4- Le choix intertemporel

Jusqu'à présent, nous avons supposé le taux d'épargne exogène. Les agents se voient imposer un taux d'épargne.
Il ne leur reste qu'à maximiser leur utilité instantanée, ou profit instantané en supposant leur taux d'épargne donné.
De cette manière, les agents n'ont pas d'influence sur le choix intertemporel. Ce choix leur est imposé.
L'introduction d'une fonction d'utilité intertemporelle permet de transformer le choix intertemporel en un résultat d'une décision liée à la satisfaction personnelle et au goût des agents, et non plus un paramètre imposé. Ainsi, le taux d'épargne se trouve « endogeneisé ».

Dans tout ce chapitre les fonctions u, F et f seront supposées croissantes concaves et $C1$ sur $]0,+\infty[$, avec $u'(0)=\infty$ et $F(0,L)=f(0)=0$.

4-1 Modèle avec une économie d'échange à 2 périodes et 1 bien

- Consommation en période 1: C_1
- Consommation en période 2: C_2
- Un consommateur représentatif, d'utilité: U
- Dotation initiale totale: C
- Programme pour l'optimum social: $\max \ U\left(C_1, C_2\right)$

$$s.c.\left\{C_1 + C_2 \leq C\right.$$

- Condition de premier ordre: $\dfrac{\partial U}{\partial C_1} = \dfrac{\partial U}{\partial C_2}$

Utilité avec taux d’actualisation

- Taux d’actualisation = discount-rate

  = <u>taux de préférence pour le présent</u>

  = taux d’impatience

$$U(C_1, C_2) = u(C_1) + \frac{1}{1+\rho} u(C_2)$$

- *u*: utilité instantanée
- La condition de premier ordre devient:

$$\frac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = 1 + \rho$$

- Si $\rho > 1$ alors $C_2 < C_1$ quand *u* est concave

• Si on n’a pas une fonction d’utilité qui a cette forme additive, on peut utiliser le calcul suivant pour évaluer le taux de préférence pour le présent spécifique à la fonction d’utilité considérée:

$$1 + \rho = \sqrt{\frac{\frac{\partial U}{\partial C_1}}{\frac{\partial U}{\partial C_2}} \Big| (C_1, C_2) \cdot \frac{\frac{\partial U}{\partial C_1}}{\frac{\partial U}{\partial C_2}} \Big| (C_2, C_1)}$$

Taux de préférence pour le présent et taux d'intérêt

- La notion de taux d'intérêt diffère de celle de taux de préférence pour le présent
- Si *r* est le taux d'intérêt, une quantité *X* placée en banque à la période 1 a une valeur de $(1+r)X$ à la période 2
- Si la concommation à la période 1 est C_1, la valeur placée est $C - C_1$. De sorte que le consommateur récupère $C_2 = (C - C_1)(1+r)$ à la période 2
- On a donc $C_2 = \frac{C - C_1}{1+r}$
- La contrainte de budget s'écrit donc $C_1 + \frac{C_2}{1+r} \leq C$

- Lagrangien:

$$\ell = u(C_1) + \frac{1}{1+\rho} u(C_2) + \lambda \left(C_1 + \frac{C_2}{1+r} - C \right)$$

- Condition de premier ordre:

$$u'(C_1) + \lambda = 0$$

$$\frac{1}{1+\rho} u'(C_2) + \lambda \left(\frac{1}{1+r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = \frac{1+\rho}{1+r}$$

- L'épargne augmente avec *r* et diminue avec ρ

4-2 Modèle avec une économie de production à 2 périodes et 1 bien

- Au lieu de stocker le bien pour le consommer à la période 2, l'économie le transforme en épargne investie dans l'accroissement du capital qui va participer à la production à la période 2.
- Dotation initiale: capital K_1
- Fonction de production $F(K,L)$
- Programme de l'optimum social:

$$\max_{C_1, C_2, S} U(C_1, C_2)$$

$$s.c \begin{cases} C_1 + S \leq F(K_1, L) \\ C_2 \leq F(K_2, L) \\ K_2 = K_1 + S \end{cases}$$

- Lagrangien

$$\ell = U(C_1, C_2) + \lambda_1\left(C_1 + S - F(K_1, L)\right) + \lambda_2\left(C_2 - F(K_1 + S, L)\right)$$

- Si l'utilité a la forme d'une utilité instantanée actualisée

$$U\left(C_1, C_2\right) = u\left(C_1\right) + \frac{1}{1+\rho} u\left(C_2\right)$$

on obtient

$$\frac{\partial \ell}{\partial C_1} = u'(C_1) + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial C_2} = \frac{u'(C_2)}{1+\rho} + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S} = \lambda_1 + \lambda_2 F'_K\,(K_1 + S, L) = 0$$

- En éliminant les multiplicateurs de Lagrange, on obtient la condition de premier ordre

- Condition de premier ordre avec une utilité instantanée actualisée:

$$\frac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = \frac{1+\rho}{F'_K(K_2, L)}$$

• Plus la productivité marginale du capital est forte, plus elle permet d'équilibrer l'impatience du consommateur.
• Celui-ci réserve alors plus de consommation à la période 2 au détriment de la période 1

- Si on suppose que le consommateur peut aussi consommer son capital, le programme de l’optimum social devient:

$$\max_{C_1, C_2, S} u(C_1) + \frac{u(C_2)}{1+\rho}$$

$$s.c \begin{cases} C_1 + S \leq F(K_1, L) + K_1 \\ C_2 \leq F(K_2, L) + K_2 \\ K_2 = S \end{cases}$$

- On en déduit la condition de premier ordre pour l’optimum social:

$$\frac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = \frac{1+\rho}{1+F'_K(K_2, L)}$$

Interprétation de la condition de premier ordre:

$$\underbrace{\frac{u'(C_2)}{1+\rho}}_{\substack{\textit{utilité d'une unité} \\ \textit{consommée demain,} \\ \textit{actualisée à aujourd'hui}}} \underbrace{(1+F'_K)}_{\substack{\textit{quantité produite par} \\ \textit{l'investissement d'une} \\ \textit{unité}}} = \underbrace{u'(C_1)}_{\substack{\textit{utilité d'une unité} \\ \textit{consommée} \\ \textit{aujourd'hui}}}$$

- Equation de la frontière efficace de production (C_1, C_2) :

avec

$$C_2 = F(S, L) + S$$
$$= F(K_1 + F(K_1, L) - C_1, L) + K_1 + F(K_1, L) - C_1$$
$$= \varphi(C_1)$$

- Sur cette courbe $C_2 = \varphi(C_1)$, la pente de la tangeante est

$$\frac{dC_2}{dC_1} = -(1 + F'_K)$$

où la dérivée de *F* est calculée au point (K_2, L)

