chapitre 1 : Modes de convergence

I - Lemme de Borel-Contelli

- $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ espace de probabilité
- $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements (càd $A_n \in \mathcal{G}$, $\forall n \geq 1$)

$w \in \overline{\lim}\, A_n \iff w$ est dans un nombre infini des A_n.

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

$w \in \underline{\lim}\, A_n \iff w$ est dans tous les A_n à partir d'un certain rang.

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

* Proposition : "Lemme de Borel-Contelli"

Sous les notations ci-dessus, on a :

1- Si $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$ alors $P(\overline{\lim}\, A_n) = 0$

2- Si les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$

alors $P(\overline{\lim}\, A_n) = 1$.

↳ preuve :

1) Hyp : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n}(w)\, dP(w) = \int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}\, P < +\infty$$

théorème de cv monotone

$\int_F |f|\, d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(|f| = +\infty) = 0$

condition nécessaire d'intégrabilité implique $P(\{w \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = +\infty\}) = 0$

$\iff P(\{w \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) < +\infty\}) = 1$

$w \in \tilde{\Omega} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) < +\infty \iff w$ est dans un nombre fini des A_n

$\iff w \notin \overline{\lim}\, A_n$

$\overline{\lim}\, A_n \subseteq \tilde{\Omega}^c \Rightarrow 0 \leq P(\overline{\lim}\, A_n) \leq P(\tilde{\Omega}^c) = 0$

$\Rightarrow P(\overline{\lim}\, A_n) = 0$

2- $P(\overline{\lim} A_n) = 1 \iff P((\overline{\lim} A_n)^c) = 0$

$$(\overline{\lim} A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B^{(n)}$$

$$B^n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c$$

les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes $\iff$ les $(A_n^c)_{n\geq 1}$ sont indépendants (*)

2- Si les $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$

alors $P(\overline{\lim} A_n) = 1$

Posons $B_m^{(n)} = \bigcap_{k=n}^{m} A_k^c$ $\quad m\geq n$; $\bigcap_{m=n}^{+\infty} B_m^{(n)} = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c$

$$B_{m+1}^{(n)} \subseteq B_m^{(n)} \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} P(B_m^{(n)}) = P\left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} B_m^{(n)}\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c\right)$$

critère de continuité à droite pour la mesure de probabilité P

$$P(B_m^{(n)}) = P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k))$$

grâce à (*)

On sait que $0 \leq 1-u \leq e^{-u}$ $\forall u \in [0,1]$, $P(B_m^{(n)}) \leq e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$

$$0 \leq \lim_{m\to+\infty} P(B_m^{(n)}) \leq e^{-\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)} = 0 \Rightarrow P(\underbrace{\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c}_{B^{(n)}}) = 0$$

$$0 \leq P((\overline{\lim} A_n)^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B^{(n)}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{P(B^{(n)})}_{0} = 0$$

II- Convergence de variables aléatoires

* (Ω, G, P) espace de probabilité
* $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$(X_n : (\Omega, G, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)), \forall n \geq 1$

* X une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(X : (\Omega, G, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

X v.a "limite"

• **Définitions :**

1) On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers X si

$$P(\{\omega\in\Omega \mid X_n(\omega)\xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\})=1 \iff P(\{\omega\in\Omega \mid X_n(\omega) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\})=0$$

Notation : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ P.p.s

2) On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X, si pour tout $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_{n,\varepsilon})=0 \;;\; A_{n,\varepsilon}=\{\omega\in\Omega \mid \|X_n(\omega)-X(\omega)\|\geq\varepsilon\}$$

$$=\{\omega\in\Omega \mid X_n(\omega)\notin B(X(\omega),\varepsilon)\}$$

* Notation : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} X$

3) On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne vers X

(ou bien : converge $L^1(P)$), si $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\|X_n-X\|)=0$

* Notation : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ en moyenne

4) On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ en moyenne quadratique vers X

(ou bien converge dans $L^2(P)$), si $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\|X_n-X\|^2)=0$

* Notation : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ en moyenne quadratique

5) On dit $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X, si pour tout $H\in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$

on a $E(H(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(H(X))$

• **Théorème :**

$$\begin{array}{ccccccc}(4) & \Rightarrow & (3) & \Rightarrow & (2) & \Rightarrow & (5)\\ & & & & \Uparrow & & \\ & & & & (1) & & \end{array}$$

* Lemme : (1) $\Rightarrow$ (2)

↳ Preuve :

(Hyp) : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ P.p.s c.à.d $P(\tilde{\Omega})=1$, où $\tilde{\Omega}=\{\omega\in\Omega / X_n(\omega)\xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\}$

Soit $\varepsilon > 0$, $P(A_{n,\varepsilon}) = E(\mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}) = \int_\Omega \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}(\omega)\, dP(\omega)$.

