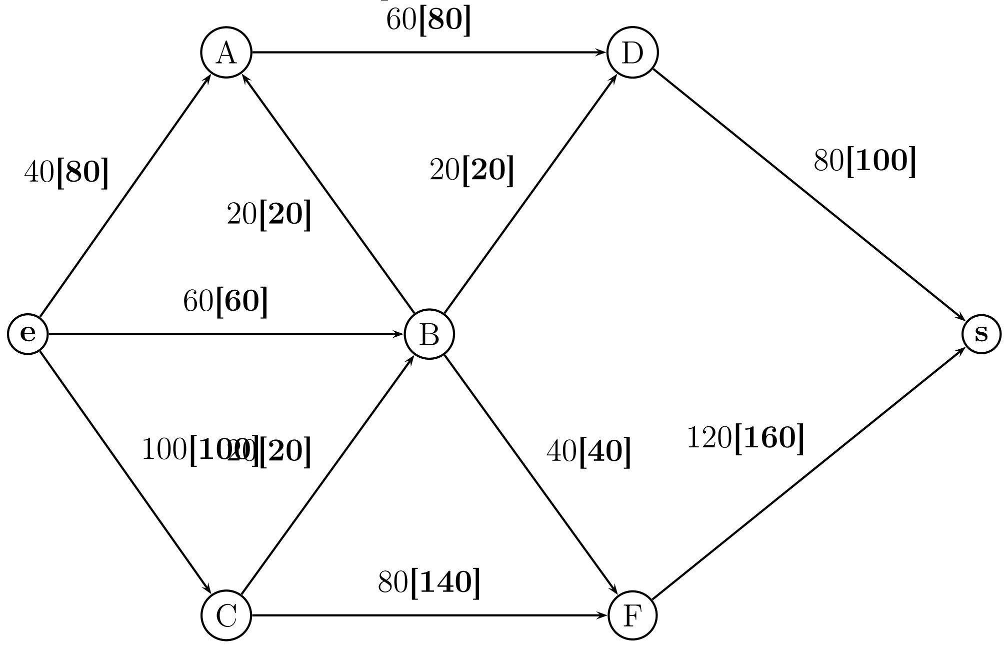
ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunisie

2ème année
Durée : 1h30
Mai 2012

Examen du module Recherche Opérationnelle - Session de Contrôle

Session Principale

Exercice 1 Soit le réseau de transport suivant :



1. Est-ce qu'il s'agit d'un flot ? Justifier votre réponse.
2. Compléter le réseau par l'arc de retour de capacité infinie et de flux ϕ_0.
3. Est-ce que le flot est complet ? Sinon le compléter.
4. Appliquer l'étape de marquage de l'algorithme de Ford-Fulkerson afin de déterminer le flot maximal traversant ce réseau. Quelle est la valeur maximale de ϕ_0 ?
5. En déduire la coupe de capacité minimale.

Exercice 2 Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ & \\ \text{s/c} & 2x_1 - 3x_2 \geq -2 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la forme standard du Programme linéaire (P_L).
2. Donner les deux premières itérations de l'algorithme du Simplexe.
3. Donner le dual de (P_L).
4. A quoi est égal le dual du dual de (P_L) ? Justifier votre réponse.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunisie

2ème année
Durée : 1h30
Mai 2012

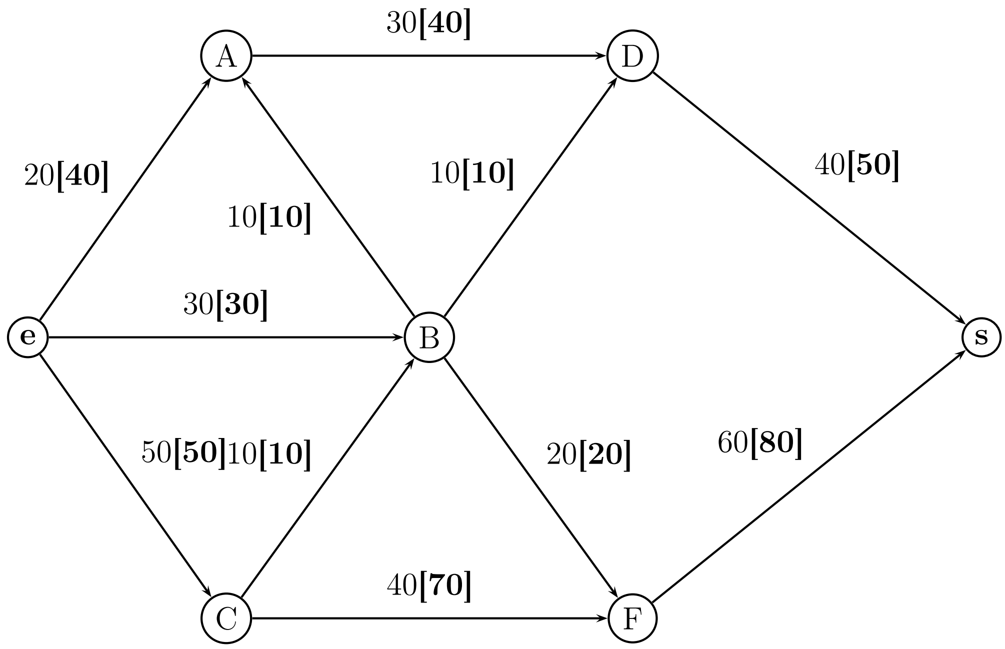
Examen du module Recherche Opérationnelle
Session Principale

