

Partiel

[Durée : une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. On considère deux v.a. X, Y telles que $P(Y = k) = p^k$ pour tout $k \geq 0$ et

$$E[1_{X \leq t}/Y] = e^{p/Y} 1_{t \geq 0}.$$

- Montrer que X est une v.a. continue et calculer sa densité de probabilité f_X .
- Calculer $P(Y = k/X = t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.

Exercice 2. Montrer que le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs sur l'espace discret M est une chaîne de Markov homogène avec matrice de transition P si et seulement si, presque sûrement

$$E[f(X_{n+1})/X_n, \dots, X_0] = (Pf)(X_n)$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ le processus stochastique à valeurs sur \mathbb{N} donné par

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{si } X_n > 0 \\ U_{K_n} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

où $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite iid à valeurs sur \mathbb{N} et de loi $\mu(x) = P(U_1 = x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $K_n = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ et } X_k = 0\}$ est le nombre de zéros dans la suite (X_0, \dots, X_n) . Soit $T_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$.

- Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P donnée par

$$P(x+1, x) = 1 \quad \text{et} \quad P(0, x) = \mu(x) \quad x \in \mathbb{N}.$$

- La chaîne est-elle irréductible? Soit $S_0 = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$. Calculer $P_0(S_0 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que 0 est un état récurrent et que $P_x(T_y < +\infty) = 1$ pour tout $x, y \in \mathbb{N}$.
- Soit $\varphi_{x,y}(t) = E_x[t^{T_y}]$ pour tout $t \in [0, 1]$. Montrer que $E_x[T_y] = \lim_{t \rightarrow 1} \varphi_{x,y}(t)$ (limite pour t que tends 1 de façon croissante) et que $\varphi_{x,y}(t) = d\varphi_{x,y}(t)/dt$.
- Montrer que $\varphi_{x,y}(t) = t \varphi_{x-1,y}(t)$ si $x \geq 1$ et $x > 0$ et calculer $\varphi_{x,y}(t)$ pour $x = y$.
- Montrer que, pour tout $y > 0$

$$\varphi_{0,y}(t) = \frac{z = y}{1 - \sum_{z < y} \mu(z) t^{z+1}}.$$

- Donner une formule pour $E_x[T_y]$.
- Soit $\mathbb{P}(x) = P(U_1 = x)$. Montrer que \mathbb{P} est une mesure invariante pour P et décrire l'ensemble de toutes les mesures invariantes pour P .
- Montrer que P admet une unique probabilité invariante si et seulement si $E[U_1] < +\infty$.
- Vérifier que si U_1 est intégrable on a $\varphi_{0,0}(t) = 1/E_0[S_0]$.
- Montrer que pour tout $x > 0$ on a $E_x[S_x] = x + E_0[T_x]$ et vérifier que si U_1 est intégrable alors $\mu(x) = 1/E_x[S_x]$ pour tout $x \geq 0$.