

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Définition de la MSP

La Maîtrise Statistique des Procédés (MSP/Statistical Process Control) est:

- ✓ Un outil permettant de maximiser la qualité d'un produit
 - ✓ une méthode préventive qui vise à amener le processus au niveau de qualité requis et à le maintenir grâce à un système de surveillance.
- Permet au gestionnaire qualité de piloter précisément ses machines.
- L'outil MSP :
- Formalise la notion de capacité
 - Différencie entre les situations ordinaires (ne nécessitant aucune action) de celles anormales (l'opérateur doit intervenir).



La MSP regroupe deux concepts de base :

- Le suivi et le pilotage par les cartes de contrôle
- La mesure de capacité.

► 1

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Notion de variabilité

Aucun procédé n'est capable de produire continuellement et exactement le même produit!

On distingue deux classes de variabilité :

- La variabilité **propre au procédé** (nommée inhérente et est difficilement modifiable) : elle est due à la variation normale du procédé (usure de la machine, jeux mécanique, vibration, etc.).
- La variabilité **externe au procédé** qui résulte des causes spéciales ou particulières et qui doit être corrigée (mauvais calibrage, changement d'opérateur, etc.).

► 2

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Notion de variabilité

La variabilité du processus peut être rattachée à:

Des causes communes / naturelles / aléatoire / non assignable :

- ✓ difficilement maîtrisables, elles sont toujours présentes à des degrés divers dans différents procédés.
- ✓ étant toujours présentes (variabilité intrinsèque au procédés), il faudra «vivre avec »!.
- ✓ Suivent généralement une loi de gauss.

Le but de la MSP sera de ne laisser subsister que les dispersions dues aux causes communes.

Des causes spéciales / assignables / accidentelles:

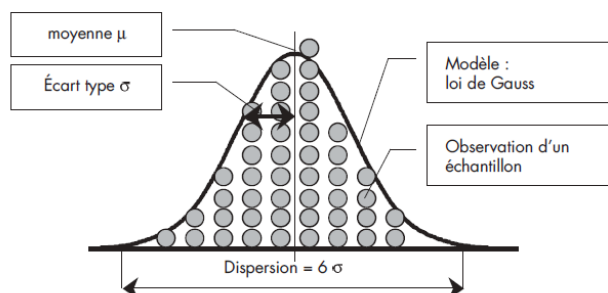
ce sont les causes de dispersion identifiable, souvent irrégulières et instables et par conséquent difficiles à prévoir. L'apparition d'une cause spéciale nécessite une intervention sur le procédé (généralement liée aux 5M).

► 3

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Notion de variabilité

Généralement, les variations aléatoires suivent une loi normale (la courbe en cloche)

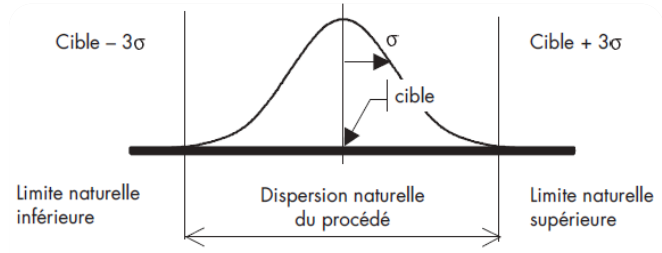


On s'intéresse alors à deux caractéristiques reflétant les causes communes: la moyenne de l'échantillon (\bar{x}) et sa dispersion (σ)

► 4

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Limites naturelles d'un procédé



Si la moyenne est centrée sur la cible, il est naturel de trouver des valeurs comprises entre $+3\sigma$ et -3σ



