Convergence des variables aléatoires: exercices

Par Admin - juillet 27, 2022 541

Nous donnons un résumé du cours ainsi que des exercices corrigés sur la convergence des variables aléatoires. En effet, on traite principalement de convergence en probabilité et de convergence en loi. De plus, nous verrons les relations entre ces modes de convergence. Ce cours est très utile pour les candidats à l'agrégation de mathématiques et aussi pour les étudiants de l'Université.

Table des matières

Résumé sur la convergence des variables aléatoires

Les variables aléatoires sont un cas particulier des fonctions mesurables. Pour fixer les idées, on se donne $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires sur une espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. De plus, soit X une autre variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

L'espérance d'une variable aleatoire Z sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, est

$$\mathbb{E}(Z)=\int_\Omega Z d\mathbb{P}.$$

La fonction de répartition de Z est une fonction $F_Z:\mathbb{R}\to[0,1]$ tel que $F_Z(x)=\mathbb{P}(Z\le x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On definit la convergence des variables aléatoires comme suit:

- La suite $(X_n)_n$ **converge presque sûrement** vers X si $X_n(\omega)\to X(\omega)$ quand $n\to\infty$ pour presque tout $\omega\in\Omega$. Dans ce cas, on écrit $X_n\overset{\text{p.s}}{\longrightarrow}X$.
- $(X_n)_n$ **converge en probabilité** vers X si pour tout $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)=0.$$

- On dit que la suite $(X_n)_n$ **converge en moyenne d'ordre** $p>0$ vers X si

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(|X_n-X|^p)=0.$$

- (X_n) **converge en loi** vers X si $F_{X_n}(x)\to F_X(x)$ quand $n\to\infty$, pour tout x point dans lequel F_X est continu.

On aussi le schéma de convergence

$$\text{CV en moyenne}\Longrightarrow\text{CV en Proba}\Longrightarrow\text{CV en loi}$$
$$\text{CV p.s}\Longrightarrow\text{CV en Proba}$$

Exercices sur le mode de convergence

Exercice: Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoires qui converge en probabilité vers la variable aléatoire X. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Solution: Soit $\varepsilon>0$. Le fait que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ implique l'existence d'un reel $\alpha>0$ tel que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$

$$|x-y|\le\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon.\qquad(*)$$

D'autre part, puique X_n converge en probabilite vers X, alors ,

POPULAR POSTS

Sur le théorème des fonctions implicites
Admin - août 17, 2021

Exercices de développements limités
Admin - août 17, 2021

Exercices sur les intégrales de Riemann et applications
Admin - août 17, 2021

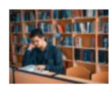
Lemme de Fatou
Admin - juillet 28, 2022

MY FAVORITES

Étude de la fonction Gamma
Admin - août 10, 2022 0

Nous donnons une étude de la fonction Gamma d'Euler dans le cas de variables réelles et complexes. Cette fonction a une relation étroite avec...

Exercices corrigés sur les applications linéaires
août 17, 2021



Topologie des espaces vectoriels normés
août 17, 2021

Nombres complexes
août 17, 2021

POPULAR CATEGORIES

Math I 50

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|>\alpha)=0.$$

Notez que par $(*)$ on a

$$\{\omega: |f(X_n(\omega))-f(X(\omega))|>\varepsilon\}\subset\{\omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|>\alpha\}.$$

Cela implique

$$\mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)|>\varepsilon)\le\mathbb{P}(|X_n-X|>\alpha).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)|>\varepsilon)=0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Dans l'exercice qui suit nous allons voir que la convergence presque sûre n'implique pas la convergence en moyenne d'ordre quelconque et donc, la convergence en probabilité.

Exercice: On considère dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ une variable aléatoire uniformément U répartie sur l'intervalle $[0,1]$. On pose

$$X_n=e^n 1_{[0,\frac{1}{n}]}(U),\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Montrer que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers la variable 0 et ne converge pas en moyenne d'order $p\ge 1$.

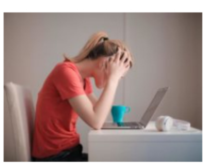
Solution: On pose N l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tel que $U(\Omega)$ presque surement. Puisque U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\mathbb{P}(U=0)=\mathbb{P}(N)=0$. Pour tout $\omega\in\Omega\setminus N$ et tout entier $n\ge\frac{1}{U(\omega)}$ on a $X_n(\omega)=0$, et donc $X_n(\omega)\to 0$ quand $n\to\infty$. Cela implique que X_n converge surement vers 0. D'autre part, par definition de X_n, chaque X_n prend ses valeurs dans $\{0,e^n\}$, donc c'est une variable aléatoire discrète. Par suite $\mathbb{E}(X_n^p)=\mathbb{P}(X_n=e^n)e^{np}$ pour tout entier naturel $p\ge 1$. Mais $(X_n=e^n)=(U\le\frac{1}{n})$, et donc $\mathbb{P}(X_n=e^n)=\mathbb{P}(U\le\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$. Cela donne $\mathbb{E}(X_n^p)=\frac{e^{np}}{n}\to+\infty$ quand $n\to+\infty$. Ainsi X_n ne converge pas en moyenne d'ordre $p\in\mathbb{N}^*$ vers 0. Conclusion la converge presque sur n'implique pas, en général, la convergence en moyenne et donc la convergence en probabilité.

J'aime 0

Article précédent
Théorème de Fubini

Article suivant
Théorème de convergence dominée

ARTICLES CONNEXES | PLUS DE L'AUTEUR



Théorème de Weierstrass démonstration

Démonstration du théorème centrale limite

Loi Gamma

POPULAR POSTS

Sur le théorème des fonctions implicites
Admin - août 17, 2021

Exercices de développements limités
Admin - août 17, 2021

Exercices sur les intégrales de Riemann et applications
Admin - août 17, 2021

Lemme de Fatou
Admin - juillet 28, 2022

MY FAVORITES

POPULAR CATEGORIES

Math I 50
Math II 42
Agrégation 29
Analyse 16
probabilités 16
Math III 14
Préparer son bac 13

ARTICLES RÉCENTS

Théorème de Weierstrass démonstration
Démonstration du théorème centrale limite
Loi Gamma
Étude de la fonction Gamma
Exercices sur la loi normale

lesm@th

Un site de Math qui propose des exercices corriges de toutes type de mathématiques

ENCORE PLUS D'ARTICLES

Théorème de Weierstrass démonstration
août 17, 2022

Démonstration du théorème centrale limite
août 13, 2022

Loi Gamma
août 12, 2022

CATÉGORIE POPULAIRE

Math I 50
Math II 42
Agrégation 29
Analys
probab
Math I
Prépar