$\theta \in \mathbb{N}^*$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\underbrace{CR1}$

μ est la mesure de Dirac qui charge $\mathbb{N}^*$

$$P_\theta[X = m] = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{\{1,\dots\theta\}}(x)$$

$X \rightsquigarrow \mu(\{1, 2, \dots \theta\})$

* la valeur θ du parametre θ est identifiable ssi
  $\forall \theta \neq \theta_1, \theta_1 \in \Theta$
  $P_\theta \neq P_{\theta 1}$

$P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2} \Leftarrow \theta_1 \neq \theta_2$; $\theta_1 = \theta_2 \Leftarrow P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$

toutes les lois usuelles sont identifiables

Pour que la parametisation des lois usuelles transformees soient identifiables, il faut qu'$\exists$ une bijection entre la parametisation "naturelle" et la nouvelle parametre.

1) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 1)$; $\theta = \mu \in \mathbb{R}$

$(\theta_1, \theta_2) \in \Theta$; $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$

$\mathcal{N}(\theta_1, 1)$ 　 $\mathcal{N}(\theta_2, 1)$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(m - \theta_1)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \theta_2)^2\right)$$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ (modèle identifiable)

2) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu + \gamma, 1)$; $(\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2$
$\theta = (\mu, \gamma)$

$$\left.\begin{array}{ll} P_{\theta_1} = \mathcal{N}(3, 1) & \theta_1 = (1, 2) \\ P_{\theta_2} = \mathcal{N}(3, 1) & \theta_2 = (2, 1) \end{array}\right\} \text{Non identifiables}$$

mission de statistique : Resumer le n-ech tout en apportant de l'info sur θ.

Pivotale : $X \rightsquigarrow N(\theta, 1)$ 　 $\frac{1}{n} \sum X_i - \theta$

$\bar{X}_n - \theta \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

3) $X \rightsquigarrow b(\theta)$ 　 $\theta \in]0, 1[$ 　　 (def 1.5)

$$P_\theta(X = m) = \theta^m (1 - \theta)^{1-m} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i)$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(\underline{x})$$

Exhaustivité : (dim o)

$X \sim b(\theta)$

$\theta \in]0,1[$

$T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ exhaustive

$$P_\theta[\underline{X} = \underline{x} \setminus (T(\underline{X}) = t)] = \frac{P_\theta[(X_1 = x_1, \dots X_n = n) ; \sum_{i=1}^{n} X_i = t]}{P_\theta[\sum_{i=1}^{n} X_i = t]}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_\theta[(X_1 = x_1, \dots X_n = x_n)]}{P_\theta[\sum x_i = t]} \\ \text{si } t = \sum x_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$X_1 \dots X_n \sim b(\theta)$ iid

$\sum x_i \sim \mathcal{B}(n,\theta)$

$$P_\theta[\underline{X} = \underline{x} \setminus t(\underline{X}) = t] = \begin{cases} \dfrac{\cancel{\theta^{\sum x_i}} \cancel{(1-\theta)^{n-\sum x_i}}}{C_n^t \cancel{\theta^t} \cancel{(1-\theta)^{n-t}}} \\ = \dfrac{1}{C_n^t} \quad \text{si } \sum x_i = t \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Thé de factorisation

preuve : cas discret

$\Leftarrow \mathcal{L}(x,\theta) = g(T(\underline{x}),\theta) . h(x)$

$$P_\theta[\underline{X} = \underline{x} \setminus T(\underline{X}) = t] = \begin{cases} \dfrac{P_\theta[\underline{X} = \underline{x}, T(\underline{X}) = t]}{P_\theta[T(\underline{X}) = t]} \\ \text{si } T(\underline{x}) = t \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_\theta[\underline{X} = \underline{x}]}{P_\theta[T(\underline{x}) = t]} & \text{si } T(\underline{x}) = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathcal{L}(\underline{x}, \theta)}{P_\theta(T(\underline{X}) = t)} & \text{si } T(\underline{x}) = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{g(\cancel{T(\underline{x}),\theta}) \cdot h(\underline{x})}{\cancel{P_\theta(T(\underline{X}) = t)}} & \text{si } T(x) = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow T(\underline{X})$ exhaustive

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = P_\theta[\underline{X} = \underline{x}]$$

$$= \underbrace{P_\theta[\underline{X} = \underline{x} \setminus T(\underline{X}) = t]}_{h(\underline{x})} \underbrace{P_\theta[T(\underline{X}) = t]}_{g(T(\underline{X}, \theta)}$$

* $x \sim b(\theta)$

$\theta \in]0,1[$

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \theta) = \underbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g(T(\underline{x}), \theta)} \overbrace{\mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(\underline{x})}^{h(\underline{x})}$$

$$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$g : (b, a) \longrightarrow a^b (1-a)^{n-b}$$

