I - Présentation du modèle :

un modèle de régression simple s'écrit : $y_t = a + b x_t + U_t$, $t = 1, \ldots, T$

avec :

- y désigne la variable endogène ou à expliquer
- x désigne la variable exogène à expliquer
- U le variable aléatoire ou terme d'erreur
- a et b : les paramètres à estimer du modèle

* H_1 : La série x_t n'est pas constante $\forall t \neq s \Rightarrow$ c'est l'hypothèse d'identifiabilité
* H_2 : $E(U_t) = 0$
* H_3 : $V(U_t) = \sigma^2$ (constante) $\forall t \Rightarrow$ c'est l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs
* H_4 : $cov(U_t, U_s) = 0 \ \forall t \neq s \Rightarrow$ c'est l'hypothèse d'absence d'autocorrélation des erreurs.
* H_5 : $U_t \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow$ c'est l'hypothèse de normalité des erreurs.

II - Estimation des paramètres du modèle :

1) Estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) : a/ Déf :

On appelle estimateur des MCO noté $\hat{a}$ et $\hat{b}$ respectivement de a et b la solution du programme suivant : $\underset{a,b}{Min} \sum_{t=1}^{T} U_t^2 = \underset{a,b}{Min} \sum_{t=1}^{T} (y_t - a - b x_t)^2 = \underset{a,b}{Min}\, Q(a,b)$

b/ Résolution du programme. $Q(a,b) = (y_t - a - b x_t)^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \sum_{t=1}^{T} (y_t - a - b x_t) = 0 \\ -2 \sum x_t (y_t - a - b x_t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} (y_t - a - b x_t) = 0 \quad (1) \\ \sum_{t=1}^{T} x_t (y_t - a - b x_t) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ système d'équation normales

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum y_t - T.a - b \sum x_t = 0 \\ \sum x_t y_t - a \sum x_t - b \sum x_t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum y_t = Ta + b \sum x_t \\ \sum x_t y_t = a \sum x_t + b \sum x_t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y} = a + b \bar{x} \quad (1) \\ \sum x_t y_t = a \underbrace{\sum x_t}_{T\bar{x}} + b \sum x_t^2 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow a = \bar{y} - b\bar{x}$

dans (2) $\Rightarrow \sum x_t y_t = (\bar{y} - b\bar{x}) T\bar{x} + b \sum x_t^2$

$$= T\bar{x}\bar{y} - Tb\,\bar{x}^2 + b \sum x_t^2$$

(2) $\Rightarrow \sum x_t y_t - T\bar{x}\bar{y} = b(\sum x_t^2 - T\bar{x}^2)$

$\Leftrightarrow \quad \hat{b} = \dfrac{\sum x_t y_t - T\bar{x}\bar{y}}{\sum x_t^2 - T\bar{x}^2}$, a

$\Rightarrow \hat{a} = y - \hat{b}\bar{x}$

on montre que : $\hat{b} = \dfrac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{cov(x_t, y_t)}{V(x_t)}$

La droite d'équation : $y_t = \hat{a} + \hat{b} x_t$ est appelée droite de régression de y_t sur x_t ou droite d'ajustement linéaire.

Le point moyen de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y}) \in$ à cette droite.

Par ailleurs les points de coordonnées (x_t, y_t) forme un graphique appelé nuage de points. Ces points peuvent être alignés ou pas, la droite d'ajustement linéaire est la meilleure droite résumant la structure de nuage.

- $\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b} x_t$: c'est la valeur ajustée ou estimée de y_t
- $\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t$: c'est le résidu de l'estimation

Propriétés :

Montrer que :

- $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t = 0$ ①
- $\sum_{t=1}^{T} x_t \hat{u}_t = 0$ ②
- $\sum_{t=1}^{T} y_t = \sum_{t=1}^{T} \hat{y}_t$ ③

① $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t = \sum (y_t - \hat{y}_t) = \sum (y_t - \hat{a} - \hat{b} x_t)$

$$\begin{cases} \sum (y_t - \hat{a} - \hat{b} x_t) = 0 \\ \sum x_t (y_t - \hat{a} - \hat{b} x_t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum \hat{u}_t = 0 \\ \sum x_t \hat{u}_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum y_t - \sum \hat{y}_t = 0 \Rightarrow \sum y_t = \sum \hat{y}_t$$

2) Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance :

Cette méthode constitue une autre technique d'estimation d'un modèle de régression. On suppose que l'erreur u_t suit $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, du moment que y_t est une fct linéaire de terme d'erreur [$y_t = a + b x_t + u_t$, ils sont suit que $y_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(?, ?)$

- $E(y_t) = E(a + b x_t + u_t)$

$= E(a + b x_t) + \underbrace{E(u_t)}_{=0}$

$\Rightarrow \boxed{E(y_t) = a + b x_t}$

- $V(y_t) = E(y_t - E(y_t))^2 = E[a + bx_t + U_t - a - bx_t]^2 = E(U_t^2) = V(U_t) = \sigma^2$

$\Rightarrow y_t \sim N(a + bx_t, \sigma^2)$, avec : $\{y_t\}$ sont indépendante. $cov(y_t, y_s) = 0$ $\forall t \neq s$

Appel : Lien à télécharger : https://bit.ly/3TDY8iZ
$\Rightarrow$ table de la loi de student $\Rightarrow$ démonst° détaillée de la méthode de MV

Si x une v.a $\sim N(\mu, \sigma^2)$ alors sa densité de probabilité (d.d.p) s'écrit comme suit : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

$\Rightarrow$ la d.d.p de y_t : $f(y_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_t - a - bx_t}{\sigma}\right)^2\right)$

On note $f(y_1, y_2, \dots, y_T / a + bx_t, \sigma^2)$ la fonction de probabilité jointe de l'ensemble $(y_1, y_2, \dots, y_T)$. Puisque les y_t sont indépendante on peut écrire cette d.d.p :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_T / a + bx_t, \sigma^2) = f(y_1 / a + bx_t, \sigma^2) \times f(y_2 / a + bx_t, \sigma^2) \times \dots \times f(y_T / a + bx_t, \sigma^2)$$

$$= \prod_{t=1}^{T} f(y_t / a + bx_t, \sigma^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^T \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Sigma(y_t - a - bx_t)^2}{\sigma^2}\right)$$

$\Rightarrow$ Il s'agit de la fonction de vraisemblance $= L(a, b, \sigma^2)$.

Pour des raisons de simplification on détermine la fonction Log-vraisemblance $\rightarrow$ on calcule $\log L \Rightarrow \underset{a, b, \sigma^2}{\text{Max}} \log L$.

$\Rightarrow \log L = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{T}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2}\Sigma\left[\frac{(y_t - a - bx_t)^2}{\sigma^2}\right]$

$$\Rightarrow \underset{a, b, \sigma^2}{\text{Max}} \log L \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \log L}{\partial a} = 0 & (1) \\ \frac{\partial \log L}{\partial b} = 0 & (2) \\ \frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) permettent d'obtenir le système d'équation normales relatif à la méthode des MCO.

Conséquence : $\begin{cases} \hat{a}_{MV} = \hat{a}_{MCO} \\ \hat{b}_{MV} = \hat{b}_{MCO} \end{cases}$

$$(3) \Rightarrow \hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{\Sigma(y_t - \hat{a} - \hat{b}x_t)^2}{T} = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 / T \neq \hat{\sigma}^2_{MCO} = \frac{\Sigma \hat{u}_t^2}{T-2}$$

III - Equation, tableau d'analyse de la variance et coefficient de détermination :

1) Equation d'analyse de la variance :

On note par
- VT = variabilité totale $= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2$ avec.

$\sum(y_t-\bar{y})^2 = SCT$: somme des carrés totale
- VE = variabilité Expliquée $= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{y}_t-\bar{y})^2$ avec:

$\sum(\hat{y}_t-\bar{y})^2 = SCE$: Somme des carrés expliqué
- VR = variabilité Résiduelle $= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2$ avec

$\sum \hat{u}_t^2 = SCR$: somme des carrés des résidu.

