Chap I : Théorèmes de Convergence

I - Rappel et notation :

Notations :

Soit X un ensemble qqe tq $X \neq \phi$

On note $\mathcal{P}(X)$: l'ensemble de toutes les parties de $X \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{A, A \subset X\}$

On appelle tribu toute sur X, toute partie T de $\mathcal{P}(X)$ ($T \subset \mathcal{P}(X)$) vérifiant les pptés suivantes :

- $\phi \in T$
- $\forall A \subset T$; $A^c = (X \setminus A) \in T$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élts de T ; alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

les elts de T sont appelés " ensemble mesurable" et la partie (X, T) " espace mesurable"

Une mesure sur (X, T) est une application : $\mu : T \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les deux pptés :

- $\mu(\phi) = 0$
- Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurable deux à deux disjoint, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Théorème de convergence monotone : (Beppo-Levi)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, tend vers f

$\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu$ tend en croissant vers $\int_X f \, d\mu$.

$$\lim_{n \to +\infty} \nearrow \left(\int_X f_n \, d\mu\right) = \int_X \left(\lim_{n \to +\infty} f_n\right) d\mu.$$

Corollaire :

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fct mesurables positives alors $\int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \, d\mu(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f \, d\mu$

Preuve :

Notons $g_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$ où g est positive, mesurable et croissante, on applique le TCM à la suite g_k ; $\lim_{k \to +\infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X \lim_{k \to +\infty} g_k \, d\mu$.

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu.$$

3/ Exemples:

Soit (X,T) un espace mesurable, $a \in X$, On rappelle la mesure de Diracena

$$\delta_a : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \longrightarrow \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le support de δ_a est reduit au singleton $\{a\}$

. δ_a est une mesure.

eneffet:

$\delta_a(\emptyset) = 0$ car $a \notin \emptyset$

δ_a est σ-additive càd si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de partie de X appartenant à T, 2à2 disjoints

Alors $\delta\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta(A_k)$

si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $a \in A_{n_0}$, $\delta_a(A_{n_0}) = 1$

$\delta_a(A_n) = 0$ si $n \neq n_0$

. $\forall n \neq n_0$, $a \notin A_n$, car $A_n \cap A_{n_0} = \emptyset$ (2à2 disjoint)

$\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$ car $a \in A_n$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(A_n) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \delta_a(A_k) + \delta_a(A_{n_0}) + \sum_{k \geq n_0+1} \delta_a(A_k) = 1$

. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \notin A_n$, alors $\delta_a(A_n) = 0$ et $a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

donc $\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(A_n) = 0$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} -2 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ 3 & \text{si } x \in]-1, 5] \\ 0 & \text{si } x \in]5, 20] \\ -1 & \text{si } x \in]20, +\infty[\end{cases}$$

$f = -2\chi_{]-\infty,-1]} + 3\chi_{]-1,5]} - \chi_{]20,+\infty[}$

$\chi = 1\!\!1$

Exemple 1 :

Soit $f : (X, T) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

mesurable et positive. Montrer que $\int_X f \, d\delta_a = f(a)$

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions étagées positive qui converge vers f. D'après Beppo-Levi

$$\int_X f \, d\delta_a = \int_X \lim_{n\to+\infty} h_n \, d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} \int_X h_n \, d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} h_n(a) = f(a)$$

Exemple 2 :

Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \gamma)$ où γ est une mesure de comptage.

$$\gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \longrightarrow \gamma(A) = \mathrm{Card}(A)$$

$$\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

Montrer que $\int_{\mathbb{N}} \mu \, d\gamma = \sum_{n\geq 0} \mu(n)$ (Exercice).

III - Lemme de Fatou et Théorème de Convergence dominée.

