## Exercice 1

Soient :

- $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$; $\sigma^2$ connue; $\eta = \frac{1}{\sigma^2}$
- La loi à priori pour $\mu \hookrightarrow N(\mu_0, \eta_0^{-1})$; avec $\eta_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}$

1- Déterminer pour cet exemple la loi à postériori $\pi(./x)$

2- Comparer les espérances et les variances à postériori et à priori.

3- Déterminer $\delta^\pi(X)$ l'estimateur Bayésien avec la fonction perte quadratique.

4- Montrer que pour $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de $X$ on obtient :
$\pi(\mu/x_1, ..., x_n) \propto exp[-\frac{1}{2}(n.\eta + \eta_0)(\mu - \frac{n.\eta\hat{X}_n + \eta_0\mu_0}{n.\eta + \eta_0})^2]$

5- En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$.

6- Déterminer

$$\hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$$

avec $\theta = \mu$.

7- Déterminer $\lim_{n \hookrightarrow +\infty} \hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$

## Exercice 2

Soient :

- $X \hookrightarrow Bn(n, p)$;
- $\pi$ La loi à priori $\hookrightarrow \pi(u) = \frac{1}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}$

1- Montrer que $f(x, p) = \frac{C_n^x}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} p^{x-\frac{1}{2}}(1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}$

2- Déduire que :

$$m_\pi(x) = \frac{\beta(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2})}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} C_n^x$$

3- En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$

4- Déterminer l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

# Exercices

## Exercice 3

Soient :

- $X = (X_1, ..., X_n)$ n observations indépendantes distribuées selon la loi $N(\theta, \sigma^2)$; $\sigma^2$ connue.
- $\pi$ La loi à priori sur $\theta$ de la forme $\mathbb{N}(\tau, \zeta^2)$

1- Déterminer $L((X_1, X_2, ..., X_n)/\widetilde{\Theta} = \theta)$

2- Déterminer $L((X_1, X_2, ..., X_n), \widetilde{\Theta})$

3- Montrer que

$$f((x_1, ..., x_n), \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \sigma^n \zeta} exp[-\frac{1}{2}(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\zeta^2})(\theta - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\zeta^2}}(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{\tau}{\zeta^2}))^2] exp[-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{\tau^2}{\zeta^2} - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\zeta^2}}(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{\tau}{\zeta^2})^2)]$$

4- En déduire la loi à postériori.

# Exercices

## Exercice 3

Soient :

- $X \hookrightarrow N(\theta, \sigma^2)$; $\sigma^2$ connue.
- $\pi$ La loi à priori sur $\theta$ de la forme $N(a, b^2)$

1- Déterminer $L(X/\widetilde{\Theta} = \theta)$

2- Déterminer $L(X, \widetilde{\Theta})$

3- Montrer que

$f(x,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma b} exp[-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}(\theta - \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}(\frac{a}{b^2} + \frac{x}{\sigma^2}))^2] exp[-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2}]$

4- Montrer que :

$$m_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+b^2)}} exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2})$$

5- En déduire que $L(\widetilde{\Theta}/X = x) \hookrightarrow N(\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}(\frac{a}{b^2} + \frac{x}{\sigma^2}), \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2})$

6- Déduire l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

# Exercices

## Exercice 6

On considère maintenant la fonction perte $L^1$ avec $\Theta = \mathbb{R}$ c-à-d :
$L(\theta, \delta) = |\theta - \delta|$
Montrer que $\delta^{\pi}$ est la médiane de la loi à postériori.

Exo1 Farook

1)
$X \longrightarrow N(\mu, \sigma^2)$ , $\sigma^2$ connue , $\eta = \frac{1}{\sigma^2}$

