Cours 5 : Phase I – Phase 2
applications de la programmation linéaire

Christophe Gonzales

LIP6 – Université Paris 6, France

Plan du cours

1. Phase I – Phase II
2. Applications
   - Théorème de l'alternative
   - lemme de Farkas

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 32 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$\begin{array}{llrcrcr} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 32 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr} \max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & & & & & & & \end{array}$$

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & \leq & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 32 \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & \boxed{\begin{array}{lr} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\ & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{array}$$

Base évidente : x_3, x_4

Problème d'initialisation de l'algo du simplexe

Problème de départ :

$$
\begin{array}{ll}
\max & -2x_1 - x_2 \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 \leq -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 32 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Introduction des variables d'écart :

$$
\begin{array}{llll}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + & \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\
 & 3x_1 + 4x_2 & & \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Base évidente : x_3, x_4 non réalisable ! ! ! ! ! ! ! !

Problème avec variables d'écart :

$$\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{r} -19 \\ 32 \end{array} \\
& 3x_1 + 4x_2 & & \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

Problème avec variables d'écart :

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Introduction de variables artificielles :

$$
\begin{array}{llcl}
\max & -2x_1 - x_2 & & \\
s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad \boxed{\begin{array}{ll} & - x_5 \\ x_4 & \end{array}} & = & -19 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \quad + & = & 32 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ nouvelle base réalisable évidente : x_4, x_5

Problème avec variables d'écart :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + \boxed{\begin{array}{ll} x_3 & \\ & + x_4 \end{array}} \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\ & \quad 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Introduction de variables artificielles :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad \boxed{\begin{array}{ll} & - x_5 \\ x_4 & \end{array}} \begin{array}{l} = -19 \\ = 32 \end{array} \\ & \quad 3x_1 + 4x_2 \qquad + \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ nouvelle base réalisable évidente : x_4, x_5

Simplexe $\Longrightarrow$ si $x_5 = 0$ alors optimum du problème de départ

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & & & x_5 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lrl} \max & -2x_1 - x_2 & \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 & = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$\begin{array}{lrl} \min & x_5 & \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 & = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + x_4 & = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

Problème d'origine réalisable ssi min $x_5 \Longrightarrow x_5 = 0$

Comment initialiser l'algo du simplexe ? (2/4)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Assurer que $x_5 = 0$:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & & & x_5 & & & & & & & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Problème d'origine réalisable ssi min $x_5 \Longrightarrow x_5 = 0$

Phase I : résolution du problème min x_5

Résolution du problème :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & & & & & & & & & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrrrrrrl}
\max & & & & & -x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & +4x_2 & & +x_4 & & = & 32 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}$$

Résolution du problème :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & & & & & & & & - & x_5 & & \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & - & 19 \\
s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\
 & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & & & & & & & & - & x_5 & & \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\ & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0} \end{array}$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & - & 19 \\ s.c. & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & -19 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 32 \\ & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0} \end{array}$$

Résolution : faire entrer x_2 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & & & & & & & & - & x_5 & & \\ s.c. & \frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & & & + & \frac{1}{3}x_5 & = & \frac{19}{3} \\ & \frac{1}{3}x_1 & & & + & \frac{4}{3}x_3 & + & x_4 & - & \frac{4}{3}x_5 & = & \frac{20}{3} \\ & \multicolumn{11}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0} \end{array}$$

Résolution du problème :

$$\begin{array}{lrcl} \max & & & -x_5 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & & -x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 & + x_4 & = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Expression en fonction des variables hors base :

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + 3x_2 - x_3 & & - 19 \\ s.c. & -2x_1 - 3x_2 + x_3 & & -x_5 = -19 \\ & 3x_1 + 4x_2 & + x_4 & = 32 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Résolution : faire entrer x_2 et sortir x_5 :

$$\begin{array}{lrcl} \max & & & - x_5 \\ s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 & & + \frac{1}{3}x_5 = \frac{19}{3} \\ & \frac{1}{3}x_1 & + \frac{4}{3}x_3 + x_4 & - \frac{4}{3}x_5 = \frac{20}{3} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Variables en base : x_2, x_4
$\Longrightarrow x_5 = 0$
$(x_1 = 0, x_2 = \frac{19}{3}, x_3 = 0, x_4 = \frac{20}{3})$ = solution réalisable du problème d'origine

Dernière itération du simplexe :

