ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Méthodes de simulation
2023-2024(P4)
2ème année

Chapitre 5: Variables antithétiques

Tasnime Hamdeni

May 9, 2024

Sommaire

1- Introduction

1- Introduction

Objectif

La méthode de la variable antithétique a pour objectif de réduire l'erreur d'estimation en utilisant des symétries du problème. Elle s'applique lorsque la loi présente des propriétés d'invariances (e.g., symétrie ou rotation).

Objectif

La méthode de la variable antithétique a pour objectif de réduire l'erreur d'estimation en utilisant des symétries du problème. Elle s'applique lorsque la loi présente des propriétés d'invariances (e.g., symétrie ou rotation).

Autrement dit, on suppose qu'il existe une transformation mesurable $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que $A(X) \sim X$.

2- Méthode de la variable antithétique

2- Méthode de la variable antithétique

Exemple:

Montrer que:

1. Si $U \sim \mathrm{U}([a,b])$, alors $b + a - U \sim \mathrm{U}([a,b])$.
2. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $2\mu - X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2- Méthode de la variable antithétique

Exemple:

Montrer que:

1. Si $U \sim \mathrm{U}([a, b])$, alors $b + a - U \sim \mathrm{U}([a, b])$.
2. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $2\mu - X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Définition

La variable aléatoire $A(X)$ est appelée variable antithétique de X et l'estimateur de la variable antithétique est défini par

$$\hat{\delta}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{h(X_k) + h \circ A(X_k)}{2}$$

où $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X.

2- Méthode de la variable antithétique

Lemme:

Sous les hypothèses ci-dessus,

$$Var\left(\frac{h(X_k) + h \circ A(X_k)}{2}\right) \leq Var\left(h(X_k)\right)$$

Démonstration:

2- Méthode de la variable antithétique

Proposition: Biais de l'estimateur

Les variables aléatoires X et $A(X)$ étant identiquement distribuées, on a $\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h \circ A(X)]$.
On obtient donc que l'estimateur $\hat{\delta}_n$ est sans biais, i.e., $\mathbb{E}[\hat{\delta}_n] = \mathbb{E}[h(X)]$.

2- Méthode de la variable antithétique

Proposition: Biais de l'estimateur

Les variables aléatoires X et $A(X)$ étant identiquement distribuées, on a $\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h \circ A(X)]$.
On obtient donc que l'estimateur $\hat{\delta}_n$ est sans biais, i.e., $\mathbb{E}[\hat{\delta}_n] = \mathbb{E}[h(X)]$.

Proposition: Convergence de l'estimateur

La loi forte des grands nombres pour les suites de variables aléatoires i.i.d. $(h(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h(A(X_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ (et le théorème de continuité) donne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[h(X)]$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(A(X_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[h(A(X))] = \mathbb{E}[h(X)]$$

ce qui implique que $\hat{\delta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[h(X)]$.

2- Méthode de la variable antithétique

Intervalle de confiance

Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1} = (0.5\{h(X_n) + h(A(X_n))\})_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et de variance finie (h étant de carré intégrable).

2- Méthode de la variable antithétique

Intervalle de confiance

Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1} = (0.5\{h(X_n) + h(A(X_n))\})_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et de variance finie (h étant de carré intégrable).
Le théorème central limite donne

$$\sqrt{n}(\hat{\delta}_n - \mathbb{E}[h(X)]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0, \sigma_1^2),$$

avec $\sigma_1^2 = \text{Var}\,[0.5\{h(X) + h(A(X))\}]$.

2- Méthode de la variable antithétique

Intervalle de confiance

Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1} = (0.5\{h(X_n) + h(A(X_n))\})_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et de variance finie (h étant de carré intégrable).
Le théorème central limite donne

$$\sqrt{n}(\hat{\delta}_n - \mathbb{E}[h(X)]) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0, \sigma_1^2),$$

avec $\sigma_1^2 = \text{Var}\left[0.5\{h(X) + h(A(X))\}\right]$.
On en déduit l'intervalle de confiance au niveau de confiance $1-\alpha$, donné par :

$$\begin{aligned} IC_{1-\alpha} &= \left[\hat{\delta}_n - q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\sigma_1^2}}{\sqrt{n}}, \hat{\delta}_n + q_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\sigma_1^2}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[\hat{\delta}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\delta}_n)}, \hat{\delta}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\delta}_n)}\right], \end{aligned}$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

Proposition

On a la condition nécessaire et suffisante suivante

$$\mathrm{Cov}[h(X), h \circ A(X)] < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Var}[\hat{\delta}_n] < \frac{1}{2}\mathrm{Var}[\overline{h_n}]$$

Exemple