Cours de microéconomie
Pré-rentrée de licence

Christelle Dumas

Table des matières

Chapitre 1

Le consommateur

La théorie néo classique appréhende les phénomènes sociaux à partir de la reconstruction des motivations individuelles selon le principe de "l'individualisme méthodologique". Cette méthodologie traite l'individu comme fondamentalement *rationnel,* rationnalité qui, dans la théorie économique orthodoxe, est celle de l'*homo-oeconomicus* se traduisant par un "comportement maximisateur". En d'autres termes, le comportement des individus s'analyse à partir de la maximisation sous contrainte d'une fonction d'utilité.

1.1 Préférences

1.1.1 Espace des objets

Nous considérons un consommateur confronté à un ensemble X de paniers de consommation possibles. Il s'agit de la liste complète des biens et des services sur lesquels porte le problème de choix.

Rq :

- importance du terme "complet". Quand on analyse un problème de choix, il faut veiller à inclure tous les biens concernés dans la définition du panier de consommation.
- pour avoir une analyse des choix du consommateur la plus générale possible, il faut non seulement avoir une liste complète des biens que le consommateur est susceptible d'acquérir, mais aussi une description de l'époque, du lieu et des circonstances dans lesquelles il peut les consommer (contexte statique : paniers de consommation $x = (x_1, ..., x_n)$;

contexte temporel : suite de paniers de consommation ; incertitude : perspective aléatoire)
– de façon générale, les quantités de biens sont supposées positives, mais ce n'est pas nécessairement le cas.

Dans la suite, nous supposerons que le panier de consommation est composé de deux biens (l'un des deux représentant l'ensemble des autres biens). On note x_1 la quantité de bien 1 et x_2 la quantité de bien 2.

1.1.2 Relation de préférence

Les préférences : relation de "classement" des objets (i.e. le consommateur est supposé avoir des préférences à l'égard des paniers de consommation appartenant à X).

Définition des relations de préférences

La relation de préférence, notée $\succsim$, est une relation binaire sur les ensembles d'alternatives de X.

La relation de préférence stricte $\succ$ est définie par :

$$x \succ y \Longleftrightarrow x \succsim y \text{ mais non } y \succsim x$$

La relation d'indifférence $\sim$ est définie par :

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \succsim y \text{ et } y \succsim x$$

Hypothèses concernant les préférences

Axiome 1 *La relation de préférence est une relation complète, i.e.* $\forall$ x *et* y *appartenant à* X*, soit* $x \succsim y$*, soit* $y \succsim x$*, soit les deux simultanément.*

Le consommateur est toujours en mesure de comparer deux paniers de biens.

Axiome 2 *La relation de préférence est une relation réflexive, i.e.* $\forall$ x *appartenant à* X, $x \succsim x$.

Tout panier est au moins aussi désirable que lui-même.

Axiome 3 *La relation de préférence est une relation transitive, i.e.* $\forall$ x, y *et* z *appartenant à* X*, si* $x \succsim y$ *et* $y \succsim z$*, alors* $x \succsim z$.

Ce troisième axiome est plus problématique. Il n'est pas évident qu'il s'agisse là d'une propriété que les préférences devraient *nécessairement* avoir. La transitivité est une hypothèse concernant les comportements de choix des individus. La question est de savoir si elle correspond raisonnablement à la façon dont les individus se comportent.

$\rightarrow$ que penser d'une personne qui prétend préférer x à y et y à z et en même temps déclarer préférer z à x ? Comment ce consommateur se comporterait-il s'il était confronté à des choix entre les trois paniers x, y et z ? Il lui serait difficile de choisir le panier qu'il préfère parce que, quel que soit le panier choisi, il y en aurait toujours un autre préféré. Pour construire une théorie dans laquelle les individus choisissent "ce qu'il y a de meilleur" ("comportement maximisateur" de l'*homo-oeconomicus)*, les préférences doivent satisfaire l'axiome de transitivité (ou une propriété similaire).

Rq :

- Si les préférences ne sont pas transitives, il existe des ensembles de paniers parmi lesquels il n'y a pas de paniers préférés.
- Exemples de préférences non transitives : problème de choix parmi différentes loteries, agrégation de trois points de vue dans le cas d'un vote (Paradoxe de Condorcet).

Nous venons de voir les 3 propriétés qui sont quasi-systématiquement supposées pour les préférences ; les suivantes sont moins nécessaires.

Axiome 4 *La relation de préférence est une relation continue, i.e.* $\forall y$ *appartenant à* X*, les ensembles* $\{x/x \succsim y\}$ *et* $\{x/x \precsim y\}$ *sont des ensembles fermés.*

Cette hypothèse est nécessaire pour exclure certains comportements discontinus. La conséquence la plus importante de la continuité est la suivante : si y est strictement préféré à z et si x est un panier suffisamment proche de y, x doit être strictement préféré à z.

Rq : hypothèse technique importante. Contre exemple, les préférences lexicographiques définies dans $\mathbb{R}^2$ par $x = (x_1, x_2) \succsim y = (y_1, y_2)$ si "$x_1 > y_1$" ou "$x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2$".

Axiome 5 *La monotonicité faible, i.e. si* $x \geq y$ *alors* $x \succsim y$*.*

Une quantité supérieure ou égale de chaque bien est au moins aussi désirable.

Axiome 6 *La monotonicité forte, i.e. si* $x > y$ *alors* $x \succ y$.

Rq : si l'un des biens est indésirable, la monotonicité n'est plus vérifiée. Dans ce genre de cas, on peut cependant redéfinir le bien comme l'absence du bien non désirable. Les préférences relatives aux biens ainsi redéfinis satisfont à l'axiome de monotonicité.

Axiome 7 *La convexité, i.e. si* x, y *et* z *appartiennent à* X *et que* $x \succsim z$ *et* $y \succsim z$, *alors* $tx + (1-t)y \succsim z$ *pour tout* $0 \leq t \leq 1$.

Axiome 8 *La convexité stricte, i.e. étant donné* $x \neq y$ *et* z *appartiennent à* X, *si* $x \succsim z$ *et* $y \succsim z$, *alors* $tx + (1-t)y \succ z$ *pour tout* $0 \leq t \leq 1$.

La convexité des préférences reflète le goût pour le mélange des consommateurs (moyennes préférées aux extrêmes). Elle implique que l'ensemble des paniers faiblement préférés est un ensemble convexe.

Rq : pour des préférences convexes, les courbes d'indifférence peuvent inclure des segments de droite, alors que pour des préférences strictement convexes, les courbes d'indifférences ont toujours une allure incurvée.

1.1.3 Courbes d'indifférence

Les préférences peuvent être décrite graphiquement par les courbes d'indifférence, lieu des paniers entre lesquels l'individu est exactement indifférent.

Proposition 9 *Des courbes d'indifférence correspondant à des niveaux de satisfaction différents ne peuvent pas se croiser.*

Preuve. Soient x, y et z trois paniers de biens tels que x soit situé sur une courbe, y sur une autre et z à l'intersection des deux. Par hypothèse, les courbes correspondent à des niveaux différents de satisfaction de sorte qu'un des paniers, par exemple x est strictement préfére à y. Par définition des courbes d'indifférence $x \sim z$, $y \sim z$ d'où la contradiction. ■

Pour tracer les courbes d'indifférence, il suffit de partir d'un panier quelconque (x_1, x_2) et de se demander "pour une variation donnée de consommation de bien 1, quelle est la variation de bien 2 nécessaire pour que l'individu soit indifférent entre $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)$ et (x_1, x_2)?"

Rq : la monotonicité implique que les courbes d'indifférence ont une pente négative.

Définition 10 *On définit ainsi le taux marginal de substitution entre le bien 1 et le bien 2 comme la quantité $\Delta x_2/\Delta x_1$ lorsque les variations sont infiniment petites :*

$$TMS_{12}(x) = \lim_{dx_1 \to 0} \frac{dx_2}{dx_1}$$

où dx_2 et dx_1 sont tels que $(x_1, x_2) \sim (x_1 - dx_1, x_2 + dx_2)$.

NB : selon cette définition, dx_1 et dx_2 sont toujours de même signe : il faut une augmentation de x_2 pour compenser la diminution de x_1 ; le TMS est donc toujours positif.

En dimension 2, le TMS s'interprète de façon géométrique (et au signe près) comme la pente de la tangente à la courbe d'indifférence.

(Inserer graphiques)

1.1.4 Préférences rationnelles

Définition 11 *Une relation de préférence $\succsim$ est dite rationnelle si elle est complète, réflexive et transitive.*

1.1.5 Préférences et utilité

Une fonction d'utilité est une fonction $u(x)$ qui associe une valeur numérique à chaque élément de l'ensemble des choix X en ordonnant les éléments de X en lien avec les préférences individuelles.

Définition 12 *Une fonction u de X dans $\mathbb{R}$ est une fonction d'utilité "représentant" la relation de préférence $\succsim$ si, pour tout x et y de X,*

$$x \succsim y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Théorème 13 *Soit une relation de préférences satisfaisant les axiomes précédents (préférences rationelles, continues et strictement croissantes). Il existe toujours une fonction d'utilité continue et strictement croissante qui la représente.*

Intuition de la construction (graphique) : on définit $u(x)$ comme la distance $O\overline{x}$ où $\overline{x}$ est le point situé sur la même courbe d'indifférence que x et appartenant à la bissectrice.

Rq : la fonction d'utilité représentant la relation de préférence $\succsim$ n'est pas unique. Elle est définie à une fonction monotone croissante près, i.e. l'utilité est un concept ordinal. Notamment, si l'on écrit que $U(x) = 2U(y)$, on peut conclure que le panier de biens x procure plus de satisfactin que le panier de biens y, mais pas 2 fois plus de satisfaction.

Lien avec les notions précédentes

Les préférences doivent être rationnelles pour qu'on puisse les représenter par une fonction d'utilité, mais toute les relations de préférences rationnelles ne peuvent pas être représentées par une fonction d'utilité (ex : préférences lexicographiques, qui ne sont pas continues).

Les courbes d'indifférences sont les courbes de niveau des fonctions d'utilité.

L'utilité marginale du bien i au point x, définie par $\partial U/\partial x_i(x)$ correspond à l'accroissement d'utilité généré par une augmentation infinitésimale de x_i si toutes les autres quantités restent constantes. En particulier, la variation de x_j nécessaire pour compenser une variation dx_i est telle que :

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial U}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0$$

donc :

$$TMS_{ij}(x) = \frac{\partial U/\partial x_i(x)}{\partial U/\partial x_j(x)}.$$

Application : la Cobb-Douglas

$$U(x_1, x_2) = (x_1)^\alpha (x_2)^\beta$$

Calcul et représentation des courbes d'indifférences et des TMS.

1.2 Ensembles de choix du consommateur

1.2.1 Ensembles de choix ou ensembles de consommation

Les ensembles de consommation sont limités par un certain nombre de contraintes physiques. L'exemple le plus simple en est qu'il est impossible pour un individu de consommer une quantité négative de pain ou d'eau.

