_{m+K} \in E} 1_B(x_m, \dots x_{m+K}) \times Q(x_m, x_{m+1}) \dots Q(x_{m+K-1}, x_{m+K})}_{= E_{X_m}(1_B(X_0, \dots, X_K)) = U(X_m)}$$

$E_{X_m}(1_B(X_0, \dots, X_K)) = \sum_{x_0, \dots x_K \in E} 1_B(x_0, \dots, x_K)\, \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{K-1}, x_K)$

$\mu = \delta_{x_m}$

$$= \sum_{x_1, \dots, x_K \in E} 1_B(x_m, x_1, \dots x_K)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{K-1}, x_K)$$

$$= \sum_{x_0, \dots, x_m \in E} U(x_m)\, 1_C(x_0, \dots, x_m)\, \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \times \dots Q(x_{m-1}, x_m)$$

$$= E(U(X_m)\, 1_C(X_0, \dots, X_m)) = E(U(X_m)\, 1_D)$$

$U(X_m)$ est F_m-mesurable. L'unicité $\mathbb{P}$ ps de l'espérance conditionnelle implique $E(H(G_m(X)) / F_m) = U(X_m)$ $\mathbb{P}$ ps.

Théorème : Propriétés forte de Markov <u>Preuve</u> (Photo)

Soit $X = (X_m)_{m \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de matrice de transition Q et T un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(F_m^X)_{m \geq 0}$. $U(x) = E_x(H(X))$

On a $E(H(Q_T(X)) / F_T^X) = U(X_T)$ sur $(T < +\infty)$ $\mathbb{P}$ps. où H mesurable bornée

Définition : $F_T = \{ A \in Q / A \cap (T = m) \in F_m \}$ où T est un t.a % $(F_m)_{m \geq 0}$.

III / Récurrence, Transience et irréductible :

Soit $(X_m)_{m \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de matrice de transition Q

Définition :

Soient x et y deux états de E. On dit que x $\left\{\begin{array}{l}\text{communique avec } y \\ \text{conduit à } y\end{array}\right.$ $x \to y$

s'il existe $m \in \mathbb{N} / \mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$ (càd $\mathbb{P}_x(X_m = y) = Q^m(x, y) > 0$)

Propriétés

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(m+1)$ uplets d'états $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$

tq $Q(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad i = 1, \dots, m-1$

b/ $x \longrightarrow y \mid \exists m \in \mathbb{N} \; P_x(\{X_m = y\}) > 0)$

c/ $P_x(\{\exists k \geq 1 / X_k = y\}) > 0$

Preuve :

"a $\Rightarrow$ b" : (; intersection)

$$\{X_0 = x_0 ; X_1 = x_1 ; \dots ; X_m = y\} \subset \{X_0 = x_0 ; X_m = y\}$$

$$\Rightarrow P_x(X_0 = x ; \dots ; X_m = y) \leq P_x(X_0 = x ; X_m = y)$$

$$\Rightarrow 0 < \underbrace{\mu(x)}_{\substack{1 \\ \mu = \delta_x}} \underbrace{Q(x, x_1)}_{>0} \times \cdots \times \underbrace{Q(x_{m-1}, y)}_{>0} \leq \underbrace{P_x(X_m = y / X_0 = x)}_{Q^m(x,y)} \underbrace{P_x(X_0 = x)}_{1}$$

"b $\Rightarrow$ c" $\quad \{X_m = y\} \subset \underbrace{\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\}}_{= \{\exists k \geq 0 / X_k = y\}}$

Si E est fini ? $\Rightarrow Q$ devient l'identité

$$\Rightarrow 0 < P_x(\{X_m = y\}) \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\})$$

"c $\Rightarrow$ a" $\quad$ non a $\Rightarrow$ non c

$$\{\exists k \geq 0 / X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in E} \{X_0 = x, X_1 = x_1, \dots, X_k = y\}$$

$$\forall x_1, \dots, x_{k-1} \in E \quad P_x(\{X_0 = x ; \dots ; X_{k-1} = y\}) = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \in E} P_x(\{X_0 = x ; \dots ; X_k = y\}) = 0$$

Définition :

On dit que x et y se communiquent entre eux, si $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow x$ (càd il existe n et $m \in \mathbb{N}$ / $\underbrace{Q^n(x,y)}_{P_x(X_n = y)} > 0$ et $\underbrace{Q^m(y,x)}_{P_y(X_m = x)} > 0$)

notation $x \leftrightarrows y$

Propriétés :

La relation "$\leftrightarrows$" est une relation d'équivalence.

