Chap 2 : Suites des v.a indépendantes et Théorèmes Limites

I : Inégalité de Kolmogorov et applications.

Proposition : " Inégalité maximale "

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes tq $Var(X_n) < +\infty$; $\forall n \geq 1$

c.à.d. X_n admet un moment d'ordre 2.

On a $\forall \rho > 0$; $P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_n - E(S_n)| \geq \rho \right) \leq \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$ ⊙

Avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Remarque :

$n=1$; $P(|X_1 - E(X_1)| \geq \rho) \leq \frac{1}{\rho^2} Var(X_1)$ $\forall \rho > 0$

Preuve :

Posons $\tilde{X}_k = X_k - E(X_k)$; $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k = S_n - E(S_n)$; $E(\tilde{X}_k) = 0$; $Var(\tilde{X}_k) = Var(X_k)$

⊙ $\Longleftrightarrow$ $P\left(\max_{1\leq k\leq n} |\tilde{S}_n| \geq \rho \right) \leq \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$.

Par suite on peut supposer que $E(X_k) = 0$ $\forall k \geq 1$.

$B_k = \{ |S_1| < \rho ; \ldots , |S_{k-1}| < \rho \text{ et } |S_k| \geq \rho \}$.

$A = \{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \rho \}$ $\Longrightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A$ $\Longrightarrow$ $B_k \subseteq A$.

$T = \inf \{ k \geq 1 / |S_k| \geq \rho \}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{(T \leq n)}_{\max_{k\in[1,n]}(|S_k| \geq \rho)} = \bigcup_{k=1}^{n} (T = k)$; $(T = k) = (|S_1| \leq \rho, \ldots |S_{k-1}| < \rho, \text{et} |S_k| \geq \rho)$

Les $(B_k)_{k=1 \ldots n}$ sont 2 à 2 disjoints.

$1 \leq k \leq n$; $E(1_{B_k} S_n^2) = E(1_{B_k}(S_n - S_k + S_k)^2) = E(1_{B_k}(S_n - S_k)^2) + E(1_{B_k} S_k^2)$

$S_n = \sum_{l=1}^{n} X_l$

$S_k = \sum_{l=1}^{k} X_l$

$+ 2E(1_{B_k} S_k (S_n - S_k))$.

$S_k = \sum_{l=1}^{k} X_l$ s'exprime en fct° de $X_1 - X_k$

$S_n - S_k = \sum_{l=k+1}^{n} X_l$

or $1_{B_k} S_k \perp (S_n - S_k) \Longrightarrow E(1_{B_k} S_k (S_n - S_k))$
$= E(1_{B_k} S_k) \underbrace{E(S_n - S_k)}_{0}$
$= 0$

$E(1_{B_k} S_n^2) = E(1_{B_k}(S_n - S_k)^2) + E(1_{B_k} S_k^2)$

$= E(1_{B_k}) E((S_n - S_k)^2) + E(1_{B_k} S_k^2)$ $\Rightarrow E(1_{B_k} S_n^2) \geq E(1_{B_k} S_k^2)$

$P(A) = P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$; $B_k = \{|S_1| < \rho, \dots |S_{k-1}| < \rho$ et $|S_k| \geq \rho\}$

$\downarrow$

$S_k^2 \geq \rho^2$

$\rho^2 P(A) = \sum_{k=1}^{n} \rho^2 P(B_k)$

càd si $\omega \in B_k$; $S_k^2(\omega) \geq \rho^2$

$\rho^2 P(A) = \sum_{k=1}^{n} \rho^2 E(1_{B_k})$.

$\Rightarrow 1_{B_k} S_k^2 \geq \rho^2 1_{B_k}$

$= \sum_{k=1}^{n} E(\rho^2 1_{B_k})$

$\rho^2 P(A) \leq \sum_{k=1}^{n} E(1_{B_k} S_k^2) \leq \sum_{k=1}^{n} E(1_{B_k} S_n^2) \leq E(1_A S_n^2) \leq E(S_n^2)$

or $E(S_n^2) = Var(S_n) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$

d'où $\rho^2 P(A) \leq \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \Rightarrow P(A) \leq \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$

Théoreme :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes.

. Si $\sum_{k=1}^{+\infty} Var(X_k) < +\infty$, Alors $\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k))$ converge Pps et en moyenne quadratique.

Si de plus $\sum_{k=1}^{+\infty} E(X_k) < +\infty$; Alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ Converge Pps et en moyenne quadratique. (càd $L^2(P)$).

