le 11/11/2022

4/ Tableau d'analyse de la variance :

Le Tableau de l'analyse de la variance se présente comme suit :

Source de variation	Somme des carrés	degré de liberté	Carrés moyens
variables explicatives	$SCE = \sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2$	$K - 1$	$\frac{SCE}{K-1}$
Résidue	$SCR = \sum \hat{\varepsilon}_t^2$	$T - K$	$\frac{SCR}{T-K} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2$
Total	$SCT = \sum(y_t - \bar{y})^2$	$T - 1$	$\frac{SCT}{T-1}$ = variance empirique corrigée.

5/ Mesure de la qualité d'ajustement linéaire :

* Le coef de détermination : $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$

* Le coef de détermination corrigé $\bar{R}^2 = 1 - \frac{T-1}{T-K} \frac{SCR}{SCT}$

III. Propriétés Statistique des estimateurs :

* P1 : le vecteur des estimateur $\hat{\beta}$ est sans biais : $E(\hat{\beta}) = \beta$

Démonstration :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} . X'y = (X'X)^{-1} . X'(X\beta + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} . X' . \varepsilon$$

$$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1} . X' \underbrace{E(\varepsilon)}_{0} = \beta \quad \text{(sans biais)}$$

P2. $Var(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$

$$= \Omega_{\hat{\beta}} \quad (\neq \Omega_\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ matrice de variance - covariance des estimateurs

$$\Rightarrow \Omega_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} V(\hat{\beta}_0) & cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \cdots & cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_K) \\ cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) & V(\hat{\beta}_1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & V(\hat{\beta}_K) \end{pmatrix}$$

le,..................................

Démon : $V(\hat{\beta}) = \Omega_{\hat{\beta}} = Var[(X'X)^{-1} X'.\varepsilon]$

$= (X'X)^{-1} . X' \, Var(\varepsilon) . X . (X'X)^{-1}$

$= (X'X)^{-1} . X' . \sigma_\varepsilon^2 \, I_d . X . (X'X)^{-1}$

$= \sigma_\varepsilon^2 \, (X'X)^{-1}$

P3 : Le vecteur des estimateurs de MCO de $\hat{\beta}$ est un estimateur B.L.U.E

Théorème :

Estimateur de la variance du terme d'erreur.

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SCR}{T-k}$: est un est. sans biais de σ_ε^2 $K = k+1$

Conséquence

$V\hat{a}r(\hat{\beta}) = \hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$

$\Rightarrow$ Le matrice de variance covariance estimées des estimateurs

IV Les Testes Statistique :

1. Loi des estimateurs et intervalle de confiance pour β_j ($\forall j = 1 \ldots k$)

* $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\beta_j}} \sim St(T-k)$

* α étant fixé, on cherche ds le tableau de la loi de Student, le réel $t_{\alpha/2}^{T-k}$ / $P\left(\left| \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\beta_j}} \right| \leq t_{\alpha/2}^{T-k} \right] = 1 - \alpha$

* $IC_{1-\alpha}(\beta_j) = [\hat{\beta}_j \pm \hat{\sigma}_{\beta_j} \cdot t_{\alpha/2}^{T-k}] \; \forall j = 0, \ldots, k$

2. Testes de Student :

On distingue le teste unilaterale et bilatéral ainsi que le cas particulier de Teste de Significativité individuelle, pour ces testes les règles de décisions sont les même que celle appliqués ds le cas de modèle de regression simple

3. Teste d'hypothèse "Jointe"

Il s'agit d'un Test sur la combinaison linéaire des paramètres, il repose sur les hypothèses suivantes :

$H_0 : a_1 \beta_i + a_2 \beta_j = C$ contre $H_1 : a_1 \beta_i + a_2 \beta_j \neq C$

(a_1, a_2, C donnés)

le,...

* La statistique utilisée et sa loi :

$$\frac{a_1 \hat{\beta}_i + a_2 \hat{\beta}_j - c}{\sqrt{\hat{V}(a_1 \hat{\beta}_i + a_2 \hat{\beta}_j)}} \sim St(T-k)$$

* Règle de décision :

$$\circ\ t_c = \left| \frac{a_1 \hat{\beta}_i + a_2 \hat{\beta}_j - c}{\sqrt{\hat{Var}(a_1 \hat{\beta}_i + a_2 \hat{\beta}_j)}} \right| \leq t_{\alpha/2}^{T-k} \Rightarrow H_0 \text{ vraie}$$

$$\geq \Rightarrow H_1 \text{ vraie}$$

avec $\hat{Var}(a_1 \hat{\beta}_i + a_2 \hat{\beta}_j) = a_1^2 \hat{V}(\hat{\beta}_i) + a_2^2 \hat{V}(\hat{\beta}_j) + 2a_1a_2 \hat{cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)$

ds le matrice $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$