Chap II : Espaces Produits
Tribus Produits , Mesures Produits

Rappel : Mesure σ-finie

Une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ est σ-finie s'il existe une suite croissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ tq

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mu(X_n) < +\infty$$

Déf : Tribu Produit

soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ 2 espaces mesurables.

La tribu produit $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ sur $X_1 \times X_2$ est définie par :

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \sigma(\{A_1 \times A_2 / A_1 \in \mathcal{M}_1, A_2 \in \mathcal{M}_2\})$$

Rq :

On munit l'ensemble X de la tribu engendré par les pavés de la forme $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ où $A_i \in \mathcal{M}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Notations :

exemple :

- un pavé sur $\mathbb{R}^2$ est le produit cartésien de 2 intervalle bornées, ex : une pavé fermé

$$P = [a,b] \times [c,d]$$

- $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n$ une tribu produit sur $X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \dots \times X_n$

et on note : $\mathcal{M} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$

Rq : $\mathcal{M}$ est la plus petite tribu sur X rendant mesurables les applications coordonnées f_i $(i = 1, \dots, n)$ de X dans $(X_i, \mathcal{M}_i)$

$$f : E \longmapsto X_1 \times \dots \times X_n$$
$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Exemple :

si $\forall i$, $X_i = \mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_i = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (tribu borélienne de $\mathbb{R}$), alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad (n \text{ fois})$$

et $\boxed{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}}$

Théorème : mesure Produit

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés où μ_1 et μ_2 sont 2 mesures σ-finies

On munit $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$:

1) $\exists$ une unique mesure μ tq
$\forall A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$
$$\boxed{\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)}$$
Cette mesure est également σ-finie et on la note $\boxed{\mu = \mu_1 \otimes \mu_2}$

2) $\forall E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$
$$\mu(E) = \int_{X_1 \times X_2} \chi_E \, d\mu.$$
$$= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_E(x,y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$
$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \chi_E(x,y) \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

. Pour montrer qu'une propriété est satisfaite par les éléments d'une tribu, on a souvent recours à une décomposition de la notion de tribu en 2 sous-notions.

. Déf:
Soit X un ensemble
1) On dit que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est un Π-système, si $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie ($\forall A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$)
2) On dit que $\mathcal{C}$ est une λ-système si: . $X \in \mathcal{C}$

- $\mathcal{C}$ est stable par différence propre (càd, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}$
$A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{C}$)
- $\mathcal{C}$ est stable par union croissante dénombrable.
($(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de $\mathcal{C}$
$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$)

Théorème d'unicité de mesure :

Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ et $\mathcal{C} \in \mathcal{M}$ est un Π-système qui engendre $\mathcal{M}$ tq
$\forall A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$
1) Si $X \in \mathcal{C}$, alors $\mu = \nu$ et ce sont des mesures finies
2) Si X est l'union d'une suite croissante, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}$, alors $\mu = \nu$ et ce sont des mesures σ-finies

---

. Lemme Π-λ Dynkin
1) Une intersection quelconque de λ-système est un λ-système.
$\exists$ donc un plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$ noté $\lambda(\mathcal{C})$

$\lambda(\mathcal{C})$: l'intersection de tout les λ-systèmes contenant $\mathcal{C}$

2) Un ensemble de parties $\mathcal{C}$ de X est une tribu SSi c'est à la fois un π-système et un λ-système.

3) Lemme π-λ Dynkin:

. Le plus petit λ-système contenant un π-système, $\mathcal{C}$ est la tribu $\sigma(\mathcal{C})$.

Autrement dit, si $\mathcal{C}$ est un π-système alors $\lambda(\mathcal{C})$ l'est aussi et donc

$$\sigma(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})$$

. Preuve:

2) "$\Rightarrow$" Une tribu est évidemment un π-système est un λ-système

"$\Leftarrow$" Supposons, réciproquement que $\mathcal{C}$ est un π-système et un λ-système.

Montrons que c'est une tribu.

. $\mathcal{C}$ est un λ-système donc $X \in \mathcal{C}$ et si $A \in \mathcal{C}$, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{C}$; alors $\mathcal{C}$ est stable par passage au complémentaire.

. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}$ alors $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est un π-système. et vu qu'on a prouvé la stabilité par passage au complémentaire.

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c = B_n \in \mathcal{C}$$

. On en déduit que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{C}$.

