Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U : 2020/2021
$1^{ère}$ Année

Examen
Intégration et Probabilité 1
Session principale

Durée: 1H30

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

YAhia
Chammemi

Exercice 1

1- Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$.
1-a- Montrer que $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.
1-b- Donner un encadrement pour $P(A \cup B)$.
2- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On dit qu'un événement $A \in \mathcal{F}$ est trivial si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. Montrer qur l'ensemble des événements triviaux est une tribu sur Ω.

Exercice 2

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty[$ une fonction μ-intégrable.
1- Montrer que $A = \{x \in E; f(x) = +\infty\}$ est μ-négligeable.
2- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in E; f(x) \geq n\}$.
2-a- Montrer que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} f d\mu = 0.$$

2-b- En déduire que, pourtout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(A_n)$ est finie et $\lim_{n \to +\infty} n\mu(A_n) = 0$.
3- Montrer sur un contre exemple que $\lim_{n \to +\infty} n\mu(A_n) = 0$ n'entraine pas que f est μ-intégrable.

Exercice 3

Soient μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F l'application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par:

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]).$$

1- Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et admet une limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
2- Montrer que $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$; avec $a < b$.
3- Prouver que $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$.
4- Vérifier que F est continue en a si et seulement si, $\mu(\{a\}) = 0$.
5- Soit D l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où F est discontinue.
5-a- Montrer que $D = \bigcup_{n\geq 1} D_n$, avec $D_n = \left\{t \in \mathbb{R} / \mu(\{a\}) \geq \frac{1}{n}\right\}$.
5-b- Déduire que D est au plus dénombrable.

Exercice 4

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
1- On pose

→ loi de Gauss

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ avec } m \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma > 0.$$

Vérifier que la fonction f_{m,σ^2} est une densité de probabilité.
2- Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_{m,σ^2}. Montrer que

$$P(X \leq x + m) = P(X \geq m - x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3- Vérifier que les variables aléatoires $X - m$ et $m - X$ ont même loi.
4- On prend $m = 0$ et $\sigma = 1$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $Y = X^2$.
5- En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(-x)dx.$$