* $x \sim \mu_{[0,\theta]}$ $\quad \theta > 0$

$$g(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

$$\mathcal{L}(x, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x)$$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \underbrace{\frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}}}_{g(T(\underline{x},\theta))} \underbrace{\mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}}}_{h(\underline{x})}$$

$T(\underline{X}) : \max X_i$

$g : (a,b) \longrightarrow \frac{1}{b^n} \mathbb{1}_{\{a \leq b\}}$

$* \; X \rightsquigarrow b(\theta) \quad \theta \in]0,1[$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \theta^{x_1} (1-\theta)^{1-x_1} \theta^{\sum_{i=2}^n x_i} (1-\theta)^{(n-1)-\sum_{i=2}^n x_i} \mathbb{1}_{\{0,1\}^{n-1}}(\underline{x})$$

$T(\underline{X}) = (X_1, \sum_{i=2}^n X_i)$

$g((a,b),c) : \longrightarrow c^a (a-c)^{1-a} c^b (1-c)^{(n-1)-b}$

$* \; X \rightsquigarrow \mu_{[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]} \quad \theta > 0$

$$g(x,\theta) = \mathbb{1}_{[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]}(x)$$

$$\mathcal{L}(\underline{x},\underline{\theta}) = \mathbb{1}_{\{\min \underline{x} \geq \theta-\frac{1}{2}\}} \mathbb{1}_{\{\max \underline{x} \leq \theta+\frac{1}{2}\}}$$

$h(\underline{x}) = 1$

$g : ([T_1,T_2],\lambda) \longrightarrow \mathbb{1}_{\{T_1 \geq \lambda-\frac{1}{2}\}} \mathbb{1}_{\{T_2 \leq \lambda+\frac{1}{2}\}}$

soit $Y = X - \theta$

$Y \rightsquigarrow \mu[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned} S(\underline{X}) &= \max \underline{X_i} - \min \underline{X_i} \\ &= \max \underline{Y_i} - \min \underline{Y_i} \end{aligned}$$

Complète

Interpolation

- qq soit la transformation que je fait, la distribution n'est pas libre.

Sauf si je prends l'app nulle.

exemple 1 :

$X \rightsquigarrow B(\theta)$; $\theta \in]0,1[$

$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ exh

soit ϕ integ

$E_\theta[\phi(T(\underline{x}))]$; $T(\underline{x}) \rightsquigarrow B(n,\theta)$

$E_\theta[\phi(T(\underline{x}))] = \sum_{t=0}^{n} \phi(t)\, C_n^t \theta^t (1-\theta)^{n-t} = 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{t=0}^{n} \phi(t)\, C_n^t \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = 0$

Soit $\lambda = \frac{\theta}{1-\theta}$ $\lambda \in]0;+\infty[$

$E_\theta(\phi(T(\underline{x}))) = \sum_{t=0}^{n} C_n^t \phi(t) \lambda^t = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow$ polynome de degre n/ une infinité de racines

$\Rightarrow$ tous les monomes sont nulls $\Rightarrow \phi = 0$

exemple 2 :

$X \rightsquigarrow \mu_{[0,\theta]}$: $\theta > 0$; $T(\underline{x}) = \max X_i$ exh

$F_{max}(x) = P_\theta(\max X_i \leq x_i) = P_\theta(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x)$

$= P_\theta([X \leq x])^n$

$= f_{max}(x) = (F_X(x))^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) + \mathbb{1}_{]\theta,+\infty[}(x)$

$f_{max}(x,\theta) = n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$

soit ϕ integrable

$E_\theta(\phi(T(\underline{x}))) = 0 \quad \forall \theta > 0 \Rightarrow \int_0^\theta \phi(x) \cdot n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} dx = 0$

$\forall \theta > 0$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \phi(m)\, m^{n-1}\, dm = 0 \quad \forall \theta > 0$$

soit $g : m \longrightarrow \phi(m)\, m^{n-1}$ et G primitive de g

$E_\theta[\phi(T(\underline{X}))] = 0 \iff G(\theta) = G(0)$

$\iff G$ cnst $\rightarrow \phi = 0$

$T(\underline{X}) = \max X_i$ est complète

exemple 3 :

$X \sim \mu_{[\theta - \frac{1}{2},\, \theta + \frac{1}{2}]} \quad \theta > 0$

$Y = X - \theta$

$T(\underline{X}) = (\min X_i, \max X_i)$ exh

$S(\underline{X}) = \max X_i - \min X_i = \max Y_i - \min Y_i$

$\phi(a, b) \longrightarrow b - a$

$S(\underline{X}) = \phi(T(\underline{X}))$ or $E_\theta[S(\underline{X})] = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow E_\theta[\phi(T(\underline{X}))] = 0 \quad \forall \theta > 0$ or

