Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

A.U: 2021 - 2022
$1^{ère}$ Année

Session principale

Intégration et probabilité 2

Durée: 1H30.
Documents et calculatrices interdits.
Les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 " Compréhension du cours"

1- Enoncer le théorème de Fubini -Tonelli.
2- Soient λ la mesure de Lebesque sur $[0,1]$ et μ la mesure du comptage sur $[0,1]$ muni de la tribu de toutes ses parties. On définit la fonction f sur $[0,1]\times[0,1]$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x=y \\ 0 & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

2-1- Calculer $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f(x,y)d\mu(y))d\lambda(x)$ et $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y))d\mu(x)$.
2-2- Que constate-t-on? Ce résultat met-il en défaut le théorème de Fubini-Tonelli?
3- Enoncer le théorème de changement de variable.
4- Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{f(x+y)}{x+y} d\lambda(x,y)$

en fonction de $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)d\lambda(x)$.
Indication: on pourra utiliser la difféomorphisme

$$\Phi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longmapsto \ldots$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle continue de densité f_X et Y une variable aléatoire réelle discrète indépendante de X.
1- Montrer que pour toute fonction H continue bornée (resp mesurable positive), on a:

$$E(H(YX)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} p_y E(H(yX)), \ \ p_y = P(Y = y).$$

2- Montrer que si $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^*$, alors la variable aléatoire $Z = XY$ admet une densité que l'on expérimera en fonction de f_X et $(p_y)_{y \in Y(\Omega)}$.
3- Montrer que si $P(Y = 0) > 0$, alors la fonction de répartition de la variable aléatoire Z est discontinue en 0. Que peut-on conclure?
4- Application: on suppose que la variable aléatoire X suit une normale centrée, réduite et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
4-1- Déterminer la loi de Z.
4-2- Calculer la matrice de covariance du vecteur aléatoire $T = \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$.
4-3- Le vecteur aléatoire T est-il gaussien?

Exercice 3

On rappelle que la densité de la loi $\gamma(a, b)$ est

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) 1_{\mathbb{R}_+^*}(x),$$

où a et b sont des constantes réelles strictements positives.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi normale $N(0; 1)$.
Partie 1
On pose $T = X^2$ et $S = Y^2$.
1- Calculer la loi de la variable aléatoire réelle T.
2- Déduire la densité de la variable aléatoire vectorielle (T, S).
3- Calculer la densité de la loi de la variable aléatoire vectorielle $(T + S, \frac{T}{T+S})$.
4- Montrer que $T + S$ et $\frac{T}{T+S}$ sont indépendantes et identifier leur loi.
Partie 2
Soit (U, V) le vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$,où ρ est une constante réelle.
5- Vérifier que le vecteur aléatoire $(X + \alpha Y, \beta_1 X + \beta_2 Y)$ est un vecteur gaussien, où α, β_1 et β_2 sont des constantes réelles.
6- Caractériser la loi du vecteur aléatoire $(X + \alpha Y, \beta_1 X + \beta_2 Y)$.
7- Identifier une combinaison $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ telle que la loi du vecteur aléatoire $(X + \alpha Y, \beta_1 X + \beta_2 Y)$ soit identique à celle de (U, V).
8- Calculer $E(\exp(\sigma_1 U + \sigma_2 V))$, où σ_1 et σ_2 sont des constantes reélles.

Examen 2021-2022

Exercice 3

Partie 1

$T = X^2$ et $S = Y^2$

1) $H \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$E(H(T)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\int_0^{+\infty} H(x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} H(y) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(y) \underbrace{\frac{y^{(\frac{1}{2}-1)}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(y)}_{f_{\gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(y)}$$

$\hookrightarrow y = x^2$: bijective de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow x = \sqrt{y}$

$dy = 2x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{2x} = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$\left(= \int_{-\infty}^{+\infty} H(y)\, f_{\gamma(\frac{1}{2};\frac{1}{2})}(y)\, dy. \right)$$

2) $T \hookrightarrow \gamma(a_1, b)$; On a: $f_{(T,S)}(t,s) = f_T(t)\, f_S(s)$ car $T \perp S$
$S \hookrightarrow \gamma(a_2, b)$

S et T sont indépendantes et $a_1 = a_2 = b = \frac{1}{2}$.

