Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information à Tunis

Année Universitaire
2012-2013
Première Année

# Tests statistiques

## Série n°1

**Exercice 1** *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un* $n$*-échantillon de loi* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. *On suppose qu'un expérimentateur, croyant* $\sigma^2$ *connu, utilise la borne inférieure de confiance égale à* $\overline{X} - c$, *où* $c$ *est choisi pour que le niveau soit* $1 - \alpha$. *Quel est effectivement le coefficient de sécurité de ce test si en fait* $\sigma^2$ *est un réel strictement positif supposé inconnu ?*

**Exercice 2** *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un* $n-$*échantillon de loi* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *on veut étudier les tests suivants :*

$(i)\ H_0 : \mu = 0$ *contre* $H_1 : \mu = 1$ $\quad (ii)\ H_0 : \mu \leq 0$ *contre* $H_1 : \mu > 0$
$(iii)\ H_0 : \mu = \mu_0$ *contre* $H_1 : \mu \neq \mu_0$

1. *Dans chacun des cas et pour* $\sigma = 3$ *et* $n = 25$, *et* $\alpha = 0.05$, *déterminer la région de rejet ainsi que la fonction puissance.*
2. *Tracer la fonction puissance. Que vaut la puissance du test ?*
3. *Pour les tests unilatéraux, trouver la plus petite valeur de* $n$ *pour laquelle* $\pi(\mu) \leq 0.10$ *pour* $\mu \in [0, 0.5]$, *et* $\pi(\mu) \geq 0.90$ *pour* $\mu \geq 1$ *quand on suppose* $\sigma = 1$.

**Exercice 3** *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un échantillon de loi* $\mathcal{E}(\lambda)$ *(durée de vie d'une pièce), on rappelle que* $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \curvearrowright \chi^2_{2n}$. *On veut tester* $H_0 : 1/\lambda = \mu \leq \mu_0$ *contre* $H_1 : 1/\lambda = \mu > \mu_0$.

1. *Construire un test de niveau* $\alpha$.
2. *Donner une expression de la fonction puissance de ce test en fonction de la distribution du* $\chi^2_{2n}$.
3. *On a observé les durées de fonctionnement, en jours, suivantes :*
   *3 ; 150 ; 40 ; 34 ; 32 ; 37 ; 34 ; 2 ; 31 ; 6 ; 5 ; 14 ; 150 ; 27 ; 4 ; 6 ; 27 ; 10 ; 30 ; 37*
   *Est-ce que l'hypothèse* $H_0$ *est rejetée au niveau* $0.05$ *lorsque* $\mu_0 = 31$*?*
4. Calculer la p-valeur

**Exercice 4** *Soit* $(X_1, ..., X_n)$ *un* $n$*-échantillon de loi* $\mathcal{P}(\theta)$.

1. *Utiliser l'estimateur UVMB* $\bar{X}$ *de* $\theta$ *pour construire un test de* $H_0 : \theta \leq \theta_0$ *contre* $H_1 : \theta > \theta_0$.
2. *Montrer que la fonction puissance de ce test est croissante en* $\theta$.

**Exercice 5** *Soient* $X_1, ..., X_n$ *et* $Y_1, ..., Y_p$ *deux échantillons indépendants de lois respectives* $\mathcal{E}(\theta)$ *et* $\mathcal{E}(\lambda)$. *On pose* $\Delta = \theta/\lambda$.

1. *Construire un intervalle de confiance pour $\Delta$ de coefficient de sécurité $1-\alpha$ basé sur la statistique $\bar{X}/\bar{Y}$.*

2. *Construire un test de $H_0 : \Delta = 1$ contre $H_1 : \Delta \neq 1$ de niveau $\alpha$, basé sur la statistique $\bar{X}/\bar{Y}$.*

3. *On a observé les durées, en jour, de fonctionnement suivantes pour deux marques d'un même objet:*
   *x : 3 ; 150 ; 40 ; 34 ; 32 ; 37 ; 34 ; 2 ; 31 ; 6 ; 5 ; 14 ; 150 ; 27 ; 4 ; 6 ; 27 ; 10 ; 30 ; 37*
   *y : 8 ; 26 ; 10 ; 8 ; 29 ; 20 ; 10*
   *Est-ce que l'hypothèse $H_0$ est rejetée au niveau 0.1 ?*

