Économétrie avancée : Introduction à l'économétrie des données de panel

Pr. Mokhtar KOUKI

Université de Carthage (ESSAI)
mokhtar.kouki@essai.ucar.tn

Septembre - Octobre 2022

Contents

Représentation et Estimation

On rappelle qu'un modèle de régression linéaire de données de panel standard et à effet fixe est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \alpha_i + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it} \\ & \quad \text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

avec

Représentation et Estimation

On rappelle qu'un modèle de régression linéaire de données de panel standard et à effet fixe est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \alpha_i + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it} \\ & \quad \text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

avec

- Y : La variable endogène (expliquée)
- $X_1, X_2, \cdots, X_k$: k variables explicatives (exogènes)
- $\alpha_i, \beta_1, \cdots \beta_k$: des paramètres à estimer

Représentation et Estimation

On rappelle qu'un modèle de régression linéaire de données de panel standard et à effet fixe est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \alpha_i + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_k X_{kit} + \varepsilon_{it} \\ &\text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

avec

- Y : La variable endogène (expliquée)
- $X_1, X_2, \cdots, X_k$: k variables explicatives (exogènes)
- $\alpha_i, \beta_1, \cdots \beta_k$: des paramètres à estimer
- ε_{it} est un terme d'erreur qui vérifie les hypothèses suivantes :
  - $E(\varepsilon_{it}) = 0 \forall i, t,$
  - $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \forall i, t$
  - $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}) = 0 \forall i \neq j$ ou $s \neq t,$
  - $cov(X_{lit}, \varepsilon_{js}) = 0 \forall l, i, j, t, s.$

On considère les variables indicatrices (dummy variables) D_{jit} définies comme suit :

$$D_{jit} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère les variables indicatrices (dummy variables) D_{jit} définies comme suit :

$$D_{jit} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Et on note par D et X respectivement les matrices des variables indicarices D_j et des variables explicatives X_l :

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_k \end{pmatrix}$$

On considère les variables indicatrices (dummy variables) D_{jit} définies comme suit :

$$D_{jit} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Et on note par D et X respectivement les matrices des variables indicarices D_j et des variables explicatives X_l :

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_k \end{pmatrix}$$

Le modèle à effet fixe peut être écrit sous forme matricielle :

$$Y = D\alpha + X\beta + \varepsilon, \text{ avec } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

On définit par M_D la matrice idempotente :

$$M_D = I - D\left(D'D\right)^{-1}D' \text{ avec } M_D D = 0$$

On définit par M_D la matrice idempotente :

$$M_D = I - D\left(D'D\right)^{-1}D' \text{ avec } M_D D = 0$$

L'estimateur du vecteur β est donné par :

$$\widehat{\beta} = \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D Y$$

et

$$\widehat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \widehat{\beta}_1\bar{X}_{1i} - \widehat{\beta}_2\bar{X}_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k\bar{X}_{ki}$$

avec

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_{it}}{T} \text{ et } \bar{X}_{li} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{lit}}{T} \text{ pour } l = 1, 2, \cdots, k$$

On définit par M_D la matrice idempotente :

$$M_D = I - D\left(D'D\right)^{-1} D' \text{ avec } M_D D = 0$$

L'estimateur du vecteur β est donné par :

$$\widehat{\beta} = \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D Y$$

et

$$\widehat{\alpha}_i = \bar{Y}_i - \widehat{\beta}_1 \bar{X}_{1i} - \widehat{\beta}_2 \bar{X}_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k \bar{X}_{ki}$$

avec

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_{it}}{T} \text{ et } \bar{X}_{li} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{lit}}{T} \text{ pour } l = 1, 2, \cdots, k$$

Observation : $M_D Y$ et $M_D X$ fournissent les données centrées autour des moyennes individuelles. Et le modèle à effet fixe est appelé modèle within (intra) et l'estmateur de β noté $\widehat{\beta}_W$.

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$\widehat{\beta}_W = \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D Y$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_DY \\ &= \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_D\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right)\end{aligned}$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D Y \\
&= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D \left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) \\
&= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' \left(M_D D\alpha + M_D X\beta + M_D\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_D Y \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_D \left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1} X' \left(M_D D\alpha + M_D X\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1} X' \left(M_D X\beta + M_D\varepsilon\right)
\end{aligned}
$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D Y \\
&= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D \left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) \\
&= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' \left(M_D D\alpha + M_D X\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' \left(M_D X\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D X\beta + \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D\varepsilon
\end{aligned}
$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DY \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\left(D\alpha+X\beta+\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'\left(M_DD\alpha+M_DX\beta+M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'\left(M_DX\beta+M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DX\beta+\left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon \\
&= \beta+\left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon
\end{aligned}$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DY \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'\left(M_DD\alpha + M_DX\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'\left(M_DX\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DX\beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon \\
&= \beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon
\end{aligned}$$

$$E(\widehat{\beta}_W) = \beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DE(\varepsilon) = \beta$$

Espérance mathématique et variance de β_W

L'estimateur β_W peut être écrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DY \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'\left(M_DD\alpha + M_DX\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'\left(M_DX\beta + M_D\varepsilon\right) \\
&= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DX\beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon \\
&= \beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\beta}_W) &= \beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DE(\varepsilon) = \beta \\
V(\widehat{\beta}_W) &= \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DV(\varepsilon)M_DX\left(X'M_DX\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DM_DX\left(X'M_DX\right)^{-1} = \sigma^2\left(X'M_DX\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Estimateur sans biais de σ_ε^2

Faisons remarquer que :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'Y \text{ et } \bar{X}_l = \begin{pmatrix} \bar{X}_{l1} \\ \bar{X}_{l2} \\ \vdots \\ \bar{X}ln \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'X_l$$

Estimateur sans biais de σ_ε^2

Faisons remarquer que :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'Y \text{ et } \bar{X}_l = \begin{pmatrix} \bar{X}_{l1} \\ \bar{X}_{l2} \\ \vdots \\ \bar{X}\,ln \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'X_l$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta} = (D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}$$

Estimateur sans biais de σ_ε^2

Faisons remarquer que :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'Y \text{ et } \bar{X}_l = \begin{pmatrix} \bar{X}_{l1} \\ \bar{X}_{l2} \\ \vdots \\ \bar{X}\, ln \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'X_l$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta} = (D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}$$

Le vecteur des résidus peut être écrit sous la forme :

$$\widehat{\varepsilon} \quad = \quad Y - D\widehat{\alpha} - X\widehat{\beta}$$

Estimateur sans biais de σ_ε^2

Faisons remarquer que :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'Y \text{ et } \bar{X}_l = \begin{pmatrix} \bar{X}_{l1} \\ \bar{X}_{l2} \\ \vdots \\ \bar{X}\,ln \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'X_l$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta} = (D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}$$

Le vecteur des résidus peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon} &= Y - D\widehat{\alpha} - X\widehat{\beta} \\ &= Y - D\left((D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}\right) - X\widehat{\beta} \end{aligned}$$

Estimateur sans biais de σ_ε^2

Faisons remarquer que :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'Y \text{ et } \bar{X}_l = \begin{pmatrix} \bar{X}_{l1} \\ \bar{X}_{l2} \\ \vdots \\ \bar{X}\,ln \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'X_l$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta} = (D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}$$

Le vecteur des résidus peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon} &= Y - D\widehat{\alpha} - X\widehat{\beta} \\ &= Y - D\left((D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}\right) - X\widehat{\beta} \\ &= \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right]Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right]X\widehat{\beta} \end{aligned}$$

Estimateur sans biais de σ_ε^2

Faisons remarquer que :

