UNIVERSITÉ DE CARTHAGE
ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2013-2014
PREMIÈRE ANNÉE

Corrigé Méthodes d'estimation
Examen Final : Mai 2014

Corrigé Exercice 1 $n = 10 \qquad \overline{x} = 19.72 \qquad \overline{v} = 0,6096 \qquad X \rightsquigarrow \mathcal{N}(E(X), V(X))$

$IC_{0.9}(E(X)) = \left[\overline{X} \pm F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0.95)\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2}\right]$

$IC_{0.9}(E(X)) = [19.72 - 1.645 * 0.2469\ ;\ 19.72 + 1.645 * 0.246\,9]$

$IC_{0.9}(E(X)) = [19.314\ ;\ 20.126]$

La loi de S_n^2 n'est pas symétrique mais elle est unimodale. On supposera que

$$10 \leq 2\min\left(F_{\chi^2(9)}(x^*), 1 - F_{\chi^2(9)}(x^*)\right)$$

et que l'intervalle de dispersion optimal est symétrique.

$$IC_{0.9}(V(X)) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2}{F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.95)}\ ;\ \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2}{F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.05)}\right]$$

$$IC_{0.9}(V(X)) = \left[\frac{9 * 0.6096}{F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.95)}\ ;\ \frac{9 * 0.6096}{F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.05)}\right] = \left[\frac{5.486\,4}{F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.95)}\ ;\ \frac{5.486\,4}{F^{-1}_{\chi^2(9)}(0.05)}\right]$$

Corrigé Exercice 2 $f(x, \lambda) = \exp(\lambda - x)\,\mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$

1. $\mathcal{L}(\underline{x}, \lambda) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\lambda\right)\mathbb{1}_{\{\min x_i \geq \lambda\}}$

   La fonction $\lambda \longmapsto \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\lambda\right)$ *est strictement croissante sur l'intervalle* $]0\ ,\ \min x_i]$. *Elle atteint donc son maximum en $\lambda = \min x_i$. L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc*

$$\widehat{\lambda}_{MV} = \min X_i.$$

$F_{\widehat{\lambda}_{MV}}(x) = P[\min X_i \leq x] = 1 - P[\min X_i > x] = 1 - (P[X > x])^n = 1 - (1 - F_X(x))^n$

$F_X(x) = \int_{\lambda}^{x} \exp(\lambda - t)\,dt \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}} = [-\exp(\lambda - t)]_{\lambda}^{x} \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}} = (1 - \exp(\lambda - x))\,\mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$

$F_{\widehat{\lambda}_{MV}}(x) = (1 - (\exp(\lambda - x))^n)\,\mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}} = (1 - \exp n(\lambda - x))\,\mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$

$$f_{\widehat{\lambda}_{MV}}(x) = n\exp n(\lambda - x)\,\mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$$

2. $E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} xn \exp n\left(\lambda - x\right) dx$

$\left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad u' = 1 \\ v' = n \exp n\left(\lambda - x\right), \quad v = -\exp n\left(\lambda - x\right) \end{array} \right\}$

$E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = \left[-x \exp n\left(\lambda - x\right)\right]_{\lambda}^{+\infty} + \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \exp n\left(\lambda - x\right) dx = \lambda + \left[-\frac{1}{n} \exp n\left(\lambda - x\right)\right]_{\lambda}^{+\infty}$

$E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = \lambda + \frac{1}{n}$

D'où $\lambda^* = \widehat{\lambda}_{MV} - \frac{1}{n}$ *est un estimateur sans biais de* λ.

3. $\mathcal{L}\left(\underline{x}, \lambda\right) = \exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n\lambda\right) \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq \lambda\}} = \underbrace{\exp\left(n\lambda\right) \mathbb{1}_{\{\min x_i \geq \lambda\}}}_{g(\min x_i, \lambda)} \cdot \underbrace{\exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)}_{h(\underline{x})}.$

Donc d'après le théorème de factorisation, $T\left(\underleftarrow{X}\right) = \min X_i = \widehat{\lambda}_{MV}$ *est une statistique exhaustive pour le modèle.*

Soit ϕ *intégrable telle que* $E_\lambda\left[\phi\left(\widehat{\lambda}_{MV}\right)\right] = 0, \forall \lambda > 0.$

