Exercice 1

Soient :

- $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$; σ^2 connue; $\eta = \frac{1}{\sigma^2}$
- La loi à priori pour $\mu \hookrightarrow N(\mu_0, \eta_0^{-1})$; avec $\eta_0 = \frac{1}{\sigma_0^2}$

1- Déterminer pour cet exemple la loi à postériori $\pi(./x)$
2- Comparer les espérances et les variances à postériori et à priori.
3- Déterminer $\delta^\pi(X)$ l'estimateur Bayésien avec la fonction perte quadratique.
4- Montrer que pour $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de X on obtient :
$\pi(\mu/x_1, ..., x_n) \propto exp[-\frac{1}{2}(n.\eta + \eta_0)(\mu - \frac{n.\eta\overline{X}_n + \eta_0\mu_0}{n.\eta + \eta_0})^2]$
5- En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$.
6- Déterminer

$$\hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$$

avec $\theta = \mu$.
7- Déterminer $\lim_{n \hookrightarrow +\infty} \hat{\theta}_n^{MAP}(X_1, ..., X_n)$

Notations :

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connue et $\eta = 1/\sigma^2$.
- Loi à priori : $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, avec $\eta_0 = 1/\sigma_0^2$.
- Nous cherchons à déterminer la loi a posteriori, les estimations bayésiennes et les limites.

---

1. Déterminer la loi a posteriori $\pi(\mu \mid x)$:

Loi de probabilité conditionnelle (théorème de Bayes) :

$$\pi(\mu \mid x) \propto \mathcal{L}(x \mid \mu) \cdot \pi(\mu)$$

- Vraisemblance : $\mathcal{L}(x \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$.
- Loi à priori : $\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu-\mu_0)^2\right)$.

Combinaison des termes exponentiels :

$$\pi(\mu \mid x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}(\mu-\mu_0)^2\right)$$

Factorisation de μ :

$$\pi(\mu \mid x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\mu^2\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right) - 2\mu\left(\frac{x}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right) + \text{constante}\right]\right)$$

On reconnaît une densité normale :

$$\pi(\mu \mid x) = \mathcal{N}\left(\mu \mid \mu_{\text{post}}, \sigma^2_{\text{post}}\right)$$

avec :

$$\mu_{\text{post}} = \frac{\frac{x}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}} \quad \text{et} \quad \sigma^2_{\text{post}} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}}$$

En termes de η et η_0 :

$$\mu_{\text{post}} = \frac{\eta x + \eta_0\mu_0}{\eta + \eta_0} \quad \text{et} \quad \sigma^2_{\text{post}} = \frac{1}{\eta + \eta_0}$$

2. Comparer espérances et variances a posteriori et a priori :

- Espérance a priori : $\mathbb{E}[\mu] = \mu_0$.
- Variance a priori : $\mathbb{V}[\mu] = \sigma_0^2 = 1/\eta_0$.
- Espérance a posteriori : $\mathbb{E}[\mu \mid x] = \mu_{\text{post}} = \frac{\eta x + \eta_0 \mu_0}{\eta + \eta_0}$.
- Variance a posteriori : $\mathbb{V}[\mu \mid x] = \sigma_{\text{post}}^2 = \frac{1}{\eta + \eta_0}$.

Comparaison :

1. L'espérance a posteriori est une combinaison pondérée de x et μ_0, influencée par η et η_0.
2. La variance a posteriori est toujours plus petite que la variance a priori ($\sigma_{\text{post}}^2 < \sigma_0^2$), car l'information contenue dans x réduit l'incertitude.

3. Déterminer $\delta_\pi(X)$, l'estimateur bayésien avec la perte quadratique :

Sous une perte quadratique, l'estimateur bayésien est l'espérance a posteriori :

$$\delta_\pi(X) = \mathbb{E}[\mu \mid x] = \mu_{\text{post}} = \frac{\eta x + \eta_0 \mu_0}{\eta + \eta_0}$$

---

4. Montrer la forme donnée pour un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$:

La vraisemblance devient :

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n \mid \mu) \propto \exp\left(-\frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right)$$

