Martingales en temps discret

I/ Définition : Filtration, temps d'arrêt et martingale

$(\Omega, F, \mathbb{P})$: espace de probabilité

Définition :

Une suite de sous tribus $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est dite une filtration, si $F_n \subseteq F_{n+1}$ $\forall n \geqslant 0$.

Exemple et définition :

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de v.a à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$

Posons $F_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$

$$F_n^X = \left\{ \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^{-1} (A) \ / \ A \in \mathcal{A}^{\otimes(n+1)} \right\}$$

= est la plus petite tribu sur Ω qui rend mesurable les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$

On constate que $F_n^X \subseteq F_{n+1}^X$

$(F_n^X)_{n\geqslant 0}$: s'appelle la filtration naturelle associée au processus à temps discret $(X_n)_{n\geqslant 0}$ $\underset{\hookrightarrow \text{ indice temps}}{}$

Définition :

Soient : • $(\Omega, F, \mathbb{P})$ espace de probabilité
• $(F_n)_{n\geqslant 0}$ une filtration

Alors : $(\Omega, F, (F_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ s'appelle espace de probabilité filtré

Définition :

Soient : • $(\Omega, F, (F_n)_{n\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré
• $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus discret à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$

On dit que le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(F_n)_{n\geqslant 0}$ si : X_n est F_n-mesurable. $\forall n \geqslant 0$

Remarque :

$(X_n)_{n\geqslant 0}$ est adapté à sa filtration naturelle $(F_n^X)_{n\geqslant 1}$ et $F_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$

• Si $(X_m)_{m\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$, alors $F_m^X \subseteq F_m$. ?

Définition :

Soient : • $(\Omega, F, (F_m)_{m\geq 0}, P)$ un espace de probabilité f

• $(X_m)_{m\geq 0}$ un processus à temps discret à valeurs dans $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$

On dit que $(X_m)_{m\geq 0}$ est une martingale (respectivement sur-martingale, respectivement sous-martingale) par rapport à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$ si :

• $(X_m)_{m\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$ (Càd : X_m est F_m-mes, $\forall m\geq 0$)

• $E(|X_m|) < +\infty$, $\forall m \geq 0$

• $E(X_{m+1}/F_m) = X_m$ Pps (respectivement $E(X_{m+1}/F_m) \leq X_m$ Pps, respectivement $E(X_{m+1}/F_m) \geq X_m$ Pps) $\forall m\geq 0$

Exemple :

$X_m = \begin{cases} 1 & \text{on obtient pile au mième lancer} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad P(Pile) = P$, $P(Face) = 1-P$

$X_0 = x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad F_0 = \{\emptyset, \Omega\} \to$ زوالطبيعة

$S_m = X_0 + \dots + X_m$ = Fortune juste après le mième lancer ثروة بعد

$F_m = \sigma(X_1, \dots, X_m)$ $m\geq 1$

• S_m est F_m^X-mesurable, $\forall m\geq 0 \Rightarrow (S_m)_{m\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_m^X)_{m\geq 0}$

• $|S_m| \leq x_0 + m \in \mathcal{L}^1(P) \Rightarrow E(|S_m|) < +\infty$ $\forall m\geq 0$

• $E(S_{m+1}/F_m) = E(S_m + X_{m+1}/F_m) = E(S_m/F_m) + E(X_{m+1}/F_m)$

$= S_m + E(X_{m+1})$ car S_m est F_m^X-mesurable et $X_{m+1} \perp F_m$

donc $E(X_{m+1}/F_m) = E(X_{m+1}) = 2P-1$

d'où $E(S_{m+1}/F_m) = S_m + (2P-1)$

Cas 1 : $p = 1/2$: S_m est une martingale

Cas 2 : $p < 1/2$: S_m est une sur-martingale $E(S_{m+1}/F_m) \leq S_m$ Pps

Cas 3 : $p > 1/2$: S_m est une sous martingale $E(S_{m+1}/F_m) \geq S_m$ Pps

Définition :

Soient : • $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré

• $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique

On dit que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, si X_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\forall n\geq 0$ et X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Définition :

Soient : • $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré

• T une v.a à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

On dit que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si $(T\leq n) \in \mathcal{F}_n$, $\forall n\geq 0$

Propriétés et exemples :

- Soient : • $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré

  • T une v.a à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$

T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ssi $(T=n) \in \mathcal{F}_n$, $\forall n\geq 0$

↳ en effet :

"$\Rightarrow$" $(T=n) = \underbrace{(T\leq n)}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{(T\leq n-1)}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$, car $\mathcal{F}_n$ est une tribu

"$\Leftarrow$" $(T\leq n) = \bigcup_{k=0}^{n} (T=k)$; $(T=k) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, $0\leq k \leq n \Rightarrow (T\leq n) \in \mathcal{F}_n$

car $\mathcal{F}_n$ est une tribu $\qquad$ $\{\emptyset, \Omega\}$: la tribu grossière

- Soient : • $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré

  • $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (c.à.d X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\forall n\geq 0$)

  prévisible $\Rightarrow X_{n+1}$ est $\mathcal{F}_n$-mes

  • $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Posons $T = \inf\{n\geq 0 \,/\, X_n \in A\}$; $\inf \emptyset = +\infty$

Montrons que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

$(T\leq n) = (T>n)^c$ or $(T>n) = (X_0 \notin A, \dots, X_n \notin A) = (X_0 \in A^c, \dots, X_n \in A^c)$

$$= \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}^{-1} (A^c \times \dots \times A^c) \in \mathcal{F}_n$$

↑ car $(X_n)_{n\geq 0}$ est adapté à la filtration

II/ Théorèmes d'arrêt:

Définition:

Soient: • $(\Omega, F, (F_n)_{n\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré

• T un temps d'arrêt par rapport à $(F_n)_{n\geq 0}$

• (X_n) un processus stochastique à valeurs dans $(\mathcal{X}, A)$

Posons $X_n^T = X_{n\wedge T} = \begin{cases} X_n & \text{si } n \leq T \\ X_T & \text{si } n \geq T \end{cases}$ $X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \leq T(\omega) \\ X_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } n \geq T(\omega) \end{cases}$

Le processus $(X_n^T)_{n\geq 0}$ s'appelle le processus d'arrêt de $(X_n)_{n\geq 0}$ par le temps d'arrêt T

Propriétés:

sous les notations de la définition précédente:

• $X_n^T = X_{n\wedge T} = \sum_{k=0}^{n} X_k . 1_{\{T=k\}} + X_n . 1_{\{T>n\}}$

↳ en effet:

$$X_{n\wedge T} = X_{n\wedge T}.1_\Omega = X_{n\wedge T} 1_{(\bigcup_{k=0}^{n}(T=k)) \cup (T>n)}$$
$$= X_{n\wedge T}\left(\sum_{k=0}^{n} 1_{\{T=k\}} + 1_{\{T>n\}}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} X_{n\wedge T} 1_{\{T=k\}} + X_n . 1_{\{T>n\}}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} X_k . 1_{\{T=k\}} + X_n 1_{\{T>n\}}$$

• Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$, alors le processus $(X_n^T)_{n\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$

↳ en effet:

$$X_n^T = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{X_k}_{\substack{F_k\text{-mes} \\ \Downarrow \\ F_n\text{-mesurable}}} . \underbrace{1_{\{T=k\}}}_{\substack{\in F_k \subset F_n \\ \text{est } F_n\text{-mes}}} + \overbrace{X_n}^{\text{est } F_n\text{-mesurable}} 1_{\underbrace{\{T>n\}}_{\substack{=(T\leq n)^c \in F_n \Rightarrow 1_{\{T>n\}} \text{ est} \\ F_n\text{-mesurable}}}} \Rightarrow \text{est } F_n\text{-mesurable}$$

• Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est dans $L^1(P)$ (càd $E(|X_n|) < +\infty, \forall n\geq 0$), alors le processus $(X_n^T)_{n\geq 0}$ est dans $L^1(P)$ (càd $E(|X_n^T|) < +\infty, \forall n \geq 0$)

