Université de Carthage
Ecole Suprieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

Année Universitaire
2011-2012
1ère Année

Examen final
Méthodes d'estimation

Mai 2012

Enseignants: Mme H. Mallek et Mr H. Rammeh   Durée : 1h 30mn

(01 page)

Exercice 1 *Soit X_1 ,...,X_n un n-échantillon d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.*

1. *Calculer l'information de Fisher associée au modèle.*
2. *En déduire que $\overline{X}$ est un estimateur efficace de θ.*

Exercice 2 *Soit X_1 ,...,X_n un n-échantillon de X suivant la loi de densité*

$$f_\lambda(x,\theta) = \frac{(\lambda+1)\,x^\lambda}{\theta^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{]0,\theta[}(x)$$

où $\lambda > -1$ est un réel connu et θ est inconnu.

1. *Construire M_n, l'estimateur de θ par la méthode des moments d'ordre 1. Vérifier que M_n est sans biais de θ.*
2. *Exprimer la loi asymptotique de M_n.*
3. *Construire un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour θ.*
4. *Déterminer une statistique exhaustive T_n pour le modèle.*
5. *Donner la loi de T_n et calculer son espérance.*
6. *Vérifier que cette statistique est complète.*
7. *Construire V_n, l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.*
8. *A partir de V_n, construire un estimateur U_n sans biais de θ.*
9. *Vérifier que U_n est un estimateur uvmb(esbvm)de θ.*
10. *Vérifier que la loi de $S_n = \frac{\max X_i}{\theta}$ ne dépend pas de θ et donner sa fonction de répartition.*
11. *En déduire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ.*

Correction Exercice 1 *1.* **2 points**

$I(\theta) = \frac{n}{\lambda}$

2. **2 points**

$BCR(\theta) = \frac{\lambda}{n}$

Correction Exercice 2

$$f_\lambda(x,\theta) = \frac{(\lambda+1)\,x^\lambda}{\theta^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{]0,\theta[}(x)$$

1. **2 points**

$E(X) = \int\limits_0^\theta \frac{(\lambda+1)x^{\lambda+1}}{\theta^{\lambda+1}} dx = \left[\frac{(\lambda+1)}{(\lambda+2)\theta^{\lambda+1}} x^{\lambda+2}\right]_0^\theta = \frac{(\lambda+1)}{(\lambda+2)}\theta$

On a $q(\theta) = E_\theta[g(X)]$ *avec* $q : \theta \longmapsto \frac{(\lambda+1)}{(\lambda+2)}\theta$ *et* $g : x \longmapsto x$

$\theta = q^{-1}(E_\theta[g(X)]) = q^{-1}(E_\theta[X]) = \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)} E_\theta[X]$

D'où $M_n = \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)}\overline{X}$ *est un estimateur de* θ *par la méthode des moments.*

$E(M_n) = \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)} E\left(\overline{X}\right) = \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)} E(X) = \theta$

2. **2 points**

Considérons l'application $h : m_1 \longmapsto \frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)} m_1$*.*$h$ *est continue et possède une dérivée par raport à* m_1 *continue.*

$E\left(X^2\right) = \int\limits_0^\theta \frac{(\lambda+1)x^{\lambda+2}}{\theta^{\lambda+1}} dx = \left[\frac{(\lambda+1)}{(\lambda+3)\theta^{\lambda+1}} x^{\lambda+3}\right]_0^\theta = \frac{(\lambda+1)}{(\lambda+3)}\theta^2.$

Donc le moment d'ordre 2 de X *existe.*

On a alors $\sqrt{n}(M_n - \theta) \overset{Loi}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}\left(0, \sigma_h^2\right)$

$\sigma_h^2 = Var\left[\frac{\partial h}{\partial m_1} X\right] = \left(\frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)}\right)^2 Var[X] = \left(\frac{(\lambda+2)}{(\lambda+1)}\right)^2 \theta^2 \left(\frac{(\lambda+1)}{(\lambda+3)} - \left(\frac{(\lambda+1)}{(\lambda+2)}\right)^2\right)$

$\sigma_h^2 = \theta^2 \left(\frac{(\lambda+2)^2}{(\lambda+1)(\lambda+3)} - 1\right).$

3. **2 points**

$\sqrt{n}(M_n - \theta) \overset{Loi}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}\left(0, \sigma_h^2\right)$

Posons $q = F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ *et* $\omega = \frac{(\lambda+2)^2 - (\lambda+1)(\lambda+3)}{(\lambda+1)(\lambda+3)}$

$P\left[-q \leq \sqrt{n}\frac{M_n - \theta}{\sigma_h} \leq q\right] = 1 - \alpha$

$P\left[-q \leq \sqrt{n}\frac{M_n - \theta}{\theta\sqrt{\omega}} \leq q\right] = 1 - \alpha$

$P\left[-\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{n}} q \leq \left(\frac{M_n}{\theta} - 1\right) \leq \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{n}} q\right] = 1 - \alpha$

$P\left[1 - \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{n}} q \leq \frac{M_n}{\theta} \leq 1 + \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{n}} q\right] = 1 - \alpha$

D'où l'intervalle de confiance de niveau asymptotique pour θ*:*

$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{M_n}{1 + \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{n}} q} \;;\; \frac{M_n}{1 - \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{n}} q}\right]$

$$IC_{1-\alpha}(\theta)=\left[\frac{M_n}{1+\sqrt{\frac{(\lambda+2)^2-(\lambda+1)(\lambda+3)}{n(\lambda+1)(\lambda+3)}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\;;\;\frac{M_n}{1-\sqrt{\frac{(\lambda+2)^2-(\lambda+1)(\lambda+3)}{n(\lambda+1)(\lambda+3)}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right].$$