Le terme $-\frac{\eta}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ se développe et conduit à :

$$\pi(\mu \mid X_1, \ldots, X_n) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(n\eta + \eta_0)\left[\mu - \frac{n\eta \bar{X} + \eta_0 \mu_0}{n\eta + \eta_0}\right]^2\right)$$

On reconnaît une densité normale avec :

$$\mu_{\text{post}} = \frac{n\eta \bar{X} + \eta_0 \mu_0}{n\eta + \eta_0} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{post}}^2 = \frac{1}{n\eta + \eta_0}$$

---

5. Loi a posteriori pour μ :

$$\pi(\mu \mid X_1, \ldots, X_n) = \mathcal{N}\left(\mu_{\text{post}}, \sigma_{\text{post}}^2\right)$$

6. Déterminer $\theta_n^{\mathrm{MAP}}(X_1, \ldots, X_n)$:

L'estimateur du maximum a posteriori (MAP) maximise la densité a posteriori. Sous une densité normale, il est égal à l'espérance a posteriori :

$$\hat{\theta}_n^{\mathrm{MAP}} = \mu_{\mathrm{post}} = \frac{n\eta\bar{X} + \eta_0\mu_0}{n\eta + \eta_0}$$

---

7. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n^{\mathrm{MAP}}(X_1, \ldots, X_n)$:

Lorsque $n \to \infty$:

- $n\eta \gg \eta_0$, donc $n\eta + \eta_0 \approx n\eta$.
- $\mu_{\mathrm{post}} \approx \frac{n\eta\bar{X}}{n\eta} = \bar{X}$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n^{\mathrm{MAP}} = \bar{X}$$

Exercice 2

Soient :

- $X \hookrightarrow Bn(n, p)$;
- π La loi à priori $\hookrightarrow \pi(u) = \frac{1}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}$

1- Montrer que $f(x, p) = \frac{C_n^x}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} p^{x-\frac{1}{2}}(1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}$

2- Déduire que :

$$m_\pi(x) = \frac{\beta(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2})}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} C_n^x$$

3- En déduire la loi à postériori $\pi(./x)$

4- Déterminer l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

- $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, une variable binomiale avec n essais et probabilité de succès p.
- La loi a priori de p est donnée par une distribution Beta avec paramètres $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$

$$\pi(p) = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} p^{-\frac{1}{2}}(1-p)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{pour } p \in (0, 1),$$

où $\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$ est la fonction Beta.

---

1. Montrer que $f(x, p) = \frac{C_n^x}{\mathrm{B}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} p^{x-\frac{1}{2}}(1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}$

a. Loi conjointe $f(x, p)$:

Par définition de la loi conjointe :

$$f(x, p) = \mathcal{L}(x \mid p) \cdot \pi(p),$$

où $\mathcal{L}(x \mid p)$ est la vraisemblance et $\pi(p)$ est la loi a priori.

où $\mathcal{L}(x \mid p)$ est la vraisemblance et $\pi(p)$ est la loi a priori.

b. Calcul de $\mathcal{L}(x \mid p)$:

La vraisemblance pour $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(x \mid p) = \mathrm{C}_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{où } \mathrm{C}_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

c. Calcul de $f(x, p)$:

En combinant $\mathcal{L}(x \mid p)$ et $\pi(p)$, on a :

$$f(x,p) = \mathcal{L}(x \mid p) \cdot \pi(p) = \mathrm{C}_n^x p^x (1-p)^{n-x} \cdot \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} p^{-\frac{1}{2}} (1-p)^{-\frac{1}{2}}.$$

Simplification :

$$f(x,p) = \frac{\mathrm{C}_n^x}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} p^{x-\frac{1}{2}} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}.$$

2. Déduire que $m_\pi(x) = \frac{\mathrm{B}\left(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \mathrm{C}_n^x$

a. Expression de $m_\pi(x)$:

La fonction marginale $m_\pi(x)$ est définie par :

$$m_\pi(x) = \int_0^1 f(x,p)\, dp.$$

En utilisant l'expression obtenue pour $f(x, p)$:

$$m_\pi(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{C}_n^x}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} p^{x-\frac{1}{2}} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}\, dp.$$

b. Identification d'une intégrale Beta :

L'intégrale $\int_0^1 p^{x-\frac{1}{2}} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}\, dp$ est la définition de la fonction Beta :

$$\int_0^1 p^{x-\frac{1}{2}} (1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}\, dp = \mathrm{B}\left(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2}\right).$$