3) $H \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; $U = T+S$ et $V = \dfrac{T}{T+S}$

$$\circledast = E\left(H\left(T+S; \frac{T}{T+S}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}_+^{*2}} H\left(t+s, \frac{t}{t+s}\right) \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} t^{a_1-1} s^{a_2-1} e^{-b(t+s)} d\lambda_{\mathbb{R}^2}(t$$

$\varphi : D = \mathbb{R}_+^{*2} \longrightarrow \Delta = \mathbb{R}_+^* \times]0;1[$.

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} u = t+s \\ v = \dfrac{t}{t+s} \end{cases}$$

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{s}{(t+s)^2} & \frac{-t}{(t+s)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow J_\varphi = \frac{-1}{t+s} \Rightarrow |J_\varphi| = \frac{1}{u}$$

th de changement de variable appliqué

$$\Rightarrow \circledast = \int_D L(\varphi(t,s))\, |J_\varphi|\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}(t,s) \overset{\downarrow}{=} \int_\Delta L(u,v)\, d\lambda_{\mathbb{R}^2}(u,v).$$

$$\hookrightarrow L(u,v) = H(u,v) \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} (uv)^{a_1-1} (1-v)^{a_2-1} e^{-bu}.u.$$

$$\begin{cases} t>0 \\ s>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv>0 \\ u(1-v)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u>0 \\ 0<v<1 \end{cases} \Rightarrow s = u-t = u(1-v) \Leftrightarrow (u,v) \in \Delta = \mathbb{R}_+^* \times]0;1[$$

$$\Rightarrow \circledast = \int_{\mathbb{R}^2} H(u,v) \left(\underbrace{\frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)} u^{a_1+a_2-1} e^{-bu} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(u)}_{f_{\Gamma(a_1+a_2,\ b)}(u)}\right)\left(\underbrace{\frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\underbrace{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}_{B(a_1,a_2)}} v^{a_1-1} (1-v)^{\prime} 1\!\!1_{]0;1[}(v)}_{f_{B(a_1,a_2)}(v)}\right)$$

$\Rightarrow T+S$ et $\frac{T}{T+S}$ sont indépendantes;

$U = T+S \hookrightarrow \gamma(a_1+a_2, b)$

$V = \frac{T}{T+S} \hookrightarrow \beta(a_1, a_2)$

Dans notre cas,

$T+S \hookrightarrow \gamma(1, \frac{1}{2}) = \mathcal{E}(\frac{1}{2})$

$\frac{T}{T+S} \hookrightarrow \beta(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Partie 2

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \hookrightarrow \mathcal{N}_2\left(O_{\mathbb{R}^2}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

5) $$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow \mathcal{N}_2\left(O_{\mathbb{R}^2}, \overset{= C\binom{X}{Y}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+\alpha Y \\ \beta_1 + \beta_2 Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$ ~~A~~ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$.

6) $$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \mathcal{N}_2\left(O_{\mathbb{R}^2}, B\, C\binom{X}{Y} B^T = \mathcal{N}_2(O_{\mathbb{R}^2}, BB^T\right).$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ \alpha & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$BB^T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ \alpha & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \beta_1+\alpha\beta_2 \\ \beta_1+\alpha\beta_2 & \beta_1^2+\beta_2^2 \end{pmatrix} = \Gamma_T \text{ avec } T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \hookrightarrow \mathcal{N}_2(O_{\mathbb{R}^2}, \Gamma_T)}.$$

7) $$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} : \text{mêm loi} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\alpha^2 = 1 \\ \beta_1^2+\beta_2^2 = 1 \\ \beta_1+\alpha\beta_2 = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta_1 = \rho \\ \beta_2^2 = 1-\rho^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta_1 = \rho \\ \beta_2 = \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}}$$

8) $$E(\exp(\sigma_1 U + \sigma_2 V)) = E(\exp(\sigma_1 X + \sigma_2(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}\, Y)))$$

avec $\begin{cases} U = X \\ V = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}\, Y \end{cases}$

$$\Rightarrow E(\exp(\sigma_1 U + \sigma_2 V)) = E\left(\exp((\sigma_1+\rho\sigma_2)X)\, \exp(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\, Y)\right)$$

$$= \Psi_X(\sigma_1+\rho\sigma_2)\, \Psi_Y(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})$$

↳ X et Y sont indépendantes

D'où $$\boxed{E(\exp(\sigma_1 U + \sigma_2 V)) = \exp\left(\frac{(\sigma_1+\rho\sigma_2)^2 + (\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}{2}\right)}$$

Exercice 2

X, v.a.r $\hookrightarrow f_X$; $X \perp Y$.