↳ en effet:

$$|X_n^T| \leq \sum_{k=0}^{n} |X_k| + |X_n| \in L^1(P) \Rightarrow E(|X_n^T|) < +\infty$$

$X_{m+1}^T - X_m^T = (X_{m+1} - X_m)\,\mathbb{1}_{\{T>m\}}$

↳ en effet :

$$X_{m+1}^T - X_m^T = \sum_{k=0}^{m+1} X_k . \mathbb{1}_{\{T=k\}} + X_{m+1}\mathbb{1}_{\{T>m+1\}} - \sum_{k=0}^{m} X_k . \mathbb{1}_{\{T=k\}}$$

$$- X_m \mathbb{1}_{\{T>m\}} = X_{m+1} . \mathbb{1}_{\{T=m+1\}} + X_{m+1} . \mathbb{1}_{\{T>m+1\}} - X_m . \mathbb{1}_{\{T>m\}}$$

$$= X_{m+1}\underbrace{\left(\mathbb{1}_{\{T=m+1\}} + \mathbb{1}_{\{T>m+1\}}\right)}_{T\geq m+1 \Rightarrow T>m} - X_m . \mathbb{1}_{\{T>m\}} = (X_{m+1} - X_m)\,\mathbb{1}_{\{T>m\}}$$

- si $(X_m)_{m\geq 0}$ est une martingale (respectivement sur-martingale, respectivement sous-martingale) par rapport à $(F_m)_{m\geq 0}$, alors $(X_m^T)_{m\geq 0}$ est une martingale (respect. sur-mar, respect sous mar) par rapport à $(F_m)_{m\geq 0}$

↳ en effet :

$$E(X_{m+1}^T - X_m^T / F_m) = E\left((X_{m+1} - X_m)\mathbb{1}_{\{T>m\}} / F_m\right) = \overbrace{\mathbb{1}_{(T>m)} E(X_{m+1} - X_m / F_m)}^{\circledast}$$

P_{ps} $(T>m) = (T\leq m)^c \in F_m$
$\Rightarrow \mathbb{1}_{\{T>m\}}$ est F_m-mesurable

1er cas : $(X_m)_{m\geq 0}$ est une martingale

$\circledast = 0 \Rightarrow (X_m^T)$ est une martingale

$E(X_{m+1}/F_m) = X_m$ P_{ps} $\Rightarrow E(X_{m+1} - X_m / F_m) = 0$
X_m est F_m-mesurable

2ème Cas : $(X_m)_{m\geq 0}$ est une sur-martingale

$\circledast \leq 0 \Rightarrow (X_m^T)_{m\geq 0}$ est une sur-martingale

$E(X_{m+1}/F_m) \leq X_m$ P_{ps}
$\Rightarrow E(X_{m+1} - X_m / F_m) \leq 0$

3ème cas : identique $\circledast \geq 0 \Rightarrow (X_m^T)_{m\geq 0}$ est une sous-martingale

Théorème d'arrêt :

Soient :
- $(\Omega, F, (F_m)_{m\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré
- T un t.a par rapport à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$
- $(X_m)_{m\geq 0}$ est une martingale (resp sur-martingale, resp sous-mart) par rapport à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$

↳ Alors : $E(|X_T|) < +\infty$ et $E(X_T) = E(X_0)$ (resp $\leq E(X_0)$) (resp $\geq E(X_0)$) dans l'une des conditions suivantes :

1 _ T est borné, càd $\exists n\geq 0$ (non aléatoire) tq $T\leq n$

2 - $T<+\infty$ P_{ps} et $(X_m^T)_{m\geq 0}$ est borné dans $L^{\infty}(P)$ (Càd $\exists n\geq 0$ non aléat tq $|X_m^T| \leq n$ P_{ps} $\forall m\geq 0$)

3- $E(T) < +\infty$ et $(\Delta X_m)_{m \geq 0}$ est bornée dans $L^\infty(P)$ (Càd $\exists\, n > 0$ tq non aléatoire
$|\Delta X_m| \leq n$ Pps, $\forall m \geq 0$)

Preuve :

$(X_m)_{m\geq 0}$ est une martingale (resp. sur-mar) par rapport à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$ $\Rightarrow (X_m^T)_{m\geq 0}$ est une martingale (resp. sur-mar) par rapport à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$

Martingale : $E(X_m^T) = E(X_{m+1}^T) = \dots = E(X_0^T) = E(X_0)$ $\Big|$ $E(X_m^T) = E(X_0)$

Sur-martin : $E(X_{m+1}^T) \leq E(X_m^T) \leq \dots \leq E(X_0)$ $\Big|$ (resp $\leq E(X_0)$)

a/ T est borné $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}^* \,/\, T \leq m$

$$X_m^T = \sum_{K=0}^{m} X_K \mathbb{1}_{\{T=K\}} + X_m \mathbb{1}_{\{T>m\}}$$

$m \geq m \Rightarrow \mathbb{1}_{\{T>m\}} = 0$ et $\mathbb{1}_{\{T=K\}} = 0$ si $K > m$

$$m \leq m \Rightarrow X_m^T = \sum_{K=0}^{m} X_K \mathbb{1}_{\{T=K\}} \Rightarrow |X_m^T| \leq \sum_{K=0}^{m} |X_K| = Y \in L^1(P)$$

$X_m^T = X_{m\wedge T} \xrightarrow[m\to+\infty]{} X_T$ Grâce au thm de Conv monotone

$$\lim_{m\to+\infty} E(X_m^T) = E(\lim_{m\to+\infty} X_m^T) = E(X_T)$$

$= E(X_0)$ martingale $\Rightarrow E(X_T) = E(X_0)$ martingale

$\leq E(X_0)$ sur-mar $\Rightarrow E(X_T) \leq E(X_0)$ sur-mar

b/ $T < +\infty$ et $(X_m^T)_{m\geq 0}$ est bornée dans $L^\infty(P)$ (Càd $\exists\, n > 0 \,/\, |X_m^T| \leq n$ Pps)

$X_m^T = X_{m\wedge T} \longrightarrow X_T$ sur $(T < +\infty)$ et $P(T < +\infty) = 1$

Càd $X_m^T \xrightarrow[m\to+\infty]{} X_T$ Pps

$|X_m^T| = |X_{m\wedge T}| \leq n$ Pps $\quad E(n) = n < +\infty$

Grâce au TCD on a $\lim\limits_{m\to+\infty} E(X_m^T) = E(\lim\limits_{m\to+\infty} X_m^T) = E(X_T)$

c/ $T \in L^1(P)$ et $(\Delta X_m)_{m\geq 0}$ est borné dans $L^\infty(P)$ (Càd $\exists\, n > 0 \,/\, |\Delta X_m| \leq n$ Pps $\forall m \geq 0$)

. $E(T) < +\infty \Rightarrow P(T < +\infty) = 1 \Rightarrow X_m^T = X_{m\wedge T} \xrightarrow[m\to+\infty]{} X_T$ Pps

$$X_m^T = X_{m\wedge T} = (X_{m\wedge T} - X_{(m\wedge T)-1}) + (X_{(m\wedge T)-1} - X_{(m\wedge T)-2}) + \dots + (X_1 - X_0) + X_0$$

$$|X_m^T| \leq \sum_{K=0}^{m\wedge T} |\Delta X_K| + |X_0| \qquad \Delta X_0 = X_0$$

$$\leq n.(m\wedge T) + |X_0| \leq n.T + |X_0| \in L^1(P)$$

Dû au thm de CVD, $\lim_{m\to+\infty} E(X_{m\wedge T}) = E(\lim_{m\to+\infty} X_{m\wedge T}) = E(X_T) = E(X_0)$ Mar

$\leq E(X_0)$ sur Mar

III/ Théorème de Convergence :

Théorème 1 : "Admis" "Convergence Pps"

Soit $(X_m)_{m\geq 0}$ une sur-Martingale par rapport à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$, bornée dans $L^1(P)$ (Càd $\sup E(|X_m|) < +\infty$) Alors : il existe une var X_∞ tq $E(|X_\infty|) < +\infty$ et $X_m \xrightarrow[m\to+\infty]{Pps} X_\infty$