$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$

**Exercice 6** *Une usine fabrique des câbles dont la charge de rupture suit une loi $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ avec $\mu_0 = 99$ kg. On observe indépendamment sur dix câbles les charges de rupture suivantes (en kilos): 101 ; 102 ; 100 ; 104 ; 105 ; 99 ; 103 ; 100 ; 101 ; 105. Le nouveau procédé est-il meilleur que le précédent ? Calculer la la p-valeur du test posé.*

**Exercice 7** *On effectue sur 10 personnes deux numérations globulaires à deux dates différentes (échantillons appariés). Les résultats indiquent le nombre de globules rouges par mm$^3$, divisé par 100000.*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_0$ | 15 Janvier | 46 | 42 | 51 | 42 | 40 | 54 | 49 | 46 | 47 | 47 |
| $\mu_1$ | 2 Septembre | 47 | 47 | 44 | 45 | 54 | 50 | 48 | 48 | 45 | 55 |

*Y a-t-il évolution de la formule sanguine ? On précisera la p-valeur du test.*

**Exercice 8** *Comparaison de production de champs avec ou sans engrais : $X$ est le rendement en "livre par acre" sans engrais, $Y$ est le rendement en "livre par acre" avec engrais (la même quantité). Les observations sont, pour $n = 5$ :*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 794 | 1800 | 576 | 411 | 897 |
| $y$ | 2012 | 2477 | 3498 | 2092 | 1808 |

*On admet que les variables $X$ et $Y$ suivent des lois normales ayant même variance et d'espérances respectives $\mu_1$ et $\mu_2$.*

1. *Déterminer la loi de*

$$T_n = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{ où } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2\right]$$

   *En déduire un intervalle de dispersion pour $T_n$ puis un intervalle de confiance de $\mu_2 - \mu_1$ de niveau de confiance 0.95.*

2. *A l'aide d'un test de niveau 0.05, peut-on conclure que la quantité d'engrais utilisée pour cette expérience améliore de manière significative la production ? Quel est le niveau de signification de ce test ?*

3. *Construire un intervalle de confiance au niveau 0.90 pour $\sigma^2$.*

$\alpha$ sur feuille.

# Serie N°1 : Tests statistique

## Exercice 1 :

$$(x_1 \ldots x_n) \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$$

$$I^{C}_{1-\alpha}(\mu) = P(\bar{x} > c^*) = 1-\alpha$$

$$= \left[ \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}} > \frac{c^*-\mu}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}} \right] = 1-\alpha$$

si σ n'est pas connu on utilise Student au lieu de la normale on standardise par $\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{n(n-1)}}$ ...

$$P[\mu > \bar{x} - c] = 1-\alpha$$

$$P\left[ \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right] = 1-\alpha$$

$$F_{N(0,1)}\left( \frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha)$$

$$P[\mu > \bar{x} - c] = P\left[\mu > \bar{x} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha)\right]$$

$$= P\left[\bar{x} - \mu < \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha)\right]$$

$$= P\left[ \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}} < \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}} F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha) \right]$$

$$= F_{\mathcal{T}_{n-1}}\left( \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}} F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha) \right)$$

## Exercice 2 :

1/ - $H_0 : \mu = 0$ contre $H_1 : \mu = 1$ (... $1 > 0$ on prend la ...)

$\bar{x}$ : stat. du test.

région de rejet : $R = \{\bar{x} > c\}$

$$\sup_{H_0} P(\bar{x} > c) \leq \alpha$$

$$P_{\ldots}(\bar{x} > c) = \alpha \quad (\text{loi continue on profite de la l'erreur})$$

$\pi(\mu) \leq 0{,}1 \; ; \; \mu \in [0; 0{,}5] \; ; \quad \Theta = \{0{,}1\}$

$$\pi : \Theta_1 \cup \Theta_2 \longmapsto [0,1]$$
$$\mu \longmapsto P_\mu(\bar{X} > c)$$

$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(1-\alpha)$$

$\pi(\mu) \leq 0{,}1 \; ; \mu \in [0, 0{,}5] \Rightarrow \mu = 0$

$\pi(0) \leq 0{,}1$

$\pi(\mu) \geq 0{,}9 \; ; \; \mu \geq 1 \Rightarrow \mu = 1$

$\pi(1) \geq 0{,}9$

$$\begin{cases} \pi(0) \leq 0{,}1 \\ \pi(1) \geq 0{,}9 \end{cases}$$

$$\pi(\mu) = P_\mu\left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)$$
$$= P_\mu\left( \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) > \sqrt{n}(c - \mu) \right)$$
$$= 1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{n}(c-\mu))$$

