CH1 : Espérance conditionnelle.

I- Cas discret:

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité
- soit $A \in \mathcal{A}$ tq $P(A) > 0$
- $\forall B \in \mathcal{A}$ tq $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: la proba d'avoir B sachant que A est réalisé

Intuitivement on a construit une nouvelle mesure de proba P_A sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ tq $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\forall B \in \mathcal{A}$

on a $\mu(A) \underset{E_\mu(1_A)}{=} \int_\Omega 1_A \, d\mu$ d'où $P_A(B) = E_{P(A)}(1_B) = \int_\Omega 1_B(\omega) \cdot dP_A(\omega) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_{A \cap B})$

$$\underset{1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B}{=} \frac{1}{P(A)} \cdot E_P(1_A \cdot 1_B)$$

$$= \frac{1}{P(A)} \int_\Omega 1_A(\omega) \cdot 1_B(\omega) \cdot dP(\omega)$$

on a : $E_{P_A}(1_B) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_A 1_B)$

Posons $X = 1_B$ d'où on a : $E_{P_A}(X) = \frac{1}{P(A)} \cdot E_P(1_A \cdot X)$

Posons $X = \sum_{i \in I} x_i \cdot 1_{B_i}$ avec $|I| < +\infty$, $\text{card}(I) < +\infty$

et $B_i \in \mathcal{A}, \forall i \in I$.

on a $E_{P_A}(X) = E_{P_A}(\sum x_i \cdot 1_{B_i}) = \sum_{i \in I} x_i \cdot E_{P_A}(1_{B_i}) = \sum_{i \in I} \frac{x_i}{P(A)} E_P(1_A 1_{B_i})$.

$$E_{P_A}(X) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_A \sum_{i \in I} x_i \, 1_{B_i})$$

on a $E_{P_A}(X) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_A X)$.

- X v.a.d finie (on a pris $X = 1_B$ indicatrice au 1^{er} lieu).
- soit X v.a.r positive, grâce au lemme d'approximation $\exists$ une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de var discrète finie positive tq : $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ et $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X$

d'après ce qui précède, on a $E_{P_A}(X_n) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_A X_n)$

d'une part on a :

$$\lim_{n \to +\infty} E_{P_A}(X_n) \underset{\uparrow}{=} E_{P_A}(\lim_{+\infty} X_n) = E_{P_A}(X)$$

th de cvg monotone. (si (X_n) est majorée alors elle est convergente
si $(X_n) \searrow$ est minorée " ").

$0 \leq \overset{+}{X_n} \leq X_{n+1}$.

d'autre part : $\lim_{+\infty} \frac{1}{P(A)} E_P(1_A X_n) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_A \lim X_n)$

$0 \leq 1_A X_n \leq 1_A X_{n+1}$

$$= \frac{1}{P(A)} E_P(1_A X)$$

$$\Rightarrow E_{P_A}(X) = \frac{1}{P(A)} E_P(1_A X) \quad \forall \text{ var positive.}$$

• soit X var tq $E_P(|X|) < +\infty$ càd $X = X^+ - X^-$ et $|X| = X^+ + X^-$ avec ...
et $E(X^{\mp}) < +\infty$

D'après ce qui précède on a : $\begin{cases} E_{P_A}(X^+) = \frac{1}{P(A)} \cdot E_P(\mathbb{1}_A X^+) \\ \text{et} \\ E_{P_A}(X^-) = \frac{1}{P(A)} E_P(\mathbb{1}_A X^-). \end{cases}$

La linéarité de l'espérance sur P_A ou $P(E_{P_A}$ ou $E_P)$ nous donne :

$$E_{P_A}(X^+ - X^-) = \frac{1}{P(A)} E_P(\mathbb{1}_A \underbrace{(X^+ - X^-)}_{X}) \quad E_P(|X|) < +\infty$$

On conclut que : $\underbrace{E_{P_A}(X)}_{\text{Espérance de } X \text{ var sachant que } A \text{ est réalisé}} = \frac{1}{P(A)} E_P(\mathbb{1}_A X) \quad \forall X$ var tq

• Cette quantité sera notée $E(X/A)$ pour dite on a : $E(X/A) = \frac{1}{P(A)} E_P(\mathbb{1}_A X)$

où X v.a.r. tq $E(|X|) < +\infty$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ $(I \subseteq \mathbb{N})$ une partition d'évts mesurable au plus dénombrable
$(A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in I)$ • $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$ et $\cup A_i = \Omega$

Posons $\mathcal{E}(A_i)_{i \in I}$ ~~...~~ $\subset A$.

<u>Lemme</u> : Sous les notations ci-dessus on a : $(\mathcal{E}) = \{ \bigcup_{j \in J} A_j \,/\, J \subseteq I \}$.

<u>Preuve</u> : posons $\mathcal{A} = \{ \bigcup_{j \in J} A_j \,/\, J \subseteq I \}$.

<u>Etape 1</u> : $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$, soit $B \in \mathcal{E}$, $B = A_i$, $i \in I$.
$\Rightarrow B \in \mathcal{A}$ $J = \{i\}$ càd $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.

Pour achever l'étape 1, il suffit de vérifier que $\mathcal{A}$ est une tribu.