Propriétés :

La propriété dit que l'equation de d'analyse de la variance s'écrit comme suit:

$$VT = VE + VR \Longrightarrow SCT = SCE + SCR$$

Démonstration:

$$SCT = \sum(y_t-\bar{y})^2 = \sum((y_t-\hat{y}_t)+(\hat{y}_t-\bar{y}))^2$$
$$= \sum[(y_t-\hat{y}_t)^2+(\hat{y}_t-\bar{y})^2+2(y_t-\hat{y}_t)(\hat{y}_t-\bar{y})]$$
$$= \sum(y_t-\hat{y}_t)^2+\sum(\hat{y}_t-\bar{y})^2+2\sum(y_t-\hat{y}_t)(\hat{y}_t-\bar{y})$$

$\Rightarrow SCT = SCR + SCE$

$$\sum\hat{u}_t(\hat{y}_t-\bar{y}) = \sum(\hat{u}_t\hat{y}_t-\hat{u}_t\bar{y}) = \underbrace{\sum\hat{u}_t\hat{y}_t}_{0} - \bar{y}\underbrace{\sum\hat{u}_t}_{0} \overset{\times}{=} 0) \Rightarrow SCT = SCE + SCR$$

$$\sum\hat{u}_t(\hat{y}_t-\bar{y}) = \sum\hat{u}_t(\hat{y}_t-\bar{y}) = \sum\hat{u}_t(\hat{a}+\hat{b}x_t-\bar{y}) = (\hat{a}-\bar{y})\underbrace{\sum\hat{u}_t}_{=0}+\hat{b}\underbrace{\sum x_t\hat{u}_t}_{=0} = 0$$

$\hookrightarrow \boxed{SCT = SCE + SCR}$

2) Tableau d'analyse de la variance :

source de variation	somme des carrés	degré de liberté (d.d.l)	carrés moyens $\left(\frac{\text{Somme des carrés}}{ddl}\right)$
variable explicative du modèle	$\sum(\hat{y}_t-\bar{y})^2 = SCE$	$1\ (k-1)$ $a, b = 2$	SCE
Résidu	$\sum\hat{u}_t^2 = SCR$	$T-2$	$\frac{SCR}{T-2} = \hat{\sigma}^2_{mco}$
Total	$\sum(y_t-\bar{y})^2 = SCT$	$T-1$	$\frac{SCT}{T-1} = \frac{\sum(y_t-\bar{y})^2}{T-1}$

variance empirique corrigé.

3) Coefficient de détermination :

Déf : Le coef. de détermination noté R^2 est définit tq $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$ 3

avec $0 \leq R^2 \leq 1$, plus $R^2 \to 1$, plus $\hat{y}_t \to y_t$.

Exemple : si $R^2 = 98\%$: on a une bonne qualité d'ajustement linéaire du modèle

plus $R^2 \to 0$: l'ajustement est mauvais.

Propriétés :

- $SCE = \hat{b}^2 \sum (x_t - \bar{x})^2$
- $R^2 = \frac{\hat{b}^2 \sum (x_t - \bar{x})^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2}$

Démonstration :

$SCE = \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 = \sum (\hat{a} + \hat{b} x_t - \hat{a} - \hat{b}\bar{x})^2 = \hat{b}^2 \sum (x_t - \bar{x})^2$

$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\hat{b}^2 \sum (x_t - \bar{x})^2}{\sum (y_t - \bar{y}^2)}$

Notation.

- $m_{xx} = \sum (x_t - \bar{x})^2 = \sum x_t^2 - T\bar{x}^2$
- $m_{yy} = \sum (y_t - \bar{y})^2 = \sum y_t^2 - T\bar{y}^2$
- $m_{xy} = \sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) = \sum x_t y_t - T\bar{x}\bar{y}$

on montre que : $R^2 = \frac{m_{xy}^2}{m_{xx}\, m_{yy}} = \rho_{x,y}^2$

avec : $\rho_{x,y}$: le coefficient de corrélation entre x et y

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x_t, y_t)}{\sqrt{V(x_t)V(y_t)}} = \frac{\frac{1}{T}\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{T^2}\sum (x_t - \bar{x})^2 \sum (y_t - \bar{y})^2}}$$