$$\begin{cases} \pi(0) \leq 0{,}1 \\ \pi(1) \geq 0{,}9 \end{cases} \iff \begin{cases} F_{\mathcal{N}(0,1)}(-\sqrt{n}\,c) \leq 0{,}1 \\ F_{\mathcal{N}(0,1)}(\sqrt{n}(1-c)) \geq 0{,}9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\sqrt{n}\,c \leq F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0{,}1) \\ \sqrt{n}(1-c) \geq F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0{,}9) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c \geq \frac{1{,}28}{\sqrt{n}} \\ c \leq \frac{-1}{\sqrt{n}} F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0{,}9) + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c \geq \frac{1{,}28}{\sqrt{n}} \\ c \leq \frac{-1{,}28}{\sqrt{n}} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}28}{\sqrt{n}} \leq \frac{-1{,}28}{\sqrt{n}} + 1$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1{,}28}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$$\Rightarrow n \geq (2{,}56)^2 \Rightarrow n \geq 6{,}55$$

ii/ $H_0 : \mu \le 0$ contre $H_1 : \mu > 0$.

$\sigma = 3$ ; $n = 25$ ; $\alpha = 0,05$

$R = \{ \bar{x} > c \} = \sup_{H_0} P_\theta ( \bar{X} > c ) \le \alpha$

$\Rightarrow \sup_{\mu \le 0} P_\theta ( \bar{X} > c ) \le \alpha$

$\Rightarrow \sup_{\mu \le 0} \left(1 - F_{N(0,1)} \left( \frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)\right) \le \alpha$

$\Rightarrow 1 - \inf_{\mu \le 0} \left( F_{N(0,1)} \left( \frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right) = \alpha$

fonction $\left( F_{N(0,1)} \left( \frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right)$ strict ↘ en $\mu$ donc :

l'Inf est atteint en 0.

$\pi(0) = \alpha$

$\mu = 0$,

$$1 - F_{N(0,1)} \left( \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha$$

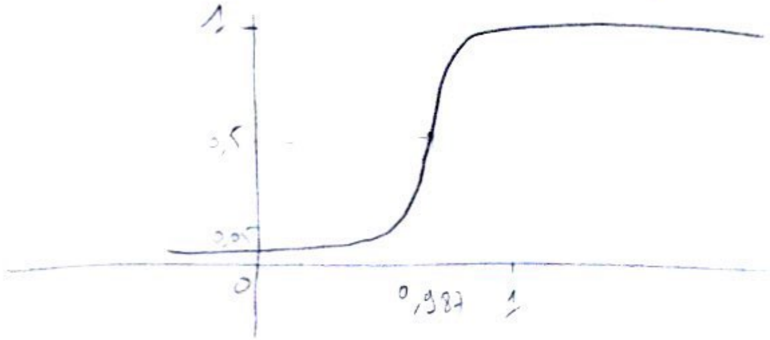
$$\Rightarrow c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} F^{-1}_{N(0,1)} (1-\alpha) \Rightarrow c = 0,987$$

Règle de décision : On rejette $H_0$ si $\bar{x} > 0,987$.

$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$\mu \longmapsto P_\mu ( \bar{X} > c )$

$$\pi(\mu) = F_{N(0,1)} \left( \frac{\mu - 0,987}{3/5} \right)$$




$\pi(\mu) = 0,5 \iff \mu = 0,987$

$\pi(0) = 0,05$.

$\pi_0 = \inf_{H_1} \pi(\mu) = \lim_{\mu \to 0^+} \pi(\mu)$

$= \inf_{\mu \ge 0} \pi(\mu)$

$= \pi(0) = 0,05$

$\Rightarrow$ Le test est sans biais.

3/ $\pi(\mu) < 0,1$ pour $\mu \in [0 ; 0,5]$.

$\pi(\mu) \ge 0,9$ pour $\mu \ge 1$.

$\pi(\mu) = F_{N(0,1)} ( \sqrt{n} ( \mu - c ) )$

$$\begin{cases} \pi(\mu) \leq 0{,}1 \\ \pi(\mu) \geq 0{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{N(0,1)}\left(\sqrt{n}(\mu - c)\right) \leq 0{,}1 & ; \mu \in [0{,}0{,}5] \\ F_{N(0,1)}\left(\sqrt{n}(\mu - c)\right) \geq 0{,}9 & ; \mu \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{n}(\mu - c) \leq -1{,}28 & ; \mu \in [0{,}0{,}5] \\ \sqrt{n}(\mu - c) \geq 1{,}28 & ; \mu \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c \geq \dfrac{1{,}28}{\sqrt{n}} + \mu \geq \dfrac{1{,}28}{\sqrt{n}} & ; \mu \in [0{,}0{,}5] \\ \sqrt{n}(\mu - c) \geq 1{,}28 & ; \mu \geq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{n}\,\mu \geq 1{,}28 + \sqrt{n}\,c \geq 1{,}28 + 1{,}28$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2{,}56}{\mu} \; ; \; \mu \geq 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 2{,}56 \Rightarrow n \geq (2{,}56)^2 = 6{,}55 \Rightarrow n = 7.$$

