Exercices de Programmation Linéaire

Ines Abdeljaoued-Tej *

5 février 2010

Exercice 1 *Trouver le(s) problème(s) parmi P_1, P_2 et P_3 qui sont sous forme standard :*

$$P_1 = \begin{cases} \textit{Maximiser} & 3x_1 - 5x_2 \\ \textit{Sous les contraintes} & 4x_1 + 5x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 - 6x_2 = 7 \\ & x_1 + 8x_2 \geq 20 \\ & x_1 \ \textit{qcq}, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} \textit{Minimiser} & 3x_1 - 5x_2 \\ \textit{Sous les contraintes} & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{cases}$$

$$P_3 = \begin{cases} \textit{Maximiser} & 8x_1 - 4x_2 \\ \textit{Sous les contraintes} & 4x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq -2 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2 *Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour les nombres s et t pour que le problème :*

$$P_4 = \begin{cases} \textit{Maximiser} & x_1 + x_2 \\ \textit{Sous les contraintes} & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) ait une solution optimale ; b) soit non réalisable ; c) soit non borné.

Exercice 3 *Résoudre par la méthode du simplexe les problèmes suivants :*

$$P_5 = \begin{cases} \textit{Maximiser} & 2x_1 + x_2 \\ \textit{Sous les contraintes} & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & -x_1 - 5x_2 \geq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

$$P_6 = \begin{cases} \textit{Maximiser} & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \textit{Sous les contraintes} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

$$P_7 = \begin{cases} \textit{Maximiser} & x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \textit{Sous les contraintes} & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Exercice 4 *Résoudre graphiquement puis avec le simplexe les programmes linéaires suivants :*

$$(P_8) = \begin{cases} max & 2x_1 + 3x_2 \\ s/c & 2x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad puis \quad (P_9) = \begin{cases} max & 2x_1 + 3x_2 \\ s/c & 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

* `inestej@gmail.com`, `http://bit.ly/5vjgUs`

Exercice 5 *Un druide a décidé d'aller vendre son stock de potions sur le marché de Paimpol. Il s'est spécialisé dans la fabrication et la vente de 5 potions. Pas toutes bien fameuses ces potions, sauf la dernière qui possède la vertu incroyable de permettre de comprendre la théorie de l'optimisation en moins de 5 secondes (montre en main !). Bien entendu, son coût de production est tel qu'il ne peut la vendre qu'avec une perte de 3 euros par litre vendu mais, elle assure une telle renommée au druide que celui-ci ne peut se permettre de se présenter au marché sans elle (surtout en janvier). Quant aux quatre premières potions, elles procure au druide un bénéfice de, respectivement, 7, 14, 6 et 10 euros par litre vendu. L'un de ses secrets est bien entendu l'utilisation du fameux urbannachzpo dont il ne possède malheureusement que 6 grammes en ce moment. Un litre de la deuxième potion nécessite 3g du fameux urbannachzpo, un litre de la quatrième potion en nécessite 2g tandis qu'un litre de la cinquième potion n'en nécessite que 1g. Par on ne sait quel sortilège druidique la vente de chacune des potions a des effets sur la morphologie du druide. La vente d'un litre de la première potion fait grandir le druide de 1cm, même effet étrange pour un litre de la deuxième. La vente d'un litre de la troisième potion le fait grossir de 1kg, la vente d'un litre de la quatrième potion a le même effet : elle le fait grossir de 1kg. Quant à la cinquième me direz vous ? La vente d'un litre de cette cinquième potion le fait rapetisser de 3cm et le fait maigrir de 4kg. Son objectif est simple : il désire quitter le marché sans changer de morphologie, tout en maximisant ses gains. Que doit-il faire ? Après avoir proprement modéliser le problème sous forme de problème de programmation linéaire (il y a cinq variables : autant les nommer $x1, x2, x3, x4$ et $x5$), vous trouverez la solution optimale en utilisant l'algorithme du simplexe (dans la version qui vous convient le plus). On détaillera proprement chacune des étapes. Résoudre le problème à l'aide de la fonction Mathematica LinearProgramming pour valider votre algorithme.*

Exercice 6 *Une entreprise fabrique des téléphones portables et des postes de télévision. 140 ouvriers travaillent à la fabrication. Le prix de revient, pièces et main d'oeuvre, d'un téléphone est de 300D et il est de 400D pour un poste de TV. Les services comptables de l'entreprise donnent la consigne de ne pas dépasser par semaine la somme de 240000D, pièces et main d'oeuvre.*
Chaque ouvrier travaille 40 heures par semaine. Les chefs de service estiment qu'il faut 10h de main d'oeuvre pour fabriquer un téléphone et 5h seulement pour fabriquer un poste de TV.
Les services commerciaux ne peuvent vendre plus de 480 téléphones et 480 postes de TV par semaine. Les prix de ventes sont tels que l'entreprise, tous frais payés, fait un bénéfice de 160D par téléphone et de 240D par poste de TV.

1. *On désigne par x_1 le nombre de téléphones et x_2 le nombre de postes de télévision fabriqués par semaine. Déterminer les quatre contraintes de fabrication.*
2. *Déterminer le bénéfice par semaine en fonction de x_1 et x_2.*
3. *Résoudre graphiquement le programme linéaire.*
4. *En déduire la fabrication qui assure un bénéfice maximum.*
5. *Donner les deux premières itérations (tableaux) de la méthode du Simplexe.*

Exercice 7 Considérons le Programme Linéaire suivant :

$$(P_L) = \begin{cases} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s/c} & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre graphiquement (P_L).
2. Ecrire le programme linéaire sous forme standard.
3. Résoudre par la méthode du Simplexe.
4. Montrer que le dual du programme dual est le programme linéaire d'origine. Donner le programme dual de (P_L).