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'Y \text{ et } \bar{X}_l = \begin{pmatrix} \bar{X}_{l1} \\ \bar{X}_{l2} \\ \vdots \\ \bar{X}\, ln \end{pmatrix} = (D'D)^{-1}D'X_l$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta} = (D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}$$

Le vecteur des résidus peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} &= Y - D\widehat{\alpha} - X\widehat{\beta} \\
&= Y - D\left((D'D)^{-1}D'Y - (D'D)^{-1}D'X\widehat{\beta}\right) - X\widehat{\beta} \\
&= \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right]Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right]X\widehat{\beta}
\end{aligned}$$

$$\widehat{\varepsilon} = \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] X\widehat{\beta}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} &= \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] X\widehat{\beta} \\
&= M_D Y - M_D X\widehat{\beta} = M_D Y - M_D X \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D Y = WY
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon} &= \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] X\widehat{\beta} \\ &= M_D Y - M_D X\widehat{\beta} = M_D Y - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D Y = WY\end{aligned}$$

Avec

$$W = M_D - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D$$

est une matrice symétrique, idempotente, $W \cdot D = 0$ et $W \cdot X = 0$.
En effet ;

$$W \cdot D = \left(M_D - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D\right) D$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} &= \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right] X\widehat{\beta} \\
&= M_D Y - M_D X\widehat{\beta} = M_D Y - M_D X \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D Y = WY
\end{aligned}
$$

Avec

$$W = M_D - M_D X \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D$$

est une matrice symétrique, idempotente, $W \cdot D = 0$ et $W \cdot X = 0$.
En effet ;

$$
\begin{aligned}
W \cdot D &= \left(M_D - M_D X \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D\right) D \\
&= M_D D - M_D X \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D D = 0 \\
W \cdot X &= \left(M_D - M_D X \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D\right) X
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon} &= \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right]Y - \left[I - D(D'D)^{-1}D'\right]X\widehat{\beta} \\ &= M_D Y - M_D X\widehat{\beta} = M_D Y - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1}X'M_D Y = WY\end{aligned}$$

Avec

$$W = M_D - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1}X'M_D$$

est une matrice symétrique, idempotente, $W \cdot D = 0$ et $W \cdot X = 0$.

En effet ;

$$\begin{aligned}W \cdot D &= \left(M_D - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1}X'M_D\right)D \\ &= M_D D - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1}X'M_D D = 0 \\ W \cdot X &= \left(M_D - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1}X'M_D\right)X \\ &= M_D X - M_D X\left(X'M_D X\right)^{-1}X'M_D X = M_D X - M_D X = 0\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) =$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon =$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus (SCR_W) est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus $\left(SCR_W\right)$ est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \left(W\varepsilon\right)'\left(W\varepsilon\right) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon))$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus (SCR_W) est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = (W\varepsilon)'(W\varepsilon) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$\begin{aligned} & E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon)) \\ = \quad & E(trace(W\varepsilon\varepsilon')) = (trace(W \cdot E(\varepsilon\varepsilon')) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus $\left(SCR_W\right)$ est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \left(W\varepsilon\right)'\left(W\varepsilon\right) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$\begin{aligned} & E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon)) \\ = \quad & E(trace(W\varepsilon\varepsilon')) = (trace(W \cdot E(\varepsilon\varepsilon')) \\ = \quad & \sigma_\varepsilon^2 trace(W) = \sigma_\varepsilon^2 trace(M_D - M_D X(X' M_D X)^{-1} X' M_D) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus (SCR_W) est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = (W\varepsilon)'\,(W\varepsilon) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$\begin{aligned}
& E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon)) \\
= \quad & E(trace(W\varepsilon\varepsilon')) = (trace(W \cdot E(\varepsilon\varepsilon')) \\
= \quad & \sigma_\varepsilon^2 trace(W) = \sigma_\varepsilon^2 trace(M_D - M_D X(X'M_D X)^{-1} X' M_D) \\
= \quad & \sigma_\varepsilon^2 \left(trace(I) - trace(D(D'D)^{-1}D') - trace(M_D X(X'M_D X)^{-1} X' M_D)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus (SCR_W) est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \left(W\varepsilon\right)'\left(W\varepsilon\right) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$\begin{aligned} & E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon)) \\ = \;& E(trace(W\varepsilon\varepsilon')) = (trace(W \cdot E(\varepsilon\varepsilon')) \\ = \;& \sigma_\varepsilon^2 trace(W) = \sigma_\varepsilon^2 trace(M_D - M_D X(X'M_D X)^{-1}X'M_D) \\ = \;& \sigma_\varepsilon^2\left(trace(I) - trace(D(D'D)^{-1}D') - trace(M_D X(X'M_D X)^{-1}X'M_D)\right) \\ = \;& \sigma_\varepsilon^2\left(trace(I) - trace((D'D)^{-1}(D'D)) - trace((X'M_D X)^{-1}(X'M_D X))\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus (SCR_W) est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \left(W\varepsilon\right)'\left(W\varepsilon\right) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$\begin{aligned}
& E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon)) \\
= \; & E(trace(W\varepsilon\varepsilon')) = (trace(W \cdot E(\varepsilon\varepsilon')) \\
= \; & \sigma_\varepsilon^2 trace(W) = \sigma_\varepsilon^2 trace(M_D - M_D X(X'M_D X)^{-1}X'M_D) \\
= \; & \sigma_\varepsilon^2 \left(trace(I) - trace(D(D'D)^{-1}D') - trace(M_D X(X'M_D X)^{-1}X'M_D)\right) \\
= \; & \sigma_\varepsilon^2 \left(trace(I) - trace((D'D)^{-1}(D'D)) - trace((X'M_D X)^{-1}(X'M_D X))\right) \\
= \; & \sigma_\varepsilon^2 \left(trace(I_{n \cdot T}) - Trace(I_n) - trace(I_k)\right) = \sigma_\varepsilon^2 \left(n \cdot T - n - k\right)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{\varepsilon} = W \cdot Y = W\left(D\alpha + X\beta + \varepsilon\right) = W \cdot D\alpha + W \cdot X\beta + W\varepsilon = W\varepsilon$$

Et la somme des carrés des résidus (SCR_W) est exprimée en fonction des termes d'erreur ε :

$$SCR_W = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = (W\varepsilon)'(W\varepsilon) = \varepsilon' W\varepsilon$$

Et :

$$\begin{aligned} & E(SCR_W) = E(\varepsilon' W\varepsilon) = E(trace(\varepsilon' W\varepsilon)) \\ = \ & E(trace(W\varepsilon\varepsilon')) = (trace(W \cdot E(\varepsilon\varepsilon')) \\ = \ & \sigma_\varepsilon^2 trace(W) = \sigma_\varepsilon^2 trace(M_D - M_D X(X'M_D X)^{-1}X'M_D) \\ = \ & \sigma_\varepsilon^2\left(trace(I) - trace(D(D'D)^{-1}D') - trace(M_D X(X'M_D X)^{-1}X'M_D)\right) \\ = \ & \sigma_\varepsilon^2\left(trace(I) - trace((D'D)^{-1}(D'D)) - trace((X'M_D X)^{-1}(X'M_D X))\right) \\ = \ & \sigma_\varepsilon^2\left(trace(I_{n \cdot T}) - Trace(I_n) - trace(I_k)\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(n \cdot T - n - k\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SCR_W}{n \cdot T - n - k}$ est un estimateur sans biais de σ_ε^2.

