

Théorie des sondages
 Série 1 : Sondage aléatoire simple

Exercice 1 Soit une variable Y définie sur une population de taille $N = 4$ individus.

i	1	2	3	4
Y	11	10	8	11

- Vérifier que $\mu = E[Y] = 10$ et $\sigma^2 = \text{Var}[Y] = 1.5$.
- On tire un échantillon de taille $n = 2$ sans remise, à probabilités égales.
 - Combien d'échantillons peut-on tirer ?
 - Calculer, pour chaque échantillon possible, sa moyenne \hat{Y}_{psr} et sa variance corrigée s_c^2 .
 - Donner la distribution de \hat{Y}_{psr} et s_c^2 . En déduire $E[\hat{Y}_{\text{psr}}]$, $\text{Var}[\hat{Y}_{\text{psr}}]$ et $\text{Var}[s_c^2]$.
 - Comparer et analyser les résultats obtenus.
- On tire, maintenant, un échantillon de taille $n = 2$ avec remise, à probabilités égales.
 Effectuer le même travail que pour le cas sans remise.

Exercice 2 Soit une population de 5 individus. On s'intéresse à une variable d'intérêt Y qui prend les valeurs

$$Y_1 = Y_2 = 1 \text{ et } Y_3 = Y_4 = Y_5 = \frac{8}{3}$$

On définit le plan suivant:

$$p(\{1, 2\}) = \frac{1}{2}, p(\{3, 4\}) = p(\{3, 5\}) = p(\{4, 5\}) = \frac{1}{6}$$

- Calculer les probabilités d'inclusion d'ordre 1 et 2.
- Donner la distribution de probabilité du π -estimateur et vérifier que cet estimateur est sans biais.
- Calculer $\text{Var}(\hat{T}_\pi)$

4. Calculer l'estimateur de la variance de \hat{T}_π . Cet estimateur est-il sans biais? Etait-ce prévisible?
5. On se propose d'estimer la racine carrée du total (\sqrt{T}) , par la racine carrée du π -estimateur $(\sqrt{\hat{T}_\pi})$. Donner la distribution de probabilité de cet estimateur.
6. Calculer l'espérance de $\sqrt{\hat{T}_\pi}$. Commenter.
7. Calculer sa variance.

Exercice 3 Exercice préliminaire aux principales méthodes de sondage (d'après Statistique inférentielle : Idées, démarches, exemples de Jean-Jacques Daudin, Stéphane Robin et Colette Vuillet).

La figure jointe contient une population de 100 cercles.

1. **Echantillonnage empirique** : Choisir arbitrairement 5 cercles distincts (en les marquant d'une croix par exemple). Sachant que les cercles mesurent 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm, 7cm, 8cm, 9cm et 10cm, calculer le diamètre moyen des cercles de votre sélection. On le notera d_1 .
2. **Echantillonnage aléatoire simple** : A l'aide d'un générateur (ou de la table) de nombres aléatoires, tirer un échantillon de 5 cercles et calculer le diamètre moyen des cercles de votre sélection. On le notera d_2 .
3. **Recensement** :
 - (a) Calculer la distribution du diamètre dans la population des 100 cercles.
 - (b) En déduire la vraie valeur du diamètre moyen D .
4. **Echantillonnage systématique** :
 - (a) A l'aide d'un générateur (ou de la table) des nombres aléatoires, tirer un nombre l compris entre 1 à 20.
 - (b) L'échantillon sera constitué par les cercles n° $l, l + 20, l + 40, l + 60$ et $l + 80$.
 - (c) Calculer d_3 , le diamètre moyen de l'échantillon.
5. **Echantillonnage stratifié** :
 - (a) Diviser la population des 100 cercles en deux catégories. Les 51 cercles dont le diamètre est 1cm, 2cm ou 3cm forment les petits cercles et les 49 dont le diamètre est compris entre 4cm et 10cm sont appelés les grands cercles.

- (b) Numéroté les petits cercles de 1 à 51 et, à l'aide d'un générateur (ou de la table) de nombres aléatoires tirer au hasard 3 cercles parmi les 51.
- (c) Numéroté les grands cercles de 1 à 49 et, à l'aide d'un générateur (ou de la table) de nombres aléatoires, tirer au hasard 2 cercles parmi les 49.
- (d) Nous obtenons ainsi un diamètre moyen pour les petits cercles et un diamètre moyen pour les grands cercles. En déduire un diamètre moyen d_4 de l'échantillon.

6. Echantillonnage par grappes

- (a) Regrouper arbitrairement les cercles par paquets de 5 cercles. On a ainsi 20 paquets que l'on numéroté de 1 à 20.
- (b) A l'aide d'un générateur (ou de la table) des nombres aléatoires, tirer 2 paquets parmi les 20.
- (c) Nous obtenons ainsi un diamètre moyen pour chacun des deux paquets. En déduire un diamètre moyen d_5 de l'échantillon.

7. Echantillonnage à deux degrés :

- (a) Regrouper arbitrairement les cercles par paquets de 10 cercles. On a ainsi 10 paquets que l'on numéroté de 1 à 10.
- (b) A l'aide d'un générateur (ou de la table) des nombres aléatoires, tirer un paquet parmi les 10, puis numéroté les cercles du paquet sélectionné de 1 à 10.
- (c) A l'aide d'un générateur (ou de la table) des nombres aléatoires, tirer dans le paquet sélectionné un échantillon de 5 cercles parmi les 10.
- (d) Calculer le diamètre moyen d_6 de l'échantillon.
- (e) Comparer $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ et D . Commenter.