Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information à Tunis

Année Universitaire
2015-2016
Première Année

Statistique Inférentielle 1 : Corrigé du Devoir Surveillé

Février 2016

Corrigé exercice 1

1. $$\begin{aligned} f(x,\theta) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\theta^2}} \exp -\tfrac{1}{2\alpha^2\theta^2}(x-\theta)^2 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\theta^2}} \exp -\tfrac{1}{2\alpha^2\theta^2}x^2 + \tfrac{1}{\alpha^2\theta}x - \tfrac{1}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

   donc

   $$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \tfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\alpha^n\theta^n} \exp -\tfrac{1}{2\alpha^2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \tfrac{1}{\alpha^2\theta}\sum_{i=1}^n x_i - \tfrac{n}{2\alpha^2}$$

2. $\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \exp -\tfrac{1}{2\alpha^2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \tfrac{1}{\alpha^2\theta}\sum_{i=1}^n x_i - \tfrac{n}{2\alpha^2} - n\ln\theta - n\ln\alpha - \tfrac{n}{2}\ln 2\pi$

   On a $\Theta \subset \mathbb{R}$ et la vraisemblance ne s'écrit pas sous la forme $\exp\left(c(\theta)T(\underline{x}) + d(\theta) + S(\underline{x})\right)\mathbb{1}_A(\underline{x})$ avec $c, d : \Theta \to \mathbb{R}$ et $T : E^n \to E'$.
   Le modèle n'appartient donc pas à la famille exponentielle.

3. $$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{\alpha^2\theta}\sum_{i=1}^n x_i - n\ln\theta\right)}_{g(T(\underline{x}),\theta)} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{n}{2\alpha^2} - n\ln\alpha - \frac{n}{2}\ln 2\pi\right)}_{h(\underline{x})}$$

   Ainsi, d'après le théorème de factorisation, $T(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i\right)$ est une statitique exhaustive pour le modèle.

   $$\begin{aligned} E(Z) &= E\left(\frac{\alpha^2+n}{\alpha^2+1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) \\ &= \frac{\alpha^2+n}{\alpha^2+1}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - E\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) \\ &= \frac{\alpha^2+n}{\alpha^2+1}nE(X_1^2) - \left(Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + \left(E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right)^2\right) \\ &= \frac{\alpha^2+n}{\alpha^2+1}n\left(\alpha^2\theta^2+\theta^2\right) - \left(n\alpha^2\theta^2 + n^2\theta^2\right) \\ &= n\theta^2(\alpha^2+n) - n\theta^2(\alpha^2+n) = 0 \end{aligned}$$

4. Considérons l'application non nulle ϕ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E' \times E'' & \to & \mathbb{R} \\ & (t_1, t_2) & \mapsto & \dfrac{\alpha^2+n}{\alpha^2+1} t_1 - t_2^2 \end{array}$$

On a $T(\underline{x}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)$ statististique exhaustive et on a $Z = \phi(T)$.

Comme $E(\phi(T)) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$, alors T n'est pas complète.

Corrigé Exercice 2 : $f_\theta(x) = k\,|x| \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) \quad \theta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. S'agissant d'une densité paire, on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} k\,|x| \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx = 2\int_0^{+\infty} kx \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx$$

$\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\,dx = -2k\theta \int_0^{+\infty} -\frac{x}{\theta} \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx = -2k\theta \left[\exp(-\frac{x^2}{2\theta}) \right]_0^{+\infty}$

$\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\,dx = 2k\theta \Longrightarrow k = \frac{1}{2\theta} \quad et \quad f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} |x| \exp(-\frac{x^2}{2\theta})$

2. $E_\theta(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\theta} x\,|x| \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx = 0$ (impaire).

$E_\theta(X^2) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\theta} x^2\,|x| \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^3 \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx$

Posons $u = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{u} \quad et \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du.$

$E_\theta(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^3 \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} u^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{u}{2\theta}) \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

$E_\theta(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\theta} u \exp(-\frac{u}{2\theta}) du = 2\theta \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2\theta}\right)^2}{\Gamma(2)} u^{2-1} \exp(-\frac{u}{2\theta}) du$

$E_\theta(X^2) = 2\theta$ et $var_\theta(X) = 2\theta.$

$E_\theta(X^4) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\theta} x^4\,|x| \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^5 \exp(-\frac{x^2}{2\theta}) dx$

Posons $u = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{u} \quad et \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du.$

$E_\theta(X^4) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} u^{\frac{5}{2}} \exp(-\frac{u}{2\theta}) \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\theta} u^2 \exp(-\frac{u}{2\theta}) du$

$E_\theta(X^4) = \Gamma(3)\,(2\theta)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2\theta}\right)^3}{\Gamma(3)} u^{3-1} \exp(-\frac{u}{2\theta}) du = 8\theta^2.$

3. $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \underbrace{\prod\limits_{i=1}^{n} |x_i|}_{h(\underline{x})} \underbrace{\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \exp -\frac{1}{2\theta} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}_{g(T(\underline{x}), \theta)}.$

D'après le théorème de factorisation, $T(\underline{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ est une statistique exhaustive.

4. $\underbrace{E_\theta(X^2)}_{E_\theta[g(X)]} = \underbrace{2\theta}_{q(\theta)} \Longleftrightarrow \theta = q^{-1}\left(E_\theta\left[g(X)\right]\right)$

   et $\widetilde{\theta} = q^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{2}\widehat{m}_2.$

5. $\mathcal{L}\left(\underline{x},\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} |x_i| \quad \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \exp -\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$

   1er cas : $\exists i, 1 \leq i \leq n,\ x_i = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}\left(\underline{x},\theta\right) = 0$ et $\forall \theta > 0, \theta$ maximise la vraisemblance.

   2ème cas : $\forall i, 1 \leq i \leq n,\ x_i \neq 0$

   $\mathcal{L}\left(\underline{x},\theta\right) = \exp\left[-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\ln\theta - n\ln 2 + \sum_{i=1}^{n}\ln|x_i|\right].$

   $\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{\theta} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \theta.$

   $\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{n}{\theta^2}$

   $\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} < 0 \Longleftrightarrow -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\theta < 0 \Longleftrightarrow \theta < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$

   Il y a donc concavité au voisinage de $\theta = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\widehat{\theta}_n = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance.

6. $I_n(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\left(\underline{X},\theta\right)\right] = -E_\theta\left[-\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{n}{\theta^2}\right]$

   $I_n(\theta) = \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} E_\theta\left[X_i^2\right] - \frac{n}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} 2\theta - \frac{n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}.$

7. $Var\left[\widehat{\theta}_n\right] = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left[X_i^2\right] = \frac{1}{4n}Var\left[X^2\right]$

   $Var\left[\widehat{\theta}_n\right] = \frac{1}{4n}\left(E_\theta\left[X^4\right] - \left(E_\theta\left[X^2\right]\right)^2\right)$

   $Var\left[\widehat{\theta}_n\right] = \frac{1}{4n}\left(8\theta^2 - (2\theta)^2\right) = \frac{\theta^2}{n}.$

   $BCR(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{Var\left[\widehat{\theta}_n\right]}.$

   $\widehat{\theta}_n$ est donc efficace.