$A_{n,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega \,/\, \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \geq \varepsilon\}$

$\omega \in \tilde{\Omega} \Rightarrow \exists\, n_0(\omega) \,/\, \forall n \geq n_0 ,\ \underbrace{\|X_n(\omega) - X(\omega)\| < \varepsilon}_{\omega \notin A_{n,\varepsilon}} \Rightarrow \exists\, n_0(\omega) \,/\, \forall n \geq n_0 ,$

$\mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}(\omega) = 0$

càd $\quad \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall\, \omega \in \tilde{\Omega}$, avec $P(\tilde{\Omega}) = 1$

De plus, on a $\quad 0 \leq \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}} \leq 1$, $\quad \int_\Omega 1\, dP = 1$

càd les hypothèses du théorème de CVD sont satisfaites.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\int_\Omega \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}\, dP}_{P(A_{n,\varepsilon})} = \int_\Omega \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}\, dP = 0$

• Lemme

Hyp : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{Prob}} X$ $\left(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ P(A_{n,\varepsilon}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right)$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_{n,\varepsilon}) < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0$

(on a : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ P.p.s)

Ls preuve :

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_{n,\varepsilon}) < +\infty$ grâce au lemme de Borel Cantelli, on a :

$P(\overline{\lim} A_{n,\varepsilon}) = 0 \Leftrightarrow P(\underbrace{\underline{\lim}\, A_{n,\varepsilon}^c}_{(\overline{\lim} A_{n,\varepsilon})^c}) = 1$

~~Posons $B_\varepsilon = ((\overline{\lim} A_{n,\varepsilon})^c) = 1$.~~

~~Posons B_ε~~ =

Posons $B_\varepsilon = (\overline{\lim} A_{n,\varepsilon})^c = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{p\geq n} \{\|X_p - X\| < \varepsilon\}$, $P(B_\varepsilon) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$

$m \geq 1$, $B_{\frac{1}{m}} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{p\geq n} \{\|X_n - X\| < \frac{1}{m}\}$, on a $P(B_{\frac{1}{m}}) = 1 \ \forall m \geq 1$

Posons $\tilde{\Omega} = \bigcap_{m=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{m}}$ $0 \leq P(\tilde{\Omega}^c) = P(\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_{\frac{1}{m}}^c) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \underbrace{P(B_{\frac{1}{m}}^c)}_{=0} = 0$

càd $P(\tilde{\Omega}) = 1$

Prenons $\omega \in \tilde{\Omega} \Rightarrow \forall m \geq 1$, $\omega \in B_{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \exists n_0(m) \mid \forall p \geq n_0$,
$\|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \frac{1}{m}$

en faisant tendre m vers $+\infty$ $\rightarrow$ on a $\lim_{n \to +\infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0$,
$\forall \omega \in \tilde{\Omega} \Rightarrow$ D'où $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X$ Pps (car $P(\tilde{\Omega}) = 1$).

<u>Lemme</u>: $(3) \Rightarrow (2)$

↳ Preuve:

Hyp: $E(\|X_n - X\|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, Soit $\varepsilon > 0$; ~~$0 \leq P(\omega \in \Omega \mid \|X_n(\omega)$~~

$0 \leq P(\omega \in \Omega \mid \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(\|X_n - X\|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

↳ grâce à l'inégalité de Markov

<u>conclusion</u>: $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} X$

<u>Lemme</u>: $(4) \Rightarrow (3)$

Hyp: $E(\|X_n - X\|^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Rq $E(\|X_n - X\|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Propriété: $|E(UV)| \leq (E(U^2))^{\frac{1}{2}} (E(V^2))^{\frac{1}{2}}$

$E((U + \lambda V)^2) = E(U^2) + 2\lambda E(UV) + \lambda^2 E(V^2) \geq 0$

$\Delta' = (E(UV))^2 - E(U^2)E(V^2) \leq 0$

$|E(UV)| \leq (E(U^2))^{\frac{1}{2}} (E(V^2))^{\frac{1}{2}}$

$0 \leq E(\underbrace{\|X_n - X\|}_{U} \cdot \underbrace{1}_{V}) \leq (E(\|X_n - X\|^2))^{\frac{1}{2}} (E(1^2))^{\frac{1}{2}} = (E(\|X_n - X\|^2))^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow E(\|X_n - X\|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Propriété :

