Série N°2

Ex 9

$$= X_n^3 + Z_{n+1}^3 + 3X_n^2 Z_{n+1} + 3X_n Z_{n+1}^2 - 3(n+1)X_{n+1}$$

$$\Rightarrow E\left(X_{n+1}^3 - 3(n+1)X_{n+1} / F_n\right)$$

$$= E\left(X_n^3 - 3(n+1)X_{n+}\right.$$

EX 01 :

Proposition de décomposition de Doob

Toute sous-martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être écrite d'une manière unique comme $X_n = A_n + M_n$ avec M_n est une martingale et A_n est processus prévisible $(A_n \subset F_{n-1})$, croissant $(A_{n-1} \subset F_n)$ tq $A_0 = 0$

La décomposition est :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left(E[X_k / F_{k-1}] - X_{k-1} \right)$$

$$M_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E(X_k / F_{k-1}) \right)$$

$$A_n + M_n = \sum_{k=1}^{n} \left(E(X_k / F_{k-1}) - X_{k-1} \right) + X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - E(X_k / F_{k-1}) \right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} X_{k-1} + X_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} X_k + X_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$= -X_0 - \sum_{k=1}^{n-1} X_k + X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} X_k + X_n$$

$$= X_n$$

Exercice 01

$$X_n = \sum_{m=1}^{n} 1\!\!1_{B_m}$$

1) (i) Adaptation : X_n est F_n — mesurable

(ii) Intégrabilité

$$|X_n| = \left| \sum_{m=1}^{n} 1\!\!1_{B_m} \right| \leq \sum_{m=1}^{n} |1\!\!1_{B_n}| \leq n$$

$$\Rightarrow E(|X_n|) < +\infty$$

(iii) $E(X_{n+1} / F_n) \geq X_n$?

$$E(X_{n+1} - X_n / F_n) = E(1_{B_{n+1}} / F_n) \geq 0$$

X_n est sous martingal

2) On a (X_n) est sous martingale donc

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left(E(X_k / F_{k-1}) - X_{k-1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(E\left(\sum_{m=1}^{k} 1\!\!1_{B_m} / F_{k-1} \right) - \sum 1\!\!1_{B_n} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{n=1}^{k} E(1\!\!1_{B_m} / F_{k-1}) - \sum_{n=1}^{k-1} 1\!\!1_{B_n} \right)$$

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} E(1\!\!1_{B_m} / F_{m-1})$$

$$M_n = \sum_{m=1}^{n} \left(1\!\!1_{B_m} - E(1\!\!1_{B_m} / F_{m-1}) \right)$$

3) M_n est une Martingale

(i) $M_n = X_n - A_n$ or comme X_n est F_n - mesurable et $A_n \in F_n \Rightarrow M_n$ est F_n - mesurable $\Rightarrow (M_n)_{n \geq 0}$ est adaptée à la filtration

(ii) $E(|M_n|) = E(|X_n - A_n|) \leq E(|X_n|) + E(|A_n|) < +\infty$

(iii) $E(M_{n+1} - M_n / F_n)$

$$= E\left(1_{B_{n+1}} - E(1_{B_{n+1}} / F_n) / F_n\right)$$

$$= E(1_{B_{n+1}} / F_n) - E(1_{B_{n+1}} / F_n) = 0$$

donc M_n est une Martingale

4) $E(1\!\!1_{B_n} / F_{n-1})(\omega)$

$$= \frac{E(1\!\!1_{B_n} 1\!\!1_{\Omega i})}{P(\Omega i)} = \frac{P(B_n \cap \Omega i)}{P(\Omega i)} = P(B_n / \Omega i)$$

$m = 2$: comme $F_1 = \sigma(1\!\!1_{B_1}) = \{\phi, X, B_1, B_1^c\}$

$E(1\!\!1_{B_2} / F_1)(\omega)$

$$= \begin{cases} \dfrac{E(1\!\!1_{B_2} 1\!\!1_{B_1})}{P(B_1)} = P(B_2 / B_1) \\ \dfrac{E(1\!\!1_{B_2} 1\!\!1_{B_1^c})}{P(B_1^c)} = P(B_2 / B_1^c) \end{cases}$$

2/ exo 02 :

1/ $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$

2/ on a $E\left(Z_{n+1}^{d} - Z_n^{d}\right)$

* $(M_n)_{n\geq 0}$ est adapté à la filtration (F_n).

