Année 2009

Exercices de mathématiques

Enoncés et corrections : Ana Matos.

Méthode de Gauss. Factorisation LU et de Cholesky

Exercice 1 (Taille des éléments dans l'élimination de Gauss)**.** Notons $\tilde{A}_k$ la matrice carrée d'ordre $(n-k+1)$ formée des éléments $a_{ij}^k, k \leq i, j \leq n$ de la matrice $A_k = (a_{ij}^k)$ obtenue come résultat de la $(k-1)$–ème étape de l'élimination de Gauss. On suppose $A = A_1$ symétrique définie positive.

1. Notant $(.,.)$ le produit scalaire euclidien et $v' \in \mathbb{R}^{n-k}$ le vecteur formé par les $(n-k)$ dernières composantes d'un vecteur $v = (v_i)_{i=k}^n \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ quelconque, établir l'identité
$$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1} v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k} \left| a_{kk}^k v_k + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^k v_i \right|^2 .$$
2. Montrer que chaque matrice $\tilde{A}_k$ est symétrique définie positive.
3. Etablir les inégalités suivantes :
$$0 < a_{ii}^{k+1} \leq a_{ii}^k, \quad k+1 \leq i \leq n$$
$$\max_{k+1 \leq i \leq n} a_{ii}^{k+1} = \max_{k+1 \leq i,j \leq n} \left| a_{ij}^{k+1} \right| \leq \max_{k \leq i,j \leq n} \left| a_{ij}^k \right| = \max_{k \leq i \leq n} a_{ii}^k$$

Exercice 2 (Stratégie de pivotage)**.**

1. Montrer que pour une matrice quelconque $A = (a_{ij})$ de type (2×2) on a
$$\mathrm{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{1/2} \text{ avec } \sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^2 |a_{ij}|^2}{2|\det(A)|}$$
2. Calculer les conditionnements $\mathrm{cond}_p(.)$ pour $p = 1, 2, \infty$ des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} 10^{-4} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases}$$
selon que l'on commence, ou non, par échanger les deux équations. Conclusion ?

Exercice 3 (Factorisation LU d'une matrice bande)**.** Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bande au sens suivant :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| \geq p \Rightarrow \begin{cases} l_{ij} = 0 & \text{pour } i-j \geq p \\ u_{ij} = 0 & \text{pour } j-i \geq p \end{cases}$$

Exercice 4 (Factorisation d'une matrice symétrique)**.** Soit A une matrice symétrique inversible admettant une factorisation LU. Montrer que l'on peut écrire A sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ où}$$

– B est une matrice triangulaire inférieure ;
– $\tilde{B}$ est une matrice où chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à la colonne correspondante de B changée de signe.

Application numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Quelques factorisations LU)**.**

1. Soit $A = LU$ la décomposition LU d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $|l_{ij}| \leq 1$. Soient a_i^T et u_i^T les lignes i de A et U respectivement. Montrer que

$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$

et que

$$\|U\|_\infty \leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que A a une décomposition LU avec $|l_{ij}| \leq 1$ et $u_{nn} = 2^{n-1}$.

Exercice 6. On suppose $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible. Montrer que si $PA\Pi = LU$ est obtenue par la méthode de Gauss avec pivotage total, alors

$$\begin{aligned} &\forall i, j = 1, \cdots, n \quad |l_{ij}| \leq 1 \\ &\forall i = 1, \cdots, n, \forall j = i, \cdots, n, \quad |u_{ij}| \leq |u_{ii}| \end{aligned}$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que A^T soit à diagonale strictement dominante. Montrer que A admet une décomposition LU avec L^T à diagonale strictement dominante.

Correction 1. 1. A la k-ème étape de l'élimination de Gauss, l'élément a_{ij}^{k+1} est donné par

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \frac{a_{kj}^{k} a_{ik}^{k}}{a_{kk}^{k}} \quad k+1 \leq i, j \leq n$$

et on remarque immédiatement par récurrence que toutes les matrices $\tilde{A}_k$ sont symétriques. On a
$(\tilde{A}_{k+1}v', v') = \sum_{i=k+1}^{n} v_i(\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}^{(k)} v_j) - \frac{1}{a_{kk}^k}(\sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^{k} v_i)^2$
$(\tilde{A}_k v, v) = \sum_{i=k+1}^{n} v_i(\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}^{k} v_j) + \sum_{i=k+1}^{n}(a_{ik}^{k} + a_{ki}^{k}) v_i v_k + a_{kk}^{k} v_k^2$
Par symétrie $a_{ik}^{k} = a_{ki}^{k}$ et donc
$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1}v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k}[(\sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^{k} v_i)^2 + 2v_k \sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^{k} v_i a_{kk}^{k} + (a_{kk}^{k})^2 v_k^2] =$

$$(\tilde{A}_{k+1}v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k}[a_k k^k v_k + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^{k} v_i]^2$$

2. Faisons un raisonnement par récurrence
   - $\tilde{A}_1$ est symétrique définie positive ;
   - Par hypothèse supposons que $\tilde{A}_k$ est définie positive ;
   - Supposons par absurde que $\tilde{A}_{k+1}$ ne soit pas définie positive : alors $\exists v' \neq 0 : \quad (\tilde{A}_{k+1}v', v') \leq 0$. On définit le vecteur $v \in \mathbb{R}^{n-k+1}$ par :
     - $v_i = v_i', \quad k+1 \leq i \leq n$
     - v_k est solution de $a_{kk}^{k} + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ik}^{k} v_i = 0$