Définition 14 *Un ensemble de consommation est un sous-ensemble de l'espace des biens $\mathbb{R}^L$, noté $X \in \mathbb{R}^L$, dont les éléments sont les paniers qu'un individu peut consommer connaissant les contraintes physiques imposées par son environnement.*

Exemples :
- Consommation de pain et de loisir dans une journée : les niveaux de consommation des deux biens ne peuvent être négatifs et la consommation de plus de 24 heures de loisir par jour est impossible.
- Consommation d'un bien parfaitement divisible et d'un bien ne pouvant prendre que des valeurs entières non négatives (bien durable, par exemple).
- Possibilité de contraintes institutionnelles (maximum de 16 heures de travail par jour, par exemple).

1.2.2 Ensemble de budgets

En plus des contraintes physiques, le consommateur fait face à un autre ensemble de contraintes : les contraintes économiques. En effet, son choix de consommation est restreint aux biens qu'il a les moyens de s'offrir. Pour formaliser cette contrainte, on introduit les deux hypothèses suivantes.

Axiome 15 *Principe des marchés complets :*
Tous les biens sont échangés sur le marché à des prix connus de tous.

Dans la suite, pour des questions de simplicité, nous ferons toutefois l'hypothèse que $p > 0$, i.e. les prix de tous les biens sont positifs.

Axiome 16 *Consommateur "price-taker" :*
Les consommateurs prennent les prix sur les marchés comme donnés.

Cette hypothèse est valide si le comportement de consommation ne modifie pas le prix du bien échangé. Elle a des chances d'être vérifiée si la demande des consommateurs pour les différents biens représente une petite partie seulement de la demande totale de ces biens.

Soit w le revenu ou la richesse d'un individu, l'ensemble des paniers de consommation qu'il peut s'offrir est donné par

$$p \cdot x = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n \leq w$$

Définition 17 *L'ensemble de budget* $\mathcal{B}_{p,w} = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}$ *est l'ensemble de tous les paniers qu'un consommateur faisant face à un niveau de prix p et ayant un revenu w peut s'offrir.*

Définition 18 *En dimension 2, la droite de budget est l'ensemble des paniers de biens* (x_1, x_2) *tels que* $\{(x_1, x_2) \in X : p_1 \times x_1 + p_2 \cdot x_2 = w\}$.

Rq :
- la pente de la droite de budget donne le taux d'échange entre les deux biens.
- si le prix d'un des biens diminue, l'ensemble de budget augmente puisque le consommateur peut s'offrir plus de biens (grahique).

1.3 Maximisation de l'utilité

1.3.1 Programme du consommateur

Le consommateur choisit le panier qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire et contrainte physique :

$$\begin{aligned} & \max U(x) \\ sc: \quad & p \cdot x \leq R \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Rq :
- Le programme (1.1) a toujours au moins une solution. De plus, si U est strictement quasi concave (i.e. si les préférences satisfont l'hypothèse de stricte convexité), la solution est unique.
- La solution est indépendante du choix de la fonction d'utilité représentant les préférences.
- Si l'on multiplie tous les prix et le revenu par une même constante positive λ, la solution est inchangée.
- Le panier choisi sature la contrainte budgétaire
- Résolution graphique

(*Inserer résolution graphique dans le cas de deux biens*)

1.3.2 "Résolution économique" et TMS

Soit x^* le panier solution de 1.1. Comme $p \cdot x^* = R$, l'une au moins des composantes de x^*, par exemple x_l est strictement positive.

Soit k un bien quelconque. Considérons la transaction suivante : on renonce à une "petite" quantité de bien l, soit dx_l, pour acheter un supplément dx_k de bien k. La contrainte budgétaire impose

$$dx_l = \frac{p_k}{p_l} \cdot dx_k$$

Si dx_l était inférieure à $TMS_{kl} \cdot dx_k$, l'augmentation de x_k compenserait, et au delà, le consommateur de la perte dx_l. La transaction augmenterait donc strictement l'utilité de l'agent, ce qui est impossible si x^* est la solution de 1.1. On a donc

$$dx_l = \frac{p_k}{p_l} \cdot dx_k \geq TMS_{kl} \cdot dx_k$$

Si x_l est positif, on peut permuter k et l dans le raisonnement et l'inégalité précédente devient une égalité.

Proposition 19 *Soit x^* la solution du programme (C). Pout tout bien l tel que $x_l^* > 0$, on a*

$$TMS_{kl}(x^*) = \frac{U_k(x^*)}{U_l(x^*)} \leq \frac{p_k}{p_l} \qquad \textit{pour tout } k$$

Si de plus $x_k^* > 0$, alors

$$TMS_{kl}(x^*) = \frac{U_k(x^*)}{U_l(x^*)} = \frac{p_k}{p_l}$$

A l'optimum, si tous les biens sont consommés, le rapport des utilités marginales de deux biens est toujours égal au rapport des prix de ces biens.

1.3.3 Résolution (Kuhn et Tucker)

Outil mathématique pour la résolution de programme de maximisation sous contrainte : le lagrangien.

Au lieu de maximiser U, on maximise L :

$$L(x, \lambda, \mu_1, ..., \mu_n) = U(x) - \lambda (p \cdot x - R) + \sum \mu_i x_i$$

où $\lambda, \mu_1, ..., \mu_n$ sont des nombres positifs appelés multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des contraintes.

Intuition : on maximise l'utilité en ajoutant une pénalité à ne pas satisfaire la contrainte. Une fois le programme résolu, le multiplicateur de Lagrange correspond à l'utilité marginale procurée par le désserrement de la contrainte.

Théorème de Kuhn et Tucker :

- un vecteur x^* est solution de 1.1 s'il existe des valeurs $\lambda^*, \mu_1^*, ..., \mu_n^*$ non négatives telles que

$$U_k(x^*) - \lambda p_k + \mu_k = 0 \qquad \text{pour tout } k$$

  et que les contraintes soient satisfaites.
- un multiplicateur de Lagrange est nul si la contrainte correspondante n'est pas saturée à l'optimum

$$\lambda > 0 \text{ et } \mu_k \geq 0, \text{ avec } x_k^* > 0 \Longrightarrow \mu_k = 0$$

Application à la résolution du programme du consommateur

Soit l tel que $\mu_l = 0$ alors :

$$U_l(x^*) - \lambda p_l = 0.$$

Si k est tel que $\mu_k > 0$ alors :

$$U_k(x^*) - \lambda p_k < 0,$$

d'où :

$$\frac{U_k(x^*)}{U_l(x^*)} < \frac{p_k}{p_l}$$

Et si $\mu_k = 0$ alors :

$$\frac{U_k(x^*)}{U_l(x^*)} = \frac{p_k}{p_l}$$

.

1.4 Exercices sur le consommateur

1.4.1 Exercice sur l'écriture de contrainte

A inclure partiellement dans le cours.

1.4.2 Résolution de programme du consommateur

Soit un consommateur dont les préférences peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante : $U(y_1, y_2) = 2y_1^{1/2} + \frac{1}{2}y_2^{1/2}$.

1. Ecrire l'équation du TMS entre les 2 biens.
2. Déterminer le panier optimal du consommateur lorsque $p_1 = 4$, $p_2 = 2$ et $R = 18$. Quel est le niveau de satisfaction du consommateur ?
3. Retrouver les mêmes résultats en utilisant le Lagrangien associé au programme du consommateur.

1.4.3 Corrigé

$$U(y_1, y_2) = 2y_1^{1/2} + \frac{1}{2}y_2^{1/2}$$

Taux Marginal de Substitution

$$\begin{aligned}
\mathrm{TMS}_{1/2} &= \frac{\partial U/\partial y_1}{\partial U/\partial y_2} = \frac{y_1^{-1/2}}{\frac{1}{4}y_2^{-1/2}} \\
&= 4.\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}
\end{aligned}$$

Allocation optimale

On égalise le TMS au rapport des prix :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TMS}_{1/2} &= \frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{2} = 2 \\
\text{d'où} \quad 2\sqrt{y_2} &= \sqrt{y_1} \\
\text{donc} \quad 4y_2 &= y_1
\end{aligned}$$

La contrainte budgétaire s'écrit : $4.y_1 + 2.y_2 = 18$, d'où :

$$y_1 = 4 \quad \text{et} \quad y_2 = 1$$

Le niveau d'utilité atteint vaut : $U = 2.2 + \frac{1}{2}.1 = \frac{9}{2}$.

Maximisation du Lagrangien associé au programme du consommateur

Le programme du consommateur est :

$$\begin{aligned} &\max U(y_1, y_2) \\ s.c. \quad &p_1 y_1 + p_2 y_2 \leq R \end{aligned}$$

Il y a deux façons de considérer le problème puisque la contrainte budgétaire est une contrainte d'inégalités :
- soit on écrit le programme avec une contrainte d'inégalités et on se place dans le cadre d'une optimisation avec contrainte d'inégalité ;
- soit on argumente pour dire que de toute façon la contrainte est saturée (équivalent à la loi de walras) et on se place dans le cadre d'une optimisation avec contrainte d'égalité, ce qui est formellement plus simple.

Il suffit pour se placer dans le 2nd cas de dire que si la contrainte n'était pas saturée, on choisirait y_1 légèrement plus grand (ce qui est possible puisque la contrainte n'est pas saturée) et y_2 au même niveau : ainsi on augmente le niveau de l'utilité et on respecte la contrainte d'inégalité. Donc si l'on est à l'optimum, la contrainte est nécessairement saturée. On définit donc le lagrangien par :

$$L = U(y_1, y_2) + \lambda[p_1 y_1 + p_2 y_2 - R]$$

Une condition nécessaire est la condition du premier ordre, c'est-à-dire une dérivée nulle pour le lagrangien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} &= \frac{\partial U}{\partial y_1}(y_1, y_2) + \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} &= \frac{\partial U}{\partial y_2}(y_1, y_2) + \lambda p_2 = 0 \end{aligned}$$

La 1ère équation implique :

$$\lambda = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial U}{\partial y_1}$$

donc en injectant dans la deuxième, on retrouve la formule donnée par le TMS :

$$\frac{\partial U/\partial y_1}{\partial U/\partial y_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Cette façon de faire le calcul vous permettra de ne jamais vous tromper dans le sens du TMS. La fin du calcul est exactement la même que celle effectuée auparavant. Cette méthode permet aussi d'intégrer toutes sortes de contraintes et de résoudre de façon systématique des problèmes plus compliqués qu'avec le TMS (notamment lorsque les contraintes ne sont pas nécessairement saturées). Il faut être capable de faire le calcul des 2 façons : dans le cadre de l'exemple simple que nous venons de voir, il n'y a pas de différence fondamentale entre les deux, mais dans certains cas une méthode est plus appropriée que l'autre.

1.4.4 Arbitrage consommation-loisir

Soit un consommateur dont la fonction d'utilité prend en compte la consommation C (dont le prix est p), la monnaie M qu'il détient et le temps de loisir $l_0 - l$ (l_0 mesure le maximum d'heures de travail que le consommateur peut physiquement fournir) de la façon suivante :

$$U = a \log C + b \log M + d \log(l_0 - l)$$

Le consommateur a un salaire horaire w et une encaisse de départ M_0.

1. Quel doit être le signe de a, b et d si on a un consommateur "normal" ?
2. Comment s'appelle une telle fonction d'utilité ?
3. Si l'étude est faite sur une journée, quelle est la valeur maximale de l_0 ?
4. Comment s'écrit la contrainte budgétaire auquel fait face le consommateur ? Le loisir s'apparente-t-il à une consommation ? quel est son prix ?
5. Déterminer les consommations, quantités de monnaie et temps de travail optimaux.

