2. Plan Carré Latin :

Au niveau de la section1°), on a défini le Plan de bloc complètement randomisé,RCBD, pour réduire l'erreur résiduelle dans une expérience en supprimant la variabilité due à une variable de nuisance, connue gênante et contrôlable. Il existe plusieurs autres types de conception-plans qui utilisent le principe de blocage.

Exemple: On essaye d'étudier les effets de p préparations différentes d'une machine utilisée dans un dispositif sur le rythme-chauffage observé. Chaque préparation est mélangée par des lots de produits. Aussi, ces préparations sont fabriquées par plusieurs assistants de capacités différentes. On assiste, ainsi, à deux facteurs de nuisance à soutenir dans le plan d'expérience à savoir lots de produits et assistants (voir tableau1).

Le plan approprié pour ce problème consiste à tester chaque préparation exactement une fois dans chaque lot de produits et aussi bien chaque préparation doit être préparée exactement une fois par chacun des p assistants. Le plan d'expérience résultant est appelé Plan Carrés Latins. Le plan est un arrangement carré et les p préparations sont identifiées par des lettres latines ; d'où le nom de carré latin- A,B, C, D, E et F (soit $p = 6$). Les lots de produits (rangées-lignes) et les assistants (colonnes) sont orthogonaux aux traitements.

Plan en carré latin est utilisé pour éliminer deux sources nuisibles de variabilité permettant ainsi systématiquement le contrôle de l'erreur (le blocage) dans deux directions. De ce fait, les rangées-lignes et les colonnes représentent en réalité deux restrictions sur la randomisation. En général, un carré Latin[1] pour p facteurs ou un $p \times p$ carré Latin, est un carré contenant p lignes et p colonnes : Chacune des p^2 cellules résultantes contient l'une des p lettres qui correspond aux traitements et chaque lettre apparaît une et une seule fois dans chaque ligne et colonne.

[1] Carré Latin standard où la première rangée et première colonne définissent des lettres alphabéthiques écrites dans l'ordre.

*Exemples de carrés Latins :

4 × 4
A B D C
B C A D
C D B A
D A C B

5 × 5
A D B E C
D A C B E
C B E D A
B E A C D
E C D A B

6 × 6
A D C E B F
B A E C F D
C E D F A B
D C F B E A
F B A D C E
E F B A D C

*Plan carré Latin est défini par le modèle statistique suivant,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk} \qquad (2)$$
$$\varepsilon_{ijk} \backsim iid(0, \sigma^2),\ \forall\ i = 1,2,\cdots,p\ ;\ j = 1,2,\cdots,p\ \ et\ k = 1,2,\cdots,p$$
$$y_{ijk}\ est\ l'observation\ dans\ la\ i\text{è}me\ ligne\ et\ la\ k\text{iè}me\ colonne\ pour\ le\ j\text{è}me\ traitement$$
$$\mu\text{: } moyenne\ globale;$$
$$\alpha_i\ est\ l'effet\ de\ la\ i\text{è}me\ rang\text{é}e - ligne;$$
$$\tau_j est\ l'effet\ du\ j\text{è}me\ traitement;$$
$$\beta_k\ est\ l'effet\ de\ la\ k\text{è}me\ colonne;$$

Modèle(2) est un modèle d'effets ; modèle complètement additif[2] où il n'y a pas d'interactions entre rangées, colonnes et traitements. Étant donné qu'il n'y a qu'une seule observation dans chaque cellule, seuls deux des trois indices $i, j\ et\ k$ sont nécessaires pour désigner une observation particulière.

Exemple, en référence au problème de préparations différentes d'une machine utilisée dans un dispositif dans le tableau1, si i=2 et k=3, on trouve automatiquement $j = 4$, i.e. la préparation D : ce qui résulte au fait que chaque traitement apparaît exactement une fois dans chaque ligne et colonne.

[2] Additionnel, complémentaire.

<u>Tableau1-</u> Plan Carré Latin du problème de préparations différentes d'une machine utilisée dans un dispositif (où $p = 6$ supposée).