① $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, $J = I$

② soit $B \in \mathcal{A}$. Mq $B^c \in \mathcal{A}$.

$B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow B = \bigcup_{i \in J_B} A_i$ et $J_B \subseteq I$. $\Leftrightarrow B^c = \bigcup_{i \in J_B^c} A_i$ et $J_B^c = I / J_B$

③ soit $(B_K)_{K \geq 1}$ suite d'élts de $\mathcal{A}$.

Mq $\bigcup_{K \in \mathbb{N}^*} B_K \in \mathcal{A}$.

$B_K \in \mathcal{A} \Leftrightarrow B_K = \bigcup_{i \in J_K} A_i \,/\, J_K \subseteq I$

$\bigcup_{K \geq 1} B_K = \bigcup_{i \in \bigcup_{K \geq 1} J_K} A_i \qquad \bigcup_{K \geq 1} J_K \subseteq I.$

càd $\bigcup_{K \geq 1} B_K \in \mathcal{A}$.

$\stackrel{+}{\text{2)}}$ Mq $A \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

soit $B \in \mathcal{A} \Leftrightarrow B = \underbrace{\bigcup_{j \in J} A_j}$ avec $J \subseteq I$.

$A_j \in \mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$.

$\in \sigma(\mathcal{E})$ car $J \subset I$ et I est au plus dénombrable.
et la stabilité par réunion au plus denombrable par la tribu $\sigma(\mathcal{E})$

Définition

Soit

- $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ une partition d'évts au plus dénombrable de Ω
- X var tq $E(|X|) < +\infty$

La var $\sum_{i \in I} E(X/A_i) . 1\!\!1_{A_i}$ (est $\sigma(\mathcal{E})$ - mesurable) s'appelle l'espérance conditionnelle de X sachant la tribu $\sigma(\mathcal{E})$. cette var $\sigma(\mathcal{E})$ - mesurable sera notée $E(X/\sigma(\mathcal{E}))$ càd $E(X/\sigma(\mathcal{E})) = \sum_{\substack{i \in I \\ A_i > 0}} E(X/A_i) 1\!\!1_{A_i}$.

Proposition:

Sous les notations ci-dessus on a:

$$E(X 1\!\!1_B) = E(E(X/\sigma(\mathcal{E})) 1\!\!1_B).$$
$$\forall B \in \sigma(\mathcal{E}).$$

$E(X/A) = \frac{1}{P(A)} E(X 1_A)$, si $P(A) > 0$

$\mathcal{E} = (A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω ;

$$E(X/\sigma(\mathcal{E})) = \sum_{i\in I / P(A_i)>0} E(X/A_i) 1_{A_i} \; ; \; E(|X|) < +\infty$$

Proposition :

soient : • $(A_i)_{i\in I}$

• X v.a.r / $E(|X|) < +\infty$

Alors pt $B \in \sigma(\mathcal{E})$

$$E(X 1_B) = E(\underbrace{E(X/\sigma(\mathcal{E}))}_{Z} 1_B).$$

Preuve :

$B \in \sigma(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \exists J \subset I / B = \bigcup_{j\in J} A_j$ (grâce au lemme précédent).

$\Rightarrow \exists J_0 \subset J / P(A_j) > 0 \quad \forall j \in J_0$.

$$E(Z 1_B) = E(Z 1_{\bigcup_{j\in J} A_j})$$

$$= E(Z 1_{\bigcup_{j\in J_0} A_j}) + \underbrace{E(Z 1_{\bigcup_{j\in J/J_0} A_j})}_{\overset{\circledast}{=} 0 \text{ car } P(\bigcup_{j\in J/J_0} A_j) = 0}$$

Propriété :
$E(Y_z \cdot 1_B) = \int_B Y \cdot dP = 0$ dès que $P(B) = 0$

$$= E\Big(\sum_{j\in J_0} Z 1_{A_j}\Big)$$

$$= \sum_{j\in J_0} E(Z 1_{A_j})$$

$$\odot = E(Z 1_{A_{j_0}}) = E\Big(\sum_{i\in I/P(A_i)>0} E(X/A_i) \cdot 1_{A_i\cap A_{j_0}}\Big) = E(E(X/A_{j_0}) 1_{A_{j_0}}) = \frac{1}{P(A_j)} E(X 1_{A_j}) \cdot E(1_{A_j}).$$

$$= \sum_{j\in J_0} E(X 1_{A_j}) = E\Big(X \sum_{j\in J_0} 1_{A_j}\Big) = E(X 1_{\bigcup_{j\in J_0} A_j}).$$

$$= E(X 1_{\bigcup_{j\in J_0} A_j}) + E(X 1_{\bigcup_{j\in J/J_0} A_j}) = E(X 1_{\bigcup_{j\in J} A_j}) = E(X 1_B)$$