Un modèle à effet (individuel) aléatoire est défini comme suit :

$$Y_{it} = \alpha_i + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_2 X_{kit} + \varepsilon_{it}$$
$$\text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T$$

avec

- Y : La variable endogène (expliquée)
- $X_1, X_2, \cdots, X_k$: k variables explicatives (exogènes)
- $\alpha_i, \beta_1, \cdots \beta_k$: des paramètres à estimer
- ε_{it} est un terme d'erreur qui vérifie les hypothèses suivantes :
  - $E(\varepsilon_{it}) = 0 \forall i, t,$
  - $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \forall i, t$
  - $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}) = 0 \forall i \neq j$ ou $s \neq t,$
  - $cov(X_{lit}, \varepsilon_{js}) = 0 \forall l, i, j, t, s.$

Un modèle à effet (individuel) aléatoire est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \alpha_i + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_2 X_{kit} + \varepsilon_{it} \\ &\quad \text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

avec

- Y : La variable endogène (expliquée)
- $X_1, X_2, \cdots, X_k$: k variables explicatives (exogènes)
- $\alpha_i, \beta_1, \cdots \beta_k$: des paramètres à estimer
- ε_{it} est un terme d'erreur qui vérifie les hypothèses suivantes :
  - $E(\varepsilon_{it}) = 0 \forall i, t,$
  - $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \forall i, t$
  - $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}) = 0 \forall i \neq j$ ou $s \neq t,$
  - $cov(X_{lit}, \varepsilon_{js}) = 0 \forall l, i, j, t, s.$
- $\alpha_i = \alpha + u_i$ où u_i est un terme aléatoire représentant l'effet individuel

Le terme d'erreur u_i vérifie les hypothèses suivantes :

- $E(u_i) = 0 \forall i$
- $E(u_i^2) = \sigma_u^2 \forall i$
- $E(u_i u_j) = 0$ pour $i \neq j$
- $E(u_i \varepsilon_{jt}) = 0 \forall i, j, t$
- $E(u_i X_{ljt}) = 0 \forall i, l, j, t$

Le terme d'erreur u_i vérifie les hypothèses suivantes :

- $E(u_i) = 0 \forall i$
- $E(u_i^2) = \sigma_u^2 \forall i$
- $E(u_i u_j) = 0$ pour $i \neq j$
- $E(u_i \varepsilon_{jt}) = 0 \forall i, j, t$
- $E(u_i X_{ljt}) = 0 \forall i, l, j, t$

Et le modèle peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \alpha + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_2 X_{kit} + \varepsilon_{it} + u_i \\ & \text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

Le terme d'erreur u_i vérifie les hypothèses suivantes :

- $E(u_i) = 0 \forall i$
- $E(u_i^2) = \sigma_u^2 \forall i$
- $E(u_i u_j) = 0$ pour $i \neq j$
- $E(u_i \varepsilon_{jt}) = 0 \forall i, j, t$
- $E(u_i X_{ljt}) = 0 \forall i, l, j, t$

Et le modèle peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} Y_{it} &= \alpha + \beta_1 X_{1it} + \beta_2 X_{2it} + \cdots + \beta_2 X_{kit} + \varepsilon_{it} + u_i \\ &\text{pour } i = 1, 2, \cdots, n \text{ et } t = 1, 2, \cdots, T \end{aligned}$$

Observation : Le modèle est à effet aléatoire est appelé modèle à erreur composée :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} + u_i$$

Considérons le vecteur du terme d'erreur pour un individu i donné :

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} + u_i \\ \varepsilon_{i2} + u_i \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} + u_i \end{pmatrix} =$$

Considérons le vecteur du terme d'erreur pour un individu i donné :

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} + u_i \\ \varepsilon_{i2} + u_i \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} + u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u_i$$

Considérons le vecteur du terme d'erreur pour un individu i donné :

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} + u_i \\ \varepsilon_{i2} + u_i \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} + u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u_i = \varepsilon_i + e \cdot u_i$$

e étant le vecteur unitaire de dimension T Sous les hypothèse du modèle à erreur composée, $E(\omega_i) = 0$ et la variance de ω_i est définie par :

$$V(\omega_i) = V(\varepsilon_i) + e \cdot V(u_i)e'$$

Considérons le vecteur du terme d'erreur pour un individu i donné :

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} + u_i \\ \varepsilon_{i2} + u_i \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} + u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{iT} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u_i = \varepsilon_i + e \cdot u_i$$

e étant le vecteur unitaire de dimension T Sous les hypothèse du modèle à erreur composée, $E(\omega_i) = 0$ et la variance de ω_i est définie par :

$$V(\omega_i) = V(\varepsilon_i) + e \cdot V(u_i)e' = \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee'$$

Observation :

$$var(\omega_i) = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 \\ \sigma_u^2 & \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 \end{pmatrix} \neq \sigma^2 I$$

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$V(\omega_i) = \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee' =$$

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$V(\omega_i) = \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee' = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} e\left(e'e\right)^{-1} e' \right\} ; (e'e = T)$$

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} V(\omega_i) &= \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee' = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} e\left(e'e\right)^{-1} e' \right\} ; (e'e = T) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \lambda B \right\} = \sigma_\varepsilon^2 \Omega \end{aligned}$$

. avec $\lambda = \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ et $B = e\left(e'e\right)^{-1} e'$ est une matrice idempotente

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$
\begin{aligned}
V(\omega_i) &= \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee' = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} e\left(e'e\right)^{-1} e' \right\} ;\ (e'e = T) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \lambda B \right\} = \sigma_\varepsilon^2 \Omega
\end{aligned}
$$

. avec $\lambda = \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ et $B = e\left(e'e\right)^{-1} e'$ est une matrice idempotente Si on considère les observations pour tous les individus, la matrice de variance-covariance du terme d'erreur est égale à :

$$
V(\omega) = V \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}
$$

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} V(\omega_i) &= \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee' = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} e \left(e'e\right)^{-1} e' \right\} ; (e'e = T) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \lambda B \right\} = \sigma_\varepsilon^2 \Omega \end{aligned}$$

. avec $\lambda = \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ et $B = e\left(e'e\right)^{-1} e'$ est une matrice idempotente Si on considère les observations pour tous les individus, la matrice de variance-covariance du terme d'erreur est égale à :

$$V(\omega) = V \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} \Omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega \end{pmatrix} =$$

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} V(\omega_i) &= \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 e e' = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} e \left(e'e\right)^{-1} e' \right\} ; (e'e = T) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \lambda B \right\} = \sigma_\varepsilon^2 \Omega \end{aligned}$$

. avec $\lambda = \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ et $B = e\left(e'e\right)^{-1} e'$ est une matrice idempotente Si on considère les observations pour tous les individus, la matrice de variance-covariance du terme d'erreur est égale à :

$$V(\omega) = V \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} \Omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 diag(\Omega) = \sigma_\varepsilon^2 \Sigma$$

et

$$\Sigma = diag\left(\Omega\right)$$

et on montre que :

$$\Omega^{-1} =$$

La matrice de variance covariance de ω_i peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} V(\omega_i) &= \sigma_\varepsilon^2 I + \sigma_u^2 ee' = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} e\left(e'e\right)^{-1} e' \right\} ; (e'e = T) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ I + \lambda B \right\} = \sigma_\varepsilon^2 \Omega \end{aligned}$$

. avec $\lambda = \frac{T\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ et $B = e\left(e'e\right)^{-1} e'$ est une matrice idempotente Si on considère les observations pour tous les individus, la matrice de variance-covariance du terme d'erreur est égale à :

$$V(\omega) = V \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} \Omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 diag(\Omega) = \sigma_\varepsilon^2 \Sigma$$

et

$$\Sigma = diag\left(\Omega\right)$$

et on montre que :

$$\Omega^{-1} = I - \frac{\lambda}{1+\lambda} B \; ; \; B \text{ étant idempotente}$$

L'estimateur par Moindres Carrés Généralisée est défini par :

$$\widehat{\beta}_{mcg} = \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} x'\Sigma^{-1}y = \left(x'diag(\Omega^{-1})x\right)^{-1} x'diag(\Omega^{-1})y$$

x et y variables centrées autour des moyennes générales.