Lots de produits	Assistants					
	1	2	3	4	5	6
1	A	B	C	F	E	D
2	B	C	D	E	F	A
3	C	D	E	A	B	F
4	D	F	A	B	C	E
5	E	A	F	C	D	B
6	F	E	B	D	A	C

*Au niveau de l'analyse de la variance, on a la partition de la somme totale des carrés de $\mathrm{N} = \mathrm{p}^2$observations en composantes rangées, colonnes, traitements et erreurs comme suit,

$$SS_T = SS_{rangées} + SS_{colonnes} + SS_{traitements} + SS_E$$
$$de\ degrés\ de\ liberté\ respectifs$$
$$p^2 - 1 = p - 1 + p - 1 + p - 1 + (p-2)(p-1)$$

Et sous l'hypothèse de normalité standard des erreurs, $\varepsilon_{ijk} \backsim iid(0, \sigma^2)$, on montre que

$$\frac{SS_{traitements}}{\sigma^2} \backsim \mathcal{X}^2(p-1)$$
$$\frac{SS_{rangées}}{\sigma^2} \backsim \mathcal{X}^2(p-1)$$
$$\frac{SS_{colonnes}}{\sigma^2} \backsim \mathcal{X}^2(p-1)$$
$$\frac{SS_E}{\sigma^2} \backsim \mathcal{X}^2[(p-2)(p-1)]$$

Sous l'hypothèse de base d'égalité des traitements moyens, on définit la statistique du test par

$$F_0 = \frac{CM_{SS_{traitements}}}{CM_{SS_E}} \backsim F_{[p-1,(p-2)(p-1)\,]}\ si\ l'hypothèse\ de\ base\ est\ vraie.$$
$$Decision\text{: } Rejet\ de\ l'hypotèse\ de\ base\ pour$$
$$F_0 > F_{\alpha,[p-1,(p-2)(p-1)]}$$

Remarques : --

*Il est possible de tester l'hypothèse d'absence d'effet rangées et effet colonnes en formant les ratios resp. suivants,

$$\frac{CM_{SS_{rangées}}}{CM_{SS_E}}\ et\ \frac{CM_{SS_{colonnes}}}{CM_{SS_E}}$$

Etant donné que les rangés et colonnes représentent des restrictions sur la randomisation, ces tests peuvent ne pas être appropriés, conformes.

** La somme carrée des résidus est définie comme la différence entre somme carrés entre cellules et sommes carrés traitements, rangées et colonnes. Or, on a p^2 cellules à p^2-1 degré de liberté entre eux ; alors SS_E est associé au degré de liberté suivant :

$$ddl = p^2 - 1 - (p-1) - (p-1) - (p-1) = (p-2)(p-1)$$

--./.

**Procédure d'analyse de variance pour un plan Carré Latin:

Source De variation	Sommes Carrées	ddl	Carrés Moyens	Statistique F_0
Traitements	$SS_{traitements}$	$p-1$	$\frac{SS_{traitements}}{p-1}$	$F_0 = \frac{CM_{SS_{traitements}}}{CM_{SS_E}}$
Rangées	$SS_{rangées}$	$p-1$	$\frac{SS_{rangées}}{p-1}$	
Colonnes	$SS_{colonnes}$	$p-1$	$\frac{SS_{colonnes}}{p-1}$	
Erreurs	SS_E	$(p-2)(p-1)$	$\frac{SS_E}{(p-2)(p-1)}$	
Total	SS_T	p^2-1		

Avec :

$$\mathrm{SS_T} = \sum_i \sum_j \sum_k \mathrm{y}_{\mathrm{ijk}}^2 - \frac{\mathrm{y}_{\dots}^2}{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{SS_{traitements}} = \frac{1}{\mathrm{p}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{y}_{.\mathrm{j}.}^2 - \frac{\mathrm{y}_{\dots}^2}{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{SS_{rangées}} = \frac{1}{\mathrm{p}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{y}_{\mathrm{i}..}^2 - \frac{\mathrm{y}_{\dots}^2}{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{SS_{colonnes}} = \frac{1}{\mathrm{p}} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{p}} \mathrm{y}_{..\mathrm{k}}^2 - \frac{\mathrm{y}_{\dots}^2}{\mathrm{N}}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{traitements} - \mathrm{SS_{rangées}} - \mathrm{SS_{colonnes}}$$

