Correction TP-TD 4_Modèles linéaires

1. $\hat{\beta} = \frac{m_{pq}}{m_{pp}} = -0{,}84$

$\hat{\alpha} = \bar{q} - \hat{\beta}\,\bar{p} = 20{,}769$

Signes obtenus conformes à ce que pourrait présager la théorie de la demande.

2. Variances estimées :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{n-2} = \frac{m_{qq} - \hat{\beta}^2 m_{pp}}{n-2} = 15{,}741$$
$$\Longrightarrow$$
$$\hat{V}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{m_{pp}} = 0{,}0561$$
$$\hat{V}(\hat{\alpha}) = \hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{p}^{\,2}}{m_{pp}}\right) = 7{,}958$$

3. Tests de significativité individuelle des coefficients du modèle :

$$Sous\ H_0 : \beta = 0, \qquad |\hat{t}_{\hat{\beta}}| = \left|\frac{\hat{\beta}}{sd(\hat{\beta})}\right| \backsim \mathcal{T}(n-2) \Longrightarrow |\hat{t}_{\hat{\beta}}| = 3{,}544 > t_\beta^*$$
$$Sous\ H_0 : \alpha = 0, \qquad |\hat{t}_{\hat{\alpha}}| = \left|\frac{\hat{\alpha}}{sd(\hat{\alpha})}\right| \backsim \mathcal{T}(n-2) \Longrightarrow |\hat{t}_{\hat{\alpha}}| = 7{,}362 > t_\alpha^*$$
$$avec\ t^{critique} = t_\beta^* = t_\alpha^* = 2{,}16\ (symétrie\ du\ Student)$$

Variable prix est pertinent pour expliquer l'évolution de la demande du bien.

Données observées confirment la significativité statistique d'un niveau de demande de bien minimale, indépendamment du prix.

4. Intervalle de confiance de σ^2 :

$$\begin{cases} P\left(\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \geq \mathcal{X}_1^{2*}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ P\left(\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \geq \mathcal{X}_2^{2*}\right) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Ce qui implique

$$IC_{\sigma^2}^{(1-\alpha)\%} = \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\mathcal{X}_2^{2*}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\mathcal{X}_1^{2*}}\right] = [8{,}271\ ;\ \ 40{,}844]$$
$$pour\ \ \mathcal{X}_1^{2*} = 5{,}01\ \ et\ \ \mathcal{X}_2^{2*} = 24{,}74$$

5. Le coef. d'ajustement :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCCR}{SCT} = 0{,}49$$

$$signifie\ que\ 49\%\ de\ la\ variation\ de\ la\ demande\ de\ bien\ est\ expliquée\ par\ celle\ du\ prix;$$
$$et\ l'ajustement\ linéaire\ est\ moyen. On\ peut\ intégrer\ autre(s) variable(s) dansle\ modèle.$$

- Test de significativité globale du modèle défini empiriquement par le corps d'hypothèses :

$$\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_a : \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$Statisque\ \hat{F} = \frac{R^2}{1 - R^2}\ (n-2) \rightsquigarrow F(1, 13)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\hat{F} = 12{,}49 \quad et\ F^{critique} = F_{\alpha}^{*} = 4{,}67$$
$$Le\ modèle\ est\ globalement\ significatif$$

- Dans le cadre d'une <u>régression simple</u> où on dispose d'une seule contrainte à tester sous l'hypothèse de base, on a

$$Statisque\ \hat{F} = \frac{SCE/_1}{SCR/_{n-2}} = \frac{\hat{\beta}^2 m_{pp}}{\hat{\sigma}^2} = \frac{\hat{\beta}\sqrt{m_{pp}}}{\hat{\sigma}} = t^2$$

$$e_{q_i/p_i} = \beta \frac{p_i}{q_i}$$

6. Elasticité prix de la demande :

$$e_{q_i/p_i} = \beta \frac{p_i}{q_i}$$

$$Sa\ valeur\ estimée\ au\ point\ moyen: \hat{e}_{\bar{q}/\bar{p}} = \hat{\beta} \frac{\bar{p}}{\bar{q}} = -0{,}81$$

$$et \left| \hat{e}_{\bar{q}/\bar{p}} \right| < 1\ demande\ de\ bien\ est\ inélastique$$