En faisons les mêmes développement que pour le modèle à effet fixe :

$$\widehat{\beta}_{mcg} = \beta + \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} x'\Sigma^{-1}(\varepsilon + D \cdot u)$$

L'estimateur par Moindres Carrés Généralisée est défini par :

$$\widehat{\beta}_{mcg} = \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} x'\Sigma^{-1}y = \left(x' diag(\Omega^{-1})x\right)^{-1} x' diag(\Omega^{-1})y$$

x et y variables centrées autour des moyennes générales.

En faisons les mêmes développement que pour le modèle à effet fixe :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} x'\Sigma^{-1}(\varepsilon + D \cdot u) \\ E(\widehat{\beta}_{mcg}) &= \beta \end{aligned}$$

L'estimateur par Moindres Carrés Généralisée est défini par :

$$\widehat{\beta}_{mcg} = \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} x'\Sigma^{-1}y = \left(x'diag(\Omega^{-1})x\right)^{-1} x'diag(\Omega^{-1})y$$

x et y variables centrées autour des moyennes générales.

En faisons les mêmes développement que pour le modèle à effet fixe :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} x'\Sigma^{-1}(\varepsilon + D \cdot u) \\ E(\widehat{\beta}_{mcg}) &= \beta \\ V(\widehat{\beta}_{mcg}) &= \sigma_\varepsilon^2 \left\{x'\Sigma^{-1}x\right\}^{-1} \end{aligned}$$

u le vecteur colonne des effets individuels.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Observations

✓

$$\Sigma^{-1} = diag(\Omega^{-1}) \quad = \quad diag(I) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B)$$

Observations

- ✓
$$\Sigma^{-1} = diag(\Omega^{-1}) \quad = \quad diag(I) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B)$$
$$= \quad diag(I) - diag(B) + diag(B) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B)$$

Observations

- ✓
$$\begin{aligned}\Sigma^{-1} = diag(\Omega^{-1}) &= diag(I) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B) \\ &= diag(I) - diag(B) + diag(B) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B) \\ &= M_D + \frac{1}{1+\lambda} D\left(D'D\right)^{-1} D'\end{aligned}$$

- ✓ Sachant que pré-multiplier un vecteur par M_D fournit les données centrées autour des moyennes individuelles ; $M_D x = M_D X$ et $M_D y = M_D Y$

Observations

- ✓
$$\begin{aligned}\Sigma^{-1} = diag(\Omega^{-1}) &= diag(I) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B) \\ &= diag(I) - diag(B) + diag(B) - \frac{\lambda}{1+\lambda} diag(B) \\ &= M_D + \frac{1}{1+\lambda} D\left(D'D\right)^{-1} D'\end{aligned}$$
- ✓ Sachant que pré-multiplier un vecteur par M_D fournit les données centrées autour des moyennes individuelles ; $M_D x = M_D X$ et $M_D y = M_D Y$
- ✓ $D\left(D'D\right) D'x = [\bar{X}_{Ii} - \bar{X}_I]$ et $D\left(D'D\right) D'y = [\bar{Y}_i - \bar{Y}]$

On considère les deux estimateurs suivants :

$$\widehat{\beta}_W = \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DY$$

On considère les deux estimateurs suivants :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_W &= \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D Y \\ \widehat{\beta}_b &= \left(x\prime D \left(D' D\right)^{-1} D' x\right)^{-1} x' D \left(D' D\right)^{-1} D' y\end{aligned}$$

On considère les deux estimateurs suivants :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_DY \\
\widehat{\beta}_b &= \left(x\prime D\left(D'D\right)^{-1} D'x\right)^{-1} x'D\left(D'D\right)^{-1} D'y \\
&= \left(x\prime DD'x\right)^{-1} x'DD'y
\end{aligned}$$

L'estimateur par MCG peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{mcg} &= \left\{x'\left(M_D + \frac{1}{1+\lambda} D\left(D'D\right)^{-1} D'\right)x\right\}^{-1} \\
&\quad \cdot \left(x'M_Dx\right)\widehat{\beta}_W + \frac{1}{1+\lambda}\left(x'D\left(D'D\right)D'x\right)\widehat{\beta}_b
\end{aligned}$$

On considère les deux estimateurs suivants :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_W &= \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_DY \\
\widehat{\beta}_b &= \left(x\prime D\left(D'D\right)^{-1}D'x\right)^{-1} x'D\left(D'D\right)^{-1}D'y \\
&= \left(x\prime DD'x\right)^{-1} x'DD'y
\end{aligned}$$

L'estimateur par MCG peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_{mcg} &= \left\{x'\left(M_D + \frac{1}{1+\lambda}D\left(D'D\right)^{-1}D'\right)x\right\}^{-1} \\
&\cdot \left(x'M_Dx\right)\widehat{\beta}_W + \frac{1}{1+\lambda}\left(x'D\left(D'D\right)D'x\right)\widehat{\beta}_b
\end{aligned}$$

Remarque : L'estimateur $\widehat{\beta}_b$ est obtenu en faisant cette régression :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1\bar{X}_{1i} + \beta_2\bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

Et on l'appelle l'estimateur between (Inter)

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$
Rappelons que :

$$\widehat{\beta}_W = \beta + \left(X'M_D X\right)^{-1} X'M_D \varepsilon$$

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_W &= \beta + \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D \varepsilon \\ \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x' \Omega^{-1} x\right\}^{-1} x' \Omega^{-1} (\varepsilon + D \cdot u) \end{aligned}$$

Et $Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg})$ peut être obtenu par la relation :

$$Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) = E\left((\widehat{\beta}_W - \beta)(\widehat{\beta}_{mcg} - \beta)'\right)$$

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$
Rappelons que :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_W &= \beta + \left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D \varepsilon \\ \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x' \Omega^{-1} x\right\}^{-1} x' \Omega^{-1} (\varepsilon + D \cdot u)\end{aligned}$$

Et $Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg})$ peut être obtenu par la relation :

$$\begin{aligned}Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) &= E\left((\widehat{\beta}_W - \beta)(\widehat{\beta}_{mcg} - \beta)'\right) \\ &= E\left(\left(X' M_D X\right)^{-1} X' M_D \varepsilon(\varepsilon' + u' D')\Omega^{-1} x \left\{x' \Omega^{-1} x\right\}^{-1}\right)\end{aligned}$$

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$
Rappelons que :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_W &= \beta + \left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon \\ \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1}x'\Omega^{-1}(\varepsilon + D\cdot u)\end{aligned}$$

Et $Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg})$ peut être obtenu par la relation :

$$\begin{aligned}Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) &= E\left((\widehat{\beta}_W - \beta)(\widehat{\beta}_{mcg} - \beta)'\right) \\ &= E\left(\left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_D\varepsilon(\varepsilon' + u'D')\Omega^{-1}x\left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1}\right) \\ &= \sigma_\varepsilon^2\left(X'M_DX\right)^{-1}X'M_DX\left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1}\end{aligned}$$