1- Lemme de Fatou :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fct mesurable sur X à valeurs dans $[0; +\infty[$ Alors :

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Rque : On pourra aussi démontrer que :

$$\overline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \overline{\lim} f_n \, d\mu$$

Preuve : Par def, la fct $\underline{\lim}_{m\to+\infty} f_n \left(\sim \lim_{m\to+\infty} \inf f_n\right)$ est la limite simple de la suite croissante des fct° g_p (mesurables positives) définie par

$$\forall x \in X, \quad g_p = \inf_{n\geq p} f_n(x)$$

d'après le théorème de cvgence monotone
$$\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{p\to+\infty} g_p \, d\mu = \lim_{p\to+\infty} \int_X g_p \, d\mu.$$

Or, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall m \geq p \quad g_p \leq f_n$

Par croissance de l'intégrale, on a $\int_X g_p \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$

Autrement dit : $\int_X g_p \, d\mu \leq \inf_{n \geq p} \int_X f_n \, d\mu$.

de sorte que $\lim_{p \to +\infty} \int_X g_p \, d\mu \leq \lim_{p \to +\infty} \inf_{n \geq p} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \inf \int f_n \, d\mu$.

Rque :

l'égalité n'est pas en général vérifiée.

Considérons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $X = [0,2]$ muni de la mesure de Lebesgue tq

$f_{2n} = \chi_{[0,1]}$

$f_{2n+1} = \chi_{]1,2]}$

Alors $g_p = \inf_{n \geq p} f_n(x) = 0 \to \forall p$; $\lim_{p \to +\infty} \int_{[0,2]} g_p \, dx = 0$

tandis que $\int_{[0,2]} f_n \, dx = 1$

2- Théorème de Convergence dominée ou Théorème de Lebesgue :

Soit (X, T) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fct° mesurables (réelle ou Complexe)

On suppose que • $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Converge μ pp vers une fct° f.

• $\exists g \in L^1$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ pp

Alors les fct° f_n et f sont intégrables et on a :

$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Remarque : On pourrait aussi montrer que

1- f est μ- intégrable

2- $\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$

Preuve :

1- Mq f est μ- intégrable

$|f_n(x)| \leq g(x)$ μ pp i.e $\forall n \in \mathbb{N}$; $\exists A_n \subset X / \mu(A_n^c) = 0$ et $\forall x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$

On pose $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, On a $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$

En passant à la limite on a : $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in A$.

$\mu(A^c) = \mu(\bigcup_n A_n^c) \leq \sum_n \mu(A_n^c) = 0$, par la suite $|f(x)| \leq g(x)$ μ pp

2- Mq $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

$$\int_X \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \leq \overline{\lim} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \overline{\lim} f_n \, d\mu.$$

↳ Fatou

or $\overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n = f$ μpp.

D'où $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

3- Mq $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$

$\forall x \in X$; $|f_n(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)| \leq 2|g(x)|$

$$0 \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_X |f_n(x) - f(x)| \leq \int_X \overline{\lim_{n\to+\infty}} |f(x) - f(x)| \leq 0$$

Exemple :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-n\sin^2 x} f(x) \, d\lambda(x)$

Corollaire : Serie d'intégrale :

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$

itq $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu$ est bien définie. Alors

- des fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$; $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et f_n sont μ-intégrables.
- $\int_X \sum_{n\geq 1} f_n \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n \, d\mu$.

Preuve :

On pose $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$; $|f_n| \geq 0$ Alors d'après le TCM

$$\int g = \int \sum_{n\geq 1} |f_n| = \sum_{n\geq 1} \int |f_n| < \infty$$

d'où $\sum |f_n|$ est μ-intégrable, on applique pour le reste le TCD

III - Conséquences du TCD

1- Continuité sous le signe intégrale.

Théorème :

Soit (X, T, μ) un espace mesuré et G un ouvert de $\mathbb{R}$ avec $a \in G$

Soit $f : G \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall x \in X ;\ f(\cdot, x) : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ t \longrightarrow f(t,x) \end{array}$ est continue en a.

- $\forall t \in G ;\ f(t, \cdot)\ \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x \longrightarrow f(t,x) \end{array}$ mesurable sur (x, t)

- $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, T, \mu)$ tq ; $\forall t \in G,\ |f(t, \cdot)| \leq g\ \mu pp$ Alors la fonction

$H : t \longrightarrow \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est bien définie sur X et continue en a.

