TD1 : ML

Exercice 1 :

1/ $\hat{b} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{35,6}{61,2} = 0,582$

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{1}{T} \cdot \sum y_t - \hat{b} \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum x_t$

$= \frac{420}{30} - 0,582 \cdot \frac{260}{30} = 8,956$

Interprétation économique des paramètres estimées :

- $\hat{b}$ c'est l'élasticité estimée de la production par rapport au capital. Quand le stock de capital augmente de 1%, le niveau de production augmente de 0,582%.
- $\hat{a} = E(y_t \mid x_t = 0)$: La production moyenne autonome estimée (indépendante du facteur capital)

2/ $R^2 = \frac{\hat{b}^2 \cdot \sum (x_t - \bar{x})^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} = \frac{(0,582)^2 \cdot 61,2}{106} = 0,196 = 19,6\%$

On a une mauvaise qualité d'ajustement linéaire

3/ $\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{T-2}$

$SCR = SCT - SCE$

$= \sum (y_t - \bar{y})^2 - \hat{b}^2 \sum (x_t - \bar{x})^2$

$= 106 - (0,582)^2 \times 61,2$

$= 85,27$

Ou bien : $R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \Rightarrow SCR = (1 - R^2) \times SCT$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{85,27}{30-2} = 3,045$

4/ $\hat{\sigma}^2_{\hat{a}} = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right) = 3,045 \times \left(\frac{1}{30} + \frac{(8,667)^2}{61,2} \right) = 3,839$

$\hat{\sigma}^2_{\hat{b}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \frac{3,045}{61,2} = 0,05$

5/ IC 90% (a) ?

- $\frac{\hat{a} - a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} \sim St(T-2) = St(28)$
- $\alpha = 10\%$, on cherche dans la table de la loi de Student, le seuil $t^{T-2}_{\alpha/2}$

tq $P\left(\left|\frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right| < t_{\alpha/2}^{T-2}\right) = 90\% \Rightarrow t_{\alpha/2}^{T-2} = t_{0,05}^{28} = 1,701$

- $IC_{90\%}(a) = [\hat{a} \pm \hat{\sigma}_{\hat{a}} \times t_{\alpha/2}^{T-2}] = [8,956 \pm \underbrace{\sqrt{3,835} \times 1,701}_{3,33}]$

$= [5,623 ; 12,289]$

- $IC_{90\%}(b) = [\hat{b} \pm \hat{\sigma}_{\hat{b}} \times t_{\alpha/2}^{T-2}] = [0,582 \pm \underbrace{\sqrt{0.05} \times 1,701}_{0,38}]$

$= [0,202 ; 0,962]$

6/ Test de significativité individuelle pour a:

- $H_0 : a = 0$ contre $H_1 : a \neq 0$
- Sous H_0 vraie, $\frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} \sim St(28)$
- Règle de décision : (approche par IC)
  - si $0 \in IC_{90\%}(a)$ alors H_0 est vraie
  - si $0 \notin IC_{90\%}(a)$ alors H_1 est vraie

Conclusion : On a $0 \notin IC_{90\%}(a)$ donc on accepte $H_1 \Rightarrow a \neq 0$ $\Rightarrow$ le paramètre a est statistiquement significative

Test de significativité individuelle pour b:

- $H_0 : b = 0$ contre $H_1 : b \neq 0$
- Sous H_0 vraie, $\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim St(28)$
- Règle de décision : (approche par IC)
  - si $0 \in IC_{90\%}(b)$ alors H_0 est vraie
  - Si $0 \notin IC_{90\%}(b)$ alors H_1 est vraie

Conclusion : $0 \notin IC_{90\%}(b)$ donc on accepte H_1 $\Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow$ le paramètre b est statististiquement significative $\Rightarrow x$ est une variable pertinente $\Rightarrow$ le stock de capital a un impact significative sur le niveau de production

7/ $IP_{95\%}(y_{T+h})$?