$- \quad x_5$

$+ \frac{1}{3}x_5 = \frac{19}{3}$

$x_4 - \frac{4}{3}x_5 = \frac{20}{3}$

⚠ $x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Dernière itération du simplexe :

$$- \quad x_5$$
$$+ \tfrac{1}{3}x_5 = \tfrac{19}{3}$$
$$x_4 - \tfrac{4}{3}x_5 = \tfrac{20}{3}$$

$x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

Retour sur le problème d'origine :

$$\begin{aligned}
\max\ & -2x_1 - x_2 \\
s.c.\ & \tfrac{2}{3}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 = \tfrac{19}{3} \\
& \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{4}{3}x_3 + x_4 = \tfrac{20}{3} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Dernière itération du simplexe :

$x_5 = 0$
$\Longrightarrow$ on peut supprimer x_5 des équations

$$- \quad x_5$$
$$+ \ \tfrac{1}{3}x_5 = \tfrac{19}{3}$$
$$x_4 - \tfrac{4}{3}x_5 = \tfrac{20}{3}$$

Retour sur le problème d'origine :

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ s.c. & \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{19}{3} \\ & \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + x_4 = \frac{20}{3} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Algo du simplexe sur ce problème : phase II

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{rl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

Introduction des variables artificielles :

$x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i, \text{ où } w_i = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } b_i \geq 0 \\ -1 & \text{si } b_i < 0 \end{array} \right.$$

Phase I – phase 2 (1/5)

Problème d'origine (après introduction des variables d'écart) :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Introduction des variables artificielles :

$x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$ telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i, \text{ où } w_i = \begin{cases} 1 \text{ si } b_i \geq 0 \\ -1 \text{ si } b_i < 0 \end{cases}$$

⚠ si $b_i \geq 0$: variables d'écart $\Longrightarrow$ variables artificielles inutiles

Nouveau simplexe :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Nouveau simplexe :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Solution réalisable :

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ b_i/w_i & \text{si } j > n \end{cases}$$

Détermination d'une solution réalisable du problème d'origine :

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Détermination d'une solution réalisable du problème d'origine :

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

Proposition

Le problème d'origine a une solution réalisable si et seulement si le problème ci-dessus a une solution dont la valeur (fonction objectif) vaut 0

Phase I – phase 2 (4/5)

Début de la phase 2 :

si $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} > 0$ alors problème d'origine non réalisable

sinon tableau simplexe :

$\Longrightarrow$ solution réalisable $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ telle que $x_{n+i}^* = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$

Début de la phase 2 :

si $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} > 0$ alors problème d'origine non réalisable

sinon tableau simplexe :

$\Longrightarrow$ solution réalisable $(x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ telle que $x_{n+i}^* = 0 \ \forall i = 1, \ldots, m$

Problème d'origine équivalent à :

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{n+i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

Résolution du problème d'origine :

1. supprimer toutes les variables artificielles hors base

⚠ il peut rester des variables artificielles en base (présence de contraintes redondantes)

2. résoudre avec l'algo du simplexe et variable artificielle sort de la base $\Longrightarrow$ la supprimer du problème à résoudre $\Longrightarrow$ élimination progressive des variables artificielles

Variation de la phase I

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ne tient pas compte de la fonction objectif

$\Longrightarrow$ risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine

Variation de la phase I

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

$$s.c. \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i x_{n+i} = b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n+m) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ ne tient pas compte de la fonction objectif

$\Longrightarrow$ risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine

la méthode «big M»

1. choisir un M très grand
2. résoudre $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ au lieu de $\min \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$

Applications

Théorème de l'alternative (1/3)

Théorème de l'alternative

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- un et un seul des énoncés suivants est vrai :
  1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
  2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

⚠ Rappel : les vecteurs sont tous par défaut en colonne

Théorème de l'alternative (2/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démonstration :

démo de 1 $\Longrightarrow$ non 2 :

supposons 1 alors le PL suivant a un optimum :

max $v^T.0$

$$s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de l'alternative (2/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démonstration :

démo de 1 $\Longrightarrow$ non 2 :

supposons 1 alors le PL suivant a un optimum :

max $v^T.0$

$$s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ dual a un optimum :

min $c^T x$

$$s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démonstration :

démo de 1 $\Longrightarrow$ non 2 :

supposons 1 alors le PL suivant a un optimum :

max $v^T.0$

$$s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ dual a un optimum :

min $c^T x$

$$s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

valeur du dual = valeur du primal $\Longrightarrow c^T x \nless 0 \Longrightarrow$ non 2

Théorème de l'alternative (3/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démo de non 2 $\Longrightarrow$ 1 :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, \;\; x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non 2 $\Longrightarrow c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