- La *FEP* est concave décroissante

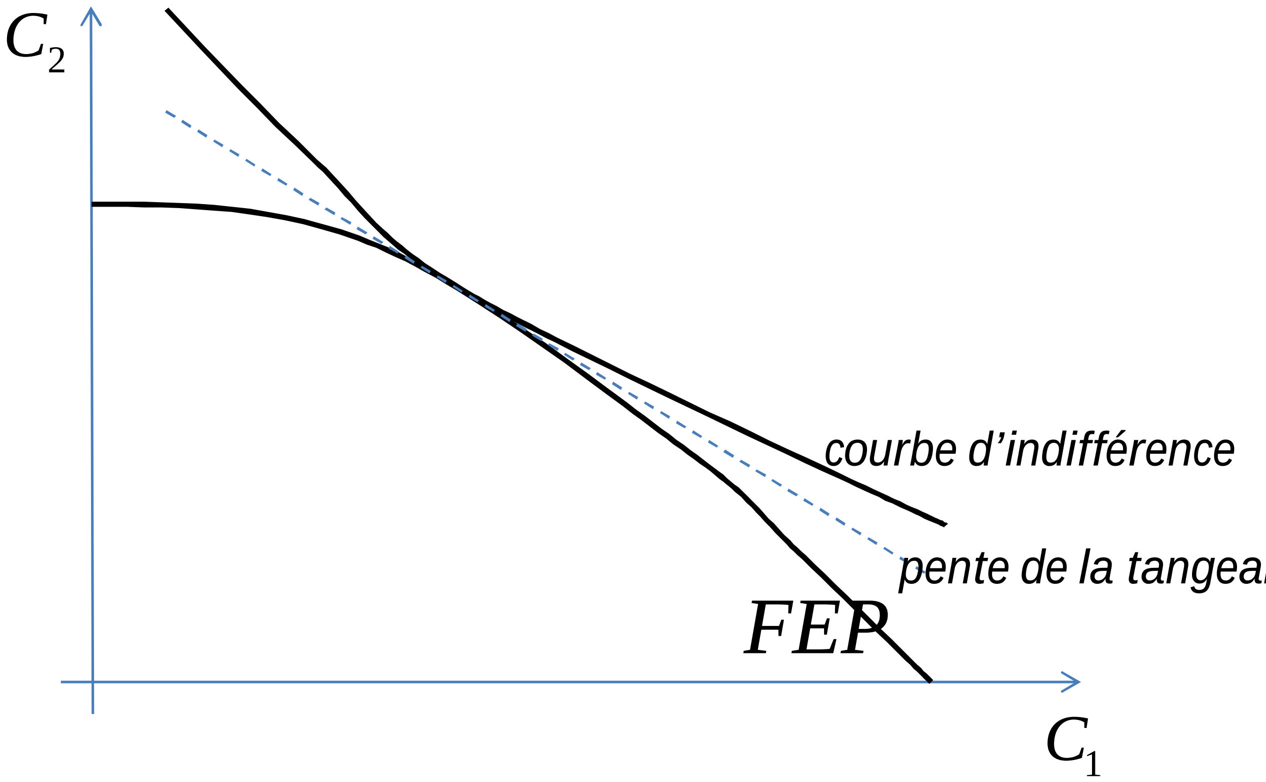
- Les courbes d'indifférence ont pour équation:

$$u(C_1) + \frac{u(C_2)}{1+\rho} = cste$$

- En différentiant, on trouve la pente de la tangeante:

$$\frac{dC_2}{dC_1} = -\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)}(1+\rho)$$

- Ainsi, la condition de premier ordre de l'optimum social impose l'égalité des pentes de la *FEP* et d'une courbe d'indifférence, ce qui signifie la tangeance de ces 2 courbes



pente de la tangeante = $\dfrac{u'(C_1)}{u'(C_2)}(1+\rho)$

$= 1 + F'_K$

Taux de préférence pour le présent, taux d’intérêt bancaire et productivité marginale du capital

- Pour parler de taux d’intérêt, il est nécessaire de sortir de la notion d’optimum social et de parler d’équilibre concurrentiel. En effet, l’optimum social suppose un fonctionnement centralisé de l’économie. Les prix, les salaires et les taux d’intérêt n’y ont aucun rôle à jouer.
- On note r_1, r_2 respectivement les taux d’interêt bancaire débiteurs de la période 1 et de la période 2; et r_1', r_2' les taux d’intérêt créditeurs de la période 1 et de la période 2.
- On note p_1, w_1, p_2, w_2 respectivement les prix et salaires des périodes 1 et 2.
- On suppose l’existence d’un système bancaire chargé de transformer l’épargne monétaire des consommateurs en investissement physique.

- On note S l’épargne monétaire du consommateur, accumulée à l’issue de la période 1 et rémunérée à la période 2.
- On suppose qu’à chaque période, l’épargne est réevaluée selon le niveau des prix.
- La révaluation de S , hors intérêts, à la période 2 est:

$$p_2 \frac{S}{p_1}$$

- L’intérêt bancaire sur ce montant est

$$r_2' p_2 \frac{S}{p_1}$$

- Dans le cadre de l'E.C., le programme du consommateur est

$$\max_{C_1, C_2, S} u(C_1) + \frac{u(C_2)}{1+\rho}$$

$$s.c \begin{cases} p_1 C_1 + S \leq w_1 L + p_1 K_1 \\ p_2 C_2 \leq w_2 L + p_2 \dfrac{S}{p_1}(1 + r_2') \end{cases}$$

- Lagrangien

$$\ell = u(C_1) + \frac{u(C_2)}{1+\rho} + \lambda_1 \left(p_1 C_1 + S - w_1 L - p_1 K_1 \right)$$

$$+ \lambda_2 \left(p_2 C_2 - w_2 L - (1 + r_2') p_2 \frac{S}{p_1} \right)$$

- On obtient

$$\frac{\partial \ell}{\partial C_1} = u'(C_1) + \lambda_1 p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial C_2} = \frac{u'(C_2)}{1+\rho} + \lambda_2 p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial S} = \lambda_1 - \lambda_2 p_2 (1 + r_2') \frac{1}{p_1} = 0$$

- D’où la condition de premier ordre suivante pour l’equilibre concurrentiel du consommateur

$$\frac{u'\left(C_2\right)}{u'\left(C_1\right)} = \frac{1+\rho}{1+r_2'}$$

- programme du producteur pour la période 2

  en tenant compte que est un taux d'intérêt bancaire, qui s'applique donc sur un montant monétaire

$$\max \pi_2 = p_2 Y_2 - w_1 L - r_2 p_2 K_2$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = F_K'(K_2, L)$$

- Si suppose que la marge bancaire est nulle, alors la recette de la banque $r_2 p_2 S$ est égale à la dépense

$$r_2' p_2 S \qquad \Rightarrow r_2 = r_2'$$

- La condition d'equilibre du consommateur s'écrit donc $\dfrac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = \dfrac{1+\rho}{1+F'_K(K_2, L)}$

- C'est la condition d'optimalité sociale. L'équilibre concurrentiel est donc un optimum social

- Conclusion:
  - Si la marge bancaire est nulle en raison de la concurrence interbancaire (ce qui n’est évidement pas le cas)
  - Si l’épargne monétaire est réévaluée aux prix courants (ce qui est encore moins le cas)
  - -> **l’équilibre concurrentiel est un optimum social**
- En pratique, le niveau des prix n’est pas neutre en raison de la non-réévaluation de l’épargne monétaire selon les prix courants. Par exemple, une hausse du niveau général des prix va déprécier l’épargne monétaire et provoquer une fuite devant ce type de support de l’épargne…

- **Si l'épargne monétaire n'est pas réevaluée aux prix courants,** le programme du consommateur devient

