Devoir surveillé de 2ème année - Recherche Opérationnelle

Ines Abdeljaoued Tej - inestej@gmail.com

Cette épreuve contient 4 pages et 3 questions. Vérifiez qu'aucune page ne manque. Prenez le temps de bien lire les questions. On appréciera les réponses claires et concises. Les algorithmes et les démonstrations doivent êtres présentés avec soin. L'épreuve comprend trois exercices. Aucun document n'est autorisé.

1. (3 points) L'entreprise «TunTex», spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose à son catalogue d'ordinateurs des entaines de référence. Pour simplifier, on ne s'intéresse ici qu'à deux types d'ordinateurs : le TX1 et TX2. Chacun d'eux comporte un processeur - le même - mais les deux modèls diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires. Plus préciséement, le TX1 comporte 2 barrettes alors que le TX2 en comporte 6. Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes. Compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 400 TND sur le TX1 et de 800 TND sur le TX2. Donnez les différentes contraintes du problème ainsi que la nature du problème et la fonction objectif.

Solution: Parmi la centaine de référence d'ordinateurs, on ne s'intéresse qu'à deux types. On note x_1 le nombre d'ordinateurs de type TX1 et x_2 le nombre d'ordinateurs de type $TX2$. La première contrainte concerne le nombre de processeurs disponible, on obtient que

$$x_1 + x_2 \leq 10000.$$

La seconde contrainte porte sur le nombre de barrettes nécessaire à chaque type d'ordinateurs :

$$2x_1 + 6x_2 \leq 48000.$$

Le profit à maximiser est, en TND égal à

$$\max \qquad 400x_1 + 800x_2.$$

Pour être précis, les variables x_1 et x_2 doivent être ≥ 0 avec le caractère entier.

2. (7 points) Considérons le programme linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \min & z = -4x_1 + 6x_2 \\ \text{s/c} & -4x_1 + 6x_2 \geq -12 \\ & 6x_1 - 12x_2 \leq 36 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

   (a) (1 point) Déterminez la forme standard du Programme linéaire (P_L).

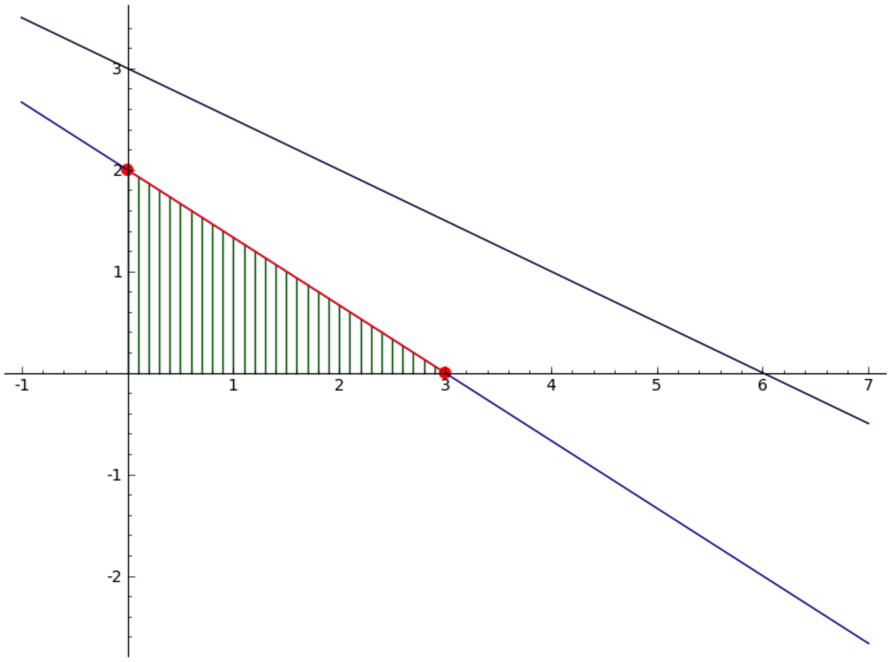
   Solution: La forme standard du programme linéaire est obtenue comme suit : on pose $x_2' = -x_2 \geq 0$, on note que $minz = -max - z$ et on multiplie la première contrainte par (-1) :

$$(P_L) = \begin{cases} \text{- max} & z = 4x_1 + 6x'_2 \\ \text{s/c} & 4x_1 + 6x'_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 12x'_2 \leq 36 \\ & x_1 \geq 0,\ x'_2 \geq 0 \end{cases}$$ On pose $z' = -z$ la valeur de la fonction coût

z est donc l'opposé de la valeur de fonction objectif z'.

(b) (1 point) Donnez la résolution graphique du (P_L) écrit sous forme standard.

Solution:



(c) (3 points) Résoudre (P_L) par la méthode du simplexe.

Solution:

x_B	x_1	x'_2	x_3	x_4	b
x_3	4	6	1	0	12
x_4	6	12	0	1	36
z'	4	6	0	0	0

La variable x_1 entre en base et la variable x_3 sort de base :

x_B	x_1	x'_2	x_3	x_4	b
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3
x_4	0	3	$-\frac{3}{2}$	1	18
z'	0	0	-1	0	-12

La variable x'_2 entre en base et la variable x_1 sort de base :

x_B	x_1	x'_2	x_3	x_4	b
x'_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	2
x_4	2	0	-2	1	12
z'	0	0	-1	0	-12

Le simplexe va osciller entre les deux dictionnaires précédents. On est devant une infinité de solutions comprises entre les points $(3,0)$ et $(0,2)$ pour $z'^* = 12$ ($z* = -12$).