$\pi(\mu) = \mu \sim N(\mu_0, \eta_0^{-1})$ $\eta_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}$

$$\pi(\mu/x) = \frac{f(x/\mu)\,\pi(\mu)}{m_\pi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu-\mu_0)^2\right]\cdot\frac{1}{m_\pi(x)}$$

$$= \alpha\,.\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu-\mu_0)^2\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\frac{\eta}{2}(x-\mu)^2-\frac{\eta^0}{2}(\mu-\mu_0)^2\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\frac{\eta}{2}(x^2-2x\mu+\mu^2)-\frac{\eta^0}{2}(\mu^2-2\mu\mu_0+\mu_0^2)\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\frac{\eta x^2}{2}+\eta\mu x-\frac{\eta\mu^2}{2}-\frac{\eta^0\mu^2}{2}+\eta^0\mu\mu_0-\frac{\eta^0\mu_0^2}{2}\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\mu^2\left(\frac{\eta+\eta_0}{2}\right)+(\eta x+\eta^0\mu_0)\mu-\left(\frac{\eta x^2+\eta^0\mu_0^2}{2}\right)\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\left(\frac{\eta+\eta_0}{2}\right)\mu^2+(\eta x+\eta^0\mu_0)\mu\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\left(\frac{\eta+\eta_0}{2}\right)\left[\mu^2-\frac{2\mu}{\eta+\eta_0}(\eta x+\eta_0\mu_0)\right]\right]$$

$$= \alpha \exp\left[\frac{-(\eta+\eta_0)}{2}\left[\left[\mu-\left(\frac{\eta x+\eta_0\mu_0}{\eta+\eta_0}\right)\right]^2-\left(\frac{\eta x+\eta_0\mu_0}{\eta+\eta_0}\right)\right]\right]$$

$$= \alpha \exp\left[-\frac{(\eta+\eta_0)}{2}\left(\mu-\frac{\eta x+\eta_0\mu_0}{\eta+\eta_0}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \pi(\cdot/x) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\frac{\eta x+\eta_0\mu_0}{\eta+\eta_0} ; \frac{1}{\eta+\eta_0}\right)$$

2-

$$E(\tilde{\theta}/x) = \frac{\eta x+\eta_0\mu_0}{\eta+\eta_0} \qquad E(\theta) = \mu_0$$

$$\frac{1}{\eta_0} > \frac{1}{\eta+\eta_0}$$

3- fct de perte quadratique.

$$\delta^\pi(x) = E(\hat{\theta}/x) = \frac{\eta x+\eta^0\mu_0}{\eta+\eta_0}$$

4- $f(x_1 — x_n/\mu) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\eta}{2}(x_i-\mu)^2\right)\right)$

$$= \frac{\eta^n}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{\eta}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$\pi(\mu/x_1 — x_n) = f(x_1 — x_n/\mu)\,\pi(\mu)$$

$$= \frac{\eta^n}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(\frac{-\eta}{2}\sum(x_i-\mu)^2\right]\cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\eta_0}{2}(\mu-\mu_0)^2\right)$$

3 $$= \alpha \exp\left(\frac{-\eta}{2}\left(\sum x_i-\mu\right)^2 - \frac{\eta_0}{2}(\mu-\mu_0)^2\right)$$

$$= \alpha \exp\left[-\frac{(n\eta+\eta_0)}{2}\left(\mu-\frac{n\eta\hat{X}_n+\eta_0\mu_0}{n\eta+\eta_0}\right)^2\right]$$

5) $\pi(\cdot/x_1 — x_n) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\frac{n\eta\hat{X}_n+\eta_0\mu_0}{n\eta+\eta_0} ; \frac{1}{n\eta+\eta_0}\right)$

4- 6) $\hat{\theta}^{MAP} = \text{Argmax}\ \pi(\cdot/x_1 — x_n) = \frac{n\eta\hat{X}_n+\eta_0\mu_0}{n\eta+\eta_0}$

7) $\lim_{n\to+\infty}\hat{\theta}^{MAP} = \lim_{n\to+\infty}\bar{X}_n = E(X) = \mu.$

EXO2

$X \rightsquigarrow B(n,p)$

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \mu^{-\frac{1}{2}} (1-\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x,p) = f(x/p).\pi(p)$$

$$= C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \cdot \frac{1}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} p^{-\frac{1}{2}} (1-p)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$= \frac{C_n^x}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} p^{x-\frac{1}{2}} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}$$

2) $m_\pi(x) = \int_{]0,1[} f(x,p)$ $\quad$ ⓪ = $]0,1[$ Car $p \in ]0,1[$.

$$= \int_{]0,1[} \frac{C_n^x}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} t^{x-\frac{1}{2}} (1-t)^{n-x-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{C_n^x}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \underbrace{\int_{]0,1[} t^{x-\frac{1}{2}} (1-t)^{n-x-\frac{1}{2}} dt}_{\beta(x+\frac{1}{2},\, n-x+\frac{1}{2})} \quad \text{Car } \beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

$$= \frac{C_n^x \, \beta(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2})}{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$$

