Introduction

Présentation du problème

- On cherche à résoudre l'équation :

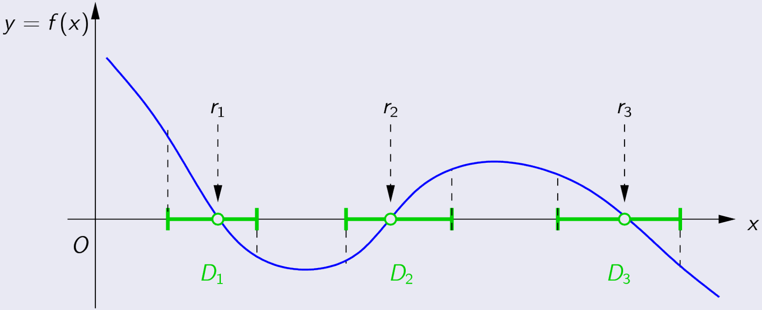
$$f(x) = 0$$

  où $f(x)$ est une fonction réelle à une variable réelle,
- On ne s'intéresse qu'aux racines réelles de l'équation,
- Utilisation d'algorithmes de recherche de racine (*root finding*),
- Dans un premier temps, on détermine un domaine $D = [a; b]$ qui ne contient qu'une seule racine,
- Il est souhaitable – voire nécessaire – que la fonction f soit monotone sur le domaine D.

Introduction

Présentation du problème

Cas pour trois racines r_1, r_2 et r_3 pour trois intervalles D_1, D_2 et D_3.



Méthode dichotomique (bisection)

Principe

- On suppose que le domaine $D = [x_a; x_b]$ contient une et une seule racine r ; on pose $x_1 = x_a$ et $x_2 = x_b$,
- On a $f(x_1) \times f(x_2) < 0$
  On teste le signe de $S = f(x_1) \times f(x_3)$. Si $S < 0$ alors x_1 prend la valeur de x_3 et x_2 reste inchangé
  sinon, x_2 prend la valeur de x_3 et x_1 reste inchangé,
- Itérations successives jusqu'à ce que les valeurs de x_1 et x_2 soient suffisament proches au regard de la précision ε demandée pour l'évaluation numérique de r :

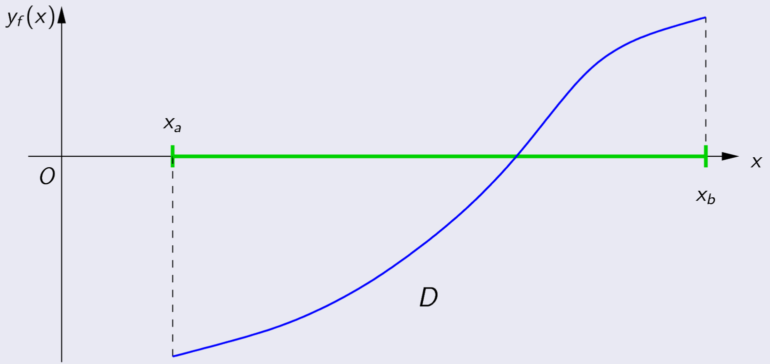
$$r \simeq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

pour

$$\mid x_1 - x_2 \mid < 2\varepsilon$$

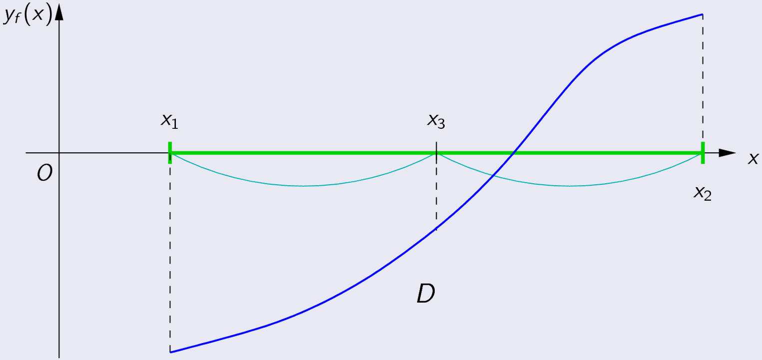
Méthode dichotomique (bisection)