4°/ On observe $\bar{x} = 1{,}25$ ; Calculer la $p$ valeur.

$$\hat{\alpha} = \sup_{H_0} P\left(T(\underline{x}) \in R\right)$$

$$= \sup_{H_0} P\left(T(\underline{x}) < \bar{X}\right)$$

$$= \sup_{\mu \leq 0} P\left(1{,}25 < \bar{X}\right)$$

$$= \sup_{\mu \leq 0} \left(1 - F_{N(0,1)}\left(5(1{,}25 - \mu)\right)\right)$$

$$= 1 - \inf_{\mu \leq 0} \left(F_{N(0,1)}\left(5(1{,}25 - \mu)\right)\right)$$

$$= 1 - F_{N(0,1)}\left(5 \times 1{,}25\right)$$

$$= 1 - F_{N(0,1)}\left(6{,}25\right)$$

$$= F_{N(0,1)}\left(-6{,}25\right) < 10^{-8}.$$

Exercice 3 :

$X_1 \dots X_n \sim \mathcal{E}(\lambda) \qquad (\lambda > 0)$

$H_0 : \frac{1}{\lambda} = \mu \leq \mu_0$

$H_1 : \frac{1}{\lambda} = \mu > \mu_0$

$$f(x, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$

m/ $\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + n \operatorname{Log} \lambda\right) \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^n}(\underline{x})$

f.e à 1 paramètre.

La stat $T(\underline{X}) = \sum x_i$ stat exh complète.

$\Rightarrow T(\underline{X})$ est optimale $\Rightarrow$ elle permet de construire un test UPP

Région de rejet $R = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i > c \right\}$

$\sup_{\mu \leq \mu_0} P_\mu \left[ \sum_{i=1}^{n} X_i > c \right] \leq \alpha$

$\Rightarrow \sup_{\mu \leq \mu_0} P_\mu \left[ e\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i > e\lambda c \right] = \alpha$ (loi $\chi^2$ est continue $\Rightarrow$ on profite de l'égalité)

$\Rightarrow \sup_{\mu \leq \mu_0} \left( 1 - F_{\chi^2_{2n}}(e\lambda c) \right) = \alpha$ F est ↑ en $\mu \Rightarrow$ ↑ en $\lambda$ [illegible]

$\Leftrightarrow 1 - \inf_{\mu \leq \mu_0} F_{\chi^2_{2n}}(e\lambda c) = 1 - \inf_{\mu \leq \mu_0} F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{2c}{\mu}\right)$

$\Leftrightarrow F_{\chi^2_{2n}}\left(\frac{ec}{\mu_0}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow c = \frac{\mu_0}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(1-\alpha)$

On rejette $H_0$ si $\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\mu_0}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(1-\alpha)$

2/ $\pi : ]0,+\infty[ \longrightarrow [0,1]$

$\quad \mu \longrightarrow P_\mu \left[ \sum x_i > \frac{\mu_0}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}} (1-\alpha) \right]$

$$\pi(\mu) = 1 - P_\mu \left[ \sum x_i \leq \frac{\mu_0}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}} (1-\alpha) \right]$$
$$= 1 - P_\mu \left[ \frac{2}{\mu} \sum x_i \leq \frac{\mu_0}{\mu} F^{-1}_{\chi^2_{2n}} (1-\alpha) \right]$$
$$= 1 - F_{\chi^2_{2n}} \left( \frac{\mu_0}{\mu} F^{-1}_{\chi^2_{2n}} (1-\alpha) \right)$$

3/ $\sum_i x_i = 679$

$\mu_0 = 31$

$$c = \frac{\mu_0}{2} F^{-1}_{\chi^2_{2n}} (1-\alpha) = \frac{31}{2} F^{-1}_{\chi^2_{40}} (0,95) = \frac{31}{2} \times 55,758$$
$$= 864,12$$

Comme $\sum x_i = 679 < c = 864,12$

On décide ne pas rejeter $H_0$.