. Comme $\mathcal{C}$ est λ-système,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}.$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est une tribu

3) idée de la preuve:

D'après 1) et 2), il suffit de montrer que $\lambda(\mathcal{C})$ est un π-système càd, $\forall A, B \in \lambda(\mathcal{C})$, $A \cap B \in \lambda(\mathcal{C})$.

En effet, on a toujours

$$\mathcal{C} \subset \lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$$

. Si de plus $\lambda(\mathcal{C})$ est un π-système, d'après 2) c'est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et donc contenant $\sigma(\mathcal{C})$.

d'où $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$

L'idée est de montrer que $\lambda(\mathcal{C})$ est un π-système consiste à fixer A et faire varier B puis varier A, en considérant,

$$\mathcal{L}_A = \{B \in \lambda(\mathcal{C}), A \cap B \in \lambda(\mathcal{C})\}.$$

· Lemme de classe monotone (Rappel)

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures finies sur espace mesurable $(X, \mathcal{M})$.
Soit $\mathcal{C}$ un π-système sur X.
Si μ_1 et μ_2 coincident sur $\mathcal{C}$, alors elles coincident sur $\sigma(\mathcal{C})$

· Corollaire:

Soient μ_1 et μ_2 2 mesures positives σ-finies, sur $(X, \mathcal{M})$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ un π-système tq $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}$

On suppose que:

1) $\forall A \in \mathcal{C} : \mu_1(A) = \mu_2(A) < +\infty$

2) $\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments dans $\mathcal{C}$ tq $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $\mu_i(X_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Alors $\boxed{\mu_1 = \mu_2}$

· Lemme : Mesures de sections horizontales et verticales :

· Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 2 espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont 2 mesures σ-finies.

On munit ~~$X_1 \times X_2$~~ $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.

Soit $E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

1) $\forall (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$, les sections horizontales et verticales

$$H_{a_2}(E) = \{x \in X_1 ; (x, a_2) \in E\}$$

et

$$V_{a_1}(E) = \{y \in X_2 ; (a_1, y) \in E\}.$$

sont mesurables dans $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ respectivement.

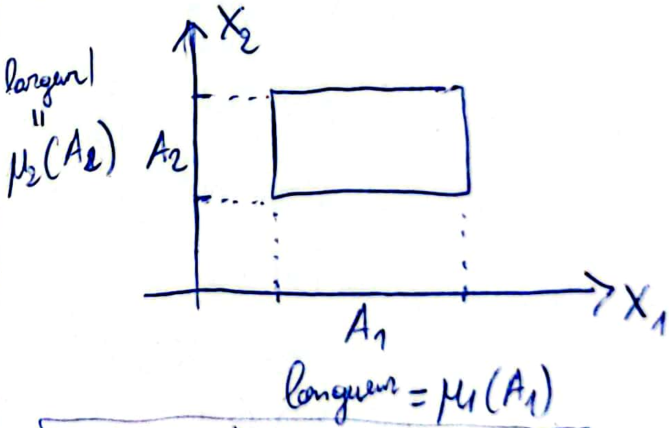
2) Les applications "mesures des sections horizontales et verticales"

$$V_E : X_1 \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$a_1 \longmapsto \mu_2(V_{a_1}(E))$$

et

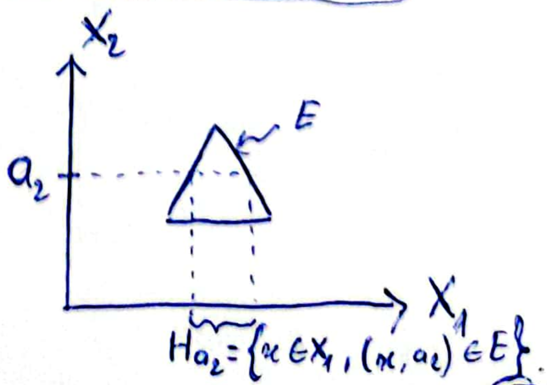
$$H_E : X_2 \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$a_2 \longmapsto \mu_1(H_{a_2}(E))$$

