Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

Année Universitaire
2014-2015
Première Année

Méthodes d'estimation
Corrigé de l'Examen Final : Mai 2015

(aucun document autorisé)

Enseignants : H.Mallek et H.Rammeh

Durée : 1 heure 30

Corrigé du Problème

$\theta = (p_1, p_2) \in [0,1]^2$.

$$X_k = \begin{cases} 1 \text{ si on obtient une boule } n°1 \\ 2 \text{ si on obtient une boule } n°2 \\ 3 \text{ si on obtient une boule } n°3 \end{cases}$$

$N_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=i\}}$.

1. $P[X = x] = p_1^{\mathbb{1}_{\{x=1\}}} \cdot p_2^{\mathbb{1}_{\{x=2\}}} \cdot p_3^{\mathbb{1}_{\{x=3\}}} \mathbb{1}_{\{1,2,3\}}(x)$ ..

2. $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \prod_{k=1}^{n} P[X_k = x_k] = p_1^{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_k=1\}}} \cdot p_2^{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_k=2\}}} \cdot p_3^{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_k=3\}}} \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x})$

3. $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x}) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot (1 - p_1 - p_2)^{n-(n_1+n_2)} \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x})$
   $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \left(\frac{p_1}{1 - p_1 - p_2}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{p_2}{1 - p_1 - p_2}\right)^{n_2} \cdot (1 - p_1 - p_2)^n \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x})$.
   $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = g(T(\underline{x}), \theta) \cdot h(\underline{x})$
   avec $g(T(\underline{x}), \theta) = \left(\frac{p_1}{1 - p_1 - p_2}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{p_2}{1 - p_1 - p_2}\right)^{n_2}$
   et $h(\underline{x}) = (1 - p_1 - p_2)^n \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x})$.
   Donc d'après le théorème de factorisation, $T(\underline{x}) = (N_1, N_2)$ *est exhaustive pour le modèle.*

4. *On a un n-échantillon de la variable aléatoire X pour lequel nous observons le vecteur aléatoire du nombre d'occurences des différentes valeurs possibles de X. Il s'agit donc d'une loi mutinomiale* $M(n, p_1, p_2, p_3)$ *et*

$$P\begin{bmatrix} N_1 = n_1 \\ N_2 = n_2 \\ N_3 = n_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3} p_1^{n_1}\ p_2^{n_2}\ p_3^{n_3} & si \sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

5. $\theta = (p_1, p_2)$. *S'agissant d'une loi discrète, l'estimateur par la méthode des moments de θ n'est autre que l'estimateur par substitution des fréquences :*

$$\widehat{\theta}_{MM} = (\widehat{p}_{MM1}, \widehat{p}_{MM2}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=2\}}\right) = \left(\frac{N_1}{n}, \frac{N_2}{n}\right)$$

6. $\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot (1 - p_1 - p_2)^{n-(n_1+n_2)}\, \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x})$

$\ln \mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = [n_1 \ln p_1 + n_2 \ln p_2 + (n - (n_1 + n_2)) \ln (1 - p_1 - p_2)]\, \mathbb{1}_{\{1,2,3\}^n}(\underline{x})$

Condition de 1er ordre :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial p_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial p_2} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n_1}{p_1} - \dfrac{n - (n_1 + n_2)}{1 - p_1 - p_2} = 0 \\ \dfrac{n_2}{p_2} - \dfrac{n - (n_1 + n_2)}{1 - p_1 - p_2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{n_1}{p_1} = \dfrac{n_2}{p_2} \Longleftrightarrow p_1 = \dfrac{n_1}{n_2} p_2 \\ p_2 = \dfrac{1 - p_1 - p_2}{n - (n_1 + n_2)} \cdot n_2 \Longrightarrow p_2 (n - (n_1 + n_2)) = n_2 \left(1 - \dfrac{n_1}{n_2} p_2 - p_2\right) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1 = \dfrac{n_1}{n_2} p_2 \\ p_2 (n - (n_1 + n_2)) + n_2 p_2 \left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1\right) = n_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1 = \dfrac{n_1}{n_2} p_2 \\ p_2 (n - (n_1 + n_2)) + p_2 (n_1 - n_2) = n_2 \end{array}\right.$$

