Devoir
Processus stochastique

Ex2:

$(Y_n)_{n\geqslant 1}$ iid $\hookrightarrow \mathcal{B}er(p)$

$X_0 = 0 \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad n \geqslant 1$

1- Mq $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ P ps

$\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \overline{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(Y_1) = p$ P ps

$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega / \frac{X_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p\}$ $P(\tilde{\Omega}) = 1$

$\omega \in \tilde{\Omega} \quad X_n(\omega) \underset{+\infty}{\sim} np \longrightarrow +\infty$, càd:

$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ \forall\, \omega \in \tilde{\Omega}$ et $P(\tilde{\Omega}) = 1$

DL $= X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ P ps

2- $y \in \mathbb{N} \quad T_y = \inf\{n \geqslant 0 / X_n = y\}$

T_y est un t.a % $(\mathcal{F}_n^Y)_{n\geqslant 0}$

$y = 0 \qquad T_y = 0$

$y \in \mathbb{N}^* \qquad T_y = \inf\{n \geqslant 1 / X_n = y\}$

X_n et $\mathcal{F}_n^Y$-mesurable

$\mathcal{F}_n^Y = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \quad n \geqslant 1$

$X_0 = 0$ et $\mathcal{F}_0^Y$-mesurable

$\mathcal{F}_0^Y = \{\phi, \Omega\}$

$A = \{y\} \in \beta(\mathbb{R})$

$(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n^Y)_{n\geqslant 0}$

$A = \{y\} \overset{+}{\in} \beta(\mathbb{R})$

$(T_y = n) = (X_1 \neq y ; \ldots , X_{n-1} \neq y ; X_n = y)$

$= \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^{-1} \left(\underbrace{\{y\}^c \times \cdots \times \{y\}^c \times \{y\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}} \right)$

Y

$\in \mathcal{F}_n^Y \longrightarrow \beta$

X est β-mesurable

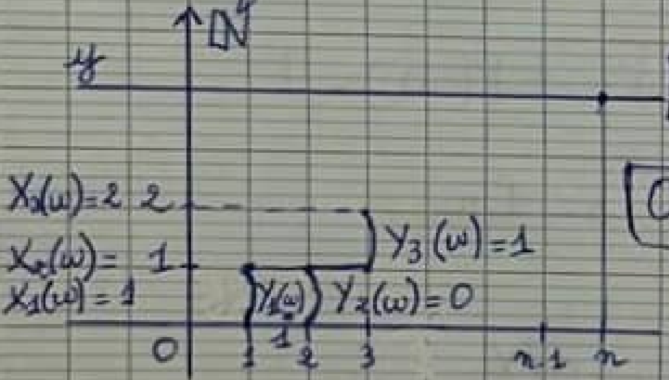
$X : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{A})$

$\forall A \in \mathcal{A} \quad X^{-1}(A) \in \beta$

2.b. Mq $T_y < +\infty$ P ps $\Leftrightarrow P(T = +\infty) = 0$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0, \ U_n > A$

On fixe $\omega \in \Omega$ $\quad \inf \phi = +\infty$



$\boxed{X_{n+1} - X_n \in \{0,1\}}$

$\boxed{0 \leq X_n \leq X_{n+1}}$

temps

Trajectoire $\quad T = \inf\{n \geq 1 / X_n = y\}$

$\omega \in \tilde{\Omega}, \ \tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega / X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty\} \quad P(\tilde{\Omega}) = 1$

$y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists n_0(\omega) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \ X_n(\omega) > y$

$\Rightarrow T_y(\omega) < +\infty$ et $P(\tilde{\Omega}) = 1$

$\Rightarrow P(T_y < +\infty) = 1 \quad (T < +\infty) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (T = n)$

$X_{n_0}(\omega) > y \Rightarrow T(\omega) \leq n_0$

3. $M_n = X_n - np \qquad |X_n| = |\sum_{k=1}^{n} Y_k|$

. M_n est $\mathcal{F}_n^Y$-mesurable car X_n est $\mathcal{F}_n^Y$-mesurable

. $|M_n| \leq |X_n| + np \leq n + np \in L^1(P) \Rightarrow E(|M_n|) < +\infty$

. $M_{n+1} - M_n = Y_{n+1} - p$

$E(M_{n+1} - M_n / \mathcal{F}_n^Y) = E(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n^Y) - p$

$\underset{Y_{n+1} \perp \mathcal{F}_n^Y}{=} E(Y_{n+1}) - p = p - p = 0$

$(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

$E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n^Y) = E(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k - (n+1)p / \mathcal{F}_n^Y)$

$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} Y_k} + \underbrace{E(Y_{n+1} / \mathcal{F}_n^Y)}_{\substack{E(Y_{n+1}) \\ \| \\ p}} - np - \cancel{p}$

$= M_n.$

$\left.\begin{array}{l}(M_n)_{n\geq 0} \text{ est une martingale} \\ \oplus \\ T_y \text{ est un ta}\end{array}\right) \Rightarrow (M_n^T)_{n\geq 0}$ est une martingale

4 - En admettant que $E(T_y) < +\infty$.
Mq $E(T_y) = \frac{y}{p}$)

$\Delta M_n = M_n - M_{n-1} = X_n - np - X_{n-1} - (n-1)p$
$= Y_n - p$

$|\Delta M_n| \leq |Y_n| + p \leq p + 1$

$E(M_T) = E(M_0) = 0$
$M_T = X_T - T_q = y - T_q$

$E(M_T) = y - E(T).p = 0 \Rightarrow E(T) = \frac{y}{p}$

$E(Z/Y) = E(Z/Y=0)\, 1_{(Y=0)} + E(Z/Y=1)\, \underbrace{1_{(Y=1)}}_{Y}$

$F_Y(z) - F_Y(1)$
$= 1 - e^{-z} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-z}$

$\underbrace{E(1_{(Z\leq z)} \cdot Z)}_{\int_1^z z e^{-z} dz}$

$E(Y/Z) = E(1_{(0\leq Z\leq z)}/Z)$
$= Y$

$|M_n| \leqslant K \qquad (M_n)_{n \geqslant 1}$ martingale

$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1})$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable

$|X_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2K}{k} \in L^1(P)$

$E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) = E\left(\frac{1}{n+1} (M_{n+1} - M_n)/\mathcal{F}_n\right)$

$= \frac{1}{n+1} E(\underbrace{M_{n+1} - M_n / \mathcal{F}_n}) = 0$