* $|M_n| = \left|\frac{q^{S_n}}{p}\right| \leqslant e^{S_n \ln\left(\frac{q}{p}\right)}$

$$\leqslant e^{\sum \varepsilon_j \ln\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$\leqslant e^{n \ln\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$\leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$\Rightarrow E(M_n) < +\infty$

$M_{n+1} = M_n \times \left(\frac{q}{p}\right)^{\varepsilon_{n+1}}$

$\Rightarrow E(M_{n+1} / F_n) = E\left(M \left(\frac{q}{p}\right)^{\varepsilon_{n+1}} / F_n\right)$

$$= M_n E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\varepsilon_{n+1}} / F_n\right)$$

$$= M_n E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\varepsilon_{n+1}}\right)$$

$$= M_n \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1} \times p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \times q\right]$$

$$= M_n$$

$\Rightarrow M_n$ est une F_n martingal

Série N° 4

Exercice 01 :

Mq $\{Z_1 \leq n\} \in F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

*) $n = 0$ $\{Z_1 \leq 0\} = \emptyset$

* $n \geq 1$ $\{Z_1 \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{Y_1 + \dots + Y_k\} \in F_n$

or $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $Y_1, \dots, Y_k$ sont des v.a.r mesurable % F_n

$\Rightarrow Y_1 + \dots Y_k$ est mesurable par rapport à F_n

2) supposons par rapport l'absurde que Z_2 est un temps d'arrêt

$\{Z_2 = T\}$

$\{T = 2\}$ est mesurable par rapport à F_2

$F_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(Y_3, Y_4)$

$\{T = 2\} \perp\!\!\!\perp \{Y_3 + Y_4 = 0\}$

$$\underbrace{P(T = 2, Y_3 + Y_4 = 0)}_{LHS} = \underbrace{P(T = 2) P(Y_3 + Y_4 = 0)}_{RHS}$$

(LHS) $T = 2 \Rightarrow Y_1 + Y_2 = 0 \Rightarrow S_2 = 0$
$\Rightarrow S_4 \neq 0$
$\Rightarrow Y_3 + Y_4 \neq 0$

$\Rightarrow P(T = 2, Y_3 + Y_4 = 0) = 0$

(RHS)

$$P(T = 2) = P(Y_1 + Y_2 = 0) = P(Y_1 = -Y_2) = \frac{1}{2}$$

si $Y_1 = 1$ $\to$ $Y_2 = 1$ 50%
$\to$ $Y_2 = -1$ 50%

$P(Y_3 + Y_4 = 0) = P(Y_3 = -Y_4) = \frac{1}{2}$

$P(T = 2) P(Y_3 + Y_4 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$

Exercice 02 :

1) soit $n \in \mathbb{N}$

$$\{T \leq n\} = \{\exists k \in [\![0, n]\!], S_k \in \{0, a+b\}\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\underbrace{S_k \in \{0, a+b\}}_{\in F_k \subset F_n}\} \in F_n$$

T : représente la fin de la partie

$\{S_T = 0\}$: la ruine du joueur A

$\{S_T = a+b\}$: le joueur A a gagner la fortune de B

Scanné avec CamScanner

Théorème d'arrêt

TCD 3

2022-2… ssus stochastic…

(a) $(X_n)_{\in \mathbb{N}}$ un processus stochastique

si X est surmartingal et T est un temps d'arrêt alors i ou (ii), ou (iii) $\Rightarrow X_T \in L^1$ et $E(X_T) \leq E(X_0)$

(i) T est borné ($\exists N \in \mathbb{N}$, $T(\omega) \leq N$ pp)

(ii) X est bornée et $T < \infty$ p.s ($\exists b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pour presque tout ω $|X_n(\omega)| \leq b$)

(iii) T intégrable et $\exists b \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout ω $|X_n(\omega) - X_{n+1}(\omega)| \leq b$