--L’adéquation du modèle statistique (2) est définie par l’examen du plot des résidus générés par l’estimation,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} \\ &= y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{\dots} \end{aligned}$$

--Cas où une observation est manquante dans le plan $p \times p$ Carré Latin : Valeur manquante estimée par,

$$y_{ijk} = \frac{p\left(y'_{i..} + y'_{.j.} + y'_{..k}\right) - 2y'_{\dots}}{(\mathrm{p}-2)(\mathrm{p}-1)}$$

où

': $indique\ totals\ rangée, colonne\ et\ traitement\ avec\ valeur\ manquante,$

$y'_{\dots} d\acute{e}finit\ le\ total\ général\ avec\ valeur\ manquante.$

Remarques :---

-Comme pour tout plan expérimental, les observations dans le plan carré latin doivent être effectuées dans un ordre aléatoire. La procédure de randomisation appropriée consiste à sélectionner au hasard le carré particulier utilisé. La procédure habituelle consiste à sélectionner un carré latin dans un tableau de modèles, puis à organiser aléatoirement l'ordre des lignes, des colonnes et des lettres.

-Les plans carrés latins peuvent être utiles dans les situations où les lignes et les colonnes représentent les facteurs que l'expérimentateur souhaite réellement étudier et où il n'y a aucune restriction de randomisation. Ainsi, trois facteurs, chacun à p niveaux, peuvent être étudiés dans seulement p^2analyses. Cette conception suppose qu’il n’y a aucune interaction entre facteurs. ---./.

Reproduction de Carrés Latins : L'inconvénient des petits carrés latins est qu'ils fournissent un nombre relativement faible de degrés de liberté d'erreur.

Exemple un plan 3×3 Carré Latin est de 2 degré de liberté d'erreur; un plan 4×4 Carré Latin est de 6 degré de liberté d'erreur et ainsi de suite. Habituellement pour de petits carrés latins utilisés, il serait utile et judicieux de les répliquer (répéter) afin d'augmenter les degrés de liberté de l'erreur.

Il existe diverses façons de répliquer un Carré Latin. En l'illustrant sur l'exemple de l'étude des effets de p préparations différentes d'une machine utilisée dans un dispositif sur le rythme-chauffage observé, on suppose le plan 6×6 Carré Latin répliqué n fois et peut être réalisé comme suit :

Cas1 : On utilise les mêmes lots et assistants dans chaque répétition ;

Cas2 : On utilise les mêmes lots mais différents assistants dans chaque réplique (ou de manière équivalente, on utilise les mêmes assistants mais différents lots) ;

Cas3 : On utilise différents lots et différents assistants.

**L'étude d'analyse de variance dépend de la méthode de réplique :

--Cas1 où les mêmes niveaux de facteurs de blocage rangée et colonne sont utilisés dans chaque répétition. Soit $y_{ijk\,l}$définit l'observation de rangée i, traitement j, colonne k et réplique l. Total observation est égal à $N = np^2$. Procédure d'analyse de variance pour un plan Carré Latin répliqué-cas1 est définie comme suit:

Source De variation	Sommes Carrées	ddl	Carrés Moyens	StatistiqueF_0
Traitements	$\frac{1}{np}\sum_{j=1}^{p} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$	$\frac{SS_{traitements}}{p-1}$	$F_0 = \frac{CM_{SS_{traitements}}}{CM_{SS_E}}$
Rangées	$\frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p} y_{i...}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$	$\frac{SS_{rangées}}{p-1}$	
Colonnes	$\frac{1}{np}\sum_{k=1}^{p} y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$	$\frac{SS_{colonnes}}{p-1}$	
Répliques	$\frac{1}{p^2}\sum_{l=1}^{n} y_{...l}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$n-1$	$\frac{SS_{répliques}}{n-1}$	
Erreurs	SS_E(par soustraction)	$(p-1)[n(p+1)-3]$	$\frac{SS_E}{(p-1)[n(p+1)-3]}$	
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	np^2-1		

