Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique et de l'Analyse de l'Information

Optimisation convexe **A.U. 2013-2014**
S. Snoussi **1ère année**

Examen du 8 Janvier 2014.
Nombre de pages: 01. Durée: 1h30.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

<u>**Exercice 1:**</u> Trois individus X, Y et Z désirent partager un bien Q. Le premier X réclame la moitié, le deuxième Y le tiers et le troisième Z le quart. Vérifier qu'il est impossible d'effectuer le partage.

$- -$

Il suffit de vérifier que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$.

$- -$

1) En utilisant la méthode de minimisation des moindres carrés justifier rapidement que le partage qui satisfait au mieux leurs réclamations est celui qui attribue $\bar{x}Q$ à X, $\bar{y}Q$ à Y et $\bar{z}Q$ à Z, où $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ est solution du problème

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0} f(x,y,z) = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 + (z - \frac{1}{4})^2.$$

$- -$

On désigne par $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ *le point ayant pour coordonnées le partage réclamé et par* $M(x, y, z)$ *le point représentant la part de chacun. On aura* $x + y + z = 1$ *avec* $x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0$ *et on veut que la distance* $d(A, M)$ *soit minimale. Le problème consiste alors à minimiser*

$$d(A,M)^2 = f(x,y,z) = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 + (z - \frac{1}{4})^2$$

sous les conditions $x + y + z = 1$ *et* $x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0$.

$- -$

2) Déterminer X_{ad} et montrer que le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins une solution.

$- -$

$$X_{ad} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \ x + y + z = 1, \quad x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0\}.$$

X_{ad} *est un fermé borné de* $\mathbf{R}^3$ *et* f *est continue sur* $\mathbb{R}^3$, *donc le problème* $(\mathcal{P})$ *possède au moins une solution.*

— —

3) Montrer que $(\mathcal{P})$ est un problème d'optimisation convexe et qu'il possède une solution unique.

— —

On pose $h(x, y, z) = x + y + z - 1$, $g_1(x, y, z) = -x$, $g_2(x, y, z) = -y$ *et* $g_3(x, y, z) = -z$. *La contrainte d'égalité* h *est affine et les trois contraintes d'inégalité* g_j, $j = 1, 2, 3$ *sont convexes (puisque affines). De plus, le critère* f *est convexe et même strictement puisqu'il est de classe* C^2 *sur* $\mathbf{R}^3$ *et sa matrice héssienne en tout point* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

qui est définie positive. La stricte convexité implique l'unicité de la solution.

— —

4) Vérifier que tous les points de X_{ad} sont réguliers et écrire les conditions (K.K.T) relatives au problème $(\mathcal{P})$.

— —

On remarque que les quatres contraintes ne peuvent pas être actives simultanément, donc il y a au plus trois contraintes actives et on remarque aussi que toute combinaison de trois vecteurs parmi les quatres vecteurs $\nabla h(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $\nabla g_1(x, y, z) = (-1, 0, 0)$, $\nabla g_2(x, y, z) = (0, -1, 0)$, $\nabla g_3(x, y, z) = (0, 0, -1)$ *forme un système libre. Par suite, tous les points de* X_{ad} *sont réguliers.*
Les Conditions (K.K.T):
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \mu_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3$ *tels que (on pose* $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$*)*

$$\nabla f(\bar{X}) + \lambda \nabla h(\bar{X}) + \sum_{j=1}^{3} \mu_j \nabla g_j(\bar{X}) = (0, 0, 0)$$

avec $h(\bar{X}) = 0$, $\mu_j g_j(\bar{X}) = 0$ *et* $g_j(\bar{X}) \leq 0$, $j = 1, 2, 3$.
On obtient alors le sytème suivant

$$\begin{cases} 2(\bar{x} - \frac{1}{2}) + \lambda - \mu_1 = 0 \\ 2(\bar{y} - \frac{1}{3}) + \lambda - \mu_2 = 0 \\ 2(\bar{z} - \frac{1}{4}) + \lambda - \mu_3 = 0 \\ h(\bar{X}) = 0, \quad \mu_j g_j(\bar{X}) = 0, \quad g_j(\bar{X}) \leq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

— —

5) Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ et déterminer sa solution.