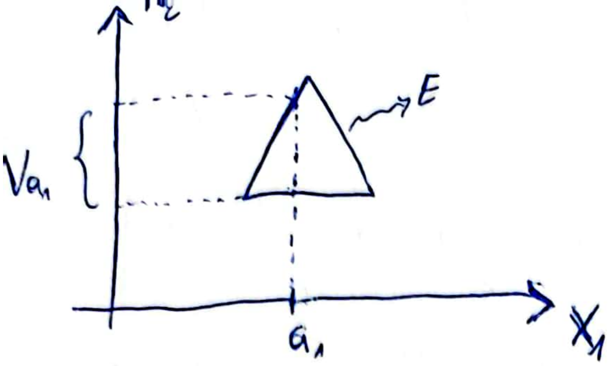
sont mesurables.



$$\boxed{\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)}$$

Ex:





$V_{a_1} = \{y \in X_2, (a_1, y) \in E\}$

$$\boxed{\mu(E) = \int_{X_2} \mu_1(H_{a_2})\, d\mu_2(y)}$$

<u>Preuve</u> : (idée de la preuve)

1) Dans le cas où les singletons de X_1 et X_2 sont mesurables, le résultat est immédiat.

. Les sections :

$$H_{a_2}(E) \times \{a_2\} = E \cap (X_1 \times \{a_2\})$$

et

$$V_{a_1}(E) \times \{a_1\} = E \cap (X_2, \{a_1\})$$

sont mesurable pour la tribu $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

. Dans le cas général, on montre que $\forall a_1 \in X_1$ et $\forall a_2 \in X_2$.

les ensembles :

$$\{E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 ; V_{a_1}(E) \in \mathcal{M}_2\}$$

et $\{E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 ; H_{a_2}(E) \in \mathcal{M}_1\}$.

sont des tribus sur $X_1 \times X_2$, contenus dans $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ qui contiennent $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$. Elles sont donc égales à $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.

2) On montre que les ensembles

$$\{E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 ; V_E : a_1 \longmapsto \mu_2(V_{a_1}(E))\}$$

et

$$\{E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 ; h_E : a_2 \longrightarrow \mu_1(H_{a_2}(E))\}$$

sont des λ-systèmes, contenant le π-système générateur $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.

On applique alors le lemme π-λ-Dynkin.

. <u>Démonstration : du</u> $\boxed{\text{Théorème mesure produit}}$

On veut montrer que $\exists!$ mesure μ tq :

$\forall A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

1) <u>Unicité</u> :

Soient μ et $\tilde{\mu}$ deux mesures σ-finies sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$ tq : (P)

$$\boxed{\mu(A_1 \times A_2) = \tilde{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)}$$

. Soient $(X_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites croissantes de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ respectivement

tq :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \mu_1(X_{1,n}) < +\infty \\ \mu_2(X_{2,n}) < +\infty \end{cases}$$

et $X_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} X_{1,n}$, $X_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} X_{2,n}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mu_1(X_{1,n}) \cdot \mu_2(X_{2,n}) < +\infty.$$

et $X_1 \times X_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} X_{1,n} \times X_{2,n}$

Donc, si une telle mesure existe elle est σ-finie

On pose : $C_n = X_{1,n} \cdot X_{2,n}$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mu(C_n) = \tilde{\mu}(C_n) < +\infty$$

$$C_n \subset C_{n+1}$$

et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = X_1 \times X_2$

Soit $\mathcal{C}$ la famille des pavés C de la forme $C = A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathcal{M}_i$

$\mathcal{C}$ est un π-système tq

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$$

La propriété $(\mathcal{P})$ montre que μ et $\tilde{\mu}$ coïncident sur $\mathcal{C}$, de plus, $C_n \in \mathcal{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc d'après le théorème d'unicité de mesure, $\boxed{\mu = \tilde{\mu}}$

. Existence :

Les formules integrales nous assurent l'existence de la mesure μ.

Definissons par :

$$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(V_x(E))\, d\mu_1(x)$$

Cette définition a un sens en vertu du lemme des sections horizontales et verticale.

