…ution :

Série n°1 : Lois Usuelles et Tables Statistiques

Ex n°2 :

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(500, 100^2)$

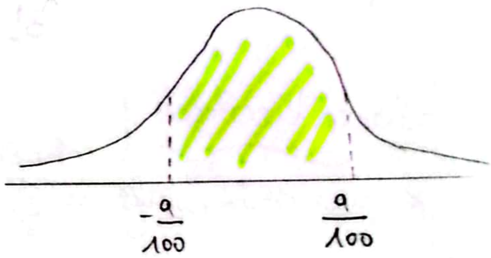
$P(X \in I) = 0{,}95$, $I =]500 - a, 500 + a[$

Loi normale continue
on peut ouvrir ou fermer les crochets

$P(500 - a < X < 500 + a) = P\left(-\frac{a}{100} < Y < \frac{a}{100}\right)$ $\quad Y \rightsquigarrow \frac{X - 500}{100} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$= P\left(Y < \frac{a}{100}\right) - P\left(Y \leq -\frac{a}{100}\right)$

$= F\left(\frac{a}{100}\right) - F\left(-\frac{a}{100}\right)$



$= 2F\left(\frac{a}{100}\right) - 1 = 0{,}95$

Loi symétrique
$F(-x) = 1 - F(x)$

D'où $F\left(\frac{a}{100}\right) = \frac{1{,}95}{2} \Rightarrow \frac{a}{100} = F^{-1}(0{,}975)$

D'où $a = 100\, F^{-1}(0{,}975) = 100\,(1{,}96) = 196$

$F(-u) = 1 - F(u)$ ⚠

qnorm : quantile
pnorm : proba

Ex n°1 :

$n = 52$

12 tirages → 3 trèfles, 3 coeurs, 3 piques, 3 carreaux

$52 \,|\, 4$
$\quad\ \ 13$

$P_T = P_{co} = P_p = P_{ca} = \frac{1}{4}$ (proba de tirer une forme géométrique)

On est dans le cadre d'une loi usuelle alors :

On a 12-échantillon (échantillon de 12 cartes)

$(X_1, \ldots, X_{12})$

$$\begin{pmatrix} \text{nbre de trèfles} \\ \text{nbre de coeur} \\ \text{nbre de carreaux} \\ \text{nbre de pique} \end{pmatrix}$$: c'est le vecteur aléatoire qui suit la loi multinomiale.

$$P\begin{pmatrix} N_T = 3 \\ N_{Co} = 3 \\ N_{Ca} = 3 \\ N_p = 3 \end{pmatrix} = \frac{\overbrace{12}^{\text{taille de l'échantillon}}!}{3!\,3!\,3!\,3!} P_T^3 P_{Co}^3 P_{Ca}^3 P_P^3$$

$$= \frac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!} \left(\frac{1}{4}\right)^{12}$$

Généralisation.

X prend les valeurs $v_1, \ldots, v_k$ avec des proba respectives $p_1, \ldots, p_k$

$$\begin{pmatrix} \text{nombre de } v_1 \\ \vdots \\ \text{nombre de } v_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} N_1 = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{X = v_1\}} \\ \vdots \\ N_k = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{X = v_k\}} \end{pmatrix} \leadsto \mathcal{M}$$

Ex n°3 : $X \leadsto N(\mu, \sigma^2)$

Partie 1 $X \leadsto N(9, 9)$

1) $P(X < 7) = P\left(\frac{X-9}{3} \leq -\frac{2}{3}\right) = \underset{N(0,1)}{F}\left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \underset{N(0,1)}{F}\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - 0{,}745 = 0{,}2546$

2) $P(7 \leq X < 12) = P\left(-\frac{2}{3} < \frac{X-9}{3} < 1\right)$

$= F(1) - F\left(-\frac{2}{3}\right) = 0{,}8413 - 0{,}2546 = 0{,}5867$

3) $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 7) - P(7 < X < 12) = 1 - 0{,}2546 - 0{,}5867 = 0{,}1587$