--Cas2 où on suppose de nouveaux lots de produits et les mêmes assistants sont utilisés dans chaque réplique. On a ainsi six nouvelles rangées-lignes[3] dans chaque réplique et la procédure d'analyse de variance pour un plan Carré Latin répliqué-cas2 est définie comme suit:

Source De variation	Sommes Carrées	ddl	Carrés Moyens	Statistique F_0
Traitements	$\frac{1}{np}\sum_{j=1}^{p} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$	$\frac{SS_{traitements}}{p-1}$	$F_0 = \frac{CM_{SS_{traitements}}}{CM_{SS_E}}$
Rangées	$\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} y_{i..l}^2 - \sum_{l=1}^{n}\frac{y_{...l}^2}{p^2}$	$n(p-1)$	$\frac{SS_{rangées}}{n(p-1)}$	
Colonnes	$\frac{1}{np}\sum_{k=1}^{p} y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$	$\frac{SS_{colonnes}}{p-1}$	
Répliques	$\frac{1}{p^2}\sum_{l=1}^{n} y_{...l}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$n-1$	$\frac{SS_{répliques}}{n-1}$	
Erreurs	SS_E(par soustraction)	$(p-1)(np-1)$	$\frac{SS_E}{(p-1)(np-1)}$	
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	np^2-1		

Notons que la source de variation pour les rangées-lignes mesure réellement la variation entre les rangées-lignes à l'intérieure[4] des n répétitions.

--Cas3 où de nouveaux lots de produits et de nouveaux assistants sont utilisés dans chaque réplique. La variation résultante à la fois des rangées-lignes et des colonnes mesure les variations provoquées par ces facteurs à l'intérieure des répétitions.

La procédure d'analyse de variance pour un plan Carré Latin répliqué-cas3 est définie comme suit:

[3] En général, on a p nouvelles rangées-lignes.
[4] i.e. within les n répliques.

Source De variation	Sommes Carrées	ddl	Carrés Moyens	Statistique F_0
Traitements	$\frac{1}{np}\sum_{j=1}^{p} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p-1$	$\frac{SS_{traitements}}{p-1}$	$F_0 = \frac{CM_{SS_{traitements}}}{CM_{SS_E}}$
Rangées	$\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} y_{i..l}^2 - \sum_{l=1}^{n}\frac{y_{...l}^2}{p^2}$	$n(p-1)$	$\frac{SS_{rangées}}{n(p-1)}$	
Colonnes	$\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} y_{..kl}^2 - \sum_{l=1}^{n}\frac{y_{...l}^2}{p^2}$	$n(p-1)$	$\frac{SS_{colonnes}}{n(p-1)}$	
Répliques	$\frac{1}{p^2}\sum_{l=1}^{n} y_{...l}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$n-1$	$\frac{SS_{répliques}}{n-1}$	
Erreurs	SS_E(par soustraction)	$(p-1)[n(p-1)-1]$	$\frac{SS_E}{(p-1)[n(p-1)-1]}$	
Total	$\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	np^2-1		

3. Plan Carré Gréco-Latin[5]

On considère un $p \times p$ carré Latin où on superpose dessus un second $p \times p$ carré Latin dans lequel les traitements sont définis par des lettres Grecques.

Un plan est appelé carré gréco-latin si les deux carrés superposés ont la propriété que chaque lettre grecque apparaît une et une seule fois avec chaque lettre latine et les deux carrés latins sont dits orthogonaux.

*Exemple Plan 4 × 4 Carré Gréco-Latin:

Rangée	Colonne			
	1	2	3	4
1	Aα	Bβ	Cγ	Dδ
2	B δ	A γ	Dβ	Cα
3	Cβ	Dα	A δ	B γ
4	D γ	C δ	Bα	Aβ

[5] Graeco-Latin Square design.