Substitution dans $m_\pi(x)$:

Substitution dans $m_\pi(x)$:

$$m_\pi(x) = \frac{\mathrm{C}_n^x}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \mathrm{B}\left(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2}\right).$$

---

3. En déduire la loi a posteriori $\pi(p \mid x)$:

a. Expression de la loi a posteriori :

La loi a posteriori est donnée par :

$$\pi(p \mid x) = \frac{f(x, p)}{m_\pi(x)}.$$

Substitution des expressions de $f(x, p)$ et $m_\pi(x)$:

$$\pi(p \mid x) = \frac{\frac{\mathrm{C}_n^x}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} p^{x-\frac{1}{2}}(1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}}{\frac{\mathrm{C}_n^x \cdot \mathrm{B}\left(x+\frac{1}{2}, n-x+\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}}.$$

$$\pi(p \mid x) = \frac{p^{x-\frac{1}{2}}(1-p)^{n-x-\frac{1}{2}}}{\mathrm{B}\left(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2}\right)}.$$

b. Interprétation :

La loi a posteriori de p est une distribution Beta avec paramètres $\alpha = x + \frac{1}{2}$ et $\beta = n - x + \frac{1}{2}$:

$$\pi(p \mid x) = \mathrm{Beta}\left(p \mid x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2}\right).$$

---

4. Déterminer l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique :

a. Estimation bayésienne sous une perte quadratique :

Sous une perte quadratique, l'estimateur bayésien est l'espérance a posteriori :

$$\delta_\pi(X) = \mathbb{E}[p \mid x].$$

Pour une loi Beta $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$, l'espérance est donnée par :

b. Application :

Avec $\alpha = x + \frac{1}{2}$ et $\beta = n - x + \frac{1}{2}$:

$$\delta_\pi(X) = \frac{x + \frac{1}{2}}{n + 1}.$$

Conclusion :

1. La loi a posteriori est $\pi(p \mid x) = \mathrm{Beta}\left(x + \frac{1}{2}, n - x + \frac{1}{2}\right)$.
2. L'estimateur bayésien sous une perte quadratique est :

$$\delta_\pi(X) = \frac{x + \frac{1}{2}}{n + 1}.$$

EXERCICE 3

Soient :

- $X \hookrightarrow N(\theta, \sigma^2)$; σ^2 connue.
- π La loi à priori sur θ de la forme $N(a, b^2)$

1- Déterminer $L(X/\widetilde{\Theta} = \theta)$

2- Déterminer $L(X, \widetilde{\Theta})$

3- Montrer que

$f(x,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma b} exp[-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}(\theta - \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}(\frac{a}{b^2} + \frac{x}{\sigma^2}))^2] exp[-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2}]$

4- Montrer que :

$$m_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+b^2)}} exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2})$$

5- En déduire que $L(\widetilde{\Theta}/X = x) \hookrightarrow N(\frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}(\frac{a}{b^2} + \frac{x}{\sigma^2}), \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2})$

6- Déduire l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

1. Déterminer $\mathcal{L}(X \mid \Theta = \theta)$

La densité conditionnelle $\mathcal{L}(X \mid \Theta = \theta)$, également appelée vraisemblance, est la densité d'une loi normale $N(\theta, \sigma^2)$ donnée par :

$$\mathcal{L}(X \mid \Theta = \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right).$$

---

2. Déterminer $\mathcal{L}(X, \Theta)$

La densité conjointe $\mathcal{L}(X, \Theta)$ s'écrit comme le produit de la vraisemblance et de la loi a priori $\pi(\theta)$, avec $\pi(\theta) \sim N(a, b^2)$. La densité de $\pi(\theta)$ est donnée par :

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left(-\frac{(\theta-a)^2}{2b^2}\right).$$

Ainsi, la densité conjointe est :

$$\mathcal{L}(X, \Theta) = \mathcal{L}(X \mid \Theta = \theta) \cdot \pi(\theta).$$

Substitution des expressions :

$$\mathcal{L}(X,\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left(-\frac{(\theta-a)^2}{2b^2}\right).$$