4) $P(X) = C_4^2 \, (P(X<7))^2 \, (1 - P(X<7))^2 = 0{,}216$

$$I = [\mu - k, \mu + k]$$

$$P(X \in I) = P(9-k < X < 9+k)$$

$$= P\left(-\frac{k}{3} < \frac{X-9}{3} < \frac{k}{3}\right)$$

$$= F_{N(0,1)}\left(\frac{k}{3}\right) - F_{N(0,1)}\left(-\frac{k}{3}\right) = 0,98$$

$$= 2F_{N(0,1)}\left(\frac{k}{3}\right) = 1,98$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3} = F^{-1}_{N(0,1)}(0,99) = 2,32 \Rightarrow k = 0,77$$

Partie 2 :

6) $P(7 \leq X < 12) = 1 - P(X < 7) - P(X \geq 12)$

$$= 1 - 0,1587 - 0,0668 = 0,7745$$

7) $\begin{cases} P(X<7) = 0,0668 \\ P(X \geq 12) = 0,1587 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7-\mu}{\sigma} = F^{-1}_{N(0,1)}(0,0668) = -1,5063 \simeq -1,5 \\ \frac{12-\mu}{\sigma} = F^{-1}_{N(0,1)}(0,841) = 0,9988 \simeq 1 \end{cases}$

8) $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{5}{2}\right) = 1 - 0,9938 = 0,0062$

Ex n°4 :

$$f(r) = \Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$$

1) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$

$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$ on pose $V' = e^{-x} \leftarrow V = -e^{-x}$

$U = x^r \rightarrow U' = r x^{r-1}$

Donc

$$\Gamma(\lambda+1) = \underbrace{\left[-x^r e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} r x^{r-1} e^{-x} dx$$

Ainsi $\Gamma(\lambda+1) = \lambda \Gamma(\lambda)$.

2) On pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} & x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

On pose $s = \frac{x}{2}$

$2\,ds = dx$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} s^{\frac{n}{2}} e^{-s}\,ds \Rightarrow E(X) = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

On pose $s = \frac{x}{2} \Rightarrow 2ds = dx$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} s^{\frac{n}{2}+1} e^{-s}\,ds$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) \Rightarrow E(X^2) = \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{4}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\Gamma($$

D'où $E(X^2) = 2n\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n^2 + 2n - n^2 = 2n.$$

Ex n°5.

1) $P(X<2) = 0,3085$ et $P(X>8) = 0,0062$

$P(X^2 - 6X < 1,84) = P((X-3)^2 - 9 < 1,84) = P((X-3)^2 < 10,84)$

$= P(-|X-3| < \sqrt{10,84}) = P(-3,29 < X-3 < 3,29) = P(-0,29 < X < 6,29)$

$$\begin{cases} P(X<2) = 0,3085 \\ P(X>8) = 0,0062 \end{cases} \iff \begin{cases} P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,3085 \\ P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{8-m}{\sigma}\right) = 0,0062 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F\left(\frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,3085 \\ 1 - F\left(\frac{8-m}{\sigma}\right) = 0,0062 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2-m}{\sigma} = F^{-1}(0,3085) \\ \frac{8-m}{\sigma} = F^{-1}(0,9938) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2-m}{\sigma} = -0,5 \\ \frac{8-m}{\sigma} = 2,5 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 0,5\sigma + 2 \\ \frac{8 - (0,5\sigma+2)}{\sigma} = 2,5 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma = 2 \\ \text{et} \\ m = 3 \end{cases}$$

Donc $P(-0,29 < X < 6,29) = P\left(-\frac{3,29}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{3,29}{2}\right)$

$= F\left(\frac{3,29}{2}\right) - F\left(-\frac{3,29}{2}\right)$

$= 0,95 - 0,05 = 0,90$

Ou bien

$P((X-3)^2 < 10,84) = P\left(\left(\frac{X-3}{2}\right)^2 < \frac{10,84}{4}\right)$ ($3 = m$, $2 = \sigma$)

$= P(Y < 2,71)$, $Y \rightsquigarrow \chi^2_{(1)}$

On a un seul carré il n'y a pas de somme