• $Z = \sum_{i\in I/P(A_i)>0} E(X/A_i) \cdot 1_{A_i}$

$$|\circledast| = \Big|Z \cdot \sum_{j\in J_0} 1_{A_j}\Big| = \Big|\Big(\sum_{i\in I/P(A_i)>0} E(X/A_i) 1_{A_i}\Big)\Big(\sum_{j\in J_0} 1_{A_j}\Big)\Big|$$

$$\leq \sum_{j\in J_0} \cdot \sum_{i\in I/P(A_i)>0} |E(X/A_i)| 1_{A_i\cap A_j}$$

$$\leq \sum_{j\in J_0} |E(X/A_j)| 1_{A_j}$$

$$\leq \sum_{i\in I/P(A_i)>0} \underbrace{|E(X/A_i)|}_{1/P(A_i) \cdot |E(X 1_{A_i})|} 1_{A_i}$$

$E(|X| 1_{A_i}) 1_{A_i}$

Posons $T = \sum_{i \in I / P(A_i) > 0} \frac{1}{P(A_i)} E(|X| 1_{A_i}) 1_{A_i}$.

$$E(T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Th de CV monotone}}}{=} \sum_{i \in I / P(A_i) > 0} E(|X| 1_{A_i}) = E\Big(|X| 1_{\underbrace{\bigcup_{i \in I / P(A_i) > 0} A_i}}\Big)$$

$$= E(|X| 1_{\bigcup_{i \in I} A_i})$$

$$\bigcup_{i \in I / P(A_i) > 0} A_i \cup \underbrace{\bigcup_{i \in I / P(A_i) = 0} A_i}_{P(\cdot) = 0}$$

$$= E(|X|).$$

En appliquant le th de cv dominée, (*) est bien justifié.

Conséquences:

→ Soit Y une v.a discrète, càd: • $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable
• $Y(\Omega) = (y_i)_{i \in I}$ et $I \subseteq \mathbb{N}$.

$\Omega = \bigcup_{i \in I} (Y = y_i)$ $\{(Y = y_i)\}_{i \in I}$ forme une partition de Ω.

Par abus de notation, A_i: $E(X / \sigma(Y)) = E(X/Y)$ où $\begin{cases} X \text{ v.a.r tq.} \\ E(|X|) < +\infty \end{cases}$

$$E(X/Y) = \sum_{i \in I / P(Y = y_i) > 0} E(X / Y = y_i) 1_{(Y = y_i)},$$

avec $E(X / Y = y_i) = \frac{1}{P(Y = y_i)} \cdot E(X 1_{(Y = y_i)})$

→ Y v.a.r $\hookrightarrow$ Bernoulli(p)

$Y(\Omega) = \{0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} P(Y = 1) = p \\ P(Y = 0) = 1 - p \end{cases}$ $p \in]0, 1[$.

X v.a.r $/ E(|X|) < +\infty$; $E(X/Y) = E(X / Y = 0) \underbrace{1_{(Y=0)}}_{1-Y} + \underbrace{E(X / Y = 1)}_{(*)} \underbrace{1_{(Y=1)}}_{Y}$

$$\begin{cases} \bullet\ E(X / Y = 1) = \frac{1}{\underbrace{P(Y=1)}_{p}} \cdot E(X \underbrace{1_{(Y=1)}}_{Y}) \\ \qquad = \frac{1}{p} \cdot E(XY) \\ \bullet\ E(X / Y = 0) = \frac{1}{P(Y=0)} E(X \cdot 1_{(Y=0)}) = \frac{1}{1-p} E(X(1-Y)) = \frac{1}{1-p}(E(X) - E(XY)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X/Y) = \frac{1}{1-p}(E(X) - E(XY))(1 - Y) + \frac{1}{p} E(XY) \cdot Y.$$

$$= \left(\frac{1}{p} E(XY) - \frac{1}{1-p}(E(X) - E(XY))\right) Y + \frac{1}{1-p}(E(X) - E(XY))$$

$$= H(Y) \quad \text{où} \quad H(u) = au + b.$$

→ soit $B \in \mathcal{T}$ / $0 < P(B) < 1$.

* Calculer $E(1_A / 1_B)$, $A \in \mathcal{T}$ en fct° de $P(A/B)$; $P(A/B^c)$ et 1_B.

$$E(1_A / 1_B) = \underbrace{\frac{1}{P(B^c)} \cdot \underbrace{E(1_A \cdot 1_{B^c})}_{P(A \cap B^c)}}_{P(A/B^c)} (1 - 1_B) + \underbrace{\frac{1}{P(B)} E(1_A 1_B)}_{P(A/B)} 1_B.$$

$$\Rightarrow = P(A/B^c)(1 - 1_B) + P(A/B) 1_B = (P(A/B) - P(A/B^c)) 1_B + P(A/B^c)$$

La définition générale :

Proposition et définition :

Hyp : • $\mathcal{B}$ une sous-Tribu de $\mathcal{T}$

• X v.a.r, telle que $E(|X|) < +\infty$

Con : Il existe une unique (P.p.s) v.a.r Z $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable.

(càd : $E(|Z|) < +\infty$), telle que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $E(X 1_B) = E(Z 1_B)$

La v.a.r Z $\mathcal{B}$-mesurable sera notée $E(X/\mathcal{B})$, avec $Z = \sum_{i \in I / P(A_i) \neq 0} E(X/A_i) 1_{A_i}$.

Preuve : Etape 1 : "Unicité P.p.s"

Soient Z et Z' 2 v.a.r $\mathcal{B}$-mesurable, vérifiant $E(|Z|) < +\infty$ et $E(|Z'|) < +\infty$

avec pour tout $B \in \mathcal{B}$ $E(X 1_B) = E(Z 1_B) = E(Z' 1_B)$.