Preuves

- $x \leftrightarrows x$ $Q^0(x,x)=1>0$ $n=0$ réflexive
- $x \leftrightarrows y$ $\Rightarrow$ $\exists n,m \in \mathbb{N}$ tq $Q^n(x,y)>0$ et $Q^m(y,x)>0$ $\Rightarrow$ $y \leftrightarrows x$ symétrique
- $x \to y$ et $y \to z$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} / Q^n(x,y)>0 \\ \exists m \in \mathbb{N} / Q^m(y,z)>0 \end{cases}$

$Q^{n+m}(x,z) = Q^n Q^m(x,z) = \sum_{l \in E} Q^n(x,l) Q^m(l,z) \geq \underbrace{Q^n(x,y)}_{>0} \underbrace{Q^m(y,z)}_{>0} > 0$

alors $x \leftrightarrows y$ et $y \leftrightarrows z$

$\Rightarrow x \leftrightarrows z$ (d'après ce qui précède)

$E_{/\leftrightarrows}$ = {l'ensemble des classes d'équivalence}

$\bar{x} = \{y \in E / x \leftrightarrows y\}$ $\bar{x} \cap \bar{y} = \begin{cases} \phi & \text{si } x \not\leftrightarrows y \\ \bar{x}=\bar{y} & \text{si } x \leftrightarrows y \end{cases}$

Définition :

On dit qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si tous les états se communiquent entre eux (càd $\bar{x} = E$ $\forall x \in E$).

Soit $x \in E$

$T_x = \inf\{n>0 / X_n = x\}$ est la v.a qui décrit le 1er instant de passage par x après l'instant 0

$= \inf\{n \geq 1 / X_n \in A\}$ est un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$; $T_x : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$

$A = \{x\}$

$N_x = \sum_{k=0}^{+\infty} 1\!\!1_{\{X_k = x\}}$ = v.a qui décrit le nombre de passage par x

$T_x^{(2)} = \inf\{n > T_x^{(1)} / X_n = x\}$ est la v.a qui décrit le 2ème instant de passage par x après l'instant 0 est un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$

Soit S un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$ $A \subset E$ à titre d'exercice

$T = \inf\{n > S / X_n \in A\}$ est un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$

$T_x^{(m)} = \inf\{n > T_x^{(m-1)} / X_n = x\}$ v.a qui décrit le m ième passage par x

Définition :

Soit $x \in E$. On dit que x est un état récurrent, si en partant de x on revient en x presque sûrement à l'état x (càd $P_x(T_x^{(1)} < +\infty) = 1$)

Propriétés

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a/ Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(m+1)$ uplets d'états $x_0 = x, x_1, \ldots, x_m = y$

tq $Q(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad i = 1, \ldots, m-1$

b/ $x \longrightarrow y \; | \exists m \in \mathbb{N} \; P_x(\{X_m = y\}) > 0)$

c/ $P_x(\{\exists k \geq 1 / X_k = y\}) > 0$

Preuve:

"a ⇒ b":

(; intersection)

$$\{X_0 = x_0 ; X_1 = x_1 ; \ldots ; X_m = y\} \subset \{X_0 = x_0 ; X_m = y\}$$

$$\Rightarrow P_x(X_0 = x ; \ldots ; X_m = y) \leq P_x(X_0 = x ; X_m = y)$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \underbrace{\mu(x)}_{\substack{1 \\ \mu = \delta_x}} \underbrace{Q(x, x_1)}_{>0} \times \cdots \times \underbrace{Q(x_{m-1}, y)}_{>0} \leq \underbrace{P_x(X_m = y / X_0 = x)}_{Q^m(x, y)} \underbrace{P_x(X_0 = x)}_{1}$$

"b ⇒ c" $\{X_m = y\} \subset \underbrace{\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\}}_{= \{\exists k \geq 0 / X_k = y\}}$