$E_\lambda\left[\phi\left(\widehat{\lambda}_{MV}\right)\right] = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \phi\left(t\right) n \exp n\left(\lambda - t\right) dt = 0, \forall \lambda > 0.$

$\forall \lambda > 0,\ \forall \lambda' > \lambda,\ E_\lambda\left[\phi\left(\widehat{\lambda}_{MV}\right)\right] = 0$ *et* $E_{\lambda'}\left[\phi\left(\widehat{\lambda}_{MV}\right)\right] = 0$

On a alors nécessairement $\int\limits_{\lambda}^{\lambda'} \phi\left(t\right) n \exp n\left(\lambda - t\right) dt = 0,$

Si ψ *est une primitive de l'application* $t \longmapsto \phi\left(t\right) n \exp n\left(\lambda - t\right)$, *alors* $\psi\left(\lambda\right) = \psi\left(\lambda'\right)$ ψ *est donc une constante. On en déduit que* $\phi\left(t\right)$ *ne peut être que nulle et* $\widehat{\lambda}_{MV}$ *est une statistique complète.*

$\lambda^* = \min X_i - \frac{1}{n} \qquad\qquad E\left[\lambda^*\right] = \lambda < +\infty.$

$T\left(\underline{X}\right) = \min X_i$ *est une statistique exhaustive complète*

Donc d'après le théorème de Lehman Scheffe, $\lambda^{***} = E\left[\lambda^* \diagdown T\left(\underline{X}\right)\right] = \lambda^*$ *est un estimateur uvmb.*

4. $E(X) = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} x \exp\left(\lambda - x\right) dx = \left[-x \exp\left(\lambda - x\right)\right]_{\lambda}^{+\infty} + \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \exp\left(\lambda - x\right) dx$

$E(X) = \lambda + \left[-\exp\left(\lambda - x\right)\right]_{\lambda}^{+\infty} = \lambda + 1$

$E(X) = \lambda + 1 \Longleftrightarrow \lambda = E(X) - 1 \Longrightarrow$

$$\widehat{\lambda}_{MM} = \overline{X} - 1$$

$E\left(\widehat{\lambda}_{MM}\right) = E\left(\overline{X} - 1\right) = \lambda.$

5. λ^* *et* $\widehat{\lambda}_{MM}$ *sont sans biais. De plus,* λ^* *est uvmb. Il est donc préférable à tout autre estimateur sans biais et en particulier à* $\widehat{\lambda}_{MM}$.

$Var\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = E\left[\widehat{\lambda}_{MV}^2\right] - \left(E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right]\right)^2$

$E\left[\widehat{\lambda}_{MV}^2\right] = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} x^2 n \exp n(\lambda - x)\, dx$

$\left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \quad u' = 2x \\ v' = n \exp n(\lambda - x), \quad v = -\exp n(\lambda - x) \end{array} \right\}$

$E\left[\widehat{\lambda}_{MV}^2\right] = \left[-x^2 \exp n(\lambda - x)\right]_{\lambda}^{+\infty} + \int\limits_{\lambda}^{+\infty} 2x \exp n(\lambda - x)\, dx$

$E\left[\widehat{\lambda}_{MV}^2\right] = \lambda^2 + \frac{2}{n} E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right]$

$Var\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = \lambda^2 + \frac{2}{n} E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] - \left(E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right]\right)^2 = \lambda^2 + E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right]\left(\frac{2}{n} - E\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right]\right)$

$Var\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = \lambda^2 + \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n} - \lambda - \frac{1}{n}\right) = \lambda^2 + \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - \lambda\right)$

$$Var\left[\widehat{\lambda}_{MV}\right] = \frac{1}{n^2}$$

$Var\left(\widehat{\lambda}_{MM}\right) = Var\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n} Var(X) = \frac{1}{n}\left(E(X^2) - [E(X)]^2\right)$

$E(X^2) = \int\limits_{\lambda}^{+\infty} x^2 \exp(\lambda - x)\, dx = \left[-x^2 \exp(\lambda - x)\right]_{\lambda}^{+\infty} + 2\int\limits_{\lambda}^{+\infty} x \exp(\lambda - x)\, dx$

