

EXAMEN DU MODULE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

**Exercice 1 (8pt)** Considérons le Programme Linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \text{Max} & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s/c} & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement  $(P_L)$ .
2. Ecrire le PL sous forme standard.
3. Résoudre par la méthode du Simplexe le PL modifié.
4. Le Programme Dual du Programme Primal

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \text{Max} & cx \\ \text{s/c} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

est

$$(\mathcal{D}) = \begin{cases} \text{Min} & yb \\ \text{s/c} & Ay \geq c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que le Dual du Programme Dual est le Programme Linéaire d'origine.

5. Donner le Programme Dual de  $(P_L)$ .

**Exercice 2 (4pt)** Rechercher une arborescence de poids minimum et de racine 1 sur le graphe de la figure ci-dessous en utilisant un des algorithmes vus en cours :

A

B

C

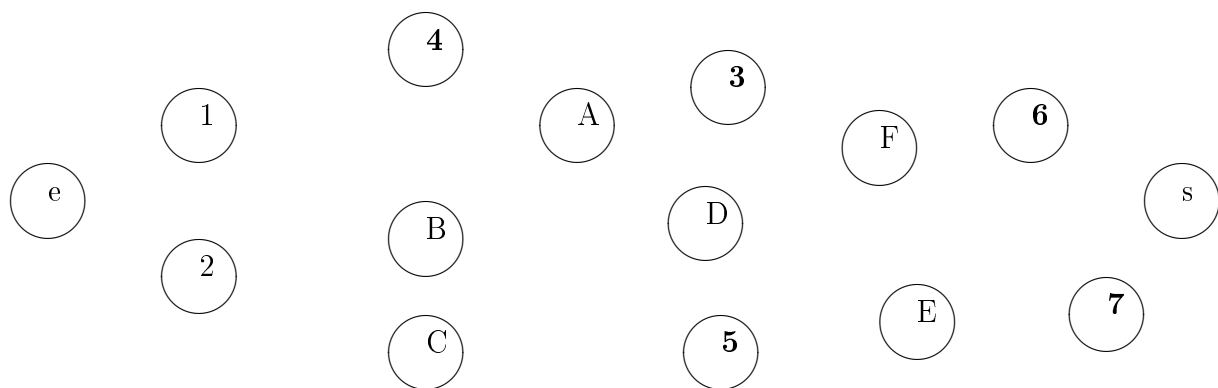
D

E

F

**Exercice 3 (8pt)** L'eau constitue un enjeu majeur dans les relations entre les États d'Asie centrale. En effet, son territoire fut délimité par deux fleuves : l'Oxus (noté 1) et l'Iaxarte (noté 2) qui sont à l'origine des frontières géographiques, culturelles et politiques qui séparent l'Asie centrale du reste du monde. Plus récemment, l'Oxus marquait la frontière avec l'Afghanistan gouverné par les talibans. L'Iaxarte protégeait les royaumes d'Asie centrale des invasions périodiques venues de Mongolie, de Sibérie et du désert de Gobi. Outre ce rôle de "frontière naturelle", l'eau est devenue au fil du temps une richesse de plus en plus exploitée. Ce qui conduit de nos jours à des tensions, si ce n'est des conflits, entre les cinq nouvelles républiques indépendantes d'Asie centrale : le Kazakhstan (3), le Kirghizstan (4), l'Ouzbékistan (5), le Tadjikistan (6) et le Turkménistan (7). Il est important de remonter au XIX<sup>ème</sup> siècle pour comprendre les enjeux de ces conflits. Cependant, les événements liés à la guerre d'Afghanistan (2001-2002) imposent aussi une redéfinition de la problématique de l'eau en Asie centrale. En effet, cette nouvelle période de reconstruction pour l'Afghanistan va créer des tensions supplémentaires par rapport à l'enjeu de cette ressource.<sup>1</sup>

Le graphe ci-dessous représente un plan d'acqueducs et de canalisations reliant les deux principaux barrages des fleuves (1) et (2) avec les villes d'Asie centrale de (3), (4), (5), (6) et (7) ainsi qu'aux réserves dans les villages frontaliers (A), (B), (C), (D), (E) et (F). Les réserves journalières disponibles sont de 150 milliers de  $m^3$  par jour pour (1) et de 200 milliers de  $m^3$  pour (2). Les 5 pays d'Asie centrale désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir 175 milliers de  $m^3$  pour la ville (3), 50 milliers de  $m^3$  pour la ville (4), 30 milliers de  $m^3$  pour la ville (5), 40 milliers de  $m^3$  pour la ville (6) et 30 milliers de  $m^3$  pour la ville (7). Les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de  $m^3$  par jour :



1. Compléter le graphe ci-dessus en initialisant le flot à 0 et déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel (détailler l'algorithme de Ford-Fulkerson).
2. Donner la coupe minimale correspondante.
3. La valeur du flot maximal est-elle suffisante pour les besoins journaliers des pays (3), (4), (5), (6) et (7) ? Quelle(s) solution(s) proposer ?

<sup>1</sup>Analyse de Jeremy Allouche, Assistant de la section HPI, Institut Universitaire de Hautes Etudes Internationales. Genève, Suisse.

**Bon Travail,  
Ines Abdeljaoued.**