Y, v.a.r.d.

$\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou bien H, mesurable, positive)

$$E(H(\cancel{YX})) = E\left(H(YX)\mathbb{1}_\Omega\right) = E\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} H(yX)\mathbb{1}_{(Y=y)}\right)$$

$$\hookrightarrow \Omega = \mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_{\bigcup_{y\in Y(\Omega)}(Y=y)} = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{1}_{(Y=y)}$$

Th de convergence monotone

$$E(H(YX)) = \sum_{y\in Y(\Omega)} E\left(H(yX)\mathbb{1}_{(Y=y)}\right) = \sum_{y\in Y(\Omega)} E\left(H(yX)\right)\underbrace{P(Y=y)}_{P_y}$$

. D'où le résu

2) $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^*$

$$E(H(yX)) = \int_{\mathbb{R}} H(yx) f_X(x)\, d\lambda_{\mathbb{R}}(x) \underset{\hookrightarrow z=yx}{=} \int_{\mathbb{R}} H(z) f_X\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{|y|}$$

$Z = XY$.

$$\Rightarrow E(H(Z)) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \int_{\mathbb{R}} H(z)\frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right) P_y \, d\lambda_{\mathbb{R}}(z).$$

$$\boxed{E(H(Z)) \underset{\hookrightarrow \text{Th cm}}{=} \int_{\mathbb{R}} H(z)\underbrace{\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P_y \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right)\right)}_{f_Z(z)} d\lambda_{\mathbb{R}}(z)}$$

D'où $f_Z(y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P_y \frac{1}{|y|} f_X\left(\frac{z}{y}\right)$.

3) $P(Y=0) > 0$.

$$E(H(Z)) = \sum_{y\in Y(\Omega)} E(H(yX))P_y$$

$$= H(0)P_0 + \sum_{y\in Y(\Omega)\setminus\{0\}} E(H(yX))P_y.$$

$$E(H(Z)) = P_0\int_{\mathbb{R}} H(z)\,d\delta_0(z) + \int_{\mathbb{R}} H(z)\sum_{y\in Y(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{1}{|y|}P_y f_X\left(\frac{z}{y}\right) d\lambda_{\mathbb{R}}(z)$$

(0)=0

pas de densité % à mesure de Lebesgue.

$\Delta F_Z(0) = P_0$

Posons $\mu = P_0\delta_0 + \left(\sum_{y\in Y(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{1}{|y|}P_y f_X\left(\frac{z}{y}\right)\right)\lambda_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow E(H(Z)) = \int_{\mathbb{R}} H(z)\,d\mu(z)$, ce qui implique $\underline{P_Z = \mu}$.

4) $X \hookrightarrow N(0,1)$; $P(-1) = P(1) = \frac{1}{2}$

$Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1;1\})$

4-1- $Z = XY \hookrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2}\left(f_X(z) + f_X(-z)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)\right]$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{Z \hookrightarrow N(0,1)}$

4-2 - $G = \begin{pmatrix} \underset{1}{[illegible]} & [illegible] \\ cov(X,Z) & \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{Var(Z)} \end{pmatrix}$

$$cov(X,Z) = E(XZ) - \overset{=0}{E(X)}\,\overset{=0}{E(Z)}$$

$$= E(XXY) \overset{X \text{ et } Y \text{ indépendant}}{=} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{E(Y)}\,\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{E(X^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4-3 - On a : $P(X+Z) = P(X+YX=0) = P((1+Y)X=0) = P((Y=-1) \cup X=0))$

$$= \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}}}{P(Y=-1)} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{P(X=0)}$$

$$P(X+Z) = \frac{1}{2}$$

$X+Z = (1,1)\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ ne suit pas une loi normale.

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ ne ~~suit pas~~ n'est pas un vecteur gaussien.