$E(X^2) = \lambda^2 + 2E(X) \Longrightarrow Var(X) = \lambda^2 + E(X)(2 - E(X)) = \lambda^2 + (\lambda + 1)(1 - \lambda) = 1$

D'où

$$Var\left(\widehat{\lambda}_{MM}\right) = \frac{1}{n}$$

$Q\left(\widehat{\lambda}_{MV}\right) = E\left[\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda\right]^2 = Var\left(\widehat{\lambda}_{MV}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2}$

$Q\left(\widehat{\lambda}_{MM}\right) = var\left(\widehat{\lambda}_{MM}\right) = \frac{1}{n} \geq \frac{2}{n^2}$ *car* $n \geq 2$.

On a donc un estimateur $\widehat{\lambda}_{MM}$ *sans biais mais dont l'erreur quadratique moyenne est supérieure à l'erreur quadratique d'un estimateur biaisé* $\widehat{\lambda}_{MV}$. *Il s'agit donc de choisir entre un estimateur qui évolue de manière symétrique autour de la vraie valeur et un estimateur qui se répartit de manière asymétrique mais s'écarte moins de la vraie valeur.*

6. *On a* $f_{\widehat{\lambda}_{MV}}(x) = n \exp n(\lambda - x)\, \mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$

   $Z = 2n\left(\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda\right) \Longrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{2n} f_{\widehat{\lambda}_{MV}}\left(\frac{z + \lambda}{2n}\right) = \frac{1}{2n} n \exp -\frac{n(\lambda - (z + \lambda))}{2n} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}}$

   $f_Z(z) = \frac{1}{2} \exp -\frac{z}{2} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}}$

   Conséquence : $Z = 2n\left(\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda\right) \rightsquigarrow \chi_2^2$.

   On a $P\left[F_{\chi_2^2}^{-1}(\beta) \leq 2n\left(\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda\right) \leq F_{\chi_2^2}^{-1}(1 - \alpha + \beta)\right] = 0.95$

   La distribution étant unimodale, on suppose

   $$\alpha \leq 2 \min\left(F(x^*), 1 - F(x^*)\right)$$

Dans ce cas, l'intervalle optimal correspond à $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

$$P\left[F^{-1}_{\chi^2_2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq 2n\left(\widehat{\lambda}_{MV} - \lambda\right) \leq F^{-1}_{\chi^2_2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 0.95$$

$$P\left[\frac{F^{-1}_{\chi^2_2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n} \leq \widehat{\lambda}_{MV} - \lambda \leq \frac{F^{-1}_{\chi^2_2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n}\right] = 0.95$$

$$P\left[-\widehat{\lambda}_{MV} + \frac{F^{-1}_{\chi^2_2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2n} \leq -\lambda \leq -\widehat{\lambda}_{MV} + \frac{F^{-1}_{\chi^2_2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n}\right] = 0.95$$

$$IC_{0.95}(\lambda) = \left[\widehat{\lambda}_{MV} - \frac{1}{2n}F^{-1}_{\chi^2_2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ;\ \widehat{\lambda}_{MV} - \frac{1}{2n}F^{-1}_{\chi^2_2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

7. *On a* $\lambda = m_1 + 1$

L'application $g : X \longmapsto X + 1$ *est continue et bornée. De plus* $E[X+1]^2$ *existe. Donc* $\widehat{\lambda}_{MM}$ *est fortement consisitant de* λ *et*

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_{MM} - \lambda\right) &\xrightarrow{Loi} \mathcal{N}\left(0, Var(g(X))\right) \\
\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_{MM} - \lambda\right) &\xrightarrow{Loi} \mathcal{N}\left(0, Var(X)\right) \\
\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_{MM} - \lambda\right) &\xrightarrow{Loi} \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

Comme $\widehat{\lambda}_{MM}$ *est convergent et compte tenu que* λ^* *est préférable à* $\widehat{\lambda}_{MM}$, *alors* λ^* *est convergent.*

On a $\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_{MM} - \lambda\right) \xrightarrow{Loi} \mathcal{N}(0,1)$

On a alors un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$:

$$IC_{0.95}(\lambda) = \left[\widehat{\lambda}_{MM} - \frac{1}{\sqrt{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\ ;\ \widehat{\lambda}_{MM} + \frac{1}{\sqrt{n}}F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$