3- $$\pi(\cdot/x) = f(p/x) = \frac{f(x,p)}{m_\pi(x)} = \frac{f(x/p).\pi(p)}{m_\pi(x)}$$

$$= \frac{p^{x-\frac{1}{2}+1-1} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}+1-1}}{\beta(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2})} \ \cancel{dt} \ \beta(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2})$$

4- $$\delta^\pi(x) = E(\theta/x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+n-x+\frac{1}{2}} = \frac{x+1/2}{n+1}$$

(ex 3) Ex 3.1



1) $f(m,\theta) = \frac{1}{2\pi b\sigma} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(m-\theta)^2 - \frac{1}{2b^2}(\theta-a)^2\right)$

2) $f(m,\theta) = p(m, \tilde{\theta} = \theta) . \pi(\theta)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(m-\theta)^2\right) . \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp \frac{-1}{2b^2}(\theta-a)^2$

3) $f(m,\theta) = \frac{-1}{2\sigma^2}(m-\theta)^2 - \frac{1}{2b^2}(\theta-a)^2$

$= \frac{-1}{2\sigma^2}(m^2 - 2m\theta + \theta^2) - \frac{1}{2b^2}(\theta^2 - 2a\theta + a^2)$

$= \frac{-m^2}{2\sigma^2} + \frac{m\theta}{\sigma^2} - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} - \frac{\theta^2}{2b^2} + \frac{a\theta}{b^2} - \frac{a^2}{2b^2}$

$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{b^2}\right)\theta^2 - 2\theta\left(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right)\right]$

$- \frac{m^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}$

$= \frac{-(b^2+\sigma^2)}{2\sigma^2 b^2}\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{m}{\sigma^2}+\frac{a}{b^2}\right) . \frac{\sigma^2 b^2}{b^2+\sigma^2}\right) -$

$\frac{m^2}{2\sigma^2} - \frac{a}{2b^2}$

$= \frac{-(b^2+\sigma^2)}{2b^2\sigma^2}\left(\theta - \left(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right)\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\right)^2 -$

$\left[\frac{m^2}{2b^2} - \frac{a}{2b^2} + \left(\left(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right)\right)^2 . \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2} \quad \frac{1}{2}\right]$

هاذي لي بين [

$* = \frac{-m^2}{2\theta^2} - \frac{a^2}{2b^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{\sigma^4} + \frac{a^2}{b^4} + \frac{2ma}{\sigma^2 b^2}\right)\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}$

$* = \frac{1}{2(\sigma^2+b^2)}\left[\frac{(\sigma^2+b^2)m^2}{\sigma^2} + \frac{(\sigma^2+b^2)a^2}{b^2} - \left(\frac{b^2m^2}{\sigma^2} + \frac{a^2\sigma^2}{b^2} + 2ma\right)\right]$

$$* = \frac{-1}{2(\sigma^2+b^2)}\left[x^2+a^2-2xa\right] = -\frac{(m-a)^2}{2(\sigma^2+b^2)}$$

~~$\theta$~~

2

4)

$$m_\pi(m) = \int_\Theta f(m,\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma b}\exp\left(\frac{-1}{2}\frac{(m-a)^2}{\sigma^2+b^2}\right)\int_{\mathbb{R}} \exp\left[\frac{-1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma b}\left(\theta-\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{m}{\sigma^2}\right)\right]^2 d\theta$$

Soit $u = \theta - \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{m}{\sigma^2}\right)$

$$m_\pi(m) = \frac{1}{2\pi\sigma b}\exp\left(\frac{-(m-a)^2}{2(\sigma^2+b^2)}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}u^2\right)du$$

$$= \frac{+1}{2\pi\sigma b}\left(\frac{2\pi\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-(m-a)^2}{2(\sigma^2+b^2)}\right)\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\left(2\pi\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{-1}{2}\frac{u^2}{\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}}\right)du}_{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+b^2)}}\exp\left(-\frac{(m-a)^2}{2(\sigma^2+b^2)}\right)$$