Simplification :

$$\mathcal{L}(X,\Theta) = \frac{1}{2\pi\sigma b} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-a)^2}{2b^2}\right).$$

---

3. Montrer que :

$$f(x,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma b} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}\left(\theta - \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right)\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2}\right].$$

a. Identifier les termes quadratiques en θ :

À partir de :

$$\mathcal{L}(X,\Theta) = \frac{1}{2\pi\sigma b} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-a)^2}{2b^2}\right),$$

on regroupe les termes en θ :

$$-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-a)^2}{2b^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}\right)\theta^2 + \left(\frac{x}{\sigma^2}+\frac{a}{b^2}\right)\theta - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{a^2}{2b^2}.$$

b. Compléter le carré :

Posons $\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}$ et complétons le carré en θ :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}\right)\theta^2 + \left(\frac{x}{\sigma^2}+\frac{a}{b^2}\right)\theta = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}\left(\theta - \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right)\right)^2 + C,$$

où C est une constante indépendante de θ.

c. Substituer dans $\mathcal{L}(X,\Theta)$:

Ainsi, $\mathcal{L}(X,\Theta)$ devient :

$$\mathcal{L}(X,\Theta) = \frac{1}{2\pi\sigma b} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+b^2}{\sigma^2 b^2}\left(\theta - \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right)\right)^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2}\right].$$

---

4. Montrer que :

$$m_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+b^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2}\right).$$

La fonction marginale $m_\pi(x)$ est obtenue en intégrant $f(x,\theta)$ sur θ :

$$m_\pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(X,\Theta)\, d\theta.$$

Le premier facteur est une densité normale centrée en $\mu = \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right)$ avec une variance $\sigma^2_{\text{post}} = \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}$. Par définition de la densité normale, l'intégrale donne 1. Il reste donc :

$$m_\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+b^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2+b^2}\right).$$

---

5. En déduire que $\mathcal{L}(\Theta \mid X = x) \sim N\left(\mu_{\text{post}}, \sigma^2_{\text{post}}\right)$

Avec $\mu_{\text{post}} = \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right)$ et $\sigma^2_{\text{post}} = \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}$, la loi a posteriori est normale avec les paramètres ci-dessus.

6. Déterminer l'estimateur Bayésien sous perte quadratique

Sous une perte quadratique, l'estimateur bayésien est l'espérance a posteriori :

$$\delta_\pi(X) = \mathbb{E}[\Theta \mid X = x].$$

L'espérance de $\mathcal{L}(\Theta \mid X = x)$ est μ_{post} :

$$\delta_\pi(X) = \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+b^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{x}{\sigma^2}\right).$$

EXERCICE 4

- $X = (X_1, ..., X_n)$ n observations indépendantes distribuées selon la loi $N(\theta, \sigma^2)$; σ^2 connue.
- π La loi à priori sur θ de la forme $\mathbb{N}(a, b^2)$

1- Déterminer $L((X_1, X_2, ..., X_n)/\widetilde{\Theta} = \theta)$

2- Déterminer $L(X_1, X_2, ..., X_n, \widetilde{\Theta})$

3- Montrer que

$f(x_1, ..., x_n, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\sigma^n b} exp[-\frac{1}{2}(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2})(\theta - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{a}{b^2}))^2] exp[-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{a}{b^2})^2)]$

4- En déduire la loi à postériori $L(\widetilde{\Theta}/(X_1, X_2, ..., X_n,) = (x_1, x_2, ..., x_n)) \hookrightarrow N(\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n x_k + \frac{a}{b^2}), \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}})$

5- Montrer que $\delta^\pi(X_1, ..., X_n) = \frac{b^2}{b^2+\frac{\sigma^2}{n}}\overline{X_n} + \frac{\frac{\sigma^2}{n}a}{\frac{\sigma^2}{n}+b^2}$ est l'estimateur Bayésien relatif à la fonction perte quadratique.

