Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information **A.U: 2014-2015**

Examen de rattrapage
Suites des V.A

Durée: 1H.
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité, de densité:

$$f(\theta, x) = \exp(-(x-\theta))\mathbf{1}_{\{x>\theta\}}$$

1- Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $X_{(1)} = \min(X_1, ..., X_n)$.
2- Montrer que $(X_{(1)})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.vers θ
Ind: On pourra utiliser le lemme de Borel Contelli.
3- Montrer que $(X_{(1)})_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers θ.
4- On pose $Z_n = n(X_{(1)} - \theta)$, montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, identifier la loi limite.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité, de densité:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\tfrac{x}{\beta})1_{]0,+\infty[}(x), \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$ $\gamma(\alpha, \frac{1}{\beta})$

1- Montrer que $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge presque sûrement et en moyenne quadratique vers une constante que l'on déterminera en fonction de α et β.
2- Montrer que si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la loi de $2n\frac{\overline{X_n}}{\beta}$ est $\chi(2n\alpha)$.
3- Montrer que $\frac{\sqrt{n\alpha}(\overline{X_n}-\alpha\beta)}{\overline{X_n}}$ converge en loi vers la loi normale $N(0,1)$.

4/ Montrer l'existence d'une statistique ε_m tq

$P\left(\beta \in \left[\frac{\overline{X}_m}{\alpha} - \varepsilon_m q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2} ; \frac{\overline{X}_m}{\alpha} + \varepsilon_m q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2}\right]\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1-\alpha$

avec α proche de 0^+ et $\varepsilon_m \xrightarrow[m \to +\infty]{Ps} 0$

$F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$

1

Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U : 2016/2017
$1^{ère}$ Année

Examen de rattrapage
Suite de variables aléatoires

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.
(Durée: 1H30)

Exercice 1

Une équipe de football utilise des ballons dont la durée de vie suit une loi normale de moyenne 75 jours avec un écart type égal à 10
1- Donner la probabilité qu'un ballon soit encore utilisable après 90 jours.
2 On suppose qu'une saison de foot est de 90 jours, et que la direction mette à la disposition de l'équipe 100 ballons. En utilisant l'approximation de Gauss, donner la probabilité qu'à la fin de la saison il y ait plus de la moitié des ballons encore utilisables.

Exercice 2

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $]0;1]$ et V une variable aléatoire indépendante de U de, telle que $P(V=-1)=P(V=1)=0,5$.
1- Montrer que la variable aléatoire $X=\dfrac{V}{\sqrt{U}}$ a pour densité la fonction suivante:

$$f(x)=\frac{1}{|x|^3}1_{\{|x|\geq 1\}}.$$

2- Montrer que X a pour fonction caractéristique la fonction suivante:

$$\Phi(x)=1-2x^2\int_{|x|}^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^3}du.$$

3- Vérifier que $\dfrac{1}{x^2}(\Phi(x)-1-x^2\log(|x|))$ a une limite finie quand $x\to 0$.
Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.
4- Que peut-on dire de la suite $(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n}X_k)_{n\geq 1}$ quand n tend vers l'infini.
5- Peut-on appliquer le théorème de la limite centrale à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?
6- Montrer que la suite $(\frac{1}{\sqrt{n\log(n)}}\sum_{1\leq k\leq n}X_k)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi que l'on caractérisera.

Examen SVA 2014-2015

Exercice 2 :

1/ $\left.\begin{array}{l} E(X) = \alpha\beta \\ g : x \mapsto x \\ g(\beta) = E(g_\beta(X)) \end{array}\right\}$ alors $\hat{\beta} = \frac{\hat{m}_1}{\alpha} = \frac{\overline{X}_m}{\alpha}$

alors $E(|X|) = E(X) < +\infty$ Car $X > 0$

LFGN $\overline{X}_m \xrightarrow[m \to +\infty]{Pps} E(X) = \alpha\beta$

$E((\overline{X}_m - \alpha\beta)^2) = Var(\overline{X}_m) = \frac{Var(X_1)}{m} = \frac{\alpha.\beta^2}{m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$

alors $\overline{X}_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} \alpha\beta$ en moyenne quadratique

2/

Remarque : 1/ $\left.\begin{array}{l} U \sim \gamma(a_1, b) \\ V \sim \gamma(a_2, b) \\ U \text{ indep de } V \end{array}\right\} \Rightarrow U + V \sim \gamma(a_1 + a_2, b)$

