

Optimisation

Documents autorisés : Aucun.

Calculatrice autorisée.

Les trois exercices sont indépendants. Il est demandé de soigner la rédaction. On veillera en particulier à expliquer les calculs et à justifier les réponses.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = 2 + xy - x^2y - xy^2$$

1. Montrer que les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
2. Calculer la matrice Hessienne en $(0, 0)$ et en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En déduire la nature de ces points critiques.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}^3 par

$$f(X, Y, Z) = X - Y + 2Z$$

$$g(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + 2Z^2 - 4$$

On veut trouver les extrema de f sous la contrainte $g = 0$.

1. Ecrire le Lagrangien L de ce problème.
2. Montrer que L a deux points critiques

$$X = -1, Y = 1, Z = -1, \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } X = 1, Y = -1, Z = 1, \lambda = -\frac{1}{2}$$

3. Calculer la matrice Hessienne de L (dans les variables X, Y, Z) et en déduire la nature des points critiques.

4. On pose $X = 1 + x$, $Y = -1 + y$ et $Z = 1 + z$. Développer la relation $g(X, Y, Z) = 0$ pour obtenir une relation entre x , y et z . Utiliser cette relation pour écrire le développement de $f(1 + x, -1 + y, 1 + z)$. Conclusion ?

Exercice 3

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant un engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, de sa variété de blé s'écrit

$$f(B, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

où B est la quantité de semences de blé utilisées et N la quantité d'engrais azoté pulvérisée.

1. Dans cette question $N = 0$. On note alors $F(B)$ le rendement (égal à $f(B, 0)$). La fonction F a-t-elle un maximum ? Pourquoi ? Si oui, que vaut ce maximum et en quelle valeur est-il atteint ?
2. Montrer que f a un point critique. Calculer la valeur de f pour ce point. Calculer la Hessienne de f en ce point, ainsi que la forme quadratique associée. En déduire la nature du point critique. Comparer les valeurs obtenues avec celles de la question 1.
3. BONUS – Sachant que B et N sont reliés par la contrainte $B + 5N = 23$ (l'unité d'engrais coûte 5 fois plus que l'unité de semence, et le budget est fixé), déterminer les extrema de f sous cette contrainte (on ne demande que le calcul du point critique). Comparer les valeurs avec celles de la question 2.