Attention : La convergence de $(X_m)_{m\geq 0}$ vers X_∞ n'est pas forcément dans $L^1(P)$ (càd $E(|X_m - X_\infty|) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ pas toujours)

Contre exemple :

$(U_K)_{K\geq 1}$ v.a càd / $P(U_K = 0) = P(U_K = 2) = 1/2$

$F_m = \sigma(U_1, \dots, U_m)$; $X_m = \prod_{K=1}^{m} U_K$, $m \geq 1$, $X_0 = 0$

$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

. X_m est F_m-mesurable $\Rightarrow (X_m)_{m\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_m)_{m\geq 0}$

. $X_m \geq 0$ $E(X_m) \prod_{K=1}^{m} E(U_K) = (E(U_1))^m = 1$

$E(U_1) = 0 \times 1/2 + 2 \times 1/2 = 1$

$\rightarrow \sup_{m\geq 0} E(|X_m|) = 1 < +\infty$

$E(X_{m+1}|F_m) = E(X_m U_{m+1}/F_m) = X_m E(U_{m+1}/F_m) = X_m E(U_1) = X_m$

X_m est F_m-mesurable $\quad U_{m+1} \perp F_m$

D'après le thm précédent $X_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} X_0$ Pps et $E(|X_\infty|) < +\infty$

$(X_m \neq 0) = (U_1 \neq 0, \dots, U_m \neq 0) \Rightarrow P(X_m \neq 0) = (P(U_1 \neq 0))^m = (1/2)^m$

$E(1_{X_m\neq 0}) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

$\left.\begin{array}{l} 1_{(X_m \neq 0)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1_{\{X_\infty \neq 0\}} \\ 1_{(X_m \neq 0)} \leq 1 \in L^1(P) \end{array}\right\} \underset{TCD}{\Rightarrow} E(1_{(X_m\neq 0)}) \xrightarrow[m\to+\infty]{} E(1_{(X_\infty \neq 0)}) = P(X_\infty \neq 0) = 0$

Càd $X_\infty = 0$ Pps

$E(|X_m - X_\infty|) = E(|X_m|) = E(X_m) = 1 \underset{m\to+\infty}{\not\to} 0$

Théorème 2 : "Convergence dans $L^2(P)$"

Soit $(X_m)_{m\geq 0}$ une martingale % à F_m bornée dans $L^2(P)$ (Càd : $\sup_{m\geq 0} E(X_m^2) < +\infty$)

Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge Pps et dans $L^2(P)$ vers une v.a.r X_∞ avec $E(X_\infty^2) < +\infty$ (Càd $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Pps} X_\infty$ et $E((X_n - X_\infty)^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Preuve :

$$X_n = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) + \dots + (X_1 - X_0) + X_0 = \sum_{k=0}^{n} \Delta X_k$$

$\Delta X_0 = X_0$

$E(\Delta X_k . \Delta X_l) = 0$ pour $k \neq l$, en effet :

$l < k$, $E(\Delta X_k . \Delta X_l) = E(E(\Delta X_k . \Delta X_l / F_l)) = E(\Delta X_l E(\Delta X_k | F_l))$

$$= E\Big(\Delta X_l \big(\underbrace{E(X_k | F_l)}_{X_l} - \underbrace{E(X_{k-1} | F_l)}_{X_l}\big)\Big) = 0$$

$k-1 \geq l$

$E(X_{n+m} | F_n) = X_n$

$F_n \subseteq F_{n+m-1}$

$E(E(X_{n+m} / F_{n+m-1}) / F_n) = E(X_{n+m} | F_n) = E(X_{n+m-1} | F_n)$

$= E(X_n | F_n) = X_n$

$$E(X_n^2) = E\Big(\big(\sum_{k=0}^{n} \Delta X_k\big)^2\Big) = \sum_{\substack{k=0,\dots,n \\ l=0,\dots,n}} E(\Delta X_k \Delta X_l)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} E((\Delta X_k)^2)$$

$$\sup_{n\geq 0} E(X_n^2) < +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} E((\Delta X_k)^2) < +\infty$$

$m < n$ $(X_n - X_m)^2 = \left(\sum_{k=m+1}^{n} \Delta X_k\right)^2 \Rightarrow E((X_n - X_m)^2) = \sum_{k=m+1}^{n} E((\Delta X_k)^2) \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}]{} 0$

$(X_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(P)$

or $L^2(P)$ est complet $\Rightarrow$ toute suite de Cauchy converge

Càd $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(P)} X$ | $E((X_n - X)^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ où $X \in L^2(P)$)

$E(|X_n|) \leq (E(X_n^2))^{\frac{1}{2}}$, or $\sup E(X_n^2) < +\infty \Rightarrow \sup_n E(|X_n|) < +\infty$

Grâce au thm précédent $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Pps} Z$ $E(|Z|) < +\infty$

La convergence en moyenne quadratique $(L^2(P)) \Rightarrow$ Conv en Proba

La cv Pps $\Rightarrow$ La cv en proba.

Chaîme de Markov

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité

E espace d'états = ensemble au plus dénombrable

$(X_n)_{n\geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans E $X_0, \ldots, X_{n-1}$: passé

n : présent

$n+1$: futur le plus proche

I/ Définition et probabilité élémentaire :

Définition :

Sous les notations ci-dessus, on dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur E si : $\mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x)$

$\forall x_0, \ldots, x_{n-1}, x, y \in E$

Si de plus, $\mathbb{P}(X_{n+1} = y / X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y / X_n = x)$ $\forall x, y \in E$ alors on dit que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène

Dans la suite de ce chapitre, on utilise seulement les chaînes de Markov homogènes

Posons $Q(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y / X_0 = x)$ $\forall x, y \in E$

Q est une application de
$$\begin{aligned} E\times E &\longrightarrow [0,1] \\ (x,y) &\longmapsto Q(x,y) \end{aligned}$$
tq $\begin{cases} 0 \leq Q(x,y) \leq 1 \\ \sum_{y\in E} Q(x,y) = 1 \end{cases}$

En effet :

$$\sum_{y\in E} Q(x,y) = \sum_{y\in E} \mathbb{P}(X_1 = y / X_0 = x) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{y\in E}(X_1 = y) / X_0 = x\Big) = 1$$

Définition :

Soit Q_1 une application : $E\times E \longrightarrow [0,1]$ tq $\begin{cases} 0 \leq Q_1(x,y) \leq 1 & \forall x, y \in E \\ \sum_{y\in E} Q_1(x,y) = 1 & \forall x \in E \end{cases}$

Q_1 s'appelle matrice de transition sur E / noyau

$$Q_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \\ x_i \\ \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_j & x_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} Q(x_1,x_1) & Q(x_1,x_j) & \\ & & \\ & \sum Q(x_i,x_j) & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ =1 \\ \\ =1 \\ \\ =1 \end{array}$$

Propriétés :

Soient Q_1 et Q_2 deux matrices de transitions sur E. Posons $Q(x,y) = \sum_{z\in E} Q_1(x,z).Q_2(z,y)$ $\forall x,y \in E$ Q est une matrice de transition sur E ($Q = Q_1Q_2$)

Preuve :

. $Q(x,y) \geq 0$ $\forall x, y \in E$ (évident)

. $\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$?

$$\sum_{y\in E} Q(x,y) = \sum_{y\in E}\sum_{z\in E} Q_1(x,z).Q_2(z,y)$$
$$= \sum_{z\in E} Q_1(x,z)\underbrace{\left(\sum_{y\in E} Q_2(z,y)\right)}_{=1} = \sum_{z\in E} Q_1(x,z) = 1$$

Car Q_1 et Q_2 sont deux matrices de transitions

Propriétés : " Equation de Chapman-Kolmogorov" :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de loi initiale μ et de matrice de transition Q (càd $\mu(x) = P(X_0 = x)$. $\forall x \in E$ et $Q(x,y) = P(X_1 = y / X_0 = x)$ $\forall x, y \in E$)

$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0) Q(x_0, x_1) Q(x_1, x_2) \ldots Q(x_{n-1}, x_n)$

$\forall x_0, \ldots, x_n \in E$

On dit que la loi de chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur E est complètement caractérisé par μ et Q