Mq $Z = Z'$ P.p.s

$A_1 = \{Z - Z' > 0\}$; $A_2 = \{Z - Z' < 0\} = (Z-Z')^{-1}(\mathbb{R}^*_-) \in \mathcal{B}$.

$= (Z-Z')^{-1}(\mathbb{R}^*_+) \in \mathcal{B}$ car $Z - Z'$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

• $E(X 1_{A_1}) = E(Z 1_{A_1}) = E(Z' 1_{A_1})$

$\Rightarrow E(\underbrace{(Z-Z') 1_{A_1}}_{U \geq 0}) = 0$

$\Rightarrow (Z-Z') 1_{A_1} = 0$ P.p.s $\Rightarrow \boxed{Z = Z' \text{ sur } A_1 \text{ P.p.s}}$

• $E(X 1_{A_2}) = E(Z 1_{A_2}) = E(Z' 1_{A_2}) \Rightarrow E(\underbrace{(Z'-Z) 1_{A_2}}_{V \geq 0}) = 0$

$\Rightarrow (Z'-Z) 1_{A_2} = 0$ P.p.s

$\Rightarrow Z = Z'$ sur A_2 P.p.s

$\Rightarrow Z = Z'$ sur $A_1 \cup A_2$ P.p.s $\Rightarrow Z = Z'$ P.p.s $\Rightarrow$ vérifiant $(*)$

càd l'unicité de P.p.s de la v.a.r Z $\mathcal{B}$-mesurable vérifiant $(*)$

Etape 2 : "Existence"

Cas 1 : $E(X^2) < +\infty$ (X admet un moment d'ordre 2 $\Rightarrow$ admet un moment d'ordre 1)

$L^2(\Omega, G, P)$ est un espace de Hilbert $\langle X, Y \rangle = E(XY)$, $\|X\|_{L^2(\Omega,G,P)} = \sqrt{\langle X,X\rangle} = \sqrt{E(X^2)}$

$L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est s.e.v fermé

Soit Z la projection orthogonale de X sur l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Par suite : pour toute v.a.r $U \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$; $\langle X, U \rangle = \langle Z, U \rangle$.

$\Rightarrow E(XU) = E(ZU)$

soit $B \in \mathcal{B}$ alors $U = 1_B \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \Rightarrow E(X 1_B) = E(Z 1_B)$.

⚠ à retenir : si X est de carré intégrable $E(X 1_B) = E(P_{\perp}(X) 1_B)$.

Cas 2.1: $E(|X|) < +\infty$ / X v.a.r positive.

Posons $X_n = \min(X, n)$

$0 \leq X_n \leq n \Rightarrow E(X_n^2) \leq n^2 < +\infty$ $(\Rightarrow X_n \in L^2)$.

Posons Z_n La projection orthogonale de X_n sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

On a p.t $B \in \mathcal{B}$, $E(X_n 1_B) = E(Z_n 1_B)$.

On constate que $0 \leq X_n \leq X_{n+1} \Rightarrow 0 \leq X_n 1_B \leq X_{n+1} \cdot 1_B$

Grâce au th. de cv monotone on a: $\lim_{n \to +\infty} E(X_n 1_B) = E\left(\lim_{n \to +\infty} X_n 1_B\right)$.

$\lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n \to +\infty} \min(X, n) = X$ (on a $E(X) < +\infty \Rightarrow P(X = +\infty) = 0$)

Le fait que $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ alors $0 \leq Z_n \leq Z_{n+1}$ (voir les prop ci-dessous)

Grâce au th de cv monotone: $\lim_{n \to +\infty} E(Z_n 1_B) = E\left(\lim_{n\to+\infty} Z_n \cdot 1_B\right)$.

Posons $Z = \lim_{n \to +\infty}^{\nearrow} Z_n$. Puisque Z_n est $\mathcal{B}$-mesurable, alors Z est $\mathcal{B}$-mesurable

et $E(Z) < +\infty$ $\quad E(X 1_B) = E(Z 1_B)$ $\quad$ Prenons $B = \Omega \in \mathcal{B}$.

$E(X) = E(Z) < +\infty$.

D'où le résultat.

Cas 2.2: X v.a.r $\quad / E(|X|) < +\infty$

$X^+ = \max(0, X)$ $\quad X^- = \max(0, -X)$ $\quad |X| = X^+ + X^-$

$E(X^+) < +\infty$ et $E(X^-) < +\infty$ $\quad X = X^+ - X^-$

On applique le cas 2.1 à X^+ et X^- càd: • $E(X^+ 1_B) = E(Z_1 1_B)$, Z_1 est $\mathcal{B}$-mesurable positive et $E(Z_1) < +\infty$

• $E(X^- 1_B) = E(Z_2 1_B)$, Z_2 est $\mathcal{B}$-mesurable positive et $E(Z_2) < +\infty$

~~$E(X^+ 1_B)$~~

$E((X^+ - X^-) 1_B) = E(Z 1_B)$, avec $Z = Z_1 - Z_2$ $\mathcal{B}$-mesurable et ~~$E(|Z|)<$~~

$E(|Z|) \leq E(Z_1) + E(Z_2) < +\infty$

Propriétés et Commentaires:

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$ espace de probabilité, $\mathcal{B}$ sous Tribu de $\mathcal{G}$

1 - Soit X une v.a.r, telle que $E(|X|) < +\infty$, $E(E(X/\mathcal{B})) = E(X)$

En effet: On a $E(X 1_B) = E(E(X/\mathcal{B}) 1_B)$ avec $B \in \mathcal{B}$

En particulier pour $B = \Omega \in \mathcal{B}$. $1_B = 1$. , $E(X.1) = E(E(X/\mathcal{B}).1)$.