Principe



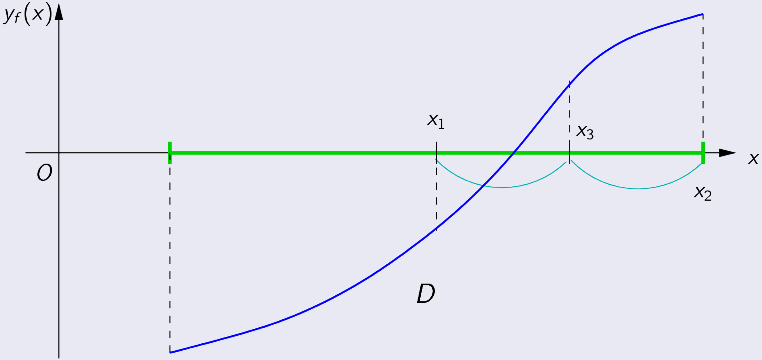
Méthode dichotomique (bisection)

Principe



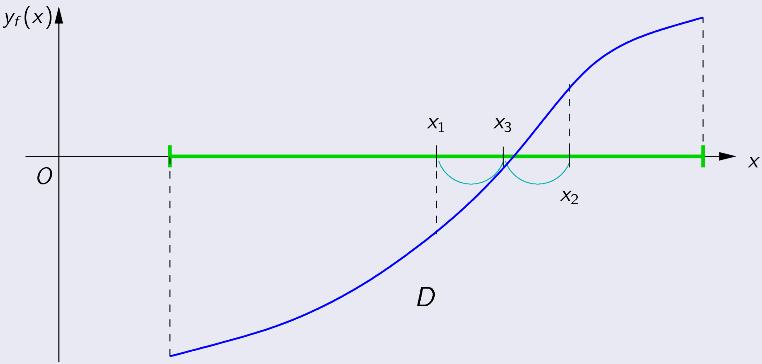
Méthode dichotomique (bisection)

Principe



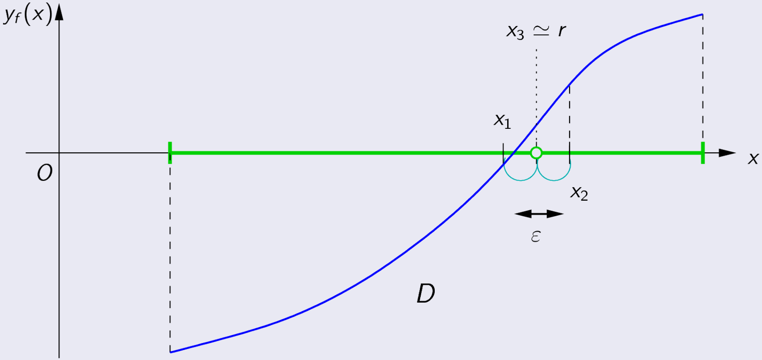
Méthode dichotomique (bisection)

Principe



Méthode dichotomique (bisection)

Principe



Méthode dichotomique (bisection)

Principe

- Méthode sûre : on trouve toujours la solution,
- Lente : nombre d'itérations importante avant de converger vers la racine à la précision souhaitée.