$$\max_{C_1, C_2, S} u(C_1) + \frac{u(C_2)}{1+\rho}$$

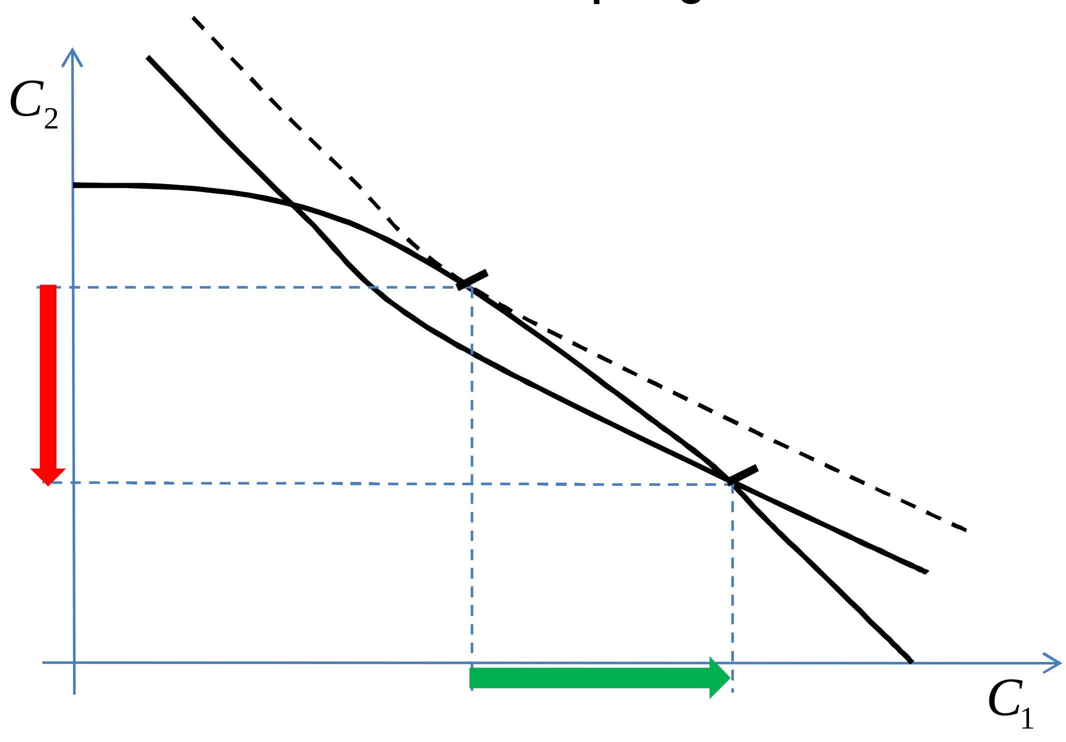
$$s.c \begin{cases} p_1 C_1 + S \leq w_1 L + p_1 K_1 \\ p_2 C_2 \leq w_2 L + S(1 + r_2') \end{cases}$$

- L'équilibre du consommateur donne la condition de premier ordre suivante: $\dfrac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = \dfrac{1+\rho}{1+r_2'}\dfrac{p_2}{p_1}$
- Si le système productif et le système bancaire sont concurrentiel, on a $r_2' = F'_K$. Si $p_2 \neq p_1$, la condition d'optimalité sociale n'est plus vérifiée
- L'equilibre concurrentiel ne correspond plus à un optimum social

- Exemple: cas $p_2 > p_1$

$$\Rightarrow \frac{u'(C_1)}{u'(C_2)}(1+\rho) = \frac{p_1}{p_2}(1+F'_K) < (1+F'_K)$$

- La pente de la courbe d'indifférence est plus faible que la pente de la *FEP* . L'économie épargne moins.



Le taux d'intérêt en tant que prix d'équilibre entre épargne et investissement

- On note $r = r_2' = r_2$
- Le système de 3 équations et 3 inconnues C_1, C_2, S formé par l'équation de premier ordre de l'équilibre concurrentiel du consommateur et les équations de la *FEP* détermine l'épargne en fonction du taux d'intérêt

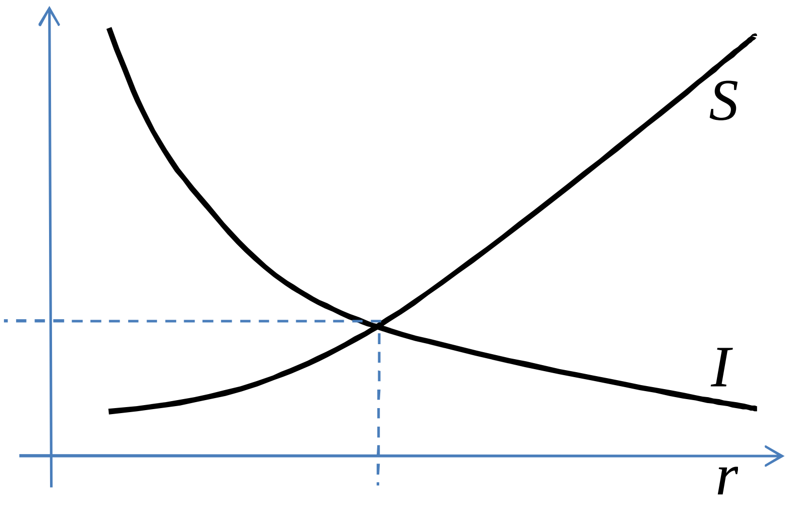
$$\frac{u'(C_2)}{u'(C_1)} = \frac{1+\rho}{1+r}\frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{S}{p_1} = F(K_1, L) - C_1 + K_1$$

$$C_2 = F\left(\frac{S}{p_1}, L\right) + \frac{S}{p_1}$$

- L'équation $F'_K(K_2, L) = r$, avec $K_2 = I$ dans ce modèle, détermine l'investissement en fonction du taux d'intérêt .

- On vérifie que $S(r)$ est une fonction croissante et $I(r)$ une fonction décroissante.
- On retrouve donc la théorie néoclassique de l'ajustement de l'épargne et l'investissement par le taux d'intérêt:



4-3 Modèle discret à horizon infini

- Capital, consommation et investissement par tête à la date n : k_n, c_n, i_n
- Utilité intertemporelle à horizon infini = somme infinie des utilités instantanées actualisées:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n)}{(1+\rho)^{n-1}}$$

Convergence !?

• Pour simplifier les notations, on supprime la variable travail car elle n'intervient pas dans le calcul.

- **Programme de l’optimum social:**

$$\max_{(c_n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n)}{(1+\rho)^{n-1}}$$

$$s.c \begin{cases} c_n \leq f(k_n) \\ f(k_n) = c_n + i_n \\ k_{n+1} = k_n + i_n - a \cdot k_n \end{cases}$$

Où *u* et *f* sont les fonctions d’utilité et de production avec les propriétés usuelles (croissantes et concaves), *a* le coefficient d’amortissement du capital et k_1 est donné.

Méthode variationnelle: on applique une variation δ à c_n

Le capital k_n étant fixé, l’investissement à la date n va changer en vertu de l’équation $f(k_n) = c_n + i_n$, ce qui change k_{n+1}

On modifie alors c_{n+1} de sorte à retrouver le même niveau de capital à la date $n+2$.

Les variations de la consommation et de l'investissement à la date n sont alors les suivantes:

$$c_n \to c_n + \delta$$

$$i_n \to i_n - \delta$$

Le capital et la production à la date $n+1$ varient de la manière suivante:

$$k_{n+1} \to k_{n+1} - \delta$$

$$f\left(k_{n+1}\right) \to f\left(k_{n+1}\right) - f'\left(k_{n+1}\right) \cdot \delta$$

On modifie c_{n+1} pour que l'investissement à la date $n+1$ compense exactement les variations subies par la production , le capital et l'amortissement à la date $n+1$:

$$c_{n+1} \to c_{n+1} - f'\left(k_{n+1}\right) \cdot \delta - \delta + a \cdot \delta$$

De cette manière, on retrouve les même niveaux de capital et de consommation à partir de la date $n+2$.
Les seules consommations qui ont variés sont: c_n et c_{n+1}
La variation de l'utilité intertemporelle est:

$$\Delta U = \frac{u'(c_n)\cdot \Delta c_n}{(1+\rho)^{n-1}} + \frac{u'(c_{n+1})\cdot \Delta c_{n+1}}{(1+\rho)^{n}}$$

$$= \frac{u'(c_n)\cdot \delta}{(1+\rho)^{n-1}} - \frac{u'(c_{n+1})\cdot \left(f'(k_{n+1}) - a + 1\right)\cdot \delta}{(1+\rho)^{n}}$$

Cette variation est nulle si on se situe à un optimum. Ce qui donne la condition nécessaire de premier ordre (équation d'Euler):

$$\frac{u'(c_{n+1})}{u'(c_n)} = \frac{1+\rho}{1+f'(k_{n+1}) - a}$$

- **Méthode du Lagrangien**: on peut écrire le programme sous la forme suivante car on peut montrer que les contraintes $0 \leq c_n \leq f(k_n)$ et $0 \leq k_n$ ne sont pas actives à l'optimum (avec les hypothèses convenue sur *u* et *f*):

$$\max_{(c_n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n)}{(1+\rho)^{n-1}}$$

$$s.c \begin{cases} c_n + k_{n+1} - k_n + ak_n \leq f(k_n) \\ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- On suppose que les fonctions *u* et *f* sont telles que le problème « n'explose pas », c'est-à-dire que la somme actualisée reste finie à l'optimum. (*u* et *f* ne doivent pas croître trop vite par rapport à ρ):
- De plus, étant en dimension infinie, il y a une autre condition nécessaire: la **condition de transversalité** doit être respectée.