2 - Prenons $\mathcal{B} = \{\phi, \Omega\}$. et soit X. une v.a.r / $E(|X|) < +\infty$

$E(X/\mathcal{B}) = E(X)$ P p.s

En effet:

Soit $B \in \mathcal{B}$ $\begin{cases} B = \Omega \\ B = \phi \end{cases}$

si $B = \Omega$ $\xrightarrow{1_\Omega = 1}$ $E(X 1_\Omega) = E(X) = E(E(X) 1_\Omega) \Rightarrow E(X)$ est $\mathcal{B}$-mesurable

si $B = \phi$ $\xrightarrow{1_\phi = 0}$ $E(X 1_\phi) = 0 = E(E(X) 1_\phi)$

$\forall B \in \mathcal{B}$ $E(X 1_B) = E(E(X) 1_B)$. et puisque

$\mathcal{G} \subset G$, $a \in \mathbb{R}$

$(\Omega, \mathcal{G}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\omega \mapsto U(\omega) = a$.

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $U^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / U(\omega) \in A\}$

$= \begin{cases} \Omega & \text{si } a \in A \\ \phi & \text{si } a \notin A \end{cases} \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow$ cste est mesurable $\forall$.

3- Soit X ... p.s ... unicité ... est

(X) est $\mathcal{B}$ - mesurable.

unicité P p s de l'espérance conditionnelle $\Rightarrow Z = E(X)$ P.p.s.

3 - Soit X une v.a.r / $E(|X|) < +\infty$ et X est $\mathcal{B}$ - mesurable.

$$E(X/\mathcal{B}) = X \quad \text{P.p.s.}$$

En effet

soit $B \in \mathcal{B}$ $\quad E(X 1_B) = E(X 1_B)$ et $Z = X$ est $\mathcal{B}$ - mesurable.

L'unicité P.p.s de l'espérance conditionnelle implique $E(X/\mathcal{B}) \underset{\text{P.ps}}{=} X$

4 - Soient X et Y 2 v.a.r. tq $E(|X|) < +\infty$ et $E(|Y|) < +\infty$

a et $b \in \mathbb{R}$.

$$E(aX + bY / \mathcal{B}) = a . E(X/\mathcal{B}) + b\, E(Y/\mathcal{B}) \quad \text{P.p.s}$$

En effet.

$$E(|aX + bY|) \leq |a|\, E(|X|) + |b|\, E(|Y|) < +\infty$$

soit $B \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} E((aX + bY) 1_B) &= a . E(X 1_B) + b\, E(Y 1_B) \\ &= a\, E(E(X/\mathcal{B}) 1_B) + b\, E(E(Y/\mathcal{B}) 1_B) \\ &= E((\underbrace{a E(X/\mathcal{B}) + b E(Y/\mathcal{B})}_{\text{est } \mathcal{B} \text{ - mesurable.}}) 1_B) \end{aligned}$$

L'unicité Pps de l'espérance conditionnelle implique que

$$E(aX + bY / \mathcal{B}) = a\, E(X/\mathcal{B}) + b\, E(Y/\mathcal{B}) \quad \text{P.p.s.}$$

5 - Soit Y une v.a . Par abus de notation

$$E(X/\sigma(Y)) = E(X/Y).$$

6 - Soit : • X une v.a.r (càd $X : (\Omega, G) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable)

• Y une v.a. à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ (càd $Y : (\Omega, G) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ mesurable)

Si X est $\sigma(Y)$ - mesurable, alors il existe une application mesurable

$H : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que :

$$X = H(Y) \quad (X = H \circ Y)$$

En effet "Idée"

$X = 1_B \quad X$ est $\sigma(Y)$ - mesurable $\Leftrightarrow B \in \sigma(Y)$

$$\sigma(Y) = \{ Y^{-1}(A) \; / \; A \in \mathcal{A} \}.$$

D'où $\quad B = Y^{-1}(A)$, avec $A \in \mathcal{A}$

$$1_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B = Y^{-1}(A) \Leftrightarrow Y(\omega) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } Y(\omega) \in A. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 1_A(Y(\omega))$$

$X = H(Y)$ avec $H = 1_A : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

car $A \in \mathcal{A}$

7- Soient :

- X et Y deux v.a.r. telles que $E(|X|) < +\infty$, $E(|Y|) < +\infty$ et $X \leq Y$ $\mathbb{P}$.p.s
- $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{G}$

alors : $E(X/\mathcal{B}) \leq E(Y/\mathcal{B})$ $\mathbb{P}$.p.s.