Soit $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue

1/ Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ p.p.s, alors $H(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(X)$ p.p.s

2/ Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} X$, alors $H(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} H(X)$

↳ Preuve :

1/ Posons $\tilde{\Omega} = \{\omega \in \Omega \,/\, X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\}$. $P(\tilde{\Omega}) = 1$

Soit $\omega \in \tilde{\Omega}$, H est continue en $X(\omega)$, ~~entière~~ critère des suites, on a :

$$H(X_n(\omega)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(X(\omega))$$

D'où $\tilde{\Omega} \subset \{\omega \in \Omega \mid H(X_n(\omega)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(X(\omega))\}$ et $P(\tilde{\Omega}) = 1$

càd $P(\{\omega \in \Omega \,/\, H(X_n(\omega)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(X(\omega))\}) = 1$.

$\Leftrightarrow H(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(X)$ p.p.s

2/ Voir l'autre groupe (CD)

Lemme :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telle qu'il existe $a > 0$ où $\|X_n\| \leq a$: $\forall n \geq 0$, alors il y a équivalence entre

$$\underbrace{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} X}_{A} \quad \text{et} \quad \underbrace{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X \text{ en moyenne.}}_{B}$$

↳ Preuve :

- $B \Rightarrow A$, déjà fait

Rq $A \Rightarrow B$

Posons $A_{n,\varepsilon} = \{\|X_n - X\| \geq \varepsilon\}$

On constate que : $\underbrace{\{\omega \in \Omega \mid \|X_n(\omega)\| \geq a+\varepsilon\}}_{C_\varepsilon} \subseteq \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \geq \varepsilon\}}_{D}$

<u>En effet</u> : $C_\varepsilon \subseteq D \iff D^c \subseteq C_\varepsilon^c$

Soit $\omega \in D^c \Rightarrow \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \varepsilon$

$$\|X(\omega)\| = \|X(\omega) - X_n(\omega) + X_n(\omega)\| \leq \|X_n(\omega) - X(\omega)\| + \|X_n(\omega)\|$$

$$\leq \varepsilon + a$$

$$\Rightarrow \omega \in C_\varepsilon^c$$

$$\|X_n - X\| = \|X_n - X\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}} + \|X_n - X\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}^c} \leq \|X_n - X\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}} + \varepsilon$$

~~$\|X_n - X\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}} \leq$~~

$$0 \leq P(\|X\| \geq a+\varepsilon) \leq P(A_{n,\varepsilon}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$C_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid \|X(\omega)\| \geq a+\varepsilon\}, \quad P(C_\varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{m}, \quad E_m = C_{\frac{1}{m}} = \{\omega \in \Omega \mid \|X(\omega)\| \geq a + \frac{1}{m}\}$$

$$\omega \in C_{\frac{1}{m}} \Rightarrow m \in C_{\frac{1}{m+1}}, \text{ càd } \quad E_m \subseteq E_{m+1}$$

$$E_m \subseteq E_{m+1}, \quad \lim_{m \to +\infty} P(E_m) = P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m\right)$$

↳ critère de continuité à gauche pour la mesure de probabilité P.

Or $P(E_m) = 0, \ \forall m \geq 1 \Rightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m\right) = 0$

$E = \{m \in \Omega \mid \|X(\omega)\| \geq a\}$, $\omega \in E \Rightarrow \omega \in \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m$

$\Rightarrow P(E) = 0 \Rightarrow P(\{\omega \in \Omega \mid \|X(\omega)\| \leq a\}) = 1 \Rightarrow \|X\| \leq a \ P\text{p.s}$

$$E(\|X_n - X\|) \leq \varepsilon + E(\|X_n - X\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}})$$

$$\leq \varepsilon + E(\|X_n\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}) + E(\|X\| \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}})$$

$\leq \varepsilon + E(a\, \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}}) + E(a\, \mathbb{1}_{A_{n,\varepsilon}})$

$= \varepsilon + 2a\, \underbrace{P(A_{n,\varepsilon})}_{\to 0}$

$\to \lim E(\|X_n - X\|) \leq \varepsilon \;, \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} E(\|X_n - X\|) = 0$

* Lemme 2 $\Rightarrow$ 5

↳ Preuve :

Hyp : $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} X$. Soit $H \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Rq $E(H(X_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} E(H(X))$

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} X$ et H : continue $\Rightarrow H(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} H(X)$ (1)