Méthode de Newton

Principe

- Méthode valable lorsqu'on est capable de déterminer la dérivée f' de la fonction f dans le domaine $D = [x_a; x_b]$,
- Développement de Taylor de la fonction f autour d'une valeur x pas trop éloignée de la racine r :

$$f(r) = f(x) + f'(x)(x - r) + \cdots$$

- On cherche :

$$f(r) = 0$$

d'où au premier ordre du développement de Taylor :

$$r \simeq x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de Newton

Principe

- Pour une valeur x_0 donnée, supposée proche de r, il est possible de trouver une valeur x_1 plus proche de r que ne l'est x_0,
- On réitère la procédure plusieurs fois :

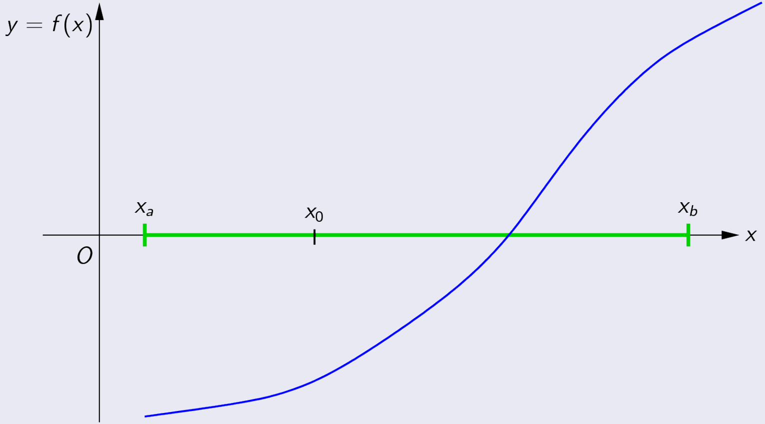
$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned}$$

- Itérations successives au bout de n itérations lorsque :