En effet :

Posons . $Z_1 = E(X/\mathcal{B})$ et $Z_2 = E(Y/\mathcal{B})$

. $A = \{Z_1 \geq Z_2\}$.

$A = \{\underbrace{Z_1 - Z_2}_{\text{est } \mathcal{B}\text{-mesurable}} > 0\} = (Z_1 - Z_2)^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}_+^*}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}) \in \mathcal{B}$

$E(Z_1 1_A) \underset{A \in \mathcal{B}}{=} E(X 1_A) \leq E(Y 1_A) = E(Z_2 1_A) \Rightarrow E((Z_1 - Z_2) 1_A) \leq 0$

$X \leq Y$ $\mathbb{P}$.p.s $\Rightarrow X 1_A \leq Y 1_A$ $\mathbb{P}$.p.s.

$Z_1 > Z_2$ sur $A \Rightarrow (Z_1 - Z_2) 1_A \geq 0 \Rightarrow E((Z_1 - Z_2) 1_A) \geq 0$

$E((Z_1 - Z_2) 1_A) = 0 \Leftrightarrow E((Z_2 - Z_1) 1_A) = 0$, mais $(Z_2 - Z_1) 1_A \geq 0$

on conclut que $(Z_2 - Z_1) 1_A = 0$ $\mathbb{P}$.p.s.

c-à-d : $Z_2 = Z_1$ sur A $\mathbb{P}$.p.s $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

D'où $Z_1 \leq Z_2$ $\mathbb{P}$.p.s

8- Si $X \geq 0$ $\mathbb{P}$.p.s, alors $E(X/\mathcal{B}) \geq 0$ $\mathbb{P}$.p.s, où X est une v.a.r. tq $E(X) < +\infty$ et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{G}$

En effet :

$0 \leq X$ $\mathbb{P}$.p.s on applique la 7ème prop $\overset{0}{E(0/\mathcal{B})} \leq E(X/\mathcal{B})$ $\mathbb{P}$.p.s

(esp d'une cste = cste)

9- Soient . X une v.a.r. telle que $E(|X|) < +\infty$

. $\mathcal{B}$ une sous-Tribu de $\mathcal{G}$

. Y une v.a.r $\mathcal{B}$-mesurable, tq $E(|XY|) < +\infty$

On a : $E(XY) = E(E(X/\mathcal{B}) \cdot Y)$.

En effet :

cas 1 : $Y = 1_A$, $A \in \mathcal{B}$

$E(X 1_A) = E(E(X/\mathcal{B}) 1_A)$

cas 2 : - Y étagée et $\mathcal{B}$-mesurable. $Y = \sum_{i \in I} \alpha_i 1_{A_i}$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $|I| < +\infty$, $A_i \in \mathcal{B}$ $\alpha_i \in I$

La linéarité de l'espérance, nous donne le résultat.

$X \longmapsto X^+$ et X^- ; $Y \longmapsto Y^+$ et Y^-

On applique le lemme d'approximation et le th de cv monotone.

à X^+Y^+ ; X^+Y^- ; X^-Y^+ et X^-Y^-

$XY = (X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-)$

$Y^+ = \lim_{n \to +\infty} \nearrow Y_n^{(+)}$ $Y_n^{(+)}$ étagée $\mathcal{B}$-mesurable

$E(X^+Y^+) = E(\lim_{n \to +\infty} X^+ Y_n^{(+)}) \underset{\text{th de cv monotone}}{=} \lim_{n \to +\infty} E(X^+ Y_n^{(+)}) = \lim_{n \to +\infty} E(E(X^+/\mathcal{B}) \cdot Y_n^+)$

th de cv monotone : $0 \leq X^+ Y_n^{(+)} \leq X^+ Y_{n+1}^{(+)}$

10- Inégalité de ... $E($ ... & cv monotone

$\leq E(E(X^+/\mathcal{B})Y^+)$

de cv monotone

$\cdot\ \varphi(u) = |u|$

$|E(X)| \leq E(|X|)$

$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$

$\cdot\ \varphi(u) = u^2$ convexe

$(E(X))^2 \leq E(X^2)$

10- Inégalité de Jencen conditionnelle

Soient : * X v.a.r tq $E(|X|) < +\infty$

* $\mathcal{B}$ une sous-Tribu de $\mathcal{G}$

* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, tq $E(|\varphi(X)|) < +\infty$

alors : $\varphi(E(X/\mathcal{B})) \leq E(\varphi(X)/\mathcal{B})$.

11- L'espérance conditionnelle est une contraction dans $L^q(\mathbb{P})$

$(L^q(\mathbb{P}) = \{X \text{ v.a.r} / E(|X|^q) < +\infty\})$ càd :

$\|E(X/\mathcal{B})\|_{L^q(\mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^q(\mathbb{P})}$; où $X \in L^q(\mathbb{P})$

et $\mathcal{B}$ une sous Tribu de $\mathcal{G}$ $\left(\|u\|_{L^q(\mathbb{P})} = (E(|u|^q))^{\frac{1}{q}}\right)$

En effet : $u \mapsto |u|^q$ est convexe.