Si E un produit $(E = E_1 \times E_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$ on a évidemment, $V_x(E) = \phi$, si $x \notin E_1$

et $V_x(E) = E_2$, si $x \in E_1$, donc :

$$\mu(E) = \int_{X_1} \mu_2(V_x(E))\, d\mu_1(x)$$

$$= \int_{X_1} \mu_2(E_2) \chi_{E_1}(x)\, d\mu_1(x)$$

$$= \mu_2(E_2) \int_{X_1} \chi_{E_1}(x)\, d\mu_1(x)$$

$$= \mu_1(E_1) \cdot \mu_2(E_2)$$

. μ est bien une mesure

Si $E = \phi = \phi \times \phi$, on obtient

$$\mu(\phi) = 0.$$

La σ-additivité est une conséquence de la σ-additivité de μ_2 et du théorème de convergence monotone :

Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles deux à deux disjointes dans $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

alors $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)$

$$= \int_{X} \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_x(E_n)\right) d\mu_1(x)$$

$$= \int_{X_1} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_x(E_n))\, d\mu_1(x)$$

$$\underset{TCM}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{X_1} \mu_2(V_x(E_n))\, d\mu_1(x)$$

$$= \sum \mu(E_n)$$

II) Théorème de Fubini pour les intégrales

• Théorème de Fubini - Tonelli

Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont deux σ-finies.

Soit $f : X_1 \times X_2 \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable et positive.

On regarde f comme une fonction de 2 variables (x_1, x_2) de $X_1 \times X_2$,

Alors :

1) Pour presque tous les a_1 dans X_1 et presque tous les a_2 dans X_2, les fonctions,

$$f(\cdot, a_2) : X_1 \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$x_1 \longmapsto f(x_1, a_2).$$

et

$$f(a_1, \cdot) : X_2 \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$x_2 \longmapsto f(a_1, x_2).$$

sont mesurables positives sur X_1 et X_2 respectivement

2) Les fonctions $F_1 : X_1 \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ et $F_2 : X_2 \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$, définie par :

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

et

$$F_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

sont mesurables positives sur X_1 et X_2 respectivement.

3) On l'égalité des 3 intégrales suivants :

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$
$$= \int_{X_1} F_1(x_1)\, d\mu_1(x_1)$$
$$= \int_{X_2} F_2(x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

Autrement dit ;

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$
$$= \underbrace{\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)}_{I_1}$$
$$= \underbrace{\int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)}_{I_2}$$

> **Rq :** L'existance des 2 intégrales I_1 et I_2 n'implique pas l'intégrabilité de f sur $X_1 \times X_2$

Exemple 1 :

$A = [0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}^2$ (tribu boréliens sur $\mathbb{R}^2$)

· soit $f : A \longmapsto \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Calculer I_1

2) Calculer I_2

3) Conclure

· rép :

1) $I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$

· $\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} d\lambda(y) = \left[\frac{y}{y^2+x^2} \right] = \frac{1}{1+x^2}$

donc $I_1 = \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

2)

· $I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$

· $\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} d\lambda(x) = \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_0^1$

$= -\dfrac{1}{1+y^2}$

donc $I_2 = \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{-1}{1+y^2} dy$

$= \left[-\arctan y \right]_0^1 = -\dfrac{\pi}{4}$.

3) $I_1 \neq I_2$

$\Rightarrow f$ n'est pas intégrable sur A.

Rq :

Compte tenu du lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}$ et en vertu du théorème du Fubini - Tonelli,

on note :

· pour $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt$$

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(t) \, dt$$

· pour $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, d\lambda_2(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dx \, dy$$

· pour $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda_3 = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) \, d\lambda(x,y,z) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz.$$

· Exemple 2 :

Le théorème de Fubini - Tonelli permet de calculer des aires (dans $\mathbb{R}^2$) et des volumes (dans $\mathbb{R}^3$)

1) Si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, en découpant E en tranches verticales,

$$E = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} E_x$$

c'est à dire,

$$\chi_E(x,y) = \chi_{E_x}(y)$$

On a:

dimension 2

$$\boxed{\lambda_2(E)} = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x,y)\, d\lambda_2(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{E_x}(y)\, d\lambda_1(y) \right) d\lambda_1(x)$$

$$= \boxed{\int_{\mathbb{R}} \lambda_1(E_x)\, d\lambda_1(x)}$$

dimension 1

. Donnons un exemple du calcul de l'aire du domaine bordé par une ellipse.

