ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée :1h30
Octobre 2010

Analyse Numérique - Correction du DS

Ines Abdeljaoued Tej

Interpolation.

1. Soient f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ et $xdata = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ une liste de $n+1$ points deux à deux distincts de $[0,1]$. L'algorithme suivant reprend la méthode des différences divisées.
   Entrée : Une fonction f et $xdata == [x_0, x_1, \ldots, x_n]$
   Sortie : Le polynôme de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$

```
# Méthode des différences divisées (formule de Newton)
def newton(f,xdata):
    n = len(xdata)-1
    c = matrix(QQ,n+1,n+1)
    for i in range(n+1):
        c[i,i] = f(xdata[i])
    #print c
    #print("-------")
    for k in range(1,n+1):
        for i in range(n+1-k):
            c[i,i+k] = (c[i+1,i+k]-c[i,i+k-1])/(xdata[i+k]-xdata[i])
        #print c
        #print("-------")
    P = c[0,0]
    P += sum(c[0,k]*prod((x-xdata[j]) for j in range(k)) for k in range(1,n+1))
    return(expand(P))
```

2. Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes et justifier votre réponse :
   (a) Vrai. Il existe une infinité de polynômes de degré supérieur strictement à n interpolant les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,.,.,n}$. En particulier, par deux points passe une infinité de courbes, mais une seule est une droite.
   (b) Faux. Le polynôme de Lagrange de $sin(x)$ sur les points 0, $\frac{\pi}{2}$ et π n'est pas égal à $P(x) = x^3 + 3x^2$. Ici, P est un polynôme de degré supérieur au nombre de points + 1 et $P(x_i) \neq sin(x_i)$.

Intégration.

3. Une approximation $T(h)$ de $\int_0^2 x^2 dx$ par la méthode des trapèzes avec une subdivision de l'intervalle $[0,2]$ en 2 sous intervalles de même amplitude est égale à $T(1) = 3$.
4. Soient $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{2n}$ et $x_i = a + i\frac{h}{2}$ pour $i = 0, \ldots, 2n$. Il suffit de regrouper les indices i dans $T(\frac{h}{2})$ en deux groupes : le premier constitué d'indices pairs (donnant $\frac{T(h)}{2}$) et le second

groupe d'indices impairs (donnant $\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh+\frac{h}{2})$). Ainsi, nous obtenons que

$$T(\frac{h}{2}) = \frac{T(h)}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh+\frac{h}{2}). \tag{1}$$

Connaissant $T(h)$, Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires au calcul de $T(\frac{h}{2})$ est égal à

$n(\beta+2)+1$	additions	0	soustractions
$n(\alpha+1)$	multiplications	2	divisions

où α multiplications et β additions sont nécessaires pour une seule évaluation de f.

5. Remplacer $a=0$, $b=2$, $f(x)=x^2$, $n=2$ et $h=1$ dans (1). On obtient $\int_0^2 x^2dx$ pour une subdivision de l'intervalle $[0,2]$ en 4 sous intervalles de même amplitude, i.e. 2.75 :

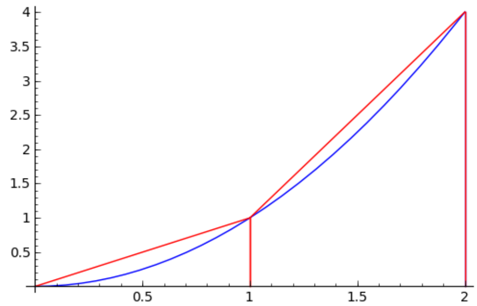

FIGURE 1 – *Intégration pour $h=1$*

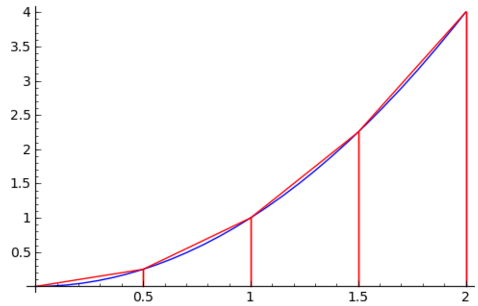

FIGURE 2 – *Intégration pour $h=\frac{1}{2}$*

Résolution d'équations non linéaires.