Preuve :

$$P(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_0).P(A_1/A_0).\underbrace{P(A_2/A_0\cap A_1)}_{P(X_2=x_2/X_0=x_0,X_1=x_1) = P(X_2=x_2/X_1=x_1)} \ldots \underbrace{P(A_n/A_0\cap\ldots\cap A_{n-1})}_{P(X_n=x_n/X_{n-1}=x_{n-1})}$$

Exemples et applications : système dynamique ou bien récurrence aléatoire :

- E ensemble au plus dénombrable
- F ensemble quelconque
- H une application mesurable de $E\times F$ dans E
- X_0 une v.a à valeurs dans E, de loi μ :

$P_{X_0}(x) = P(X_0 = x) = \mu(x)$ $\forall x \in E$

* $(Y_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a iid à valeurs dans F, de loi D et $X_0 \perp (Y_n)_{n\geq1}$
Posons $X_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $(X_n)_{n\geq0}$ est une chaîne de Markov sur E

En effet :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = H(X_0, Y_1) \\ X_2 = H(X_1, Y_2) \\ \vdots \\ X_n = H(X_{n-1}, Y_n) \end{array}\right\} \quad X_n \text{ s'exprime en fonction de } X_0, Y_1, \dots, Y_n$$

$P(X_{n+1} = y / X_0 = x_0, \dots, X_n = x) = P(H(X_n, Y_{n+1}) = y / X_0 = x_0, \dots, X_n = x)$

$= P(H(x, Y_{n+1}) = y / X_0 = x_0, \dots, X_n = x) = P(H(x, Y_{n+1}) = y)$ les Y sont de même loi

$Y_{n+1} \perp$ s'exp en fct $(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$ $\quad = P(H(x, Y_1) = y) = Q(x, y)$

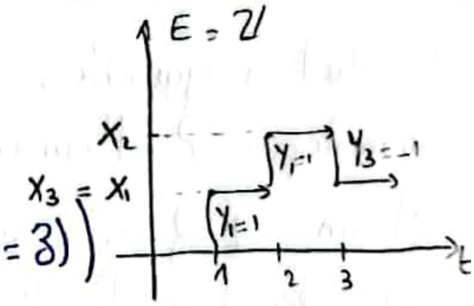
Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$:

* $X_0 = 0$, $(Y_n)_{n\geq1}$ v.a. iid $P(Y_n = 1) = p$ $\quad P(Y_n = -1) = 1 - p$

$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \qquad E = \mathbb{Z} \qquad F = \{-1, 1\}$

$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} = H(X_n, Y_{n+1}) \qquad H : E \times F \longrightarrow E, \quad (x, z) \longmapsto x + z$

$(X_n)_{n\geq1}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$, car $(X_n)_{n\geq0}$ est une récurrence aléatoire



Si de plus, F est au plus dénombrable

$Q(x, y) = P(H(x, Y_1) = y) = P\left(\bigcup_{z \in F / H(x,z) = y} (Y_1 = z)\right)$

$= \sum_{z \in F / H(x,z) = y} P(Y_1 = z) = \sum_{z \in F / H(x,z) = y} D(z)$

$Q(x, y) = P(H(x, Y_1) = y) = \sum_{z \in F / \underbrace{H(x,z) = y}_{x + z = y}} D(z) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } y = x - 1 \\ p & \text{si } y = x + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Produit à droite :

$F(E, \mathbb{R})$ = l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$

E_μ ; P_μ on veut dire que $\mathcal{L}(X_0) = \mu$

E_x ; P_x on veut dire que $\mathcal{L}(X_0) = \delta_x$ (d'une manière certaine, la chaîne part de x)

On suppose que $|E| = m$ $E = \{x_1, \dots, x_m\}$

$$\begin{array}{c|c} & x_1 \;\cdots\; x_j \;\cdots\; x_m \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{array} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & \cdots & Q(x_i, x_j) & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_j) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qf(x_1) \\ \vdots \\ Qf(x_i) \\ \vdots \\ Qf(x_m) \end{pmatrix}$$

l'application f de E dans $\mathbb{R}$ s'identifie par au vecteur colonne $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix}$

$$Qf(x_i) = \sum_{j=1}^{m} Q(x_i, x_j)\, f(x_j)$$

$\mathcal{L}(X_0)\, Q = \mathcal{L}(X_1)$

$\mathcal{L}(X_m)\, Q = \mathcal{L}(X_{m+1})$

loi de μ : la loi de X_0

$$F(E, \mathbb{R}) \longrightarrow F(E, \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto Qf \,/\, Qf(x) = \sum_{y \in E} Q(x, y)\, f(y)$$

Q app

Cet opérateur sera noté encore Q

$$E_\mu\big(f(X_1)\big) = E_\mu\Big(E_\mu\big(f(X_1)/X_0\big)\Big) = E_\mu\big(L(X_0)\big) = \sum_{x \in E} L(x)\, \underbrace{P_\mu(X_0 = x)}_{\mu(x)}$$

Si $\mu = \delta_z$ alors $E_z\big(f(X_1)\big) = L(z) = E_z\big(f(X_1)/X_0 = z\big)$

$$E_z\big(f(X_1)/X_0 = z\big) = \sum_{y \in E} f(y).\, \underbrace{P(X_1 = y / X_0 = z)}_{Q(z, y)} = Qf(z)$$

A Retenir :

$$E\big(f(X_1)/X_0 = x\big) = Qf(x) = L(x) = E_x\big(f(X_1)\big)$$

$$E\big(\underset{X_{m+1}}{f(X_1)} / \underset{X_m}{X_0}\big) = Qf(\underset{X_m}{X_0}) = L(\underset{X_m}{X_0}) \Rightarrow E\big(f(X_{m+1})/X_m\big) = Qf(X_m)$$

Produit à gauche :

On note par $\mathcal{P}$ = l'ensemble des mesures positives sur E μ : mesure de prob

$|E| = m$ $E = \{x_1, \dots, x_m\}$

une mesure positive μ sur E s'identifie au vecteur ligne $\big(\mu(x_1), \dots, \mu(x_m)\big)$

$$\big(\mu(x_1) \dots \mu(x_m)\big) \begin{array}{c|c} & x_1 \;\cdots\; x_j \;\cdots\; x_m \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{array} & \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & \cdots & Q(x_i, x_j) & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} = \big((\mu Q)(x_1), \dots, (\mu Q)(x_j), \dots, (\mu Q)(x_m)\big)$$

$$(\mu Q)(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(x_i)\, Q(x_i, x_j)$$

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$\mu \longmapsto \mu Q \,/\, (\mu Q)(y) = \sum_{x \in E} \mu(x).\, Q(x, y)$$

$$(\mu Q)(E) = \sum_{y \in E} (\mu Q)(y) = \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \mu(x).\, Q(x, y) = \sum_{x \in E} \mu(x) \underbrace{\sum_{y \in E} Q(x, y)}_{=1}$$

$= \sum_{x \in E} \mu(x) = \mu(E)$ $\Rightarrow$ Si μ est mes de prob $\Rightarrow$ μQ est mes de prob

$\mu = \mathcal{L}(X_0)$ $\quad P_\mu(X_1 = y) = P_\mu\left((X_1 = y) \cap \left(\bigcup_{x \in E} (X_0 = x)\right)\right) = \sum_{x \in E} P_\mu(X_1 = y, X_0 = x)$

$= \sum_{x \in E} P_\mu(X_0 = x) P_\mu(X_1 = y / X_0 = x) = \sum_{x \in E} \mu(x)\, Q(x,y) = (\mu Q)(y) \quad \forall y \in E$

$\mathcal{L}(X_0) Q = \mathcal{L}(X_1)$ car $P(X_1 = y) = \sum_{x \in E} P(X_0 = x)\, Q(x,y) \quad \forall y \in E$