1. Déterminer $\mathcal{L}((X_1, \ldots, X_n) \mid \Theta = \theta)$

Les $X_1, \ldots, X_n$ sont des observations indépendantes et identiquement distribuées suivant $N(\theta, \sigma^2)$. La densité conjointe est donc le produit des densités individuelles :

$$\mathcal{L}((X_1, \ldots, X_n) \mid \Theta = \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Simplifions :

$$\mathcal{L}((X_1, \ldots, X_n) \mid \Theta = \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2\right).$$

En développant $(X_i - \theta)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i + n\theta^2.$$

Ainsi :

Ainsi :

$$\mathcal{L}((X_1, \ldots, X_n) \mid \Theta = \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i + n\theta^2\right)\right).$$

---

2. Déterminer $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n, \Theta)$

La densité conjointe est donnée par :

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n, \Theta) = \mathcal{L}((X_1, \ldots, X_n) \mid \Theta = \theta) \cdot \pi(\theta).$$

La loi a priori $\pi(\theta) \sim N(a, b^2)$ a pour densité :

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left(-\frac{(\theta - a)^2}{2b^2}\right).$$

En multipliant les deux termes :

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n, \Theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i + n\theta^2\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \exp\left(-\frac{(\theta - a)^2}{2b^2}\right).$$

Simplifions :

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n, \Theta) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2} \sigma^n b} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n\theta^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sigma^2} - \frac{(\theta - a)^2}{2b^2}\right).$$

---

3. Montrer que $f(x_1, \ldots, x_n, \theta)$ a la forme donnée

Regroupons les termes quadratiques en θ :

Les termes en θ sont :

$$-\frac{n\theta^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sigma^2} - \frac{(\theta - a)^2}{2b^2}.$$

Regroupons les termes quadratiques en θ :

Les termes en θ sont :

$$-\frac{n\theta^2}{2\sigma^2}+\frac{\theta\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma^2}-\frac{(\theta-a)^2}{2b^2}.$$

Développons $(\theta-a)^2$:

$$(\theta-a)^2=\theta^2-2a\theta+a^2.$$

Substituons et regroupons :

$$-\frac{n\theta^2}{2\sigma^2}+\frac{\theta\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma^2}-\frac{\theta^2}{2b^2}+\frac{a\theta}{b^2}-\frac{a^2}{2b^2}.$$

Les termes en θ^2, θ, et les constantes sont :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}\right)\theta^2+\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma^2}+\frac{a}{b^2}\right)\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\sigma^2}\right).$$

Complétons le carré :

Pour θ, le coefficient du carré est $\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}$. Complétons le carré :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\theta-\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma^2}+\frac{a}{b^2}}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}\right)^2.$$

Le second terme est une constante et s'obtient par simplification, ce qui donne la forme demandée.

4. Déterminer la loi a posteriori $\mathcal{L}(\Theta \mid X_1,\ldots,X_n)$

La loi a posteriori est $\mathcal{L}(\Theta \mid X_1,\ldots,X_n)$, une densité normale $N(\mu_{\text{post}},\sigma^2_{\text{post}})$.

Les paramètres sont :

$$\mu_{\text{post}}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma^2}+\frac{a}{b^2}}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}},\qquad \sigma^2_{\text{post}}=\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{b^2}}.$$

---

5. Montrer que $\delta_\pi(X_1,\ldots,X_n)$ est l'estimateur Bayésien

Sous une perte quadratique, l'estimateur Bayésien est l'espérance a posteriori :

$$\delta_\pi(X_1,\ldots,X_n)=\mu_{\text{post}}.$$

Substituons μ_{post} dans une forme pondérée :

$$\mu_{\text{post}}=\frac{b^2}{b^2+\sigma^2/n}\bar{X}+\frac{\sigma^2/n}{b^2+\sigma^2/n}a.$$

Ceci montre que $\delta_\pi(X_1,\ldots,X_n)$ est une moyenne pondérée entre $\bar{X}$ et a, ce qui correspond exactement à :

$$\delta_\pi(X_1,\ldots,X_n)=\frac{b^2}{b^2+\sigma^2/n}\bar{X}+\frac{\sigma^2/n}{b^2+\sigma^2/n}a.$$

EXXXXXXXXXXXXXAAAAAAAAAAAAMMMMMMMMMM

Exercice 1

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 est connue et que l'on cherche à estimer $\theta = \mu$.

- Déterminer la loi de |à priori de Jeffreys.
- Montrer que $\pi(\mu/x_1 \to x_n) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x}_n - \mu)^2\right)$
- En déduire la loi à posteriori $\pi(\mu/x_1 \to x_n)$ associée à la loi à priori de Jeffreys.