Soit $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ bordé par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

. Pour calculer sa surface, on coupe par exemple par tranches verticales :

$$E_x = \left\{ y \in \mathbb{R}, |y| \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}$$

$$= \left[-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} ; b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right]$$

$x \in [-a, a]$

. $\lambda_2(E) = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x,y)\, dx\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{E^x}(y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x)\, \lambda_1(E_x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x)\, 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

$$= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

chang var
$x = a\sin\theta$
$dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta$$

$$= \pi a b$$

2) De même, si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$,

$E = \bigcup_{z \in \mathbb{R}} E^z$, càd

$\chi_E(x,y,z) = \chi_{E^z}(x,y)$, on a:

$$\lambda_3(E) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_E(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z)$$

$$= \int \left[\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E^z}(x,y,\cancel{z})\, d\lambda_2(x,y) \right] d\lambda_1(z)$$

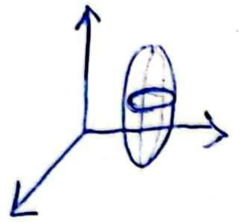
$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(E^z)\, d\lambda_1(z)$$

. <u>Volume de l'ellipsoïde</u> :

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Pour chaque $z \in [-c, c]$, notons E^z l'ellipse sur $\mathbb{R}^2$.

$$E^z = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$



de surface

$$\lambda_2(E^z) = \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

d'après 1)

Alors $\lambda_3(E) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi_E(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

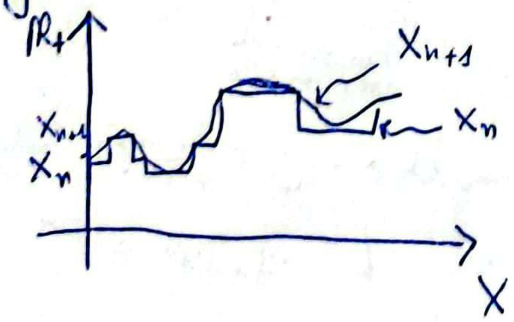
$$= \int_{-c}^{c}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}\chi_{E^z}(x,y)\,dx\,dy\right)dz$$

$$= \int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{4}{3}\pi abc$$

Rappel : théorème de l'approximation par des fonctions étagées mesurables positives.

Soit $f : (X, T) \mapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Il existe une suite croissant $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'ensemble des fonctions mesurables positives qui converge vers f simplement.

De plus, si f est bornée, on peut construire (X_n) de sorte que la convergence soit uniforme sur X.



• **Démonstration du théorème de Fubini – Tonelli :**

- La démonstration repose sur la construction de l'intégrale.

Quitte à compléter la fonction f par 0 là où elle n'est pas définie, on peut supposer que f est définie partout.

1) Soit $(a_1, a_2)\in X_1\times X_2$, soit $t\in\mathbb{R}_+$

On note,

$$E = \{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2,\ f(x_1,x_2)\le t\}$$

D'après le lemme des sections horizontales et verticales, les ensembles $\{x_1\in X_1 ;\ f(x_1,a_2)\le t\}$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$ et $\{x_2\in X_2 ;\ f(a_1,x_2)\le t\}$ sont mesurables dans X_1 et X_2 respec.

Ainsi, $f(\cdot, a_2)$ et $f(a_1,\cdot)$ sont mesurables.

2) Soit $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$

Montrons que $x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$ est mesurable

Soit $E\in\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2$

Pour $\boxed{f=\chi_E}$ et $x_2\in X_2$ fixée, on a :

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

$$= \int_{X_2}\chi_E(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

$$= \int_{X_2}\chi_{V_{x_1}}(x_2)\,d\mu_2(x_2) = \mu_2(V_{x_1})$$

qui est mesurable.

Pour $x_1 \in X_1$, fixée, on a :

$$F_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_1} \chi_E(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_1} \chi_{H_{x_2}}(x_1)\, d\mu_1(x_1)$$

$= \mu_1(H_{x_2})$ qui est mesurable d'après le lemme des sections.

. Une fois on a le resultat pour les fonctions indicatrices, on peut conclure $\forall$ les fonctions étagées positives d'après le théorème de l'approximation par des fonctions étagées mesurables positives.

On obtient donc, par linéarité, la mesurabilité des fonctions etagées positives.

(si c'est vrai pour les fonctions caracteristiques alors c'est vrai aussi pour les fonctions étagées positives)

Puis, par une limite croissante, on obtient la mesurabilité pour tout f positive.

3) Soit $E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$

Pour $f = \chi_E$

$$\mu(E) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(E) = \int_{X_1} \mu_2(V_{x_1})\, d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_2} \mu_1(H_{x_2})\, d\mu_2(x_2)$$

Par linéarité, on obtient l'égalité :

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

$$= \int_{X_1} F(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} F(x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

$\forall f$ étagée positive.