1.4.5 Corrigé

Interprétation de l'énoncé

1. On peut considérer que la satisfaction du consommateur augmente lorsque sa consommation, son encaisse monétaire et son temps de loisir

augmentent ; donc $a, b, d > 0$. Cependant, on notera que la forme fonctionnelle étant un log, l'utilité augmente de moins en moins vite lorsque ces consommations augmentent (l'utilité marginale est décroissante).

2. On peut remarquer que si l'on compose la fonction d'utilité proposée par la fonction exponentielle, qui est croissante, on obtient la forme standard d'une Cobb-Douglas :

$$U_2 = C^a M^b (l_0 - l)^d.$$

3. Une journée comportant au maximum 24 heures, on aura $l_0 = 24$ au plus.
4. La contrainte budgétaire du consommateur s'écrit :

$$pC + M \leq M_0 + wl,$$

ce qui peut aussi se réécrire :

$$pC + w(l_0 - l) + M \leq M_0 + wl_0$$

Cette écriture fait apparaître le temps de loisir comme une consommation dont le prix est w et wl_0 est le revenu de plein temps (le revenu qu'aurait le consommateur s'il travaillait pendant tout son temps disponible).

Résolution du programme

La contrainte budgétaire sera saturée puisque l'utilité est croissante en chacun de ses arguments. On va aussi considérer que le revenu disponible est strictement positif et que, par conséquent, la consommation, la demande de monnaie et le temps de loisir sont strictement positifs. Le programme du consommateur s'écrit alors :

$$\begin{array}{rc} & \max U \\ sc: & pC + w(l_0 - l) + M = M_0 + wl_0 \\ & l \geq 0 \end{array}$$

On maximise donc le lagrangien :

$$L = a \log C + b \log M + d \log(l_0 - l) - \lambda(M_0 + wl - pC - M) + \mu l$$

Les conditions du premier ordre sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial C} &= \frac{a}{C} + \lambda p = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial M} &= \frac{b}{M} + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial l} &= -\frac{d}{l_0 - l} - \lambda w + \mu = 0
\end{aligned}$$

Il y a deux cas selon que $\mu = 0$ (et $l < 0$, c'est une solution intérieure) ou que $\mu > 0$ (et $l = 0$, c'est une solution de coin).

Dans le premier cas, les CPO induisent :

$$\begin{aligned}
pC &= \frac{a}{b} \cdot M \\
w(l_0 - l) &= \frac{d}{b} \cdot M
\end{aligned}$$

et en réintroduisant dans la contrainte budgétaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
pC^* &= \frac{a}{a+b+d} \cdot (M_0 + wL_0) \\
M^* &= \frac{b}{a+b+d} \cdot (M_0 + wL_0) \\
w(l_0 - l^*) &= \frac{d}{a+b+d} \cdot (M_0 + wL_0)
\end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on a la même première CPO que précédemment et en utilisant la CB et $l = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
pC^* &= \frac{a}{a+b} \cdot M_0 \\
M^* &= \frac{b}{a+b} \cdot M_0 \\
l^* &= 0
\end{aligned}$$

L'individu ne travaille pas (et atteint sa consommation maximale de loisir), le revenu est partagé entre monnaie et consommation.

Quand est-on dans quel cas ? La solution du premier cas est valide tant que le temps de loisir ne dépasse pas l_0, i.e. :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{a+b+d} \cdot (M_0 + wl_0) \leq wl_0 \\
\Leftrightarrow \quad & M_0 \leq \frac{a+b}{d} \cdot l_0
\end{aligned}$$

Lorsque le consommateur détient beaucoup de revenu sans avoir à travailler, il souhaiterait consommer beaucoup de loisir (plus qu'il ne peut) et ne travaille pas du tout.

Chapitre 2

Le Producteur

2.1 Technologie et ensembles de production

2.1.1 Input, output, ensembles de production

Supposons que la firme dispose de n biens pouvant être utilisés comme des inputs (facteurs de production) et/ou outputs (facteurs produits). L'output net d'un bien est donné par la quantité de ce bien produit moins la quantité consommée.

Définition 20 *Un plan de production est défini par la liste des outputs nets des différents biens. On le notera $Y = (y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_k)$ où y contient la liste des outputs et x celle des inputs ; par convention, les valeurs de x sont négatives.*

Définition 21 *L'ensemble de tous les plans de production techniquement réalisables est appelé ensemble de production de la firme.*

Rq : À court terme, certains input de la firme peuvent être fixes de sorte que seuls les plans de production compatibles avec ces facteurs fixes sont possibles. A long terme, ces mêmes facteurs peuvent être variables de sorte que les possibilités techniques de la firme peuvent être différentes.

2.1.2 Propriétés des ensembles de production

Soit Y un ensemble de production. Les propriétés possibles de l'ensemble de production peuvent être les suivantes :

- Y est non vide : i.e. il est toujours possible de ne rien produire
- Monotonicité ou libre disposition
  $\forall y \in Y$,et $y' \leq y$,alors $y' \in Y$
  i.e. on peut toujours produire moins avec les mêmes inputs ou autant avec plus d'inputs (avec convention inputs comptés négativement)
- Divisibilité
  Pour tout $y \in Y$ et tout scalaire λ positif (ou nul) et inférieur ou égal à l'unité, le plan $y' = \lambda y$ appartient à Y
  i.e. le plan de production y est utilisable en réduisant les inputs et les outputs dans la même proportion
- Additivité
  Pour tout $y \in Y$ et $y' \in Y$, le plan $z = y + y'$ appartient à Y
- Convexité
  Pour tout $y \in Y$ et $y' \in Y$, le plan $z = yx + (1 - \lambda)\, y'$ appartient à Y pour tout scalaire λ positif (ou nul) et inférieur (ou égal) à l'unité
- Continuité
  Pour tout $y \in Y$ et tout voisinage V_y de y, il existe $y' \in V_y$ tel que $y' \in Y$

2.1.3 Fonction de production

Plan de production efficace

Définition 22 *y^1 est dit techniquement efficace s'il appartient à l'ensemble Y des productions nettes possibles et s'il n'existe dans Y aucun autre vecteur y^2 tel que*

$$y_h^2 \geq y_h^1 \qquad \textit{pour } h = 1, 2, ..., n$$

Fonction de production

Dans la plupart des processus de production actuels, l'ensemble des biens qui peuvent être produit est distinct de l'ensemble des inputs. Dans ce cas, il peut être pratique de distinguer les inputs x des outputs y avec comme convention que les inputs sont des quantités positives.

Si la firme produit un seul output, il est possible de définir la fonction de production comme suit :

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \text{ est l'output maximum associé à } -x \in Y\}$$

i.e. la fonction de production $f(x)$ détermine le maximum d'output qui peut être produit à partir d'une quantité d'input donnée.

Isoquantes

Pour un niveau d'output y donné, l'isoquante est la courbe de l'ensemble des paniers d'inputs qui permettent de produire exactement ce niveau d'outuput.

Exemples de fonctions de production : Cobb-Douglas, CES, Leontieff

(Inserer graphiques isoquantes de fonctions de production usuelles)

2.1.4 Taux de substitution technique

Fonction de production à deux inputs Soit f une fonction de production à deux inputs différentiable

$$y = f(x_1, x_2)$$

Le long d'une isoquante, on a

$$0 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

d'où

$$TST_{12} \equiv \left| \frac{dx_2}{dx_1} \right| = \frac{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}}$$

Cas général

$$TST_{lk} \equiv \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}}$$

Le taux de substitution technique mesure l'ajustement de la quantité d'un input nécessaire pour maintenir le niveau d'output constant lorsque la quantité d'un autre output varie marginalement. Il est égale à la valeur absolue de la pente de la fonction de production au point x.

2.1.5 Rendements d'échelle

Définition 23 *Une technologie présente des* <u>*rendements d'échelle constants*</u> *si $f(tx) = t\,f(x)$ pour $t \geq 0$, i.e. la fonction de production est homogène de degré 1*

Définition 24 *Une technologie présente des* <u>*rendements d'échelle croissants*</u> *si $f(tx) > t\,f(x)$ pour tout $t > 1$.*

Définition 25 *Une technologie présente des* <u>*rendements d'échelle décroissants*</u> *si $f(tx) < t\,f(x)$ pour tout $t > 1$.*

2.2 Maximisation du profit

2.2.1 Définition et hypothèses fondamentales

Définition 26 *Le profit, au sens économique du terme, se définit comme la différence entre les recettes perçues et les coûts supportés par une firme.*

<u>Rq</u> : Dans le calcul du profit, il est nécessaire de tenir compte de tous les coûts (charges d'intérêt, salaires implicites, etc.).

Dans la plupart des analyses économiques du comportement de la firme, on pose comme hypothèse fondamentale que la firme maximise ses profits. Nous poserons cette hypothèse comportementale tout au long de notre analyse.

Le problème de maximisation du profit de la firme se résume à déterminer les prix auxquels elle veut vendre ses produits et acheter ses facteurs ainsi que les quantités d'outputs qu'elle désire produire et les quantités de facteurs qu'elle désire utiliser. En choisissant sa politique optimale, la firme est confrontée à deux sortes de contraintes :

1. les contraintes techniques, qui sont tout simplement les contraintes techniques liées à la faisabilité des plans de production ;
2. les contraintes de marchés, qui sont les contraintes qui résultent des répercussions sur la firme des actions entreprises par d'autres agents économiques.

Lorsque la firme détermine ses actions optimales, elle doit prendre en compte ces deux types de contraintes. Pour des questions de simplification, dans les sections suivantes, les firmes seront supposées adopter un comportement de marché de "price taker" (considéré *a priori*) comme le plus simple. Chaque firme sera supposée prendre les prix comme donnés.

Pour finir, l'ensemble de production Y de la firme est supposé non vide, fermé et vérifiant l'hypothèse de monotonicité ou libre disposition

2.2.2 Programme du producteur

Soit une firme "price taker" et p un vecteur de prix des inputs et output de la firme. Le programme de maximisation du profit de la firme s'écrit :

$$\begin{aligned} &\max_y p \cdot (y, -x) \\ sc: \quad & y = f(x) \end{aligned}$$

Définition 27 *La fonction de profit $\pi(p)$ de la firme associe à chaque vecteur de prix p la valeur $\pi(p) = Max\{p \cdot (y, -x) : (y, -x) \in Y\}$*

Rq : Le profit est égal à la recette totale moins le coût des facteurs :

$$\pi(p) = p \cdot (y, -x) = p_y \cdot y - p_x x$$

2.2.3 Résolution du programme et conditions d'optimalité

La résolution du programme est effectuée sous l'hypothèse f concave.

En substituant la contrainte de production dans le profit (c'est-à-dire en remplaçant y par $f(x)$), on obtient $p_y f(x) - p_x x$ comme critère à maximiser. Les conditions du premier ordre sont les suivantes :

$$p_y f_i(x) - p_{x_i} = 0 \qquad \text{pour tout input } i$$

et donc le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} f_i(x) = \frac{p_{x_i}}{p_y} \\ f(x) = y \end{cases} \qquad \text{pour tout input } i$$

La première équation indique que la productivité marginale des inputs i doit être égale à leur prix, car :

– si la productivité marginale était au-dessus du prix, il faudrait augmenter cette quantité d'input (car sinon on néglige du profit), ce qui réduirait sa productivité marginale.
– si la productivité marginale est au-dessus du prix alors le producteur fait des pertes à utiliser cet input : il a intérêt à réduire la quantité d'input, ce qui augmentera sa productivité marginale.
– on pourrait avoir des inégalités si la quantité d'input utilisée était soumise à des contraintes (ex : contrainte de capacité).