1. Déterminer la loi a priori de Jeffreys

Pour une loi normale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connue, le paramètre à estimer est $\theta = \mu$. La loi a priori de Jeffreys est définie par :

$$\pi(\mu) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\mu)},$$

où $\mathcal{I}(\mu)$ est l'information de Fisher pour μ.

L'information de Fisher pour μ est donnée par :

$$\mathcal{I}(\mu) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log \mathcal{L}(X \mid \mu)\right].$$

La log-vraisemblance de X est :

$$\log \mathcal{L}(X \mid \mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Le terme en μ est :

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu^2\right).$$

En différentiant deux fois par rapport à μ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log \mathcal{L}(X \mid \mu) = -\frac{n}{\sigma^2}.$$

Ainsi, $\mathcal{I}(\mu) = \frac{n}{\sigma^2}$, et la loi de Jeffreys devient :

$$\pi(\mu) \propto \sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}.$$

Comme n et σ^2 sont des constantes, la loi de Jeffreys est uniforme :

$$\pi(\mu) \propto 1.$$

2. Montrer que $\pi(\mu \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2\right)$

La loi a posteriori est donnée par :

$$\pi(\mu \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \mu) \cdot \pi(\mu).$$

La vraisemblance conjointe est :

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

En prenant le logarithme :

$$\log \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \mu) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

Développons $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu^2.$$

La vraisemblance devient :

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \mu) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\mu^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right).$$

Avec $\pi(\mu) \propto 1$, la loi a posteriori est proportionnelle à la vraisemblance :

$$\pi(\mu \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2\right),$$

où $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

3. En déduire la loi a posteriori

La loi a posteriori $\pi(\mu \mid x_1, \ldots, x_n)$ est une loi normale $N(\bar{X}, \frac{\sigma^2}{n})$, avec :

$$\mu \sim N\left(\bar{X}, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

EXERCICE 2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon d'une variable aléatoire réelle X de loi normale de moyeme 0 et de variance $\theta > 0$ incomnue.

- Calculer la loi à priori de Jeffreys associé que l'on notera π.
- Détorminer la loi à postérioni assciée à la loi à priori de Jeffreys.

1. Calculer la loi a priori de Jeffreys

Pour $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de $N(0, \theta)$, avec $\theta > 0$, l'objectif est d'estimer θ. La loi de Jeffreys est définie par :

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\theta)},$$

où $\mathcal{I}(\theta)$ est l'information de Fisher.

La log-vraisemblance est :

$$\log \mathcal{L}(X \mid \theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Le terme en θ est :

$$-\frac{n}{2}\log\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

La dérivée seconde par rapport à θ est :

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log \mathcal{L}(X \mid \theta) = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\theta^3}.$$

L'information de Fisher est :

$$\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log \mathcal{L}(X \mid \theta)\right] = \frac{n}{2\theta^2}.$$

Ainsi, la loi de Jeffreys devient :

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{\frac{n}{2\theta^2}} \propto \frac{1}{\theta}.$$

2. Déterminer la loi a posteriori

La loi a posteriori est donnée par :

$$\pi(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) \cdot \pi(\theta).$$

La vraisemblance est :

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\theta}\right).$$

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) \propto \theta^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right).$$

Avec $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$, la loi a posteriori devient :

$$\pi(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) \propto \theta^{-(n/2+1)} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right).$$

EXERCICE :

On reprend l'exemple de l'exercice 4 : c-à-d :

- $X = (X_1, ..., X_n)$ n observations indépendantes distribuées selon la loi $N(\theta, \sigma^2)$; σ^2 connue.
- π La loi à priori sur θ de la forme $\mathbb{N}(a, b^2)$

On pose par la suite :

$$C^{\pi}_{/x}(k) = \{\theta \in \Theta / \pi(\theta/x) \geqslant k\} = [\alpha_k, \beta_k]$$
$$k_\alpha(x) = sup\{k/\mathbb{P}^{\pi}(C^{\pi}_{/x}(k)/X = x) \geq 1 - \alpha\} = [\alpha_{k_\alpha}, \beta_{k_\alpha}]$$

1- Montrer que $\beta_{k_\alpha} = h + \sqrt{z}q^{N(0,1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$, avec a et z sont deux quantités à déterminer.