Par ~~linéarité~~ croissante, on obtient l'égalité $\forall f$ positive (en appliquant le théorème de Beppo-Levi).

. <u>Théorème de Fubini</u> :

Soient (X_1, T_1, μ_1) et (X_2, T_2, μ_2) deux espaces mesurés, où, μ_1 et μ_2 sont 2 mesures σ-finies.

Soit $f : X_1 \times X_2 \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction <u>intégrable</u> sur $X_1 \times X_2$.

1) Pour presque tout $x_2 \in X_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur X_1, pour presque tout $x_1 \in X_1$, la fonction $x_2 \longmapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur X_2

2) Les fonctions :

$$F_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

et

$$F_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

3) On a l'égalité suivante.

$$\int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\,d(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2)$$

$$= \int_{X_1} F_1(x_1)\,d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} F_2(x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

Autrement dit,

$$\int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\,d(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2)$$

$$= \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\cdot d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_2}\int_{X_1} f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)\,d\mu_2(x_2)$$

• <u>Preuve</u> :

1) $|f|$ est mesurable positive, on applique donc le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_1\times X_2} |f(x_1,x_2)|\,d(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2).$$

$< +\infty$ (car on a supposé que f est intégrable sur $X_1\times X_2$)

donc $\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2) < +\infty$ (PP)

L'autre assertion se montre de manière analogue.

2) On décompose $f = f^+ - f^-$

Pour presque tout x_1

$$\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

$$= \int_{X_2} f^+(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2) - \int_{X_2} f^-(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$$

$x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$ est bien définie sauf sur un ensemble négligeable

$$\int_{X_1} |F_1(x_1)|\,d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_1} \left|\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right| d\mu_1(x_1)$$

$$\leq \int_{X_1}\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2)\,d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_1\times X_2} |f(x_1,x_2)|\,d(\mu_1(x_1)\otimes\mu_2)(x_1,x_2)$$

$$< +\infty$$

alors $F(x_1) = \int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)$

est dans $\mathcal{L}^1(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$

3) On décompose $f = f^+ - f^-$

On applique le théorème de Fubini-Tonelli

CQFD

Exemple 1 :

Soit $(x,y) \in [2,3] \times [0,1]$

et μ est la mesure de Lebesgue

Calculer $\int_{[2,3]\times[0,1]} xy \, d(\mu\otimes\mu)(x,y)$?

. La mesure de Lebesgue est σ-finie

. $(x,y) \longmapsto xy \, \mathbb{1}_{[2,3]\times[0,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$

donc on applique le théo de Fubini

$$\int_{[2,3]\times[0,1]} xy \, d\mu^2(x,y)$$

$$= \int_{[0,1]} \left[\int_{[2,3]} xy \, d\mu(x) \right] d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} y \left(\int_{[2,3]} x \, d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \frac{5}{2} y \, d\mu(y) = \frac{5}{4}$$

Exemple 2 :

Calculer $\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ m\in\mathbb{N}}} \frac{1}{2^n 3^m}$?

une serie est une integrale pour la mesure de comptage, et la mesure de comptage ~~est~~ sur $\mathbb{N}$ est σ-finie

$$\sum_{0} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{3^m} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{2}{3^m}$$

$$\sum_{0} \frac{2}{3^m} = 2 \frac{1}{1-1/3} = 3$$

application du Th de Fubini a donné

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ m\in\mathbb{N}}} \frac{1}{2^n 3^m} = 3$$

Remarque :

1) Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction mesurable $f : X_1 \times X_2 \longmapsto \mathbb{R}$, très souvent on applique le théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ pour montrer que l'integrale de $|f|$ sur $X_1 \times X_2$ est finie.

Ensuite seulement, on applique le th de Fubini pour calculer l'integrale de f sur $X_1 \times X_2$.

2) Si $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ avec f_1 et f_2 integrables sur $X_1 \times X_2$ respec. (on dit que x_1 et x_2 sont des variable separées), alors :

$$\int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2) \, d(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2)$$

$$= \int_{X_1} f_1(x_1) \, d\mu_1(x_1) \times \int_{X_2} f_2(x_2) \, d\mu_2(x_2)$$

III) Changement de variable :

Déf ①:

. Si U et V 2 ouverts de $\mathbb{R}^k$ et Φ une fonction de U dans V, tq

$$\Phi : U \in \mathbb{R}^k \longmapsto V \in \mathbb{R}^k$$
$$x = (x_1, \dots, x_k) \longmapsto \Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x))$$

On dit que Φ est un $\boxed{\mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme}}$ de U dans V si :

- Φ est une bijection de U dans V.
- Φ et Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Déf ②:

Soit Φ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ tq on peut écrire : $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$

Soit a un point de U où Φ est différentiable.