     Alors $(\tilde{A}_k v, v) = 0$ et $v \neq 0$; donc $\tilde{A}_k$ n'est pas définie positive, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.
3. Première inégalité : en utilisant la relation d'élimination on obtient : $a_{ii}^{k+1} = a_{ii}^{k} - \frac{\left|a_{ki}^{k}\right|^2}{a_{kk}^2}$
   - une matrice définie positive a tous ses éléments diagonaux strictement positifs, donc $a_{ii}^{k+1} > 0$
   - $\left|a_{ki}^{k}\right|^2 / \left|a_{kk}^{k}\right|^2 \geq 0, \quad k+1 \leq i \leq n$

   donc $a_{ii}^{k+1} \leq a_{ii}^{k}, k+1 \geq i$
   Deuxième inégalité : supposons qu'il existe un élément $a_{ij}^{k}, i < J$ tel que $\left|a_{ij}^{k}\right| \geq \max_{k \leq l \leq n} a_{ll}^{k}$. On considère le vecteur $v \neq 0$ défini par

   $$v_i = 1, v_j = -\text{sign}(a_{ij}^{k}), v_l = 0 \quad l \neq i, j$$

   Alors

   $$(\tilde{A}_k v, v) = (a_{ii}^{k} - \left|a_{ij}^{k}\right|) - (\left|a_{ij}^{k}\right| - a_{jj}^{k}) \leq 0$$

ce qui est impossible. Donc

$$\max_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{ij}^k\right| = \max_{1\leq i\leq n} \left|a_{ii}^k\right|$$

Correction 3. Montrons par récurrence que $A_n = U$ est une matrice bande.
$A_1 = A, \quad A_{k+1} = L_k A_k = L_k L_{k-1} \cdots L_1 A, \quad k = 1, \cdots, n-1.$
Supposons que A_k est une matrice bande i.e., $a_{ij}^k = 0$ pour $|i-j| \geq p$ et montrons que A_{k+1} est une matrice bande.

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{a_{kk}^k}$$

Soit $|i-j| \geq p \Leftrightarrow |(i-k)-(j-k)| \geq p$. On considère deux cas :
- $k+1 \leq i \leq n$ et $k \leq j \leq n$. Alors $i-k \geq p$ ou $j-k \geq p \Rightarrow a_{ik}^k a_{kj}^k = 0 \Rightarrow a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$
- $i \leq k$ ou $j \leq k-1$ alors $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$

donc A_{k+1} est une matrice bande et U est une matrice bande. On a $A = LU$ et la matrice triangulaire inférieure L a pour éléments $l_{ij} = a_{ij}^j / a_{jj}^j, \quad j \leq i \leq n$. Toutes les matrices A_j étant des matrices bandes on a $a_{ij}^j = 0$ pour $i-j \geq p \Rightarrow l_{ij} = 0$ pour $i-j \geq p$.

Correction 4. Soit LU la factorisation LU de A. On va intercaler dans cette factorisation la matrice réelle $\Lambda =$diag$(\sqrt{|u_{ii}|})$.
$A = (L\Lambda)(\Lambda^{-1}U) = BC$. La symétrie de A entraine $BC = C^T B^T$. On a $C(B^T)^{-1}$ matrice triangulaire supérieure, $B^{-1}C^T$ matrice triangulaire inférieure et $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T$ et donc
$C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^{=}$diag(sign$(u_{ii}) = S \Rightarrow C(B^T)^{-1}S^{-1} = I = S^{-1}B^{-1}C^T \Leftrightarrow C^T = BS = \tilde{B}$. Donc A peut être mise sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ avec } \tilde{B} = BS$$

i.e. la i-ème colonne de $\tilde{B}$ est égale à la i-ème colonne de B affectée du signe de u_{ii}
Application numérique :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction 7.

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$$

A^T étant à diagonale strictement dominante on a :

$$|\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i|, \quad |u_i| + \sum_{j \neq i} |b_{ji}| < |b_{ii}|$$

Il suffit de montrer que
- la première colonne de L vérifie $|l_{11}| > \sum_{i \neq 1} |l_{i1}|$
- B_2 est telle que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = B_2 = B_1 - \frac{1}{\alpha} v u^T$$

  vérifie $|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ji}|$ avec $C_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i u_j$ et itérer.
- première colonne de L : $l_{i1} = v_i / \alpha \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} |l_{i1}| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|v_i|}{\alpha} < 1$
- $\sum_{i \neq j} |c_{ij}| = \sum_{i \neq j} \left| b_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i w_j \right| \leq \sum_{i \neq j} |b_{ij}| + \frac{1}{|\alpha|} |w_j| \sum_{i \neq j} |v_i|$

$$\leq |b_{jj}| - |u_j| + \frac{1}{|\alpha|} |u_j| (|\alpha| - |v_j|) \leq \left| b_{jj} - \frac{1}{\alpha} u_j v_j \right| = |c_{jj}|$$

  donc B_2^T est de diagonale strictement dominante. La démonstration se finit par récurrence.