TD2

Exercice 1 :

$U \sim \mathcal{U}([0,1])$

1) On pose $Y = F^{\leftarrow}(U)$.

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(F^{\leftarrow}(U) \leq x) = F(U \leq F(x))$$

$$\downarrow$$

$$(F^{\leftarrow}(U) \leq x) \Leftrightarrow U \leq F(x)$$

$$= F_U(F(x)) \underset{(*)}{=} F_X(x)$$

(*) est vérifiée car : $F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

d'où Y et X ont même loi $\rightarrow F^{\leftarrow}(U)$ est une v.a $\sim \mathcal{L}(X)$

2) $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a < b \quad P[a < X \leq b] > 0$

$$X^{a,b} = F^{\leftarrow}[F(a) + \{F(b) - F(a)\}U]$$

a)

$$F_{Y}(y) = P(X \leq y / a < X \leq b) = \frac{P(X \leq y,\ a < X \leq b)}{P(a < X \leq b)}$$

$Y = X / a < X \leq b$

$$= \frac{(*)}{(**)}$$

cas 1 : $y \leq a \quad (X \leq y,\ a < X \leq b) = \emptyset \Rightarrow F_Y(y) = 0$

cas 2 $a < y < b \quad (X \leq y,\ a < X \leq b) = (a < X \leq y) \Rightarrow F_Y(y) = \dfrac{P(a < X \leq y)}{P(a < X \leq b)} = \dfrac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)}$

cas 3 : $y \geq b \quad (X \leq y,\ a < X \leq b) = (a < X \leq b)$

$F_Y(y) = 1$

b)

$$F_{X^{a,b}}(y) = P(X^{a,b} \leq y)$$

$$= P(F^{\leftarrow}[F(a) + \{F(b) - F(a)\}U] \leq y)$$

$$= P(F(a) + (F(b) - F(a))U \leq F(y))$$

$$= P\left(U \leq \frac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)}\right)$$

$$= F_U\left(\frac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)}\right)$$

F

1er cas : si $y < a$ $\dfrac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)} \leq 0 \Rightarrow F_{X^{a,b}}(y) = 0$

2ème cas : si $y > b$ $F(y) \geq F(b) \Rightarrow \dfrac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)} \geq 1$

$\Rightarrow F_{X^{a,b}}(y) = 1$

3ème cas : si $a < y < b$ $0 \leq \dfrac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)} \leq 1 \Rightarrow F_{X^{a,b}}(y) = \dfrac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)}$

$= F_Y(y)$

Exercice 2 :

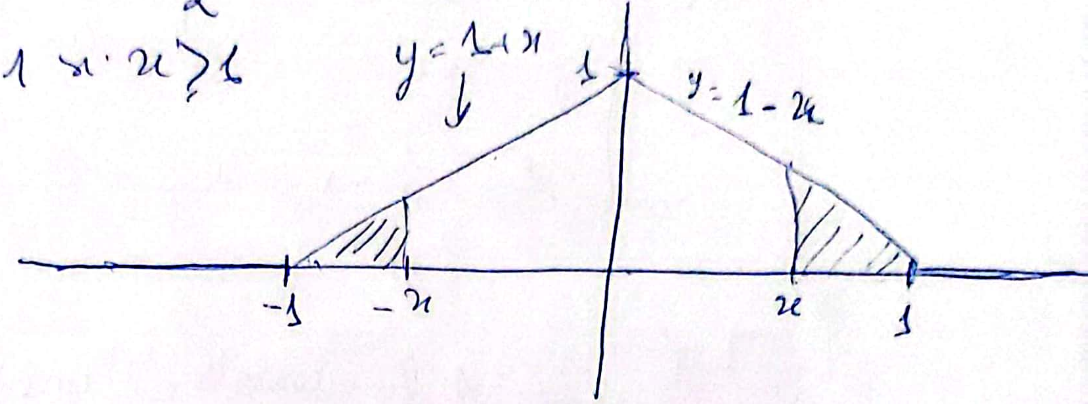
$f : x \longmapsto \max(0, 1 - |x|)$

1)