D'après de $10^{ème}$ propriété $,\left(\cancel{E(|X|/\mathcal{B}) \geq E(|X|/\mathcal{B}))^q}\right)$

avec $Y = |X|$. $\quad (E(|X|/\mathcal{B}))^q \leq E(|X|^q/\mathcal{B})$.

$$E\left(E(|X|/\mathcal{B}))^q\right) \leq E(\ \cdot\ ) = E(|X|^q).$$

$$\Rightarrow \|E(|X|/\mathcal{B})\|_{L^q(\mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^q(\mathbb{P})}.$$

mais : $|E(X/\mathcal{B})| \leq E(|X|/\mathcal{B})$.

$$\Longrightarrow \|E(X/\mathcal{B})\|_{L^q(\mathbb{P})} \leq \|E(|X|/\mathcal{B})\|_{L^q(\mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^q(\mathbb{P})}.$$

12- Soient : * X v.a.r tq $E(|X|) < +\infty$, tq $E(|XY|) < +\infty$, où $\mathcal{B}$ est une sous Tribu de $\mathcal{G}$

* Y v.a.r $\mathcal{B}$-mesurable,

On a : $E(XY/\mathcal{B}) = Y\,E(X/\mathcal{B})$ P.p.s (si je maîtrise $\mathcal{B}$ et Y $\mathcal{B}$-mes $\rightarrow$ je maîtrise Y)

En effet

~~soit~~ Y est $\mathcal{B}$-mesurable $\Rightarrow Y.E(X/\mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

Posons $A \in \mathcal{B}$ et $Z = Y.\mathbb{1}_A$ $\mathcal{B}$-mesurable.

on a $XZ = XY.\mathbb{1}_A \Rightarrow E(|XZ|) \leq E(|XY|) < +\infty$

$\xRightarrow{9^{ème}\text{ prop}}$ $E(XZ) = E(E(X/\mathcal{B}).Z)$

$E(XY\mathbb{1}_A) = E(E(X/\mathcal{B}).Y.\mathbb{1}_A)$ et $E(X/\mathcal{B}).Y$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

L'unicité P.p.s de l'espérance conditionnelle implique. ($|XZ| = |XY|\mathbb{1}_A \leq$; $\mathbb{1}_A \leq 1$.)

$E(XY/\mathcal{B}) = Y.E(X/\mathcal{B})$ P.p.s.

13 - Soient : * X v.a.r tq $E(|X|) < +\infty$
* $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ deux ~~tribu~~ sous - Tribu. de $\mathcal{G}$, tq. $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$

on a : $E(E(X/\mathcal{G})/\mathcal{H}) = \underbrace{E(E(X/\mathcal{H})/\mathcal{G}) = E(X/\mathcal{H})}_{P.p.s}$.

Exercice 1.2 :

Soit $X_1, \dots, X_n$ n v.a iid, tq $E(|X_1|) < +\infty$

Déterminer $E(X_1/S_n)$ et $E(S_n/X_1)$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?

$\longrightarrow E(S_n/X_1) = E(\sum_{k=1}^{n} X_k / X_1) \underset{\substack{E \text{ linéaire} \\ \Sigma < +\infty}}{=} \sum_{k=1}^{n} E(X_k/X_1)$

$= E(X_1/X_1) + \sum_{k=2}^{n} E(X_k/X_1)$.

$= X_1 + \underbrace{\qquad}_{(n-1)E(X_1)}$ ($\|$ m̂ E à m̂ loi) $= X_1 + (n-1)E(X_1)$

$\leadsto E(X_1/X_1) = \varphi(X_1)$ où $\varphi(U) = U + (n-1)E(X_1)$

• $E(S_n/S_n) = S_n$.

$E(\sum_{k=1}^{n} X_k / S_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{E(X_k/S_n)}_{E(X_1/S_n)} = n.\, E(X_1/S_n) = S_n$.

$\Rightarrow E(X_1/S_n) = \frac{S_n}{n}$ P.p.s

III - Quelques cas pratiques :

Proposition :

Soient : * $\binom{X}{Y}$ une v.a vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de densité $f_{X,Y}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathbb{R}^{n+m}}$

* G une application mesurable de $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que $E(|G(Y)|) < +\infty$

Alors : $E(G(Y)/X) = H(X)$, où H est n'importe quelle fonction telle que

$$H(x) \int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x,y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y).\, f_{X,Y}(x,y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^m}(y). \quad \text{p.t } x \in \mathbb{R}^n$$

Preuve :

Soit $A \in \mathcal{T}(X)$ $\qquad \underset{\uparrow}{\mathcal{T}(X) =} \{X^{-1}(B) / B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ est une tribu de $\mathcal{G}$.

Tribu image réciproque.

$A = X^{-1}(B)$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad E(G(Y) 1_A) \underset{1_A = 1_B(X)}{=} E(G(Y).\, 1_B(X)) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} G(y).\, 1_B(x) f_{X,Y}(x,y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}(x,y)$

$\underset{\text{Th Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} G(y) f_{X,Y}(x,y).\, d\lambda_{\mathbb{R}^m}(y) \right) 1_B(x).\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(x)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} H(x)\, 1_B(x) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x,y).\, d\lambda_{\mathbb{R}^m}(y) \right)}_{f_X(x)} d\lambda_{\mathbb{R}^n}(x)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} H(x).\, 1_B(x)\, f_X(x).\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(x)$

$= E(H(X)\, 1_B(X)) = E(H(X)\, 1_A)$.