- Condition de transversalité $\lim_{n \to \infty} \beta_n k_{n+1} = 0$
  - si la condition de transversalité n'est pas respectée, le fait que les conditions suivantes soient respectées n'implique pas l'optimalité
- Lagrangien

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n)}{(1+\rho)^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [c_n + k_{n+1} - k_n + ak_n - f(k_n)]$$

  - On pose: $\beta_n = -\lambda_n / (1+\rho)^{n-1}$

$\Rightarrow$

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n) - \lambda_n [c_n + k_{n+1} - k_n + ak_n - f(k_n)]}{(1+\rho)^{n-1}}$$

-> Conditions nécessaires (en plus de la condition de transversalité):

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_n} = \frac{u'(c_n) + \lambda_n}{(1+\rho)^{n-1}} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial k_{n+1}} = \frac{-\lambda_n}{(1+\rho)^{n-1}} + \frac{\lambda_{n+1}(1 - a + f'(k_{n+1}))}{(1+\rho)^n} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$u'(c_n) = \lambda_n$$

$$\frac{(1 - a + f'(k_{n+1}))}{(1+\rho)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$$

- D'où $$\frac{u'\left(c_{n+1}\right)}{u'\left(c_n\right)} = \frac{1+\rho}{1 + f'\left(k_{n+1}\right) - a}$$

- On retrouve la même équation (équation d'Euler) que la méthode variationnelle.
  - Si le programme « n'explose pas » et sous nos hypothèses sur *u* et *f*, les conditions nécessaires sont aussi suffisantes

Equilibre concurrentiel:

- A prix constants (égaux à 1 pour simplifier):
  - Comme dans le modèle à 2 périodes, on suppose la marge bancaire nulle
  - On note s_n l'épargne monétaire du consommateur constituée à la période *n* est rémunérée à la période *n+1,* et w_n , r_n le salaire et le taux d'intérêt bancaire de la période *n.*
  - A la période 1, le consommateur commence avec une épargne égale au capital initial $s_0 = k_1$
  - Pour simplifier, on prend un taux d'amortissement nul $a = 0$
- Programme du consommateur:

$$\max_{(c_n, s_n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n)}{(1+\rho)^{n-1}}$$

$$s.c \begin{cases} c_n + s_n \leq w_n + s_{n-1}(1+r_n) \\ \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$

- Lagrangien:

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(c_n) - \lambda_n [c_n + s_n - w_n - s_{n-1}(1 + r_n)]}{(1+\rho)^{n-1}}$$

- Condition de premier ordre:

$$\frac{\partial \ell}{\partial c_n} = \frac{u'(c_n) - \lambda_n}{(1+\rho)^{n-1}} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial k_{n+1}} = \frac{-\lambda_n}{(1+\rho)^{n-1}} + \frac{\lambda_{n+1}(1 + r_{n+1})}{(1+\rho)^{n}} = 0$$

- Ces deux équations donnent:

$$\frac{u'\left(c_{n+1}\right)}{u'\left(c_n\right)} = \frac{1+\rho}{1 + r_{n+1}}$$

  – cette équation d'Euler est la même que l'équation d'Euler de l'O.S. si on tient compte de l'hypothèse de nullité de la marge bancaire et de concurrence parfaite pour les producteurs qui implique $f'(k_{n+1}) = r_{n+1}$ et si on prend un coefficient d'amortissement *a* nul.

- Condition « non-Ponzi »:
  - L’équation d’Euler détermine la trajectoire de la consommation si on connaît c_1
  - Si la valeur de c_1 à l’équilibre concurrentiel est la même que celle de l’optimum social, alors, par l’équation d’Euler, les trajectoires sont identitiques et on peut dire que l’équilibre concurrentiel est l’optimum social.
  - La contrainte budgétaire dans le programme du consommateur de l’équilibre concurrentiel ne suffit pas à interdire une consommation infinie car il peut avoir une épargne monétaire négative (crédit bancaire).
  - Pour éviter cette situation non réaliste, on impose la condition « non-Ponzi » qui exprime que la valeur actualisée du solde bancaire doit finir par être non négative:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{s_T}{\prod_{i=1}^{T} (1 + r_i)} \geq 0$$

- La maximisation de l’utilité du consommateur rend nécessaire de ne pas laisser une épargne strictement positive à la fin de la période. La condition non-Ponzi peut s’exprimer de manière équivalente par:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{s_T}{\prod_{i=1}^{T} (1 + r_i)} = 0$$

- On montre maintenant que si on ajoute à notre équilibre concurrentiel la condition « non-Ponzi » ainsi que l’hypothèse que tout ce qui reste comme produit après rémunération du capital est versé aux consommateurs au titre de salaire, alors l’équilibre concurrentiel est un optimum social.

- A l’équilibre concurrentiel, les contraintes de budget instantanées sont actives: $c_n + s_n = w_n + s_{n-1}(1 + r_n)$

- Pour $n = 1$: $\dfrac{c_1 + s_1}{(1 + r_1)} = \dfrac{w_1}{(1 + r_1)} + s_0$

- Pour $n = 2$: $\dfrac{c_2 + s_2}{(1 + r_2)} = \dfrac{w_2}{(1 + r_2)} + s_1$

On divise la deuxième égalité par $(1 + r_1)$ et on additionne membre à membre:

$$\frac{c_1}{(1 + r_1)} + \frac{c_2}{(1 + r_2)(1 + r_1)} + \frac{s_2}{(1 + r_2)(1 + r_1)}$$

$$= \frac{w_1}{(1 + r_1)} + \frac{w_2}{(1 + r_2)(1 + r_1)}$$

- On poursuit l'opération jusqu'à *T*:

$$\sum_{n=1}^{T} \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)} + \frac{s_T}{\prod_{i=1}^{T}(1+r_i)} = \sum_{n=1}^{T} \frac{w_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)} + s_0$$

- On fait tendre *T* vers l'infini. La condition non-Ponzi permet d'écrire:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)}}_{\text{valeur actualisée du flux de consommation}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)}}_{\text{valeur actualisée du flux de salaire}} + \underbrace{s_0}_{\text{dépôt initial}}$$

- Cette équation est une contrainte budgétaire intertemporelle

- On cherche à savoir si le flux de consommation de l'OS vérifie une équation similaire. L'hypothèse sur la répartition du revenu s'écrit: $w_n = f(k_n) - k_n f'(k_n)$
- La contrainte instantanée de budget pour l'OS est:

$$c_n + k_{n+1} - k_n = f(k_n) = w_n + k_n f'(k_n)$$

$$\Rightarrow c_n + k_{n+1} = f(k_n) = w_n + k_n(1 + f'(k_n))$$

- De la même manière que pour l'EC, on montre alors que:

$$\sum_{n=1}^{T} \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}(1 + f'(k_i))} + \frac{k_{T+1}}{\prod_{i=1}^{T}(1 + f'(k_i))}$$

$$= \sum_{n=1}^{T} \frac{w_n}{\prod_{i=1}^{n}(1 + f'(k_i))} + k_1$$

- On utilise l'équation d'Euler de l'OS:

$$\frac{u'(c_{n+1})}{u'(c_n)} = \frac{1+\rho}{1+f'(k_{n+1})}$$

- On obtient:

$$\prod_{i=1}^{T}(1+f'(k_i))$$

$$= (1+f'(k_1))\frac{(1+\rho)u'(c_1)}{u'(c_2)}\cdots\frac{(1+\rho)u'(c_{T-1})}{u'(c_T)}$$

$$= (1+f'(k_1))(1+\rho)^{T-1}\frac{u'(c_1)}{u'(c_T)}$$

- On remplace cette expression dans la contrainte de budget intertemporelle de l'OS:

$$\sum_{n=1}^{T} \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+f'(k_i))} + \frac{k_{T+1}u'(c_T)}{u'(c_1)(1+f'(k_1))(1+\rho)^{T-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{T} \frac{w_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+f'(k_i))} + k_1$$