2/ $\left.\begin{array}{l} U \sim \gamma(a, b) \\ c > 0 \end{array}\right\} cU \sim \gamma\left(a, \frac{b}{c}\right)$

3/ $T \sim \chi^2(m) = \gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\sum_{K=1}^{m} X_K \sim \gamma\left(m\alpha, \frac{1}{\beta}\right) \Rightarrow \overline{X}_m \sim \gamma\left(m\alpha, \frac{m}{\beta}\right) \Rightarrow \frac{2m\overline{X}_m}{\beta} \sim \gamma\left(m\alpha, \frac{1}{2}\right)$

Car $\overline{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{K=1}^{m} X_K$ $\qquad = \gamma\left(\frac{2m\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \chi(2m\alpha)$

3/ $\left.\begin{array}{l} E(X_1^2) < +\infty \\ (X_m) \text{ sont iid} \end{array}\right\} \Rightarrow$ TLC $\sqrt{m}\,(\overline{X}_m - \underbrace{E(\overline{X}_m)}_{\alpha\beta}) \xrightarrow[m \to +\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, \underbrace{\alpha\beta^2}_{Var(X_1)})$

$\Rightarrow Z_m = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}(\overline{X}_m - \alpha\beta) \xrightarrow[m \to +\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, \beta^2) = Z$

$\frac{\overline{X}_m}{\alpha} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \beta$. $A_m = \frac{\alpha}{\overline{X}_m} \xrightarrow[m \to +\infty]{Pps} \frac{1}{\beta} = A$ (deterministe)

d'après la lemme de Slutsky $A_m Z_m \xrightarrow[m \to +\infty]{Loi} AZ$

d'où $\frac{\sqrt{m\alpha}}{\overline{X}_m}(\overline{X}_m - \alpha\beta)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1) = V$

4/ On pose $V_m = A_m Z_m \xrightarrow[m \to +\infty]{Loi} V \Rightarrow F_{V_m}(v) \xrightarrow[m \to +\infty]{} F_V(v)$ $v \in \mathbb{R}, V \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(|V_m| \leq c) = P(-c \leq V_m \leq c) = F_{N(0,1)}(c) - F_{N(0,1)}(-c) = 2F_{N(0,1)}(c) - 1 = 1 - \alpha$

alors $F_{N(0,1)}(c) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c = q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(c)$

$|V_m| \leq q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2} \Leftrightarrow -q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{m\alpha}}{\overline{X}_m}(\alpha\beta - \overline{X}_m) \leq q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2}$

$$\Leftrightarrow \frac{-\overline{X}_m}{\sqrt{m\alpha}} q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2} \leq \alpha\beta - \overline{X}_m \leq \frac{\overline{X}_m}{\sqrt{m\alpha}} q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{X}_m}{\alpha} - \frac{\overline{X}_m q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2}}{\alpha\sqrt{m\alpha}} \leq \beta \leq \frac{\overline{X}_m q^{N(0,1)}_{1-\alpha/2}}{\alpha\sqrt{m\alpha}} + \frac{\overline{X}_m}{\alpha}$$

d'où $\varepsilon_m = \frac{\overline{X}_m}{\alpha\sqrt{m\alpha}} \xrightarrow[m\to+\infty]{Pps} 0$

Exercice 1 :

SVA

$(X_m)_{m\geq 1}$ une suite de v.a iid $\rightsquigarrow$

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta))\,\mathbb{1}_{]\theta;+\infty[}(x)$$

Soit $\hat\theta_m = \overline{X}_m - 1$. Mq $\hat\theta_m$ conv Pps vers θ

Comme $E(|X_1|) < +\infty$ d'après LFGN,

$\overline{X}_m \xrightarrow[m\to+\infty]{Pps} \theta + 1 = E(X_1)$

$H : u \mapsto u-1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\hat\theta_m = H(\overline{X}_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{Pps} H(E(X_1)) = \theta$

Mq $\sqrt{m}(\hat\theta_m - \theta) \xrightarrow[m\to+\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$.

