Exercice n°2 : Soit le modèle suivant : $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ avec $|\theta| < 1$ et ε_t est un bruit blanc.

1/ Calculer le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1.

2/ Etudier la corrélation entre X_t et X_{t-1}

1/ $$\rho_1 = \frac{cov(X_t, X_{t-1})}{\sigma^2_{X_t} \cdot \sigma^2_{X_{t-1}}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$; $X_t \sim MA(1)$ avec $\theta_1 = -\theta$.

$$cov(X_t, X_{t-1}) = E(X_t \cdot X_{t-1}) - E(X_t) \cdot E(X_{t-1})$$

$$\longrightarrow \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}.$$

2/ $$\frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}$$; puisque $|\theta| < 1 \Leftrightarrow \theta^2 < 1$

$\Leftrightarrow 1 - \theta^2 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} > 0$

$\Rightarrow$ tableau de signe pour étudier la fonction d'autocorrélation entre X_t, X_{t-1} soit ρ_1.

θ	-1	1
$\frac{\partial \rho_1}{\partial \theta_1}$	+	
ρ_1	$-\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{1}{2}$

$|\rho_1| < \frac{1}{2}$; $\forall |\theta| < 1$ $\exists$ une faible corrélation entre X_t et X_{t-1} pour un processus moyenne mobile $MA(1)$ car on a $-\frac{1}{2} < \rho_1 < \frac{1}{2}$.

Exercice n°3 : On considère le modèle suivant $X_t = \frac{1}{6} X_{t-1} + \frac{1}{6} X_{t-2} + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim BB$.

1/ Préciser la nature de ce processus

2/ Le processus, y-est-il stationnaire et inversible ? Justifier la réponse.

3/ Calculer le coefficient d'autocorrélation ρ_1

4/ Ecrire les équations Yule-Walker et calculer les coefficients d'autocorrélation d'ordre 2 et

1/ $X_t \sim AR(2)$ avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{6}$

2/ * Condition d'inversibilité : tout processus AR est inversible d'après le théorème de Wold

* Condition de stationnarité : $X_t = \frac{1}{6} L X_t + \frac{1}{6} L^2 X_t + \varepsilon_t$

$$\boxed{L X_t = X_{t-1}}$$

$\Leftrightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{1}{6}L - \frac{1}{6}L^2\right)} \cdot X_t = \varepsilon_t$

$A(L)$: polynôme de retard du ~~polynôme~~ second degré

$A(L) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{6}L - \frac{1}{6}L^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$L_1 = 2$ et $L_2 = -3$

$|L_1| > 1$ et $|L_2| > 1 \Rightarrow \{x_t\}$ est stationnaire

3/ $\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} = \frac{1/6}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5} = 0,2$

4/ * Equation de yule-walker :

$$\begin{cases} \rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 & (1) \\ \rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5} = 0,2$

$\forall K \geq 2$, on a : $\rho_K = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2}$

$\Rightarrow \rho_3 = \alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1$

$\Rightarrow \rho_3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

<u>Exercice n°4:</u> Soit le processus $\{X_t\}$ défini par : $X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$

où $\varepsilon_t \rightsquigarrow BB$, on donne $\rho_1 = 0,4$ et $\rho_2 = 0,25$.

1/ Trouver les valeurs de β_1 et β_2

2/ Calculer la stationnarité et l'inversibilité de ce processus.

1/ On a $X_t = -\beta_1 X_{t-1} - \beta_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$.

$\Rightarrow X_t \rightsquigarrow AR(2)$ avec $\begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 \\ \alpha_2 = -\beta_2 \end{cases}$.

* Equations de yule-walker :

$$\begin{cases} \rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 & (1) \\ \rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \alpha_1 = (1-\alpha_2) \cdot \rho_1$

(2) $\Rightarrow \rho_2 = (1-\alpha_2)\rho_1^2 + \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{0,25-(0,4)^2}{1-(0,4)^2}$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0,107 \Rightarrow \beta_2 = -0,107$.

$\alpha_1 = (1 - 0,107) \times 0,4 = 0,357.$

$\Rightarrow \beta_1 = -0,357.$

2/

* Condition d'inversibilité : tout processus AR est inversible selon le théorème de Wold

* Condition de stationnarité : $X_t = 0,357 X_{t-1} + 0,107 X_{t-2} + \varepsilon_t.$

$\Leftrightarrow \underbrace{(1 - 0,357 L - 0,107 L^2)}_{} X_t = \varepsilon_t$

$A(L)$: polynôme de retard.

$A(L) = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0,555$

$L_1 = 1,813$; $|L_1| > 1$

$L_2 = -5,15$ $|L_2| > 1$

$\Rightarrow \{X_t\}$ est un processus stationnaire.