EXAM 2021/2022

Exercice 1:

X var al dans $\mathbb{R}_+^* \sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$

$X = e^Z$ où $Z \sim N(m, \sigma^2)$

$$\Pi = E[\max(X - \gamma, 0)]$$

$$H(u) = \begin{cases} e^{m+\sigma u} - \gamma & \text{si } e^{m+\sigma u} > \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Vérifier que $\Pi = E[H(Y)]$

$\Pi = E[\max(X - \gamma, 0)]$

$= E[\underbrace{L(X)}]$

$\hookrightarrow L(u) = \begin{cases} x - \gamma & \text{si } x > \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1- Réponse: $X = e^Z$ $\quad Z \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow Z = m + \sigma Y$

où $Y \sim N(0,1)$

$\Pi = E(L(X)) = E(L(e^{m+\sigma Y})) = E[H(Y)]$

2- Méthode MMC

[illegible]

En observant les X_k $(k = 1, \dots, n)$ va iid $\sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$

$L(X)$ est simulable car $X = e^Z$

$Z \sim N(m, \sigma^2)$

$Z = m + \sigma T \quad T \sim N(0,1)$

$T = \sqrt{-2 \log u} \cos(2\pi v)$ avec $u \sim U]0,1[$

$v \sim U]0,1[$

d'après Box-Muller

$\hat{\Pi}_n^{MMC} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L(X_k)$ est un estimateur sans biais de Π fortement consistant

↳ car $\hat{\Pi}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{PPS} \Pi$ d'après la loi LFGN

TLC: $\sqrt{n}(\hat{\Pi}_n^{MMC} - \Pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} N(0, Var(L(X)))$

or $\hat{S}_n^{(2)} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(L(X_k) - \hat{\Pi}_n^{MMC}\right)^2$

$Var(\hat{\Pi}_n) = \frac{Var(L(X_k))}{n}$

d'après

la lemme de Slutsky : $\frac{\sqrt{n}(\hat{\Pi}_n^{MMC} - \Pi)}{\sqrt{\tilde{S}_n^{(2)}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} N(0,1)$

$\left[\hat{\Pi}_n \pm \frac{\sqrt{\tilde{S}_n^{(2)}}}{\sqrt{n}}\, q_{1-\alpha/2}^{N(0,1)}\right]$ est un intervalle de confiance bilatéral symétrique de niveau asymptotique $1-\alpha$

X var à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ $\sim \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$

c.a.d $X = e^Z$ où $Z \sim N(m, \sigma^2)$

En observant les Y_k ($k = 1, \dots, n$) iid $\sim N(0,1)$ (simulable)

$\hat{\Pi}_n^{MMC} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H(Y_k)$ estimateur sans biais de Π fortement consistant.

3] Méthode de la variable antithétique :

$H(y) = \left[e^{m+\sigma y} - \gamma\right] \mathbb{1}_{\{e^{m+\sigma y} > \gamma\}}$

$= (e^{m+\sigma y} - \gamma)\, \mathbb{1}_{\left]\frac{\log\gamma - m}{\sigma}, +\infty\right[}(y)$

est croissant en y

En observant les $(Y_k)_{k=1,\dots,n}$ iid $\sim N(0,1)$

- On prend : $A(u) = -u$, on a $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y)$
$= \mathcal{L}(-Y)$

- De plus : $y \longmapsto H(y)$
$y \longmapsto H(A(y)) = H(-y)$ sont de monotonie contraires

$\rightarrow$ La méthode antithétique est la suivante :

$$\boxed{\hat{\Pi}_n^{Anti} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(H(Y_k) + H(-Y_k))}{2}}$$

est un estimateur Sans biais de I fortement consistant d'après la loi forte des GN LFGN

$$Var(\hat{\Pi}_n^{Anti}) \leq \frac{1}{2}\frac{Var(H(X))}{n}$$
$$= \frac{1}{2} Var(\hat{\Pi}_n^{MMC})$$

