ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Département Statistique
2ème année

2023-2024
Méthodes de simulation

Correction série d'exercices N°2

Exercice 1

La loi demi-normale de paramètre $\sigma = 1$ a pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner l'algorithme de simulation de la loi de densité f par la méthode de rejet.
2. Donner la probabilité d'acceptation de l'algorithme.

Solution exercice 1

Pour tout $x > 0$, on a donc, en prenant pour g une exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\exp(-x)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2x}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2 - 1}{2}\right) \\ &\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = c \end{aligned}$$

Il est facile de simuler suivant la densité d'une exponentielle $\mathcal{E}(1)$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'algorithme de rejet correspondant est donc :

`Jusqu'à ce que` $U \leqslant \frac{f(X)}{cg(X)} = \exp\left(-\frac{1}{2}(X-1)^2\right)$
`Générer` $X \sim \mathcal{E}(1)$
`Générer` $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
`Sortir` X

Exercice 2

Pour $a > 0$ donné, on désigne par f la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver une constante k telle que kf soit une densité de probabilité.

2. Trouver une constante $c_1 > 1$ telle que $kf(x) \leq \frac{c_1}{a} I_{[0,a]}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Trouver une constante $c_2 > 1$ telle que $kf(x) \leq c_2 I_{[0,+\infty[}(x) e^{-x}; x \in \mathbb{R}$.

4. On veut mettre en place une méthode de rejet pour simuler la loi de densité kf en utilisant la loi uniforme sur $[0,a]$ ou la loi exponentielle de paramètre 1. Laquelle vaut-il mieux choisir ?

Solution exercice 2

Soit $a > 0$ donné et f la fonction $f(x) = \mathbb{I}_{[0,a]}(x)e^{-x}$

1. On calcule $\int_0^a e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$
   Donc, pour que kf soit une densité de probabilité, on prend $k = \frac{1}{1-e^{-a}}$

2. Pour tout $x \in [0, a]$; $e^{-x} \leqslant 1$.
   Donc, on peut prendre $c_1 = ak$ pour que $kf(x) \leqslant c_1 \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}, x \in \mathbb{R}$
3. Pour tout $x \geqslant 0$; $\mathbb{I}_{[0,a]}(x) \leqslant \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$.
   Donc, on peut prendre $c_2 = k$ pour que $kf(x) \leqslant c_2 \mathbb{I}_{[0,+\infty[} e^{-x}, x \in \mathbb{R}$
4. La loi uniforme sur $[0, a]$ a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{a}\mathbb{I}_{[0,a]}(x)$.
   La loi exponentielle de paramètre 1 a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, kf(x) \leqslant ak \times \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}$, (*)
   et on a égalité pour $x = 0$ (donc, on ne trouve pas plus petite constante k' telle que $kf(x) \leqslant k' \frac{\mathbb{I}_{[0,a]}(x)}{a}$.
   La méthode de rejet pour simuler suivant la densité kf (en proposant des variables de loi uniforme sur $[0, a]$) basée sur l'inégalité (*) effectue en moyenne ak opérations.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, kf(x) \leqslant k \times \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$, (**)
   et on a égalité pour $x = 0$ (donc on ne trouve pas plus petite constante k'' telle que $kf(x) \leqslant k'' \times \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$).
   La méthode de rejet pour simuler suivant la densité kf (en proposant des variables de loi uniformes sur $[0, a]$) basée sur l'inégalité (**) effectue en moyenne k opérations.
   Si $a \leqslant 1$, on choisira donc la méthode basée sur (*) et si $a > 1$, on choisira la méthode basée sur (**).