$\mathcal{L}(X_n) Q = \mathcal{L}(X_{n+1})$

$P(X_{n+1} = y) = P\left((X_{n+1} = y) \cap \left(\bigcup_{x \in E} (X_n = x)\right)\right) = \sum_{x \in E} P(X_n = x) \underbrace{P(X_{n+1} = y / X_n = x)}_{Q(x,y)}$

mesure de prob ≠ applic

La vecteur ligne

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(X_0) Q = \mathcal{L}(X_1) \\ \mathcal{L}(X_1) Q = \mathcal{L}(X_2) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(X_{n-1}) Q = \mathcal{L}(X_n) \end{array}\right\} \quad \mathcal{L}(X_n) Q = \mathcal{L}(X_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{L}(X_0) . Q^n = \mathcal{L}(X_n)$

$\Downarrow$

$\mathcal{L}(X_n) . Q^m = \mathcal{L}(X_{n+m})$

$P(X_n = y) = \sum_{x \in E} P(X_0 = x) . Q^n(x,y) \quad \forall y \in E; \quad P_x(X_n = y) = Q^n(x,y)$

$P(X_{n+m} = y) = \sum_{x \in E} P(X_n = x) . Q^m(x,y)$

$E_x(f(X_n)) = \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{P_x(X_n = y)}_{Q^n(x,y)} = (Q^n f)(x)$

$E(f(X_n) / X_0) = (Q^n f)(X_0)$

$E(f(X_{n+m}) / X_n = x) = \sum_{y \in E} f(y) \underbrace{P(X_{n+m} = y / X_n = x)}_{Q^m(x,y)}$

$E(f(X_{n+m}) / X_n = x) = Q^m f(x)$

$\Rightarrow Q^m f(X_n) = E(f(X_{n+m}) / X_n)$

$E(f(X_{n+m})) = E(E(f(X_{n+m}) / X_n)) = E(K(X_n))$ avec

$E_{/X_n = x}(f(X_{n+m})) = Q^m f(x)$

$K(x) = E(f(X_{n+m}) / X_n = x)$

$= \sum_{y \in E} f(y) Q^m(x,y) = (Q^m f)(x)$

$Q^n(x,y) = P_x(X_n = y)$

$K(X_n) = (Q^m f)(X_n)$

$Q^n f(x) = E_x(f(X_n))$

$E_{/X_n}(f(X_{n+m})) = E(f(X_{n+m}) / X_n) = (Q^m f)(X_n)$

II / Propriétés simple de Markov et propriétés fortes de Markov:

E: ensemble au plus dénombrable

$E^{\mathbb{N}} := \{x = (x_k)_{k \geq 0} / x_k \in E \ \forall k \geq 0\}$: l'ensemble des suites à valeurs dans E

On va définir une tribu sur $E^{\mathbb{N}}$ (qui s'appelle tribu cylindrique) de la manière suivante : $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E^{\mathbb{N}})$ / pour tout $A \in \mathcal{G}$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{n+1})$

$x \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_m) \in B$

$\mathcal{G}$ n'est pas stable par réunion au plus dénombrable

Posons $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G})$ = tribu cylindrique = tribu engendrée par $\mathcal{G}$

$X = (X_m)_{m \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de loi initiale μ et de matrice de transition Q

Posons $\mu_m\{(x_1, \dots, x_m)\} = P_\mu(\overset{X_1}{x_1}, \dots, \overset{X_m}{x_m}) = \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m)$

$B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$ $\quad \mu_m(B) = \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in B} \mu_m(\{x_0, \dots, x_m\})$

μ_m est une mesure de probabilité sur $(E^{m+1}, \mathcal{P}(E^{m+1}))$

De plus, on a $\mu_{m+1}(B \times E) = \mu_m(B)$, $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

en effet; $\mu_{m+1}(B \times E) = \sum_{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in B \times E} \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m)\, Q(x_m, x_{m+1})$

$= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in B} \mu(x_0) \times Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m) \cdot \left(\sum_{x_{m+1} \in E} Q(x_m, x_{m+1}) \right) = \mu_m(B)$

Grâce au thm de Kolmogorov (ci-dessous), il existe une unique mesure de probabilité sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ qu'on la note μ tq: Pour tout $A \in \mathcal{G}$ ($\Leftrightarrow \exists m_A \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$) $x = (x_k)_{k \geq 0} \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_m) \in B \Rightarrow \mu(A) = \mu_m(B)$

La mesure de probabilité μ s'appelle la loi du processus.

Théorème : Admis (thm d'extension de Kolmogorov)

- Hypothèse : . $(\mu_m)_{m \geq 0}$ une suite de mesure de probabilité tq μ_m est une mesure de probabilité $(E^{m+1}, \mathcal{P}(E^{m+1}))$

  . On suppose que les μ_m sont compatibles dans le sens suivant : $\mu_{m+1}(B \times E) = \mu_m(B) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

- Conclusion : Il existe une unique mesure de probabilité μ sur $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ tq $\mu(A) = \mu_m(B)$ où $A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

$G_m : (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longmapsto (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$

$x = (x_0, \dots, x_m, \dots \infty) \longmapsto (x_m, x_{m+1}, \dots \infty)$

G_m est mesurable, pour cela, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{G}$, $G_m^{-1}(A) \in \mathcal{G}$. $G_m^{-1}(A) = \{x = (x_k)_{k \geq 0} \in E^{\mathbb{N}} \,/\, G_m(x) \in A\}$

$A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{K+1}) \,/\, x = (x_\ell)_{\ell \geq 0} \in A \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_K) \in B$

$G_m(x) = (x_m, x_{m+1}, \dots) \in A \Leftrightarrow (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+K}) \in B \Leftrightarrow$

$(x_0, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+K}) \in E^m \times B$

$G_m^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ $\quad m = n + K - 1 \quad \tilde{B} = E^m \times B$

$\Rightarrow G_m$ est mesurable

Théorème: Propriété simple de Markov:

- hypothèses: . $X = (X_m)_{m \geq 0}$ une chaine de Markov sur E de loi initiale μ et de matrice de transition Q
  . $H : (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive ou bien mesurable bornée $\quad F_m = \sigma(X_0, \ldots X_m)$
- Conclusion: $E(H(G_m(X)) / F_m) = U(X_m)$ où $U(x) = E_x(H(X))$

Application:

$K \in \mathbb{N}$, $F : (E^{K+1}, \mathcal{P}(E^{K+1})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive (ou bornée)

$(x_1, \ldots, x_K) \longmapsto F(x_1, \ldots, x_K)$

Posons $H_F : (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \longmapsto F(x_1, \ldots, x_K)$

$H(G_m(X)) = H(X_m, X_{m+1}, \ldots) = E(F(X_{m+1}, \ldots, X_{m+K}) / F_m) = U(X_m)$ où

$U(X_m) = E_x(H(X)) = E_x(F(X_1, \ldots, X_m))$

$E(F(X_m, \ldots, X_{m+K})) = E(E(F(X_m, \ldots, X_{m+K}) / F_m)) = E(U(X_m)) = \sum_{x \in E} U(x) . P(X_m = x)$

$= \sum_{x \in E} E_x(F(X_0, \ldots, X_K)) \mu(x)$ $\quad$ Car $\mathcal{L}(X_m) = \mu$

Preuve:

H mesurable positive $H (E^{\mathbb{N}}, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Lemme d'approximation : $\lim_{m \to +\infty} H_m = H$ $\quad$ H_m étagée positive

$H_m = \sum_{\ell \in I_m} \alpha_\ell . 1_{\Delta \ell}$ où $\Delta \ell \in \mathcal{G}$
$\alpha_\ell \geq 0 \quad |I_m| < +\infty$

Grâce au thm de la convergence monotone conditionnelle.

il suffit de prendre H étagée positive

Grâce à la linéarité de l'espérance conditionnelle

il suffit de prendre $H = 1_A$ avec $A \in \mathcal{G}$

Grâce au thm de classe monotone, il suffit de prendre $A \in \mathcal{G}$

$A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{P}(E^{K+1})$ / $x = (x_\ell)_{\ell \geq 0} \in A \Leftrightarrow (x_0, \ldots, x_K) \in B$

$1_A(x) = 1_B(x_0, \ldots, x_K)$

$H(G_m(X)) = 1_A(G_m(X)) = 1_A(x_m, X_{m+1}, \dots) = 1_B(X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+K})$