Définition 28 *On appelle fonction d'offre (d'output) la fonction qui à p associe le niveau de production y qui maximise le profit.*

Le système à résoudre est donc un système où la première équation (qui est en fait un ensemble d'équations, chacune correspondant à un input) détermine la demande en biens (inputs) et où la dernière détermine l'offre en biens (l'output). La résolution d'un tel système pouvant être compliquée, nous proposerons dans la partie suivante une autre méthode de résolution.

2.2.4 Nature des rendements et solution de maximisation du profit

On vient de voir que dans le cas de rendements décroissants (f concave), il existait une solution de maximisation du profit.

Dans le cas de rendements constants, le profit dégagé par la firme est le même quelque soit le niveau de production et la simple maximisation du profit ne permet pas de déterminer quelle est l'offre de la firme. On fait généralement appel à une contrainte dans la demande des consommateurs pour définit l'offre de la firme.

Lorsque les entreprises qui sont sur le marché ont des rendements croissants, la productivité marginale des inputs croît lorsqu'on augmente la quantité d'inputs. Ainsi, à prix d'output donné, les entreprises ont intérêt à produire une infinité de biens car leur profit marginal est croissant. Les seuls équilibres possibles, en concurrence pure et parfaite, sont une production nulle ou une production infinie : autant dire qu'il n'y a pas d'équilibre possible avec rendements croissants en cpp.

De plus, le profit généré par plusieurs entreprises séparé est plus faible que le profit qu'elles feraient si elles se réunissaient. Elles ont donc tout intérêt à se réunir. C'est généralement le cas d'entreprises avec de forts coûts fixes (ex : production d'électricité). Il s'agit là de la notion de "monopole naturel".

2.3 Minimisation du coût

On peut aussi considérer que le producteur cherche à résoudre son problème en deux étapes : tout d'abord, à niveau d'output donné, il choisit la façon dont il utilise ses inputs pour que cela lui coûte le moins possible ; ensuite, il détermine son niveau d'output optimal, c'est-à-dire qui maximise son profit, sans s'occuper de la façon dont il produit cet output (ceci a été déterminé en première étape). On s'intéresse ici à l'étape qui consiste à minimiser la fonction de coût du producteur, à niveau d'output donné. Le programme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \min_x p_x \cdot x \\ sc: \quad & sc : y = f(x) \end{aligned}$$

2.3.1 Résolution du programme et conditions d'optimalité

Lagrangien du programme de minimisation :

$$L(x, \lambda) = p_x \cdot x + \lambda \left[f(x) - y \right]$$

Conditions du premier ordre pour obtenir une solution intérieure :

$$\begin{cases} -p_{x_i} + \lambda f_i(x) = 0 \\ f(x) = y \end{cases} \qquad \text{pour tout input } i$$

On en déduit :

$$TST_{lk} \equiv \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_l}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}} = \frac{p_{x_l}}{p_{x_k}}$$

Comme pour le programme de maximisation du profit, on a le taux de substitution technique égal au rapport des prix des facteurs

(Inserer résolution graphique)

Rq : au choix optimal, l'isoquante est tangente à la droite d'isocoût et l'isoquante doit se trouver au-dessus de la fonction de la droite d'isocoût (condition du second ordre).

2.3.2 Fonction de coût et demandes de facteur conditionnelles

Définition 29 *On appelle fonction de demande conditionnelle de facteurs la fonction qui associe à chaques valeurs de p_x et de y le choix $x_c(p_x, y)$ qui minimise le coût de production de y unités d'output.*

Définition 30 *On appelle fonction de coût la fonction $c(p_x, y)$ qui associe à p_x et y le coût minimal correspondant.*

La fonction de coût est définie par :

$$c(p_x, y) \equiv p_x \cdot x_c(p_x, y)$$

2.3.3 La géométrie des coûts

Définition 31 *On définit le coût moyen comme le coût total de production par unité produite :*

$$C_M(p_x, y) = c(p_x, y)/y.$$

Définition 32 *Le coût marginal est défini par :*

$$C_m(p_x, y) = \frac{\partial C(p_x, y)}{\partial y}.$$

2.3.4 Rendements d'échelle et fonction de coût

Proposition 33 *Si la fonction de production est concave (les rendements d'échelle sont décroissants), la fonction de coût est une fonction convexe en y (en particulier, le coût marginal est non décroissant en y).*

2.3.5 Maximisation du profit

Une fois déterminées les demandes de facteurs conditionnelles (demandes étant données le niveau d'offre), il reste à déterminer l'offre optimale. C'est celle qui maximise le profit. Le programme du producteur est alors le suivant :

$$\max_y p_y y - c(p_x, y)$$

On utilise la minimisation de la fonction de coût effectuée précédemment pour se passer des choix d'inputs : on connaît déjà quelle est la façon optimale de combiner les inputs et on se concentre sur le niveau de la production.

2.4 Exercices sur le producteur

2.4.1 Fonction de production Cobb-Douglas

Soit une entreprise qui produit un bien Q à partir de deux facteurs de production, le travail N et le capital K. La quantité d'ouptut produite est donnée par la fonction de production $Q = F(N, K)$. Le prix du bien Q, le taux de salaire et le coût d'usage du capital sont notés respectivement p, w et r.

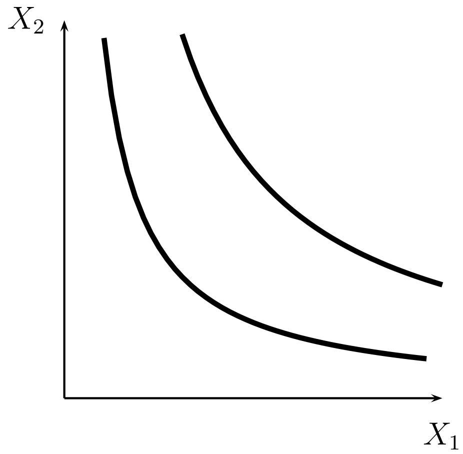
On suppose dans un premier temps que la fonction de production est donnée par $Q = Q_0 N^\alpha K^\beta$ avec Q_0, α et β des paramètres strictement positifs.

1. Représenter dans le plan (N, K) l'ensemble des combinaisons d'inputs qui permettent de produire une même quantité de Q donnée. A quelles conditions, portant sur α et β, les rendements d'échelle sont-ils croissants ? décroissants ? constants ?
2. a) Calculer les productivités marginales du travail, du capital et le taux marginal de substitution technique du travail au capital.

   b) Si l'entrepreneur a un comportement concurrentiel sur les marchés des inputs, montrer que le taux marginal de substitution technique calculé précédemment est égal au rapport r/w du prix des inputs. En déduire en fonction de r/w le capital par tête utilisé dans l'entreprise.
3. Calculer la fonction de coût $C(Q, w, r)$ d'une entreprise concurrentielle sur les marchés des inputs, et qui utilise cette technologie. A quelle condition, portant sur α et β, cette fonction de coût est-elle concave (respectivement convexe) par rapport à Q ?
4. Calculer la fonction d'offre de la firme et les demandes de facteurs.

2.4.2 Corrigé

Ensemble des combinaisons d'input et rendements d'échelle



Les rendements d'échelle sont constants si $\alpha+\beta = 1$, croissants si $\alpha+\beta > 1$ et décroissants si $\alpha + \beta < 1$, car :

$$F(\lambda N, \lambda K) = \lambda^{\alpha+\beta} F(N, K)$$

Productivités marginales, taux marginal de substitution technique

La productivité marginale du travail s'écrit :

$$\pi_N = \alpha Q_0 N^{\alpha-1} K^{\beta} = \alpha \frac{F(N, K)}{N}$$

De même, la productivité marginale du capital s'écrit :

$$\pi_K = \alpha Q_0 N^{\alpha} K^{\beta-1} = \beta \frac{F(N, K)}{K}$$

Si, à un point donné, on veut diminuer légèrement l'utilisation de l'un des inputs, on se demande de quelle quantité il faudra augmenter l'autre input pour obtenir la même production. Ce rapport entre les quantités des 2 inputs s'appelle le taux marginal de substitution technique. On peut retrouver aisément sa formule en écrivant que la variation d'output est nulle. Le taux marginal de substitution technique du travail au capital a pour formule :

$$TST = \left|\frac{\pi_K}{\pi_N}\right| = \frac{\beta N}{\alpha K}$$

Si le producteur a un comportement concurrentiel sur le marché des inputs, il égalisera la productivité marginale des inputs à leur prix réel. On peut le redémontrer brièvement en écrivant qu'il maximise son profit :

$$\max_{N,K} pQ - wN - rK = pQ_0 N^\alpha K^\beta - wN - rK$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha p Q_0 N^{\alpha-1} K^\beta = w \\ \beta p Q_0 N^\alpha K^{\beta-1} = r \end{cases}$$

On obtient donc que :

$$TST = \frac{r}{w}$$

On obtient donc immédiatement le capital par tête utilisé dans l'entreprise :

$$\frac{K}{N} = \frac{\beta w}{\alpha r}$$

Fonction de coût

On déduit de la relation précédente l'expression du capital optimal en fonction de la quantité de travail optimal :

$$K = \frac{\beta w}{\alpha r} N$$

Donc la production totale peut s'exprimer en fonction de N :

$$Q = Q_0 \cdot \left[\frac{\beta w}{\alpha r}\right]^\beta N^{\alpha+\beta}$$

Ceci nous permet donc de donner l'expression des demandes en chaque bien conditionnelles (en fonction du niveau de production à atteindre) :

$$N^* = \left[\frac{Q}{Q_0} \cdot \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$K^* = \left[\frac{Q}{Q_0} \cdot \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

On en déduit la fonction de coût :

$$\begin{aligned}
C(w,r,Q) &= \left[\frac{Q}{Q_0}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left[w\left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= \left[\frac{Q}{Q_0}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \cdot \left[w^{\alpha} r^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}
\end{aligned}$$

Si $\alpha + \beta > 1$, la fonction de coût est concave : les rendements sont croissants ; si $\alpha+\beta < 1$, la fonction de coût est convexe : les rendements sont décroissants ; si $\alpha + \beta = 1$, la fonction de coût est linéaire en la production : les rendements sont constants.

Fonctions d'offre et de demande des facteurs

On cherche à calculer la fonction d'offre en fonction des prix des inputs et de l'output :

$$\begin{aligned}
Q &= Q_0 N^{*\alpha} K^{*\beta} \\
&= Q_0 N^{\alpha}\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\beta} N^{\beta} \\
&= Q_0\left[\frac{\alpha p}{w} Q\right]^{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\beta}
\end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en réécrivant la condition de premier ordre portant sur N en fonction de Q. Ensuite, il suffit de faire passer Q de l'autre côté de l'égalité pour obtenir :

$$Q(w,r,p) = \left[Q_0 \cdot p^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{r}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}$$

La fonction d'offre est bien homogène de degré 0 par rapport au système de prix et l'offre de biens est bien croissante par rapport au prix du bien produit.

