Université de Carthage
Ecole Suprieure de la Statistique
et de l'Analyse de l'Information

Année Universitaire
2011-2012
1re Anne

Devoir Surveillé
Méthodes d'estimation

Enseignants: Mme H. Mallek et Mr H. Rammeh Durée : 1h 30mn

Exercice 1 *Soit X_1 ,...,X_n un n-échantillon de X suivant la loi Poisson de paramètre θ* ($\theta > 0$).

1. *En utilisant la définition, montrer que le moment empirique d'ordre* 1 *est une statistique exhaustive*
2. *Vérifier que cette statistique est complète.*
3. *Déterminer l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments d'ordre 1 (c-à-d: $g(x) = x$).*

Exercice 2 *Soit X_1 ,...,X_n un n-échantillon de X suivant la loi de Weibull de paramètres α et λ strictement positifs.*

La densité de X s'écrit : $f(x, \alpha, \lambda) = \alpha\lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^{\alpha}) \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}$.

1. **(1,5 points)** *Montrer que $E(X) = \dfrac{1}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$*

   On pourra utiliser la densité de la loi gamma.

   (la densité de $\gamma(a, \lambda)$ s'écrit : $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x) \mathbb{1}\{x > 0\}$)
2. *On souhaite résumer l'échantillon.*
   (a) **(2 points)** *Peut-on trouver un résumé exhaustif pour ce modèle à 2 paramètres (justifier).*
   (b) **(1 point)** *S'agit-il d'une famille exponentielle à 2 paramètres? (justifier)*
   (c) **(2 points)** *Quel paramètre peut-on fixer pour obtenir une famille exponentielle à 1 paramètre? (exprimer la famille sous sa forme canonique)*
3. **On décide pour toute la suite de fixer** α.
   (a) **(1,5 points)** *Montrer que le moment empirique d'ordre α, $\widehat{m}_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$ de X est une statistique exhaustive minimale.*
   (b) **(2 points)** *Déterminer l'espérance et la variance de $\widehat{m}_\alpha$.*
   (c) **(2 points)** *Proposer un estimateur $\widehat{\lambda}_n$ de λ par la méthode des moments d'ordre 1 (c-à-d: $g(x) = x$).*
4. **(2 points)** *On s'intéresse maintenant au paramètre $\theta = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}$. Déduire de ce qui précède un estimateur de θ.*

Correction Exercice 1 *Voir cours et TD.*

Correction Exercice 2 $f_{(\alpha,\lambda)}(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha})\, 1\!\!I_{\mathbb{R}_+^*}$.

1. **(1,5 points)**$E(X) = \int_0^{+\infty} \alpha\lambda x^{\alpha}\exp(-\lambda x^{\alpha})\,dx$

   Soit $u = x^{\alpha} \Longleftrightarrow x = u^{\frac{1}{\alpha}}$ *et* $du = \alpha x^{\alpha-1}dx$

   $$E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda u^{\frac{1}{\alpha}}\exp(-\lambda u)\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}u^{\frac{1}{\alpha}}\exp(-\lambda u)\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}$$

   $$E(X) = \frac{1}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

2. $f(x,\alpha,\lambda) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha})\, 1\!\!I_{\mathbb{R}_+^*}$.

   (a) **(2 points)**$\mathcal{L}(\underline{x},\alpha,\lambda) = \alpha^n\lambda^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha}\right) 1\!\!I_{(\mathbb{R}_+^*)^n}(\underline{x})$

   La vraisemblance ne peut s'écrire sous la forme d'un produit $g(T(\underline{x}),\alpha,\lambda)\cdot h(\underline{x})$. *Ainsi, le théorème de factorisation n'est pas vérifié et on ne peut trouver de résumé exhaustif pour* (α,λ).

   (b) **(1 point)***S'il n'existe pas de résumé exhaustif pour le couple* (α,λ), *le modèle ne peut appartenir à la famille exponentielle à 2 paramètres.*

   (c) **(2 points)**$\mathcal{L}(\underline{x},\alpha,\lambda) = \exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i + n\ln\alpha + n\ln\lambda\right) 1\!\!I_{(\mathbb{R}_+^*)^n}(\underline{x})$

   Pour obtenir une famille exponentielle à 1 paramètre, il faut fixer le paramètre α. *On aura alors*

   $\mathcal{L}(\underline{x},\lambda) = \exp\left(\lambda\sum_{i=1}^n -x_i^{\alpha} + n\ln\lambda + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i + n\ln\alpha\right) 1\!\!I_{(\mathbb{R}_+^*)^n}\underline{x}$

   avec $c(\lambda) = \lambda$ $\quad T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n -x_i^{\alpha}$ $\quad d(\lambda) = n\ln\lambda$ $\quad S(\underline{x}) = (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i + n\ln\alpha$

   et $A = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ *indépendant de* λ. *Le modèle est sous forme canonique car* $c(\lambda) = \lambda$.

3. α *est fixé.*

   $$\mathcal{L}(\underline{x},\lambda) = \exp\left(\lambda\sum_{i=1}^n -x_i^{\alpha} + n\ln\lambda + 4\sum_{i=1}^n \ln x_i + n\ln\alpha\right) 1\!\!I_{(\mathbb{R}_+^*)^n}(\underline{x})$$

   (a) **(1,5 points)**$T(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}$ *est la statistique exhaustive complète et donc minimale associée à la famille exponentielle. Donc* $\widehat{m}_{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha} = -\frac{1}{n}T(\underline{X})$ *est aussi exhaustif. Comme* $\widehat{m}_{\alpha}$ *est multiple de* $T(\underline{X})$, *alors* $\widehat{m}_{\alpha}$ *est aussi minimal.*

(b) **(2 points)** *Le modèle est sous forme canonique et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *ouvert. On a alors*

$$E\left[T\left(\underline{X}\right)\right] = -d'\left(\lambda\right) = -\frac{n}{\lambda} \quad et \quad Var\left[T\left(\underline{X}\right)\right] = -d''\left(\lambda\right) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

$$E\left[\widehat{m}_\alpha\right] = E\left[-\frac{1}{n}T\left(\underline{X}\right)\right] = \frac{1}{\lambda} \quad et \quad Var\left[\widehat{m}_\alpha\right] = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

(c) **(2 points)** $\mu_1 = E\left(X\right) = \dfrac{1}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$q\left(\lambda\right) = \frac{1}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\tfrac{1}{\alpha}\right) \qquad g\left(x\right) = x$$

$$q\left(\lambda\right) = E\left[g\left(X\right)\right] \Longleftrightarrow \lambda = q^{-1}\left(\mu_1\right) = \left(\frac{1}{\alpha\mu_1}\Gamma\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)\right)^\alpha$$

De là, l'estimateur par la méthode des moments de λ *est* $\widehat{\lambda}_1 = \left(\dfrac{1}{\alpha\widehat{\mu}_1}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^\alpha = \left(\dfrac{1}{\alpha\overline{X}_n}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^\alpha.$

4. **(2 points)** $\theta = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}$

De là, $\widehat{\theta}$*, l'estimateur par la méthode des moments de* θ *s'écrit*

$$\widehat{\theta} = \widehat{\lambda}^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha\overline{X}_n}\Gamma\left(\tfrac{1}{\alpha}\right).$$