Prenons $D \in \mathcal{F}_m = \sigma(X_0, \dots, X_m)$ donc $D = (X_0, \dots, X_m)^{-1}(C)$ où $C \in \mathcal{P}(E^{m+1})$

$$1_D = 1_C(X_0, \dots, X_m)$$

$E(H(G_m(X))\,1_D) = E\left(1_B(X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+K})\,1_C(X_0, \dots, X_m)\right)$

$$= \sum_{x_0, \dots, x_{m+K} \in E} 1_B(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+K})\,1_C(x_0, \dots, x_m) \times$$

$$\mu(x_0) Q(x_0, x_1) \times \dots \times Q(x_{m-1}, x_m)\, Q(x_m, x_{m+1}) \dots Q(x_{m+K-1}, x_{m+K})$$

$$= \sum_{x_0, \dots, x_m \in E} 1_C(x_0, \dots, x_m)\, \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{m-1}, x_m) \underbrace{\sum_{x_{m+1}, \dots, x_{m+K} \in E} 1_B(x_m, \dots, x_{m+K}) \times Q(x_m, x_{m+1}) \dots Q(x_{m+K-1}, x_{m+K})}$$

$$= E_{X_m}\left(1_B(X_0, \dots, X_K)\right) = U(X_m)$$

$E_{x_m}\left(1_B(X_0, \dots, X_K)\right) = \sum_{x_0, \dots, x_K \in E} 1_B(x_0, \dots, x_K)\, \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{K-1}, x_K)$

$\mu = \delta_{x_m}$ ✓

$$= \sum_{x_1, \dots, x_K \in E} 1_B(x_m, x_1, \dots, x_K)\, Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{K-1}, x_K)$$

$$= \sum_{x_0, \dots, x_m \in E} U(x_m)\, 1_C(x_0, \dots, x_m)\, \mu(x_0)\, Q(x_0, x_1) \times \dots Q(x_{m-1}, x_m)$$

$$= E\left(U(X_m)\, 1_C(X_0, \dots, X_m)\right) = E\left(U(X_m)\, 1_D\right)$$

$U(X_m)$ est $\mathcal{F}_m$-mesurable. L'unicité $\mathbb{P}$ps de l'espérance conditionnelle implique
$E\left(H(G_m(X)) / \mathcal{F}_m\right) = U(X_m)$ $\mathbb{P}$ ps

Théorème : Propriétés forte de Markov Preuve (Photo)

Soit $X = (X_m)_{m \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de matrice de transition Q et T un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_m^X)_{m \geq 0}$. $U(x) = E_x(H(X))$

On a $E\left(H(\theta_T(X)) / \mathcal{F}_T^X\right) = U(X_T)$ sur $(T < +\infty)$ $\mathbb{P}$ps. où H mesurable borné

Définition : $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{Q} \,/\, A \cap (T = m) \in \mathcal{F}_m\}$ où T est un t.a % $(\mathcal{F}_m)_{m \geq 0}$.

III / Récurrence, Transience et irréductible :

Soit $(X_m)_{m \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E, de matrice de transition Q

Définition :

Soient x et y deux états de E, On dit que x $\begin{cases} \text{communique avec } y \\ \text{Conduit à } y \end{cases}$ $x \to y$

s'il existe $m \in \mathbb{N} / \mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$ (C.à.d $\mathbb{P}_x(X_m = y) = Q^m(x, y) > 0$)

Propriétés

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(m+1)$ uplets d'états $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$

tq $Q(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad i = 1, \dots, m-1$

b/ $x \longrightarrow y \; (\exists m \in \mathbb{N} \; P_x(\{X_m = y\}) > 0)$

c/ $P_x(\{\exists k \geq 1 / X_k = y\}) > 0$

Preuve :

"a $\Rightarrow$ b" :

(; intersection)

$\{X_0 = x_0 ; X_1 = x_1 ; \dots ; X_m = y\} \subset \{X_0 = x_0 ; X_m = y\}$

$\Rightarrow P_x(X_0 = x ; \dots ; X_m = y) \leq P_x(X_0 = x ; X_m = y)$

$\Rightarrow \; 0 < \underbrace{\mu(x)}_{\substack{1 \\ \mu = \delta_x}} \underbrace{Q(x, x_1)}_{>0} \times \dots \times \underbrace{Q(x_{m-1}, y)}_{>0} \leq \underbrace{P_x(X_m = y / X_0 = x)}_{Q^m(x,y)} \underbrace{P_x(X_0 = x)}_{1}$

"b $\Rightarrow$ c" $\{X_m = y\} \subset \underbrace{\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\}}_{= \{\exists k \geq 0 / X_k = y\}}$

Si E est fini $\Rightarrow$ Q devient l'identité

$\Rightarrow \; 0 < P_x(\{X_m = y\}) \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\})$

"c $\Rightarrow$ a" non a $\Rightarrow$ non c

$\{\exists k \geq 0 / X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in E} \{X_0 = x, X_1 = x_1, \dots, X_k = y\}$

$\forall x_1, \dots, x_{k-1} \in E \; P_x(\{X_0 = x ; \dots ; X_{k-1} = y\}) = 0$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \in E} P_x(\{X_0 = x ; \dots ; X_k = y\}) = 0$

Définition :

On dit que x et y se communiquent entre eux, si $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow x$

(Càd il existe n et $m \in \mathbb{N}$ / $\underbrace{Q^n(x,y)}_{P_x(X_n = y)} > 0$ et $\underbrace{Q^m(y,x)}_{P_y(X_m = x)} > 0$)

notation $x \leftrightarrows y$

1 **Propriétés :**

La relation "$\leftrightarrows$" est une relation d'équivalence.

Preuves

- $x \leftrightarrows x$ $Q^0(x,x) = 1 > 0$ $n=0$ réflexive
- $x \leftrightarrows y \Rightarrow \exists n,m \in \mathbb{N}$ tq $Q^n(x,y) > 0$ et $Q^m(y,x) > 0 \Rightarrow y \leftrightarrows x$ symétrique
- $x \to y$ et $y \to z \Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} / Q^n(x,y) > 0 \\ \exists m \in \mathbb{N} / Q^m(y,z) > 0 \end{cases}$

$$Q^{n+m}(x,z) = Q^n Q^m(x,z) = \sum_{l \in E} Q^n(x,l) Q^m(l,z) \geq \underbrace{Q^n(x,y)}_{>0} \underbrace{Q^m(y,z)}_{>0} > 0$$

alors $x \leftrightarrows y$ et $y \leftrightarrows z$

$\Rightarrow x \leftrightarrows z$ (d'après ce qui précède)

$E \leftrightarrows$ {l'ensemble des classes d'équivalence}

$\bar{x} = \{y \in E / x \leftrightarrows y\}$ $\quad \bar{x} \cap \bar{y} = \begin{cases} \phi & \text{si } x \not\leftrightarrows y \\ \bar{x} = \bar{y} & \text{si } x \leftrightarrows y \end{cases}$

Définition :

On dit qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si tous les états se communiquent entre eux (càd $\bar{x} = E \ \forall x \in E$).