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$
Rappelons que :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_W &= \beta + \left(X'M_D X\right)^{-1} X' M_D \varepsilon \\ \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1} x'\Omega^{-1}(\varepsilon + D \cdot u) \end{aligned}$$

Et $Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg})$ peut être obtenu par la relation :

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) &= E\left((\widehat{\beta}_W - \beta)(\widehat{\beta}_{mcg} - \beta)'\right) \\ &= E\left(\left(X'M_D X\right)^{-1} X' M_D \varepsilon(\varepsilon' + u'D')\Omega^{-1}x\left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1}\right) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left(X'M_D X\right)^{-1} X' M_D X \left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1} = \end{aligned}$$

Le Test de Haussmann consiste à tester l'Hypothèse $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$
Rappelons que :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_W &= \beta + \left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_D\varepsilon \\ \widehat{\beta}_{mcg} &= \beta + \left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1} x'\Omega^{-1}(\varepsilon + D \cdot u)\end{aligned}$$

Et $Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg})$ peut être obtenu par la relation :

$$\begin{aligned}Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) &= E\left((\widehat{\beta}_W - \beta)(\widehat{\beta}_{mcg} - \beta)'\right) \\ &= E\left(\left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_D\varepsilon(\varepsilon' + u'D')\Omega^{-1}x\left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1}\right) \\ &= \sigma_\varepsilon^2\left(X'M_DX\right)^{-1} X'M_DX\left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1} \\ &= \sigma_\varepsilon^2\left\{x'\Omega^{-1}x\right\}^{-1} = V(\widehat{\beta}_{mcg})\end{aligned}$$

Ainsi :

$V(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}) =$

Ainsi :

$$V(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) + V(\widehat{\beta}_{mcg}) - 2Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg})$$

Ainsi :

$$V(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) + V(\widehat{\beta}_{mcg}) - 2Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})$$

Ainsi :

$$V(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) + V(\widehat{\beta}_{mcg}) - 2Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})$$

Et sous l'hypothèse de la normalité des deux termes ε_{it} et u_i :

$$\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg} \rightsquigarrow N(0, V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg}))$$

Ainsi :

$$V(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) + V(\widehat{\beta}_{mcg}) - 2Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})$$

Et sous l'hypothèse de la normalité des deux termes ε_{it} et u_i :

$$\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg} \rightsquigarrow N(0, V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg}))$$

Et en utilisant les Formes Quadratiques des Lois Normales, la statistique du test de Haussmann est donnée par :

Ainsi :

$$V(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) + V(\widehat{\beta}_{mcg}) - 2Cov(\widehat{\beta}_W, \widehat{\beta}_{mcg}) = V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})$$

Et sous l'hypothèse de la normalité des deux termes ε_{it} et u_i :

$$\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg} \rightsquigarrow N(0, V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg}))$$

Et en utilisant les Formes Quadratiques des Lois Normales, la statistique du test de Haussmann est donnée par :

$$H = \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right)' \left\{V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})\right\}^{-1} \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right) \rightsquigarrow \chi^2(k)$$

Observation : Si on accpte H_0, le modèle est à effet aléatoire

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$

Considérons le modèle between :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1 \bar{X}_{1i} + \beta_2 \bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \bar{X}_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

où $\bar{\omega}_i = \bar{\epsilon}_i + u_i$

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$
Considérons le modèle between :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1 \bar{X}_{1i} + \beta_2 \bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \bar{X}_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

où $\bar{\omega}_i = \bar{\epsilon}_i + u_i$

- $E(\bar{\omega}_i) = 0 \forall i$

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$
Considérons le modèle between :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1 \bar{X}_{1i} + \beta_2 \bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \bar{X}_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

où $\bar{\omega}_i = \bar{\epsilon}_i + u_i$

- $E(\bar{\omega}_i) = 0 \forall i$
- $V(\bar{\omega}_i) = \sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} + \sigma_u^2, \forall i$

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$
Considérons le modèle between :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1 \bar{X}_{1i} + \beta_2 \bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \bar{X}_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

où $\bar{\omega}_i = \bar{\epsilon}_i + u_i$

- $E(\bar{\omega}_i) = 0 \forall i$
- $V(\bar{\omega}_i) = \sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} + \sigma_u^2, \forall i$
- $E(\bar{\omega}_i \bar{\omega}_j) = 0 \forall i \neq j$

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$
Considérons le modèle between :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1 \bar{X}_{1i} + \beta_2 \bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \bar{X}_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

où $\bar{\omega}_i = \bar{\epsilon}_i + u_i$

- $E(\bar{\omega}_i) = 0 \forall i$
- $V(\bar{\omega}_i) = \sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} + \sigma_u^2, \forall i$
- $E(\bar{\omega}_i \bar{\omega}_j) = 0 \forall i \neq j$

Un estimateur sans biais de σ_b^2 est défini par :

$$\widehat{\sigma}_b^2 = \frac{SCR_b}{n - (k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{\bar{\omega}}_i^{\,2}}{n - (k+1)}$$

Le test de Breush-Pagan consiste à tester l'hypothèse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$
Considérons le modèle between :

$$\bar{Y}_i = \alpha + \beta_1 \bar{X}_{1i} + \beta_2 \bar{X}_{2i} + \cdots + \beta_k \bar{X}_{ki} + \bar{\omega}_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n$$

où $\bar{\omega}_i = \bar{\epsilon}_i + u_i$

- $E(\bar{\omega}_i) = 0 \forall i$
- $V(\bar{\omega}_i) = \sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T} + \sigma_u^2, \forall i$
- $E(\bar{\omega}_i \bar{\omega}_j) = 0 \forall i \neq j$

Un estimateur sans biais de σ_b^2 est défini par :

$$\widehat{\sigma}_b^2 = \frac{SCR_b}{n-(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \widehat{\bar{\omega}}_i^{\,2}}{n-(k+1)}$$

Et sous l'hypothèse de la normalité de $\varepsilon_i t$ et u_i :

$$\frac{SCR_b}{\sigma_b^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-(k+1))$$

On sait aussi que :

$$\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \rightsquigarrow \chi^2(nT - (n+k))$$

On sait aussi que :

$$\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \rightsquigarrow \chi^2(nT - (n+k))$$

Ainsi :

$$F = \frac{\frac{SCR_b}{\sigma_b^2} \Big/ n - (k+1)}{\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \Big/ nT - (n+k)}$$

On sait aussi que :

$$\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \rightsquigarrow \chi^2(nT - (n+k))$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{SCR_b}{\sigma_b^2} \Big/ n-(k+1)}{\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \Big/ nT-(n+k)} \\ &= \frac{SCR_b}{SCR_w} \times \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_b^2} \times \frac{nT-(n+k)}{n-(k+1)} \rightsquigarrow F(n-(k+1), nT-(n+k)) \end{aligned}$$

On sait aussi que :

$$\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \rightsquigarrow \chi^2(nT-(n+k))$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{SCR_b}{\sigma_b^2} \Big/ n-(k+1)}{\frac{SCR_w}{\sigma_\varepsilon^2} \Big/ nT-(n+k)} \\ &= \frac{SCR_b}{SCR_w} \times \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_b^2} \times \frac{nT-(n+k)}{n-(k+1)} \rightsquigarrow F(n-(k+1), nT-(n+k)) \end{aligned}$$

Or Sous l'hypothèse H_0, $\sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{T}$. Ce qui permet d'écrire la statistique du test sous la forme :

$$F = T\frac{SCR_b}{SCR_w} \times \frac{nT-(n+k)}{n-(k+1)} = T\frac{\widehat{\sigma}_b^2}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2} \rightsquigarrow F(n-(k+1), nT-(n+k))$$

Observation : Si on accepte H_0, le modèle est à effet fixe.