4/ Calculer la p-valeur :

$$\hat{\alpha} = \sup_{\theta \leq \theta_0} P[T(\underline{x}) > T(\underline{a})]$$
$$= \sup_{\mu \leq \mu_0} P\left[\sum x_i > 679\right]$$
$$= \sup_{\mu \leq \mu_0} P\left[\frac{2}{\mu} \sum x_i > \frac{2}{\mu} \times 679\right]$$
$$= \sup_{\mu \leq \mu_0} \left[ 1 - F_{\chi^2_{2n}} \left( \frac{1358}{\mu} \right) \right]$$
$$= 1 - \inf_{\mu \leq \mu_0} F_{\chi^2_{2n}} \left( \frac{1358}{\mu} \right)$$

$\Rightarrow$ il s'agit d'une fonction déc qui atteint l'inf en $\mu_0 = 31$.

si je décide de [illegible] $H_0$
je dis que la p-valeur
est supérieure à [illegible]

si je dois rejeter $H_0$
je dis que la p-valeur
est inférieure, [illegible]

d'où $\hat{\alpha} = 1 - F_{\chi^2_{40}} \left( \frac{1348}{31} \right)$

$\quad = 1 - F_{\chi^2_{40}} (43,48)$

on a $41,62 < 43,48 < 44,16$

$1 - 0,7 < \hat{\alpha} < 1 - 0,6$

$0,3 < \hat{\alpha} < 0,4$

On a $\hat{\alpha} \in ]0,3 ; 0,4[$ donc on décide $H_0$ ( $\alpha = 0,05$ : $\hat{\alpha} >> \alpha$ )

Exercice 8 :

via la fonction de répartition ou la fonction caractéristique on construira. On définit une loi pour le calcul de l'espérance et la variance.

$X \leadsto \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$

$Y \leadsto \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ indép

1°/ $T_n = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{\sigma}\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$

La somme de $\chi^2$ donne type $\chi^2$ ... égal à la somme ...

$$\left.\begin{array}{l}\bar{X} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu_1, \dfrac{\sigma^2}{n_1}\right) \\ \bar{Y} \leadsto \mathcal{N}\left(\mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow X_i \text{ et } Y_i \text{ indép} \Rightarrow \bar{X} \text{ et } \bar{Y} \text{ sont indép}$$

$$\Rightarrow (\bar{X} - \bar{Y}) \leadsto \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leadsto \mathcal{N}(0,1)$$

$\sigma^2$ inconnu

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2_{n_1 - 1}$$

Student

$$\sum_{j=1}^{n_2} \frac{(Y_j - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2_{n_2 - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{(Y_j - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \leadsto \chi^2_{n_1 + n_2 - 2} \quad (n_1 - 1) + (n_2$$

$$T_n = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leadsto \mathcal{T}_{n_1 + n_2 - 2}$$

$ID_{T_n} = [Q(\beta), Q(1 - \alpha + \beta)]$

$T_n$ est symétrique $\Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$

$ID_{T_n} = [F^{-1}_{\mathcal{T}_8}(0{,}025) ; F^{-1}_{\mathcal{T}_8}(0{,}975)]$

$ID_{T_n} = [-2{,}306 ; 2{,}306]$.

$IC_{0,95}(\mu_1 - \mu_2) = ?$

$$IC_{0,95}(\mu_1-\mu_2) = \left[(\bar{x}-\bar{y}) - 2,306\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ ;\ (\bar{x}-\bar{y}) + 2,306\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

App Num:

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 895,6\ (mm^3)$$

$$\bar{y} = 2377,4\ (mm^3)$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 5\,175\,742$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 30.065\,005$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5\bar{x}^2 = 1\,165\,241,2$$

$$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 - 5\bar{y}^2 = 1\,804\,871$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(y_j-\bar{y})^2\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = 371\,262$$

$$\hat{\sigma} = 609$$

$$IC_{0,95}(\mu_1-\mu_2) = \Big[-1481,8 - 1404,357\sqrt{\tfrac{2}{5}}\ ;$$

$$-1481,8 + 1404,357\sqrt{\tfrac{2}{5}}\Big]$$

$$IC_{0,95}(\mu_1-\mu_2) = [-2369,99 ; -593,60]$$

$$IC_{0,95}(\mu_2-\mu_1) = [593,60 , 2369,99]$$

2) Soit le test $H_0: \mu_1=\mu_2$ contre $H_1: \mu_1<\mu_2$

$$\Updownarrow$$

$$\mu_2-\mu_1=0 \qquad H_1: \mu_2-\mu_1>0$$

On rejette $H_0$ puisque $0 \notin IC_{0,95}(\mu_2-\mu_1)$

3) $\hat{\alpha}$ ? $\quad R = \{-T_n > c\} = \{T_n < -c\}$

$$\hat{\alpha} = \sup_{\mu_1=\mu_2} P\left[T_n(x,y) < T_n(\underline{x},\underline{y})\right)$$

