Université de Carthage
Ecole Supérieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information à Tunis

Année Universitaire
2016-2017
Première Année

Statistique Inférentielle 1
Corrigé de l'Examen Final : mars 2017

Cours de Mme Héla Ouaili-Mallek | Durée 1h30

1. $F(x,\theta) = \left(1+x^{-2}\right)^{-\theta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

   (a) $f(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,\theta) = -\theta\left(1+x^{-2}\right)^{-\theta-1}(-2)\,x^{-3}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

   $f(x,\theta) = \dfrac{2\theta}{x^3}\dfrac{1}{\left(1+x^{-2}\right)^{\theta+1}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

   (b) $f(x,\theta) = \exp\left[\ln 2 + \ln\theta - 3\ln x - (\theta+1)\ln\left(1+x^{-2}\right)\right]\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

   $\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \exp\left[n\ln 2 + n\ln\theta - 3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^{-2}\right)\right]\mathbb{1}_{\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n}(\underline{x})$

   (c) $\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \exp\left[-\theta\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x^{-2}\right) + n\ln\theta - 3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^{-2}\right) + n\ln 2\right]\mathbb{1}_{\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n}(\underline{x}$

   Le modèle appartient donc à la famille exponentielle avec

   $c(\theta) = \theta \qquad T(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x^{-2}\right) \qquad d(\theta) = n\ln\theta$

   $S(\underline{X}) = -3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^{-2}\right) + n\ln 2$ *et* $A = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ *indépendant de* θ.

2. *On a* $\widehat{\lambda}_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+X_i^{-2}\right)$

   (a) $\widehat{\lambda}_1 = -\dfrac{1}{n}T(\underline{X})$.

   On a une famille exponentielle à 1 paramètre sous forme canonique où $\Theta = \mathbb{R}_+^*$ *est un ouvert et* $d : \theta \longmapsto n\ln\theta$ *st 2 fois dérivable, alors* $E_\theta(T(\underline{X})) = -d'(\theta) = -\dfrac{n}{\theta}$*; D'où* $E_\theta\left(\widehat{\lambda}_1\right) = \dfrac{1}{\theta}$ *et* $\widehat{\lambda}_1$ *est donc un estimateur sans biais de* $\dfrac{1}{\theta}$.

   (b) $E_\theta\left(\widehat{\lambda}_1\right) = \lambda \ (0 < \lambda < \infty)$. *De plus,* $\widehat{\lambda}_1 = -\dfrac{1}{n}T(\underline{X})$ *avec* $T(\underline{X})$ *exhaustive complète. Alors, d'après le théorème de Lehmann Scheffe,* $\widehat{\lambda}_1$ *est un estimateur UVMB de* λ.

(c) $Var_\theta\left(T\left(\underline{X}\right)\right)=-d''\left(\theta\right)=\dfrac{n}{\theta^2}<\infty$. *Donc* $\widehat{\lambda}_1$ *est l'estimateur UVMB de* λ.

3. *Etude de l'efficacité*

   Le modèle appartient à la famille exponentielle. Les hypothèses H_1, H_2 *et* H_3 *sont donc valides.*

   (a) $BCR\left(\dfrac{1}{\theta}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)\right)^2}{I_n\left(\theta\right)}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{\theta^2}\right)^2}{nI_1\left(\theta\right)}$

   $I_1\left(\theta\right)=-E\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f\left(X,\theta\right)\right)=-E\left(-\dfrac{1}{\theta^2}\right)=\dfrac{1}{\theta^2}$

   $BCR\left(\dfrac{1}{\theta}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{\theta^4}}{\dfrac{n}{\theta^2}}=\dfrac{1}{n\theta^2}$

   (b) $Var_\theta\left(\widehat{\lambda}_1\right)=Var_\theta\left(-\dfrac{1}{n}T\left(\underline{X}\right)\right)=\dfrac{1}{n^2}Var_\theta\left(T\left(\underline{X}\right)\right)=\dfrac{1}{n\theta^2}=BCR\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$.

   $\widehat{\lambda}_1$ *est donc un estimateur efficace pour son espérance* $\dfrac{1}{\theta}$.

   (c) *Ce résultat était prévisible car le modèle appartient à la famille exponentielle sous forme canonique et l'application* d *est deux fois dérivable par rapport à* θ. *Par conséquent,* $T\left(\underline{X}\right)$ *est efficace pour son espérance* $-\dfrac{n}{\theta}$, *et donc* $\widehat{\lambda}_1=-\dfrac{1}{n}T\left(\underline{X}\right)$ *est efficace pour* $\dfrac{1}{\theta}$.

4. $\widehat{\lambda}_1$ *est un estimateur efficace. Il est donc identique presque sûrement à l'unique estimateur du maximum de vraisemblance,* $\widehat{\lambda}_2$. *On a donc* $\widehat{\lambda}_1=\widehat{\lambda}_2$.

5. $Y=\ln\left(1+X^{-2}\right)$

   (a) *Deux méthodes possibles:*

   - *1ère méthode : Il est évident que* $Y>0$

     $F_Y\left(y\right)=P_\theta\left[Y\leq y\right]=P_\theta\left[\ln\left(1+X^{-2}\right)\leq y\right]=P_\theta\left[X^{-2}\leq\exp y-1\right]$

     $F_Y\left(y\right)=P_\theta\left[X^2\geq\dfrac{1}{\exp y-1}\right]=P_\theta\left[X\geq\dfrac{1}{\sqrt{\exp y-1}}\right]$

     $F_Y\left(y\right)=1-F_X\left(\sqrt{\exp y-1}\right)^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\left(y\right)=\left(1-\exp-\theta y\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\left(y\right)$

     Il s'agit de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre θ. *Conclusion :* $Y\curvearrowright E\left(\theta\right)=\gamma\left(1,\theta\right)$.

   - *2ème méthode : Soit* h *une fonction continue intégrable*

     $$\begin{aligned}E\left[h\left(Y\right)\right]&=E\left[h\left(\ln\left(1+X^{-2}\right)\right)\right]=\int_{\mathbb{R}}h\left(\ln\left(1+x^{-2}\right)\right)f\left(x,\theta\right)dx\\&=\int_0^{+\infty}h\left(\ln\left(1+x^{-2}\right)\right)2\theta x^{-3}\frac{1}{\left(1+x^{-2}\right)^{\theta+1}}dx\end{aligned}$$

     $y=\ln\left(1+x^{-2}\right)\Longrightarrow x^{-2}=\exp y-1\Longrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{\exp y-1}}$

$y=\ln\left(1+x^{-2}\right)\Longrightarrow dy=\dfrac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}}$

D'où

$E\left[h\left(Y\right)\right]=\int_{+\infty}^{0}h\left(y\right)\left(-\theta\right)\exp\left(-\theta y\right)dy=\int_{0}^{+\infty}h\left(y\right)\theta\exp\left(-\theta y\right)dy$

Ainsi, $Y\rightsquigarrow\gamma\left(1,\theta\right)=\mathcal{E}\left(\theta\right)\qquad\theta>0$

(b) *Le moment d'ordre 1 de* Y *est* $m_1=E\left(Y\right)=\dfrac{1}{\theta}=\lambda\Longrightarrow\widehat{\lambda}_3=\widehat{m}_1=\overline{Y}$ *est un estimateur de* λ *par la méthode des moments.*

(c) *Les 3 estimateurs ne font qu'un seul!*