$$\mid x_n - x_{n-1} \mid < \frac{\varepsilon}{10}$$

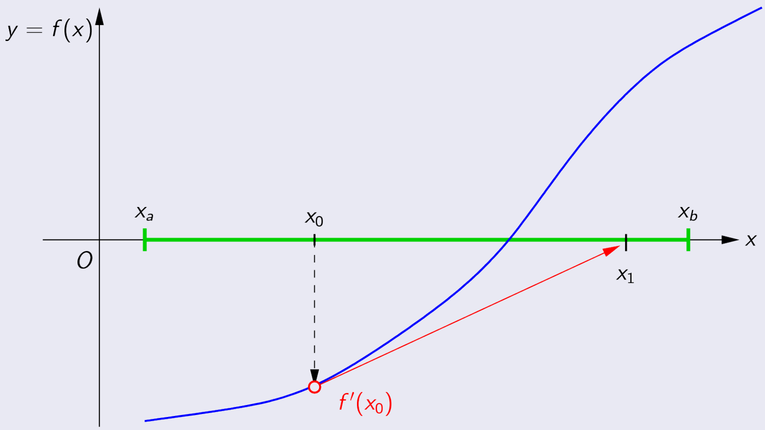
Méthode de Newton

Illustration



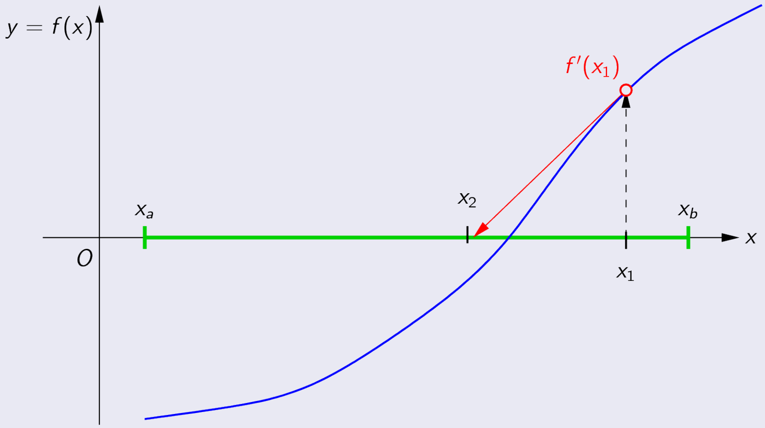
Méthode de Newton

Illustration



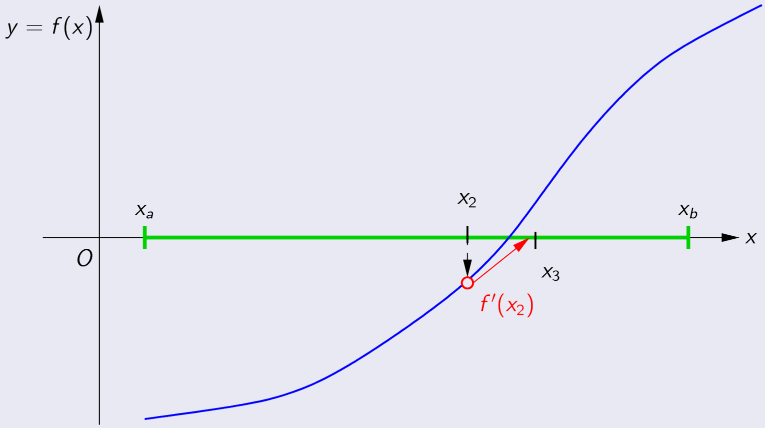
Méthode de Newton

Illustration



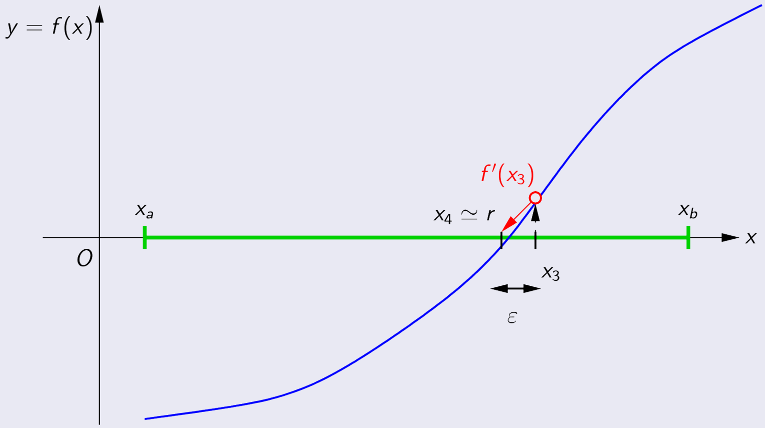
Méthode de Newton

Illustration



Méthode de Newton

Illustration



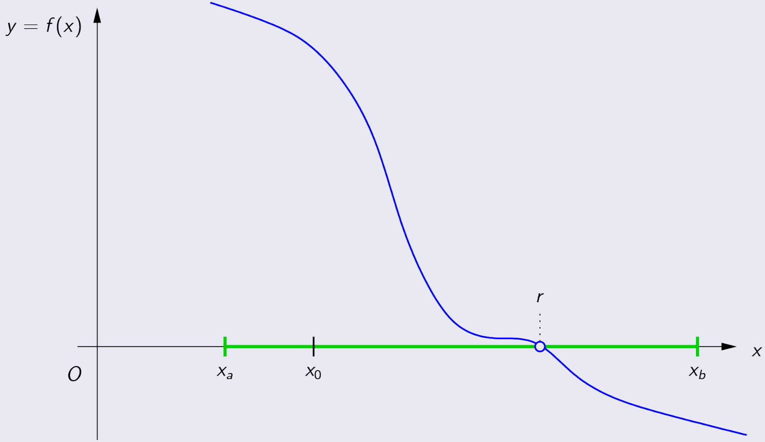
Méthode de Newton

Cas délicats

- Il existe des cas où la différence $x_n - x_{n-1}$ devient inférieure à la précision souhaitée ε alors que $x_n \neq r$ à ε près.
- Conduit à des résultats erronés,
- Illustration :