Si E est fini ⇒ Q devient l'identité

$$\Rightarrow \quad 0 < P_x(\{X_m = y\}) \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\})$$

"c ⇒ a" non a ⇒ non c

$$\{\exists k \geq 0 / X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \ldots, x_{k-1} \in E} \{X_0 = x, X_1 = x_1, \ldots, X_k = y\}$$

$$\forall x_1, \ldots, x_{k-1} \in E \quad P_x(\{X_0 = x ; \ldots ; X_{k-1} = y\}) = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{x_1, \ldots, x_{k-1} \in E} P_x(\{X_0 = x ; \ldots ; X_k = y\}) = 0$$

Définition:

On dit que x et y se communiquent entre eux, si $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow x$

(Càd il existe m et $m \in \mathbb{N}$ / $\underbrace{Q^m(x, y)}_{P_x(X_m = y)} > 0$ et $\underbrace{Q^m(y, x)}_{P_y(X_m = x)} > 0$)

notation $x \leftrightarrows y$

Propriétés:

La relation "$\leftrightarrows$" est une relation d'équivalence.

Dans le cas contraire, on dit que x est transient

Proposition :

$$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x < +\infty) . P_x(N_x \geq K)$$

Preuve :

$$N_x = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{(X_n = x)} = G(X)$$

$$G : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$$

$$\tilde{x} = (x_k)_{k\geq 0} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} 1_{(x_k = x)}$$

sous P_x

$$(N_x \geq K+1) = (T_x^{(K)} < +\infty)$$

$$T_x^{(K)} = \inf\{m \geq T_x^{(K-1)} / X_m = x\} = T_x^{(K-1)} + \inf\{m > 0 / X_{m+T_x^{(K-1)}}\}$$

$$(T_x^{(K)} < +\infty) = (T_x^{(K-1)} < +\infty ; \inf\{m > 0 // X_{m+T_x^{(K-1)}} = x\} < +\infty)$$

$$T_x^{(K)} = \inf\{m > 0 / X_m = x\} = F(X) ; \inf\{m > 0 / X_{m+T_x^{(K-1)}} = x\} = F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X))$$

$$X = (X_m)_{m\geq 0} \qquad Q_{T_x^{(K-1)}}(X) = (X_{T_x^{(K-1)}} ; X_{T_x^{(K-1)}+1} ; \dots)$$

$$F : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$$

$$(x_m)_{m\geq 0} \longmapsto \inf\{m > 0 / x_m = x\}$$

$$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x^{(K-1)} < +\infty) = E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty} ; F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X)) < +\infty)\right)$$

$$= E_x\left(E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty)} . 1_{(F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X)) < +\infty)} / F^X_{T_x^{(K-1)}}\right)\right)$$

$$= E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty)} . \underbrace{E\left(1_{(F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X)) < +\infty)} / F^X_{T_x^{(K-1)}}\right)}\right)$$

|| propriétés forte de Markov

$$U(X_{T_x^{(K-1)}}) ; U(y) = E_y\left(1_{(F(X) < +\infty)}\right)$$

Or $X_{T_x^{(K-1)}} = x \Rightarrow U(X_{T_x^{(K-1)}}) = U(x) = E_x\left(1_{(F(X) < +\infty)}\right) = P_x(T_x < +\infty)$

$$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x < +\infty) \underbrace{E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty)}\right)} -$$

$$= P_x(T_x^{K-1} < +\infty) = P_x(N_x \geq K)$$

Théorème :

1. Les propriétés suivantes sont équivalentes

a/ L'Etat x est récurrent (C'àd $P_x(T_x^{(1)} < +\infty) = 1$)

b/ $P_x(N_x = +\infty) = 1$

c/ $\sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(x, x) = +\infty$ (C'àd Série divergente)

2. Les propriétés suivantes sont équivalentes

a,/ l'état x est transient (càd $P_x(T_x^{(1)} < +\infty) < 1$ ssi $P_x(T_x^{(1)} = +\infty) > 0$)

b,/ N_x suit une loi géométrique de paramètre (sous P_x)

c,/ $\sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(x,x) < +\infty$

Preuves :