On obtient les fonctions de demande des facteurs en remplaçant Q par la fonction d'offre que l'on vient de calculer et en réutilisant les conditions du premier ordre du programme de maximisation du profit :

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\alpha p}{w} \cdot Q \\
&= \frac{\alpha p}{w} \left[Q_0 \cdot p^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\beta} \right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \\
K &= \frac{\beta p}{r} \cdot Q \\
&= \frac{\beta p}{r} \left[Q_0 \cdot p^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\beta} \right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que la fonction de demande est bien homogène de degré 0 en le système de prix.

2.4.3 Production agrégée

Un entrepreneur dispose de deux technologies de production d'un bien Y à partir d'un input X :

$$\begin{array}{ll}
\text{technologie 1 :} & Y_1 \leq \sqrt{X_1} \\
\text{technologie 2 :} & Y_2 \leq 2\sqrt{X_2}
\end{array}$$

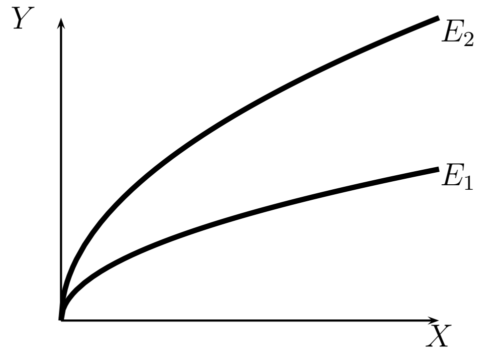
1. Représenter les ensembles de production E_1 et E_2. Si l'entreprise ne peut utiliser qu'une seule des technologies, laquelle choisit-elle ?
2. Montrer que l'entrepreneur a intérêt à utiliser les deux technologies simultanément, et que l'on a alors égalité des productivités marginales.
3. Représenter l'ensemble global de production, et exprimer la fonction de production agrégée optimale.
4. Faire le même exercice avec les fonctions de production suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\text{technologie 1 :} & Y_1 \leq \sqrt{X_1} \\
\text{technologie 2 :} & \begin{cases} Y_2 \leq 2\sqrt{X_2 - \frac{8}{5}} \quad \text{si} \quad X_2 \geq \frac{8}{5} \\ Y_2 = 0 \quad \text{si} \quad X_2 \leq \frac{8}{5} \end{cases}
\end{array}$$

2.4.4 Corrigé

Ensemble de productions

Les deux ensembles de production sont représentés comme suit :



Les ensembles de production sont convexes. Si l'entreprise ne peut utiliser qu'une seule des 2 technologies, elle choisit bien sûr la deuxième.

Utilisation des deux technologies

Pour avoir une intuition du fait que l'on va utiliser les 2 technologies simultanément, on peut remarquer que la productivité marginale de chacune des technologies varie de l'infini à 0. Si on n'utilisait qu'une seule des technologies, enlever une unité d'input pour l'affecter à l'autre technologie permettrait de produire plus. Montrons que si les deux technologies sont utilisées, elles le sont dans des proportions qui permettent d'égaliser les productivités marginales.

Raisonnement direct : Supposons que la répartition des inputs (x_1, x_2) vérifie : $f'(x_1) > f'(x_2)$. Alors, la productivité marginale de la première technologie étant supérieure, il est plus efficace de transférer un peu d'input de la technologie 1 à la technologie 2. Donc si $f'(x_1) \neq f'(x_2)$, cette répartition des inputs n'est pas efficace.

Par le calcul : le programme permettant de calculer l'optimum de production s'écrit en toute généralité :

$$\begin{aligned}
&\max_{X_1,X_2} f_1(X_1) + f_2(X_2) \\
&\text{s.c.} \left| \begin{array}{l} X_1 + X_2 \leq X \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{array} \right. \\
= &\max_{X_1,X_2} f_1(X_1) + f_2(X_2) \\
&\text{s.c.} \quad |X_1 + X_2 = X
\end{aligned}$$

Pour plus de simplicité, on définit la fonction $\phi(X_1) = f_1(X_1) + f_2(X - X_1)$. La condition du premier ordre du programme s'écrit :

$$\phi'(X_1^*) = f_1'(X_1^*) - f_2'(X - X_1^*) = 0$$

D'où :

$$f_1'(X_1^*) = f_2'(X_2^*)$$

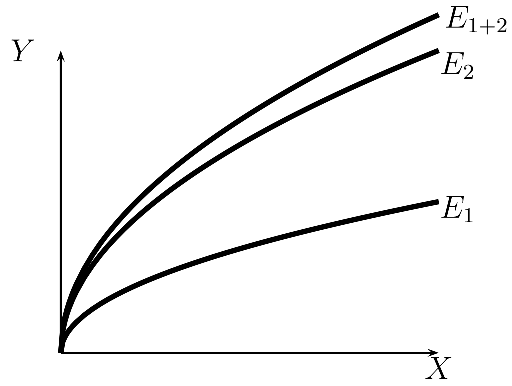
On a bien égalisation des productivités marginales.

Dans le cadre de l'exercice, ces équations donnent :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\sqrt{X_1^*}} = \frac{1}{\sqrt{X_2^*}} \\
\Rightarrow \quad & X_2^* = 4X_1^* \\
\Rightarrow \quad & X_1^* = \frac{1}{5}X, \quad X_2^* = \frac{4}{5}X \\
\Rightarrow \quad & Y = Y_1 + Y_2 = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{5}} + 2 \cdot 2\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5X}
\end{aligned}$$

Technologie globale

La technologie globale s'écrit donc : $Y \leq \sqrt{5X}$. Elle est donc plus efficace que la technologie 1 ou 2 isolée.



Dans le cas général, pour déterminer un optimum de production, il faut

1. déterminer la meilleure production possible lorsqu'on utilise les 2 technologies
2. comparer cette production à la production réalisable avec une seule technologie.

Deuxième technologie

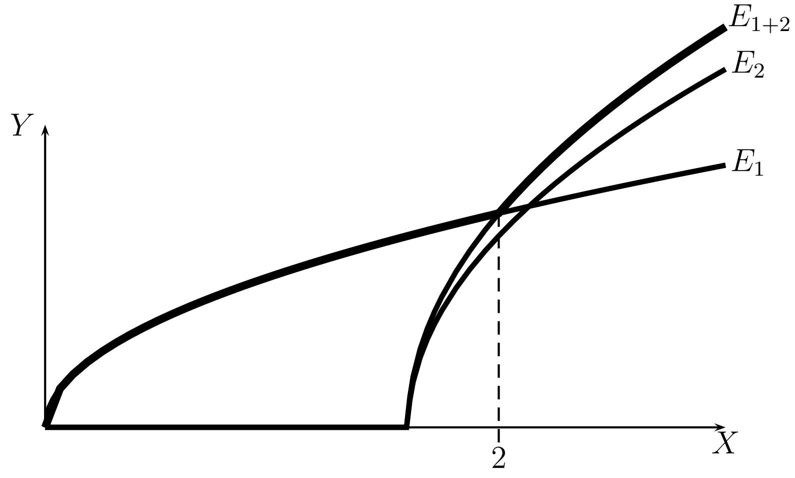
Dans ce cas, la deuxième technologie n'a plus un ensemble de production convexe. Si les deux technologies sont utilisées simultanément, la firme égalise les productivités marginales des deux technologies :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{X_1}} = \frac{2}{2\sqrt{X_2-\frac{8}{5}}} & \text{si} \quad X_2 \geq \frac{8}{5} \\ X_1 + X_2 = X \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X_2 - \frac{8}{5} = 4X_1 & \text{si} \quad X_2 \geq \frac{8}{5} \\ X_1 + X_2 = X \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{1}{5}(X - \frac{8}{5}) & \text{si} \quad X \geq \frac{8}{5} \\ X_2 = \frac{4}{5}(X - \frac{8}{5}) + \frac{8}{5} \end{cases}$$

Ceci donne que l'utilisation des deux technologies mène à une fonction de production :

$$Y = \sqrt{5}\sqrt{X - \frac{8}{5}} \quad \text{si} \quad X \geq \frac{8}{5}$$

Le plus simple, pour déterminer la technologie optimale, est de dessiner les ensembles de production :



On voit donc que pour $X \leq 2$, on utilise la technologie 1 seule et pour $X \geq 2$, on utilise la combinaison des deux technologies.

Chapitre 3

Équilibre et optimum

3.1 Introduction

On a vu jusqu'à maintenant comment consommateurs et producteurs prenaient leur décision, en fonction du système des prix qu'ils observent. Il s'agit maintenant d'étudier la compatibilité de ces décisions, c'est à dire de déterminer le ou les systèmes de prix tels que l'offre des producteurs à ces prix égalise la demande des consommateurs.

3.1.1 Équilibre partiel et équilibre général

Il existe deux façons d'aborder ce problème. D'une part, on peut étudier les marchés indépendamment les uns des autres, en négligeant les relations évidentes de substituabilité ou de complémentarité qui lient les divers biens entre eux (ex : regarder séparément le marché des patates et celui des frites). Il s'agit alors de "l'équilibre partiel" d'un marché considéré isolément du reste de l'économie, et donc "toutes choses égales par ailleurs". On peut d'autre part adopter une approche générale où l'interdépendance entre biens du point de vue de la consommation et de la production est explicitement prise en compte. Il s'agit alors de "l'équilibre général".

3.1.2 La notion de concurrence parfaite

La notion de marché

On supposera que le fonctionnement d'un marché de concurrence pure et parfaite repose sur des échanges volontaires, effectués à un prix donné.

Définition 34 *Un marché est constitué par un groupe d'individus et d'entreprises en relation les uns avec les autres pour acheter ou vendre un certain type de bien de consommation ou de facteurs de production.*

Le fonctionnement des marchés en concurrence pure et parfaite

Les vendeurs et les acheteurs sont "price taker". Ils considèrent les prix comme donnés et pensent qu'il n'existe aucune limite, au prix en vigueur, aux quantités qu'ils peuvent acheter et vendre.

Caractéristiques d'un marché en concurrence pure et parfaite :
- homogénéité du produit ;
- atomicité (chaque intervenant sur le marché est petit par rapport à celui ci) ;
- libre entrée sur le marché ;
- transparence de l'information.

Dans le modèle classique de concurrence pure et parfaite, aucun acteur économique ne fixe les prix. On a recours à un individu, le commissaire priseur, dont le seul rôle est d'annoncer des prix. Le fonctionnement des marchés est le suivant : le commissaire priseur annonce un vecteur de prix. Il reçoit les offres et les demandes des agents à ce prix. Si elles coïncident, les marchés sont à l'équilibre et les transactions peuvent se faire au prix annoncé. Si elles ne coïncident pas, aucune transaction n'est effectuée et le commissaire priseur modifie le vecteur de prix, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il trouve le prix d'équilibre.

Pour l'équilibre partiel comme pour l'équilibre général, il reste que l'hypothèse de concurrence parfaite, à savoir que producteurs et consommateurs considèrent le prix observé sur les marchés comme donné, est extrêmement restrictive. En général, ce sont les entreprises qui fixent à la fois le prix auquel elles veulent vendre et la quantité qu'elles offrent sur le marché. Pour prendre en compte ces comportements, il faudrait se placer dans un modèle de "concurrence imparfaite", ce que nous ne ferons pas ici.