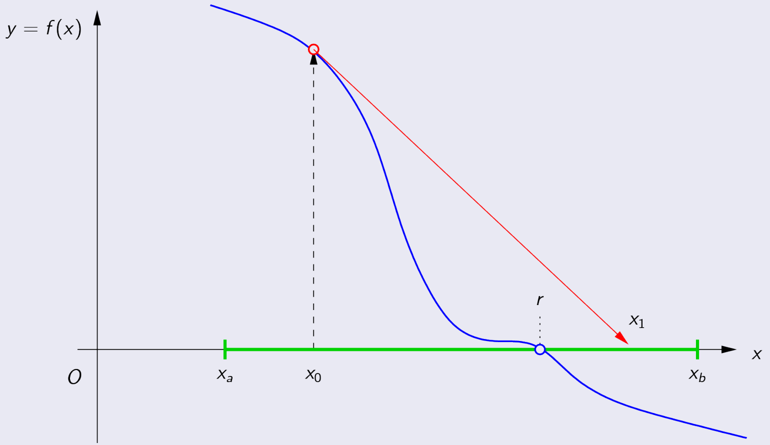
Méthode de Newton

Cas délicats : illustration



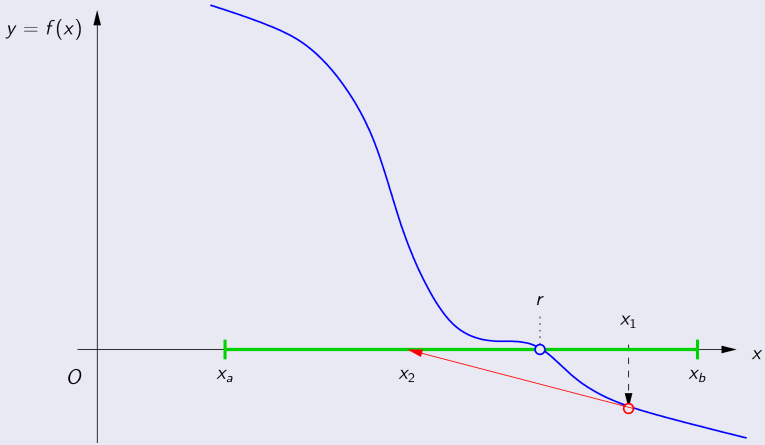
Méthode de Newton

Cas délicats : illustration



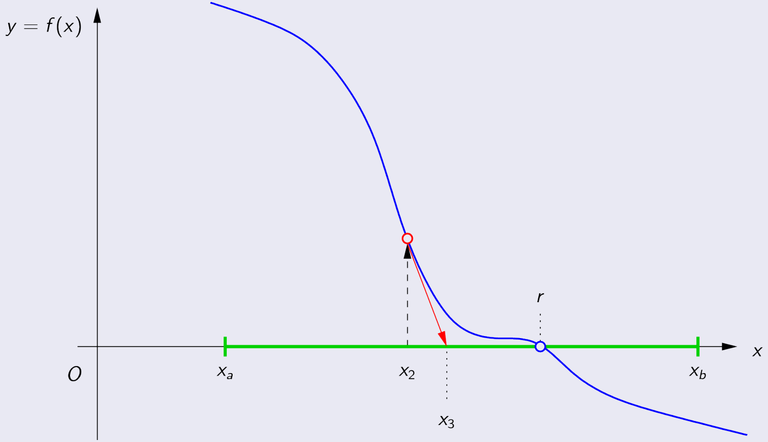
Méthode de Newton

Cas délicats : illustration



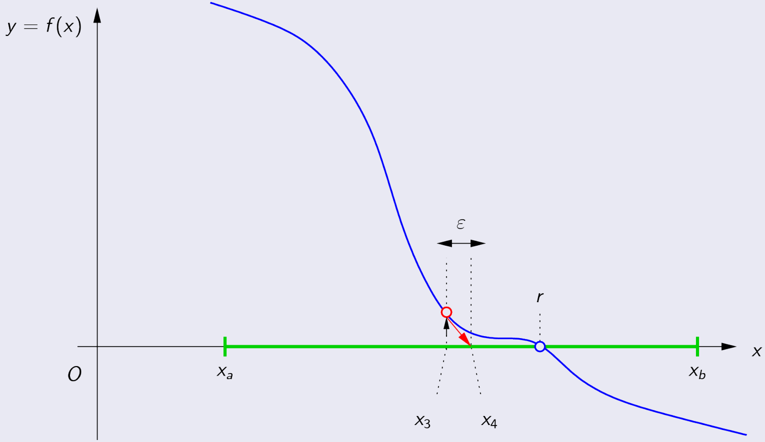
Méthode de Newton

Cas délicats : illustration



Méthode de Newton

Cas délicats : illustration

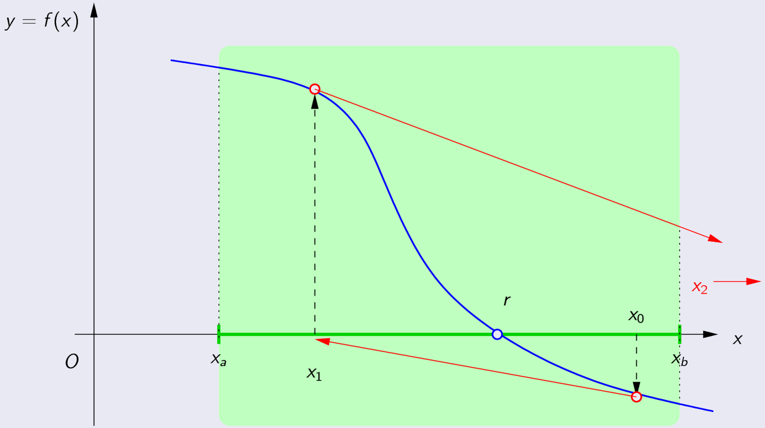


Cas délicats : conclusion

- Existence de points d'inflexion (termes de dérivée seconde) : mise en défaut de la méthode (convergence basée sur un DL au premier ordre),
- Domaine avec fonction monotone : condition non suffisante,
- Solution : réduire la recherche de racine à un domaine plus limité sans points d'inflexion.

Cas délicats : autre type de problème