Determiner explicitement $\sigma^2(\theta)$

$E(X_1^2) < +\infty$, Grâce au TLC :

$\sqrt{m}(\overline{X}_m - E(X_1)) \xrightarrow[m\to+\infty]{Loi} N(0, Var(X_1))$

$X = Z + \theta$, $Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(1)$: $Var(Z) = Var(X) = 1$

$E(X^2) = \int_\theta^{+\infty} x^2 e^{-(x-\theta)}dx = \int_0^{+\infty}(t+\theta)^2 e^{-t}dt$

$= \Gamma(3) + 2\theta\Gamma(2) + \theta^2\Gamma(1) = 2 + 2\theta + \theta^2$

$Var(X) = (2 + 2\theta + \theta^2) - (\theta+1)^2 = 1$

$\Rightarrow \sqrt{m}(\overline{X}_m - (\theta+1)) \xrightarrow[m\to+\infty]{Loi} N(0,1)$

Stat

$X_1, \dots, X_m$ m echantillon de

$X \rightsquigarrow f(\theta, x) = \exp(-(x-\theta))\,\mathbb{1}_{\{x>\theta\}}$

Determiner l'estimateur par la méthode des moments d'ordre 1 de θ

$E(X) = m_1 = \int_\theta^{+\infty} x\, e^{-(x-\theta)}dx$

$t = x - \theta$
$dt = dx$

$= \int_0^{+\infty}(t+\theta)e^{-t}dt$

$= \underbrace{\int_0^{+\infty} t e^{-t}dt}_{\Gamma(2) = 1!} + \theta \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt}_{\Gamma(1) = 0!}$

$= 1 + \theta$

$g(x) = x$ $\quad q(\theta) = E(g(X))$
$= 1 + \theta$

$\Rightarrow \hat\theta = \hat m_1 - 1 = \overline{X}_m - 1$

Mq $\hat\theta_m$ est asymptotiquement normal, càd

$\sqrt{m}(\hat\theta - \theta) \xrightarrow[m\to+\infty]{Loi} N(0, \sigma^2(\theta))$

Examen SVA 2016/2017

Exercice 1:

X_K : v.a décrit la durée de vie du $K^{ème}$ ballon

$\mathcal{L}(X_K) \rightsquigarrow \mathcal{N}(75, 10^2)$

$Y_K \rightsquigarrow b(\theta)$
$P(Y_K=1) = \theta = E(Y_K)$
$\Rightarrow 0{,}07 = E(Y_1)$

approximation de Gauss = Centré et réduire

1/ Posons $Y_K = \mathbb{1}_{\{X_K > 90\}}$

$A_K = (Y_K = 1) = \{$le Kème ballon est encore utilisable après 90 jours$\}$

$P(A_K) = P(Y_K = 1) = P(X_K > 90) = P\left(\frac{X_K - 75}{10} > 1{,}5\right) = 1 - F_{N(0,1)}(1{,}5) \simeq 0{,}07$

2/ $n = 100$ $\quad Z_n = \sum_{K=1}^{n} Y_K$ = nombre des ballons utilisable après 90 jours

Lo TLC : $\frac{Z_n - E(Z_n)}{\sqrt{Var\, Z_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \frac{n.\bar{Y}_n - n\, E(Y_1)}{\sqrt{n Var(Y_1)}} = \frac{n(\bar{Y}_n - E(Y_1))}{\sqrt{n Var(Y_1)}}$

$= \sqrt{n}. \frac{(\bar{Y}_n - E(Y_1))}{\sqrt{Var(Y_1)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\bar{Y}_n - E(Y_1)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, Var(Y_1))$

$(Z_n > 50) = \left(\underbrace{\frac{Z_n - n.0{,}07}{\sqrt{n.0{,}07.0{,}93}}}_{T_n} > \underbrace{\frac{50 - 0{,}07n}{\sqrt{n.0{,}07.0{,}93}}}_{V}\right)$

$P(Z_n > 50) = P(T_n > V) = 1 - F_{T_n}(V) \simeq 1 - F_{N(0,1)}(V)$

avec $n = 100$

Mq $T_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \theta$ en moy quadratique

$E(|T_m-\theta|^2) = Var(T_m) = \frac{1}{m^2} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \Rightarrow T_m \xrightarrow[m\to+\infty]{L^2(P)} \theta \Rightarrow Cv\,P\,ps$

Or. Borel Cantelli :

$\varepsilon > 0 \quad P(A_{m,\varepsilon})$

$A_{m,\varepsilon} = \{|T_m-\theta| > \varepsilon\} = \{X_{(1)} - \frac{1}{m} - \theta > \varepsilon\} \cup \{X_{(1)} - \frac{1}{m} - \theta < -\varepsilon\}$

$\Rightarrow P(A_{m,\varepsilon}) = P(X_{(1)} > \frac{1}{m} + \theta + \varepsilon) + P(X_{(1)} < \theta + \frac{1}{m} - \varepsilon)$