La matrice Jacobienne de Φ en a est la matrice à p lignes et à n colonnes définie par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a) & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $n = p = k$, le déterminant de la matrice Jacobienne s'appelle, <u>déterminant Jacobien de Φ en a</u> :

On note :

$$J_\Phi(x) = \det\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \le i,j \le k}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & \ddots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k}(x) \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \end{vmatrix}$$

Déf ③:

Soit $h : (X, \mathcal{A}) \longmapsto (Y, \mathcal{B})$ une app mesurable et μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$ alors l'application :

$$(\mu_h)\, \nu : \mathcal{B} \longmapsto \mathbb{R}_+$$
$$B \longmapsto \nu(B) = \mu(h^{-1}(B))$$

est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, notée $\nu = \mu \circ h^{-1} = \mu_h$ est appelé <u>mesure image</u>.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure image ~~et~~ on introduit le th suivant :

Théorème :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soit } f : (Y, \mathcal{B} \longmapsto \mathbb{R}) \text{ mesurable.} \\ \text{Alors } f \text{ est intégrable par rapport à } \mu_h \text{ }\underline{\underline{\text{SSi}}}\text{ } f \circ h : X \longmapsto \mathbb{R} \text{ est intégrable, et on a} \\ \int_Y f(y) \cdot d\mu_h(y) = \int_Y f(y)\, d\mu \circ h^{-1}(y) \\ = \int_X f(h(x))\, d\mu(x) \end{array}}$$

Remarque :

La notion de mesure image est au cadre de la théorie des lois des variables aléatoires (v.a).

En effet, si X est une v.a définie

sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$, la loi de X n'est autre que la mesure image de $\mathbb{P}$ par X.

Preuve:

① vérifier que $\nu(B)$ est une mesure
② Démontrer que f est intégrable SSi $f\circ h$ est intégrable et que
$$\int_Y f \, d\mu_h = \int_X f\circ h \, d\mu$$

①. $\forall B \in \mathcal{B}, h^{-1}(B) \in \mathcal{A}$,

$h^{-1}(\phi) = \phi$

$\nu(\phi) = \mu(h^{-1}(\phi)) = \mu(\phi) = \phi$

• Puisque ν est à valeurs dans $[0, +\infty[$, il suffit de prouver que B_n est une suite d'élément disjoints de $\mathcal{B}$ alors

$$\nu\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \nu(B_n) \; ?$$

• On pose: $A_n = h^{-1}(B_n)$, alors les (A_n) sont 2 à 2 disjoints (car les B_n le sont aussi) et de plus:

$$h^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \bigcup_{n\geq 1} h^{-1}(B_n),$$

et puisque μ est une mesure, on en déduit que:

$$\nu\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) = \mu\Big(h^{-1}\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n\Big)\Big)$$
$$= \mu\Big(\bigcup_n h^{-1}(B_n)\Big)$$
$$= \sum_n \mu(h^{-1}(B_n)) = \sum_n \nu(B_n).$$

CQFD

#Code classroom 24cwuij

2) Si f est l'indicatrice d'un sous ensemble B dans $\mathcal{B}$

Mq $\int_X f \, d\mu_h = \int_X f\circ h \, d\mu$?

$$\cdot \int_Y f \, d\mu_h = \int_Y \chi_B \, d\mu_h = \mu_h(B)$$
$$= \mu \circ h^{-1}(B)$$

D'autre part, on a

$$\cdot \int_X f\circ h \, d\mu = \int_X \chi_B(h(x)) \, d\mu(x)$$
$$= \int_X \chi_{h^{-1}(B)}(x) \, d\mu(x) \qquad \begin{cases} h(x) \in B \\ x \in h^{-1}(B) \end{cases}$$
$$= \mu(h^{-1}(B))$$
$$= \mu \circ h^{-1}(B)$$

d'où l'égalité pour les fonctions indicatrices

$$\boxed{\chi_B(h(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(x) \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Théorème : Changement de variable dans $\mathbb{R}^k$:

Soient U et V 2 ouverts de $\mathbb{R}^k$ et $\phi : U \longmapsto V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Soit $f : V \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive (respec. intégrable) sur V. Alors la fonction $f \circ \phi . |J_\phi|$ est mesurable positive (respec. intégrable) sur U et on a :

$$\int_V f(x)\, d\lambda_k(x) = \int_U f(\phi(y)) |J_\phi(y)| \times d\lambda_k(y)$$

où $J_\phi(y)$ est le jacobien de ϕ en y.