4. **2 points**

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta)=\exp\left(n\ln(\lambda+1)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n(\lambda+1)\ln\theta\right)\mathbb{1}_{\{\min x_i>0\}}\mathbb{1}_{\{\max x_i<\theta\}}$$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta)=\exp(-n(\lambda+1)\ln\theta)\,\mathbb{1}_{\{\max x_i<\theta\}}\cdot\exp\left(n\ln(\lambda+1)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\mathbb{1}_{\{\min x_i>0\}}$$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta)=g(T_n,\theta)\cdot h(\underline{x})$$

avec $g(T_n,\theta)=\exp(-n(\lambda+1)\ln\theta)\,\mathbb{1}_{\{\max x_i<\theta\}}$

et $h(\underline{x})=\exp\left(n\ln(\lambda+1)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\mathbb{1}_{\{\min x_i>0\}}$

$T_n=\max X_i$ *est donc une statistique exhaustive.*

5. **2 points**

$$F_T(x)=P_\theta[\max X_i<x]=\prod_{i=1}^{n}P_\theta[X_i<x]=(F_X(x))^n$$

$$F_X(x)=\int_0^x\frac{(\lambda+1)t^\lambda}{\theta^{\lambda+1}}dt=\left[\frac{t^{\lambda+1}}{\theta^{\lambda+1}}\right]_0^x=\frac{x^{\lambda+1}}{\theta^{\lambda+1}}$$

$$F_T(x)=\left(\frac{x^{\lambda+1}}{\theta^{\lambda+1}}\right)^n=\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n(\lambda+1)}\mathbb{1}_{]0,\theta[}(x)+\mathbb{1}_{\{x>\theta\}}$$

$$f_T(x)=\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}x^{n(\lambda+1)-1}\mathbb{1}_{]0,\theta[}(x)$$

$$E_\theta[T_n]=\int_0^\theta\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}x^{n(\lambda+1)}dx=\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}\left[\frac{x^{n(\lambda+1)+1}}{n(\lambda+1)+1}\right]_0^\theta=\frac{n(\lambda+1)}{n(\lambda+1)+1}\theta.$$

6. **1 point**

Soit ϕ *une application mesurable telle que pour tout* θ, $E_\theta[\phi(T_n)]=0$.

$E_\theta[\phi(T_n)]=0,\forall\theta>0$

$$\Longleftrightarrow\int_0^\theta\phi(T_n)\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}x^{n(\lambda+1)-1}dx=0,\forall\theta>0$$

Si u *désigne l'application à intégrer,* $u:x\longmapsto\phi(T_n)\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}x^{n(\lambda+1)-1}$.

Soit v *une primitive de* u.

$$\int_0^\theta\phi(T_n)\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}x^{n(\lambda+1)-1}dx=0,\forall\theta>0$$

$\Longleftrightarrow v(\theta)-v(0)=0,\forall\theta>0$. v *est donc constante et* u *est nulle.*

Donc $\phi(T_n)\frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}}x^{n(\lambda+1)-1}=0\Longrightarrow\phi=0$ *et* T_n *est complète.*

7. **1 point**

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta)=\exp\left(n\ln(\lambda+1)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n(\lambda+1)\ln\theta\right)\mathbb{1}_{\{\min x_i>0\}}\mathbb{1}_{\{\max x_i<\theta\}}$$

Il s'agit d'une fonction strictement décroissante en θ *sur l'intervalle* $]\max x_i,+\infty[$.

Son maximum est donc en $\max x_i$ *et* $V_n=\max X_i=T_n$ *est l'unique estimateur du maximum de vraisemblance.*

8. **1 point**

$E(V_n) = E[T_n] = \frac{n(\lambda+1)}{n(\lambda+1)+1}\theta. \Longrightarrow U_n = \frac{n(\lambda+1)+1}{n(\lambda+1)} \max X_i$ *est sans biais de* θ.

9. **1 point**

$E[U_n] = \theta < +\infty$.

U_n *est un estimateur sans biais de* θ *et fonction d'une statistique exhaustive complète. Il est donc uvmb de* θ.

10. **2 points**

$S_n = \frac{\max X_i}{\theta} = \frac{T_n}{\theta} \qquad \theta > 0.$

$f_S(x) = \theta f_T(\theta x) = \theta \frac{n(\lambda+1)}{\theta^{n(\lambda+1)}} (\theta x)^{n(\lambda+1)-1} \mathbb{1}_{]0,\theta[}(\theta x)$

$f_S(x) = n(\lambda+1) x^{n(\lambda+1)-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$

la loi de S_n *ne dépend donc pas de* θ.

$F_S(x) = \int_0^x n(\lambda+1) t^{n(\lambda+1)-1} dt = \left[t^{n(\lambda+1)}\right]_0^t = x^{n(\lambda+1)} \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}$.

11. **2 points**

Soit $I_S(\alpha, \beta)$ *un intervalle de dispersion de* S_n. *Les caractéristiques de la distribution étant inconnue, on prendra par commodité* $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$P\left[Q_S\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\max X_i}{\theta} \leq Q_S\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 1-\alpha$

$P\left[\frac{\max X_i}{Q_S\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \theta \leq \frac{\max X_i}{Q_S\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] = 1-\alpha$

On a $Q_S(y) = F_S^{-1}(y) = \sqrt[n(\lambda+1)]{x}$. *D'où l'intervalle de confiance de niveau* $1-\alpha$ *pour* θ :

$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{\max X_i}{\sqrt[n(\lambda+1)]{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \theta \leq \frac{\max X_i}{\sqrt[n(\lambda+1)]{\frac{\alpha}{2}}}\right]$.