$$\Rightarrow \rho_{x,y} = \frac{m_{xy}}{\sqrt{m_{xx} \cdot m_{yy}}} \Rightarrow \rho_{x,y}^2 = \frac{m_{xy}^2}{m_{xx}\, m_{yy}}$$

$$R^2 = \hat{b}^2 \cdot \frac{\sum (x_t - \bar{x})^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} \Rightarrow \rho_{x,y}^2 = R^2$$

$$= \frac{m_{xy}^2}{m_{xx}^2} \cdot \frac{m_{xx}}{m_{yy}} = \frac{m_{xy}^2}{m_{xx} \cdot m_{yy}} = \rho_{x,y}^2$$

IV - Propriétés statistiques des estimateurs :

Préliminaire :

On pose $w_t = \dfrac{x_t - \bar{x}}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{x_t - \bar{x}}{m_{xx}}$

Alors on aura :

1) $\Sigma w_t = 0$

2) $\Sigma x_t \cdot w_t = 1$

3) $\Sigma w_t^2 = \dfrac{1}{m_{xx}}$

Démonstration :

1) $\Sigma w_t = \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x})}{m_{xx}} = \dfrac{\Sigma x_t - T\bar{x}}{m_{xx}}$

$= \dfrac{T\bar{x} - T\bar{x}}{m_{xx}}$

$\Rightarrow \Sigma w_t = 0$

2) $\Sigma x_t w_t = \dfrac{\Sigma x_t (x_t - \bar{x})}{m_{xx}} = \Sigma x_t^2 - \bar{x} \Sigma x_t$

$= \dfrac{\Sigma x_t^2 - T\bar{x}^2}{m_{xx}} = \dfrac{m_{xx}}{m_{xx}} = 1$

3) $\Sigma w_t^2 = \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x})^2}{m_{xx}^2} = \dfrac{m_{xx}}{m_{xx}^2} = \dfrac{1}{m_{xx}}$

Propriétés :

P_1 : $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont des estimateurs linéaires càd. ils s'écrivent sous la forme d'une combinaison linéaire de y_t. $(\lambda = \Sigma c_t \cdot y_t)$

- $\hat{b} = \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{\Sigma [(x_t - \bar{x}) \cdot y_t - (x_t - \bar{x}) \cdot \bar{y}]}{\Sigma (x_t - \bar{x})^2} = \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x}) y_t - \bar{y} \Sigma (x_t - \bar{x})}{m_{xx}}$

$\Rightarrow \hat{b} = \dfrac{\Sigma (x_t - \bar{x}) y_t}{m_{xx}}$ w_t $\Rightarrow \hat{b} = \Sigma w_t y_t$

$\Rightarrow \hat{b}$ est un estimateur linéaire.

- $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \dfrac{1}{T} \cdot \Sigma y_t - \Sigma w_t y_t \bar{x} = \Sigma (\frac{1}{T} y_t - w_t \bar{x} y_t)$

$\Rightarrow \hat{a} = \Sigma (\frac{1}{T} - w_t \bar{x}) y_t \Rightarrow \hat{a} = \Sigma A_t y_t \Rightarrow \hat{a} = \Sigma A_t y_t$

$\Rightarrow \hat{a}$ est un estimateur linéaire.

P_2 : $\hat{a}$ est un estimateur sans biais $\Rightarrow E(\hat{a}) = a$

$\hat{b}$ est un estimateur sans biais $\Rightarrow E(\hat{b}) = b$.

Démonstration :

$\hat{a} = \Sigma (\frac{1}{T} - w_t \bar{x}) \cdot y_t$

$= \Sigma (\frac{1}{T} - w_t \bar{x})(a + b x_t + u_t)$

$= a + b\bar{x} - a\bar{x} \underbrace{\Sigma w_t}_{0} - b\bar{x} \overbrace{\Sigma w_t x_t}^{=1} + \Sigma (\frac{1}{T} - w_t \bar{x}) \cdot u_t$

$\Rightarrow \hat{a} = a + \Sigma (\frac{1}{T} - w_t \bar{x}) \cdot u_t$

$\Rightarrow E(\hat{a}) = a + \underbrace{\Sigma (\frac{1}{T} - w_t \bar{x})}_{0} \underbrace{E(u_t)}_{0} \Rightarrow E(\hat{a}) = a$

$\Rightarrow \hat{a}$ est un estimateur sans biais de a.