- Or on a: $$\frac{k_{T+1}u'(c_T)}{u'(c_1)(1+f'(k_1))(1+\rho)^{T-1}}$$ $$= \frac{k_{T+1}\lambda_T}{u'(c_1)(1+f'(k_1))(1+\rho)^{T-1}}$$

- D’après la condition de transversalité, cette expression tend vers *0* quand *T* tend vers l’infini. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+f'(k_i))} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+f'(k_i))} + k_1$$

- Cette contrainte budgétaire intertemporelle de l’OS est la même que celle de l’EC puisque

$k_1 = s_0$ et $f'(k_i) = r_i$

- k_1 est donné. Pour chaque c_1, on calcule la suite

(k_n, c_n) grâce aux équations:

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_{n+1})}{u'(c_n)} = \dfrac{1+\rho}{1+f'(k_{n+1})} \\ c_n + k_{n+1} - k_n \leq f(k_n) \end{cases}$$

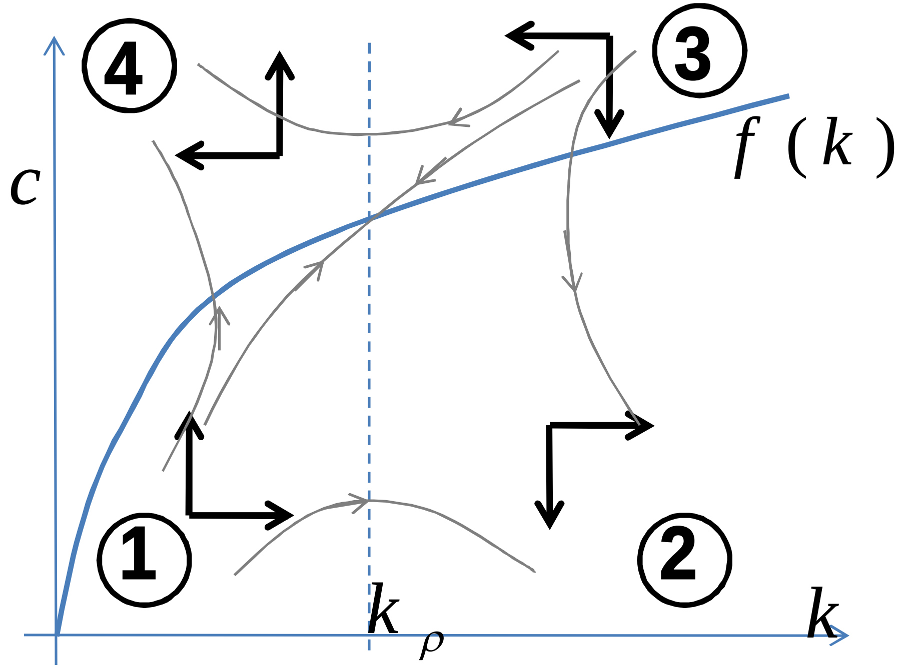
- La contrainte budgétaire intertemporelle permet de calculer c_1
- Les équations qui définissent l’OC et l’EC étant les même, les deux coincident.

L'optimum social est stationnaire asymptotiquement

- La concavité du critère (utilité intertemporelle) et des contraintes (fonction de production) implique l'<u>unicité</u> de la solution si elle existe.
- $\Delta k = f(k) - c$ donc si $f(k) > c$, alors $\Delta k > 0$
- On définit $k_\rho \ / \ f'(k_\rho) = \rho$. L'équation d'Euler implique que si $k > k_\rho$ alors $\Delta c < 0$

et si $k < k_\rho$ alors $\Delta c > 0$

phase-plane:



Si on commence dans une des régions 2 ou 4, on y reste.
Si on commence dans une des régions 1 ou 3, soit on va vers $(k_\rho, f(k_\rho))$ soit on passe dans une des régions 2 ou 4.
Dans tous les cas, la suite (c_n) finit par être monotone, donc convergente (éventuellement vers l'infini).
Si $\max(u') = u'(0) < \infty$ alors l'équation d'Euler montre que $k_n \to k_\rho$, ce qui prouve qu'en réalité on ne peut pas aller dans les régions 2 et 4.

Si $u'(0) = \infty$, on utilise la **condition de transversalité** pour montrer que la zone 2 ne donne pas de solution.
En effet, le cas qui pose problème est $c_n \to 0$.
La quantité $f(k) - kf'(k)$ est croissante en k, donc minorée quand augmente. Ainsi, si on prend une trajectoire dans la région 2 du *phase-plane*, en la commençant à partir d'un rang *n* où c_n est suffisamment petit, on a

$$c_n < f(k_n) - k_n f'(k_n)$$

Cela contredit la **contrainte budgétaire intertemporelle** qui résulte de la condition de transversalité.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\prod_{i=1}^{n}(1 + f'(k_i))} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(k_n) - k_n f'(k_n)}{\prod_{i=1}^{n}(1 + f'(k_i))} + k_1$$

- L’optimum est donc stationnaire
- On s’intéresse aux conditions que doit vérifier l'optimum social stationnaire
- La consommation et le capital convergent donc

$$\lim \frac{u'(c_{n+1})}{u'(c_n)} = 1$$

Ce qui donne (formule d’Euler avec $a \neq 0$):
$$\frac{1+\rho}{1+f'(k_\rho)-a} = 1$$

soit:

$$\boxed{f'(k_\rho) - a = \rho}$$

Il s’agit de la règle d’or modifiée. On retrouve le modèle de Solow si on annule ρ

Remarque: le critère de la somme infinie actualisée ne permet pas de traiter le cas $\rho = 0$ ou $\rho < 0$

- Le capital étant asymptotiquement constant, on en déduit que l'épargne est asymptotiquement égale à l'amortissement. L'épargne nette est donc nulle.
- Puisque la fonction de production est concave, le capital asymptotique dans ce modèle, k_∞, est inférieur au capital atteint avec le taux d'épargne optimal dans le modèle de Solow, k_s
- La relation $f'(k_\infty) = a + \rho$ peut être interprétée en disant que **<u>l'accumulation du capital doit s'arrêter quand la productivité du capital ne peut plus couvrir l'amortissement du capital + le taux de préférence pour le présent</u>**.
- Plus le taux de préférence pour le présent est élevé, plus k_∞ est faible
- et donc plus la consommation asymptotique $f(k_\infty) - a \cdot k_\infty$ sera faible, puisque $k_\infty < k_s$ et *f* concave

- Le taux d'épargne asymptotique est

$$s_\infty = \frac{a \cdot k_\infty}{f\left(k_\infty\right)}$$

- Ce taux est inférieur au taux d'épargne optimal du modèle de Solow car, par la concavité de *f :*

$$s_\infty = \frac{a \cdot k_\infty}{f\left(k_\infty\right)} < \frac{a \cdot k_s}{f\left(k_s\right)}$$

- Morale: plus on préfère le présent (ρ augmente), plus le taux d'épargne baisse et la consommation à long-terme baisse.