Exercice 3 (6pt) Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ \\ \text{s/c} & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \leq 4 \\ \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Dessiner l'ensemble des contraintes associé à ce problème et donner la solution graphique de (P_L).
2. Déterminer la forme standard du Programme linéaire (P_L). Donner une solution de base réalisable.
3. Appliquer l'algorithme du Simplexe à la forme standard de (P_L).
4. Donner le dual de (P_L) et en déduire la solution du dual.

Exercice 4 (8pt) Soit le réseau de transport suivant :



1. Est-ce qu'il s'agit d'un flot ? Justifier votre réponse.
2. Compléter le réseau par l'arc de retour de capacité infinie et de flux ϕ_0.

3. Est-ce que le flot est complet ? Sinon le compléter.
4. Appliquer l'étape de marquage de l'algorithme de Ford-Fulkerson afin de déterminer le flot maximal traversant ce réseau. Quelle est la valeur maximale de ϕ_0 ?
5. En déduire la coupe de capacité minimale.

Exercice 5 (6pt) Soit le problème d'ordonnancement suivant :

Tâche	Durée	antécédents
A	3	C
B	4	A
C	2	aucun
D	6	A

1. Calculer le rang de chaque tâche puis déssiner le graphe Potentiels-tâche (Méthode des Potentiels Métras ou MPM) associé.
2. Calculer les dates de début d'exécution de chacune des tâches au plus tôt et au plus tard.
3. Déterminer les marges totales et les marges libres des tâches.
4. En déduire les tâches critiques ainsi que le chemin critique associé à ce problème.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunisie

2ème année
Durée : 1h30
Mars 2012

DS du module Recherche Opérationnelle

Exercice 6 (4pt) Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \min & 2x_1 - 3x_2 \\ & \\ \text{s/c} & 2x_1 - 3x_2 \geq -2 \\ & 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ & 5x_1 + 6x_2 \leq 3 \\ & \\ & x_1 \leq 0, x_2 \text{ qcq} \end{cases}$$

1. Déterminer la forme standard du Programme linéaire (P_L).
2. Donner le dual de (P_L).
3. A quoi est égal le dual du dual de (P_L) ? Justifier votre réponse.

Exercice 7 (6pt) Une compagnie produit des Jeux d'échecs et des Backgammon. Chaque jeux d'échec rapporte un profit de 9D et chaque backgammon un profit de 3D.
La compagnie utilise trois types de machines : A, B et C. Pour la prochaine période, l'entreprise dispose de 20 heures de machines A, 50 heures de machine B et 30h de machine C. La fabrication de chaque jeux d'échec nécessite 1h de travail sur des machines de type A et 1h de travail sur des machines de type B.
La fabrication de chaque backgammon nécessite 7h de travail sur des machines de type A, 1h de travail sur des machines de type B et 1h de travail sur des machines de type C.
Assumons (pour simplifier) que les coûts d'achat des ressources et de production ont été comptabilisés dans les profits unitaires et que la compagnie pourra vendre toute sa production.

1. Donner le Programme linéaire associé (fontion objectif et contraintes).
2. Combien de jeux d'échecs et de backgammons produire afin de maximiser les profits ? Résoudre graphiqement le Programme linéaire.

Exercice 8 (10pt) Considérons le Programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1 + 5x_2 \\ & \\ \text{s/c} & x_1 - 7x_2 - x_3 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1. Ecrire le Programme linéaire sous forme standard avec variables d'écarts.
2. Est-ce que la base $x_B = (x_4, x_5)$, $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ est une solution réalisable ?
3. Appliquer la méthode *Big M* afin de trouver une solution optimale au problème.
4. En déduire, grâce au dernier tableau du simplexe, la solution du dual.

