Examen
Méthodes de Monte Carlo

Durée: 1H30
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1

On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ suivant une loi lognormale de paramètres m et σ^2, c'est-à-dire la variable aléatoire $\log(X)$ suit la loi normale de paramètres m et σ^2. La variable aléatoire X représente les sinistres d'une compagnie d'assurance. On pose $\pi = P(X > \gamma)$, $\gamma > 0$ (γ est un seuil critique de dépassement).
1- Décrire une procédure de simulation de la loi de la variable aléatoire X.
2- Proposer un estimateur $\widehat{\pi_n}$ de π par la méthode de Monte Carlo classique.
3- Vérifier que $\pi = P(Y > \dfrac{\log\gamma - m}{\sigma})$, où Y est une variable aléatoire de loi normale centré et réduite.
4- Proposer un estimateur $\overline{\pi_n}$ de π par la méthode de la variable antithétique.
5- Justifier que $var(\overline{\pi_n}) \leq \dfrac{1}{2}var(\widehat{\pi_n})$.
6- On pose $Z = \dfrac{\log\gamma - m}{\sigma} + T$, T est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la densité g de la variable aléatoire Z et décrire une procédure de simulation de la loi de Z.
7- En utilisant la densité g. Proposer un estimateur $\widetilde{\pi_n}$ de π par la méthode de l'échantillonnage préfèrentiel.
8- Calculer $E(X)$ en fonction de m et σ^2.
9- Proposer un estimateur $\overset{\frown}{\pi_n}$ de π par la méthode de variable de contrôle.

Exercice 2

On considère X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ suivant une loi de Pareto type 2, c'est- à-dire la densité de X a pour expression $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{kc^k}{(x+c)^{k+1}} & \text{si x} > 0 \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1,2\}$ et $c > 0$.La variable aléatoire X représente les montants de sinistres dans une compagnie d'assurance. On s'intéresse aux frais dépensés pour les sinistres graves ($c = 10^6$

dinars). Une étude montre que leur coût est du type $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}, \Phi$ est une application mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ de support $]c, +\infty[$, telle que $E((\Phi(X))^2)$. On pose $\pi = E(\Phi(X))$.

1- Déterminer l'expression explicite de l'inverse à gauche $F_X^{\leftarrow}$ de la fonction de la fonction de répartition $F_X$de X.

2- Déduire une procédure de simulation de la loi de la variable aléatoire X.

3- Proposer un estimateur $\widehat{\pi_n}$ de π par la méthode de Monte Carlo classique.

4- On suppose que Φ est monotone sur $]c, +\infty[$. Proposer un estimateur $\overline{\pi_n}$ de π par la méthode de la variable antithétique.

5- Justifier que $var(\overline{\pi_n}) \leq \frac{1}{2} var(\widehat{\pi_n})$.

Dans la suite, on suppose que $\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ \frac{x}{a} + b & \text{si } x > c \end{cases}$, $a > 0$ et $b > 0$.

6- Soit Y une variable aléatoire de densité $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ \frac{\beta}{x^k} & \text{si } x > c \end{cases}$. Exprimer β en fonction de k et c.

7- Déterminer l'expression explicite de l'inverse à gauche $F_Y^{\leftarrow}$ de la fonction de la fonction de répartition F_Y de Y. Déduire une procédure de simulation de la loi de Y.

8- En utilisant la densité g. Proposer un estimateur $\widetilde{\pi_n}$ de π par la méthode de l'échantillonnage préfèrentiel.

Ex 1 :

$$X \sim \log\mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

$$Z = \log(X) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

1) Procédure de simulation de X

1. Algorithme de Box Mueller :

- Prenons $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$ $V \sim \mathcal{U}(]0,1[)$
- on pose $Z = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V)$

2. on pose $X = \exp(Z)$

2) $\pi = P(X > \gamma)$

$= E(\mathbb{1}_{\{X > \gamma\}})$

$\pi = E(H(X))$

Méthode de monthe carlo classique $\Rightarrow$ $\hat{\pi}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ avec $X_1 \dots X_n$ un n-échantillon de même loi que X

3)

$\pi = P(X > \gamma)$

$= P(\log(X) > \log \gamma)$

$= P\left(\frac{\log(X) - m}{\sigma} > \frac{\log\gamma - m}{\sigma}\right)$

on pose $Y = \frac{\log(X) - m}{\sigma}$ $\Rightarrow$ $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

4) $\pi = P\left(Y > \frac{\log\gamma - m}{\sigma}\right)$

$= E\left(\mathbb{1}_{\left\{Y > \frac{\log\gamma - m}{\sigma}\right\}}\right) = E(H(Y))$

$\pi = E(H(Y))$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Prenons : $A(y) = -y$ on a $A(Y)$ et Y on même loi

Par la méthode de l'antithétique
$\Longrightarrow \pi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{H(X_k) + H(A(X_k))}{2}$

5|

$$\mathrm{Var}(\pi_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} H(X_k) + H(A(X_k))\right)$$

$$= \frac{1}{n} \mathrm{Var}\left(\frac{H(X) + H(A(X))}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{4}\left[\mathrm{Var}(H(X)) + \mathrm{Var}(H(A(X))) + 2\,\mathrm{cov}(H(X), H(A(X)))\right]$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{2}\left[\mathrm{Var}(H(X)) + \mathrm{cov}(H(X), H(A(X)))\right]$$

or on a $\mathrm{cov}(H(X), H(A(X))) \leq 0$ car H et A sont de monotonie contraire (H est ↗ A est ↘)