Exercice 1)
Un modèle à effet individuel reliant la demande d'un bien (D), à son prix (P) et le revenu du consommateur (R) est représenté comme suit :

$\log(D_{it}) = \alpha_i + \beta_1 \log(P_{it}) + \beta_2 \log(R_{it}) + \varepsilon_{it}, i = 1, \cdots, 18$ et $t = 1, \cdots, 19$
Avec $E(\varepsilon_{it}) = 0 \forall i, t$, $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_\varepsilon^2 \forall i, t$, $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}) = 0 \forall i \neq j$ ou $s \neq t$, $cov(R_{it}, \varepsilon_{js}) = 0 \forall i, j, t, s.$ et $cov(P_{it}, \varepsilon_{js}) = 0 \forall i, j, t, s.$.

1. L'estimation de ce modèle à donné les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_w &= \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8277 \\ 0.2573 \end{pmatrix}, \widehat{V}(\widehat{\beta}_w) = \begin{pmatrix} 0.00151 & 0.00121 \\ 0.00121 & 0.00473 \end{pmatrix} \\ \text{et } SCR_w &= 2022 \end{aligned}$$

   i Commenter les valeurs des estimateurs des parmètres des variables explicatives
   ii Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.
   iii Donner une estimation sans biais de la variance des erreurs.

2 On considère à présent un modèle à effet aléatoire :
$\log(D_{it}) = \alpha + \beta_1 \log(R_{it}) + \beta_2 \log(P_{it}) + w_{it}, \; i = 1, \cdots, N$ et $t = 1, \cdots, T$
avec $w_{it} = u_i + \varepsilon_{it}$ et $E(u_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma_u^2 \forall i, E(u_i u_j) = 0 \forall i \neq j$,
$E(\varepsilon_{it} u_j) = E(x_{it} u_j) = 0 \forall i, j, t$. L'estimation de ce modèle a conduit aux résultats suivants :

$$\widehat{\beta}_{mcg} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7895 \\ 0.17634 \end{pmatrix}, \text{et } \widehat{V}(\widehat{\beta}_{mcg}) = \begin{pmatrix} 0.00144 & 0.0011 \\ 0.0011 & 0.00417 \end{pmatrix}$$

- i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.
- ii Tester, de deux façons différentes et au seuil de 5%, le modèle à effet fixe contre le modèle à effet aléatoire (préciser l'hypothèse, la statistique du test ainsi que sa distribution) sachant que la somme des carrés des résidus du modèle between est égale à 5.2

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

β_1 et β_2 représentent respectivement les élasticités prix et revenu (de la demande).

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

β_1 et β_2 représentent respectivement les élasticités prix et revenu (de la demande). Ainsi, on estime que :

- Si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 0.83%
- Si le revenu augmente de 1%, la demande augmente de 0.25%

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

β_1 et β_2 représentent respectivement les élasticités prix et revenu (de la demande). Ainsi, on estime que :

- Si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 0.83%
- Si le revenu augmente de 1%, la demande augmente de 0.25%

ii Test de l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-18-2 = 322)$$

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

β_1 et β_2 représentent respectivement les élasticités prix et revenu (de la demande). Ainsi, on estime que :

- Si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 0.83%
- Si le revenu augmente de 1%, la demande augmente de 0.25%

ii Test de l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-18-2 = 322) \approx N(0,1$$

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

β_1 et β_2 représentent respectivement les élasticités prix et revenu (de la demande). Ainsi, on estime que :

- Si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 0.83%
- Si le revenu augmente de 1%, la demande augmente de 0.25%

ii Test de l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-18-2 = 322) \approx N(0, 1$$

Application numérique :

$$\widehat{t} = \frac{-0.8277 + 0.2573 + 0.5}{\sqrt{0.00151 + 0.00473 + 2 * 0.00121}} = -0.756\,51$$

$\left|\widehat{t}\right| < 1.96$ on accepte H_0

Solution

1. i Faisons remarquer que :

$$\beta_1 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(P)} \text{ et } \beta_2 = \frac{\partial \log(D)}{\partial \log(R)}$$

β_1 et β_2 représentent respectivement les élasticités prix et revenu (de la demande). Ainsi, on estime que :

- Si le prix augmente de 1%, la demande diminue de 0.83%
- Si le revenu augmente de 1%, la demande augmente de 0.25%

ii Test de l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18 * 19 - 18 - 2 = 322) \approx N(0, 1$$

Application numérique :

$$\widehat{t} = \frac{-0.8277 + 0.2573 + 0.5}{\sqrt{0.00151 + 0.00473 + 2 * 0.00121}} = -0.756\,51$$

$\left|\widehat{t}\right| < 1.96$ on accepte H_0

iii Estimation sans biais de la variance des erreurs.

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339)$$

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339) \approx N(0,1)$$

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\hat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339) \approx N(0,1)$$

$$\hat{t} = \frac{-0.7895 + 0.17634 + 0.5}{\sqrt{0.00144 + 0.00417 + 2 * 0.0011}} = -1.28$$

On accepte H_0

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339) \approx N(0,1)$$

$$\widehat{t} = \frac{-0.7895 + 0.17634 + 0.5}{\sqrt{0.00144 + 0.00417 + 2*0.0011}} = -1.28$$

On accepte H_0

ii a. Test de Haussman : $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$.

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339) \approx N(0,1)$$

$$\widehat{t} = \frac{-0.7895 + 0.17634 + 0.5}{\sqrt{0.00144 + 0.00417 + 2 * 0.0011}} = -1.28$$

On accepte H_0

ii a. Test de Haussman : $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$.La statistique du test est définie par :

$$H = \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right)' \left\{V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})\right\}^{-1} \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right) \rightsquigarrow \chi^2(2)$$

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\widehat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339) \approx N(0,1)$$

$$\widehat{t} = \frac{-0.7895 + 0.17634 + 0.5}{\sqrt{0.00144 + 0.00417 + 2 * 0.0011}} = -1.28$$

On accepte H_0

ii a. Test de Haussman : $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$.La statistique du test est définie par :

$$H = \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right)' \left\{V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})\right\}^{-1} \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right) \rightsquigarrow \chi^2(2)$$

Application numérique :

$$W = \begin{pmatrix} -0.0382 \\ 0.0810 \end{pmatrix}' \left\{ \begin{pmatrix} 0.00007 & 0.00011 \\ 0.00011 & 0.00056 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} -0.0382 \\ 0.0810 \end{pmatrix} = 167.516$$

2. i Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = -0.5$ au seuil de 5%.

$$\hat{t} = \frac{\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 + 0.5}{\sqrt{\widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + \widehat{V}(\widehat{\beta}_1) + 2\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)}} \rightsquigarrow St(18*19-1-2 = 339) \approx N(0,1)$$

$$\hat{t} = \frac{-0.7895 + 0.17634 + 0.5}{\sqrt{0.00144 + 0.00417 + 2 * 0.0011}} = -1.28$$

On accepte H_0

ii a. Test de Haussman : $H_0 : \widehat{\beta}_W = \widehat{\beta}_{mcg}$.La statistique du test est définie par :

$$H = \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right)' \left\{V(\widehat{\beta}_W) - V(\widehat{\beta}_{mcg})\right\}^{-1} \left(\widehat{\beta}_W - \widehat{\beta}_{mcg}\right) \rightsquigarrow \chi^2(2)$$

Application numérique :

$$W = \begin{pmatrix} -0.0382 \\ 0.0810 \end{pmatrix}' \left\{ \begin{pmatrix} 0.00007 & 0.00011 \\ 0.00011 & 0.00056 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} -0.0382 \\ 0.0810 \end{pmatrix} = 167.516$$

$W >> 5.99\ (\chi^2(2)^{5\%}$ On rejette H_0, Le modèle est à effet fixe.