Finalement

$$p_2 = \frac{n_2}{n} \text{ et } p_1 = \frac{n_1}{n}$$

Condition de 2nd ordre : Matrice Hessienne définie négative.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1^2} = -\dfrac{n_1}{p_1^2} - \dfrac{n - (n_1 + n_2)}{(1 - p_1 - p_2)^2} = -\dfrac{n_1}{p_1^2} - \dfrac{n_3}{p_3^2} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_2^2} = -\dfrac{n_2}{p_2^2} - \dfrac{n - (n_1 + n_2)}{(1 - p_1 - p_2)^2} = -\dfrac{n_2}{p_2^2} - \dfrac{n_3}{p_3^2} < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1 \partial p_2} = -\dfrac{n - (n_1 + n_2)}{(1 - p_1 - p_2)^2} = -\dfrac{n_3}{p_3^2} \end{array}\right.$$

$$H = \begin{pmatrix} -\dfrac{n_1}{p_1^2} - \dfrac{n_3}{p_3^2} & -\dfrac{n_3}{p_3^2} \\ -\dfrac{n_3}{p_3^2} & -\dfrac{n_2}{p_2^2} - \dfrac{n_3}{p_3^2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{n_1}{p_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n_2}{p_2^2} \end{pmatrix} - \frac{n_3}{p_3^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = -\begin{pmatrix} \dfrac{n_1}{p_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n_2}{p_2^2} \end{pmatrix} - \frac{n_3}{p_3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{n_1}{p_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n_2}{p_2^2} \end{pmatrix} - \frac{n_3}{p_3^2} u \cdot u'.$$

H est la somme de deux matrices définies négatives ; elle est donc définie négative.

Conséquence : $\widehat{\theta}_{MV} = \left(\dfrac{N_1}{n}, \dfrac{N_2}{n}\right)$ *est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.*

$E\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] = \dfrac{1}{n} E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}, \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=2\}}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\mathbb{1}_{\{X_k=1\}}\right), \sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\mathbb{1}_{\{X_k=2\}}\right)\right)$

$E\left[\widehat{\theta}_{MV}\right] = \dfrac{1}{n}\left(n \cdot P\left[X=1\right], n \cdot P\left[X=2\right]\right) = \left(p_1, p_2\right).$

$\widehat{\theta}_{MV}$ est donc sans biais.

7. *Les hypothèses H_1, H_2 et H_3 sont vérifiées. La matrice d'information de Fisher $I_n(\theta)$, est donc la matrice de terme général*

$$I_{ij}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln \mathcal{L}\left(\underline{X}, \theta\right)\right]$$

Or

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1^2} = -\dfrac{n_1}{p_1^2} - \dfrac{n_3}{p_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_2^2} = -\dfrac{n_2}{p_2^2} - \dfrac{n_3}{p_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1 \partial p_2} = -\dfrac{n-(n_1+n_2)}{(1-p_1-p_2)^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1^2}\right] = -E\left[\dfrac{N_1}{p_1^2} + \dfrac{n-(N_1+N_2)}{(1-p_1-p_2)^2}\right] = -\left(\dfrac{np_1}{p_1^2} + \dfrac{n-n(p_1+p_2)}{(1-p_1-p_2)^2}\right) \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_2^2}\right] = -E\left[\dfrac{N_2}{p_2^2} - \dfrac{n-(N_1+N_2)}{(1-p_1-p_2)^2}\right] = -\left(\dfrac{np_2}{p_2^2} + \dfrac{n-n(p_1+p_2)}{(1-p_1-p_2)^2}\right) \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1 \partial p_2}\right] = -E\left[\dfrac{n-(N_1+N_2)}{(1-p_1-p_2)^2}\right] = -\dfrac{n-n(p_1+p_2)}{(1-p_1-p_2)^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1^2}\right] = -\left(\dfrac{n}{p_1} + \dfrac{n}{1-p_1-p_2}\right) \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_2^2}\right] = -\left(\dfrac{n}{p_2} + \dfrac{n}{1-p_1-p_2}\right) \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial p_1 \partial p_2}\right] = -\dfrac{n}{1-p_1-p_2} \end{cases}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
I_n(\theta) &= n \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{1-p_1-p_2} & \dfrac{1}{1-p_1-p_2} \\ \dfrac{1}{1-p_1-p_2} & \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{1-p_1-p_2} \end{pmatrix} \\
I_n(\theta) &= n \begin{pmatrix} \dfrac{1-p_2}{p_1(1-p_1-p_2)} & \dfrac{1}{1-p_1-p_2} \\ \dfrac{1}{1-p_1-p_2} & \dfrac{1-p_1}{p_2(1-p_1-p_2)} \end{pmatrix} \\
I_n(\theta) &= \frac{n}{1-p_1-p_2} \begin{pmatrix} \dfrac{1-p_2}{p_1} & 1 \\ 1 & \dfrac{1-p_1}{p_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