Le plan carré gréco-latin peut être utilisé pour contrôler systématiquement trois sources de variabilité inconnue, c'est-à-dire pour bloquer dans trois directions. Le plan permet d'étudier quatre facteurs, chacun à p niveaux en seulement p^2 exécutions. Les carrés gréco-latin existent pour tout $p \geq 3$ sauf $p = 6$.

*Plan Carré Gréco-Latin est défini par le modèle statistique suivant,

$$y_{ijkl} = \mu + \theta_i + \tau_j + \omega_k + \psi_l + \varepsilon_{ijkl} \qquad (3)$$

$$\varepsilon_{ijk} \backsim iid(0, \sigma^2),\ \forall\ i = 1,2,\cdots,p\ ;\ j = 1,2,\cdots,p\ ;\ k = 1,2,\cdots,p\ \ et\ l = 1,2,\cdots,p$$

y_{ijk} *est l'observation dans la ième rangée − ligne et la l ème colonne pour la lettre Latine j et la lettre Grecque k;*

μ: *moyenne globale;*

θ_i *est l'effet de la ième rangée − ligne;*

τ_j *est l'effet du jème traitement lettre Latine;*

ω_k *est l'effet du kème traitement lettre Grecque;*

ψ_l *est l'effet de la l ème colonne;*

Seulement deux des quatre indices sont nécessaires *pour l'identification complète d'une observation.*

**Procédure d'analyse de variance pour un plan Carré Gréco-Latin:

Source De variation	Sommes Carrées	ddl
Traitements Lettre Latine	$SS_L = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{.j..}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p - 1$
Traitements Lettre Grecque	$SS_G = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	p - 1
Rangées	$SS_{rangées} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i...}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p - 1$
Colonnes	$SS_{colonnes} = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p} y_{...l}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p - 1$
Erreurs	SS_E(par soustraction)	$(p - 3)(p - 1)$
Total	$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{N}$	$p^2 - 1$

Notons que l'analyse de variance est bien similaire à celle d'un carré Latin. Étant donné que les lettres grecques apparaissent exactement une fois dans chaque rangée-ligne et colonne et exactement une fois avec chaque lettre latine, le facteur représenté par les lettres grecques est orthogonal aux traitements des rangées-lignes, colonnes et lettres latines. Par conséquent, une somme de carrés due au facteur des lettres grecques peut être calculée à partir des totaux des lettres grecques et l'erreur expérimentale est encore réduite de ce montant.

L'hypothèse nulle d'égalité traitements des rangées-lignes, des colonnes, des lettres latines et des lettres grecques sont testées en divisant le carré moyen correspondant par l'erreur quadratique moyenne. Et on a rejet de l'hypothèse nulle si $F_0 > F_{p-1,(p-3)(p-1)}$.

4. Plans blocs incomplets équilibrés, BIBD :

Dans certaines expériences utilisant un plan de blocs randomisés, il est possible qu'on n'arrive pas à exécuter toutes les combinaisons de traitements dans chaque bloc. Généralement, de telles situations se produisent en raison du manque d'appareils ou d'installations expérimentaux ou de la taille physique du bloc. Pour ce type de problème, il est possible d'utiliser des plans de blocs randomisés dans lesquels chaque traitement n'est pas présent dans chaque bloc. Plans connus comme plans bloc incomplet randomisé.

Lorsque toutes les comparaisons de traitements sont d'égale importance, les combinaisons de traitements utilisées dans chaque bloc doivent être sélectionnées de manière équilibrée, c'est-à-dire de manière à ce que toute paire de traitements se produise ensemble le même nombre de fois que toute autre paire. Ainsi, un plan en blocs incomplets équilibrés est un plan en blocs incomplets dans lequel deux traitements apparaissent ensemble en un nombre égal de fois.