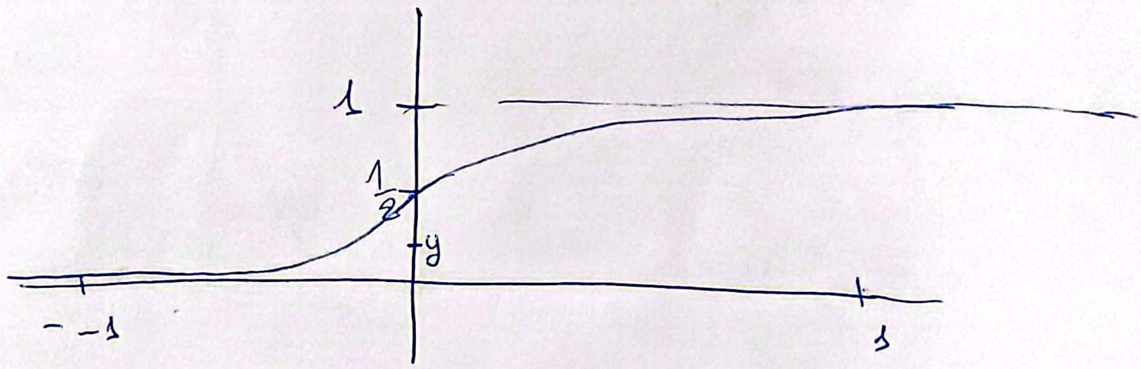
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \\ 1 + x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \ \cancel{\text{ou } x \geq 1} \\ \dfrac{(1+x)^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



$y \in]0,1[\quad F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq y\}$



cas 1 : $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ $\quad F^{\leftarrow}(y) = x \iff \dfrac{(1+x)^2}{2} = y$

$\iff (1+x)^2 = 2y$

$1+x = \sqrt{2y}$

$\iff x = \sqrt{2y} - 1$

$\Rightarrow \boxed{F^{-1}(y) = \sqrt{2y} - 1}$ si $y \in]0, \frac{1}{2}]$

cas 2 : $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ $\quad F^{\leftarrow}(y) = x \Rightarrow 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2} = y$

$(1-x)^2 = (1-y)2$

$x = 1 - \sqrt{2(1-y)}$

$\boxed{F^{\leftarrow}(y) = 1 - \sqrt{2(1-y)}}$

b. Algorithme :

1- tirer $U \sim U(]0,1[)$

2- si $0 < x < \frac{1}{2}$ ~~Posons $X = \sqrt{2U}$~~

Posons $X = \sqrt{2U} - 1$

sinon Posons $x = 1 - \sqrt{2(1-U)}$

2| $f(x) \leq M g(x)$

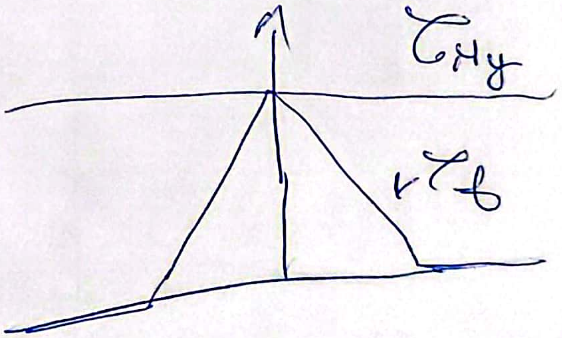
↳ c'est la densité d'une Va-aX simulable

$g \sim U([-1,1])$

$g(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ $M=2$

$u \sim U(]0,1[)$

$a < b$



$v = a + (b-a) u$

$V = -1 + 2U$

$U \sim U(]0,1[)$

↳ a pour densité g

$(X_k)_{k \geq 1}$ v. a i.i.d $\longrightarrow g$

$(U_k)_{k \geq 1} \longrightarrow$ g $U(]0,1[)$ $T = \inf\{k \geq 1 / \frac{f(X_k)}{M g(X_k)} \geq U_k\}$

$E(T) = M = 2$ $Y = X_T \sim f$

3] $g_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda(x-b)} \mathbb{1}_{\{x \geq b\}}$

on suppose que $b > \mu$

$$Y \sim g_\lambda(x) = \lambda \exp(-\lambda(x-b)) . \mathbb{1}_{[b,+\infty[}$$

Y est simulable

$f(x) \leq M . g(x)$
↳ à définir

on pose $T = Z + b$ où $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$Z = -\frac{1}{\lambda} \log(1-U) \qquad U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$$

$$Z = -\frac{1}{\lambda} \log U)$$

$H \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$E(H(T)] = \int_0^{+\infty} H(z+b) \lambda e^{-\lambda z} dz$$

$$\underset{t=z+b}{=} \int_b^{+\infty} H(t) \lambda e^{-\lambda(t-b)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \lambda e^{-\lambda(t-b)} \mathbb{1}_{[b,+\infty[}(t) \, dt$$