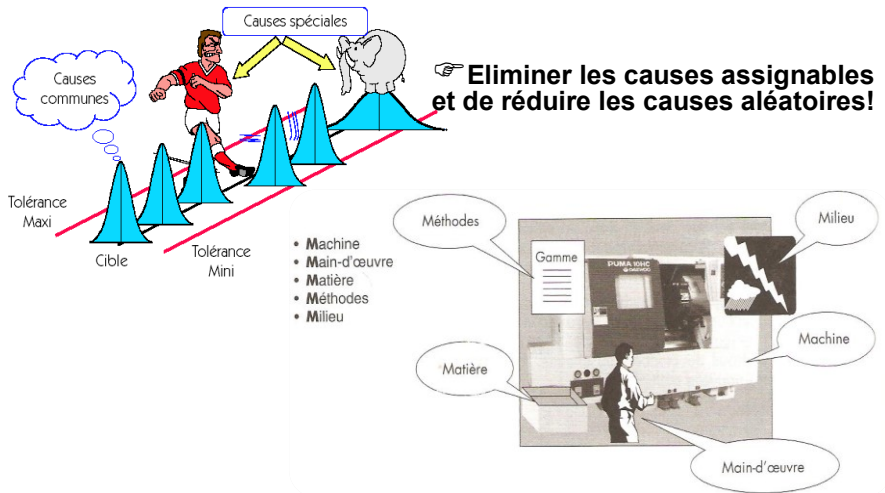
Ne pas agir sur le procédé si la mesure est entre ces deux limites (notre 6σ)

► 5

Adel BRIK

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Causes de la variabilité d'un processus

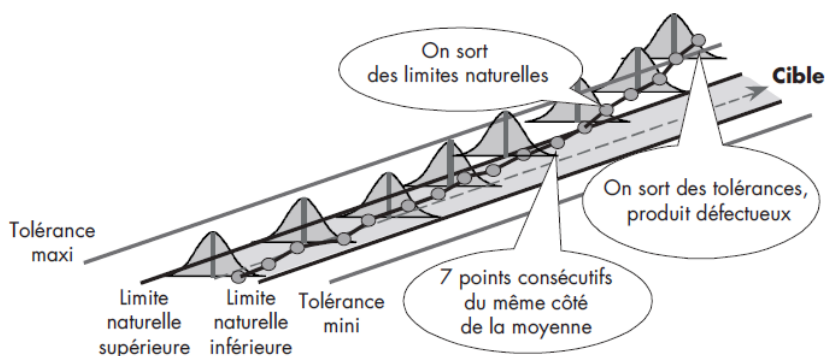


► 6

Adel BRIK

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Pilotage par les limites naturelles d'un procédé



Il est plus avantageux de piloter un procédé par ses limites naturelles que par ses limites de tolérances

► 7

Adel BRIK

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Carte de contrôle moyenne-étendue connus

Une carte de contrôle est un outils utilisé pour visualiser et suivre le comportement d'un procédé

- La limite de contrôle inférieur LCI (ou limite inférieure de contrôle LIC ou Lower Control Limits, LCL):
 - ✓ $LCI = \mu - 3\sigma$
- La limite de contrôle supérieure LCS (ou limite supérieure de contrôle LSC ou Upper Control Limits UCL):
 - ✓ $LCS = \mu + 3\sigma$

L'intervalle $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ contient 99.7 % des données, d'où on a à faire avec 0,3% de pièces non-conformes (voir table de la loi normale centrée réduite)

► 8

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Carte de contrôle moyenne-étendue inconnus

Nommée carte (\bar{X} -R) ou carte de Shewhart, elle est considérée la carte la plus utilisée pour visualiser et suivre le comportement d'un procédé

Carte de moyenne

Soit m échantillons mesurés (On prélève m échantillons chacun de taille n)

La ligne centrale de cette carte s'écrit alors:

$$LC_{\bar{x}} = \hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

L'écart type estimé est calculé par:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad \text{Avec} \quad \bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i \quad ; d_2 \text{ est donnée par la table des constantes ci-après}$$

► 9

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Carte de contrôle moyenne-étendue inconnus

Carte de moyenne

La carte des moyenne \bar{X} est constituée d'une ligne centrale (LC) et des limites de contrôle supérieure (LCS) et inférieure (LCI) suivantes:

$$LCS_{\bar{X}} = \hat{\mu} + 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad , \quad LCI_{\bar{X}} = \hat{\mu} - 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

En posant: $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$



$$LCS_{\bar{X}} = \hat{\mu} + A_2 \times \bar{R} \quad , \quad LCI_{\bar{X}} = \hat{\mu} - A_2 \times \bar{R}$$