On suppose qu'il existe a traitements et chaque bloc peut contenir exactement k traitements où $k < a$. Un plan bloc incomplet équilibré, BIBD, est construit en prenant $\binom{a}{k}$ blocs et en attribuant une combinaison différente de traitements à chaque bloc. Cependant, l'équilibre peut être obtenu avec moins de $\binom{a}{k}$ blocs.

*Exemple plan blocs incomplets équilibrés, BIBD:

Traitement	Bloc				
	1	2	3	4	$y_{i.}$
1	40	72	----	70	
2	----	54	35	29	
3	50	60	42	----	
4	25	----	59	33	
$y_{.j}$					$y_{..}$

i. <u>Analyse statistique du plan BIBD :</u>

On suppose a traitements et b blocs. Aussi, on considère que chaque bloc contient k traitements où chaque traitement se produit r fois dans le plan (i.e. répété r fois) et il y a $N = a\,r = b\,k$ observations totales.

Le nombre de fois que chaque paire de traitements apparait dans le même bloc est

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{a-1}$$
$$Si\ a = b, le\ plan\ est\ dit\ symétrique$$
$$\lambda\ est\ un\ entier.$$

**<u>Explication pour λ</u> : Soit le traitement 1 considéré qui apparait dans r blocs et soit $k-1$ autres traitements dans chacun de ces blocs : il y a $r(k-1)$ observations dans un bloc contenant le traitement 1. Ces $r(k-1)$ observations représentent $\lambda\ fois$ les

$(a-1)$ traitements restants. Ce qui implique que $\lambda(a-1) = r(k-1)$.

**Plan blocs incomplets équilibrés, BIBD est défini par le modèle statistique suivant,

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad (4)$$
$$\varepsilon_{ijk} \backsim iid(0,\sigma^2), \forall\ i = 1,2,\cdots,a\ \ et\ \ j = 1,2,\cdots,b$$
$$y_{ij}\ est\ la\ i\ ème\ observation\ dans\ le\ j\ ème\ bloc.$$
$$\mu: moyenne\ globale;$$
$$\tau_i\ est\ l'effet\ du\ i\ ème\ traitement;$$
$$\beta_j\ est\ l'effet\ du\ \ j\ ème\ bloc.$$

*Au niveau de l'analyse de la variance, on a la variabilité totale dans les données est définie par la somme carrée totale corrigée, partitionnée comme suit,

$$SS_T = SS_{traitements\ ajustés} + SS_{Blocs} + SS_E$$
$$où$$
$$\mathrm{SS_T} = \sum_i \sum_j \mathrm{y}_{ij}^2 - \frac{\mathrm{y}_{..}^2}{\mathrm{N}}$$
$$\mathrm{SS_{blocs}} = \frac{1}{\mathrm{k}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{b}} \mathrm{y}_{.\mathrm{j}}^2 - \frac{\mathrm{y}_{..}^2}{\mathrm{N}}$$
$$avec\ y_{.j}\ est\ le\ total\ dans\ le\ j\ ème\ bloc$$
$$et\ \mathrm{SS_{blocs}}\ de\ ddl = b - 1$$
$$SS_{traitements\ ajustés} = \frac{k \sum_{i=1}^{a} Q_i^2}{\lambda\ a}, \quad de\ ddl = a - 1$$
$$avec\ total\ du\ i\ ème\ traitement\ ajusté: Q_i = y_{i.} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{b} n_{i\ j} y_{.j} \quad \forall\ i = 1, \cdots, a$$
$$n_{i\ j} = \begin{cases} 1\ si\ le\ traitement\ i\ apparait\ dans\ le\ bloc\ \ j \\ \qquad 0\ \ ailleurs \end{cases}$$
$$Somme\ des\ totaux\ de\ traitements\ ajustés = 0$$
$$SS_E = SS_T - SS_{traitements\ ajustés} - \mathrm{SS_{Blocs}} \quad \mathrm{de\ ddl = N - a - b + 1.}$$

Notons que la somme carrée des traitements, $SS_{traitements\ (ajustés)}$, est ajustée pour séparer les effets traitements et blocs. Cet ajustement est bien nécessaire étant donné que chaque traitement est représenté dans un ensemble différent de r blocs. Donc, les différences entre les totaux de traitements non ajustés, $y_{1.}, \cdots, y_{a.}$ sont également affectées par les différences entre les blocs.