(b) X est martingal + ou i, ii, iii satisfaite

alors $E(X_T) = E(X_0)$

$E(S_T) = a$

S_T — 0 ; $a+b$

2) $P(\{S_T = a+b\})$

$E(S_T) = ?$

$E(S_T) = (a+b) P(S_T = a+b)$
$= a$
$\Rightarrow P(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$

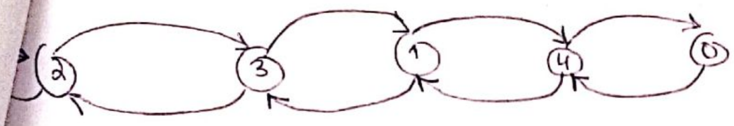
On applique le théorème d'arrêt à la martingale $(S_{T\wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ et au temps d'arrêt borné $0 \leq T\wedge n$

à démontrer que c'est un temps d'arrêt

*) $S_{T\wedge n}$ borné + $T < \infty \Rightarrow E(S_T) = E(S_0) = a$

- $S_{T\wedge n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} S_T$
- $|S_{T\wedge n}| \leq a+b \in L^1$ D'après le TCD $\lim E(S_{T\wedge n}) = E(\lim S_{T\wedge n}) = E(S_T)$

Exo 01 : Serie 3 :



on pose $\Pi_s = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$

dépend de 5 variables :

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon + \delta = 1$$

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \Sigma = 1$$

$$\Pi_s = \Pi_s \times Q \iff \begin{cases} \varepsilon q = \alpha \\ \delta q + \varepsilon p = \beta \\ \gamma q + \delta p = \gamma \\ \beta q + \gamma p = \varepsilon \\ \alpha + \beta p = \varepsilon \end{cases}$$

$$\Pi_s = \left(\frac{q}{q+4}, \frac{1}{q+4}, \frac{1}{q+4}, \frac{1}{q+4}, \frac{1}{q+4} \right)$$

↑

P(0 parapluie)

2/ oui c'est une chaine irréductible parce qu'on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre

3/ $Q^2(i,j)$: la probabilité de passer d'un état i à un état j en 2 étapes $Q^2(i,j) = Q^2$

$$Q^2(i,j) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ pq & p^2+q^2 & pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & p^2+q^2 & pq & 0 \\ 0 & 0 & pq & p^2+q^2 & pq \\ 0 & 0 & 0 & pq & p^2+q^2 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n = 0$$

4/ $P(0 \text{ parapluie et } \underbrace{\text{il pleut}}_{p})$

$P(0 \text{ parapluie}) \times p$

sur le long terme : $\Pi_s = \Pi_s \times Q$

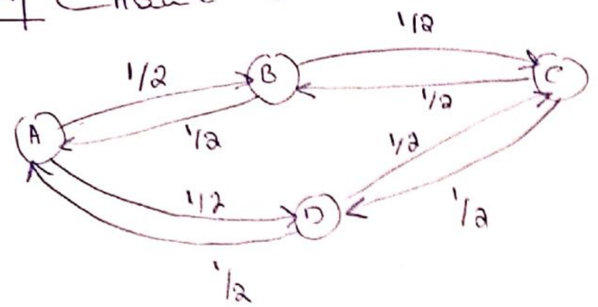
La distribution de probabilité Π_s est stationnaire / invariante lorsque $\Pi_s = \Pi_s \times Q$

Scanné avec CamScanner

Série d'exercice N°3

Exercice 02 :

1| Chaîne de markov



$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ B & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ C & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ D & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

2| $\pi_n = ?$

initialisée à l'état A

$\pi_0 = (1, 0, 0, 0)$.

$\pi_n = \pi_0 \cdot Q^{(n)}$

$Q^{(n)} = Q^n$

$$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$Q^3 = Q^2 \cdot Q = Q$

$Q^{2k+1} = Q$

$Q^{2k} = Q^2$

$\pi_n = \pi_0 \, Q^n$

$$= \begin{cases} \pi_0 \, Q & \text{si } n \text{ impair} \\ \pi_0 \, Q^2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

3| Périodicité : La période d d'un état i d'une chaîne de Markov est définit comme étant le PGCD de l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}$

tq $Q^{(n)}(i,i) \neq 0$

$n = 2, 4, 6, \ldots$

$d = 2$

chaîne périodique.