$\bullet\ \hat{b} = \sum w_t y_t = \sum w_t (a + bx + u_t) = a \underbrace{\sum w_t}_{=0} + b \underbrace{\sum x_t w_t}_{1} + \sum w_t u_t$

$\Rightarrow \hat{b} = b + \sum w_t \cdot u_t$

$\Rightarrow E(\hat{b}) = b + \underbrace{\sum w_t}_{=0} \underbrace{E(u_t)}_{=0} \Rightarrow E(\hat{b}) = b$

$\Rightarrow \hat{b}$ est un estimateur sans biais de b.

P_3 : $\bullet\ V(\hat{a}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right)$

$\bullet\ V(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$, $\sigma = var(u_t)$

$\bullet\ Cov(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-\sigma^2 \bar{x}}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$

$\bullet\ V(\hat{a}) \longrightarrow 0$ quand $T \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow \hat{a}$ est un estimateur convergent

$\bullet\ V(\hat{b}) \longrightarrow 0$ quand $T \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow \hat{b}$ est un estimateur convergent

Théorème de Gauss-Markov

Si les hypothèses de la MCO sont toutes vérifiés Alors $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont des estimateurs B.L.U.E (Best Linear Unbiased Estimator) c'est à dire les meilleurs estimateurs linéaires et sans biais de $\hat{a}$ et b respectivement

V - Construction des testes statistiques:

1) Estimation de σ^2 :

Théorème :

$$\hat{\sigma}^2_{mco} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}{\text{Nombre d'observations totales} - \text{Nombre de paramètre à estimer}}$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{mco} = \frac{SCR}{T-2}$ est un estimateur sans biais de σ^2.

2) Notations et définitions :

$\bullet\ \hat{V}(\hat{a}) = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \right) = \hat{\sigma}^2_{\hat{a}} \Rightarrow$ La variance estimée de $\hat{a}$

$\bullet\ \hat{V}(\hat{b}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} = \hat{\sigma}^2_{\hat{b}} \Rightarrow$ La variance estimée de $\hat{b}$.

$\bullet\ \hat{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-\hat{\sigma}^2 \bar{x}}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \Rightarrow$ La covariance estimée entre $\hat{a}$ et $\hat{b}$.

3) Hypothèse de normalité et intervalle de confiance :

l'hypothèse de normalité d'erreurs implique que l'estimateur :

$$\begin{cases} \hat{a} \sim N(a, \sigma^2_{\hat{a}}) \\ \hat{b} \sim N(b, \sigma^2_{\hat{b}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\hat{a}-a}{\sigma_{\hat{a}}} \sim N(0,1) \\ \frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}} \sim N(0,1) \end{cases}$$

Théorème de Fisher : (admis)

- $(T-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(T-2)$
- $\hat{a}$ et $\hat{\sigma}$ sont indépendants
- $\hat{b}$ et $\hat{\sigma}$ sont indépendants

Rappel :

Soient U et K deux variables a indépendantes telles que :

$U \sim N(0,1)$ et $K \sim \chi^2(n)$

Alors, par définition on a :

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n}}} \sim St(n).$$

Corollaire :

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}} \sim St(T-2) \\ \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim St(T-2) \end{matrix}}$$

démonstration :

$$\frac{\frac{\hat{b}-b}{\sigma_{\hat{b}}}}{\sqrt{\frac{(T-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}{T-2}}} \sim St(T-2) \Rightarrow \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}/\sqrt{m_{xx}}} = \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim St(T-2)$$

Intervalles de confiance pour les paramètre a et b :

Soit α le risque d'erreur ou encore le seuil de significativité. il est généralement égale à 1%, 5% ou 10%. son complémentaire $1-\alpha$ est appelé le niveau de confiance. les étapes à suivre pour construire un intervalle de confiance sont les suivantes :

