Définition 2.3

* $X \leadsto \gamma(a, \theta)$ avec $(a, \theta) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$ avec a connu

$$m_1 = \underbrace{E_\theta(X)}_{g(X)} = \underbrace{\frac{a}{\theta}}_{\varphi(x)} \Leftrightarrow \theta = \frac{a}{m_1} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{a}{\hat{m}_1} = \frac{a}{\overline{X}_n}$$

* $X \leadsto \gamma(\theta, \lambda)$; $(\theta, \lambda) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$ avec λ connu

$$m_1 = E_\theta[X] = \frac{\theta}{\lambda} \Leftrightarrow \theta = \lambda m_1 \Rightarrow \hat{\theta} = \lambda \hat{m}_1 = \lambda \overline{X}_n$$

* $X \leadsto P(\theta)$ $\theta > 0$

$m_1 = \theta$; $g = Id_E$ $\varphi : Id_\theta$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \hat{m}_1$$

$$m_2^0 = \theta \Rightarrow \hat{\theta}_2 = \hat{m}_2^0 = S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \overline{X}_n)^2$$

2.1.3 Cas multidimensionnel

$X \leadsto \gamma(a, \lambda)$ $\theta = (a, \lambda) \in (\mathbb{R}^*_+)^2$

$$\begin{cases} E_\theta(X) = m_1 = \frac{a}{\lambda} & e_1 \\ Var[X] = m_2^0 = \frac{a}{\lambda^2} & e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{m_1}{m_2^0} & \left(\frac{e_1}{e_2}\right) \\ a = \frac{m_1^2}{m_2^0} & \left(\frac{e_1^2}{e_2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_2^0} = \overline{X}_n \\ \hat{a} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2^0} = \frac{\overline{X}_n^2}{S_n^2} \end{cases}$$

2.1.4

1) On souhaite estimer la proportion des pièces défectueuses

$X \leadsto b(\theta)$

$P[X = 1] = \theta$

N = nb pièces défectueuses dans l'éch

$$N = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{X_i = 1\}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} 1\!\!1_{\{X_i = 1\}}$$

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$

$P[X = x_i] = p_i$ (inconnu) $1 \leq i \leq k$

$\theta = E_\theta[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$

$$N_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_j = x_i\}}$$

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_j = x_i\}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbb{1}_{\{x_j = x_i\}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

* n tirages de boules de couleur

proba de tirage

Rouge $\to p_r$

Vert $\to p_v$

Blanc $\to p_B$

Noir $\to p_n$

calculer la proba de tirer n_r boules rouges, n_v vertes, n_b blanches et n_n noires

$$P_\theta \begin{bmatrix} N_1 = n_r \\ N_2 = n_v \\ N_3 = n_b \\ N_4 = n_n \end{bmatrix} = \frac{n!}{n_r!\, n_v!\, n_b!\, n_n!} p_r^{n_r} p_v^{n_v} p_B^{n_B} p_n^{n_n}$$

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i = n\}}$$

$$\hat{p}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i = r\}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{n!}{n_r!\, n_b!\, n_v!\, n_n!} \hat{P}_r^{n_r} \hat{P}_v^{n_v} \hat{P}_B^{n_v} \hat{P}_n^{n_n}$$

Les pièces 1 et 2 sont pipées

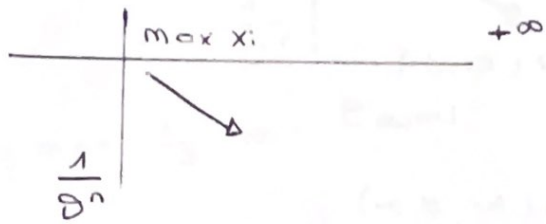
Au lancer $\begin{cases} \text{Pièce 1 : proba d'obtenir "pile"} = 0{,}8 \\ \text{Pièce 2 : proba d'obtenir "face"} = 0{,}8 \end{cases}$

$* X \sim P_\theta$ réalisant $\underline{x}$

Si la valeur θ a engendré $\underline{x}$, cette valeur est celle qui rend la (+) vraisemblance l'apparition de $\underline{x}$; celle qui maximise $P_\theta[X = x] = \mathcal{L}(\underline{x}, \theta)$

$* X \sim U_{[0,\theta]}$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}}$$



$\hat{\theta} = \max x_i$

$X \sim P(\theta)$ avec $\theta > 0$

$$f(x, \theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$$

$$l(x, \theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^n x_i \ln \theta - \sum_{i=1}^n \ln x_i! \quad \mathbb{1}_{\mathbb{N}^n}(\underline{x})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum x_i}{\theta} = 0 \iff \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \text{concavité stricte}$$

donc $\hat{\theta} = \overline{X}_n$ est l'emv

$X \sim \mathcal{E}(\theta) \quad \theta > 0$

$$f(x, \theta) = \theta \exp -\theta x \ \mathbb{1}_{\{x, 0\}}$$

$$l(\underline{x}, \theta) = -\theta \sum x_i + x \ln \theta \quad \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^n}(\underline{x})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\sum x_i + \frac{n}{\theta} = 0 \iff \theta = \frac{n}{\sum x_i}$$

$$\frac{\partial l^2}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \text{concavité stricte}$$

