Processus aléatoires non stationnaires (1)

Les modèles AR, MA et ARMA ne sont représentatifs que de chroniques stationnaires en tendances, d'autre part doivent être corrigés des variations saisonnières.

Comme nous l'avons vu précédemment, la notion de stationnarité se définit par une invariance du moment d'ordre 1 et 2 au cours du temps. Or dans la réalité plusieurs séries éco et financières sont non stationnaires et en particulier ont tendances des moyennes et/ou des variances changeant dans le temps.

On peut noter que la classe des processus non stationnaires sont relativement vastes et que le modèle le plus connu est ARIMA.

I - Processus ARIMA (p, d, q) :

Ce processus est non stationnaire mais qu'on peut le rendre stationnaire en utilisant les filtres ou opérateurs de différenciation d'ordre d. (Δ^d)

Si $y_t \sim ARIMA(p,d,q)$ alors $\Delta^d y_t \sim ARMA(p,q)$

* On appelle processus ARIMA (p, d, q) un processus y_t pouvant se mettre sous la forme suivante $A(L)\Delta^d y_t = B(L)\varepsilon_t$

$\Leftrightarrow \underbrace{A(L)(1-L)^d}_{C(L)} y_t = B(L)\varepsilon_t \Rightarrow$ il existe une racine unité montrant la non stationnarité du processus

$\hookrightarrow$ 1 est une racine du polynome $C(L)$

- Un processus stationnaire après une différenciation d'ordre d est par déf un processus intégré d'ordre d. (Si $\Delta^d y_t$ est stationnaire alors $y_t \sim I(d)$ avec $d>0$) avec $d>0$ ($d = 1, 2$ généralement)

exemples :

Scanned with CamScanner

1) Si $d = 0 \Rightarrow y_t \rightsquigarrow I(0) \Rightarrow y_t$ est Sta...

2) Δy_t est stationnaire $\Rightarrow y_t \rightsquigarrow I(1)$

3) $y_t \rightsquigarrow ARIMA(4,1,0) \Rightarrow \Delta y_t \rightsquigarrow AR(4)$

⚠ Il existe une extension au modèle ARIMA qui sont les modèles SARIMA = ARIMA saisonnier

II Processus non stationnaire : TS / DS

- Les processus non stationnaires sont hétérogènes. En effet, il existe différentes sources de non stationnarité et à chaque origine de non-station est associée une méthode propre de stationnarisation.

* on distingue 2 classes des processus non stationnaires

- Les processus de type TS (trend stationnarity)
- Les processus de type DS (Difference stationnarity)

Déf 1 :

y_t est un processus non stationnaire TS s'il peut s'écrire sous la forme $y_t = f(t) + z_t$ où $f(t)$ est une fonction déterministe du temps et z un processus station
Autrement dit ; il convient de stationnariser ce type par regression sur le temps (MCO) et le résidu d'estimation obtenu correspond ainsi à la série stationnarisé. Dans ce cas la série sera modélisée à l'aide du processus ARMA (p,q)

III Test de racine unité et la stratégie séquentielle de test :

Les tests de racine unitaire ou "Unit Root Test", ces tests permettent non seulement de déterminer l'existence d'un non stationnarité mais aussi de déterminer de quelle stationnarité s'agit-il (DS ou TS) et donc la bonne méthode pour stationnariser la série.

Scanned with CamScanner

1) Test de Dickey et Fuller simple : Test DF

Les tests DF permettent de mettre en évidence le caractère stationnaire ou non chronique par la détermination d'une tendance stationnaire ou stochastique

H_0 : il existe une racine unitaire
=> Hypothèse de non stationnarité
H_1 : absence de racine unitaire => Hypothèse de stationnarité

Ce test se base sur l'estimation et l'étude séquentielle de 3 modèles de regression

1) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + bt + \varepsilon_t$: AR(1) avec tendance
2) $y_t = \phi_1 y_{t-1} + c + \varepsilon_t$: AR(1) avec cnst
3) $y_t = \underbrace{\phi_1}_{1} y_{t-1} + \varepsilon_t$: AR(1)

Sous H_0 ; $\phi_1 = 1$
(2) ⟶ DS avec derive
(3) ⟶ DS sans derive

exemple particulier pour $\phi_1 = 1$

$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$: DS sans derive

↳ "Random walk model" qui est très utilisé dans les marchés financiers.

2) Les tests de Dickey - Fuller augmentés

Afin d'améliorer la puissance du test, il y a avait proposition d'une nouvelle version du test en introduisant des termes de différences retardés. Le test s'appelle désormais ADF.

Les tests ADF sont fondés sur l'estimation par les MCO les 3 méthodes suivantes:

1) $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \Delta y_{t-j} + c + b.t + \varepsilon_t$

2) $\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1} \phi_j \Delta y_{t-j} + c + \varepsilon_t$

Scanned with CamScanner

Suite II

Def 2 :

y_t est un processus non statio. de type DS ou 'intégré' d'ordre d $I(d)$ si le processus obtenu après d différentiation est stationnaire.

$$x_t = \Delta^d y_t = (1-L)^d y_t : \text{Proc stationn}$$

Autrement dit, si la série étudiée est de type DS il convient de la stationnariser par passage aux différences selon l'ordre d'intégration $d > 0$. Ces processus sont modélisés à l'aide ARIMA (p, d, q)

Scanned with CamScanner