# D- Convergence de variables aléatoires

# D-1 Notations

- On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (éventuellement $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $X$ (éventuellement $Y$) une variable aléatoire définie sur le même espace.

- On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions de répartitions de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $F$ celle de $X$.

- On note $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions caractéristiques de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\phi$ celle de $X$ : $\phi_n(t) = E\left(e^{itX_n}\right)$.

Rq: Les résultats de ce cours s'appliquent aussi à des vecteurs aléatoires.

- **Définitions**

**Définition 1**

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ en tout point de continuité $x$ de $F$.

**Définition 2 : Théorème de Paul Levy**

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = \phi(x).$

**Définition 3 : Lemme de Portmanteau**

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall g$ continue et bornée, $\lim_{n\to+\infty} E\left(g(X_n)\right) = E\left(g(X)\right).$

- **Théorème**

$\forall c \in \mathbb{R},\ X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Longrightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$.

- **Théorème de Slutsky**

$\forall c \in \mathbb{R},\ X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Longrightarrow$

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Xc$
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X/c, c \neq 0$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ n'implique pas $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$

- **Exemple**

1. Soit $X_n$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Alors, lorsque $n$ tend vers l'infini, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où $X$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$$p_n(x) = P(X_n = x) = C_n^x \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) .... \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Donc, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{x} p_n(k) = P(X \leq x)$ où X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda$.

2. Soit $X_N$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{H}(N, n, p)$. Alors, lorsque $N$ tend vers l'infini $X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où $X$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

# D-3 Convergence en probabilité

- **Définition**

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

- **Condition suffisante de convergence en probabilité**

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(X_n\right) = c \text{ et } \lim_{n\to+\infty} V\left(X_n\right) = 0 \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} c$$

Preuve :

$$P(|X_n - c| > \epsilon) \leq P(|X_n - E(X_n)| > \epsilon/2) + P(|E(X_n) - c| > \epsilon/2) \leq \frac{4V(X_n)}{\epsilon^2} + 1_{|E(X_n)-c|>\epsilon/2} \to 0.$$

- **Propriétés**

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{P} Y \Longrightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

Preuve : $P(|X_n + Y_n - X - Y| > \epsilon) \leq P(|X_n - X| > \epsilon/2) + P(|Y_n - Y| > \epsilon/2)$.

- **Exemple**

1. Soit $Z_n$ une suite de variable aléatoire de loi du Chi2 à $n$ ddl. Soit $X_n$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{T}(n)$. Montrer que $Z_n/n$ converge en probabilité vers 1. En déduire que lorsque $n$ tend vers l'infini $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où $X$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.On note

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Rq: On utilisera le résultat énoncé plus loin :

$$\forall c \in \mathbb{R}, X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \iff X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} c$$

# D-4 Convergence presque-sûre

## Définition

1. $X_n \overset{p.s.}{\rightarrow} X \iff P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = X\right) = 1.$
2. $X_n \overset{p.s.}{\rightarrow} X \iff P\left(\{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1.$
3. $X_n \overset{p.s.}{\rightarrow} X \iff \{\omega \in \Omega, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} = \emptyset.$ presque partout.

## Condition suffisante de convergence presque-sûre

$\forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \epsilon)$ converge $\Longrightarrow (X_n \overset{p.s.}{\rightarrow} X)$

# D-5 Convergences en moyennes d'ordre

- **Convergence dans $L^1$ (en moyenne)**

$$X_n \xrightarrow{L^1} X \iff \lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n - X|\right) = 0.$$

- **Convergence dans $L^2$(en moyenne quadratique)**

$$X_n \xrightarrow{L^2} X \iff \lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0.$$

- **Convergence dans $L^p$**

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \iff \lim_{n\to+\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

# D-6 Hiérarchie des convergences

$$\begin{array}{ccccc} X_n \xrightarrow{p.s.} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{P} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{L} X \\ & & \Uparrow & & \\ & & X_n \xrightarrow{L^p} X & & \\ & & \Uparrow & & \\ & & X_n \xrightarrow{L^q} X \quad q > p & & \end{array}$$

La convergence en loi est la convergence la plus faible.

Eléments de preuve :

- $p.s. \Rightarrow P$ : Si il est vérifié, on utilise critère de convergence p.s., sinon plus compliqué.
- $P \Rightarrow L$ : en utilisant l'inégalité $\forall Z, Y$ v.a., $x > 0$,

$$P(Y \leq x) \leq P(Z \leq x + \epsilon) + P(|Y - Z| > \epsilon)$$

et en l'appliquant d'une part à $Y = X_n$, $Z = X$, d'autre part à $Y = X$, $Z = X_n$. On obtient

$$F(a - \epsilon) - P(|X_n - X| > \epsilon) \leq F_n(x) \leq F(a + \epsilon) + P(|X_n - X| > \epsilon).$$

On obtient le résultat en prenant la limite en $n$, puis la limite quand $\epsilon$ tend vers 0 et la continuité de $F$.

- $L^1 \Rightarrow P$ : par Markov
- $L^2 \Rightarrow L^1$ : par Cauchy-Schwarz
- $L^q \Rightarrow L^p$ : par Holder

# D-7 Quelques résultats complémentaires

## Convergence vers une constante

$$\forall c \in \mathbb{R},\ X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \iff X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} c$$

Preuve : Ici, $F(x) = P(c \leq x) = 1_{c \leq x}$. On a

$$0 \leq P(|X_n - c| > \epsilon) = P(X_n > \epsilon + c \text{ ou } X_n < c - \epsilon) \leq 1 - F_n(c+\epsilon) + F_n(c-\epsilon)$$

En prenant la limite le terme de droite tend vers $1 - 1_{c \leq c+\epsilon} + 1_{c \leq c-\epsilon} = 0$.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } |X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0 \Longrightarrow Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

$\forall g$ continue

1. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$
2. $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$
3. $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

# D-8 Deux lois fondamentales de la statistique

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$. Soit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- **Lois des grands nombres**
  Lorsque l'on fait un sondage aléatoire dans une population, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus la moyenne de l'échantillon se rapproche de celle de la population.

**Loi faible des grands nombres**

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} m$$

Preuve : $E(\bar{X}_n) = m$, $V(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ et on applique la condition suffisante de convergence en probabilité.

**Loi forte des grands nombres**

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} m$$

- **Exemples**

1. Soit $\mathbb{F}_n$ la fonction de répartition empirique de $(X_1, \ldots, X_n)$,

$$\forall x \in R, \mathbb{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \leq x}.$$

Alors, lorsque $n$ tend vers l'infini

$$\mathbb{F}_n(x) \overset{p.s.}{\to} F(x) \text{ et } \mathbb{F}_n(x) \overset{\mathcal{P}}{\to} F(x),$$

en tout point $x$ de $\mathbb{R}$.

# D-8 Deux lois fondamentales de la statistique

- **Théorème central limite (TCL)**

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- **Exemple 1: Loi de la somme de n variables aléatoires i.i.d.** Soit $S_n = n\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors,

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve : On multiplie en haut et en bas par $n$ dans le TCL.

- **Exemple 2: Théorème de Moivre-Laplace**
Soit $X_n$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{B}(n,p)$. ALors,

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve : $X_n$ a même loi que la somme de $n$ variables i.i.d. de loi de bernouilli $\mathcal{B}(p)$

- **Exemple 3: Convergence en loi d'une suite $Z_n$ de loi $\chi^2(n)$.**

$$\frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve : $Z_n$ a même loi que $S_n = \sum Z_i$ avec $Z_i$ i.i.d. de loi du $\chi^2(1)$.