- Ne jamais laisser l'algorithme « sortir » du domaine initial,
- Illustration :



Conclusion

- Convergence de la méthode non garantie,
- Possibilité de résultat biaisé,
- Précautions nécessaires : choix du domaine de recherche, de la valeur initiale,
- Méthode rapidement convergente.

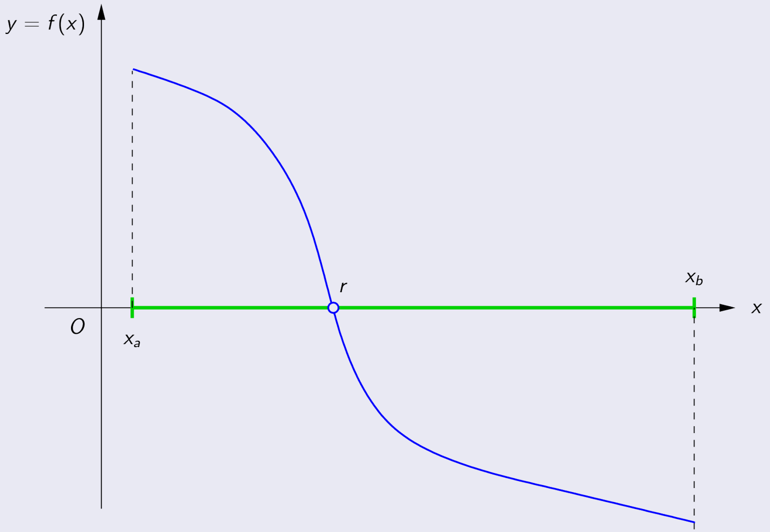
Méthode de la sécante (de Lagrange)

Principe

- Similaire à la méthode de Newton dans le cas où l'on ne connaît pas la dérivée $f'(x)$,
- Elle opère un encadrement de la racine comme pour la dichotomie,
- Une estimation de la dérivée est évaluée en utilisant une méthode de dérivation numérique à partir de deux abscisses x_0 et x_1 encadrant la racine r,
- Intersection x_3 de la corde $M_0 M_1$ avec $0x$, où $M_0 \equiv (x_0, f(x_0))$ et $M_1 \equiv (x_1, f(x_1))$,
- Itérations jusqu'à convergence vers une précision souhaitée.