De plus $Var(\hat{\Pi}_n^{Anti}) = \frac{1}{4n} Var(H(Y) + H(-Y))$
$$= \frac{1}{4n}(2Var(H(Y)) + 2cov(H(Y), H(-Y)))$$
$$= \frac{1}{2n}(Var(H(Y)) + cov(H(Y), H(-Y)))$$

$\boxed{4}$ Vérifions $\Pi = E(K(Z))$

$$\boxed{K(u) = \begin{cases} e^u - \gamma & \text{si } e^u > \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad Z \sim N(m, \sigma^2)}$$

$$\boxed{L(x) = (x-\gamma)\, \mathbb{1}_{]\gamma,+\infty[}(x)}$$

$\Pi = E[\max(X-\gamma, 0)]$
$= E(L(X))$

$X = e^Z$ où $Z \sim N(m, \sigma^2)$

$= E(L(e^Z)\, \mathbb{1}_{]\gamma,+\infty[}(e^z))$

$e^z > \gamma \Leftrightarrow z > \log\gamma$

$= E((e^z - \gamma)\, \mathbb{1}_{]\log\gamma, +\infty[}(z))$
$= E(K(Z))$

5] Estimateur de π par la méthode d'échant préférentiel.

$$\pi = E(K(Z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z) f_{N(m,\sigma^2)}(z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{K(z)\, f_{N(m,\sigma^2)}(z)}{g(z)}}_{\tilde{K}(z)} g(z)\, dz$$

où g est une densité de proba tq g simulable

$$\operatorname{supp}(K.f) =]\log \gamma ; +\infty[\subseteq \operatorname{supp}(g)$$

$$\hat{\pi}_n^{\text{pref}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\tilde{K}(T_k)}_{\text{une chance}} \quad , \quad (T_k)_{k=1,\dots,n} \text{ i.i.d} \sim g \sim N(m + \log\gamma, \sigma^2)$$

sur 2 que $\tilde{K}(T_k) = 0$

$P(T > \log\gamma) = 1$ càd $\tilde{K}(T_k)$ est presque surement non nulle

$\hat{\pi}_n$

$$T = \log\gamma + S \quad \text{où } S \sim \mathcal{E}(1) \quad S = -\log(u)$$

$$= \log\gamma - \log u \quad \text{où } u \sim U]0,1[$$

$$E(F(T)) = E(F(\log\gamma + S)) = \int_0^{+\infty} F(\log\gamma + s)\, e^{-s}\, ds$$

$$t = \log\gamma + s, \quad dt = ds \quad = \int_{\log\gamma}^{+\infty} F(t)\, e^{-(t - \log\gamma)}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \underbrace{e^{-(t-\log\gamma)} \mathbb{1}_{]\log\gamma, +\infty[}(t)}_{g(t)}\, dt$$

$$\operatorname{supp}(g) =]\log\gamma, +\infty[$$

6] $E(X)$ en fct de m et σ^2

$Z \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

$$E(X^b) = E((e^Z)^b) = E(e^{bZ}) = M_Z(b)$$

M_Z fct génératrice des moments

$$E(e^{uZ}) = M_Z(u) = e^{um + \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

$$\varphi_Z(u) = e^{imu - \frac{u^2\sigma^2}{2}} = E(e^{iuZ})$$

$$M_Z(u) = E(e^{uZ}) = E(e^{i(-iu)Z})$$

$$= \varphi_Z(-iu)$$

$$= e^{mu + \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

$$E(X) = E(e^Z) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$$ = connue explicitement.

