

- Aucune documentation n'est permise.
- Arrondir tous les calculs au 3^{ème} chiffre après la virgule.
- Nombre de pages : 02 + 02 tables de lois.

EXERCICE 1 : (11 points)

On souhaite estimer une fonction de production du type Cobb-Douglass. On considère donc le modèle de régression linéarisé suivant :

$$y_t = a + bx_t + cz_t + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1, \dots, T.$$

Où :

- y_t est le Log de la production ;
- x_t est le Log du travail ;
- z_t est le Log du capital ;
- ε_t désigne un terme d'erreur vérifiant les hypothèses de la MCO.

On pose : $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_T & z_T \end{pmatrix}$ la matrice des valeurs des variables explicatives y compris la constante.

On donne les informations suivantes :

$$X'X = \begin{pmatrix} 23 & 230 & 115 \\ . & 2312 & 1158 \\ . & . & 587 \end{pmatrix} ; (X'X)^{-1} = \frac{1}{460} \begin{pmatrix} 4045 & -460 & 115 \\ . & 69 & -46 \\ . & . & 69 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 276 \\ 2770 \\ 1388 \end{pmatrix} ; \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 = 10.$$

Soit $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: le vecteur des paramètres du modèle.

- 1) Déterminer $\hat{\beta}$ l'estimateur des MCO de β . Interpréter économiquement les paramètres b et c . (2 points)
- 2) Calculer l'estimateur de σ_ε^2 . (2 points)
- 3) Calculer le coefficient de détermination R^2 et interpréter le résultat. (2 points)
- 4) Déterminer les termes suivants : $\hat{\sigma}_b$, $\hat{\sigma}_c$ et $\widehat{cov}(\hat{b}, \hat{c})$. (2 points)
- 5) Les rendements d'échelle sont-ils constants au seuil de 5% ? Justifier la réponse. (3 points)

EXERCICE 2 : (9 points)

On réalise une étude sur le système de notation des candidats à un concours de recrutement auprès de 3 jurys. On a obtenu le tableau des notes suivant :

Jury A	10	11	11	12	13	15		
Jury B	8	11	11	13	14	15	16	16
Jury C	10	13	14	14	15	16	16	

En supposant que les hypothèses d'indépendance, d'homogénéité et de normalité des résidus (ϵ_{ij}) sont vérifiées, on souhaite vérifier si le système de notation diffère selon le jury. Pour ce faire, on vous demande de :

- 1) Préciser la variable endogène (y) et le facteur (x) ; (1 point)
- 2) Présenter le modèle linéaire statistique ANOVA en définissant ses termes ; (2 points)
- 3) Tracer et compléter le tableau d'analyse de la variance avec les calculs nécessaires ; (4 points)
- 4) Tester, au risque de 1%, l'hypothèse selon laquelle les jurys ont, en moyenne, le même système de notation. (2 points)

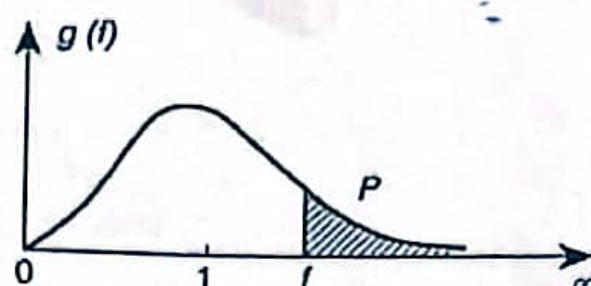
Bon courage

LOI DE STUDENT AVEC n DEGRÉS DE LIBERTÉ

n	α										
	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

TABLE DE LA LOI DE FISHER-SNEDECOR

Valeurs de F ayant la probabilité P d'être dépassées ($F = s_1^2/s_2^2$)



ν_2	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$
1	161,4	4052	199,5	4999	215,7	5403	224,6	5625	230,2	5764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

Nota. — s_1^2 est la plus grande des deux variances estimées, avec ν_1 degrés de liberté.