Soit $x \in E$

$T_x = \inf\{n > 0 / X_n = x\}$ est la v.a qui décrit le 1er instant de passage par x après l'instant 0

$= \inf\{n \geq 1 / X_n \in A\}$ est un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$; $T_x : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$

$A = \{x\}$

$N_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}}$ = v.a qui décrit le nombre de passage par x

$T_x^{(2)} = \inf\{n > T_x^{(1)} / X_n = x\}$ est la v.a qui décrit le 2ème instant de passage par x après l'instant 0 est un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$

Soit S un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$ $A \subset E$ à titre d'exercice

$T = \inf\{x > S / X_n \in A\}$ est un t.a % $(F_n^X)_{n\geq 0}$

$T_x^{(m)} = \inf\{n > T_x^{(m-1)} / X_n = x\}$ v.a qui décrit le m ième passage par x

Définition :

Soit $x \in E$. On dit que x est un état récurrent, si en partant de x on revient en x presque sûrement à l'état x (càd $P_x(T_x^{(1)} < +\infty) = 1$)

Propriétés

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(m+1)$ uplets d'états $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$

tq $Q(x_i, x_{i+1}) > 0 \quad i = 1, \dots, m-1$

b/ $x \longrightarrow y \; (\exists m \in \mathbb{N} \; P_x(\{X_m = y\}) > 0)$

c/ $P_x(\{\exists k \geq 1 / X_k = y\}) > 0$

Preuve :

"a ⟹ b" : (; intersection)

$$\{X_0 = x_0 ; X_1 = x_1 ; \dots ; X_m = y\} \subset \{X_0 = x_0 ; X_m = y\}$$

$$\Rightarrow P_x(X_0 = x ; \dots ; X_m = y) \leq P_x(X_0 = x ; X_m = y)$$

$$\Rightarrow 0 < \underbrace{\mu(x)}_{\substack{1 \\ \mu = \delta_x}} \underbrace{Q(x, x_1)}_{>0} \times \dots \times \underbrace{Q(x_{m-1}, y)}_{>0} \leq \underbrace{P_x(X_m = y / X_0 = x)}_{Q^m(x,y)} \underbrace{P_x(X_0 = x)}_{1}$$

"b ⟹ c" $\{X_m = y\} \subset \underbrace{\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\}}_{= \{\exists k \geq 0 / X_k = y\}}$

Si E est fini ⟹ Q devient l'identité

$$\Rightarrow 0 < P_x(\{X_m = y\}) \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\})$$

"c ⟹ a" non a ⟹ non c

$$\{\exists k \geq 0 / X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k = y\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in E} \{X_0 = x, X_1 = x_1, \dots, X_k = y\}$$

$\forall x_1, \dots, x_{k-1} \in E \quad P_x(\{X_0 = x ; \dots ; X_{k-1} = y\}) = 0$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq P_x(\{\exists k \geq 0 / X_k = y\}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \in E} P_x(\{X_0 = x ; \dots ; X_k = y\}) = 0$

Définition :

On dit que x et y se communiquent entre eux, si $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow x$

(Càd il existe m et $m \in \mathbb{N}$ / $\underbrace{Q^m(x,y)}_{P_x(X_m = y)} > 0$ et $\underbrace{Q^m(y,x)}_{P_y(X_m = x)} > 0$)

notation $x \leftrightarrows y$

Propriétés :

La relation "$\leftrightarrows$" est une relation d'équivalence.

Dans le cas contraire, on dit que x est transient

Proposition :

$$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x < +\infty) \cdot P_x(N_x \geq K)$$

Preuve :

$$N_x = \sum_{k=0}^{+\infty} 1_{(X_k = x)} = G(X)$$

$$G : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$$

$$\tilde{x} = (x_k)_{k\geq 0} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} 1_{(x_k = x)}$$

sous P_x

$$(N_x \geq K+1) = (T_x^{(K)} < +\infty)$$

$$T_x^{(K)} = \inf\{m > T_x^{(K-1)} / X_m = x\} = T_x^{(K-1)} + \inf\{m > 0 / X_{m+T_x^{(K-1)}}\}$$

$$(T_x^{(K)} < +\infty) = (T_x^{(K-1)} < +\infty ; \inf\{m > 0 / X_{m+T_x^{(K-1)}} = x\} < +\infty)$$

$$T_x^{(K)} = \inf\{m > 0 / X_m = x\} = F(X) ; \inf\{m > 0 / X_{m+T_x^{(K-1)}} = x\} = F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X))$$

$$X = (X_m)_{m\geq 0} \qquad Q_{T_x^{(K-1)}}(X) = (X_{T_x^{(K-1)}} ; X_{T_x^{(K-1)}+1} ; \dots)$$

$$F : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$$

$$(x_m)_{m\geq 0} \longmapsto \inf\{m > 0 / x_m = x\}$$

$$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x^{(K-1)} < +\infty) = E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty ; F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X)) < +\infty)}\right)$$

$$= E_x\left(E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty)} \cdot 1_{(F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X)) < +\infty)} / F^X_{T_x^{(K-1)}}\right)\right)$$

$$= E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty)} \cdot \underbrace{E\left(1_{(F(Q_{T_x^{(K-1)}}(X)) < +\infty)} / F^X_{T_x^{(K-1)}}\right)}_{\text{|| propriétés forte de Markov}}\right)$$

$$U(X_{T_x^{(K-1)}}) ; \; U(y) = E_y\left(1_{(F(X) < +\infty)}\right)$$

Or $X_{T_x^{(K-1)}} = x \Rightarrow U(X_{T_x^{(K-1)}}) = U(x) = E_x\left(1_{(F(X) < +\infty)}\right) = P_x(T_x < +\infty)$

$$P_x(N_x \geq K+1) = P_x(T_x < +\infty) \underbrace{E_x\left(1_{(T_x^{(K-1)} < +\infty)}\right)}_{= P_x(T_x^{K-1} < +\infty) = P_x(N_x \geq K)}$$

Théorème :

1. Les propriétés suivantes sont équivalentes

a/ L'État x est récurrent (C à d $P_x(T_x^{(1)} < +\infty) = 1$)

b/ $P_x(N_x = +\infty) = 1$

c/ $\sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(x,x) = +\infty$ (C à d Série divergente)

2. Les propriétés suivantes sont équivalentes
a₁/ l'état x est transient (càd $P_n(T_n^{(1)} < +\infty) < 1 \Leftrightarrow P_n(T_n^{(1)} = +\infty) > 0$)
b₁/ N_x suit une loi géométrique de paramètre (sous P_n)
c₁/ $\sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(n,n) < +\infty$

Preuves :

"a ⇒ b" : Hypothèse : $P_x(T_x < +\infty) = 1$

D'après la proposition précédente, $P_n(N_n \geq K+1) = \underbrace{P_n(T_n < +\infty)}_{1} P_n(N_n \geq K)$

$= \dots = P_n(\underbrace{N_n \geq 0}_{\Omega}) = 1 \qquad N_n = \sum_{K=0}^{+\infty} 1(X_K = x)$

$1 = P_n(N_n \geq K) \xrightarrow{m \to +\infty} P_n(\underbrace{\bigcap_{K=0}^{+\infty} A_K}_{N_n = +\infty}) = P_n(N_n = +\infty)$

$A_K = (N_n \geq K)$

$A_{K+1} \leq A_K$

car $\in \bigcap_{K=0}^{+\infty} A_K \Leftrightarrow N_n(\omega) \geq K, \forall K$
$\to N_n(\omega) = +\infty$

"b ⇒ c" : Hypothèse : $P_n(N_n = +\infty) = 1 > 0 \Rightarrow$ CN d'intégrabilité

$N_x = \sum_{K=1}^{+\infty} 1(X_K = n) \Rightarrow E(N_n) = \sum_{K=0}^{+\infty} E_x(1(X_K = n)) = \sum_{K=0}^{+\infty} \underbrace{P_n(X_K = n)}_{Q^K(n,n)}$

thm de conv mon : TCM

$\sum_{K=0}^{+\infty} Q^K(n,n) = +\infty$

"a₁ ⇒ b₁" : Hypothèse : $P_n(T_n < +\infty) < 1$

$P_n(N_n \geq K+1) = P_n(T_n < +\infty) . P_n(N_n \geq K)$

$N_n = K = (N_n \geq K) / (N_n \geq K+1)$

$N_n(\Omega) = \mathbb{N}$

$N_n \geq K+1 \subset (N_n \geq K)$

$P_n(N_n = K) = P_n(N_n \geq K) - P(N_n \geq K+1)$

. $P_n(N_n \geq K) = P_n(T_n < +\infty) . P_n(N_n \geq K-1)$

$P_n(N_n \geq K-1) = P_n(T_n < +\infty) P_n(N_n \geq K-2)$

⋮

$P_n(N_n \geq 1) = P_n(T_n < +\infty) \underbrace{P_n(N_n \geq 0)}_{=1}$

$\boxed{P_n(N_n \geq K) = (P_n(T_n < +\infty))^K}$

$P_x(N_x = k) = (P_x(T_x < +\infty))^k - (P_x(T_x < +\infty))^{k+1}$

$= (P_x(T_x < +\infty))^k (1 - P_x(T_x < +\infty))$

$N_x \sim \mathcal{G}(\underbrace{1 - P_x}_{P(T_x = +\infty)})$ sur $\mathbb{N}$ avec $P_x = P_x(T_x < +\infty)$

