ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 2h00
Novembre 2007

Examen du module Analyse Numérique

Exercice 1 (4pt).

1. Calculer par la méthode de la puissance, la valeur propre dominante à 10^{-2} près de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ecrire l'algorithme de la méthode de la puissance inversée.

Exercice 2 (4pt). Etant donnés une matrice A triangulaire inférieure de taille (n, n) avec des 1 sur la diagonale et un vecteur b de taille n, calculer la complexité en nombre d'opérations élémentaires de la méthode de descente appliquée au système $Ax = b$.

Problème (12pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 1, & f_1 = 0, & f_2 = 1, & f_3 = 4. \end{array}$$

1. Afin de déterminer une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire, nous appliquerons la méthode des moindres carrés discrets :
   (a) Soit A la matrice associée au système des moindres carrés :
   $$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix}$$
   (b) Donner la décomposition LU de A
   (c) Résoudre le système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$ par une descente puis une remontée.
2. Calculer le polynôme de Lagrange P sur les points (x_i, f_i) pour i entre 0 et 3.
3. Quelle est la différence entre P et la droite de régression linéaire ?
4. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec $x_0 = 1$?

Bon Travail,
Ines Abdeljaoued.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 1h00
Juin 2008

Examen de contrôle du module Analyse Numérique

Exercice 1 (6pt). Etant donnés une matrice A triangulaire supérieure de taille (n, n) avec des 1 sur la diagonale et un vecteur b de taille n, calculer la complexité en nombre d'opérations élémentaires de la méthode de remontée appliquée au système $Ax = b$.

Problème (14pt). Soit $n = 3$. Nous considérons l'ensemble de points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = 1, & f_1 = 0, & f_2 = 1, & f_3 = 4. \end{array}$$

1. Afin de déterminer une approximation du nuage de points (x_i, f_i) par la droite de régression linéaire, nous appliquerons la méthode des moindres carrés discrets :
   (a) Soit A la matrice associée au système des moindres carrés :
   $$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{i=n} x_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} x_i & n+1 \end{pmatrix}$$
   (b) Donner la décomposition LU de A
   (c) Résoudre le système $A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i \\ \sum_{i=0}^{i=n} f_i \end{pmatrix}$ par une descente puis une remontée.
2. Calculer le polynôme de Lagrange P sur les points (x_i, f_i) pour $i = 0$ à 3.
3. Quelle est la différence entre P et la droite de régression linéaire ?
4. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec $x_0 = 1$?

Bon Travail,
Ines Abdeljaoued.