Série N°1

Exercice 01 :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$

On prend la loi uniforme

$(\Omega, \mathcal{P}, P)$

$F : \mathcal{P}(\Omega) = \{A, A \subset \Omega\}$

2/ $\forall\, \omega \in \Omega$

$X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

$Y(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|$

X	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Y	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

par simple dénombrement on obtient leur loi conjointes et les marginales

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	
0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	0	$1/16$	0	$1/16$	$4/16$
1	0	$2/16$	0	$2/16$	0	$2/16$	0	$6/16$
2	0	0	$2/16$	[illegible]	$\cancel{\frac{2}{16}}$	0	0	$4/16$
3	0	0	0	$2/16$	0	0	0	$2/16$
	$1/$	$2/$	$3/16$	$4/16$	$3/16$	$2/$	$1/16$	

On en déduit les espérances :

- $E[X] = \sum_{x=2}^{8} x\, P\{X = x\}$

$$= \frac{2\times1 + 3\times2 + 4\times3 + 5\times4 + 6\times3 + 7\times2 + 8\times1}{16}$$

$E[X] = 5$

- $E[Y] = \sum_{y=0}^{3} y\, P\{Y = y\} = 1,25$

$E[Y] = 1,25$

~~Exercice 02~~

3/ $E[X|Y] = \sum_{x=2}^{8} x \dfrac{P[X = x ; Y = y]}{P(Y = y)}$

$$= \sum_{x=2}^{8} x\, P[X = x / Y]$$

$= 5$

Exercice 02

1/ $E(Y/X) = \dfrac{1}{P(X)} E(\mathbb{1}_X Y)$

$$= \frac{1}{P(X)} \underbrace{E(\mathbb{1}_X)}_{P(X)} E(Y)$$

$= E(Y)$

$E(Y|X) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \dfrac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$

$= \sum_{y \in Y(\Omega)} y\, P$

On pose $X = \chi_A$ et $Y = \chi_B$

Mq : $E(Y|X] = E(Y)$

$$E(Y|X) = E(Y|A)$$

$$= \frac{1}{P(A)}\int_A Y\,dP$$

$$= \frac{1}{P(A)}\int_A \chi_B\,dP$$

$$= \frac{1}{P(A)}\int_{A\cap D} dP$$

$$= \frac{1}{P(A)}\,P(A\cap B)$$

$A \perp B$

$$= \frac{1}{P(A)}\cdot P(A)\,P(B)$$

$$= P(B)$$

$$= E(\chi_B)$$

$$= E(Y)$$

2) $E(XY) = E(1_A 1_B)$

$$= E(1_{A\cap B})$$

$$= \int_\Omega 1_{A\cap B}\,dP$$

$$= \int_{A\cap B} dP$$

$$= P(A\cap B)$$

$$= P(A)\,P(B)$$

$$= E(1_A)\,E(1_B)$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

- $E(\chi_A) = P(A)$
- $E(X|B) = \dfrac{\int_B X\,dP}{P(B)}$

$$= \frac{E(X\chi_B)}{P(B)}$$

Exercice 03 :

Notons : $X_1 = E(X|F_1)$

$X_2 = E(X|F_2) = E(X_2|F_1)$

itération de l'esp

On a : $E(XX_1) = E\big(E(XX_1|F_1)\big)$

$$= E\big(X_1\,E(X|F_1)\big)$$

$$= E(X_1^2)$$

De même on montre que $E(XX_2) = E(X_2^2)$

et $E(X_1X_2) = E(X_1^2)$

d'où $E\big([X - X_2]^2\big) = E(X^2) - E(X_2^2)$

$$E\big((X_2 - X_1)^2\big) = E(X_2^2) - E(X_1^2)$$

et on obtient :

$$E\big([X - X_1]^2\big) = E(X_2^2) = E(X_1^2)$$

le,..