7. Test d'élasticité prix unitaire :

$$\begin{cases} H_0: e_{\bar{q}/\bar{p}} = -1 \\ H_a: e_{\bar{q}/\bar{p}} - 1 \end{cases}$$

$$Statistique\ \hat{t} = \frac{\hat{e}_{\bar{q}/\bar{p}} + 1}{\sqrt{\hat{V}\left(\hat{e}_{\bar{q}/\bar{p}}\right)}} \rightsquigarrow \mathcal{T}(13)$$

$$or, \hat{V}\left(\hat{e}_{\bar{q}/\bar{p}}\right) = \hat{V}(\hat{\beta})\frac{\bar{p}^2}{\bar{q}^2}$$

$$\Longrightarrow \hat{t} = \frac{\hat{e}_{\bar{q}/\bar{p}} + 1}{\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta})}} = 0{,}818$$

$$et\ \ t_{\alpha}^{critique} = 2{,}156\ \ alors\ on\ accepte\ l'hypoth\grave{e}se\ de\ base.$$

8. On se place dans une situation d'équilibre sur le marché où

$$q_o^* = q_d^*$$
$$q_o^*\ et\ q_d^*\ indiquent\ resp. la\ quantit\acute{e}\ offerte\ et\ la\ quantit\acute{e}\ demand\acute{e}e.$$

En concurrence pure et parfaite, le producteur ne peut agir sur le niveau du prix qui est une donnée du marché. En conséquence, il adopte une attitude rationnelle qui lui permet de maximiser sa fonction de profit π comme suit,

$$\pi = RT - CT = pq - C(q)$$
$$o\grave{u}\ RT: recette\ totale\ et\ CT\ :\ co\hat{u}t\ total$$
$$Maximisation\ du\ profit\ \Longrightarrow \frac{\partial \pi}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow p - C_m = 0 \Leftrightarrow C_m = p$$
$$C_m = p^* = 10\ et\ on\ est\ en\ situation\ d' \gtreqless o\grave{u}\ q_o^* = q_d^*\ alors$$
$$q_o^* = q_d^* = \hat{\alpha} + 10\hat{\beta} = 12{,}369$$

9. On se propose d'estimer la fonction de demande inverse,

$$(2)\ \ \mathrm{p_i = a + b\ q_i + \varepsilon_i\ \forall\ i = 1, \cdots, n}$$

i. On a $\hat{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{m_{pq}}}{\mathrm{m_{qq}}} = \frac{\sum_i (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q})}{\sum_i (q_i - \bar{q})^2}$. Il est clair que $\hat{\mathrm{b}} \neq \frac{1}{\hat{\beta}}$

ii. En régression simple, on a $coefficient\ de\ corr\acute{e}lation\ au\ carr\acute{e}\ \rho^2 = R^2$

$$\rho^2 = \frac{cov^2(p,q)}{V(p)V(q)} = \frac{\mathrm{m_{pq}}}{\mathrm{m_{pp}}}\frac{\mathrm{m_{pq}}}{\mathrm{m_{qq}}} = \widehat{\mathrm{b}\beta} = R^2$$
$$\Longrightarrow \widehat{\mathrm{b}\beta} = 1 \Leftrightarrow R^2 = 1$$

iii. On a

$$R_1^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \mathrm{m_{pp}}}{\mathrm{m_{qq}}}$$

$$Et\ d'après l'\text{é}quation\ de\ la\ variance, on\ a$$

$$\mathrm{m_{qq}} = \hat{\beta}^2 \mathrm{m_{pp}} + \mathrm{SCR} \text{ où } \mathrm{SCR} = (\mathrm{n}-2)\widehat{\sigma}^2$$

$$d'o\text{ù}$$

$$R_1^2 = \frac{\hat{\beta}^2 \mathrm{m_{pp}} / \widehat{\sigma}^2}{\hat{\beta}^2 \mathrm{m_{pp}} / \widehat{\sigma}^2 + (n-2)} = \frac{\hat{t}_{\hat{\beta}}^{\,2}}{\hat{t}_{\hat{\beta}}^{\,2} + (n-2)}$$

iv. Facile à montrer !

Enseignante_Selma JELASSI.