ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
1ère année

2022-2023
Suites de VA

Série d'exercices N°1

Exercice 1

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires non indépendantes.
   Montrer que :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j).$$

2. On répartit au hasard en 100 couples un groupe initialement composé de 100 hommes et 100 femmes. Donner une borne supérieure pour la probabilité que moins de 30 des 100 couples ainsi formés soient mixtes.

Exercice 2

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Préciser la covariance des variables Y_n et Y_{n+k} pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$. Montrer que la suite S_n converge en probabilité vers la variable certaine p^2.

Exercice 3

Soient X et X_n des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall\epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) < \infty$$

1. Énoncer le Lemme de Borel-Cantelli
2. Montrer que X_n converge presque sûrement vers X.

Exercice 1 :

1 -

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,cov(X_1, X_2)$

on généralise pour le cas $X_1, \dots, X_n$ V.A dependants

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) + 2 \sum\sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(x_i, x_j)$$

2 -

$X_i \to 1$ mixte
$\quad\searrow 0$ sinon

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 30\right)$$

$$E(x_i) = P(x_i = 1) = \frac{C_{100}^{1}\, C_{100}^{1}}{C_{200}^{2}} = \frac{100}{199}$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq 30 - E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{100^2}{199}\right) \leq 30 - \frac{100^2}{199}\right)$$

$$\leq P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{100^2}{199}\right| \geq \frac{100^2}{199} - 30\right)$$

(Tchebychev

$$\leq \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\left[\frac{100^2}{199} - 30\right]^2}$$

$$Var(x_i) = E(x_i^2) - E^2(x_i)$$

$$E(x_i^2) = P(x_i^2 = 1)$$

$$= P(x_i = 1) = \frac{100}{199}$$

$$Var(x_i) = \frac{100}{199} - \frac{100^2}{199}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = 100\left(\frac{100}{199} - \frac{100^2}{199}\right)$$

$$= 24,993$$

$$cov(x_i, x_j) = E(x_i x_j) - E(x_i)E(x_j)$$

$$E(X_i X_j) = P(X_i X_j = 1)$$
$$= P(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\})$$
$$= \frac{C_{100}^1 C_{100}^1}{C_{200}^2} * \frac{C_{99}^1 C_{99}^1}{C_{198}^2}$$
$$= 0,25253$$

Borne sup $= 0,06$

Exercice 2 :

1) $P(X = 1) = p$

$p(X = 0) = 1 - p$

$$P(Y_n = 1) = P(X_n X_{n+1} = 1)$$
$$= P(X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 1)$$
$$= P(\{X_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 1\})$$
$$= p^2$$

$Y_n \sim B(p^2)$

2) $$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+k}) = E(Y_n, Y_{n+k}) - E(Y_n)E(Y_{n+k})$$
$$= E(X_n X_{n+1}, X_{n+k} X_{n+k+1}) - E(X_n X_{n+1})$$
$$E(X_{n+k} X_{n+k+1})$$

pour $k = 1$

$$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+1}) = E(X_n (X_{n+1})^2 X_{n+2}) - E(X_n X_{n+1}) E(X_{n+1} X_{n+2})$$

$X_i \perp\!\!\!\perp$

$$= E(X_n) E(X_{n+1}^2) E(X_{n+2}) - p^4$$
$$= p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$$

pour $k \geq 2$

$$\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+k}) = E(X_n) E(X_{n+1}) E(X_{n+k}) E(X_{n+k+1}) - p^4$$
$$= p^4 - p^4$$
$$= 0$$

Comportement de la moyenne empirique

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$X_i \perp\!\!\!\perp$ (iid)

Loi forte des grands nombres

$$E(X_1) < +\infty \Rightarrow P(\overline{X}_n \to E(X_1)) = 1$$

Propriété :

$$X_n \xrightarrow{L^2} c$$

ssi

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$$

et $\lim_{n\to\infty} Var(X_n) = 0$

2 -

$$E(S_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(Y_k)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n \cdot p^2 = p^2$$

$$Var(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(Var \sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) + 2\sum\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(Y_i, Y_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n p^2(1-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n} cov(Y_i, Y_{i+1}) + 0\right]$$

$$= \frac{1}{n}p^2(1-p^2) + \frac{2(n-1)}{n^2}p^2(1-p) \longrightarrow 0.$$

$$\lim_{\infty} Var(S_n) = 0$$

$$\lim (S_n) = p^2$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p^2$$

$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} p^2$ donc $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{en prob}} p^2$

Exercice 3 :

1) Voir cours