$E_x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 1_{(X_k = x)}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{E_x(1_{(X_k = x)})}_{Q^k(x,x)}$

$b_1 \Rightarrow c_1$: Hypothèse : $N_x \sim \mathcal{G}(.)$

$\Rightarrow E_x(N_x) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(x,x) < +\infty$

Corollaire :

Si $x \leftrightarrows y$, alors tous les deux sont récurrents ou bien transients

Preuve :

$x \leftrightarrows y$ mq $\sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(x,x)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} Q^k(y,y)$ sont de même nature

$x \leftrightarrows y \Leftrightarrow \exists\, k$ et $p \in \mathbb{N}$ $Q^k(x,y) > 0$ et $Q^p(y,x) > 0$

$Q^{k+m+p}(x,x) = (Q^k . Q^m . Q^p)(x,x) = \sum_{t,s \in E} Q^k(x,t) . Q^m(t,s) Q^p(s,x)$

$\geq \underbrace{Q^k(x,y) . Q^m(y,y) . Q^p(y,x)}_{\text{produit} > 0}$

Si $\sum_{p=0}^{+\infty} Q^p(x,x) < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} Q^{k+m+p}(x,x) < +\infty \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(y,y) < +\infty$

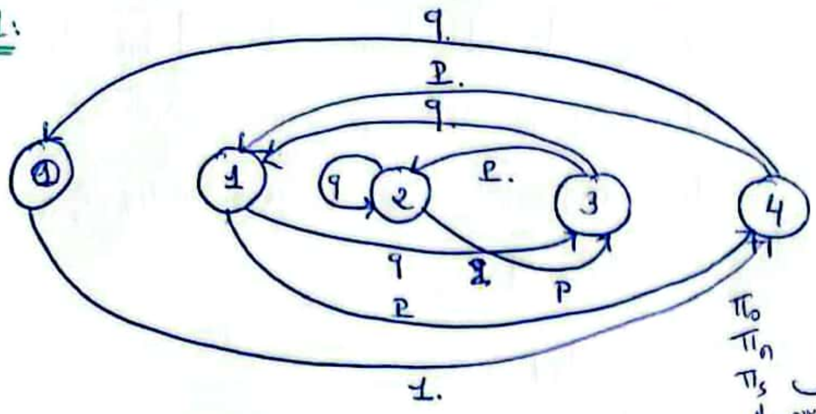
$Q^{p+m+k}(y,y) \geq Q^p(y,x) Q^m(x,x) . Q^k(x,y)$

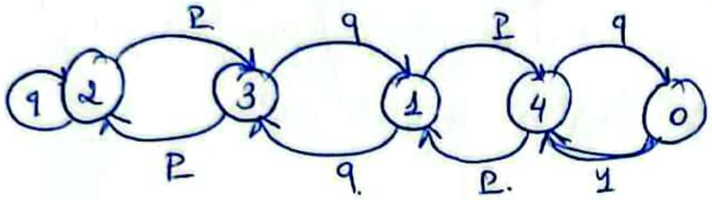
De même, si $\sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(y,y) < +\infty \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} Q^m(x,x) < +\infty$

Série 3

Ex1 :

(1)





La matrice de Transition :

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} = \Sigma 1 \\ = \Sigma 1 \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \end{matrix}$$

$\Sigma = 1$

$\Downarrow$

la matrice est stochastique.

(2) la chaîne de Markov est irréductible.

tu peux passer d'un état à l'autre

parce que on peut passer n'importe quel état à n'importe quel autre.

(3) $Q^{(2)}(i,j)$: la probabilité de passer d'un état i à un état j en 2 étapes.

$$Q^{(2)}(i,j) = Q^2.$$

$$Q^{(2)}(i,j) = \begin{pmatrix} \boxed{q} & p & 0 & 0 & 0 \\ pq & \boxed{p^2+q^2} & pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & \boxed{p^2+q^2} & pq & 0 \\ 0 & 0 & pq & \boxed{p^2+q^2} & pq \\ 0 & 0 & 0 & pq & \boxed{p^2+q} \end{pmatrix} \begin{matrix} \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \end{matrix}$$

$n = 0 \quad q$

$n = 1 = 2 = 3 \quad p^2 + q^2$

$n = 4 \quad p^2 + q$

(4) $P(0 \text{ parapluie et il pleut})$

$$P(0 \text{ parapluie}) \times \underbrace{p}_{p}$$

Sur le long terme : $\Pi_s = \Pi_s . Q$.

Π_0
Π_n
Π_s
$\downarrow$
stationnaire
stable

la distribution de probabilité Π_s est stationnaire / invariante lorsque

$$\boxed{\Pi_s = \Pi_s . Q}$$

On pose : $\Pi_s = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon q = \alpha \\ \delta q + \varepsilon p = \beta \\ \gamma q + \delta p = \gamma \\ \beta q + \gamma p = \delta \\ \alpha + \beta p = \varepsilon \end{cases}
\quad
\begin{aligned} &\alpha = \varepsilon q \\ &\alpha = (\alpha + \beta p) q \\ &\alpha = \alpha q + \beta p q \\ &\alpha = \alpha q + (\delta q + \varepsilon p) p q \\ &= \alpha q + (\delta q \end{aligned}$$

$$\Pi_s = (q\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon).$$

$\Sigma\, \alpha + \beta + \gamma + \ldots = 1$ (par déf)

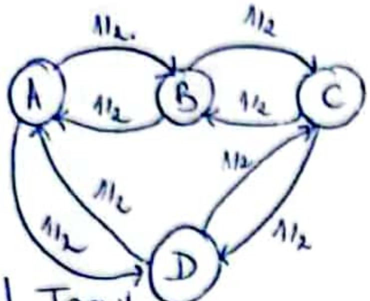
$$\Pi_s \left(\frac{q}{q+4}, \frac{1}{q+4}, \frac{1}{q+4}, \frac{1}{q+4}, \frac{1}{q+4} \right)$$

$P(0 \text{ parapluie})$.

$$\Rightarrow \frac{q}{q+4} \times p \underset{q=(1-p)}{=} \frac{p(1-p)}{5-p}$$

Ex2:

Chaîne de Markov



Matrice de Transition:

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & & & & \\ B & & & & \\ C & & & & \\ D & & & & \end{array}
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) $\Pi_n = ?$

initialisé à l'état A.

$\Pi_0 = (1, 0, 0, 0)$

$\Pi_n = \Pi_0 Q^{(n)}$

$Q^{(n)} = Q^n$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$Q^3 = Q$.

$$\begin{cases} Q^{2k+1} = Q \\ Q^{2k} = Q^2 \end{cases}$$

$$\Pi_n = \Pi_0 \times Q^n.$$

$$= \begin{cases} \Pi_0 \times Q & \text{si } n \text{ impair} \\ \Pi_0 . Q^2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1/2 & \text{si } n \text{ pair}. \end{cases}$$

Périodicité:

La période d d'un état i d'une chaîne de Markov est définie comme étant le PGCD de l'ensemble de nombres $n \in \mathbb{N}$ tq :

$Q^{(n)}(i,i) \neq 0$ Q^2, Q^3, Q^4, on élimine ceux qui ont un diagonale nul et on cherche le pgcd des reste :

$n = 2, 4, 6 \ldots$

$d = 2$

chaîne périodique de période 2.

④ dans le cas de 5 stations

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \neq 0 & & \\ & \neq 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$Q^5 = \begin{pmatrix} \neq 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$$

$n = 2, 4, 5$

$d = 1 \Rightarrow$ chaîne apériodique
+ irréductible
+ espérance d'état fini
$\Longrightarrow$ ergodique

stationnarité:

$\Pi_s = \Pi_s Q$. on pose $\Pi_s = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 1$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sys + éq$^{=0}$: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 1$.

$\Longrightarrow \Pi_s = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$