3.2 L'équilibre partiel

Soit le marché d'un bien donné, de prix p. La demande agrégée pour le bien est notée $x_g(p) = \sum\limits_{h=1}^{H} x_h(p)$, et l'offre agrégée pour le bien $y_g(p) = \sum\limits_{f=1}^{F} y_f(p)$.

Définition 35 *p^* est un prix d'équilibre si $x_g(p^*) = y_g(p^*)$*

La demande est égale à l'offre sur le marché considéré. Graphiquement, le prix d'équilibre est à l'intersection des courbes d'offre et de demande.

L'existence d'un équilibre partiel ne pose pas de problèmes particuliers dès lors que les courbes d'offre et de demande globales sont continues. Par contre, le problème de l'unicité est plus complexe. En général, celle-ci n'est pas assurée.

3.3 L'équilibre général

Dans la partie précédente, nous avons étudié le fonctionnement d'un marché particulier, en ignorant le reste de l'économie. L'objectif de cette partie est d'étudier la réalisation simultanée de l'équilibre sur tous les marchés. Ce problème est par nature très différent du problème de l'équilibre partiel. En particulier, il ne se ramène pas à une succession d'équilibres partiels obtenus marché par marché. La raison est simple : toute modification du prix sur un marché modifie en général, nous l'avons vu, l'offre et la demande sur tous les autres. De ce fait, on ne peut chercher à atteindre d'abord l'équilibre sur le marché du bien i puis sur celui du bien j : un ajustement du prix p_j va en effet détruire l'équilibre précédemment établi sur le marché i. Intuitivement, il faut penser à un Rubik's cube : pour retrouver la structure initiale, la bonne méthode n'est certainement pas à reconstituer une face après l'autre. Par ailleurs, on peut remarquer que si 5 faces du cubes sont reconstituées, la 6ème face l'est aussi : de même, on verra que si tous les marchés sauf un sont en équilibre, ce dernier l'est aussi (loi de Walras).

3.3.1 L'économie "Robinson Crusoe"

En agrégé

Modèle comportant une entreprise, un consommateur et deux biens dans lequel firme et consommateur sont en fait la même personne. Le choix de l'agent est double :

- en tant que producteur, son travail lui permet de fabriquer un bien qu'il peut consommer ensuite,
- en tant que consommateur, son choix concerne le nombre d'heures de travail qu'il doit fournir.

$\Rightarrow$ plus il travaille, plus il peut consommer, mais moins il a de loisir.

Hypothèses La fonction de production est concave (la concavité exprime le fait que la première heure de travail est plus productive que la dixième, par exemple).

Les préférences respectent les hypothèses traditionnelles et peuvent être représentées par une fonction d'utilité croissante par rapport au bien consommé et décroissante par rapport au nombre d'heures de travail.

Équilibre Le point choisi est le point réalisable (c'est à dire se situant sur la fonction de production) qui procure l'utilité maximale à l'agent. Il s'agit du point de tangence entre la fonction de production et une courbe d'indifférence. Le point optimal est donc caractérisé par l'égalité du taux marginal de substitution au taux marginal de transformation.

(Inserer graphique)

En désagrégé

Supposons à présent que l'agent distingue ses activités de producteur de son activité de consommateur et que l'agent-producteur paie un salaire à l'agent-consommateur, qui avec ce salaire achète le bien à l'agent-producteur.

Programme de l'agent-producteur Soit p le prix du bien, x la quantité vendue, w le salaire horaire versé et L le nombre d'heures de travail. La fonction de profit est donnée par $\pi = px - wL$. La firme fait un profit redistribué à son unique actionnaire, l'agent consommateur.

Programme de l'agent-consommateur Le consommateur reçoit un salaire w de la firme et lui achète le bien au prix p. De plus, il reçoit le profit versé par l'agent-producteur, qu'il suppose indépendant de son propre choix d'offre de travail. En conséquence, même lorsqu'il décide de n'offrir aucun travail, il pense obtenir un revenu sous forme de profit (cette situation ne sera bien sûr pas un équilibre).

Le choix de l'agent-consommateur se situe au point de tangence entre sa contrainte budgétaire et une des ses courbes d'indifférence.

Équilibre Le point d'équilibre est exactement le même que dans le cas précédent, à savoir le point de tangence entre la fonction de production et une courbe d'indifférence (taux marginal de substitution égale au taux de transformation à l'équilibre).

L'utilisation du système de marché donne ainsi le même résultat que si l'agent avait choisi directement son plan de production et de consommation $\rightarrow$ le marché concurrentiel semble bien coordonner les décisions de production et les décisions de consommation.

Loi de Walras L'équilibre général walrasien est réalisé lorsque tous les marchés sont en équilibre : c'est-à-dire lorsque toutes les demandes excédentaires (demande - offre d'un bien) sont nulles.

Ainsi, si le marché du bien est en équilibre alors, en sommant les contraintes budgétaires de tous les agents, on observe que le marché du travail est aussi en équilibre.

3.3.2 Cas général

Les firmes

Supposons que chaque entreprise à une fonction d'offre continue $y_f(p)$. Soit $y_g(p) = \sum_{f=1}^{F} y_f(p)$ la fonction d'offre agrégée et $Y_g = \sum_{f=1}^{F} Y_f$ l'ensemble de production agrégé.

Proposition 36 *$y_g = \sum_{f=1}^{F} y_f$ maximise le profit agrégé py_g au prix p sous la contrainte que $y_g \in Y_g$ si et seulement si y_f maximise py_f sous la contrainte que $y_f \in Y_f$ pour tout $f = 1, ..., F$.*

Les consommateurs

On suppose que chaque consommateur h détient une part θ_{hf} de l'entreprise f qui lui donne droit à une partie des profits. On a $\sum_{h=1}^{H} \theta_{hf} = 1$ pour tout f.

Le programme du consommateur h est donné par :

$$\begin{aligned} & \max_{x_h} u_h(x_h) \\ sc: \quad & p\,(x_h - e_h) = \sum_f \theta_{hf}\, \pi_f(p) \end{aligned}$$

La solution de ce programme est une fonction de demande continue $x_h(p)$.
Rq : le vecteur x_h inclut le loisir

L'équilibre

Définition 37 *Un équilibre concurrentiel est un vecteur de prix p^* est une allocation $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}_+^{CH} \times \mathbb{R}_+^{CF}$ tels que :*

1. *Etant donné p^*, y^* est une solution au problème $Max_{y_f} \pi(p^*) = p^* \cdot y_f$ sous la contrainte $y_f \in Y_f$ pour tout $f = 1, ..., F$*
2. *Etant donné p^*, x^* est une solution au programme $Max_{x_h} u_h\,(x_h)$ sous la contrainte $p^*\,(x_h - e_h) = \sum_f \theta_{hf}\, \pi_f(p^*)$ quel que soit h*
3. $\sum_{h=1}^{H} x_h^*(p) = \sum_{h=1}^{H} e_h + \sum_{f=1}^{F} y_f^*(p)$

Proposition 38 *Seuls les prix relatifs sont déterminés, les prix absolus ne le sont pas : on peut multiplier tous les prix par une même constante et l'équilibre reste inchangé.*

Proposition 39 *La somme des demandes excédentaires est nulle : $pz(p) = 0$ où*

$$z(p) = \sum_h x_h(p) - \sum_h e_h(p) - \sum_f y_f(p)$$

Corollaire 40 *Lorsqu'il y a N marchés et que $N - 1$ sont en équilibre, le dernier est en équilibre.*

Conditions d'existence de l'équilibre

Théorème 41 *Les conditions d'Arrow-Debreu :*

1. ***Rationnalité*** *: les individus maximisent leur satisfaction, et les entreprises, le profit.*
2. ***Concurrence pure et parfaite***
3. ***Marchés complets*** *: il existe un marché pour chaque bien ou service présent, mais aussi pour chaque bien ou service futur*
4. ***Dotation de survie*** *: les individus disposent d'une dotation de biens initiale*
5. ***Convexité des courbes d'indifférence*** *: les biens ne sont pas des substituts parfaits*
6. ***Rendements d'échelle décroissants***
7. ***Absence de coûts fixes***

assurent l'existence d'un équilibre concurrentiel.

On ne dispose pas d'un ensemble simple de conditions assurant l'unicité de l'équilibre.

3.4 Équilibre et efficacité dans une économie d'échange

Le concept d'équilibre ne permet pas de comparer deux équilibres. Il est donc intéressant de développer des critères qui permettent de comparer les équilibres, en terme de bien-être de l'ensemble des acteurs.

3.4.1 Critère de Pareto

Le critère d'optimalité le plus fréquemment utilisé en économie est celui défini par Pareto.

Définition 42 *Une allocation* (x_1, x_2) *est réalisable si* $x_1 + x_2 = e = e_1 + e_2$

Définition 43 *On dit qu'une allocation réalisable* (x_1, x_2) *est un optimum de Pareto (ou est Pareto Optimale) s'il n'existe pas d'allocation réalisable* $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ *telle que*

$$u_1(\widetilde{x}_1) \geq u_1(x_1)$$

et

$$u_2(\widetilde{x}_2) \geq u_2(x_2)$$

avec une inégalité stricte au moins.

- L'allocation x est donc Pareto-optimale (ou efficace) s'il n'est pas possible d'augmenter l'utilité d'un agent sans diminuer celle de l'autre.
- Le concept d'optimalité au sens de Pareto est totalement indépendant de celui d'équilibre (il n'est jamais fait référence à un prix ou à la maximisation de l'utilité par les agents).
- A l'optimum de Pareto, il n'existe plus d'échanges mutuellement avantageux.
- La notion d'optimum de Pareto est indépendante de la répartition des dotations initiales.
- Ce concept ne comporte aucune notion de justice ou d'équité (tout ce que ce concept dit c'est qu'à une allocation optimale, il n'existe aucun gaspillage dans l'économie).
- Ce concept ne permet pas de comparer (ou d'additinner) des bien-être de différents individus.

(Inserer graphique)

3.4.2 L'économie d'échange

Economie d'"échange pur" : économie dans laquelle toute production est absente (i.e. les agents échangent entre eux des biens dont la quantité totale est donnée et fixe).

Les hypothèses Economie à deux biens 1 et 2 et deux consommateurs $h = 1, 2$.

On note $x_h = (x_h^1, x_h^2)$ la consommation de l'agent h et $e_h = (e_h^1, e_h^2)$ ses dotations initiales des deux biens avec $e_h > 0$. $e = e_1 + e_2 = (e_1^1 + e_2^1) + (e_1^2 + e_2^2)$ sont les dotations totales de l'économie.

Chaque consommateur possède une fonction d'utilité u_h, avec u_h strictement croissante, strictement quasi-concave, continue et différentiable.

3.4.3 La boîte d'Edgeworth

La somme des dotations initiales étant indépendante des actions des agents (puisqu'il n'y a pas de production), l'économie peut être représentée sous forme d'un rectangle de côtés $(e_1^1 + e_2^1)$ et $(e_1^2 + e_2^2)$, c'est à dire respectivement la dotation initiale globale en bien 1 et celle en bien 2.

Le système d'axes correspondant au premier agent trouve son origine dans le coin en bas à gauche de la boîte, celui du second agent est inversé. Dans la boîte d'Edgeworth, les deux droites budgétaires sont confondues, mais les ensembles budgétaires sont différents.