Calcul du taux d'épargne asymptotique dans le cas Cobb-Douglas

- Règle d'or modifiée, donc:

$$f'(k_\infty) = a + \rho \Rightarrow \alpha k_\infty^{\alpha - 1} = a + \rho$$

$$\Rightarrow k_\infty = \left(\frac{\alpha}{a + \rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Epargne nette nulle, donc:

$$s \cdot k_\infty^{\alpha} = a \cdot k_\infty \Rightarrow s = a \cdot k_\infty^{1-\alpha}$$

- Par conséquent:

$$s = a \cdot k_\infty^{1-\alpha} = \frac{a}{a + \rho}\alpha$$

- On retrouve le résultat dans le cas Solow en annulant ρ

- On voit aussi que le taux d'épargne baisse si ρ augmente

Application numérique: comparaison des sentiers de croissance selon le taux de préférence pour le présent

- L'algorithme pour le calcul du chemin optimal:

$$k_1, c_1 \longrightarrow k_2 = k_1 - ak_1 + f(k_1) - c_1 \longrightarrow c_2 / \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1+\rho}{1+f'(k_2)-a}$$

$$\longrightarrow k_3, c_3 \longrightarrow \cdots$$

• Dans les calculs suivants, le choix de c_1 est fait par tâtonnement. La valeur qui maximise la somme actualisée est choisie. La convergence du système dépend du choix de c_1. Pour cette raison, on a légèrement modifié la valeur de contrôle à l'approche du régime stationnaire afin que le système ne diverge pas.

- Spécifications du modèle:

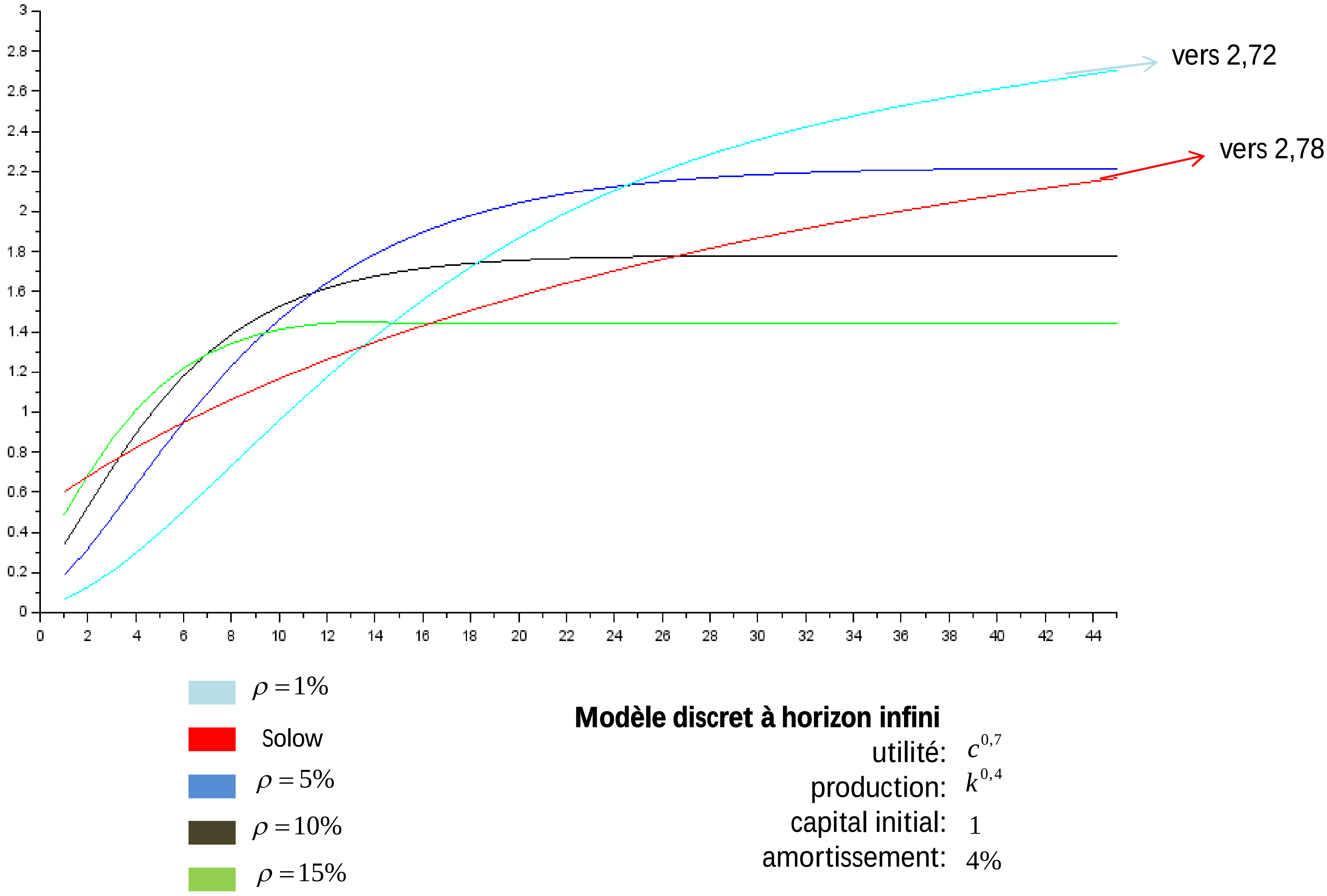
$$u(c) = c^{0,7}$$

$$f(k) = k^{0,4}$$

$$k_1 = 1$$

$$a = 4\%$$

Trajectoires de la consommation selon le taux de préférence pour le présent



Modèle discret à horizon infini

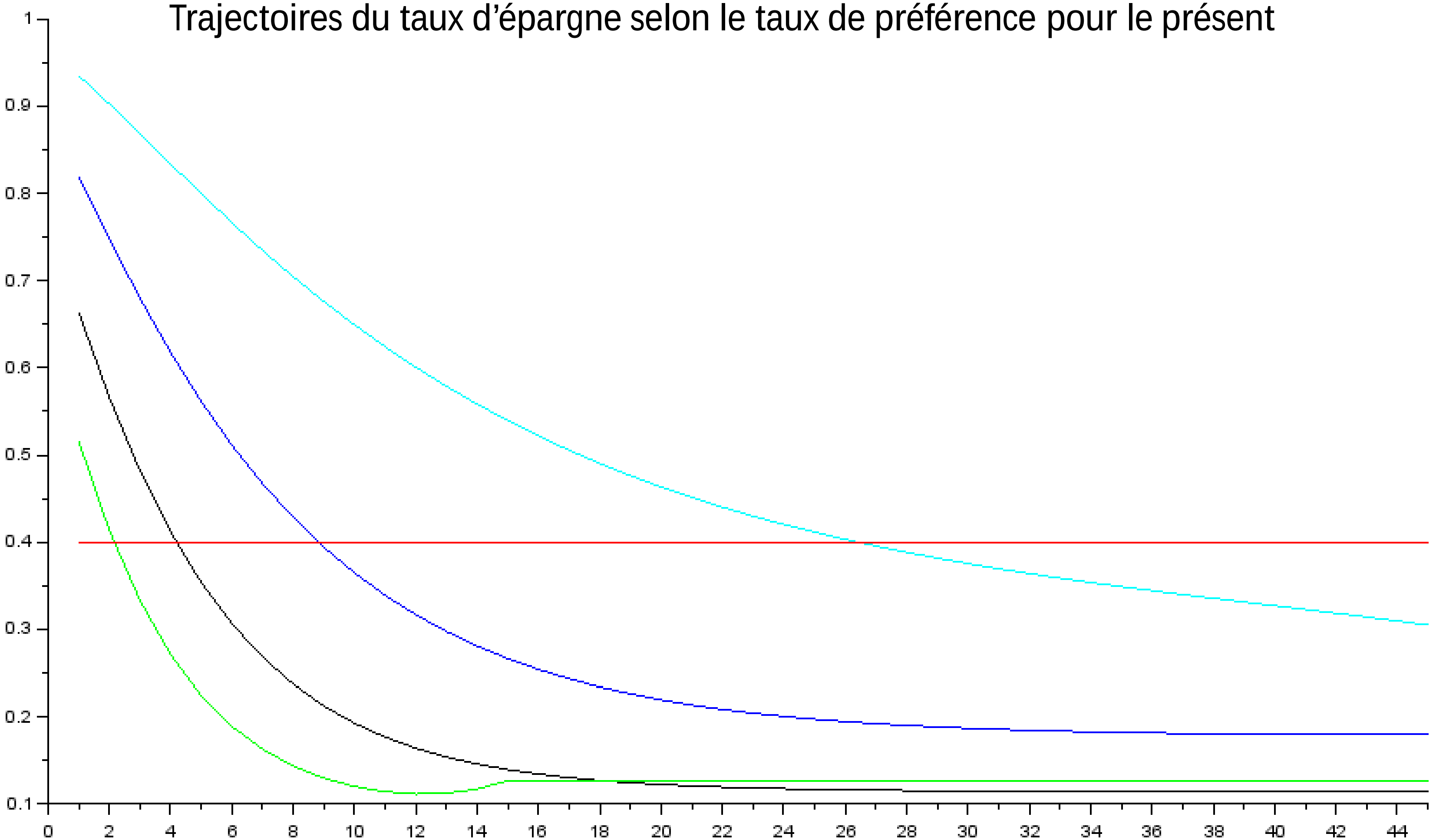
utilité: $c^{0,7}$

production: $k^{0,4}$

capital initial: 1

amortissement: 4%

Trajectoires du taux d'épargne selon le taux de préférence pour le présent



$\rho = 1\%$

Solow

$\rho = 5\%$

$\rho = 10\%$

$\rho = 15\%$

Modèle discret à horizon infini

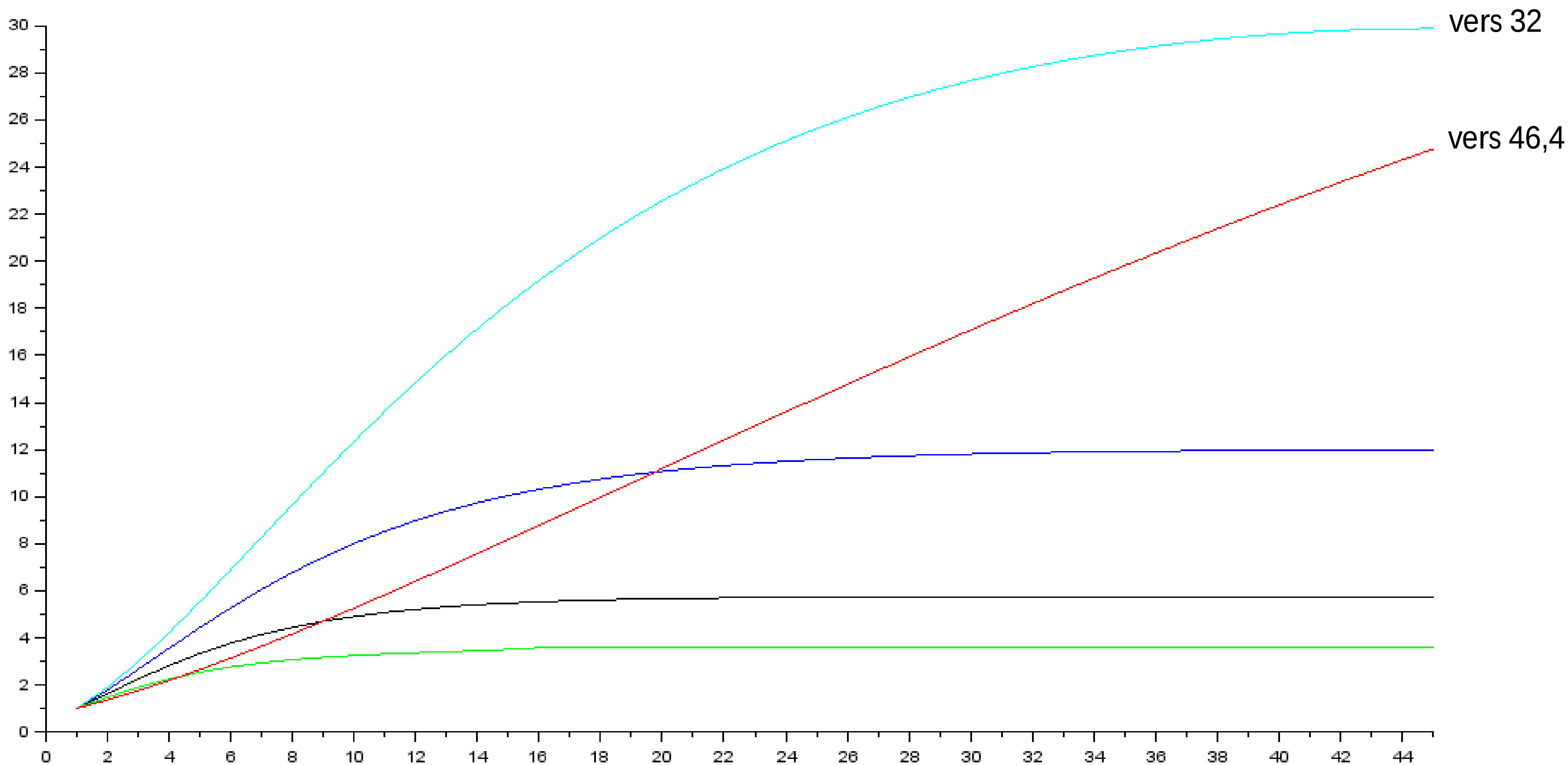
utilité: $c^{0,7}$

production: $k^{0,4}$

capital initial: 1

amortissement: 4%

Trajectoires du capital selon le taux de préférence pour le présent



$\rho = 1\%$

Solow

$\rho = 5\%$

$\rho = 10\%$

$\rho = 15\%$

Modèle discret à horizon infini

utilité: $c^{0,7}$

production: $k^{0,4}$

capital initial: 1

amortissement: 4%

4-4 Modèle à temps continu à un bien composite et 2 facteurs

On fait l'hypothèse d'homogéneité de la production et de stabilité de la population. L'étude se ramène alors à un seul facteur: le capital pat tête. Les lettres minuscules désignent les grandeurs par tête.

- Le critère à optimiser est la somme des utilités actualisée en temps continu:

$$\int_0^T e^{-\rho t} u(c(t))dt$$

La variable de maximisation est la fonction $c(t)$

Les contraintes sont:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - a \cdot k(t) \\ k(0) = k_0 \\ c(t) \leq f(k(t)) \end{cases}$$

où *f* est la fonction de production par tête.

Si $T = +\infty$ le modèle est dit à horizon infini.

- **<u>Méthode de résolution de Pontryagin</u> :** On cherche à trouver des équations différentielles vérifiées par les solutions *c* et *k.*

  Voici les principes de cette méthode, exposés ici sans formalisme. On construit un nouveau critère à optimiser en intégrant la contrainte sur le capital à l'aide de multiplicateurs:

$$J(k,c)=\int_0^T\left[e^{-\rho t}u(c)-\mu\left(\dot{k}-f(k)+c+ak\right)\right]dt$$

où le multiplicateur μ est une fonction du temps à rechercher, de sorte que la maximisation de J donne les fonctions *c* et *k* voulues.

