École Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information	Classe : 3ème Année
Année Universitaire : 2024-2025	Date : 11.01.2025
Examen de Statistique Bayésienne	**Durée : 1h 30**

Exercice 1 :

Partie I :

Dans la suite, on suppose que :

- $X = (X_1, ..., X_n)$ n observations indépendantes distribuées selon la loi $N(\theta, \sigma^2)$; σ^2 connue.
- π La loi à priori sur θ de la forme $\mathbb{N}(a, b^2)$

1. Déterminer la loi à postériori $L(\widetilde{\Theta}/(X_1, X_2, ..., X_n,) = (x_1, x_2, ..., x_n))$
2. Détermner $\delta^\pi(X_1, ..., X_n)$ l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.
3. Déterminer l'expression de l'estimateur Bayésien δ^π dans le cadre de la fonction perte L^1
4. Déterminer $\hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$

Partie II :

On pose par la suite :

$$C^\pi_{/x}(k) = \{\theta \in \Theta / \pi(\theta/x) \geqslant k\} = [\alpha_k, \beta_k]$$
$$k_\alpha(x) = sup\{k / \mathbb{P}^\pi(C^\pi_{/x}(k)/X = x) \geq 1 - \alpha\} = [\alpha_{k_\alpha}, \beta_{k_\alpha}]$$

1. Montrer que $\beta_{k_\alpha} = h + \sqrt{z} q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N(0,1)}$, avec a et z sont deux quantités à déterminer.
2. Montrer que $\alpha_{k_\alpha} = h - \sqrt{z} q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{N(0,1)}$

Exercice 2 :

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 est connue et que l'on cherche à estimer $\theta = \mu$.

1. Déterminer la loi de à priori de Jeffreys.
2. Montrer que $\pi(\mu / x_1 \to x_n) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x}_n - \mu)^2\right)$
3. En déduire la loi à posteriori $\pi(\mu / x_1 \to x_n)$ associée à la loi à priori de Jeffreys.
4. Déterminer la région H.P.D de niveau $1 - \alpha$ associée à la loi de à priori de Jeffreys.
5. Déterminer $I(\theta)$ dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et que l'on cherche à estimer $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Exercice 3 :

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon d'une variable aléatoire X, telle que :

$$P(X=1) = 1 - P(X=-1) = \theta, \text{ avec } \theta \in]0,1[$$

1. Montrer que l'on peut écrire la densité de X par rapport à la mesure de comptage sous la forme $f(x/\theta) = \theta^{ax+b}(1-\theta)^{cx+d}$, où lon explicitera les paramètres a, b, c et d. Calculer $E_\theta(X)$ et $\mathrm{Var}_\theta(X)$.
2. Calculer la loi a priori do Jeffreys associée que l'on notera π. On reconnaitra une loi usuelle.
3. Déterminer la loi a postériori assciée à la loi a priori de Jeffreys.
4. On considère la fonction de perte

$$L(\theta, a) = (\theta - a)^2 \sqrt{\theta(1-\theta)}$$

Calculer l'estimateur bayésien associé à π et à la fontion de perte L, on le notera $\hat{\theta_n}$.