Les valeurs de A2 sont données dans le tableau ci-après

► 10

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Carte de contrôle moyenne-étendue inconnus

Carte de l'étendue R

La carte R visualise la variabilité dans les étendues est se trace en se basant sur les formulation suivantes:

$$LC_R = \bar{R} \quad LCS_R = \bar{R} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2} d_3 \quad LCI_R = \bar{R} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2} d_3$$

En posant: $D_3 = sup \left\{ 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, 0 \right\}$ et $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$



$$LCS_R = D_4 \bar{R} \quad , \quad LCI_R = D_3 \bar{R}$$

Les valeurs des différentes constantes sont données dans le tableau ci-après

► 11

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Table de constantes en fonction de n

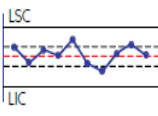
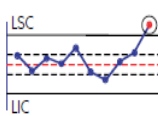
Observations in Sample, n	Chart for Averages					Chart for Standard Deviations					Chart for Ranges					
	Factors for Control Limits			Factors for Center Line		Factors for Control Limits				Factors for Center Line		Factors for Control Limits				
	A	A ₂	A ₃	c ₄	1/c ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	1/d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574
4	1.506	0.729	1.628	0.9201	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541

For n > 25.

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3}$$
$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$$
$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Interprétation des cartes de contrôle

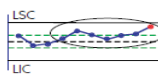
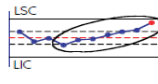
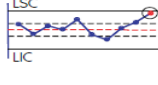
Graphique	Description	Décision carte des moyennes	Décision carte des étendues
	Processus sous contrôle <ul style="list-style-type: none">Les courbes \bar{X} et R oscillent de chaque côté de la moyenne.2/3 des points sont dans le tiers central de la carte.	Production	Production
	Point hors limites <p>Le dernier point tracé a franchi une limite de contrôle.</p>	Régler le processus <p>de la valeur de l'écart qui sépare le point de la valeur cible.</p>	Cas limite supérieure <ul style="list-style-type: none">La capacité court terme se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir.Il y a une erreur de mesure Cas limite inférieure <ul style="list-style-type: none">La capacité court terme s'amélioreLe système de mesure est bloqué

► 13

Adel BRIK

Chap.6 : Maîtrise Statistique des Procédés

Interprétation des cartes de contrôle (suite)

	Tendance supérieure ou inférieure <p>7 points consécutifs sont supérieurs ou inférieurs à la moyenne .</p>	Régler le processus <p>de l'écart moyen qui sépare la tendance à la valeur cible</p>	Cas tendance supérieure <ul style="list-style-type: none">La capacité court terme se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir. Cas tendance inférieure <ul style="list-style-type: none">La capacité court terme s'améliore. Il faut trouver l'origine de cette amélioration pour la maintenir.
	Tendance croissante ou décroissante <p>7 points consécutifs sont en augmentation régulière ou en diminution régulière.</p>	Régler le processus <p>si le dernier point approche les limites de contrôle de l'écart qui sépare le dernier point à la valeur cible</p>	Cas série croissante <ul style="list-style-type: none">La capacité court terme se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir. Cas série décroissante <ul style="list-style-type: none">La capacité court terme s'améliore. Il faut trouver l'origine de cette amélioration pour la maintenir.
	1 point proche des limites <p>Le dernier point tracé se situe dans le 1/6 au bord de la carte de contrôle</p>	Confirmer <p>en prélevant immédiatement un autre échantillon. Si le point revient dans le tiers central – production</p> <p>Si le point est également proche des limites ou hors limites, régler de la valeur moyenne des deux points</p>	Cas limite supérieure Surveiller la capacité <p>Si plusieurs points de la carte sont également proches de la limite supérieure, la capacité se détériore. Il faut trouver l'origine de cette détérioration et intervenir.</p>

En cas de réglage : un nouvel échantillon est mesuré et marqué sur la carte. Pour être acceptable, le point doit se situer dans le tiers central de la carte des moyennes

► 14

Adel BRIK

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Application sur les cartes de contrôle

Soit l’usinage d’un support d’axe réalisé sur TCN. Pendant l’usinage, l’opérateur mesure par échantillonnage (5 pièces toutes les heures), la dimension réalisée $\phi 32f8$, afin d’établir les limites de contrôle de la moyenne et de l’étendue. Le tableau de relevé ci-après présente le prélèvement de 17 échantillons de support d’axe.