7] Méthode de contrôle :

$$\Pi = E(K(Z))$$

$$\Pi = E(K(Z) - b(K_0(Z) - \alpha))$$; où $\alpha = E(K_0(Z))$ connue explici

b = constante

$$\alpha = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$K_0(Z) = e^Z$$

Λ connue

b^* optimal $\boxed{b^* = \frac{\operatorname{cov}(K(Z), K_0(Z))}{\operatorname{Var}(K_0(Z))}}$

Etape 1 : Estimer b^*

$l_n << n$

$$b_n^* = \frac{\frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{l_n} K(X_k) H_0(X_k) - \frac{\alpha}{l_n}\sum_{k=1}^{n} H(X_k)}{\frac{1}{l_n}\sum_{k=1}^{l_n}(K_0(X_k) - \alpha)^2}$$

$\cancel{b_n^* \neq \frac{1}{\ }}$

2ème étape

$$\hat{\Pi}_n^{b_n} = \frac{1}{n - l_n}\sum_{k=l_n+1}^{n} E(K(X_k) - b_n^*(K_0(X_k) - \alpha)) = \Pi$$

Sans biais

Exercice 2 :

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} B_K & \text{si } N > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

N v.a discrète

$N \rightsquigarrow \mathcal{P}(\theta) \quad \theta > 0$

1- $U \rightsquigarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

$$N = -\frac{1}{\theta} \log(V) \qquad V \rightsquigarrow \mathcal{U}(]0,1[)$$

2] Méthode de simulation de B_K

$$B = e^C \quad \text{où } C \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$$

$$= e^{m+\sigma Y} \quad \text{où } Y \rightsquigarrow N(0,1)$$

↳ d'après Box Muller

$$Y = \sqrt{-2\log u}\, \cos(2\pi V)$$

avec $u \rightsquigarrow U(]0,1[)$

$V \rightsquigarrow U(]0,1[)$

3] Estimateur MMC

$$\pi = P(X > \gamma) = E[\mathbb{1}_{(X>\gamma)}]$$

$$\hat{\pi}_n^{MMC} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_k > \gamma)}$$ où les $(X_k)_{k \geq 1}$ iid $\rightsquigarrow X$ simulables

LFGN : $\hat{\pi}_n^{MMC} \xrightarrow[n \to +\infty]{p\text{-}ps} \pi$ alors c'est un estimateur sans biais

Exercice :

$X \sim f(x)$ $\quad M_X(\theta) = E(e^{\theta X})$

$\hookrightarrow$ fct génératrice des moments

$I = P(X > \gamma) = E(\mathbb{1}_{(X>\gamma)}) = E(H(X))$

$H(x) = \mathbb{1}_{]\gamma,+\infty[}(x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x)\, dx$$

$g_\theta(x) = \frac{e^{\theta x}}{M_X(\theta)} f(x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(x) f(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x)\, dx$$

$$I_n^{Pref} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{H(Y_k) f(Y_k)}{g_\theta(Y_k)}, \text{ où } (Y_k)_{k \geq 1} \text{ i.i.d}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\theta(x)\, dx = \frac{1}{M_X(\theta)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f(x)\, dx}_{M_X(\theta)} = 1$$

Ex :

$X \sim \gamma(a,b)$

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

$$g_\theta(x) = C\, x^{a-1} e^{-(b-\theta)x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\cdot)$$

$\Rightarrow g_\theta$ est la densité $\gamma(a, b-\theta)$

$b - \theta > 0 \quad b > \theta$

$\sim g_\theta(x) \sim \gamma(a, b-\theta)$

4]

$A_k = (N = k) \quad k = 0, \dots, K-2$

$A_{K-1} = (N \geq K-1)$

$p_k = P(A_k) \quad k = 0, \dots, K-1$

$\hookrightarrow$ connue explicitement.

Allocation prop $q_k = p_k$

$\pi = E(H(X))$

$= E(\underbrace{E(H(X)/\beta)})$

$\hookrightarrow = \sum_{k=0}^{K-1} E(H(X)/A_k) 1_{A_k}$

$E(H(X)/N = k) = E(H(\sum_{s=0}^{k} B_s))$

$q_k = \frac{n_k}{n} = p_k \quad n_k = [n p_k]$

$\hat{\pi}_n = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{\pi}_{n_k}^{MM.C} \; p_k$

avec $\hat{\pi}_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{s=1}^{n_k} H(X_s^{(k)})$

$X_s^{(k)} \sim \mathcal{L}(X/A_k)$