**Procédure d'analyse de variance pour un plan blocs incomplets équilibrés, BIBD:

Source De variation	Sommes Carrées	ddl	Carrés Moyens	Statistique F_0
Traitements ajustés	$\frac{k\sum_{i=1}^{a} Q_i^2}{\lambda\, a}$	$a-1$	$\frac{SS_{\text{traitements ajustés}}}{a-1}$	$F_0 = \frac{CM_{SS_{\text{traitements ajustés}}}}{CM_{SS_E}}$ $s.H_0\text{: égalité des effets traitements}$
Blocs	$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$	$b-1$	$\frac{SS_{\text{blocs}}}{b-1}$	
Erreurs	SS_E	$N-a-b+1$	$\frac{SS_E}{N-a-b+1}$	
Total	$\sum_i\sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$	$N-1$		

**Cas où le facteur étudié est fixe, on s'intéresse aux tests sur les moyennes traitement individuels. Si des contrastes orthogonaux sont utilisés, les contrastes doivent être effectués sur les totaux de traitement ajustés, $\{Q_i\}$ plutôt que $\{y_{i.}\}$. La somme carrée des contrastes est définie par,

$$SS_c = \frac{k\left(\sum_{i=1}^{a} c_i Q_i\right)^2}{\lambda\, a\sum_{i=1}^{a} c_i^2}$$

$$o\text{ù}$$

$$\{c_i\}\ sont\ les\ coefficients\ contrastes.$$

--D'autres méthodes de comparaisons existent pour comparer, apparier toutes les paires des effets traitements ajustés ; elles sont estimées par le coefficient :

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda\, a}$$

$$L'erreur\ standard\ d'un\ effet\ traitement\ ajust\acute{e}\ est$$

$$S = \sqrt{\frac{k\ CM_{SSE}}{\lambda\, a}}$$

--Possible évaluation des effets blocs où on utilise la partition alternative de la somme carrée totale, SS_T, comme suit :

$$SS_T = SS_{traitements} + SS_{Blocs\ ajustés} + SS_E$$

où

$SS_{traitements}$ est non ajustée

Pour un plan symétrique, i. e. a = b, on a:

$$\text{Totals blocs ajustés: } Q'_j = y_{.j} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{a} n_{ij} y_{i.} \qquad \forall\, j = 1, \cdots, b$$

et

$$SS_{Blocs\ ajustés} = \frac{r\sum_{j=1}^{b}\left(Q'_j\right)^2}{\lambda\, b}$$

<u>Remarque :</u> Dans le cas d'absence d'orthogonalité entre traitements et blocs, on a

$$SS_T \neq SS_{traitements\ ajustés} + SS_{Blocs\ ajustés} + SS_E$$

ii. Estimation MCO des paramètres du modèle BIBD :

Par méthode d'estimation Moindre carrée, on définit les équations normales comme suit

$$\mu: N\hat{\mu} + r\sum_{i=1}^{a}\hat{\tau}_i + k\sum_{j=1}^{b}\hat{\beta}_j = y_{..}$$
$$\tau_i: r\hat{\mu} + r\,\hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\hat{\beta}_j = y_{i.} \qquad \forall\, i = 1, \cdots, a$$
$$\beta_j: k\,\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{a} n_{ij}\,\hat{\tau}_i + k\hat{\beta}_j = y_{.j} \qquad \forall\, j = 1, \cdots, b$$
$$s.c: \sum \hat{\tau}_i = \sum \hat{\beta}_j = 0, on\ a\ \hat{\mu} = \bar{y}_{..}$$
$$et$$
$$s.c: \sum_{j=1}^{b} n_{ij} n_{pj} = \lambda\ si\ p \neq i$$

$L'estimateur\ MCO\ des\ effets\ traitements\ est:$

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda\, a} \qquad \forall\, i = 1, \cdots, a$$

Fin./.