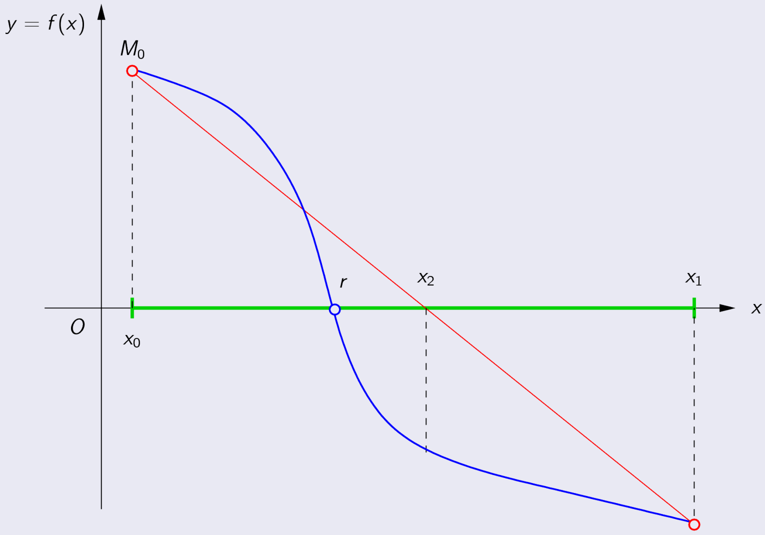
Méthode de la sécante (de Lagrange)

Principe



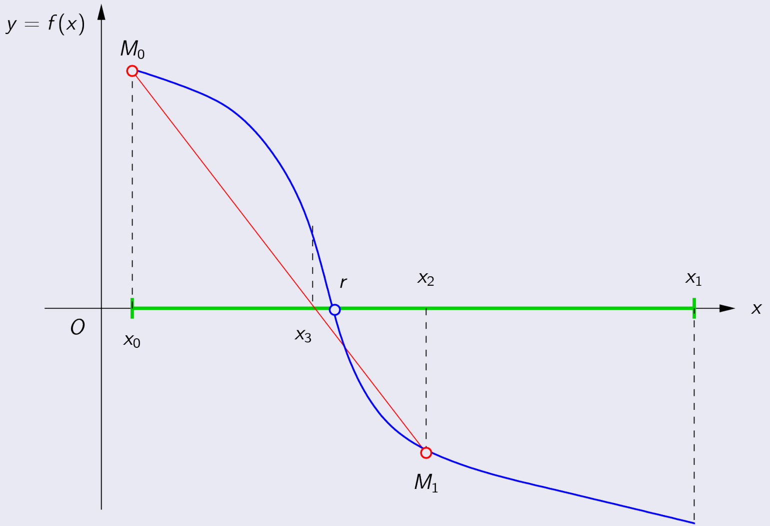
Méthode de la sécante (de Lagrange)

Principe



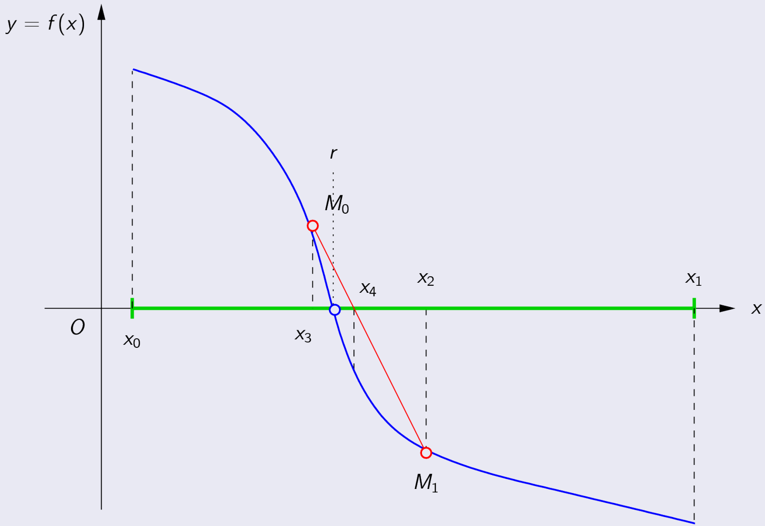
Méthode de la sécante (de Lagrange)