2. ii b Test de Breush-Pagan : test $H_0 : \sigma_u^2 = 0$.

2. ii b Test de Breush-Pagan : test $H_0 : \sigma_u^2 = 0$.La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{T * \widehat{\sigma}_b^2}{\widehat{\sigma}_W^2}$$

2. ii b Test de Breush-Pagan : test $H_0 : \sigma_u^2 = 0$.La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{T * \widehat{\sigma}_b^2}{\widehat{\sigma}_W^2} = T\frac{\frac{SCR_b}{N-(k+1)}}{\frac{SCR_W}{NT-(N+K)}}$$

2. ii b Test de Breush-Pagan : test $H_0 : \sigma_u^2 = 0$.La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{T * \widehat{\sigma}_b^2}{\widehat{\sigma}_W^2} = T \frac{\frac{SCR_b}{N-(k+1)}}{\frac{SCR_W}{NT-(N+K)}} \rightsquigarrow F(N-(k+1), NT-(N+K))$$

2. ii b Test de Breush-Pagan : test $H_0 : \sigma_u^2 = 0$.La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{T * \widehat{\sigma}_b^2}{\widehat{\sigma}_W^2} = T \frac{\frac{SCR_b}{N-(k+1)}}{\frac{SCR_W}{NT-(N+K)}} \rightsquigarrow F(N-(k+1), NT-(N+K))$$

Application numérique :

$$F = 19 * \frac{5.2}{2022} \frac{322}{15} = 1.05 < F^{5\%}(15, 322) = 1.698$$

2. ii b Test de Breush-Pagan : test $H_0 : \sigma_u^2 = 0$.La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{T * \widehat{\sigma}_b^2}{\widehat{\sigma}_W^2} = T \frac{\frac{SCR_b}{N-(k+1)}}{\frac{SCR_W}{NT-(N+K)}} \rightsquigarrow F(N-(k+1), NT-(N+K))$$

Application numérique :

$$F = 19 * \frac{5.2}{2022} \frac{322}{15} = 1.05 < F^{5\%}(15, 322) = 1.698$$

On accepte H_0 , Le modèle est à effet fixe.

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro.

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro. u_i renseigne sur la distance **(à priori)** par rapport à la frontière de production.

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro. u_i renseigne sur la distance **(à priori)** par rapport à la frontière de production.
Notons que pour u_i donnée, $\varepsilon_{it} = \omega_{it} + u_i$ et la distribution à postériori de u_i sachant $\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T$ est obtenue par :

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro. u_i renseigne sur la distance **(à priori)** par rapport à la frontière de production.
Notons que pour u_i donnée, $\varepsilon_{it} = \omega_{it} + u_i$ et la distribution à postériori de u_i sachant $\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T$ est obtenue par :

$$f(u_i / \omega_{it} \;=\; 1, 2, \cdots, T) \propto f_u(u_i) \prod_{t=1}^{T} f_\varepsilon(\omega_{it} + u_i)$$

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro. u_i renseigne sur la distance **(à priori)** par rapport à la frontière de production.

Notons que pour u_i donnée, $\varepsilon_{it} = \omega_{it} + u_i$ et la distribution à postériori de u_i sachant $\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T$ est obtenue par :

$$\begin{aligned} f(u_i / \omega_{it} &= 1, 2, \cdots, T) \propto f_u(u_i) \prod_{t=1}^{T} f_\varepsilon(\omega_{it} + u_i) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2} u_i^2) \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\omega_{it} + u_i)^2) \end{aligned}$$

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro. u_i renseigne sur la distance **(à priori)** par rapport à la frontière de production.

Notons que pour u_i donnée, $\varepsilon_{it} = \omega_{it} + u_i$ et la distribution à postériori de u_i sachant $\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T$ est obtenue par :

$$\begin{aligned} f(u_i / \omega_{it} &= 1, 2, \cdots, T) \propto f_u(u_i) \prod_{t=1}^{T} f_\varepsilon(\omega_{it} + u_i) \\ &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2} u_i^2) \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\omega_{it} + u_i)^2) \\ &\propto \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2} u_i^2) \exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^{T} (\omega_{it} + u_i)^2) \end{aligned}$$

On considère le cas particuier d'une frontière de production, avec :

$$\omega_{it} = \varepsilon_{it} - u_i$$

où $\varepsilon_{it} \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et u_i suit la loi normale centrée et de variance σ_u^2 tronquée à zéro. u_i renseigne sur la distance **(à priori)** par rapport à la frontière de production.

Notons que pour u_i donnée, $\varepsilon_{it} = \omega_{it} + u_i$ et la distribution à postériori de u_i sachant $\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T$ est obtenue par :

$$\begin{aligned}
f(u_i / \omega_{it} &= 1, 2, \cdots, T) \propto f_u(u_i) \prod_{t=1}^{T} f_\varepsilon(\omega_{it} + u_i) \\
&\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2} u_i^2) \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\omega_{it} + u_i)^2) \\
&\propto \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2} u_i^2) \exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^{T} (\omega_{it} + u_i)^2)
\end{aligned}$$

$$\propto \quad \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2} u_i^2) \exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left[T u_i^2 + 2T\overline{\omega}_i \right])$$

$$
\begin{aligned}
&\propto \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2}u_i^2)\exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left[Tu_i^2+2T\overline{\omega}_i\right])\\
&\propto \exp(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)\left\{u_i^2+2\frac{T\overline{\omega}_i}{\sigma_\varepsilon^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}\right\})
\end{aligned}
$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}u_i^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left[Tu_i^2+2T\overline{\omega}_i\right]\right)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)\left\{u_i^2+2\frac{T\overline{\omega}_i}{\sigma_\varepsilon^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}\right\}\right)$$

On pose :

$$\sigma^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)} \text{ et } \lambda=\frac{\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}$$

$$\propto \quad \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2}u_i^2)\exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left[Tu_i^2 + 2T\overline{\omega}_i\right])$$

$$\propto \quad \exp(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_u^2} + \frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)\left\{u_i^2 + 2\frac{T\overline{\omega}_i}{\sigma_\varepsilon^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2} + \frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}\right\})$$

On pose :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2} + \frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)} \text{ et } \lambda = \frac{\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2} + \frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}$$

$$f(u_i / \omega_{it} = 1, 2, \cdots, T) \propto \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u_i^2 + 2\lambda\overline{\omega}_i\right)) \propto \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u_i + \lambda\overline{\omega}_i\right)^2)$$

$$\propto \exp(-\frac{1}{2\sigma_u^2}u_i^2)\exp(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left[Tu_i^2+2T\overline{\omega}_i\right])$$

$$\propto \exp(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)\left\{u_i^2+2\frac{T\overline{\omega}_i}{\sigma_\varepsilon^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}\right\})$$

On pose :

$$\sigma^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)} \text{ et } \lambda=\frac{\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}}{\left(\frac{1}{\sigma_u^2}+\frac{T}{\sigma_\varepsilon^2}\right)}$$

$$f(u_i/\omega_{it}=1,2,\cdots,T)\propto \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u_i^2+2\lambda\overline{\omega}_i\right))\propto \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u_i+\lambda\overline{\omega}_i\right)^2)$$