(d) (2 points) Donnez le dual de (P_L) et en déduire sa solution de la question (c).

Solution: Le dual de ce programme linéaire est égal à :

$$(D_L) = \begin{cases} \text{- min} & w' = 12y_1 + 36y_2 \\ \text{s/c} & 4y_1 + 6y_2 \geq 4 \\ & 6y_1 + 12y_2 \geq 6 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

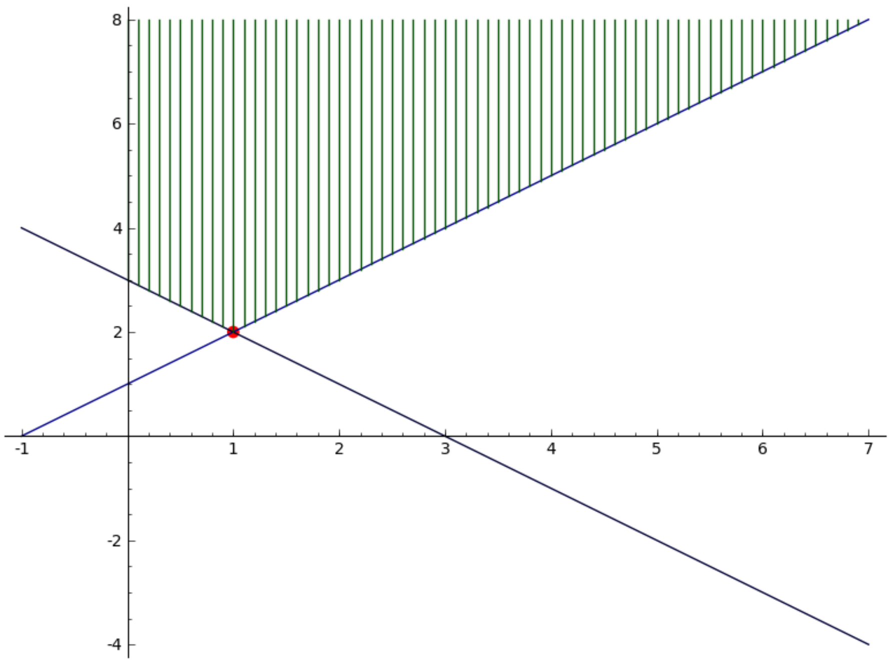
La solution du dual est égal à $y = (1,0)$ avec $w'^* = 12$.

3. (10 points) Considérons le programme linéaire suivant :

$$(Q_L) = \begin{cases} \max & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s/c} & x1 - x_2 \leq -1 \\ & -x1 - x2 \leq -3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) (2 points) Quelle est la solution graphique de (Q_L).

Solution:



(b) (2 points) Ecrire ce programme linéaire sous forme standard avec variables d'écarts. Que pouvez-vous dire concernant la solution de base () ?

Solution: Le programme linéaire avec variables d'écarts est égal à

$$(Q'_L) = \begin{cases} \max & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s/c} & x1 - x_2 + x_3 = -1 \\ & -x1 - x2 + x_4 = -3 \\ & x_i \geq 0 \ \text{ pour } i \in [1..4] \end{cases}$$

La solution $(0, 0, -1, -3)$ n'est pas réalisable.

(c) (2 points) Ajoutez deux variables artificielles et en déduire une solution de base triviale. Le programme linéaire avec variables d'écarts et variables artificielles est égal à

$$(Q"_L) = \begin{cases} \max & z = x_1 - 2x_2 - M(x_5 + x_6) \\ \text{s/c} & x1 - x_2 + x_3 - x_5 = -1 \\ & -x1 - x2 + x_4 - x_6 = -3 \\ & x_i \geq 0 \ \text{ pour } i \in [1..6] \end{cases}$$

La solution $(0, 0, 0, 0, 1, 3)$ est une solution de base réalisable.

(d) (3 points) Résoudre le programme linéaire avec la méthode du Big M.

Solution: On pose $z' = 2x_1 - 2x_2 - M(x_5 + x_6)$. En fonction des variables hors base, $z' = x_1 + (2M - 2)x_2 - Mx_3 - Mx_4 - 4M$.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	-1	1	-1	0	1	0	1
x_6	1	1	0	-1	0	1	3
z'	1	$2M - 2$	$-M$	$-M$	0	0	$4M$

La variable entrant en base est x_1 et celle qui sort de base est x_6 :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_5	0	2	-1	-1	1	1	4
x_1	1	1	0	-1	0	1	3
z'	0	$2M - 3$	$-M$	$-M + 1$	0	-1	$4M - 3$

La variable qui entre en base est x_2, la variable qui sort de base est x_5 :

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	2
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	1
z'	0	0	$-3/2$	$-1/2$	$-M + 3/2$	$-M + 1/2$	3

La solution de base associée au dernier dictionnaire est optimale.

(e) (1 point) Vérifiez que la solution obtenue correspond bien à la solution graphique.

Solution: Une fois éliminée les variables artificielles (ici x_5 et x_6 sont nulles), on obtient que la solution à partir du Big M de Q_L est $x^* = (1, 2)$ avec $z* = -3$.

Ines Abdeljaoued.