En adjoignant les représentations des préférences et des contraintes budgétaires, on peut représenter les demandes des consommateurs.

(Inserer graphique avec exemple d'allocation non paretienne)

3.4.4 Le programme de Pareto

Le programme Pour déterminer les allocations Pareto-optimales, il faut résoudre le programme suivant :

$$\begin{array}{rl} & \max U_h(x_h^1, x_h^2) \\ sc: & U_k(x_k^1, x_k^2) \geq \tilde{U} \\ & x_h^1 + x_k^1 = e^1 = e_h^1 + e_k^1 \\ & x_h^2 + x_k^2 = e^2 = e_h^2 + e_k^2 \end{array}$$

Ceci donne les allocations Pareto-optimales à utilité de l'agent 2 donné. On obtient l'ensemble des allocations Pareto-optimales en faisant varier l'utilité de l'agent 2 (entre l'utilité qu'il a lorsqu'il ne détient aucun bien et celle qu'il a lorsqu'il détient tous les biens).

Il est strictement équivalent de chercher les optima de Pareto en maximisant l'utilité de 2 à utilité de l'agent 1 donnée.

La résolution Le lagrangien correspondant au programme précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} L &= U_h(x_h) + \lambda \left(U_k(x_k) - \tilde{U} \right) \\ &= U_h(x_h^1, x_h^2) + \lambda \left(U_k(e^1 - x_h^1, e^2 - x_h^2) - \tilde{U} \right) \end{aligned}$$

après avoir substitué les contraintes sur les biens.

Les conditions du premier ordre s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_h}{\partial x_h^1} &= \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k^1}\\ \frac{\partial U_h}{\partial x_h^2} &= \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k^2}\end{aligned}$$

Le rapport des deux induit l'égalité entre les TMS des deux agents :

$$TMS_h = TMS_k.$$

On retrouve bien la propriété visible sur la boîte d'Edgeworth : l'ensemble de Pareto est constitué des points de tangence des courbes d'indifférence situés à l'intérieur de la boîte. On appelle aussi cet ensemble "courbe des contrats".

3.4.5 Théorèmes du bien être

Premier théorème du bien être

A l'équilibre, le taux marginal de substitution de chaque agent est égal au rapport des prix, i.e. les courbes d'indifférence des agents sont tangentes à la droite budgétaire.

Théorème 44 *Supposons que u_h est croissante pour tout h. Si (p, x) est un équilibre concurrentiel, alors x est un optimum de Pareto.*

Preuve. Supposons que x ne soit pas un optimum de Pareto. Il existe une allocation réalisable x' telle que $u_h(x'_h) \geq u_h(x_h)$ pour tout h, avec une inégalité stricte pour au moins un h. On a alors $p \cdot x'_h \geq p \cdot e_h$ avec au moins une inégalité stricte. En effet, si $p \cdot x'_h \leq p \cdot e_h$, x_h ne peut être une solution du programme de maximisation du consommateur qui aurait choisi x'_h. Puisque $\sum_h x'_h = \sum_h e_h$, $p \sum_h x'_h = p \sum_h e_h > p \sum_h e_h$. x est donc Pareto optimale. ■

Rq : Ce théorème dit que la concurrence conduit à une situation optimale au sens de Pareto (pas de gaspillage des ressources à l'équilibre)

Second théorème du bien être

Théorème 45 *Soit x^* un optimum de Pareto avec $x_h^* > 0$ pour tout h. Supposons que les fonctions d'utilité des agents sont quasi-concaves, continues et strictement croissantes. Alors x^* est une allocation d'équilibre de l'économie dont les dotations initiales sont $e_h = x_h^*$.*

Il est possible de donner une démonstration très simple d'un résultat ressemblant beaucoup au second théorème du bien être, mais qui suppose l'existence d'un équilibre.

Théorème 46 *Soit x^* un optimum de Pareto avec $x_h^* > 0$ pour tout h. Supposons que les préférences sont monotones et qu'il existe un équilibre concurrentiel dans l'économie dont les dotations initiales sont $e_h = x_h^*$. Soit (p', x') cet équilibre, alors (p', x^*) est un équilibre.*

Preuve. Puisque chaque agent à comme dotation initiale x_h^*, on a $u_h(x'_h) \geq u_h(x_h^*)$ pour tout h. x^* étant un optimum de Pareto, ceci implique que $u_h(x'_h) = u_h(x_h^*)$. x_h^* est donc une solution au problème de maximisation de l'utilité sous la contrainte $p'x_h = p'x_h^*$. (p', x^*) est donc un équilibre concurrentiel. ∎

3.5 Exercices sur l'équilibre

3.5.1 Équilibre avec appareil productif

On considère une économie à 2 biens : un bien de consommation X et le travail T, et qui comprend deux consommateurs et une entreprise. Chaque consommateur dispose d'une unité de temps, dont il peut vendre une fraction à l'entreprise sous forme de travail et utiliser le reste comme temps de loisir. Les fonctions d'utilité des deux consommateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned} U_1(X_1, L_1) &= X_1 L_1 \\ U_2(X_2, L_2) &= X_2 \end{aligned}$$

si (X_i, L_i) est le panier de consommation de l'agent i, constitué par la quantité X_i de bien X qu'il utilise et par son temps de loisir L_i égal à $1 - T_i$.

Le second consommateur possède l'entreprise qui produit une quantité X de bien X au plus égale à $\sqrt{T}$ à partir d'une quantité T de travail. Le bien T est pris comme numéraire, le prix du bien X est noté p et le profit de l'entreprise est noté π.

On suppose enfin qu'il existe un marché sur lequel le bien X s'échange contre du travail. Sur ce marché, les agents ont un comportement concurrentiel.

1. Écrire en fonction de X_1, X_2, T_1, T_2 et π les contraintes de revenu des deux consommateurs, et déterminer le profit de l'entreprise en fonction de sa production X et de sa demande de travail T.

   En déduire que s'il y a égalité entre les emplois et les ressources en bien X, il y a nécessairement égalité entre offre et demande de travail et donc équilibre sur l'unique marché de l'économie.

2. Déterminer les fonctions d'offre et de demande des différents agents de cette économie.

   En déduire en fonction du prix p l'excès de demande en bien X. Montrer qu'il existe une seule valeur du prix p pour laquelle cet excès de demande est nul. En déduire l'équilibre concurrentiel de cette économie.

3.5.2 Corrigé

Contraintes de revenu et profit de l'entreprise

Compte-tenu des notations de l'énoncé, les contraintes de revenu des consommateurs et le profit π de l'entreprise s'écrivent :

$$\begin{array}{l} pX_1 \leq T_1 \\ pX_2 \leq T_2 + \pi \\ \pi = pX - T \end{array}$$

Le bien X est désiré par les deux consommateurs, leurs contraintes de revenu sont donc des contraintes d'égalité. Compte-tenu de ces 3 relations, on aboutit à l'égalité :

$$p(X_1 + X_2 - X) = T_1 + T_2 - T$$

Cette égalité montre que si la somme des emplois en bien X X_1 et X_2 est égale à la ressource X, il y a nécessairement égalité entre les emplois et les ressources en bien T. Ces égalités comptables signifient que l'unique marché est en équilibre (identité de Walras).

Fonctions d'offre et de demande, équilibre concurrentiel

Si les agents ont un comportement concurrentiel, ils supposent les prix fixés et indépendants de leurs décisions. Leurs offres et leurs demandes concurrentielles qui maximisent leurs fonctions objectifs sous leurs contraintes de revenu ou de production s'écrivent alors :

$$\begin{array}{lll} X_1 = \frac{1}{2p} & T_1 = \frac{1}{2} & \\ X_2 = \frac{1+\pi}{p} & T_2 = 1 & \\ X = \frac{p}{2} & T = \frac{p^2}{4} & \text{et} \quad \pi = \frac{p^2}{4} \end{array}$$

On remarque que sous l'hypothèse de comportement concurrentiel des agents, le second consomateur considère comme donné le profit de l'entreprise. Il n'intègre donc pas les conséquences de ses propres décisions sur le profit de l'entreprise. Cette dernière hypothèse est cohérente avec le cadre concurrentiel dans lequel chaque consommateur considère comme un transfert forfaitaire toute distribution du profit des entreprises. L'excès de demande E_X en bien X s'écrit alors comme une fonction du prix p :

$$E_X = X_1 + X_2 - X = \frac{3}{2p} - \frac{p}{4}$$

Cette fonction est strictement décroissante en p. Elle est positive si p est plus petit que $\sqrt{6}$ et négative sinon. Il y a donc excès de demande en bien X si son prix est trop bas, excès d'offre sinon. La seule valeur du prix p qui réalise égalité entre l'offre et la demande concurrentielle est $\sqrt{6}$.

L'unique équilibre concurrentiel de cette économie est donc constitué du vecteur prix $(1, \sqrt{6})$ et de l'allocation $(X_1, X_2, T_1, T_2, X, T)$ égale à :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{5}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

3.5.3 Économie d'échange

On considère une économie d'échange à 2 biens X et Y disponibles en quantité $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, et à deux consommateurs 1 et 2 dont les fonctions d'utilité s'écrivent :

$$U_i(X_i, Y_i) = X_i Y_i \quad (i = 1, 2).$$

Les consommations de chaque agent en chaque bien sont positives ou nulles. Chaque consommateur dispose de ressources initiales $(\overline{X_i}, \overline{Y_i})$, de sorte que $\overline{X_1} + \overline{X_2} = \overline{X}$ et $\overline{Y_1} + \overline{Y_2} = \overline{Y}$. Les prix des biens X et Y sont respectivement p_X et p_Y.

1. a) Écrire en fonction des prix et des dotations initiales le revenu R_i du consommateur i. Calculer ses fonctions de demande $x_i(p_X, p_Y, R_i)$ et $y_i(p_X, p_Y, R_i)$.

   b) Rappeler la définition d'un équilibre concurrentiel dans cette économie. Calculer les allocations et les prix d'équilibre. Comparer à l'équilibre le taux marginal de substitution entre les deux biens de chacun des agents. Ce résultat était-il prévisible ?

   c) Représenter dans l'espace des utilités l'ensemble des points (U_1, U_2), où U_i est le niveau d'utilité atteint par l'agent i en chacun des différents équilibres concurrentiels lorsque la répartition des ressources initiales varie. Dessiner dans le diagramme d'Edgeworth le lieu de ces équilibres.

2. On s'intéresse maintenant à l'ensemble des utilités réalisables indépendamment de tout cadre institutionnel.

   a) Définir un optimum de Pareto dans cette économie. Remarquer que si l'on fixe à U_2^0 le niveau d'utilité du second consommateur, l'allocation réalisable qui rend maximale l'utilité du premier consommateur est un optimum de Pareto. Calculer les allocations de cet optimum en fonction de U_2^0 et en déduire l'ensemble des optima de Pareto obtenus lorsque U_2^0 varie. En chacun de ces points, calculer le taux marginal de substitution entre les deux biens de chacun des deux agents.

b) Représenter dans l'espace des utilités l'ensemble des points (V_1, V_2) qui décrivent les niveaux d'utilité atteints par les deux agents en chacun des optima de Pareto. Dessiner dans le diagramme d'Edgeworth l'ensemble de ces optima.