• L'unicité P.p.s de l'espérance conditionnelle implique $E(G(Y)/X) = H(X)$ P.p.s

Commentaire:

On a $H(x)\, f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} G(y)\, f_{X,Y}(x,y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(y)$

Cas 1: si $f_X(x) = 0$, alors on pose $H(x) = 0$

si $f_X(x) > 0$, alors on pose $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} G(y) \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(y)$

$$H(x) = E(G(Y)/X=x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} G(y) \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(y) & \text{si } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{si } f_X(x) = 0 \end{cases}$$

Posons: $$f_{Y/X=x}(y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} & \text{si } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{si } f_X(x) = 0 \end{cases}$$

si le couple (X,Y) a densité

$E(Y/X) = \frac{\text{densité du couple}}{\text{densité de } X}$

On a, $H(x) = E(G(Y)/X=x) = \int_{\mathbb{R}^m} G(y) \cdot f_{Y/X=x}(y)\, d\lambda_{\mathbb{R}^n}(y)$

$f_{Y/X=x}$ s'appelle la densité conditionnelle de la loi de Y sachant que $X=x$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$.

Définition: $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espace de probabilité.

• Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous tribus de $\mathcal{G}$.

→ On dit que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont independantes, si $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2)$, $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1$, $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2$

• Soient • X une v.a

• $\mathcal{B}$ sous tribu de $\mathcal{G}$

→ On dit que X et $\mathcal{B}$ sont independantes, si $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont independantes.

Proposition:

Soient, * X une v.a à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

* H une application mesurable de $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que $E(|H(X)|) < +\infty$

* $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{G}$ independante de X.

→ Alors $E(H(X)/\mathcal{B}) = E(H(X))$ P.p.s

Preuve:

soit $A \in \mathcal{B}$ $\quad E(H(X)\, 1_A) \underset{\substack{\downarrow \\ H(X) \text{ et } 1_A \text{ sont independants}}}{=} E(H(X)) \cdot E(1_A) = E(E(H(X))\, 1_A)$

la v.a "constante" $E(H(X))$ est $\mathcal{B}$-mesurable. L'unicité P.p.s de l'espérance conditionnelle implique que $E(H(X)/\mathcal{B}) = E(H(X))$. P.p.s.

Propriétés :

Soient, * X une v.a. à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ (par exple. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$)

* Y une v.a à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{T})$ (par exple $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$)

* X et Y sont indépendants

* H une app mesurable de $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

tq $E(|H(X,Y)|) < +\infty$.

Alors $\rightarrow$ $E(H(X,Y)/Y) = F(Y)$ $\mathbb{P}$.p.s, où $F(y) = E(H(X,y))$, pt $y \in \mathbb{R}^d$.

Preuve:

$\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B) / B \in \mathcal{T}\}$.

Soit $A \in \sigma(Y)$ (càd, $A = Y^{-1}(B)$, avec $B \in \mathcal{T}$ $\quad 1_A = 1_B(Y)$).

$$E(H(X,Y)1_A) = E(H(X,Y)1_B(Y)) = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} H(x,y)1_B(y)\, dP_{(X,Y)}(x,y).$$

$$\underset{\substack{X \perp\!\!\!\perp Y \\ \text{indep}}}{=} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} H(x,y)\cdot 1_B(y)\, d(P_X \otimes P_Y)(x,y)$$

$$\underset{\text{Th de Fubini}}{=} \int_{\mathcal{Y}} \left(\int_{\mathcal{X}} H(x,y)\, dP_X(x)\right) 1_B(y)\, dP_Y(y) = \int_{\mathcal{Y}} F(y) 1_B(y)\, dP_Y(y)$$

$$= E(F(Y)1_B(Y)) = E(F(Y)1_A) \;;\; F(Y) \text{ est } \sigma(Y)\text{-mesurable.}$$

L'unicité $\mathbb{P}$.p.s de l'espérance conditionnelle implique que $E(H(X,Y)/Y) = F(Y)$ $\mathbb{P}$.p.s

$$(\mathcal{Y}, \mathbb{P}) \xrightarrow{F} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$
$$y \longmapsto \int_{\mathcal{X}} H(x,y)\, dP_X(x) \text{ est mesurable.}$$

$Y : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{T})$ est mesurable

Proposition:

Soient, • $(X, \underbrace{Y_1, \dots, Y_d}_{Y})^T$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

• H une application mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que $E(|H(X)|) < +\infty$

Alors on a : * $E(X/Y) = a + b^T \cdot Y$ $\qquad a \in \mathbb{R}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$

$$= a + \sum_{k=1}^{d} b_k \cdot Y_k$$

* $E(H(X)/Y) = \varphi(Y)$ $\mathbb{P}$.p.s où $\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} H(z) f_{N(a+b^T y, \sigma^2)}(z)\, d\lambda_{\mathbb{R}}(z)$

Preuve:

$G = \text{vect}(1, Y_1, \dots, Y_d)$. est un s.e.v. de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

$\Pi_G(X) =$ La projection orthogonale de X sur G.