$\phi \neq 0$! $\Rightarrow T(\underline{X})$ n'est pas complète

⚠ . La transformé de l'exh par une stricte monotone est une exh

. La transformé de complet par une stricte monotone est une complet

Famille exponentielle :

(1) $X \sim b(\theta) \quad \theta \in]0, 1[$

$$\mathcal{L}(m, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n m_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n m_i}\, \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(\underline{m})$$

$$= \exp\left[\ln\theta \cdot \sum_{i=1}^n m_i + \left(n - \sum m_i\right) \ln(1-\theta)\right] \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(m)$$

$$= \exp\left[\underbrace{\ln\frac{\theta}{1-\theta}}_{c(\theta)} \underbrace{\sum m_i}_{T(\underline{m})} + \underbrace{n \ln(1-\theta)}_{d(\theta)}\right] \mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(\underline{m})$$

(c)

$A = \{0, 1\}^n$ indep de θ $\quad S(\underline{x}) = 0$

$\Rightarrow$ f.e à 1 paramètre

(2) $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta)$ $\quad \theta > 0$

$f(m, \theta) = \theta \exp - \theta m \ \mathbb{1}_{\{m > 0\}}$

$\mathcal{L}(\underline{m}, \theta) = \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} m_i\right) \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}_+^*\}^n}(\underline{m})$

$= \exp\left(\underbrace{-\theta}_{c(\theta)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{T(\underline{m})} + \underbrace{n \ln \theta}_{d(\theta)}\right) \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}_+^*\}^n}(\underline{m})$

$S(\underline{x}) = 0$; $A = \mathbb{R}_+^*$ indep de θ

(3) $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,\theta]}$ $\quad \theta > 0$

$\mathcal{L}(\underline{m}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(\underline{m}) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}}$

$= \exp(-n \ln \theta) \ \mathbb{1}_{\{\max x_i \leq \theta\}} \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq 0\}}$

$X(\Omega)$ dépend de $\theta \Rightarrow \notin$ f.e

Preuve (théorème 1.3)

$\{P_\theta\}$ f.e à 1 paramètre

$\mathcal{L}(\underline{m}, \theta) = \exp[c(\theta) T(\underline{m}) + d(\theta) + S(\underline{m})] \ \mathbb{1}_A(m)$

A indep de θ

$P_\theta[T(\underline{m}) = t] = \sum_{\underline{m} / T(\underline{m}) = t} P_t[\underline{X} = \underline{m}]$

$= \sum_{\underline{m} / T(\underline{m}) = t} \mathcal{L}(\underline{m}, \theta)$

$= \sum_{\underline{m} / T(\underline{m}) = t} \exp(c(\theta) \overbrace{T(m)}^{t} + d(\theta) + S(m)] \ \mathbb{1}_A(m)$

$= \exp(c(\theta) t + d(\theta)) \overbrace{\sum_{\underline{m} / T(\underline{m}) = t} \exp S(\underline{m}) \ \mathbb{1}_A(m)}^{\exp(\Delta'(t)) \ \mathbb{1}_B(t)}$

B = ensemble image de A par T

$\lfloor P)$

$\Rightarrow$ f.e à 1 paramètre

* $X \sim b(\theta)$ $\quad \theta \in]0,1[$

$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$: stat exh associée à la f.e

$$P_\theta[T(\underline{x}) = t] = C_n^t \theta^t (1-\theta)^{n-t} \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$$

$$= \exp\Big[\overbrace{\ln\frac{\theta}{1-\theta}}^{c(\theta)} \overbrace{t}^{t} + \underbrace{n\ln(1-\theta)}_{d(\theta)} + \overbrace{\ln C_n^t}^{S(t)}\Big] \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$$

$A = [0,n]$ indep de θ

* $X \sim \mathcal{E}(\theta)$

$\theta > 0$

$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ est la stat exh associée à la f.e

$X_1, \dots, X_n$ iid $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \gamma(n, \theta)$

$$f_T(x,\theta) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \exp - \theta x \; \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

$$= \exp\Big[\overbrace{-\theta}^{c(\theta)} \underbrace{x}_{t(x)} + \overbrace{n\ln\theta}^{d(\theta)} + \underbrace{(n-1)\ln x - \ln\Gamma(n)}_{S(x)}\Big] \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

$A = \mathbb{R}_+^*$ indep de θ

Demonstration consequence 1 :

$\mathcal{L}(\underline{x},\theta) = \exp[\theta T(\underline{x}) + d(\theta) + S(\underline{x})] \mathbb{1}_A(\underline{x})$ $\quad$ A indep de θ