Preuve :

1) rq H est définie en a.

$\forall t \in G ;\ |f(t, \cdot)| \leq g\ \mu pp$ or $g \in \mathcal{L}^1(X, T, \mu)$ donc $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X, T, \mu)$

Alors $\int_X f(t,x)\, d\mu$ existe.

2) rq H est continue en a.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de G convergente vers a.

Montrons que $H(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} H(a)$

$H(a_n) = \int_X f(a_n, x)\, d\mu(x)$

$\forall n \in \mathbb{N} ;\ |f(a_n)| \leq g \in \mathcal{L}^1(X, T, \mu)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a, x)$ car $\forall x,\ f(\cdot, x)$ continue en a.

Théorème de convergence dominé à la suite de fct° $(f(a_n, x))_n$ qui

converge vers $f(a,x)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int f(a_n, x)\, d\mu(x) = \int f(a,x)\, d\mu(x)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} H(a_n) \longrightarrow H(a)$

2- Derivation sous le signe integrale:

Théoreme :

soit (X, T, μ) un espace mesuré , G un ouvert de $\mathbb{R}$:

$$f : G \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,x) \longrightarrow f(t,x) \text{ tq}$$

- $\forall x \in X$, $f(\cdot,x) : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longrightarrow f(t,x)$ est derivable sur G.

- $\forall t \in G$, $f(t,\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(t,x)$ est integrable sur (X, T, μ)

- $\exists g \in \mathcal{L}^1$ tq $\forall t \in G$, $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ μ pp.

Alors $\forall t \in G$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est integrable sur (X, T, μ) et la fonctions

$$H : G \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow H(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$$

est derivable sur G et on a $\forall t \in G$; $H'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$

Coll :

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_X f(t,x)\, d\mu(x)\right] = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\, d\mu(x)$$

Preuve.

Soit $t_0 \in G$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls qui converge vers 0

On pose: $\varphi_n(x) = \dfrac{f(t_0 + h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n}$

$|\varphi_n(x)| \leq g(x)$ μpp d'après le théoreme d'accroissement finis

$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ μpp.

D'après le TCD on a : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{F(t_0 + h_n) - F(t_0)}{h_n} = \lim_{n \to +\infty} \int \varphi_n(t)\, d\mu(x)$

$= \int \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t)\, d\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(t_0, x)\, d\mu(x)$.

IV Applications aux integrales impropres et aux Series:

Proposition.

soit f une fonction localement Reimann integrable sur $\mathbb{R}$. (ie $\int_a^b f(x)\,dx$ $\exists$ et $< \infty$ $\forall a <$

On dit que L'integrale :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est Convergente $\iff \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, dx$ $\exists$ et $< +\infty$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente.

Proposition :

Soit f une fonction localement Reimann integrable, borelienne. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est abs convergente. ssi $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ i.e f est Lebesgue integrable.

Dans ce cas : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda(x)$

Proposition : (PI)

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable au sens de Reimann et mesurable borélienne

Alors f est Lebesgue integrable sur $[a,b]$ et on a : $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque :

On considère $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ un espace mesurable. on définit la mesure de Comptage γ sur $\mathbb{N}$ tq $\gamma(\{n\}) = 1$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou Complexe :

$$a : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ ou } (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$$

$n \longrightarrow a_n$ est une fonctions mesurable.

Si $a_n \geqslant 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\int_{\mathbb{N}} a_n\,d\gamma = \sum_n a_n$

Ce qui implique que $L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \gamma)$ est un espace des series absolument Convergentes et $\int_{\mathbb{N}} a\,d\gamma = \sum_n a_n$

Proposition :

Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres réels ou Complexes tq

- $a_{n,p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_p \quad \forall p \in \mathbb{N}$.
- $|a_{n,p}| \leqslant b_p \quad \forall n,p$ et $\sum b_p$ Converge.

Alors La serie $\sum_p a_{n,p}$ et $\sum_p a_p$ sont abs convergentes et on a :

$$\sum_p a_p = \lim_{n\to+\infty} \sum_p a_{n,p}.$$