1ère étape : Détermination de la statistique à utiliser et de sa loi de probabilité

$$\frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \sim St(T-2).$$

valeur critique

2ème étape : α étant fixé, on cherche dans la table de la loi de student le réel noté $t^{T-2}_{\alpha/2}$ tq : $P\left[\left|\frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| \leq t^{T-2}_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$

3ème étape : L'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ pour le paramètre b s'écrit comme suit : $IC_{1-\alpha}(b) = \left[\hat{b} \pm \hat{\sigma}_{\hat{b}} \cdot t^{T-2}_{\alpha/2}\right]$ Précision de l'estimation

$$= \left[\hat{b} - \hat{\sigma}_{\hat{b}}\, t^{T-2}_{\alpha/2}, \hat{b} + \hat{\sigma}_{\hat{b}} \cdot t^{T-2}_{\alpha/2}\right]$$

Exemple :

$T = 30$ et $\alpha = 5\%$. $\Rightarrow t^{T-2}_{\alpha/2} = t^{28}_{0{,}025} = 2{,}048$.

4) Les Testes d'hypothèse :

Ces testes permettent d'apporter des réponses à des problèmes tq :

1) La comparaison d'un coefficient de regression % à une valeur fixé.
2) La détermination d'un IC pour un coefficient

On distingue 2 types de testes :

- Le teste unilatéral : (on travaille avec α).
- $H_0 : b \leq b_0$ (donnée) contre $H_1 : b > b_0$ (donnée).
- La statistique et la loi : $\frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \rightsquigarrow St(T-2)$
- Règle de décision : • si $t_{calculé} = \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_b} \leq t^{T-2}_{\alpha}$ alors H_0 est vrai $\Rightarrow b \leq b_0$
  • si $t_c > t^{T-2}_{\alpha}$ alors H_1 est vrai $\Rightarrow b > b_0$.

- Le teste bilatéral :
- $H_0 : b = b_0$ (donnée) contre $H_1 : b \neq b_0$.
- Statistique et loi : $\frac{\hat{b} - b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \rightsquigarrow St(T-2)$.

Règles de décision :

1) Règle selon l'approche par la valeur critique :

- Si $t_c = \left| \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \right| \leq t^{T-2}_{\alpha/2}$ alors H_0 est vraie $\Rightarrow b = b_0$.
- Si $t_c = \left| \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}} \right| > t^{T-2}_{\alpha/2}$ alors H_1 est vraie $\Rightarrow b \neq b_0$.

2) Règle selon l'approche par l'IC (Règle de décision équivalente) :

- si $b_0 \in IC_{1-\alpha}(b)$ alors H_0 est vraie.
- si $b_0 \notin IC_{1-\alpha}(b)$ alors H_1 est vraie.

Cas particulier du teste bilatéral : le test de significativité individuelle des paramètres :

Ce teste permet d'étudier l'impact de la variable explicative x sur la variable à expliquer y, Il repose sur les hypothèses suivantes :

$\underbrace{H_0 : b = 0}_{\text{si vrai}}$ contre $\underbrace{H_1 : b \neq 0}_{\text{si vraie}}$

① la variable x a un impact non significatif sur y

si vrai $\rightarrow$ b est statistiqt non significatif ① $\Rightarrow$

si vraie $\rightarrow$ b est statistiquement significatif $\Rightarrow$ la variable x est une variable pertinent

Si on accepte l'hypothèse NULL H_0 alors le paramètre b est statistiquement non significatif.

VI - La prévision :

1) Définition et notation :

Une fois que les coefficients du modèles sont estimés, il est possible de calculer une prévision à un horizon h càd déterminer une valeur future de y à une période $(T+h)$ connaissant la valeur futur $x_{T+h} \longrightarrow y_{T+h}$?