EX5:

supposons qu'il existe $(\mathcal{J}_n)_{n\geq 1}$ une autre filtration à la laquelle $(X_n)_{n\geq 1}$ est adaptée ~~tq~~ $\mathcal{J}_n \subset F_n$

on a X_n est $\mathcal{J}_n$ - mesurable $\forall n \geq 1$ (par hypothèse)

or $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \dots \subset$

D'où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont $\mathcal{J}_n$ - mesurable

Ω - on sait que $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ est la plus petite sous-tribu rendant $X_1, \dots X_n$ mesurable

Par conséquent $F_n \subset \mathcal{J}_n$

EX6

on a $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale

$\Rightarrow E(X_n / F_{n-1}) = X_{n-1}$ et $X_n - X_{n-1}$

$\Rightarrow E(X_n / F_{n-1}) = E(X_n) = X_{n-1}$

$\Leftrightarrow E(X_n) = E(X_{n-1}) \ \forall n \geq 1$

Ex 7:

on a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une F_n - martingale :

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ~~une martingale~~ intégrable
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adapté à la filtration F_n^X

$- E(X_{n+1} / F_n^X) = X_n$

$\forall$ n

$F_n^X \subset F_n$

$E\Big(\underbrace{E(X_{n+1}/F_n)}_{\downarrow} / F_n^X\Big) = E(X_{n+1} / F_n^X)$

$E(X_n / F_n^X) = E(X_{n+1}$

Ex 8:

t/ X_n

TD 1

1) $D = \left\{ (x,y) \in [-1,1]^2 \text{ tq } x^2+y^2 \leq 1 \right\}$

a) $$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_D(x,y)\, dy$$

$$= \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

b) $$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2x}{\pi} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{\Rightarrow \text{ impaire} \Rightarrow 0}\, dx$$

$$= 0$$

$E(Y) = 0$

$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\pi}\, dy}_{0}\, dx$$

$= 0$

$\Rightarrow \text{cov}(X,Y) = 0$

$D\left\{ (x,y) \in [-1,1]^2, \; x^2+y^2 \leq 1 \right.$

$$f_X = \int \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_D(x,y)\, dy$$

$$= \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$

Scanné avec CamScanner

c) $f_X(x) \times f_Y(y) \neq f(x,y) \Rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes

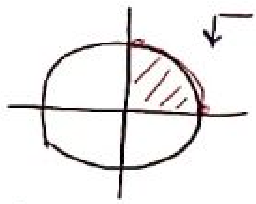
2) On pose $U = X^2 + Y^2$

a) $F_U(u) = P(U \leq u)$, $P((x,y) \in D)$

$= P(X^2 + Y^2 < u) = \begin{cases} u < 0 & F_U(u) = 0 \\ u > 1 & F_U(u) = 1 \end{cases}$

$$= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{-\sqrt{u-x^2}}^{\sqrt{u-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy\, dx$$

$$= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{1}{\pi}\, 2\sqrt{u-x^2}\, dx$$



$\pi \frac{R^2}{4}$

$\pi \frac{(\sqrt{u})^2}{4}$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \sqrt{u-x^2}\, dx$$

$= \cancel{E(XY)}$

$= u$

b) $E(U) = \frac{1}{2}$

$E(U) = 2E(X^2) \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V(X) = \frac{1}{4}$

c) $E(Y/X) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy$

$$= \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \frac{1}{\pi}\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi f_X(x)} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \frac{1}{\pi}\, dy = 0$$

$E(U/X) = E(X^2 + Y^2 / X)$

$= E(X^2/X) + E(Y^2/X)$

$= E(X^2) + E(Y^2/X)$ $\quad E(Y^2/X)$

$/x) = \int_{\mathbb{R}} y^2 \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy$

$$= \frac{2}{f_X(x)} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{\pi} dy$$

$$= \frac{2}{3\pi f_X(x)} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \left[u^3 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{3}(1-x^2) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

TD 2

b. Exercice 1 :

1/ $P(X=1) = \sum_{k=0}^{n} P(X=1/Y=k) P(Y=k)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