Preuve : cd

Lemme :

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels, on a :

1- si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ (Lemme de Cesaro)

2- Si $\sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (exercice)

Proposition :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendante, tq. $E(X_n^2) < +\infty, \forall n \geq 1$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} < +\infty$; ALors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} (X_k - E(X_k))$ Converge Pps vers 0 si de plus $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ Converge P p.s. vers m.

Preuve : groupe C.d.

II : Loi 0 et 1 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

On pose $\cdot\ \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$; $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$

$\cdot\ \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_1, \ldots X_n, \ldots)$; $\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$

$\cdot\ \mathcal{F}^n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$

$\cdot\ \mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^n$ = tribu de queue. ; $\mathcal{F}_n^\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty$

Proposition :

Sous les notations ci-dessus, soit $A \in \mathcal{F}^\infty$ alors $P(A) \in \{0,1\}$.

Preuve

On suppose que $P(A) > 0$; Posons $Q(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ $\forall B \in \mathcal{F}_\infty$

Q est une mesure de proba sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$

Soit $B \in \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots X_n)$; $A \in \mathcal{F}^\infty = \bigcap_{\ell=1}^{+\infty} \mathcal{F}^\ell \Rightarrow \mathcal{F}^{n+1} = \sigma(X_{n+1}, \ldots)$

Ce qui implique que B et A sont indépendantes.

$P(A\cap B) = P(A)P(B) \longrightarrow Q(B) = P(B)$, cad $Q \equiv P$ sur $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$

Ce qui implique $Q \equiv P$ sur $\underbrace{\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_n\right)}_{= \mathcal{F}_\infty}$ (grâce au th de Hahn)

or $A \in \mathcal{F}^\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty \Rightarrow Q(A) = P(A)$

$Q(A) = \frac{P(A\cap A)}{P(A)} = 1 \longrightarrow P(A) = 1$

Applications :

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes.

Posons $A = \{\omega \in \Omega / \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ est cv $\}$ alors $P(A) \in \{0,1\}$.

$B = \{\omega \in \Omega / \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ est dv $\}$ alors $P(B) \in \{0,1\}$.

En effet :

Mq $A \in \mathcal{F}^{\infty}$. ~~càd $A \in \mathcal{F}^n$ ∀~~

$p \geq 1$ $\mathcal{F}^p = \sigma(X_p, X_{p+1}, \ldots)$

$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ est cv $\iff \sum_{n=p}^{+\infty} X_n(\omega)$ est c.v $\Rightarrow A \in \mathcal{F}^p \ \forall p \geq 1$

$\Rightarrow A \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{F}^p \subseteq \mathcal{F}^{\infty}$

$\Rightarrow P(A) \in \{0, 1\}$.

2- Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réelles tq $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ $(b_n = n)$

Alors $C = \{\omega \in \Omega / \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ est c.v$\}$ $P(C) \in \{0,1\}$. (exercice)

Théoreme : "loi forte des grands nombres :"

→ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r iid ; tq $E(X_1^2) < +\infty$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ = moyenne empirique ; $E(\bar{X}) = E(X_1)$

$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{Var(X_1)}{n}$

$\varepsilon > 0$; $P(|\bar{X}_n - E(X_1)| > \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

→ $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Proba} E(X_1)$

⇒ Ce resultat s'appelle la loi faible des grands nombres.

→ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendante tq $E(X_k^2) = E(X_1^2) < +\infty$

et $E(X_k) = E(X_1)$.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Var(X_k)}{k^2} = Var(X_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$

• $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = E(X_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X_1)$

⇒ D'après la prop précédentes $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X_1)$ Pps.

→ Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indépendantes

loi de 0-1 ; $A = \{\omega \in \Omega / \bar{X}_n(\omega)_{n\geq 1}$ est c.v$\} \to P(A) \in \{0,1\}$

Loi forte des grands nombres:

Théorème :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r iid ; Posons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Alors $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ Converge Pps. ssi $E(|X_1|) < +\infty$. Et dans ce cas $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X_1)$ Pps

D'une manière plus précise :

Cas 1 : $E(|X_1|) = +\infty$; $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ diverge Pps.

càd $P(A) = 0$ où $A = \{\omega \in \Omega \,/\, (\overline{X}_n(\omega))_{n\geq 1} \text{ Convergeante}\}$

Cas 2 : $E(|X_1|) < +\infty$, $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ cv Pps vers $E(X_1)$

càd $P(A) = 1$ où $A = \{\omega \in \Omega \,/\, (\overline{X}_n(\omega)) \text{ est cv vers } E(X_1)\}$.

III – Théorème limite centrale – Lemme de Slutsky et δ- methode.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.r iid, tq $E(|X_1|) < +\infty$

D'après la loi forte des grands nombres, on a $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X_1)$ Pps.