Exemple : $y_t = a + b x_t + u_t$

$\forall t = 2000, \dots, 2021 \Rightarrow y_{2023} = y_{T+2} \Rightarrow \underbrace{h = 2\text{ans}}_{\text{horizon de prévision}}$

Soient :

- y_{T+h} : la valeur réelle de y à l'instant futur $(T+h)$ tq :

$\Rightarrow y_{T+h} = a + b x_{T+h} + u_{T+h}$

Avec :
- $E(u_{T+h}) = 0$
- $V(u_{T+h}) = \sigma^2$
- $\text{cov}(u_t, u_{T+h}) = 0, \forall t = 1, \dots, T$

- y^p_{T+h} : la valeur prévisionnelle de y à l'instant futur $(T+h) \Rightarrow$ la prévision ponctuelle de y.
- Prévision expost (après réalisation)

$\Rightarrow \boxed{y^p_{T+h} = \hat{a} + \hat{b} x_T + h}$

- e_p : erreur de prévision $\Rightarrow \boxed{e_p = y_{T+h} - y_{T+h}}$.

avec : on montre que

- $E(e_p) = 0$
- $V(e_p) = \sigma^2_{e_p} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_{T+h} - \bar{x})^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right)$

$\Rightarrow \underbrace{\hat{\sigma}^2_{e_p}}_{\text{variance estimée de l'erreur de prévision}} = \hat{\sigma}^2 \left[1 + \frac{1}{T} + \frac{(x_{T+h} - \bar{x})^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right]$

on note par $IP_{1-\alpha}(y_{T+h})$ l'intervalle de prévision pour y_{T+h} au niveau de confiance $(1-\alpha)$.

Théorème (admis) :

- $\dfrac{y_{T+h} - y^p_{T+h}}{\hat{\sigma}_{ep}} \leadsto St(T-2)$
- $t^{T-2}_{\alpha/2} \mid P\left[\left|\dfrac{y_{T+h} - y^p_{T+h}}{\hat{\sigma}_{ep}}\right| \leq t^{T-2}_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$
- $IP_{1-\alpha}(y_{T+h}) = \left[y^p_{T+h} \mp \hat{\sigma}_{ep} \times t^{T-2}_{\alpha/2}\right]$ avec : $\hat{\sigma}_{ep} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{ep}}$

Remarques Générales :

① Les testes d'hypothèse (uni et bi) peuvent aussi être appliqués pour la constante du modèle à savoir le paramètre a.

② Comme le coefficient de détermination R^2 on définit également le coefficient de détermination ajusté ou corrigé noté $\bar{R}^2$ tq :

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SCR/_{T-2}}{SCT/_{T-1}} \sim \bar{R}^2 = \frac{T-1}{T-2} \cdot \frac{SCR}{SCT}$$

③ Présentation des résultats d'estimateurs :

Après estimation des paramètres du modèle, les résultats peuvent se présenter comme suit :

(1) $\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b}\, x_t$

(2) $\hat{y}_t = \underset{(\hat{\sigma}_{\hat{a}})}{\hat{a}} + \underset{(\hat{\sigma}_{\hat{b}})}{\hat{b}}\, x_t$

(3) $\hat{y}_t = \underset{\left(\frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right)}{\hat{a}} + \underset{\left(\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right)}{\hat{b}}\, x_t$

Pour la présentation (2) les termes entre parenthèses désigne les écartype estimé de l'estimateur.

Pour la présentation (3). ils représentent les t de student.

④ Interprétation des paramètres du modèle :

On distingue 2 cas :

a) Cas du modèle linéaire en niveau : $y_t = a + b.x_t + u_t$

$b = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{\Delta y_t}{\Delta x_t}$: la variation marginale (effet marginale) de y_t par rapport à x_t : quand x varie d'une unité, y_t varie de b unités

$\Rightarrow \hat{b}$: variation marginale estimée.

b) Cas du modèle Log-linéaire ou double-Logarithmique

$\text{Log } y_t = a + b \text{ Log } x_t + u_t$

• $b = \frac{\partial \text{Log} y_t}{\partial \text{Log} x_t} = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} \cdot \frac{x_t}{y_t}$: l'élasticité de y_t par rapport à x_t.

$\Rightarrow$ quand x_t varie de 1%, y_t varie de b %.

$\Rightarrow \hat{b}$: c'est l'élasticité estimée de y_t par rapport à x_t.