

Problèmes linéaires et résolution graphique*

18 décembre 2008

1 Problème

1.1 Enoncé

Un chocolatier-confiseur confectionne des assortiments de chocolats. Dans ceux-ci, il a convenu d'y placer 3 sortes de chocolats, dénotés chocolats 1, 2 et 3, dont chaque kg lui coûte respectivement 4D, 1,45D et 2,40D. Chaque assortiment doit peser un kg et se vendra 8D.

Le chocolat 1 doit représenter entre 10% et 20% du poids d'un assortiment. Les chocolats 1 et 2 présents dans un assortiment ne doivent pas peser plus de 800g. Au moins la moitié du poids d'un assortiment doit provenir des chocolats 1 et 3.

Quelle proportion de chaque sorte de chocolats, le chocolatier-confiseur doit-il utiliser pour maximiser les revenus nets qu'il tirera de la vente de ses assortiments ?

1.2 Formulation

1.2.1 Variables

- z = profit de la vente d'un assortiment (en D)
- q_1 = quantité du chocolat 1 dans un assortiment (en kg)
- q_2 = quantité du chocolat 2 dans un assortiment (en kg)
- q_3 = quantité du chocolat 3 dans un assortiment (en kg)

1.2.2 Objectif

$$- \max z = 8(q_1 + q_2 + q_3) - (4q_1 + 1,45q_2 + 2,40q_3)$$

1.2.3 Contraintes

- $q_1 + q_2 + q_3 = 1,000$
- $q_1 \geq 0,100$
- $q_1 \leq 0,200$
- $q_1 + q_2 \leq 0,800$
- $q_1 + q_3 \geq 0,500$
- $q_1, q_2, q_3 \geq 0$

1.3 Solution

$z = 5,915$ avec $q_1 = 0,100$, $q_2 = 0,500$ et $q_3 = 0,400$.

2 Correction

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{10} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{9}{10} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{9}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{10} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{10} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & -\frac{1}{10} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{10} \end{array} \right)$$

*Problèmes tirés du cours de Sébastien VERBOIS

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{131}{20} & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{203734268857237}{214457125112881} & \frac{1151}{200} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{131}{20} & 0 & \frac{8}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{203734268857237}{214457125112881} & \frac{1183}{200} \end{array} \right)$$

Exercise 2

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{40}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{26}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{74}{3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 30 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 14 & 12 & 12 & 0 & 0 & -30 \end{array} \right)$$