Bon Travail,

Ines Abdeljaoued.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunisie

2ème année
Durée : 1h30
Mars 2012

Correction du DS du module Recherche Opérationnelle

Exercice 9 (4pt) Considérons le Programme linéaire (P_L).

1. La forme standard du Programme linéaire (P_L) est égale à

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1^{'} + 3x_2^{'} - 3x_2^{"} \\ & \\ \text{s/c} & 2x_1^{'} + 3x_2^{'} - 3x_2^{"} \leq 2 \\ & -3x_1^{'} + 4x_2^{'} - 4x_2^{"} \leq 7 \\ & 3x_1^{'} - 4x_2^{'} + 4x_2^{"} \leq -7 \\ & -5x_1^{'} + 6x_2^{'} - 6x_2^{"} \leq 3 \\ & \\ & x_1^{'} \geq 0, x_2^{'} \geq, x_2^{"} \geq 0 \end{cases}$$

2. Le dual de (P_L) est égal à

$$(P_L) = \begin{cases} \min & 2y_1 + 7y_2 - 7y_3 + 3y_4 \\ & \\ \text{s/c} & 2y_1 - 3y_2 + 3y_3 - 5y_4 \geq 2 \\ & 3y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 6y_4 \geq 3 \\ & -3y_1 - 4y_2 + 4y_3 - 6y_4 \geq -3 \\ & \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. Le dual du dual de (P_L) est égal à (P_L).

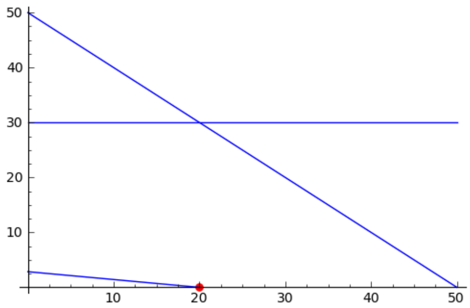
Exercice 10 (6pt) Une compagnie produit des Jeux d'échecs et des Backgammon. On note x_1 le nombre de jeux d'échecs produits et x_2 le nombre de backgammons fabriqués. Chaque jeux d'échec rapporte un profit de 9D et chaque backgammon un profit de 3D. La fonction objectif est donc égal à $9x_1 + 3x_2$ qu'on cherche à maximiser.
La compagnie utilise trois types de machines : A, B et C. Pour la prochaine période, l'entreprise dispose de 20 heures de machines A, 50 heures de machine B et 30h de machine C. La fabrication de chaque jeux d'échec nécessite 1h de travail sur des machines de type A et 1h de travail sur des machines de type B.
La fabrication de chaque backgammon nécessite 7h de travail sur des machines de type A, 1h de travail sur des machines de type B et 1h de travail sur des machines de type C.

1. Les contraintes pour chaque type de machine sont données par : $x_1 + 7x_2 \leq 20$, $x_1 + x_2 \leq 50$, $x_2 \leq 30$.
2. La solution gtraphique est donnée par $x* = (20, 0)$.

Exercice 11 (10pt) Considérons le Programme linéaire (P_L)

1. Le Programme linéaire sous forme standard avec variables d'écarts est égal à

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1 + 5x_2 \\ & \\ \text{s/c} & x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ & \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$



2. La base $x_B = (x_4, x_5)$, $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ n'est pas une solution réalisable.
3. En appliquant la méthode *Big M*, nous trouvons

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline & & & & & & & \\ x_6 & -1 & 7 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ & 2-M & 7M+5 & M & -M & 0 & 0 & 2M \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline & & & & & & & \\ x_2 & -\frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ x_5 & \frac{8}{7} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{33}{7} \\ & \frac{19}{7} & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & 0 & -M-\frac{5}{7} & -\frac{10}{7} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline & & & & & & & \\ x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ x_1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{33}{8} \\ & 0 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{19}{8} & -M-\frac{3}{8} & -\frac{101}{8} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ \hline & & & & & & & \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ x_4 & 8 & 0 & 6 & 1 & 7 & -1 & 33 \\ & -3 & 0 & -5 & 0 & -5 & -M & -25 \end{array}\right)$$

   Sachant que la variable artificielle devient une variable hors base, la solution optimale au problème est égale à $x* = (0, 5, 0, 33, 0)$ avec $z* = 25$.
4. En éliminant la variable artificielle, on déduit le dictionnaire à l'optimum :

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} x_B & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline & & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ & 8 & 0 & 6 & 1 & 7 & 33 \\ & -3 & 0 & -5 & 0 & -5 & -25 \end{array}\right)$$

   D'où la solution du dual est égale à $y* = (0, 5)$ avec $w* = 25$.