$X \sim \mu_{[\theta, \theta+1]} \quad \theta > 0$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \mathbb{1}_{[\theta, \theta+1]^n}(\underline{x})$$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \mathbb{1}_{[\theta,\theta+1]^n}(\underline{x}) = \mathbb{1}_{\{\max \geq \theta\}} \mathbb{1}_{\{\max \leq \theta+1\}}$$

$$\Theta = \{\max x_i - 1, \min x_i\}$$

$\mathcal{L}$ est cte sur Θ, toutes les valeurs $\in [\max x_i - 1, \min x_i]$ maximisent la v.s

$$f(x,\theta) = \frac{9}{10\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{10}\phi(x-\mu)$$

$\theta = (\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$

ϕ : densité d'une loi $N(0,1)$

$\underline{x}$: Réalisation de $\underline{X}$

Supposons que $x_1 = \mu$ ($x_i \neq \mu$, $i \neq 1$)

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \frac{1}{10^n} \prod_{i=1}^{n} \left[\underbrace{\frac{9}{\sigma}}_{\infty} \underbrace{\phi\left(\underbrace{\frac{x_i-\mu}{\sigma}}_{\infty}\right)}_{0} + \phi(x_i-\mu)\right] \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{9}{\sigma}+1\right)}_{\infty}\right]$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \mathcal{L}(\underline{x},\theta) \longrightarrow \infty$$

Preuve (Remarque 2.11)

$T(\underline{x})$ exh pour le modèle

$\forall\, x \in E^n$, $\forall \theta \in \Theta$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = g(T(\underline{x}),\theta)\cdot h(\underline{x})$$

$$l(\underline{x},\theta) = \ln(g(T(\underline{x}),\theta)) + \ln(h(\underline{x}))$$

$$\arg\max_\theta l(\underline{x},\theta) = \arg\max_\theta g(T(\underline{x}),\theta)$$
$$= \arg\max_\theta P_\theta[T(\underline{X}) = t]$$

(cas discret)

$X \sim P(\theta)$ $\theta > 0$

$\hat\theta = \bar{X}_n$ est l'emv

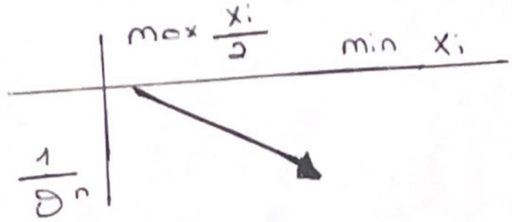
$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ exh

$\hat\theta = \frac{1}{n} T(\underline{x})$

· $X \sim \mathcal{U}_{[\theta, 2\theta]}$ $\theta > 0$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq \theta\}} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq 2\theta\}}$$

$T(\underline{x}) = (\min x_i, \max x_i)$ exh



$\hat{\theta} = \max \frac{x_i}{2}$ est l'emv

2.2.2

$\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta} \subset \mathbb{R}$

F.e.m 1 parametre

$\forall \underline{x} \in E^n, \forall \theta \in \Theta$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \exp[c(\theta) T(\underline{x}) + d(\theta) + S(\underline{x})] \, \mathbb{1}_A(x)$$

A indep de θ

on suppose $\ell(\underline{x}, \theta)$ de classe C^2

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = c'(\theta) T(\underline{x}) + d'(\theta) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = c''(\theta) T(\underline{x}) + d''(\theta) < 0 \Rightarrow \text{concavité}$$

stricte

$X \sim N(\mu, 1)$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi\right]$$

$$= \exp\left[\underbrace{\mu}_{c(\theta)} \underbrace{\sum x_i}_{T(\underline{x})} \underbrace{- \frac{n}{2} \mu^2}_{d(\theta)} \underbrace{- \frac{1}{2} \sum x_i^2 - \frac{n}{2} \ln 2\pi}_{S(\underline{x})}\right]$$

F.e à 1 paramètre pour forme canonique

$c : \theta \longrightarrow \theta$: injective de classe C^2

$d : \theta \longrightarrow -\frac{n}{2} \mu^2$ de classe C^2

$\Theta = \mathbb{R}$ ouvert

$E_\theta[T(\underline{X}) = T(\underline{x})]$

$E[\sum_{i=1}^{n} x_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$n\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\hat{\mu} = \overline{X_n}$ est l'emv

$X \sim N(0, \sigma^2) \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}^*_+$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \exp\Big[-\underbrace{\frac{1}{2\sigma^2}}_{c(\theta)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{T(\underline{x})} - \underbrace{\frac{n}{2} \ln \sigma^2}_{d(\theta)} - \underbrace{\frac{n}{2} \ln \pi}_{S(\underline{x})}\Big]$$

$\Theta = \mathbb{R}^*_+$: ouvert

$E_\theta[T(\underline{X})] = T(\underline{x})$

$\Leftrightarrow E[\sum_{i=1}^{n} X_i^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\sigma^2 \cdot E[\sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i}{\sigma})^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\sigma^2 * n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est l'emv