ÉCOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

2022-2023
Suites de VA

Département Statistique
1ère année

Série d'exercices N°2

Exercice 1

On considère la suite de variables aléatoires X_n mutuellement indépendantes, dont la loi de probabilité est définie par $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2} \\ P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Étudier la convergence en probabilité, puis en moyenne quadratique de X_n.

Exercice 2

Soit X_n une suite de variables aléatoires positives de densité

$$f_n(x) = ne^{-nx}$$

pour $x > 0$. Montrer que la suite X_n converge en moyenne quadratique vers zéro.

Exercice 3

Soit X_n une suite de variables aléatoires de loi géometrique de paramètre $p_n = \frac{\theta}{n}$ où θ est un nombre strictement positif.

Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre θ.

Exercice 4

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol.

Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, et selon les tarifs choisis, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent).

Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations.

S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%.

   On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre aléatoire de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.

   Donner la loi de S_n, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

2. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $P(S_n \leq 300) \geq 300$.

   En utilisant le théorème limite central (ou théorème de De Moivre-Laplace), proposez une solution approchée de ce problème. On pourra s'aider d'une table de la loi normale.

Série d'exercice n°2

Exercice n°1 :

$X_n \in \{0, n, -n\}$

$E(X_n) = 0\,P(X_n=0) + nP(X_n=n) - nP(X_n=-n)$

$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = 0$

$X_n \hookrightarrow$ suit une loi centrée

$P(|X_n| > \varepsilon) = P(|X_n| = n)$

$= P(X_n = n) + P(X_n = -n)$

$= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} X.$

1ère Méthode :

$Var(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$

$= E(X_n^2) = \sum_{n=0}^{3} x_n^2 P(X_n = x)$

$= 0^2 P(X_n=0) + n^2 P(X_n=n) + n^2 P(X_n=-n)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

2ème méthode :

$E(|X_n|^2) \longrightarrow 0\,?$

$E(|X_n|^2) = Var(X_n) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow X_n \not\longrightarrow X$ en moyenne quadratique.

Exercice n°2 :

$f_n(x) = ne^{-nx}$

$E(X_n) = \int_{\mathbb{R}} x\, n\, e^{-nx}\, dx$

Astuce :

$X_n \xrightarrow{m.q.} X$

$\lim E(X_n) = X$

$\lim Var(X_n) = 0$

Exercice n°3 :

$X \hookrightarrow Geo\left(\frac{\theta}{n} = p_n\right)$

$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

$G_X(t) = E(e^{tX})$

$G_{exp}(t) = E(e^{tX})$

$= \int e^{tx}.\theta e^{-\theta x} \mathcal{X}_{[0,+\infty[}(x)\, dx$

$= \theta \int_0^{+\infty} e^{(t-\theta)x}\, dx$

$= \frac{\theta}{t-\theta}\left[e^{(t-\theta)x}\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{-\theta}{t-\theta} = \frac{\theta}{\theta - t} \quad \forall t < \theta.$

• $G_{geo_{X_n}}(t) = E(e^{tX})$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk}.p(1-p)^{k-1}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{t(k+1)} p(1-p)^k$

$= pe^t \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} (1-p)^k$

$$= p e^t \cdot \frac{1}{1-e^t(1-p)}$$

$$= \frac{\theta}{n} e^t \cdot \frac{1}{1-e^t\left(1-\frac{\theta}{n}\right)} = G_{X_n}(t)$$

$$G_{Y_n}(t) = E\left(e^{tY_n}\right) = E\left(e^{t\frac{X_n}{n}}\right)$$

$$= E\left(e^{\frac{t}{n}X_n}\right) = G_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$= \frac{\theta}{n} e^{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{1-e^{\frac{t}{n}}\left(1-\frac{\theta}{n}\right)}$$

<u>DL</u> : $e^{\frac{t}{n}} = 1 + \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{n} e^{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{1-e^{\frac{t}{n}}\left(1-\frac{\theta}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{n}\left(1+\frac{t}{n}\right) \frac{1}{1-\left(1+\frac{t}{n}\right)\left(1-\frac{\theta}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\theta\left(1+\frac{t}{n}\right)}{n-(n+t)\left(1-\frac{\theta}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{\cancel{n}-\cancel{n}+\theta-t+\underbrace{\frac{t\theta}{n}}_{\to 0}} = \frac{\theta}{\theta-t}$$

$$= G_{exp}(t)$$

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} exp(\theta).$$