- 1/ Calculer les limites de carte de contrôle de la moyenne et de l’étendue
- 2 Tracer la carte provisoire de la moyenne et de l’étendue.

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Application sur les cartes de contrôle

Heure	9	10	11	13	17	18	9	10	11	12	13	16	17	9	10	11	12
X1	51	50	46	52	51	49	50	52	49	47	46	50	48	47	48	48	50
X2	49	47	49	49	48	46	47	48	48	48	47	47	49	49	53	48	44
X3	51	48	52	52	47	51	49	50	49	47	54	45	49	53	52	51	48
X4	46	46	48	48	49	48	43	50	50	49	48	47	50	50	49	46	48
X5	49	47	48	48	49	46	45	46	49	46	46	49	48	49	49	45	49

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Application sur les cartes de contrôle

Heure	9	10	11	13	17	18	9	10	11	12	13	16	17	9	10	11	12
X1	51	50	46	52	51	49	50	52	49	47	46	50	48	47	48	48	50
X2	49	47	49	49	48	46	47	48	48	48	47	47	49	49	53	48	44
X3	51	48	52	52	47	51	49	50	49	47	54	45	49	53	52	51	48
X4	46	46	48	48	49	48	43	50	50	49	48	47	50	50	49	46	48
X5	49	47	48	48	49	46	45	46	49	46	46	49	48	49	49	45	49
\bar{X}	49,20	48	49	50	49	48	47	49	49	47	48	48	49	50	50	48	48
R	5	4	6	4	4	5	7	6	2	3	8	5	2	6	5	6	6

n=5, d2=2,326, A2=0,577, D3=0, D4=2,114

$\bar{R} = 4,94$

$\bar{X} = 48,48$

$\hat{\sigma} = 2,12$

$LCS_{\bar{X}} = 51.33$

$LCS_R = 10.45$

$LCI_{\bar{X}} = 45.63$

$LCI_R = 0$

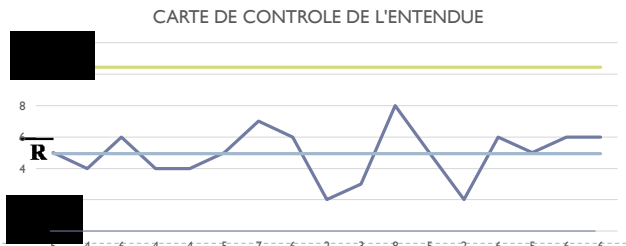
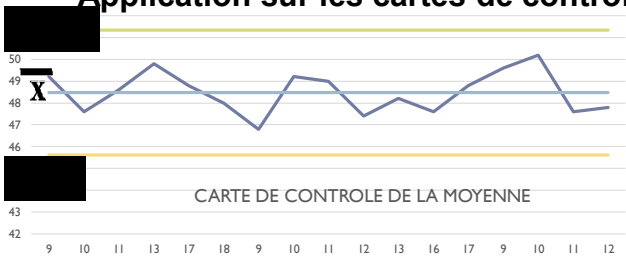
$LC_{\bar{X}} = 48.48$

$LC_R = 4.94$

17

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Application sur les cartes de contrôle



18

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Application sur les cartes de contrôle

Interprétation

- Les courbes \bar{X} et R oscillent de chaque côté de la moyenne.
- 2/3 des points sont dans le tiers central de la carte.



Décision: continuer la production

► 19

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité

- ✓ La **capabilité** permet de **mesurer l'aptitude d'un processus à réaliser** une caractéristique respectant **l'intervalle de tolérance** fixé par le cahier des charges.
- ✓ Elle se traduit par le **rapport entre la performance demandée et la performance réelle** d'un processus
- ✓ Un procédé capable démontre que la qualité de la production respecte l'intervalle de tolérance (IT) donné par le client.
- ✓ **Sa dispersion 6σ doit donc être inférieure à l'intervalle de tolérance (Tolérance Sup. « Ts » – Tolérance Inf. Ti).**

Si la dispersion de la production est juste limitée aux tolérances, à la moindre dérive on risque de produire des non-conformités.