"a ⟹ b" : Hypothèse : $P_x(T_x < +\infty) = 1$

D'après la proposition précédente, $P_x(N_x \geq K+1) = \underbrace{P_x(T_x < +\infty)}_{1} P_x(N_x \geq K)$

$= \dots = P_x(\underbrace{N_x \geq 0}_{\Omega}) = 1 \qquad N_x = \sum_{K=0}^{+\infty} \mathbb{1}(X_K = x)$

$1 = P_x(N_x \geq K) \xrightarrow{m \to +\infty} P_x(\underbrace{\bigcap_{K=0}^{+\infty} A_K}_{N_x = +\infty}) = P_x(N_x = +\infty)$

$A_K = (N_x \geq K)$

$A_{K+1} \subseteq A_K$

car $\in \bigcap_{K=0}^{+\infty} A_K$ ssi $N_x(\omega) \geq K, \forall$

$\to N_x(\omega) = +\infty$

"b ⟹ c" : Hypothèse : $P_x(N_x = +\infty) = 1 > 0 \Rightarrow$ CN d'intégrabilité

$N_x = \sum_{K=1}^{+\infty} \mathbb{1}(X_K = x) \Rightarrow E(N_x) = \sum_{K=0}^{+\infty} E_x(\mathbb{1}(X_K = x)) = \sum_{K=0}^{+\infty} \underbrace{P_x(X_K = x)}_{Q^K(x,x)}$

thm de conv mon : TCM

$\sum_{K=0}^{+\infty} Q^K(x,x) = +\infty$

"a, ⟹ b," : Hypothèse : $P_x(T_x < +\infty) < 1$

$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x < +\infty) . P_x(N_x \geq K)$

$N_x = K = (N_x \geq K) / (N_x \geq K+1)$

$N_x(\Omega) = \mathbb{N}$

$N_x \geq K+1 \subset (N_x \geq K)$

$P_x(N_x = K) = P_x(N_x \geq K) - P(N_x \geq K+1)$

. $P_x(N_x \geq K) = P_x(T_x < +\infty) . P_x(N_x \geq K-1)$

$P_x(N_x \geq K-1) = P_x(T_x < +\infty) P_x(N_x \geq K-2)$

⋮

$P_x(N_x \geq 1) = P_x(T_x < +\infty) \underbrace{P_x(N_x \geq 0)}_{=1}$

$\boxed{P_x(N_x \geq K) = (P_x(T_x < +\infty))^K}$

$P_x(N_x = k) = (P_x(T_x < +\infty))^k - (P_x(T_x < +\infty))^{k+1}$

$= (P_x(T_x < +\infty))^k (1 - P_x(T_x < +\infty))$

$N_x \sim \mathcal{G}(\underbrace{1 - P_x}_{P(T_x = +\infty)})$ sur IN avec $P_x = P_x(T_x < +\infty)$

$E_x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 1_{(X_k = x)}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{E_x(1_{(X_k = x)})}_{Q^k(x,x)}$

b) $\Rightarrow$ c) : Hypothèse : $N_x \sim \mathcal{G}(.)$

$\Rightarrow E_x(N_x) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(x,x) < +\infty$

Corollaire :

Si $x \leftrightarrows y$, alors tous les deux sont récurrents ou bien transients

Preuve :

$x \leftrightarrows y$ mq $\sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(x,x)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(y,y)$ sont de même nature

$x \leftrightarrows y \Leftrightarrow \exists\, k$ et $p \in IN$ $Q^k(x,y) > 0$ et $Q^p(y,x) > 0$

$Q^{k+m+p}(x,x) = (Q^k.\, Q^m.\, Q^p)(x,x) = \sum_{t,s \in E} Q^k(x,t).\, Q^m(t,s)\, Q^p(s,x)$

$\geq \underbrace{Q^k(x,y).\, Q^m(y,y).\, Q^p(y,x)}_{\text{produit} > 0}$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} Q^n(x,x) < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} Q^{k+m+p}(x,x) < +\infty \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(y,y) < +\infty$

$Q^{p+m+k}(y,y) \geq Q^p(y,x)\, Q^m(x,x).\, Q^k(x,y)$

De même, si $\sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(y,y) < +\infty \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(x,x) < +\infty$