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(\pi_n) < \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{Var}(H(X))}{n}}_{\mathrm{Var}(\pi^{A}_n)}$$

6] densité de Z :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

$$= P\left(\frac{\log y - m}{\sigma} + T \leq z\right)$$

$$= P\left(T \leq z - \frac{\log y - m}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{z - \frac{\log y - m}{\sigma}} f(t)\,dt$$

$\hookrightarrow$ la densité de la loi exponentiel

1er cas : $z - \frac{\log y - m}{\sigma} < 0$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z - \frac{\log y - m}{\sigma}} f(t)\,dt$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad f(t) = e^{-t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$$

2eme cas : $z - \frac{\log - m}{\sigma} \geq 0$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z - \frac{\log - m}{\sigma}} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{z - \frac{\log y - m}{\sigma}} f(t)\,dt$$

$$= \left[e^{-\lambda}\right]_0^{z - \frac{\log - m}{\sigma}} = 1 - e^{-z - \frac{\log y - m}{\sigma}}$$

$$g(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(1 - e^{-\left(z - \frac{\log \gamma - m}{\sigma}\right)}\right)$$

$$g(z) = e^{-z + \frac{\log \gamma - m}{\sigma}}$$

une procédure de simulation de Z

$$y = F_Z(z)$$

$$= 1 - e^{-z + \frac{\log \gamma - m}{\sigma}}$$

$$\Rightarrow z = -\left(\log(1-y) - \frac{\log \gamma - m}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow z = F^{-1}(y) = -\left(\log(1-y) - \frac{\log \gamma - m}{\sigma}\right)$$

Algorithme :

1. On tire $u \sim \mathcal{U}(]0,1[)$
2. on pose $z = F^{\leftarrow}(u) = -\left(\log(1-u) - \frac{\log \gamma - m}{\sigma}\right)$

7]

échantillionage préférentiel :

$$\pi = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{Y > \frac{\log \gamma - m}{\sigma}\right\}}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f_Y(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(x)}{g(x)} f_Y(x)\, g(x)\, dx$$

$$\pi = E(K(Z)) \quad \text{avec} \quad K(z) = \frac{H(x)\, f_Y(x)}{g(x)}$$

$$\overline{\pi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} K(X_k)$$

8) $E(X) = ?$

$$\cancel{E(X)} = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} \cancel{x}\, f_X(x)\, \cancel{dx}$$

$$E(X) = E\left(e^{\frac{Y-m}{\sigma}}\right) \quad \text{avec} \quad Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$E(X) = E\left(e^{\sigma Y + m}\right) \quad \text{avec } Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma y + m)} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma y + m} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\sigma y + m - \frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

$$= e^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

$$= e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt}_{=1}$$

on pose $t = y - \sigma$

$$E(X) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$$

g ~~$\frac{}{n}$~~ on a $E(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$

$$\Rightarrow \tilde{\pi}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(H(X_k) - \hat{b}\left(X - e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}\right)\right)$$

avec $$\hat{b} = \frac{\frac{1}{\ln}\sum_{k=1}^{\ln} H(X_k)X_k - \frac{m}{\ln}\sum_{k=1}^{\ln} H(X_k)}{\frac{1}{\ln}\sum_{k=1}^{\ln}(X_k - m)^2}$$

Exercice 02 :

1) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

1er cas : si $x \leq 0$

$$F_X(x) = 0$$

2e cas : si $x > 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{k c^k}{(t+c)^{k+1}}\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{k c^k}{(t+c)^{k+1}}\,dt}_{=0} + \int_{0}^{x} \frac{k c^k}{(t+c)^{k+1}}\,dt$$

$$= \left[-k c^k \cdot \frac{(t+c)^{-k}}{k}\right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{c^k}{(\ldots)^k}$$

g ~~$\frac{}{n}$~~ on a $E(X) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$

$$\Rightarrow \tilde{\pi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(H(X_k) - \hat{b}\left(X - e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \right) \right)$$

avec $$\hat{b} = \frac{\frac{1}{\ell n} \sum_{k=1}^{\ell n} H(X_k) X_k - \frac{m}{\ell n} \sum_{k=1}^{\ell n} H(X_k)}{\frac{1}{\ell n} \sum_{k=1}^{\ell n} (X_k - m)^2}$$

Exercice 02 :

1) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

1er cas : si $x \leq 0$

$$F_X(x) = 0$$

2e cas : si $x > 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{k c^k}{(t + c)^{k+1}}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{k c^k}{(t+c)^{k+1}}\, dt}_{0} + \int_{0}^{x} \frac{k c^k}{(t+c)^{k+1}}\, dt$$

$$= \left[-k c^k \cdot \frac{(t+c)^{-k}}{k} \right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{c^k}{(x+c)^k}$$

$$y = 1 - \frac{c^b}{(x+c)^b} \Rightarrow \cancel{x = 1 - y}$$

$$\Rightarrow 1 - y = \frac{c^b}{(x+c)^b}$$

$$\Rightarrow (x+c)^b = \frac{c^b}{1-y}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[b]{\frac{c^b}{1-y}} - c$$

$$\Rightarrow x = \frac{c}{(1-y)^{\frac{1}{b}}} - c$$

$$\Rightarrow F^{-}$$

$$\Rightarrow F_X^{\leftarrow}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{c}{(1-\cancel{x})^{\frac{1}{b}}} - c & \text{sinon} \end{cases}$$

2) par la méthode d'inversion

1. tirer $u \sim \mathcal{U}(]0,1[)$
2. on pose $X = F_X^{\leftarrow}(u)$

3) $\hat{\pi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi(x_k) \{$