3. a) Montrer que pour toute allocation initiale, l'équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto.

   b) Inversement, quel prix faut-il imposer aux agents, et quels revenus faut-il leur donner pour que le mécanisme concurrentiel conduise à l'optimum de Pareto pour lequel les niveaux d'utilité U_1 et U_2 valent respectivement $\frac{4}{9}\overline{XY}$ et $\frac{1}{9}\overline{XY}$?

3.5.4 Corrigé

Équilibre concurrentiel

Revenu et fonctions de demande des consommateurs Le consommateur i dispose du panier de ressources initiales $(\overline{X_i}, \overline{Y_i})$. Son revenu R_i vaut donc :

$$R_i = p_X \overline{X_i} + p_Y \overline{Y_i}$$

Il égalise le TMS au rapport des prix, donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{Y_i}{X_i} = \frac{p_X}{p_Y} \\
\Rightarrow\ & Y_i = \frac{p_X}{p_Y} X_i \\
\Rightarrow\ & p_X X_i + p_X X_i = R_i \\
\Rightarrow\ & X_i(p_X, p_Y, R_i) = \frac{R_i}{2p_X} \quad \text{et} \quad Y_i(p_X, p_Y, R_i) = \frac{R_i}{2p_Y}
\end{aligned}$$

Équilibre concurrentiel, allocations et prix d'équilibre Les fonctions d'utilité sont strictement croissantes en chacun des biens donc les prix des biens sont strictement positifs en chacun des équilibres concurrentiels. En effet, si le prix d'un des biens était nul, la demande pour ce bien serait infini.

Par ailleurs, les contraintes de revenu des deux agents sont des contraintes d'égalité (car si la contrainte n'est pas saturée, le consommateur pourrait augmenter son utilité). Donc si l'on somme les deux contraintes de revenu, la somme des valeurs des demandes totales $p_X(X_1 + X_2) + p_Y(Y_1 + Y_2)$ est égale, à l'équilibre, à la somme des valeurs des offres totales $p_X\overline{X} + p_Y\overline{Y}$. Compte-tenu de la stricte positivité des prix, cette dernière condition est incompatible avec la destruction de l'un des biens : l'allocation d'équilibre est donc nécessairement réalisable sans destruction.

Un équilibre concurrentiel est défini par la donnée d'un vecteur des prix (p_X, p_Y) et d'une allocation réalisable sans destruction (X_1, Y_1, X_2, Y_2) tels que pour chaque consommateur i le panier (X_i, Y_i) maximise l'utilité $U_i(X_i, Y_i)$ sous la contrainte $p_X X_i + p_Y Y_i = R_i$.

Cherchons un vecteur des prix (p_X, p_Y) qui réalise l'équilibre. La demande en bien X du consommateur i a été calculée à la question précédente. Ceci nous permet de calculer la demande totale en bien X. Elle vaut :

$$X = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2}{2} + \frac{p_Y(\overline{Y_1} + \overline{Y_2})}{2p_X} = \frac{\overline{X}}{2} + \frac{p_Y\overline{Y}}{2p_X}$$

Le vecteur (p_X, p_Y) est un vecteur de prix d'équilibre si la demande totale est égale à l'offre totale pour chacun des biens. L'identité de Walras montre que si cette égalité entre demande et offre est vérifiée pour un bien, elle l'est aussi pour l'autre. Par conséquent, il suffit d'écrire que la demande X est égale à l'offre $\overline{X}$ soit :

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$

Cette condition ne fait intervenir que le rapport des prix des biens ; le vecteur prix n'est défini qu'à une constante multiplicative près. Donc l'allocation :

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\overline{X}_i}{2} + \frac{\overline{X} \cdot \overline{Y}_i}{2\overline{Y}} \\ Y_i &= \frac{\overline{Y}_i}{2} + \frac{\overline{Y} \cdot \overline{X}_i}{2\overline{X}} \end{aligned}$$

associée au vecteur des prix (p_X, p_Y) qui vérifie l'égalité précédente constitue l'équilibre concurrentiel de cette économie.

Dans cet exemple, on remarque que les prix d'équilibre ne dépendent pas de la répartition des ressources initiales. Cette particularité est due au fait que les agents ont les mêmes préférences et que leurs fonctions d'utilité sont homogènes.

Pour l'agent i, le taux marginal de subsitution du bien Y au bien X s'écrit Y_i/X_i en tout point (X_i, Y_i) intérieur à son ensemble de consommation. En un équilibre intérieur, ce taux vaut $\overline{Y}/\overline{X}$. Il est donc identique pour les deux agents. Pour un équilibre intérieur, le taux marginal de substitution est égal au rapport des prix qui est le même pour les deux agents ; donc en équilibre intérieur, les taux marginaux de substitution des deux agents sont égaux.

Utilités atteintes, diagramme d'Edgeworth À chaque répartition des ressources initiales correspond un équilibre concurrentiel. En chacun d'entre eux, le niveau d'utilité atteint par le consommateur i s'écrit

$$U_i = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} X_i^2$$

puisque l'allocation d'équilibre vérifie $Y_i = (\overline{Y}/\overline{X})X_i$. Par conséquent, on a l'égalité :

$$\sqrt{U_1(X_1, Y_1)} + \sqrt{U_2(X_2, Y_2)} = (X_1 + X_2)\sqrt{\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}} = \sqrt{\overline{XY}}$$

Lorsque la distribution des ressources varie, les niveaux d'utilité des agents se modifient mais vérifient la relation précédente. Les figures suivantes montrent respectivement les niveaux d'utilité atteints par les deux agents en chacun des différents équilibres et le lieu de ces équilibres dans le diagramme d'Edgeworth.

Ensemble des utilités réalisables

Optimum de Pareto Un optimum de Pareto est défini par une allocation réalisable telle qu'il n'existe aucune autre allocation réalisable qui augmente strictement l'utilité d'un consommateur sans diminuer strictement l'utilité de l'autre. Par le même raisonnement que précédemment, toute allocation optimale est réalisable sans destruction.

Soit $E^0 = (X_1^0, Y_1^0, X_2^0, Y_2^0)$ l'allocation réalisable sans destruction qui maximise l'utilité du premier consommateur sous la contrainte que l'utilité du second soit au moins égale à U_2^0. Pour cette allocation, le niveau d'utilité du second consommateur est alors exactement égal à U_2^0. Dans le cas contraire, il suffit de retirer au second consommateur une quantité infinitésimale de l'un des biens, de l'affecter au premier, et d'accroître ainsi son niveau d'utilité. En E^0, il n'est donc pas possible par définition d'accroître strictement l'utilité de l'agent 1 sans diminuer celle de l'agent 2 et inversement, nous venons de remarquer que pour accroître l'utilité du second agent, il est nécessaire de diminuer celle de l'agent 1 : l'allocation E^0 est un optimum de Pareto.

L'ensemble des optima de Pareto est obtenu lorsque U_2^0 varie dans l'intervalle $[0, \overline{XY}]$ qui correspond à l'ensemble des valeurs possibles de l'utilité du second agent. Le programme qui permet de déterminer l'optimum paramétré par U_2^0 est le suivant :

$$\max_{X_1,Y_1,X_2,Y_2} X_1 Y_1$$
$$\left| \begin{array}{l} X_2Y_2 = U_2^0 \\ X_1 + X_2 = \overline{X} \quad \text{et} \quad Y_1 + Y_2 = \overline{Y} \\ X_i \geq 0 \quad \text{et} \quad Y_i \geq 0 \quad \text{pour } i = 1,2 \end{array} \right.$$

Les contraintes de positivité ne sont pas actives lorsque U_2^0 est dans l'intervalle $]0, \overline{XY}[$. En effet, dans cet intervalle, le niveau d'utilité du second consommateur est non nul et par conséquent les variables X_2 et Y_2 sont strictement positives. Puisque U_2^0 est inférieur à $\overline{XY}$, il existe des allocations qui assurent au premier agent un niveau d'utilité strictement positif. En particulier, au maximum de son utilité, les variables X_1 et Y_1 sont strictement positives.

En chaque optimum intérieur, les conditions du premier ordre montrent que le taux marginal de substitution entre les deux biens est le même pour les deux agents. Le lieu de ces optima est alors défini par l'égalité :

$$Y_1 = (\overline{Y}/\overline{X})X_1$$

Les allocations des agents s'écrivent donc :

$$\begin{array}{ll} X_1 = \overline{X} - \sqrt{\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \cdot U_2^0} & X_2 = \sqrt{\frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \cdot U_2^0} \\ Y_1 = \overline{Y} - \sqrt{\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \cdot U_2^0} & Y_2 = \sqrt{\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \cdot U_2^0} \end{array}$$

L'ensemble des optima de Pareto est obtenu lorsque U_2^0 varie entre 0 et $\overline{XY}$. Les cas limites, pour lesquels l'utilité d'un des deux agents est nulle, vérifie aussi les égalités précédentes. Ces dernières définissent donc l'ensemble des optima de Pareto quand U_0^2 décrit l'intervalle $[0, \overline{XY}]$. À partir des allocations ainsi définies on vérifie qu'il n'existe pas de possibilité d'échange mutuellement avantageux pour les deux agents.

Lieu des optima de pareto Les égalités précédentes montrent qu'en chacun des optima de Pareto, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sqrt{U_1(X_1, Y_1)} + \sqrt{U_2(X_2, Y_2)} = \sqrt{\overline{XY}}$$

Par conséquent, les figures précédentes représentent aussi l'ensemble des utilités accessibles de l'économie et le lieu des optima de Pareto dans le diagramme d'Edgeworth.

Équilibre concurrentiel et optimum de Pareto

Tout équilibre est un optimum de Pareto Dans la première question, nous avons déterminé l'ensemble des allocations d'équilibre concurrentiel obtenu lorsque la distribution des ressources initiales varie. La seconde question nous a montré que ces allocations sont optimales au sens de Pareto. Par conséquent, dans cette économie, toute allocation d'équilibre est optimale au sens de Pareto.

Quels prix et quels revenus pour atteindre un optimum spécifique ? Inversement, considérons l'optimum de Pareto pour lequel $U_1 = \frac{4}{9}\overline{XY}$ et $U_2 = \frac{1}{9}\overline{XY}$. Les allocations qui correspondent à cet optimum sont telles que $\tilde{X}_1 = \frac{2}{3}\overline{X}$ et $\tilde{Y}_1 = \frac{2}{3}\overline{Y}$: en ce point du diagramme, le rapport des utilités marginales des biens X et Y est le même pour les deux agents et est égal à $\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$.

Considérons maintenant un vecteur des prix (p_X, p_Y) tel que

$$\frac{p_X}{p_Y} = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$

et supposons que les agents disposent de ressources initiales telles que leurs revenus soient :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2p_X\overline{X}}{3} + \frac{2p_Y\overline{Y}}{3} \\ R_2 &= \frac{p_X\overline{X}}{3} + \frac{p_Y\overline{Y}}{3} \end{aligned}$$

La somme des revenus vaut alors $p_X\overline{X} + p_Y\overline{Y}$ et l'allocation $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1, \tilde{X}_2, \tilde{Y}_2)$ associée au vecteur prix (p_X, p_Y) définit l'unique équilibre concurrentiel de l'économie. Par conséquent, si on fixe les prix des biens au niveau (p_X, p_Y) et si on donne aux agents les revenus définis précédemment, le mécanisme concurrentiel conduit à l'optimum de Pareto recherché.