6. Le théorème de convergence globale de la méthode de Newton. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ vérifiant $f(a).f(b)<0$. Si pour tout $x\in[a,b]$, $f'(x)\neq 0$ et $f"(x)\neq 0$ alors $\forall x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0).f"(x_0)>0$, la suite $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers l'nique racine de f sur $[a,b]$.
7. La fonction $f(x)=x^3-1$ vérifie les conditions du théorème sur l'intervalle $[0.5,1.5]$. Elle est strictement monotone et elle change de signe. Elle admet donc une unique racine obtenue, par la méthode de Newton, de la manière suivante : x^* à 10^{-1} près. Partant de $x_0=1.5$, nous obtenons $x_1=1.1481$, $x_2=1.0182$ et $x_3=1.0003$. La courbe rouge

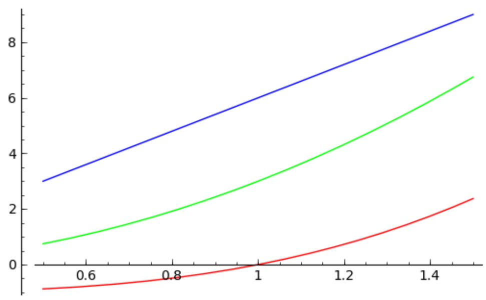

FIGURE 3 – *Résolution de x^3-1*

représente f' et la courbe bleue représente $f"$.

Bonne Continuation.

ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée :1h30
Octobre 2010

Devoir Surveillé du module Analyse Numérique

Ines Abdeljaoued Tej

Interpolation.

1. Soient f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ et $xdata = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ une liste de $n+1$ points deux à deux distincts de $[0,1]$. Ecrire l'algorithme de la méthode des différences divisées qui prend en entrée f et $xdata$ et qui calcule le polynôme de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$.

   Indication : la formule des différences divisées est la suivante :
   $$\begin{cases} c_{i,i} & = & f(x_i) & \textit{pour } i = 0,..,n \\ c_{i,j} & = & \frac{c_{i+1,j}-c_{i,j-1}}{x_j-x_i} & \textit{pour } 0 \leq i < j \leq n. \end{cases}$$

2. Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes et justifier votre réponse :
   (a) Il existe une infinité de polynômes de degré $> n$ interpolant les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,..,n}$.
   (b) Le polynôme de Lagrange de $sin(x)$ sur les points 0, $\frac{\pi}{2}$ et π est égal à $P(x) = x^3+3x^2$.

Intégration.

3. Calculer par la méthode des trapèzes une approximation $T(h)$ de $\int_0^2 x^2 dx$. Considérer pour cela une subdivision de l'intervalle $[0,2]$ en 2 sous intervalles de même amplitude.
4. Soient $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$. Sachant que $T(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$, vérifier que
   $$T(\frac{h}{2}) = \frac{T(h)}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh + \frac{h}{2}).$$
   Connaissant $T(h)$, donner le nombre d'opérations élémentaires nécessaires au calcul de $T(\frac{h}{2})$. Nous supposons qu'une évaluation de f nécessite α multiplications et β additions.
5. En déduire $\int_0^2 x^2 dx$ pour une subdivision de l'intervalle $[0,2]$ en 4 sous intervalles de même amplitude.

Résolution d'équations non linéaires.

6. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$.
7. Peut-on appliquer ce théorème au calcul de la racine x^* de $f(x) = x^3 - 1$ sur l'intervalle $[0.5, 1.5]$? Si oui, déterminer x^* à 10^{-1} près.

Bon Travail.