Corrigé

Corrigé de l'exercice 1 $N = 24000 \qquad n = 300$

1. *Il s'agit d'un sondage aléatoire simple sans remise à probabilités égales.* $\pi_i = \dfrac{300}{24000} = \dfrac{1}{80} = 0.0125$, $\pi_{ij} = \dfrac{300 * 299}{24000 * 23999} = \dfrac{299}{80 * 23999} = 0.15574 \times 10^{-3}$.

2. *C'est un cas de sondage par tirage systématique avec un pas égal à* 80 *à partir du rang* 4. *Cela revient à tirer une seule grappe de taille* 300, *la grappe n°*4.

   Probabilité d'inclusion de l'individu i = probabilité que i fasse partie de la grappe 4.

   $$\pi_i = \pi_{1\ 4} = \frac{1}{80} \quad si\ i \equiv 4\,[mod 80]$$

   $$\pi_{ij} = \begin{cases} \pi_{1\ 4} = \dfrac{1}{80} & si\ i \equiv 4\,[mod 80] \quad et \quad j \equiv 4\,[mod 80] \\ 0 \quad sinon & \end{cases}$$

3. *C'est un sondage stratifié où le nombre de strates est* 3. *Si les tailles respectives des strates sont* N_1, N_2 *et* N_3 *alors les probabilités d'inclusion d'ordre 1 sont*

   $$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{100}{N_1} \ si\ i\ est\ dans\ la\ strate\ 1 \\ \dfrac{100}{N_2} \ si\ i\ est\ dans\ la\ strate\ 2 \\ \dfrac{100}{N_3} \ si\ i\ est\ dans\ la\ strate\ 3 \end{cases}$$

   Les probabilités d'inclusion d'ordre 2 sont

   $$\pi_{ij} = \begin{matrix} \dfrac{100 * 999}{N_i * (N_i - 1)} \ si\ i\ et\ j\ sont\ dans\ la\ même\ strate\ 1 \\ \dfrac{100}{N_i}\dfrac{100}{N_j} \ si\ et\ j\ sont\ dans\ des\ strates\ différentes \end{matrix}$$

Corrigé de l'exercice 2 $n = 100$

Valeur	*Nombre*	*Moyenne*	*Ecart-type*
$[1, 200[$	10000	90	30
$[200, 1000[$	500	500	100
Plus de 1000	70	3000	1250
Total Population	10570	129	273

1. *Un plan de sondage stratifié est aléatoire simple(PESR) dans chaque strate qui attribue la même probabilité d'inclusion à toute les unités. Cela induit une simplicité des expressions de la variance et de son estimateur tout en tenant compte de toutes les catégories.*

2. *Variance intra-strates:*
   $Var_{intra} = \sum_{h=1}^{3} \frac{N_h}{N} \sigma_h^2$
   $Var_{intra} = \frac{10000}{10570} * 30^2 + \frac{500}{10570} * 100^2 + \frac{70}{10570} * 1250^2 = 11672$
   $Var\left(Y\right) = 273^2 = 74529$
   $\frac{Var_{intra}}{Var(Y)} = \frac{11672}{74529} = 0.157$
   La variance intra-strates constitue une faible part de la variable totale. Ceci signifie que les classes telles que constituées sont fortement homogènes.

3. $\widehat{T}_{STRAT} = \sum_{h=1}^{3} N_h \widehat{\overline{Y}}_{h\pi} = \sum_{h=1}^{3} \widehat{T}_{h\pi}$

4. $Var\left(\widehat{T}_{STRAT}\right) = \sum_{h=1}^{3} N_h^2 Var\left(\widehat{\overline{Y}}_{h\pi}\right) = \sum_{h=1}^{3} N_h^2 \frac{1}{n_h}\left(1 - f_h\right) \sigma_{h\ C}^2$

$$\begin{aligned} Var\left(\widehat{T}_{STRAT}\right) &= (10000)^2 \frac{1}{50}\left(1 - \frac{50}{10000}\right) * \sqrt{\frac{10000}{9999}} * 30^2 \\ &\quad + (500)^2 \frac{1}{30}\left(1 - \frac{30}{500}\right) * \sqrt{\frac{500}{499}} * 100^2 \\ &\quad + (70)^2 \frac{1}{20}\left(1 - \frac{20}{70}\right) * \sqrt{\frac{70}{69}} * 1250^2 \\ Var\left(\widehat{T}_{STRAT}\right) &= 2.1449 \times 10^9 \end{aligned}$$

5. $IC_{0.95}(T) = \left[\widehat{T}_{STRAT} - 1.96 * \sqrt{Var\left(\widehat{T}_{STRAT}\right)}\ ;\ \widehat{T}_{STRAT} + 1.96 * \sqrt{Var\left(\widehat{T}_{STRAT}\right)}\right]$

   $IC_{0.95}(T) = \left[\widehat{T}_{STRAT} - 46313\ ;\ \widehat{T}_{STRAT} + 46313\right]$

6. *Allocations proportionnelles :* $\frac{n}{N} = \frac{n_h}{N_h} = f = f_h$

   $\frac{n}{N} = \frac{100}{10570} = \frac{10}{1057}$

   $n_1 = \frac{100}{10570} * 10000 = 94.607$ *soit* 95. $n_2 = \frac{100}{10570} * 500 = 4.7304$ *soit* 4.

   $n_3 = \frac{100}{10570} * 70 = 0.66225$ *soit* 1.

7. *Allocations optimales :* $n_h = \frac{nN_h\sqrt{\sigma^2_{h\ C}}}{\sum\limits_{h=1}^{3} N_h\sqrt{\sigma^2_{h\ C}}}$

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{3} N_h\sqrt{\sigma^2_{h\ C}} &= 10000 * \sqrt{\frac{10000}{9999} * 30} + 500 * \sqrt{\frac{500}{499} * 100} \\ &\quad + 70 * \sqrt{\frac{70}{69} * 1250} \\ \sum_{h=1}^{3} N_h\sqrt{\sigma^2_{h\ C}} &= 300020 + 50050 + 88132 = 438200\end{aligned}$$

   $n_1 = \frac{100*300020}{438200} = 68.4\,66$ *soit* 69 $n_2 = \frac{100*50050}{438200} = 11.422$ *soit* 11

   $n_3 = \frac{100*88132}{438200} = 20.112$ *soit* 20