ESSAI
Ecole Supérieure de la Statistique et
de l'Analyse de l'Information de Tunis

1ère année
Durée : 2h00
Avril 2005

Examen du module Analyse Numérique

Exercice (5pt).

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbf{R}$ avec $f(a).f(b) < 0$. Expliquer géométriquement la méthode de la sécante dans la recherche d'une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$.
2. Donner l'ordre de la méthode de Newton pour la recherche d'une racine simple d'une fonction de classe C^2.

Problème (15pt). Nous considérons l'ensemble des points

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1, & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 2, \\ f_0 = -4, & f_1 = -1, & f_2 = -2, & f_3 = 5. \end{array}$$

1. Afin de déterminer une approximation du nuage de points (x_i, f_i) pour i de 0 à 3, calculer la droite de régression linéaire P_0 par la méthode des moindres carrés discrets.

2. Citer deux méthodes permettant de calculer le polynôme de Lagrange.
3. Montrer que les polynômes d'interpolation de Lagrange vérifient $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ pour tout i et $j \neq i$ de 0 à 3.
4. Calculer le polynôme de Lagrange P sur les points (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) et (x_3, f_3).
5. Quelle est la différence entre P et P_0.

6. Vérifier que $P(x_i) = f_i$ pour i de 0 à 3 et montrer qu'il existe une unique racine de P sur l'intervalle $[0, 3]$.
7. Donner le théorème de convergence globale de la méthode de Newton pour une fonction de classe C^2.
8. Calculer la racine de $P(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 3]$ par la méthode de Newton avec $x_0 = 3$. La précision des calculs est à 10^{-6} près.
9. Ecrire l'algorithme de Newton qui prend en entrée les points x_0, $a < b$ et une fonction f et rend la racine de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ ou bien un message d'erreur.

Bon Travail,

Ines Abdeljaoued.