But: Chercher une suite réelle $(b_n)_{n\geq 1}$ tq $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (Ex $b_n = n^{\alpha}$; $\alpha > 0$)

et de regarder la vitesse de convergence càd $b_n(\overline{X}_n - E(X_1))$ cv vers ?

(type de cv 1, 2, 3, 4, 5 ?)

Reponse : $b_n = n^{\alpha}$; $\alpha = \frac{1}{2}$ et on suppose que $E(X_1^2) < +\infty$ $\left(E(|X_1|) \leq (E(X_1^2))^{\frac{1}{2}}\right)$

D'une manière plus précise ; $\underbrace{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - E(X_1))}_{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Loi}} N(0, Var(X_1))$

Càd : $\varphi_{U_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_{N(0, Var(X_1))}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Version 1 : $U_n = \sqrt{n}\,(\overline{X}_n - E(X_1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Loi}} N(0, Var(X_1))$

Version 2 : $V_n = \dfrac{\overline{X}_n - E(X_n)}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Loi}} N(0,1)$

Version 3 : $W_n = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Loi}} N(0,1)$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$2 = 3$; $\dfrac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}} = \dfrac{\frac{1}{n}S_n - E(X_1)}{\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}} = \dfrac{\frac{1}{n}(S_n - E(S_n))}{\sqrt{\frac{Var(X_1)}{n}}} = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{n\,Var(X_1)}}$

$E(\overline{X}_n) = E(X_1)$

$Var(\overline{X}_n) = \dfrac{Var(X_1)}{n}$

$= \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$

Théorème : "Théo centrale limite"

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r iid, tq $E(X_1^2) < +\infty$

On a : $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - E(X_1)) \xrightarrow[n \to +\infty]{Loi} \mathcal{N}(0, var(X_1))$

Version vectorielle :

- Théorème : Loi forte des grands nombres : -

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tq $E(\|X_1\|) < +\infty$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{P_{ps}} E(X_1)$$

- Théorème : Limite centrale : -

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ va iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tq $E(\|X_1\|^2) < +\infty$

$$\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - E(X_1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} \mathcal{N}_d(0_{\mathbb{R}^d}, C_{X_1})$$

- $(U_n)_{n\geq 1}$ v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, U v.a limite dans $\mathbb{R}^d$
- $(V_n)_{n\geq 1}$ v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; V v.a limite dans $\mathbb{R}^m$.

On sait que si $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}_{n\geq 1}$ cv en loi vers $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ qd $n \to +\infty$ $\odot$

Alors $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} U$ $(\cdot\cdot)$

$V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} V$ $(\cdots)$

$\odot \Leftrightarrow \forall H \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^{d+m}, \mathbb{R})$; $E(H(U_n, V_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(H(U,V))$

Montrons $(\cdot\cdot)$

Soit $K \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$$E(K(U_n)) = E(K \circ L(U_n, V_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(K\circ L(U,V)) = E(K(U))$$

avec :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (U,V) & \longmapsto & K(U) \end{array} = \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{K} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & u & \longmapsto & K(u) \end{array}$$

Pour $(\cdots)$: raisonnement analogue.

Questions :

Si $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} U$ et $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} V$ alors $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$?

Réponse: négative.

La réponse est positive si $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} V$ où V est non-aléatoire.

(forcément $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Proba} V$) cad: "Lemme de Slutsky"

Si $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} U$ et $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} V$ et V est non-aléatoire

Alors $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$

version stat: • $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} U$; U_n et U v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

• $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} A$; A_n v.a à valeurs dans $\mathcal{M}(m\times d)$

A est une matrice $m\times d$, non aléatoire.

• $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} B$; B_n v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

B est un vecteur non-aléatoire de $\mathbb{R}^m$.

Alors : $A_n U_n + B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} AU + B$.

→ Généralement $d = m = 1$.

Théoreme: δ - Methode.

Hyp: • $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

• $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tq $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

• U un vecteur de $\mathbb{R}^m$ non aléatoire, tq $a_n(U_n - U) \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} V$

où V est une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

• h est une application de $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continuement differentiable

Concl° : $a_n(h(U_n) - h(U)) \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} Dh(U)\cdot V$

↳ differenciel

App:

• $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.r iid tq $E(X_1^2) < +\infty$ $\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - E(X_1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} N(0, Var(X_1))\right.$

• $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1

Concl° : $\sqrt{n}\left(h(\bar{X}_n) - h(E(X_1))\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{Loi} h'(E(X_1)) \cdot N(0, Var(X_1))$

$= N\left(0, (h'(E(X_1)))^2 \cdot Var(X_1)\right)$