$x \geq b$:
$$\frac{f(x)}{g_\lambda(x)} = \underbrace{\frac{1}{\lambda \sigma \sqrt{2\pi} F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{\mu-b}{\sigma}\right)}}_{C_\lambda} \exp\underbrace{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \lambda(x-b)\right)}_{h(x)}$$

cas 1 : $b < \mu + \lambda\sigma^2$

$h'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} + \lambda$; cas 2 $b \geq \mu + \lambda\sigma^2$

Scanné avec CamScanner

Université Paris Dauphine
Département MIDO
Master 1 – Méthodes de Monte Carlo

2022–2023

Travaux Dirigés n°2

stoehr@ceremade.dauphine.fr

Exercice 1. Soient X une variable aléatoire de fonction de répartition F et $U \sim \mathscr{U}([0,1])$.

1. Montrer que $F^{\leftarrow}(U)$ est une variable aléatoire suivant la loi de X.
2. On considère $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\mathbb{P}[a < X \leq b] > 0$. On note

$$X^{a,b} = F^{\leftarrow}\left[F(a) + \{F(b) - F(a)\}U\right].$$

   (a) Justifier que la fonction de répartition de X sachant $a < X \leq b$ s'écrit pour $x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \mathbb{1}_{\{a < x \leq b\}} + \mathbb{1}_{\{x > b\}}.$$

   (b) En déduire que $X^{a,b}$ a la même loi que X sachant $a < X \leq b$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi de densité $f : x \mapsto \max(0, 1 - |x|)$. Construire une méthode de simulation de X à l'aide de :

1. la méthode de la fonction inverse;
2. l'algorithme du rejet.

Exercice 3 *(Méthode du rejet).* La loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$, tronquée de support $[b, +\infty[$ admet une densité f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\Phi\left(\frac{\mu - b}{\sigma}\right)} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{\{x \geq b\}},$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$.

Un algorithme du rejet naïf.

1. *(Travail personnel)* Montrer que f définit bien une densité de probabilité.
2. Décrire l'algorithme du rejet utilisant la loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ comme loi instrumentale. Discuter en fonction de μ et b le nombre d'essais moyen avant acceptation.

Une distribution instrumentale alternative. On note pour $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathbb{1}_{\{x \geq b\}}.$$

On suppose que $b > \mu$. On considère la loi exponentielle translatée de b, $\tau\mathscr{E}(\lambda, b)$, de densité

$$g_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda(x-b)} \mathbb{1}_{\{x \geq b\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer pour $x \geq b$ que

$$\frac{f_1(x)}{g_\lambda(x)} \leq \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{\lambda(\mu - b) + \frac{(\lambda\sigma)^2}{2}\right\} & \text{si } \mu + \lambda\sigma^2 > b, \\ \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

4. En déduire un algorithme du rejet permettant de simuler suivant la densité f.

5. Calculer la valeur λ^* pour laquelle le temps moyen de calcul de la méthode proposée soit le plus petit possible.

⋄ Travail personnel ⋄

Exercice 4 *(Box-Muller).*

1. Soient U_1 et U_2 des variables *i.i.d.* de loi $\mathscr{U}([0,1])$. Montrer que les variables

$$X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \quad \text{et} \quad X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2), \tag{2}$$

sont *i.i.d.* de loi $\mathscr{N}(0,1)$.

2. En déduire que les coordonnées polaires (R, Θ) de (X_1, X_2) vérifient

$$R^2 \sim \mathscr{E}(1/2) \quad \text{et} \quad \Theta \sim \mathscr{U}([0, 2\pi]).$$

Exercice 5 *(Méthode polaire).*

1. Soient U_1 et U_2 des variables *i.i.d.* de loi $\mathscr{U}([-1,1])$. On effectue des tirages de U_1 et U_2 jusqu'à ce que $S := U_1^2 + U_2^2 \leq 1$. Montrer qu'à l'issue de cette procédure (U_1, U_2) suit une loi uniforme sur le disque unité $\mathscr{D}_1 = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

2. Montrer que les variables suivantes sont *i.i.d.* de loi $\mathscr{N}(0,1)$:

$$X_1 = U_1\sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}} \quad \text{et} \quad X_2 = U_2\sqrt{\frac{-2\ln(S)}{S}}$$