Solution du problème concernant l'A. C. P. sur dix points

1. $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^1 \\ \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(0+0+1\ldots+1) \\ \frac{1}{10}(0+0+1\ldots+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $Y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $V = Y'D_pY = \frac{1}{10}Y'Y = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$

4. $V\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Posons $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; on a $\| u \|_{\mathrm{Id}}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(1^2+1^2) = 1$, donc u est bien un vecteur axial factoriel.

5. $\lambda = 1$

6. $I_T = \mathrm{tr}\,(VM) = 1.2$

7. $\tau = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$

8. Il n'y a que deux axes factoriel, donc l'autre valeur propre est égale à 0.2, et par conséquent Δu est le premier axe factoriel.

9. Posons $u^1 = u$ et $u^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}'$. On a $(u^2)'\,u^1 = 0$ et $\| u^2 \| = 1$. D'où :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

ce qui équivaut à $y = -x$ et $x^2 + y^2 = 1$. Donc $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ puisque x doit être choisi négatif. Finalement :

$$u^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. $V\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\lambda_2 = \frac{1}{5}$.
On peut vérifier que l'on a bien $\lambda_1 + \lambda_2 = 1.2 = \mathrm{tr}(VM)$.

11. $\tau_2 = \frac{\lambda_2}{I_T} = \frac{1/5}{6/5} = \frac{1}{6}$.

12. Notons r_{jk} la corrélation entre la j^{eme} variable et la k^{eme} composante principale ψ_k. On a :

$$r_{jk} = \frac{y^j\,D_p\psi_k}{s_j} = \frac{\eta_j^k}{s_j} = \frac{\sqrt{\lambda_k}\,u_j^k}{s_j},$$

avec $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/5$ et $s_1 = s_2 = \sqrt{3/5}$. On en déduit :

$$r_{11} = \frac{\sqrt{\lambda_1}\, u_1^1}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{5/3} = \sqrt{5/6} \approx 0.913$$

De même $r_{12} = -1/\sqrt{6} = -0.408$, $r_{21} = \sqrt{5/6} = -0.913$ et $r_{22} = 1/\sqrt{6} = 0.408$.

13. 14. et 15.

Pour ces 3 questions, on utilise les formules suivantes lorsque $k, j \in \{1, 2\}$:

$\mathrm{COR}_k(j) = \frac{\lambda_k}{s_j}\left(u_j^k\right)^2$,

$\mathrm{CTR}_k(j) = m_j\left(u_j^k\right)^2 = \left(u_j^k\right)^2$,

$\mathrm{INR}(j) = \frac{(s_j)^2}{I_T}$ avec $I_T = 6/5$.

D'où :

	u_j^1	u_j^2	s_j^2	$\mathrm{COR}_1(j)$	$\mathrm{COR}_2(j)$	$\mathrm{CTR}_1(j)$	$\mathrm{CTR}_2(j)$	$\mathrm{INR}(j)$
$j = 1$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$3/5$	$5/6$	$1/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$j = 2$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$3/5$	$5/6$	$1/6$	$1/2$	$1/2$	$1/2$

16. 17. 18. et 19.

Pour $k \in \{1, 2\}$ et $i \in \{1, \ldots, 10\}$, on a ici :

$\psi_k^i = y_i' u^k$,

$\mathrm{CTR}_k(i) = \frac{1}{10}\frac{\left(\psi_k^i\right)^2}{\lambda_k}$ avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1/5$,

$\mathrm{COR}_k(i) = \frac{\left(\psi_k^i\right)^2}{\rho^2(i)}$ avec $\rho^2(i) = \left(\psi_1^i\right)^2 + \left(\psi_2^i\right)^2$,

$\mathrm{INR}(i) = \frac{1}{10}\frac{\rho^2(i)}{I_T} = \frac{1}{12}\rho^2(i)$.

