Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U : 2020/2021
$2^{ème}$ Année

Devoir

Processus stochastique

Durée: 1H30.
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1

1- Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On pose:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq Z \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculer $E(Z/Y)$ et $E(Y/Z)$.

2- Si A et B sont deux évènements, calculer $E(\mathbf{1}_A/\mathbf{1}_B)$.

3- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1$.

3-1- On suppose que les variables X_n sont intégrables. Montrer que $\left(Y_n - \sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right)_{n\geq 1}$ est une martingale.

3-2- On suppose que les variables X_n sont centrées et de carré intégrable. Montrer que $\left(Y_n^2 - \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2)\right)_{n\geq 1}$ est une martingale.

Exercice 2

Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et $X_0 = 0$, $X_n = Y_1 + ... + Y_n$

1- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty$ $P.p.s.$

Ind: On pourra utiliser la loi forte des grands nombres.

2- Pour tout $y \in \mathbb{N}$, on pose $T_y = \inf\{n \geq 0 \ / \ X_n = y\}$.

2-a- Vérifier que T_y est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

2-b- Montrer que $P(T_y < +\infty) = 1$.

3- Vérifier que $M_n = X_n - np$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

4-En utilisant la martingale arrêtée $(M_{n\wedge T_y})_{n\geq 0}$, montrer que $E(T_y) = \dfrac{y}{p}$.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère une martingale réelle $(M_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$, où K est constante strictement positive. On pose:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1}),\ n \geq 1.$$

1- Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale.

2- Vérifier que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement et dans $\mathbf{L}^2(P)$.