Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information

A.U: 2021 - 2022
$1^{ère}$ Année

Examen
Intégration et probabilité 1

Durée: 1H30.

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Ytlhia chammeni

Exercice 1 "Compréhension du cours et TD"

1- Donner la définition d'une tribu.
2- Soit $S = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})/A = -A\}$, où $-A = \{-x/x \in A\}$. Montrer que S est une tribu sur $\mathbb{R}$.
3- Soient $a \in \mathbb{R}$ et B un borélien de $\mathbb{R}$. Prouver que $a + B$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
3- Enoncer le théorème de convergence monotone.
4- Soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty[$.
Montrer que si $\int f_1 d\mu < +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu$.
5- Enoncer le théorème de convergence dominée.
6- Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$. $A_n = \{x \in E/ |f(x)| \geq n\}$.
a- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu(x) = 0$.
b- Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_n) = 0$.
7- Soient μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F l'application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par:

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

a-Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$ et continue à droite et admet une limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
b- Montrer que pour tout a, b de $\mathbb{R}$, avec $a < b$:
$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$; $\quad \mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$; et F est continue en a si et seulement si, $\mu(\{a\}) = 0$.
8- Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu(\mathbb{R}_-^*) = 0$. Pour $x \geq 0$, on pose $L_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-xt) d\mu(t)$. Calculer L_μ pour les cas suivants:
a- $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$.
b- $\mu = \theta \exp(-\theta t) 1_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda_{\mathbb{R}}$, $(\theta > 0)$.

$\int f(x)\, d\delta_a(x) = f(a)$

Exercice 2

On pose, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \exp(-nx).$$

Calculer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 3

On considère X une variable aléatoire réelle de loi Gamma $\gamma(p, \lambda)$, avec $p > 0$ et $\lambda > 0$. La densité de la loi Gamma $\gamma(p, \lambda)$ est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \exp(-\lambda x) x^{p-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \exp(-t) dt$, pour $a > 0$.

1- Vérifier que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Déduire que $\Gamma(n+1) = n!$.
2- Calculer $E(X^k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3- Déduire que $E(X) = \frac{p}{\lambda}$ et $Var(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.
4- Soit $a > 0$. Déterminer la loi de aX.
5- On suppose que $p \in \mathbb{N}^*$, Déterminer explicitement F_X ← fonction de repartition.

6- $Z \sim \frac{1}{X}$ { + Determiner la loi de Z. - calculer $E(Z^k)$ s'elle existe, Determiner $E(Z)$, $Var(Z)$

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de densité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\int_0^{\theta} \cdots dx.$

où θ est un nombre positif donné. Déterminer la fonction de répartition de X puis calculer l'espérance et la variance de X.