$s \in \mathcal{V}(0)$ $\quad \Psi_T(s) = E[\exp sT]$

$$= \sum \exp sT(\underline{x}) \, \mathcal{L}(\underline{x},\theta)$$

$$\Psi_T(s) = \sum_{\underline{x}} \exp(sT(\underline{x}) + \theta T(\underline{x}) + d(\theta) + S(\underline{x})) \mathbb{1}_A(\underline{x})$$

$$= \sum_{\underline{x}} \exp((s+\theta) T(\underline{x}) + d(\theta) + S(\underline{x})) \mathbb{1}_A(\underline{x})$$

$$= \exp d(\theta) \Big[\overbrace{\sum_{\underline{x}} \exp((s+\theta) T(\underline{x}) + S(\underline{x})\Big] \mathbb{1}_A(\underline{x})}^{\exp - d(s+\theta)}$$

$$\sum_{\underline{x}} P_\theta[\underline{X} = \underline{x}] = 1 \iff \sum_{\underline{x}} \mathcal{L}(\underline{x},\theta) = 1$$

$$\iff \sum_{\underline{x}} \exp[\theta T(\underline{x}) + d(\theta) + S(\underline{x})] \mathbb{1}_A(\underline{x}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\underline{m}} \exp\left[\theta T(\underline{m}) + S(\underline{m})\right] \mathbb{1}_A(m) = \exp(-d(\theta))$$

$P_\theta = p_\theta \cdot \mu$

$P_\theta = p_\theta \cdot \mu$ (discret)

$P_\theta = P_\theta[X = \cdot]$

$\sum_{i \in A} P_\theta[X = x_i] = 1$

- card (tribu) = $2^{N(\Omega)}$
- précision : $\frac{1}{2}$ longueur de l'intervalle de confiance
- $\bar{X}_n \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Chapitre 1

Modèles statistiques

1.1 Introduction

Définition 1.1 *On appelle modèle statistique, le triplet $(E, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ où E désigne l'**espace des résultats** ou **espace fondamental**, $\mathcal{E}$ est une tribu des parties de E et $\mathcal{P}$ est une famille de probabilités sur $(E, \mathcal{E})$.*

Le modèle est paramétrique si $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$.

Définition 1.2 *Un modèle statistique paramétrique $(E, \mathcal{E}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ est dominé s'il existe une mesure μ σ-finie[1] sur $\mathbb{R}$ telle que*

$\forall \theta \in \Theta, \mu$ domine P_θ. Ce qui signifie que $P_\theta = p_\theta \cdot \mu$.

La densité de P_θ par rapport à μ est donc $f(x, \theta) = \dfrac{dP_\theta}{d\mu}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3 *Pour le modèle $(E, \mathcal{E}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$, la valeur θ_1 du paramètre est **identifiable** si $\forall \theta \neq \theta_1$, $P_\theta \neq P_{\theta_1}$. Le modèle est identifiable (ou la paramétrisation est identifiable) si toutes les valeurs du paramètre sont identifiables.*

Autrement dit, si l'application $\theta \longmapsto P_\theta$ est injective, alors le modèle est identifiable.

Définition 1.4 *Soit $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon d'une variable aléatoire associée au modèle $(E, \mathcal{E}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. On appelle **statistique**, la fonction aléatoire $T(\underline{X})$ définie de $(E^n, \mathcal{E}^n)$ vers $(E', \mathcal{E}')$.*

[1] μ est une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$ s'il existe une suite croissante (E_n) d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$. Autrement dit, il existe un recouvrement dénombrable de E par des sous-ensembles de mesure finie.

chapitre introductif → on selectionne 1 ech de manière aléa

$\mathcal{A}$: tribu des events associés à l'exp aléa

P : proba de selectionner 1 unité (équiproba)

Ω : univers ou surface des indiv

$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$

On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une VA X définie par $\forall\, \omega \in \Omega$; $X(\omega)$ = qt de lait fournie par ω

$\Rightarrow$ nouvel espace $(E, \mathcal{E}, P)$

échantillon de la variable aléatoire associée
ique $T(\underline{X})$ est **exhaustive** pour le modèle
elle de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sachant $T(\underline{X}) = t$

orisation

un modèle régulier.
$\longrightarrow E'$ *est exhaustive* ***si-et-seulement-si***
$\longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que*

$\cdot h(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in E^n, \forall \theta \in$

e T à une fonction indé

inimale
) est minimale si pou
modèle, il existe une ap
$\phi(T'(\underline{X}))$ P_θ p.s. $\quad \forall\theta$

exhaustive minimale est une
sion (le volume d'informations in

$T(\underline{X})$ minimale
et $T(\underline{X})$ à valeurs
dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall$ autre
stat minimale est
multiple de $T(\underline{X})$.

bre
$\mathcal{E}, P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ et soit $T(\underline{X})$ une statistique à
bre si sa loi associée est indépendante de θ.