H est bornée $\Rightarrow \exists M > 0 \,,\; |H(u)| \leq M$ $\Rightarrow |H(X_n)| \leq M$ (2)

$\forall u \in \mathbb{R}^d$

(1) et (2), grâce au lemme précédent, $H(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} H(X)$ en moyenne

càd $E(|H(X_n) - H(X)|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

or $|E(H(X_n)) - E(H(X))| \leq E(|H(X_n) - H(X)|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* Propriété :

Si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} X$ et $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} Y$, alors $X = Y$ Ppps

↳ preuve :

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\underbrace{\{\omega \in \Omega \,/\, \|X(\omega) - Y(\omega)\| > \varepsilon\}}_{C} \subseteq \underbrace{\{\omega \in \Omega \,/\, \|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{\omega \in \Omega \,/\, \|X_n(\omega) - Y(\omega)\| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}}_{D}$

en effet :

$C \subseteq D \iff D^c \subseteq C^c$

$\omega \in D^c \iff \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|X_n(\omega) - Y(\omega)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

En écrivant que $\|X(\omega)-Y(\omega)\| \leq \|X(\omega)-X_n(\omega)\| + \|X_n(\omega)-Y(\omega)\| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \omega \in C^c$

$$0 \leq P(C_\varepsilon) \leq \underbrace{P(\{\|X_n - X\| \geq \varepsilon/2\})}_{\substack{\downarrow\, n\to+\infty, \text{ car } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} X \\ 0}} + \underbrace{P(\{\|X_n - Y\| \geq \varepsilon/2\})}_{\substack{\downarrow\, n\to+\infty, \text{ car } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{Prob} Y \\ 0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>càd</u> $P(C_\varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon = \frac{1}{m}$, $E_m = C_{\frac{1}{m}} \subseteq C_{\frac{1}{m+1}} = E_{m+1}$

$\Rightarrow E_m \subset E_{m+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} P(E_m) = P\left(\bigcup\limits_{m\geq 1}^{+\infty} E_m\right) = 0$

Posons $\tilde{E} = \{w \in \Omega \,/\, \|X(w) - Y(w)\| > 0\}$ $\quad w \in \tilde{E} \Rightarrow w \in \bigcup\limits_{m\geq 0}^{+\infty} E_m$

$P(E) = 0 \quad \Rightarrow P(E^c) = 1$

$E^c = \{W \in \Omega \,/\, X(W) = Y(W)\}$ $\quad P(E^c) = 1$

càd $\quad X \equiv Y \quad P.p.s$

<u>Proposition</u>:

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r et X une v.a.r

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} X \quad \text{ssi} \quad F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x), \quad \forall x \in D^c \text{ où}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \Delta F_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-) > 0\}$$

= l'ensemble de points de discontinuité de la fonction de répartition F_X de la v.a.r X.

<u>Proposition</u>:

Si pour tout $p > 0$, $P(\sup\limits_{k\geq 1} |X_{m+k} - X_m| \geq p) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge P presque sûrement.

↳ <u>Preuve</u>: voir group "CD"

Proposition

Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < +\infty$, avec $\varepsilon_n > 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n < +\infty$ alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge P presque surement

↳ Preuve : voir groupe "CD"

Proposition

Si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} X$, alors, il existe une suite extraite $(X_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ telle que

$$X_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{P\ p.s} X$$

Preuve : voir groupe "CD"

→ **commentaires :**

1)
$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, Rightarrow] & 3 \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[r, Rightarrow] & C \\ & & 1 \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Pour la convergence en probabilité, on a l'unicité P p.s de la va "limite", càd :

si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} X$ et $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{Prob} Y$

alors $X = Y$ P ps.

→ Par suite, on a l'unicité P.ps de la v.a "limite" pour les cv en moyennes quadratiques, en moyenne, P presque surement et la convergence en probabilité

2) Si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} X$ et $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} Y$, alors $P_X = P_Y$.

Pour la convergence en loi, on a l'unicité de la loi "limite"

Théorème : "Théorème de Paul Lévy" admis

Soient : * $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

* X va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (va "limite")

1) $(X_n)_{n\geq 0}$ c.v en loi vers X ssi $\varphi_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi_X(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$

où φ_{X_n} (resp φ_X) est la fonction caractéristique de v.a X_n (resp X)

(càd $\varphi_X(x) = E(e^{i x^T . X})$)

2) Si $\varphi_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et φ est continue au point $0_{\mathbb{R}^d}$

alors φ est une fonction caractéristique d'une v.a X, càd $\varphi = \varphi_X$

De plus $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} X$