$= 1 - \underbrace{F_{X_{(1)}}(\theta + \frac{1}{m} + \varepsilon)}_{(**)} + \underbrace{F_{X_{(1)}}(\theta + \frac{1}{m} - \varepsilon)}_{(*)}$

Pour m assez grand

$(*) = 0$

$P(A_{m,\varepsilon}) = 1 - (1 - e^{-m(\theta + \frac{1}{m} + \varepsilon - \theta)}) = e^{-m(\frac{1}{m} + \varepsilon)} \quad e^{-1}.\underbrace{(e^{-\varepsilon})^m}_{geom}$

$\Rightarrow \sum P(A_{m,\varepsilon}) < +\infty$

Grâce au lemme de Borel Cantelli. $T_m \xrightarrow[m\to+\infty]{P\,ps} \theta$

4/ $Z_m = m(X_{(1)} - \theta) \xrightarrow{Loi} V$

$F_{Z_m}(z) = P(m(X_{(1)}-\theta) \leq z) = P(X_{(1)} - \theta \leq \frac{z}{m}) = P(X_{(1)} \leq \theta + \frac{z}{m})$

$= F_{X_{(1)}}(\theta + z/m)$

$= \begin{cases} 0 & si\ z<0 \\ 1 - e^{-z} & si\ z>0 \end{cases} = F_{\mathcal{E}(1)}(z)$

loi exp

d'où $F_{Z_m}(z) \xrightarrow[m\to+\infty]{} F_V(z)$ où $V \rightsquigarrow \mathcal{E}(1)$ càd $m(X_{(1)} - \theta) \xrightarrow[m\to+\infty]{Loi} V$

$\theta = \overline{X}_m - 1 = H(\overline{X}_m)$

H est de classe C^1

Grâce à la δ-méthode :

$$\sqrt{m}\left(H(\overline{X}_m) - H(E(X_1))\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{L}oi} N(0, H'(E(X_1))^2 \cdot Var X)$$

$$\sqrt{m}\left(\hat{\theta}_m - \theta\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{\mathcal{L}oi} N(0,1)$$

Partie 2 :

1/ $F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} \geq x)$

$= 1 - (P(X_1 \geq x))^m = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^m$

or $F_{X_1} = \begin{cases} 0 & si\ x \leq \theta \\ \int_0^x e^{-(t-\theta)} dt = 1 - e^{-(x-\theta)} & si\ x > \theta \end{cases}$

$\Rightarrow F_{X_{(1)}} = \begin{cases} 0 & si\ x \leq \theta \\ 1 - e^{-m(x-\theta)} & si\ x > \theta \end{cases}$

$f_{X_{(1)}}(x) = m e^{-m(x-\theta)} \mathbb{1}_{]\theta;+\infty[}(x)$

2/ $E(X_{(1)}) = \int_0^{+\infty} x e^{-m(x-\theta)} \cdot m\, dx$

$t = m(x-\theta)$

$\frac{t}{m} = x - \theta$

$\frac{dt}{m} = dx$

$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{m} + \theta\right) e^{-t} dt$

$= \frac{1}{m}\Gamma(2) + \theta\Gamma(1) = \frac{1}{m} + \theta$

Déduire une v.a T_m tq $E(T_m) = \theta$

$T_m = X_{(1)} - \frac{1}{m}$. $E(T_m) = \theta$: T_m est sans biais de θ

$\hat{\theta}_m = \overline{X}_m - 1$ estimateur sans biais de θ

$Var(T_m) = Var(X_{(1)}) = E(X_{(1)}^2) - (E(X_{(1)}))^2$

avec $E(X_{(1)}^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-m(x-\theta)} m \cdot dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{m} + \theta\right)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{m^2}\Gamma(3)$ $\quad t = m(x-\theta)$

$+ \frac{2\theta}{m}\Gamma(2) + \theta^2\Gamma(1) = \frac{2}{m^2} + \frac{2\theta}{m} + \theta^2$

$Var(T_m) = \frac{1}{m^2}$

Determiner $\hat{\theta}_m$ max de vraisemblance

$\mathcal{L}(x,\theta) = \prod_{K=1}^{m} f_\theta(x_K)$

$= e^{-m\overline{X}_m + m\theta} \mathbb{1}_{[\theta;+\infty[^m}$

$\max \mathcal{L}(x,\theta) \Leftrightarrow \max_{x_K \geq \theta} e^{m\theta}$

$\Leftrightarrow \max \theta$

$\Leftrightarrow \hat{\theta} = X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_m)$