— —

On sait que $\bar{X}$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si il est solution de (K.K.T), donc le système (K.K.T) possède une unique solution et comme on s'attend à ce que chaque individu reçoive une part du bien, alors nécessairement $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$ et $\bar{z} > 0$, par suite $\mu_j = 0$, $j = 1, 2, 3$. On aura ainsi

$$\bar{x} - \frac{1}{2} = \bar{y} - \frac{1}{3} = \bar{z} - \frac{1}{4}.$$

Cette dernière relation combinée avec $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 1$ nous donne

$$\bar{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{36} = \frac{17}{36}, \quad \bar{y} = \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}, \quad \bar{z} = \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36}.$$

– –

<u>Exercice 2:</u> On décide d'investir une somme S dans trois actifs financiers dont les rendements annuels, exprimés en pourcentage, sont des variables aléatoires indépendantes R_i $(i = 1, 2, 3)$ de moyennes : $E(R_1) = 0,05$, $E(R_2) = 0,10$ et $E(R_3) = 0,15$, et d'écarts types: $\sigma(R_1) = 0,02$, $\sigma(R_2) = 0,08$ et $\sigma(R_3) = 0,10$.

Un "portefeuille" potentiel est un triplet (x_1, x_2, x_3) donnant les parts de la somme initiale S qui sera investie dans chaque actif ($x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3$). Son rendement est la variable: $R = x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3$ et son espérance est $E(R) = 0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,15x_3$.

1) Montrer que sa variance est $V(R) = \sigma^2(R) = (4x_1^2 + 64x_2^2 + 100x_3^2).10^{-4}$.

– –

$V(R) = \sigma^2(R) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \sigma(R_i)^2 = (4x_1^2 + 64x_2^2 + 100x_3^2).10^{-4}$.

– –

2) Montrer que le portefeuille le moins risqué (i.e. de variance minimale) que l'on peut constituer à partir de ces trois actifs est solution du problème

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{x_1+x_2+x_3=1, \ \ x_i \geq 0, \ i=1,2,3} 4x_1^2 + 64x_2^2 + 100x_3^2.$$

– –

Trivial.

– –

3) Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins une solution.

– –

Même réponse qu'au 2) de l'exercice 1.

– –

4) Montrer que $(\mathcal{P})$ est un problème d'optimisation convexe et qu'il possède une solution et une seule.

$- -$

Même réponse qu'au 3) de l'exercice 1, en posant:

$h(x_1, x_2, x_3) = x_1+x_2+x_3-1, \ \ g_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1, \ \ g_2(x_1, x_2, x_3) = -x_2, \ \ g_3(x_1, x_2, x_3) = -x_3.$

La héssienne du critère est donnée dans ce cas par

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

qui est définie positive et qui implique la stricte convexité du critère.

$- -$

5) Vérifier que tous les points admissibles sont réguliers et écrire les conditions (K.K.T) relatives au problème $(\mathcal{P})$.

$- -$

Concernant la régularité des points admissibles voir la réponse de la question 4) de l'exercice 1.
Les conditions de (K.K.T):
Il existe $\lambda \in \mathbb{R}, \mu_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3$ *tels que (on pose* $\bar{X} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{x_3})$*)*

$$\nabla f(\bar{X}) + \lambda \nabla h(\bar{X}) + \sum_{j=1}^{3} \mu_j \nabla g_j(\bar{X}) = (0, 0, 0)$$

avec $h(\bar{X}) = 0, \ \mu_j g_j(\bar{X}) = 0$ *et* $g_j(\bar{X}) \leq 0, \ j = 1, 2, 3.$
On obtient alors le sytème suivant

$$\begin{cases} 8\bar{x_1} + \lambda - \mu_1 = 0 \\ 128\bar{x_2} + \lambda - \mu_2 = 0 \\ 200\bar{x_3} + \lambda - \mu_3 = 0 \\ h(\bar{X}) = 0, \ \ \mu_j g_j(\bar{X}) = 0, \ \ g_j(\bar{X}) \leq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$- -$

6) Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ et déterminer sa solution.

$- -$

On sait que $\bar{X}$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si il est solution de (K.K.T), donc le système (K.K.T) possède une unique solution et comme on s'attend à ce que les trois actifs interviennent dans l'investissement, alors nécessairement $\bar{x}_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, par suite $\mu_j = 0$, $j = 1, 2, 3$. On aura ainsi

$$8\bar{x}_1 = 128\bar{x}_2 = 200\bar{x}_3.$$

Cette dernière relation combinée avec $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 1$ nous donne

$$\bar{x}_1 = \frac{400}{441}, \quad \bar{x}_2 = \frac{400}{441}.\frac{1}{16}, \quad \bar{x}_3 = \frac{400}{441}.\frac{1}{25}.$$

– –

7) Vérifier que le rendement espéré de ce portefeuille est supérieur à $5,64\%$ et que son écart type est proche de $1,9\%$.

$$E = 0,05\bar{x}_1 + 0,10\bar{x}_2 + 0,15\bar{x}_3 \simeq 5,6431, \quad \sigma = \sqrt{(4\bar{x}_1^2 + 64\bar{x}_2^2 + 100\bar{x}_3^2).10^{-4}} \simeq 1,91.$$