E()

$$= p \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

cov(

E(X;

$$= p \sum_{k=0}^{k-1} C_{n-1}^{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= p(p+1-p)^{n-1}$$

$$= p$$

=> co

$E(\ell(x,y)) = \sum_{x\in X(\Omega),\, y\in Y(\Omega)} \ell(x,y)\, P(x,y)$

$= \sum_{y\in Y(\Omega)} \ell(0,y)\, P(x=0|y)\, P(y) + \sum \ell(1,y)\, P(x=1|y)\, P(y)$

$= \sum_{k=0}^{n} k\, \frac{k}{n}\, C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$E(x|y) = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = np$

Exercice 03:

1) $X = 0,1$

$Y = 0,1$

$X+Y = 0,1,2$

$\Omega = \{X+Y=0\} \cup \{X+Y \geq 1\}$

$= A_0 \cup A_1$

$\sigma(Z) = \sigma(A_0, A_1)$

$Z_1 = E(X|\mathcal{B}) = E^{\mathcal{B}}(X)$

i) $E^{\mathcal{B}}(X)$ $\mathcal{B}$ mes

ii) $\forall Z$ va $\mathcal{B}$ mes

$E(ZX) = E(ZZ_1)$

si $Z = 1\!\!1_A$

$E(1\!\!1_A X) = E(1\!\!1_A E^{\mathcal{B}}(X))$

$\int_A X\, dP(x) = \int_A E^{\mathcal{B}}(x)\, dP(x)$

$\Omega = (B_1, \dots, B_n)$ Partition finie de Ω

$B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$

$\mathcal{B} = \sigma(B_1, \dots, B_n)$

soit Y $\mathcal{B}$-mesurable alors

$Y = \sum \alpha_i 1\!\!1_{B_i}$

$E^{\mathcal{B}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1\!\!1_{B_i}$

$\int_{B_i} x\, dP(x) = \int_{B_i} E^{\mathcal{B}}(x)\, dP(x)$

$= \int_{B_i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1\!\!1_{B_j}\, dP(x)$

$= \alpha_i \int_{B_i} dP(x)$

$= \alpha_i\, P(B_i)$

$\alpha_i = \frac{E(X 1\!\!1_{B_i})}{P(B_i)}$

$\mathcal{B} = \sigma(B_1, \dots, B_n)$

$E(X|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1\!\!1_{B_i}$

$/\sigma(Z)) = \alpha_0 \mathbb{1}_{A_0} + \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1}$ | $E(X/\sigma(Z)) = \alpha_0 \mathbb{1}_{A_0} + \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1}$

α_0? $\quad \alpha_0 = \dfrac{E(X \mathbb{1}_{A_0})}{P(A_0)} = 0$

$X \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}} = 0 \, \mathbb{1}_{\{X=0\}} \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}} + 1 \, \mathbb{1}_{\{X=1\}} \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}}$

$= 0$

UMass Amherst

$\alpha_1 = \dfrac{E(X \mathbb{1}_{A_1})}{P(A_1)}$

$X \mathbb{1}_{\{X+Y \geq 1\}} = 0 \, \mathbb{1}_{\{X+Y \geq 1\}} \mathbb{1}_{\{X=0\}} + 1 \, \mathbb{1}_{\{X=1\}} \mathbb{1}_{\{X+Y \geq 1\}}$

$= \mathbb{1}_{\{X=1\}} \mathbb{1}_{\{X+Y \geq 1\}}$

$= \mathbb{1}_{\{X=1\}}$

$P(A_1) = P(X+Y \geq 1) = 1 - P(X+Y=0) = 1 - P(X=0, Y=0)$

$= 1 - P(X=0)P(Y=0)$

$= 1 - (1-p)^2$

$\alpha_1 = \dfrac{E(\mathbb{1}_{\{X=1\}})}{P(A_1)} = \dfrac{P(X=1)}{P(A_1)} = \dfrac{p}{1-(1-p)^2}$

$E(X/\sigma(Z)) = \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1}$

$= \dfrac{p}{1-(1-p)^2} \mathbb{1}_{\{X+Y \geq 1\}}$

2) $E(X/\sigma(Z)) = E(Y/\sigma(Z))$

$E(X-Y/\sigma(Z)) = 0$

conditionnellement à $\sigma(Z)$

$X = Y$