On intègre $\mu\dot{k}$ par partie:

$$J(k,c)=\int_0^T\left[e^{-\rho t}u(c)+\mu(f(k)-c-ak)+\dot{\mu}k\right]dt-\mu(T)k(T)+\mu(0)k_0$$

Pour simplifier le calcul, on s'impose:

$$\mu(T)\cdot k(T)=0$$

ce qui revient, en horizon fini, à imposer $\mu(T)=0$
En horizon infini, cette condition s'écrit:

$$\lim_{t\to+\infty}\mu(t)\cdot k(t)=0$$

Dans ce système, dans le langage de l'optimisation dynamique, la consommation est le contrôle et le capital est l'état. A chaque sentier de consommation correspond un sentier de capital.
On va modifier légèrement le sentier de consommation :

$$c(t,\varepsilon) = c(t) + \varepsilon \cdot x$$

Où x est une fonction quelconque du temps et ε un réel.
Le capital *k(t)* va changer pour devenir: $k(t,\varepsilon)$
La fonction suivante doit être maximale en $\varepsilon = 0$:

$$J\left(k\left(.,\varepsilon\right), c\left(.,\varepsilon\right)\right) = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\rho t} u\left(c\left(t,\varepsilon\right)\right) + \mu\left(t\right)\left(f\left(k\left(t,\varepsilon\right)\right)\right. \\ \left. - c\left(t,\varepsilon\right) - ak\left(t,\varepsilon\right)\right) + \dot{\mu}\left(t\right)k\left(t,\varepsilon\right) \end{bmatrix} dt + \mu\left(0\right)k_0$$

Donc la dérivée par rapport à ε doit être nulle. On pose:

$$G(t,\varepsilon) = e^{-\rho t} u(c(t,\varepsilon)) + \mu(t)[f(k(t,\varepsilon)) - c(t,\varepsilon) - ak(t,\varepsilon)]$$

On obtient:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J = \int_0^T [\frac{\partial G}{\partial c} x + (\frac{\partial G}{\partial k} + \dot{\mu}) \frac{\partial k}{\partial \varepsilon}] dt = 0$$

Si on choisit μ tel que: $\frac{\partial G}{\partial k} + \dot{\mu} = 0$

alors on doit avoir pour toute fonction x de t: $\int_0^T \frac{\partial G}{\partial c} x dt = 0$

Ce qui implique: $\frac{\partial G}{\partial c} = 0$

<u>Récapitulation:</u> si le couple $c(t), k(t)$ est la solution recherchée, alors les 3 fonctions $c(t), k(t), \mu(t)$ vérifient les équations différentielles et la condition aux limites suivantes.

$$\frac{\partial G}{\partial c} = 0; \frac{\partial G}{\partial k} = -\dot{\mu}; \frac{\partial G}{\partial \mu} = \dot{k}$$

$$\mu(T) \cdot k(T) = 0$$

avec $G = e^{-\rho t} u(c) + \mu[f(k) - c - ak]$

Réécriture avec des paramètres plus significatifs économiquement:

On pose :

$$H = G \cdot e^{\rho t}$$

$$\lambda = \mu \cdot e^{\rho t}$$

Les équations différentielles deviennent:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial k} = \frac{\partial H}{\partial k} e^{-\rho t} = -\dot{\mu} = -(\dot{\lambda} e^{-\rho t} - \rho e^{-\rho t} \lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = \rho\lambda - \dot{\lambda}$$

$$H = u(c) + \lambda[f(k) - c - ak] \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}$$

La condition aux limites (ou condition de transversalité):

$$\lambda(T) \cdot e^{-\rho T} \cdot k(T) = 0$$

Interprétation économique:

λ est le prix implicite (shadow price) de l'investissement, relativement à l'utilité instantanée de la consommation. En maximisant *H* par rapport à *c* , ce prix permet de faire le bon dosage instantané entre investissement et consommation.

Récapitulation:

Hamiltonien

$$H = u(c) + \lambda \underbrace{[\, f(k) - c - ak \,]}_{\text{investissement}}$$

Utilité de la consommation

shadow price de l'investissement

Équations d'évolution

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Rightarrow \\ u'(c) = \lambda\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial k} = \rho\lambda - \dot{\lambda} \Rightarrow \\ f'(k) - a = \rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k} \Rightarrow \\ \dot{k} = f(k) - c - ak\end{gathered}}$$

Condition aux limites

$$\lambda(T) \cdot e^{-\rho T} \cdot k(T) = 0$$

En horizon infini: $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda(t) \cdot e^{-\rho t} \cdot k(t) = 0$

Application à la détermination de l’optimum social stationnaire

Régime stationnaire et $u'(c) = \lambda \Rightarrow \lambda$ constante. Donc $\dot{\lambda} = 0$

L’équation $f'(k) - a = \rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ devient $f'(k_\infty) = a + \rho$

On retrouve la même équation que dans le modèle à temps discret.

L’équation $\dot{k} = f(k) - c - ak$ devient $f(k) - c - ak = 0$

On obtient le taux d’épargne asymptotique: $s_\infty = \frac{a \cdot k_\infty}{f(k_\infty)}$

Qui est aussi le même que pour le modèle discret.

La mise en évidence du sentier de croissance pour atteindre k_∞ ne peut se faire analytiquement. Elle nécessite une résolution numérique.

Enoncé formel des conditions nécessaires d'optimalité

(selon R. Marti, ouvrage « optimisation intertemporelle » edition *economica)*

Soit: c faux pour u

$$u : \Re^n \times \Re^k \times \Re \rightarrow \Re$$

$$f : \Re^n \times \Re^k \times \Re \rightarrow \Re^n$$

$$g : \Re^n \times \Re^k \times \Re \rightarrow \Re^s$$

des fonctions de classe C1

et $k : \Re \rightarrow \Re^n$ une fonction absolument continue sur $[0, T]$

et $c : \Re \rightarrow \Re^k$ une fonction continue sur par morceaux sur $[0, T]$

On considère le problème de contrôle optimal suivant:

$$\boxed{\begin{aligned} &\max_c U(k,c) = \int_0^T u(c)e^{-\rho t}dt \\ &s.c. \begin{cases} k(0) = k_0 \\ \dot{k} = f(k,c,t) \\ g(k,c,t) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

On suppose la condition de qualification des contraintes g vérifiée.
On définit l'hamiltonien H et le lagrangien L : c faux pour H. il faut u

$$H(k,c,\lambda_0,\lambda,t)=\lambda_0 f(k,c,t)+\langle \lambda \cdot f(k,c,t)\rangle$$

$$L(k,c,\lambda_0,\lambda,\mu,t)=H(k,c,\lambda_0,\lambda,t)+\langle \mu \cdot g(k,c,t)\rangle$$

Si (k^*,c^*) est une solution du problème de contrôle optimal, alors il existe un nombre positif λ_0 , une fonction $\lambda:[0,T]\to\Re^n$ absolument continue par morceaux, et une fonction $\mu:[0,T]\to\Re^s$ continue par morceaux , non tous nuls tels que:

conditions nécessaires d'optimalité

$$c=\arg\max_{c\in\Omega(k,t)} H(k^*,c,\lambda_0,\lambda,t) \quad \text{où} \quad \Omega(k,t)=\{c\in\Re^k : g(k,c,t)\geq 0\}$$

$$L_c(k^*,c^*,\lambda_0,\lambda,\mu,t)=0$$

$$L_k(k^*,c^*,\lambda_0,\lambda,\mu,t)=\rho\lambda-\dot{\lambda}$$

$$\mu\geq 0,\langle \mu\cdot g(k^*,c^*,t)\rangle=0$$

$$L_\lambda(k^*,c^*,\lambda_0,\lambda,\mu,t)=\dot{k}$$

$$L_t(k^*,c^*,\lambda_0,\lambda,\mu,t)=H(k^*,c^*,\lambda_0,\lambda,t)$$

avec la condition de transversalité: $\langle \lambda(T)\cdot k(T)\rangle e^{-\rho T}=0$

si $T=+\infty$: $\lim_{t\to+\infty}\langle \lambda(t)\cdot k(t)\rangle e^{-\rho t}=0$