8. *La statistique $T(\underline{X})$ étant exhaustive, on a alors*

$$I_{T(\underline{x})}(\theta) = I_n(\theta)$$

9. *Les hypothèses H_1, H_2 et H_3 sont vérifiées. De plus La matrice d'information de Fisher $I_n(\theta)$ est finie. Alors $\widehat{\theta}_{MV}$ est fortement consistant.*

10. *Les hypothèses H_1, H_2 et H_3 sont vérifiées. De plus La matrice d'information de Fisher $I(\theta)$ est finie. Alors $\widehat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement efficace.*

11. $I(\theta) = \dfrac{1}{1-p_1-p_2} \begin{pmatrix} \dfrac{1-p_2}{p_1} & 1 \\ 1 & \dfrac{1-p_1}{p_2} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Det(I(\theta)) &= \left(\frac{1}{1-p_1-p_2}\right)^2 \left(\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1 \cdot p_2} - 1\right) \\
Det(I(\theta)) &= \left(\frac{1}{1-p_1-p_2}\right)^2 \frac{(1-p_1)(1-p_2) - p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_2} \\
Det(I(\theta)) &= \frac{1}{p_1 \cdot p_2 (1-p_1-p_2)} \\
I^{-1}(\theta) &= p_1 \cdot p_2 (1-p_1-p_2) \cdot \frac{1}{1-p_1-p_2} \begin{pmatrix} \dfrac{1-p_1}{p_2} & -1 \\ -1 & \dfrac{1-p_2}{p_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

D'où la borne de Cramer Rao

$$BCR(\theta) = I^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1 \cdot p_2 \\ -p_1 \cdot p_2 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix}$$

12. *Les hypothèses H_1, H_2 et H_3 sont vérifiées. De plus La matrice d'information de Fisher $I(\theta)$ est finie. Alors $\widehat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement normal avec*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{MV} - \theta\right) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{Loi}} \mathcal{N}\left(0_{\mathbb{R}^{\neq}}, I^{-1}(\theta)\right)$$

et donc

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{MV} - \theta\right) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{Loi}} \mathcal{N}\left(0_{\mathbb{R}^{\neq}}, \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1 \cdot p_2 \\ -p_1 \cdot p_2 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix}\right)$$

13. D'après la question précédente, on a *pour* $i = 1, 2$,

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{p}_{iMV} - p_i}{\sqrt{p_i(1-p_i)}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{Loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Or l'application $x \longmapsto \sqrt{x(1-x)}$ est continue sur $[0\ ,\ 1]$ et $\widehat{p}_{iMV}$ est fortement consistant et donc converge presque sûrement vers p_i. Par conséquent, $\dfrac{\sqrt{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}}{\sqrt{p_i(1-p_i)}}$ converge en probabilité vers 1, dès lors que $p_i \in]0\ ,\ 1[$. On a alors

$$\sqrt{n}\frac{\widehat{p}_{iMV} - p_i}{\sqrt{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{Loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

14. $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left[-F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \le \sqrt{n}\frac{\widehat{p}_{iMV}-p_i}{\sqrt{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}} \le F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 1-\alpha$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left[\widehat{p}_{iMV} - \sqrt{\frac{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \le p_i \le \widehat{p}_{iMV} + \sqrt{\frac{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 1-\alpha$

D'où l'intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour p_i :

$$\left[\widehat{p}_{iMV} - \sqrt{\frac{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ;\ \widehat{p}_{iMV} + \sqrt{\frac{\widehat{p}_{iMV}(1-\widehat{p}_{iMV})}{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$