Théorème de l'alternative (3/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démo de non 2 $\Longrightarrow$ 1 :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, \;\; x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non 2 $\Longrightarrow c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\Longrightarrow \quad \min c^T x \quad s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a une solution, de valeur 0

Théorème de l'alternative (3/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démo de non 2 $\Longrightarrow$ 1 :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, \;\; x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non 2 $\Longrightarrow c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\Longrightarrow \quad \min c^T x \quad s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a une solution, de valeur 0 $\Longrightarrow$ dual a une solution :

$$\max v^T.0 \quad s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de l'alternative (3/3)

1. il existe v tel que $v^T A \leq c^T$
2. il existe $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$

Démo de non 2 $\Longrightarrow$ 1 :

On sait que $S = \{x : Ax = 0, \;\; x \geq 0\} \neq \emptyset$ car contient 0.

Non 2 $\Longrightarrow c^T x \geq 0$ pour tout $x \in S$

$$\Longrightarrow \quad \min c^T x \quad s.c. \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a une solution, de valeur 0 $\Longrightarrow$ dual a une solution :

$$\max v^T.0 \quad s.c. \begin{cases} v^T A + d^T = c^T \\ d^T \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ il existe v tel que $v^T A \leq c^T \Longrightarrow$ 1 CQFD

Lemme de Farkas (1/5)

Lemme de Farkas

- A une matrice $m \times n$
- c un vecteur de taille n
- les deux énoncés suivants sont équivalents :
  1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
  2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

Lemme de Farkas (2/5)

1. $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

Démonstration :

démo de 2 $\implies$ 1 :

Soit $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$. Supposons que $Ax \geq 0$

alors $v \geq 0$ et $Ax \geq 0 \implies v^T Ax \geq 0$

Or $v^T A = c^T \implies v^T Ax = c^T x \geq 0 \implies$ 1

Lemme de Farkas (3/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

---

démo de 1 $\Longrightarrow$ 2 :

Soit le PL :

$\min c^T x$

$s.c.\ Ax \geq 0$

Lemme de Farkas (3/5)

1. $Ax \geq 0 \implies c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

---

démo de 1 $\implies$ 2 :

Soit le PL :

$\min c^T x$

$s.c.\ Ax \geq 0$

Pas de contraintes sur le signe de x

Lemme de Farkas (3/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

---

démo de 1 $\Longrightarrow$ 2 :

Soit le PL :

$\min c^T x$

$s.c.\ Ax \geq 0$

Pas de contraintes sur le signe de $x \Longrightarrow$ équivalent à :

$\min c^T x' - c^T x''$

$$s.c. \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0,\ x'' \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (4/5)

$$\min c^T x' - c^T x''$$
$$s.c. \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0,\ x'' \geq 0 \end{cases}$$

a pour dual :

$$\max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A \geq c^T \\ v^T(-A) \geq -c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (4/5)

$$\min c^T x' - c^T x''$$
$$s.c. \begin{cases} Ax' - Ax'' \geq 0 \\ x' \geq 0,\ x'' \geq 0 \end{cases}$$

a pour dual :

$$\max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A \geq c^T \\ v^T(-A) \geq -c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (5/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

$$\text{PL1}: \min c^T x$$
$$s.c.\ Ax \geq 0$$

a donc pour dual :

$$\text{PL2}: \max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Lemme de Farkas (5/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

$$\text{PL1}: \quad \min c^T x$$
$$\qquad s.c.\ Ax \geq 0$$

a donc pour dual :

$$\text{PL2}: \quad \max v^T.0$$
$$\qquad s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Or, d'après 1, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Lemme de Farkas (5/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

$$\text{PL1 : } \min c^T x$$
$$s.c.\ Ax \geq 0$$

a donc pour dual :

$$\text{PL2 : } \max v^T.0$$
$$s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Or, d'après 1, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Théorème de la dualité : PL2 a une solution optimale = 0

Lemme de Farkas (5/5)

1. $Ax \geq 0 \Longrightarrow c^T x \geq 0$
2. il existe $v \geq 0$ tel que $v^T A = c^T$

PL1 : $\min c^T x$

$\quad$ *s.c.* $Ax \geq 0$

a donc pour dual :

PL2 : $\max v^T.0$

$$s.c. \begin{cases} v^T A = c^T \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Or, d'après 1, PL1 minoré par 0, atteint pour $x = 0$

Théorème de la dualité : PL2 a une solution optimale = 0

$\Longrightarrow$ il existe v_* tel que $v_* \geq 0$ et $v_*^T A = c^T \Longrightarrow$ 2

CQFD