- $\frac{y_{T+h} - y_{T+h}^P}{\hat{\sigma}_{ep}} \sim St(T-2) = St(28)$
- α étant égale à 5%, on cherche $t_{\alpha/2}^{T-2}$ tq $P\left(\left|\frac{y_{T+h} - y_{T+h}^P}{\hat{\sigma}_{ep}}\right| < t_{\alpha/2}^{T-2}\right) = 95\%$

$\Rightarrow t_{\alpha/2}^{T-2} = t_{0,025}^{28} = 2,048$

- $y_{T+h}^P = \hat{a} + \hat{b}\, x_{T+h} = 8,956 + 0,582 \times 10 = 14,776$

$\hat{\sigma}_{ep} = \sqrt{\hat{\sigma}_{ep}^2}$ et $\hat{\sigma}_{ep}^2 = \hat{\sigma}^2 \times \left(1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_{T+h} - \bar{x})^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right)$

$$= 3{,}045 \times \left(1 + \frac{1}{30} + \frac{(10-8{,}667)^2}{61{,}2}\right)$$

intervalle de prévision

$$= 3{,}235$$

$\Rightarrow IP_{95\%}(y_{T+h}) = \left[y^p_{T+h} \pm \hat{\sigma}_{ep} \times t^{T-2}_{\alpha/2}\right] = [11{,}092 ; 18{,}459]$

Exercice 2 :

Le modèle d'importation suivant a été établi à partir d'une chronique de 10 années. (série temporelle)

$$\begin{cases} \hat{y}_t = -54{,}07 + 0{,}252\, x_t + \underbrace{u_t}_{=0} \\ \quad (11{,}96) \qquad (0{,}009) \text{ Les écarts types estimés des estimateurs} \\ R^2 = 0{,}96 \end{cases}$$

où y_t, x_t désigne respectivement les importations et la production industrielle brute

1/ Peut-on affirmer que la propension marginale à importer est significativement différente de 0 au risque de 1%.

2/ Les services de la planification utilise une propension marginale à importer égale à 0,23. Peut-on accepter cette valeur au seuil de 5% ?

1/ b : variation marginale des importations par rapport à la production industrielle brute / propension marginale à importer

$\Rightarrow$ Test de significativité individuelle de b

- $H_0 : b = 0$ contre $H_1 : b \neq 0$
- Sous H_0 vraie, $\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim St(T-2) = St(8)$
- Règle de décision : (Approche par la valeur critique)
  - Si $t_c = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| \leq t^{T-2}_{\alpha/2}$ alors H_0 est vraie
  - Si $t_c = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| > t^{T-2}_{\alpha/2}$ alors H_1 est vraie

Conclusion :

$t_c = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \left|\frac{0{,}252}{0{,}009}\right| = 28 \Rightarrow t^{T-2}_{\alpha/2} = t^{8}_{0{,}005} = 3{,}355$

$\Rightarrow t_c > t^{T-2}_{\alpha/2} \Rightarrow$ on accepte H_1 donc $b \neq 0$

2/ Test bilatéral : $H_0 : b = 0{,}23$ contre $H_1 : b \neq 0{,}23$

- Sous H_0 vraie, $\frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim St(T-2) = St(8)$
- Règle de décision : (Approche par la valeur critique)
  - Si $t_c = \left| \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \right| \leq t_{\alpha/2}^{T-2}$ alors H_0 est vraie
  - Si $t_c = \left| \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \right| \geq t_{\alpha/2}^{T-2}$ alors H_1 est vraie

Conclusion :

$$t_c = \left| \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \right| = \left| \frac{0{,}252 - 0{,}23}{0{,}009} \right| = 2{,}44$$

$$t_{\alpha/2}^{T-2} = t_{0{,}025}^{8} = 2{,}306 \Rightarrow t_c = 2{,}44 > t_{\alpha/2}^{T-2} = 2{,}306$$

$\Rightarrow$ on accepte $H_1 \Rightarrow b \neq 0{,}23$