$$T_n(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{-1481,8}{609\sqrt{\frac{2}{5}}} = -3,84$$

$$3,35 < 3,84 < 5,04$$

$$-5,04 < -3,84 < -3,35$$

$$0,0005 < \hat{\alpha} < 0,005$$

On rejette $H_0$ car $\hat{\alpha} < 0,005$

Exercice 7:

Soit $X$ v.a de numération Janvier.
$Y$ v.a de numération Septembre.

$X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ $\quad\quad$ $H_0 : \mu_0 = \mu_1$ contre $H_1 : \mu_0 < \mu_1$
$Y \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad\quad$ (car $\bar{x}_1 > \bar{x}_0$)

Soit $D = Y - X$

$D \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_0, \sigma^2)$

Soit $T_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{D} - (\mu_1 - \mu_0)\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (D_i - \bar{D})^2}}$

On a $\mu_1 - \mu_0 = 0$ sous $H_0$.

Alors $T_n = \sqrt{n}\dfrac{\bar{D}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(D_i - \bar{D})^2}}$

$$R = \{T > c\} = \sup_{H_0} P(T > c) \leq \alpha = \sup_{\mu_0 = \mu_1} P\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{D}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(D_i - \bar{D})^2}} > c\right) =$$

$$= P_{\mu_0 = \mu_1}\left(\frac{\sqrt{n}\,\bar{D}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(D_i - \bar{D})^2}} > c\right) = \alpha$$

$$\hat{\alpha} = \sup_{H_0} P(T(X) > T(x)) = P(T(X) > T(x)) = 1 - F_{\mathcal{T}_{n-1}}(T(x))$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{10}\;\; 1,9}{\sqrt{\frac{1}{9}\; 332,9}} = 0,988 \implies \hat{\alpha} = 1 - F_{\mathcal{T}_{n-1}}(0,988) = F(-0,98$$

$$-0,883 > -0,988 > -1,1$$

$$F^{-1}_{\mathcal{T}_{n-1}}(0,8) < F_{\mathcal{T}_{n-1}}(0,988) < F^{-1}_{\mathcal{T}_{n-1}}(0,85)$$

$$\cancel{1 - F_{\mathcal{T}_{n-1}}(1,1) < \hat{\alpha} < 1 - F_{\mathcal{T}_{n-1}}(0,883)}$$

$$0,2 > \hat{\alpha} > 0,15 \implies \text{on accepte } H_0 \text{ car } \hat{\alpha} > 0,15$$

Exercice 4 :

$(X_1, \dots, X_n) \rightsquigarrow \mathcal{P}(\theta)$

$H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$

Le modèle appartient à la f.e. $\bar{X}$ stat exhaustive avec c croissante.

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} > c \\ \gamma & \text{si } \bar{X} = c \\ 0 & \text{si } \bar{X} < c \end{cases}$$

$$\phi(X) = \mathbb{1}_{\{\bar{X} > c\}} + \gamma \mathbb{1}_{\{\bar{X} = c\}}$$

$$E_{\theta_0}(\phi(x)) = \alpha$$

$$P_{\theta_0}[\bar{X} > c] + \gamma P_{\theta_0}[\bar{X} = c] = \alpha$$

$$n\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(n\theta)$$

$$P_{\theta_0}[n\bar{X} > nc] + \gamma P_{\theta_0}[n\bar{X} = nc] = \alpha.$$

$$\gamma = \frac{\alpha - P_{\theta_0}[n\bar{X} > nc]}{P_{\theta_0}[n\bar{X} = nc]} = \frac{\alpha - (1 - F_{\mathcal{P}(n\theta_0)}(nc))}{P_{\theta_0}[n\bar{X} = nc]}$$

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

2/ $\pi(\theta) = E_\theta(\phi(X))$

$$= P[\bar{X} > c] + \gamma P[\bar{X} = c]$$

$$= 1 - F_{\mathcal{P}(n\theta)}(nc) + \gamma P[\bar{X} = c]$$

f.e et c strict. ↗ $\Rightarrow$ test UPP donc $\pi(\theta)$ est ↗