Principe



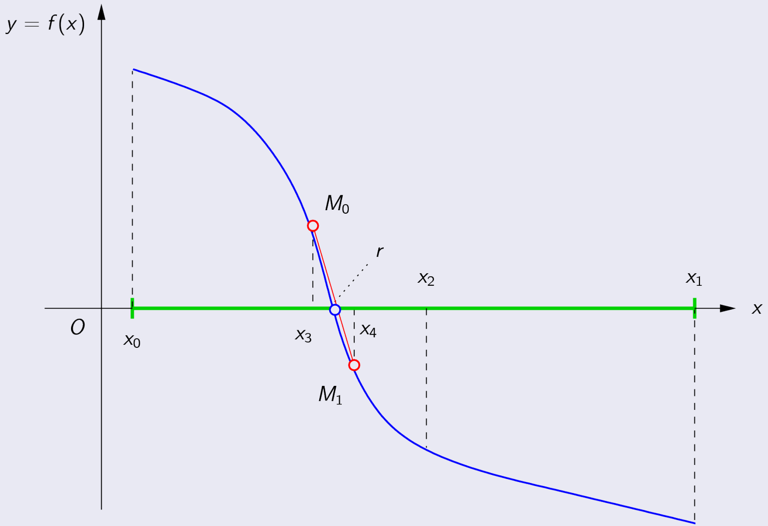
Méthode de la sécante (de Lagrange)

Principe



Méthode de la sécante (de Lagrange)

Principe



Exemple

Comparaison de trois méthodes

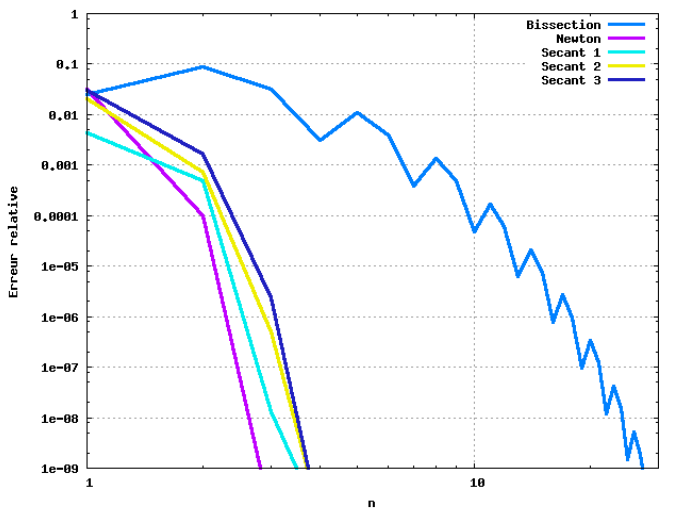
- Equation :

$$\sin(x) = 0$$

avec $x \in [\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}]$,
- Solution analytique connue : $x_r = \pi$,
- Evolution de la précision avec laquelle est évaluée la racine en fonction du nombre n d'itérations pour chaque algorithme,

Exemple

Comparaison de trois méthodes



Conclusion

Différentes méthodes

- Importance du choix de l'intervalle initial,
- Performances :
  - Dichotomie : sure et lente,
  - Newton, Lagrange : rapide, précautions d'utilisation,
- Méthode de dérivation numérique combinée avec recherche de racine : algorithme de recherche d'extrema de fonction.