2- Montrer que $\alpha_{k_\alpha} = h - \sqrt{z}q^{N(0,1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Exercice 1 : Région α-crédible

Données :

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un échantillon de n observations indépendantes suivant $N(\theta, \sigma^2)$, où σ^2 est connue.
- La loi a priori sur θ est $\pi(\theta) \sim N(a, b^2)$.
- On cherche la région α-crédible définie comme $C_\pi/x(k) = \{\theta \in \Theta \mid \pi(\theta \mid x) \geq k\}$.

1. Loi a posteriori

La vraisemblance est :

$$\mathcal{L}(X \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On regroupe les termes, ce qui donne la densité suivante :

$$\mathcal{L}(X \mid \theta) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2\right).$$

Développons $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i + n\theta^2.$$

La loi a posteriori est donc proportionnelle à :

$$\pi(\theta \mid X) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{(\theta - a)^2}{2b^2}\right).$$

En combinant les termes de la vraisemblance et de la loi a priori, la loi a posteriori est une loi normale :

$$\pi(\theta \mid X) \sim N(h, z),$$

avec :

$$h = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sigma^2} + \frac{a}{b^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{b^2}}, \quad z = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

2. Région α-crédible

La région α-crédible est donnée par :

$$C_\pi/x(k) = \{\theta \in \Theta \mid \pi(\theta \mid x) \geq k\}.$$

Pour $\pi(\theta \mid x)$ normale, cette région est symétrique autour de h et est de la forme $[\alpha_k, \beta_k]$.

La probabilité cumulée est donnée par :

$$P_\pi(C_\pi/x(k) \mid X = x) = P\left(\alpha_k \leq \theta \leq \beta_k\right) = 1 - \alpha.$$

1. Montrer que $\beta_{k_\alpha} = h + \sqrt{z} q_{N(0,1)}(1 - \frac{\alpha}{2})$

L'intervalle α-crédible se calcule en termes de quantiles :

$$\beta_{k_\alpha} = h + \sqrt{z} \cdot q_{N(0,1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

où $q_{N(0,1)}(1 - \frac{\alpha}{2})$ est le quantile à droite de la loi normale standard.

De même :

$$\alpha_{k_\alpha} = h - \sqrt{z} \cdot q_{N(0,1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

EXERCICE

Soit $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, avec σ^2 est connue et que l'on cherche à estimer $\theta = \mu$.

- Déterminer la région H.P.D de niveau $1 - \alpha$ associée à la loi de à priori de Jeffreys.

Exercice 2 : Région H.P.D.

Données :

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, avec σ^2 connue.
- La loi a priori de Jeffreys est uniforme : $\pi(\mu) \propto 1$.

1. Déterminer la région H.P.D. de niveau $1 - \alpha$

La région HPD (Highest Posterior Density) est définie comme la région contenant $1 - \alpha$ de la probabilité postérieure tout en maximisant la densité postérieure :

$$C_{\text{HPD}} = \{\mu \mid \pi(\mu \mid x) \geq k\},$$

où k est choisi tel que :

$$P_\pi(C_{\text{HPD}} \mid X = x) = 1 - \alpha.$$

Loi a posteriori

À partir de la loi normale $N(\bar{X}, \frac{\sigma^2}{n})$, la densité postérieure est :

$$\pi(\mu \mid X) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X} - \mu)^2\right).$$

À partir de la loi normale $\mathcal{N}(\bar{X}, \frac{\sigma^2}{n})$, la densité postérieure est :

$$\pi(\mu \mid X) \propto \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{X} - \mu)^2\right).$$

La région HPD est symétrique autour de $\bar{X}$, avec des bornes μ_L et μ_U telles que :

$$P(\mu_L \leq \mu \leq \mu_U) = 1 - \alpha.$$

Calcul des bornes

Pour une loi normale, les bornes de la région HPD sont données par :

$$\mu_L = \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \quad \mu_U = \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile de la loi normale standard à $1 - \alpha/2$.

La région HPD est donc :

$$C_{\text{HPD}} = \left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right].$$