Par conséquent, si f est mesurable positive (respec. intégrable) alors on a aussi :

$$\int_U f(\phi(y))\, d\lambda_k(y) = \int_V f(x) |J_{\phi^{-1}}(x)|\, d\lambda_k(x)$$

Exemple :

① Calculer $I = \int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2(x,y)$?

② Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$?

Solution :

① On pose : $\boxed{\begin{array}{l} \phi :]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[\longmapsto]0,+\infty[\times]0,+\infty[\\ (r,\theta) \longmapsto (\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\sin\theta}_{y}) \end{array}}$

$$J_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$I = \int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} e^{-((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)} r\, d\lambda_2(r,\theta)$$

$$= \int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} r e^{-r^2} d\lambda_2(r,\theta) = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\#\ \text{Le DS le } 08/12}$

② $I = \int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x^2} e^{-y^2} d\lambda_2(x,y)$

$f(x,y) = e^{-x^2}e^{-y^2}$ est mesurable, positive alors d'après Fubini-Tonelli

$$I = \int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,+\infty[} e^{-x^2} e^{-y^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

$$= \int_{]0,+\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x) \int_{]0,+\infty} e^{-y^2} d\lambda(y)$$

$$= I_1^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exemple :

Calculer l'intégrale

$$\int_{B(0,1)} e^{x_1^2+x_2^2} d\lambda_2(x_1,x_2) \ ?$$

$$\cdot \int_{B(0,1)^*} e^{x_1^2+x_2^2}\, d\lambda_2(x_1,x_2)$$

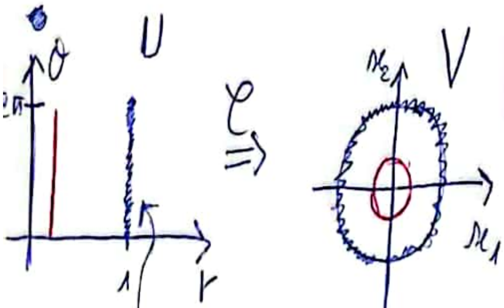
$$= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} r e^{r^2}\, d\lambda(r,\theta)$$

d'après Fubini - Tonelli

$$= \int_{[0,1]} r e^{r^2}\, d\lambda(r) \int_{]0,2\pi[} d\lambda(\theta)$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{r^2}\right]_0^1 2\pi$$

$$= \left(\frac{1}{2}(e-1)2\pi\right) = \pi(e-1)$$



· Cette ligne correspond par difféomorphisme au bord du cercle.

· La mesure de Lebesgue avec U donne la même chose.

· La mesure de Lebesgue ne donne pas la même chose avec V.

Rq : La longueur de ligne en rouge ne correspond pas au petit cercle en rouge.

$\Rightarrow$ on a besoin d'un facteur

$\hookrightarrow$ Jacobien

· Le jacobien $J_\phi(r,\theta)$ pondère la mesure de Lebesgue utilisé sur U et donne une nouvelle valeur applicable à V

$\rightarrow$ Plus on est près du centre du disque, plus la pondération est petite

$\Rightarrow$ c'est exactement r.

· <u>Lien avec le changement de variable de Riemann</u>

Soit ϕ une fonction strictement monotone de $[a,b]$ dans $[\phi(a),\phi(b)]$ et ϕ^{-1} défini, alors

$$\int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(y)\,dy.$$

· Si ϕ est strict $\nearrow$, alors ϕ' est la jacobienne de dimension 1.

· Si ϕ est strict. $\searrow$, alors $\phi(b) \leq \phi(a)$ et il est d'usage de permuter les bornes de l'intégrale et de multiplier par -1

$\Rightarrow$ Cela revient à remplir $\phi'(x)$ par $-\phi'(x)$, qui est $|\phi'(x)| = |J_\phi(x)|$

$\Rightarrow$ On retrouve le théorème

de changement de variable
par les cas $k=1$.