► 20

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

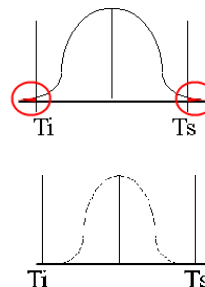
Etude de capacité

Indice de capacité Cp à court terme

Cet indicateur est calculé comme suit:

$$C_p = \frac{IT}{D} = \frac{Ts - Ti}{6\hat{\sigma}_{CT}}$$

Avec: $IT=Ts-Ti$; $D=6\sigma$: dispersion et $\hat{\sigma}_{CT} = \frac{\bar{R}}{d_2}$



✓ Cp est un comparateur de la performance à court terme (courte période de temps) obtenue sur le processus (D) et la performance attendue (IT)

Un processus est considéré à priori capable si IT est supérieur à D

$$C_p > 1.33$$

► 21

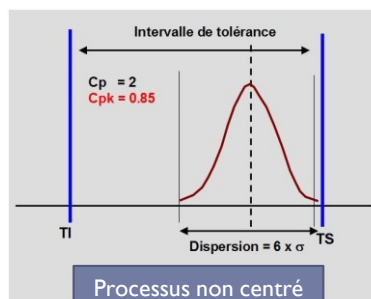
Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capacité

Indice de déréglage ou de centrage Cpk (à court-terme)

Utilisé pour déterminer la position du processus, Cpk est calculé par:

$$C_{pk} = \min \left[\frac{Ts - \bar{x}}{3\hat{\sigma}_{CT}} \text{ et } \frac{\bar{x} - Ti}{3\hat{\sigma}_{CT}} \right]$$

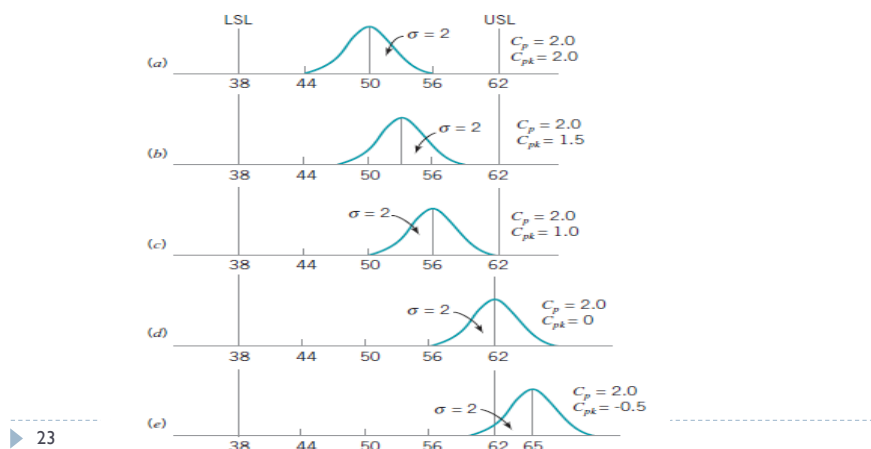


► 22

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité

Indice de déréglage ou de centrage Cpk



► 23

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité

Indice de déréglage ou de centrage Cpk

□ Deux cas de décentrage peuvent se présenter:

- ✓ **Déréglage du coté supérieur à la moyenne**, le processus reste capable tant que $(T_s - \bar{x})$ est supérieur à la distance 3σ
- ✓ **Déréglage du coté inférieur à la moyenne**, le processus reste capable tant que $(\bar{x} - T_i)$ est plus grande que la distance 3σ



processus est **bien centré** entre les limites de spécification

$$C_p = C_{pk} > 1.33$$

Un standard industriel qui indique que le processus est capable de produire des articles conformes dans **99,99% des cas**,