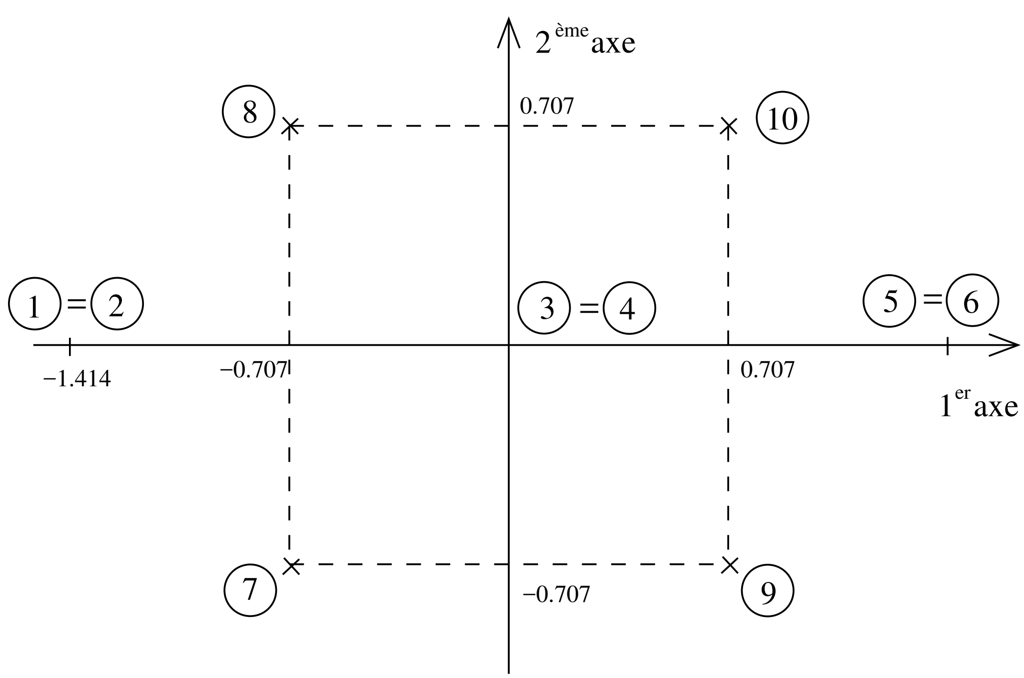
Pour calculer ψ_1 et ψ_2, on pourra utiliser le produit matriciel ci-dessous :

$$\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\end{pmatrix} = Y'\begin{pmatrix}u^1 & u^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}' \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

On en déduit alors les résultats suivants :

ψ_1	ψ_2	$(\psi_1)^2$	$(\psi_2)^2$	ρ^2	CTR_1	CTR_2	COR_1	COR_2	INR
$-\sqrt{2}$	0	2	0	2	0.2	0	1	0	1/6
$-\sqrt{2}$	0	2	0	2	0.2	0	1	0	1/6
0	0	0	0	0	0.2	0	/	/	0
0	0	0	0	0	0.2	0	/	/	0
$\sqrt{2}$	0	2	0	2	0.2	0	1	0	1/6
$\sqrt{2}$	0	2	0	2	0.2	0	1	0	1/6
$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1	0.05	0.25	1/2	1/2	1/12
$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1	0.05	0.25	1/2	1/2	1/12
$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1	0.05	0.25	1/2	1/2	1/12
$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1	0.05	0.25	1/2	1/2	1/12

20. Représentation graphique dans le plan des deux axes factoriels



N.B. Approximations utilisées : $\sqrt{2} \approx 1.414$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$.

COMPLÉMENTS. *Une solution informatique du problème avec R*

Lecture des données :

```
> donPCA <- read.table("don-PCA.txt", header=T)
```

1. Centre de gravité :

```
> g <-mean(donPCA)
```

2. Tableau centré :

```
> matg <- matrix(rep.int(g,10), ncol=2)
> Y <- donPCA - matg
```

3. Matrice variance :

```
> Z <- as.matrix(Y)
> V <- t(Z) \%*\% Z / 10
```

4. On construit le vecteur considéré :

```
> u <- c(1,1)/sqrt(2)
```

On vérifie que u est bien un vecteur axial factoriel :

```
> V \%*\% u
> t(u) \%*\% u
```

5. D'après 4., cette valeur propre vaut 1.
6. Inertie totale :

```
> sum(diag(V))
```

7. Taux d'inertie expliquée par l'axe factoriel :

```
> taux <- 1/sum(diag(V))
```

8. D'après 5. et 6., cet axe est le premier axe factoriel.
9. Second vecteur axial factoriel :

```
> res <- eigen(V)
> res$vectors[,2]
```

10. Valeur propre associée :

```
> res$values[2]
```

11. Taux d'inertie expliquée par cet axe :

```
> Taux2 <- res$values[2]/sum(diag(V))
```

12. 13. 14. et 15.

```
> library(FactoMineR)
> res.donPCA <- PCA(donPCA, scale.unit= FALSE)
> resN.donPCA <- PCA(donPCA)
> res.donPCA$eig
> res.donPCA$var
> resN.donPCA$var
```

16. 17. 18. et 19.

```
> res.donPCA$ind
```