LM5: Analyse Numérique Elémentaire,
Fiche de TD no 2

Systèmes linéaires: Méthodes directes

Exercice 1 :

Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système $Ax = b$ en donnant l'expression de toutes les matrice intermédiaires, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Même question avec:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donner la factorisation LU de chacune de ces matrices.

Exercice 2 :

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle factorisable LU ?

Exercice 3 :

Supposons que les nombres sont représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.
2. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme ligne pivot à la première étape, la deuxième ligne.
3. Conclure.

Exercice 4 :

(*Méthode de Cholesky*):

Soit A une matrice symétrique définie positive, on sait qu'elle admet une factorisation LU.

1. En intercalant une bonne matrice diagonale à coefficients strictement positifs dans cette factorisation, montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure B ayant ses éléments diagonaux tous strictement positifs telle que $A = BB^T$.
2. Montrer que cette factorisation est unique sous la condition "éléments diagonaux tous strictement positifs".
3. Quel est l'intérêt de cette factorisation pour la résolution du système $Ax = b$?
4. Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$
5. Ecrire un algorithme pour le calcul de B. Compter le nombre d'opérations. Remarques ?

Exercice 5 :
On considère les deux matrices symétriques:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices A et B sont symétriques définies positives.
2. Calculer $P = AB$. Que remarquez-vous? Quelles sont les valeurs propres de P? Conclure que le produit de deux matrices symétriques définies n'est pas en général symétrique.
3. Montrer que le produit de deux matrices symétriques définies positives est toujours semblable à une matrice symétrique définie positive (utiliser une décomposition de Cholesky de A).

Exercice 6 :
B_k est la matrice d'ordre k donnée par:
$$B_k = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \{1...n\}.$$

1. Montrer que B_k est symétrique définie positive pour tout k de 1 à n. B_n admet-elle une factorisation LU?
2. Montrer que $K_2(B_n) \leq 3$ (où $K_2(B_n)$ est le conditionnement de B_n associé à la norme spectrale).
3. On note δ_k le déterminant de B_k pour $k = 1..n$ et on pose $\delta_0 = 1$.
   (a) Etablir que:
   $$\delta_k = 4\delta_{k-1} - \delta_{k-2}, \quad k = 2..n.$$
   (b) Montrer que la factorisation LU de B_n est:
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & \frac{\delta_1}{\delta_2} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & 1 & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

L' exercice suivant est proposé aux étudiants comme un problème à résoudre , à rédiger et à rendre en TD et ne sera pas corrigé enTD. Un corrigé sera proposé aux étudiants.

Exercice 7 :
Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice réelle symétrique définie positive de dimension n. Soit $\{e_1,\ldots,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons nous intéresser à la diagonalisation de A par la méthode de Gauss.

1. On veut montrer que le pivot maximal $\beta \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ est nécessairement sur la diagonale et qu'il correspond à une composante positive, i.e.
$$\beta = \max_{1\le i\le n} (a_{ii}).$$
   (a) Montrer que :
$$a_{ij} = (Ae_i \mid e_j).$$
   (b) Supposons qu'il existe deux entiers i_0 et j_0 avec $i_0 \neq j_0$ tels que $\beta = \mid a_{i_0j_0} \mid$. Calculer $(A(e_{i_0} - \varepsilon e_{j_0}) \mid (e_{i_0} - \varepsilon e_{j_0}))$ ($\varepsilon = 1$ ou -1).
   (c) Conclure.
2. Soit i_0 tel que $\beta = a_{i_0i_0}$. Soit P la matrice de permutation qui échange e_1 et e_{i_0}. Montrer que :
$$PAP^T = \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix}$$
   où $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un élément l de $\mathbb{R}^{n-1}$, que l'on déterminera en fonction de b, tel que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & b^T \\ b & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
   (b) Exprimer C en fonction de B et de β.
3. Montrer que C est symétrique définie positive.
4. En déduire que $\max\limits_{1\le i,j\le n} |C_{ij}| \le \beta$.
5. En conclure que dans la méthode de Gauss de diagonalisation d'une matrice symétrique définie positive (qui consiste à itérer l'opération définie en 2.), la suite des pivots est décroissante minorée par 0.
6. Quel est l'intérêt de permuter lignes et colonnes ? Quel type de décomposition de A obtient-on si on s'interdit toute permutation de lignes et colonnes. Retrouver alors la décomposition LU de A ainsi que sa décomposition de Cholesky.