Il s'agit de la distribution d'une loi normale d'espérance mathématique $-\lambda\overline{\omega}_i$ et de variance σ^2, tronquée à zéro de densité :

$$f(u_i/\omega_{it}=1,2,\cdots,T)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\Phi\left(-\frac{\lambda\overline{\omega}_i}{\sigma}\right)}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u_i+\lambda\overline{\omega}_i\right)^2)$$

Exercice 2

1. Soit $\varepsilon \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$. Et considérons la variable normale tronquée à zéro définie par $u = \varepsilon / \varepsilon > 0$.
   a. Donner la densité de u
   b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.
2. Reprenez le modèle de données de panel avec frontière de production ; calculer $E\left(exp(a * u_i)/\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T\right)$
3. On considère l'indicateur d'efficacité d'une entreprise $TE_i = exp(-u_i)$ donner un estimateur de TE_i, noté $\widehat{TE}_i$.
4. Calculer la valeur de $\widehat{T}E$, sachant que $T = 15$, $\widehat{\bar{\omega}}_i = 0.5$, $\widehat{\sigma}^2_\varepsilon = 2$, et $\widehat{\sigma}^2_u = 0.75$

Corrigé

1. Soit $\varepsilon \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$. Et considérons la variable normale tronquée à zéro définie par $u = \varepsilon / \varepsilon > 0$.

   a. La densité de u est définie par

$$f(u) = \frac{f_\varepsilon(u)}{P(\varepsilon > 0)}$$

Corrigé

1. Soit $\varepsilon \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$. Et considérons la variable normale tronquée à zéro définie par $u = \varepsilon / \varepsilon > 0$.

   a. La densité de u est définie par

$$
\begin{aligned}
f(u) &= \frac{f_\varepsilon(u)}{P(\varepsilon > 0)} \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2) \text{ pour } u > 0
\end{aligned}
$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$E(e^{au}) = \int_0^{\infty} e^{au} f(u) du$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$E(e^{au}) = \int_0^{\infty} e^{au} f(u) du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{au} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$\begin{aligned} E(e^{au}) &= \int_0^{\infty} e^{au} f(u) du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{au} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du \\ &= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u-m)^2-2\sigma^2 au\right]} du \end{aligned}$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$\begin{aligned}
E(e^{au}) &= \int_0^{\infty} e^{au} f(u) du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{au} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u-m)^2-2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2mu+m^2-2\sigma^2 au\right]} du
\end{aligned}$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$\begin{aligned}
E(e^{au}) &= \int_0^{\infty} e^{au} f(u)du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{au} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u-m)^2-2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2mu+m^2-2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2u(m+\sigma^2 a)+m^2\right]} du
\end{aligned}$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$
\begin{aligned}
E(e^{au}) &= \int_0^{\infty} e^{au} f(u) du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{au} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u-m)^2 - 2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2 - 2mu + m^2 - 2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2 - 2u(m+\sigma^2 a) + m^2\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(u-\left(m+\sigma^2 a\right)\right)^2 + m^2 - \left(m+\sigma^2 a\right)^2\right]} du
\end{aligned}
$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$\begin{aligned}
E(e^{au}) &= \int_0^{\infty} e^{au} f(u)du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{au}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2}du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u-m)^2-2\sigma^2 au\right]}du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2mu+m^2-2\sigma^2 au\right]}du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2u(m+\sigma^2 a)+m^2\right]}du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(u-\left(m+\sigma^2 a\right)\right)^2+m^2-\left(m+\sigma^2 a\right)^2\right]}du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})}e^{am+\frac{\sigma^2 a^2}{2}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(u-\left(m+\sigma^2 a\right)\right)^2\right]}du
\end{aligned}$$

b. Calculer $E(e^{au})$ en fonction de m, σ et a.

$$\begin{aligned}
E(e^{au}) &= \int_0^{\infty} e^{au} f(u) du = \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{au} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u-m)^2-2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2mu+m^2-2\sigma^2 au\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2-2u(m+\sigma^2 a)+m^2\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(u-\left(m+\sigma^2 a\right)\right)^2+m^2-\left(m+\sigma^2 a\right)^2\right]} du \\
&= \frac{1}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} e^{am+\frac{\sigma^2 a^2}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(u-\left(m+\sigma^2 a\right)\right)^2\right]} du \\
&= \frac{\Phi(\frac{m}{\sigma}+\sigma a)}{\Phi(\frac{m}{\sigma})} e^{am+\frac{1}{2}\sigma^2 a^2}
\end{aligned}$$

2 Reprenez le modèle de données de panel avec frontière de production ; calculer $E\left(exp(a * u_i)/\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T\right)$. On sait que :

$$f\left(u_i \diagup \omega_{it} = 1, 2, \cdots, T\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\Phi\left(-\frac{\lambda\overline{\omega}_i}{\sigma}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(u_i + \lambda\overline{\omega}_i\right)^2\right)$$

Ainsi

$$E\left(exp(a * u_i)/\omega_{it} = 1, 2, \cdots, T\right) = \frac{\Phi(\frac{-\lambda\overline{\omega}_i}{\sigma} + \sigma a)}{\Phi(-\frac{\lambda\overline{\omega}_i}{\sigma})} e^{-a\lambda\overline{\omega}_i + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2}$$

3 On considère l'indicateur d'efficacité d'une entreprise $TE_i = exp(-u_i)$ donner un estimateur de TE_i, noté $\widehat{TE}_i$.

$$\widehat{TE}_i = \frac{\Phi(\frac{-\widehat{\lambda}\widehat{\overline{\omega}}_i}{\widehat{\sigma}} - \widehat{\sigma})}{\Phi(-\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\overline{\omega}}_i}{\widehat{\sigma}})} e^{\widehat{\lambda}\widehat{\overline{\omega}}_i + \frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2}$$

4 Calculer la valeur de $\widehat{TE}$, sachant que $T = 15$, $\widehat{\bar{\omega}}_i = 0.5$, $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = 2$, et $\widehat{\sigma}_u^2 = 0.75$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\widehat{\sigma}_u^2} + \frac{T}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{0.75} + \frac{15}{2}} = ? \\
\widehat{\lambda} &= \frac{\frac{T}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}}{\left(\frac{1}{\widehat{\sigma}_u^2} + \frac{T}{\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}\right)} = \frac{15}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{0.75} + \frac{15}{2}} = ? \\
\widehat{TE}_i &=
\end{aligned}
$$

Extraitt de "W. Greene, Economtics Analysis, 8^th edition". On considère pour 500 Banques, l'observation du logarithmes des coûts de productions (C), les logarithmes des prix relatifs (W_1, W_2, W_3, W_4, et les logarithmes des quantités produites pour 5 produits Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5. Et on adopte le modèle suivant :

$$\begin{aligned} C_{it} &= \alpha_i + \beta_1 Q_{1it} + \beta_2 Q_{2it} + \beta_3 Q_{3it} + \beta_4 Q_{4it} + \beta_5 Q_{5it} \\ &\quad + \theta_1 W_{1it} + \theta_2 W_{2it} + \theta_3 W_{3it} + \theta_4 W_{4it} + \epsilon_{it}, \\ &\quad \text{pour } i = 1, 2, \cdots, 500 \text{ et } t = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Les données sont fournies en annexe (Panel exo3.xls). A l'aide de la librairie plm du logiciel R :

1. Estimer le modèle à effet fixe
2. Estimer le modèle à effet aléatoire
3. Calculer l'indicateur d'économies d'échelle pour les deux modèles précédents. Commenter.
4. Tester de deux façons différentes le modèle à effet fixe contre le modèle à effet aléatoire

MERCI POUR VOTRE ATTENTION