► 24

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité

Capabilité à long terme Pp

- ❑ Se basant sur un ensemble d'échantillons effectués sur une longue période, on cherche à **déterminer la performance à long terme du processus** nommée performance du procédé (Pp) (ou sa capabilité à long terme)

- ❑ Pp est alors calculé par:

$$P_p = \frac{T_s - T_i}{6\hat{\sigma}_{LT}} \quad \hat{\sigma}_{LT} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

► 25

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité

Décentrage à long terme Ppk

- ❑ Ppk est alors calculé par:

$$P_{pk} = \min \left[\frac{T_s - \bar{x}}{3\hat{\sigma}_{LT}} \text{ et } \frac{\bar{x} - T_i}{3\hat{\sigma}_{LT}} \right]$$



Le processus est supposé capable à long terme si Pp et Ppk sont supérieurs à 1,33



Le processus est supposé centré si Pp=Ppk

► 26

Chap.2: Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capacité

- La chute entre Pp et Ppk (ou Cp et Cpk) traduit un dérèglement (un décentrage)
- La chute entre Cp et Pp traduit l'instabilité du processus

Exemple:

Cp pourrait être **élevé** (par exemple **Cp = 1.5**), ce qui signifie que, dans des conditions stables, le processus est capable de produire de manière très conforme.

Cependant, **si le processus est souvent interrompu par des ajustements fréquents ou des pannes**, la **performance globale du processus** pourrait être plus faible.

Dans ce cas, **Pp pourrait être inférieur**, car il inclut ces perturbations externes.

► 27

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capacité

Capabilité basée sur la fonction de perte de Taguchi: C_{pm}

Utilisée lorsque l'on veut que le produit soit non seulement dans les limites de tolérance, mais aussi proche de la valeur idéale (cible)

Permet d'assurer une meilleure performance du produit à long terme.

formulé par :

$$C_{pm} = \frac{(LSS - LSI)}{6\sqrt{\hat{\sigma}_{CT}^2 + (\bar{x} - T)^2}} \quad \text{Avec } T \text{ est la valeur cible (Target).}$$

Si on cherche la performance du procédé à long terme alors:

$$P_{pm} = \frac{(LSS - LSI)}{6\sqrt{\hat{\sigma}_{LT}^2 + (\bar{x} - T)^2}}$$

► 28

Chap.2 : Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité

Synthèse

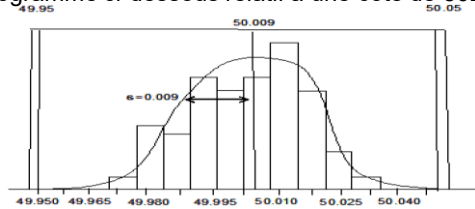
	Capabilité intrinsèque Tolérance/6σ	Vraie capabilité « Centrage » $\text{Min}(\frac{TS - \bar{X}}{3\sigma}, \frac{\bar{X} - TI}{3\sigma})$	Vraie capabilité « Perte » $\frac{\text{Tolérance}}{6\sqrt{\sigma^2 + (\bar{X} - \text{cible})^2}}$
Court terme Capabilité (1/4 d'heure)	Cp	Cpk	Cpm
Long terme Performance (1 semaine)	Pp	Ppk	Ppm

► 29

Chap.2: Maîtrise Statistique des Procédés

Etude de capabilité: exemple

A l'issue d'une production, on prélève aléatoirement des pièces dans le lot fabriqué en un mois. Soit l'histogramme ci-dessous relatif à une cote de 50±0.05:



Calcul et interprétation de la performance du processus:

$Pp = 0.1 / 6 \times 0.009 = 1.85$

$Ppk = (50.05 - 50.009) / (3 \times 0.009) = 1.52$

$Ppm = IT / 6\sqrt{\sigma^2 + (\bar{X} - \text{Cible})^2} = 0.1 / 6\sqrt{0.009^2 + (50.009 - 50)^2} = 1.31$

Le processus est jugé capable car Pp et Ppk > 1,33 mais la chute entre Pp et Ppk traduit un dérèglement (un décentrage)

Cependant le Ppm nous indique un problème de capabilité LT, il nous informe qu'il y a un écart entre la moyenne et la cible: il y a un dérèglement à corriger

► 30