5) $$f(\theta / x = m) = \frac{f(m,\theta)}{m_\pi(m)} = \frac{\sqrt{2\pi(\sigma^2+b^2)}}{2\pi\sigma b}\exp\left[\frac{-1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}(\theta-**)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}}\exp\left(\frac{-1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}(\theta-**)^2\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\tilde{\theta}/m) \rightsquigarrow N\left(**, \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\right)$$

Ex 3.2

1) $$f\left((x_1, \cdots, x_n) / \tilde{\theta}=\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i / \tilde{\theta}=\theta\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]$$

2) $$f\left((x_1, x_2, \cdots, x_n), \theta\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]\left(\frac{1}{2\pi b^2}\right)^{1/2}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2b^2}(\theta-a)^2\right]$$

$$(*) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2\theta x + \theta^2\right) - \frac{1}{2b^2}\left(\theta^2 - 2a\theta + a^2\right).$$

$$= \left(-\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{1}{2b^2}\right)\cdot\theta^2 + \theta\left(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right) - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}.$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(b^2+\sigma^2)}{\sigma^2 \cdot b^2}\left[\theta^2 - 2\cdot \frac{[illegible]\,b^2}{[illegible]\,b^2}\left(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right)\theta\right] - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}.$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{b^2+\sigma^2}{\sigma^2 b^2}\left[\left(\theta - \frac{\sigma^2\,[illegible]}{[illegible]\,b^2}\left(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}\right)\right.$$

$$- \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}$$

$(*)\ (*)$

$$\circledast\circledast = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left[\frac{x^2}{\sigma^4}+\frac{a^2}{b^4}+\frac{2xa}{\sigma^2 b^2}\right] - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cancel{\sigma^2} b^2 x^2}{(\sigma^2+b^2)\sigma^2} + \frac{\sigma^2 \cancel{b^2} a^2}{2(\sigma^2+b^2) b^2} + \frac{xa}{\sigma^2+b^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}$$

$$= \frac{1}{2(\sigma^2+b^2)}\left[\frac{b^2x^2}{\sigma^2} + \frac{a^2\sigma^2}{b^2} + 2x\cdot a - \frac{x^2(\sigma^2+b^2)}{\sigma^2} - \frac{a^2(\sigma^2+b^2)}{b^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2(\sigma^2+b^2)}\left[-x^2 \underbrace{+2xa - a^2}\right] = -\frac{(x-a)^2}{2(\sigma^2+b^2)}$$

$\pi(x/\theta)\cdot\pi(\theta)$

$\frac{\partial\pi(\sigma,\delta/x)}{\partial\delta}$

$= 2$

$= 2$

$\frac{\partial\pi(\sigma,\delta)}{\partial\delta}$

ex6

Fonction perte $L^1$ :

$$L(\theta,\delta)=|\theta-\delta| \quad ; \text{soit } \Theta=\mathbb{R}$$

$\delta^{\pi}(x)$ : solution du pb de minimisation du risque à postériori

$$r(\theta,\delta/x)=\int_{\Theta} L(\theta,\delta)\cdot P(\theta/x)\,d\theta$$

$$=\int_{\mathbb{R}} L(\theta,\delta)\cdot P(\theta/x)\,d\theta$$

$$=\int_{\mathbb{R}} |\theta-\delta|\, P(\theta/x)\,d\theta$$

$$=\int_{-\infty}^{\delta}(\delta-\theta)P(\theta/x)\,d\theta+\int_{\delta}^{+\infty}(\theta-\delta)\,P(\theta/x)\,d\theta$$

$$=\delta\left(\int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta-\int_{\delta}^{+\infty}P(\theta/x)\,d\theta\right)$$

$$-\int_{-\infty}^{\delta}\theta P(\theta/x)\,d\theta+\int_{\delta}^{+\infty}\theta P(\theta/x)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r(\theta,\delta/x)}{\partial\delta}=\int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta-\int_{\delta}^{+\infty}P(\theta/x)\,d\theta+\delta\left(P(\delta/x)+P(\delta/x)\right)$$

$$-\delta P(\delta/x)-\delta P(\delta/x)=0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta-\int_{\delta}^{+\infty}P(\theta/x)\,d\theta$$

$$+\int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta-\int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta=0$$

$$2\int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta-\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}}P(\theta/x)\,d\theta\right)}_{=1}=0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\delta}P(\theta/x)\,d\theta=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \delta^{\pi}(x)$ est la médiane de la loi à postériori

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner