# MAT470 - Exercices sur l'interpolation

**par Stéphane Lafrance**

1. L'énoncé suivant est-il vrai : il n'existe pas de polynôme de degré $n$ dont le graphe passe par $n+2$ points donnés.

2. Déterminer le polynôme de degré 2 qui passe par les points $(1,1)$, $(2,3)$ et $(3,4)$.

3. Considérons une fonction $f(x)$ dont le graphe passe par les points suivants : $P_0(0,0)$, $P_1(1,2)$, $P_2(2,16)$, $P_3(3,36)$ et $P_4(4,96)$.

   a) Déterminer le polynôme de Lagrange passant par les points $P_0$, $P_1$ et $P_2$.

   b) Déterminer le polynôme de Lagrange passant par les points $P_0$, $P_1$, $P_2$ et $P_3$. Peut-on réutiliser les calculs faits en (a) ?

   c) Donner l'expression analytique de l'erreur des polynômes obtenus en (a) et en (b).

   d) Obtenir des estimations de la valeur $f(1.5)$ à l'aide des polynômes obtenus en (a) et en (b).

4. Refaire les exercices de la question précédente en utilisant la méthode d'interpolation de Newton. Donner des approximations des erreurs obtenus en (d).

5. Considérons une fonction $f(x)$ décrite par les données suivantes :

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0.0000 |
| 1 | 0.0175 |
| 2 | 0.1396 |
| 3 | 0.4710 |
| 4 | 1.1161 |

   a) Donner une approximation de $f(3.5)$ en utilsant un polynôme de degré 2. Utiliser la méthode de Newton et donner l'expression analytique de l'erreur.

   b) Refaire la question (a) en utilisant la méthode de Lagrange.

c) Donner une estimation de l'erreur commise en (a). Est-il possible d'obtenir une estimation de l'erreur commise en (b) ?

d) Quels sont les différences entre ces deux méthodes ?

6. Un cas particulier intéressant de la formule d'interpolation de Newton se présente lorsque les points d'interpolation $x_i$ sont également distants, c'est-à-dire lorsque :

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

Obtenir l'expression des premières, deuxièmes et troisièmes différences divisées dans ce cas.

# Réponses

1. Vrai en général, mais un tel polynôme existe dans certains cas. Par exemple, étant donné 3 points colinéaires, on peut construire un polynôme de degré 1 (i.e. une droite) passant par ces 3 points.
2. $p_2(x) = -0.5x^2 + 3.5x - 2$
3. a) $p_2(x) = 6x^2 - 4x$

   b) $p_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 6x$

   c) $\varepsilon_2(x) = x(x-1)(x-2)\dfrac{f^{(3)}(c_1)}{3!}$ où $c_1 \in [0, 2]$

   $\varepsilon_3(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dfrac{f^{(4)}(c_2)}{4!}$ où $c_2 \in [0, 3]$

   d) $f(1.5) \approx p_2(1.5) = 7.5$ et $f(1.5) \approx p_3(1.5) = 7.875$.
4. Mêmes polynômes qu'en (3). Estimations des erreurs :

$$\varepsilon_2(x) \approx p_3(x) - p_2(x) = -x(x-1)(x-2)$$

$$\varepsilon_3(x) \approx p_4(x) - p_3(x) = 1.6667x(x-1)(x-2)(x-3)$$

   On obtient $\varepsilon_2(1.5) \approx 0.375$ et $\varepsilon_3(1.5) \approx 0.9375$.
5. a) $p_2(x) = 0.1569x^2 - 0.4532x + 0.4185$ et $f(3.5) \approx p_2(3.5) = 0.7543$

   Erreur : $\varepsilon_2(x) = (x-4)(x-3)(x-2)\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}$ où $c \in [2, 4]$

   c) Estimation de l'erreur : $\varepsilon_2(x) \approx p_3(x) - p_2(x) = 0.0174(x-4)(x-3)(x-2)$

   D'où $\varepsilon_2(3.5) \approx -0.0065$.

   Non, une estimation de l'erreur est seulement disponible lorsqu'on utilise la méthode de Newton.

   d) Les deux méthodes donnent le même polynôme, mais exprimé différemment. Elles ont le même terme d'erreur, mais seule la méthode de Newton peut fournir une estimation de l'erreur.
6.

$$\begin{aligned}
f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \\
f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1} + f(x_i)}{2\Delta x^2} \\
f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] &= \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1} - f(x_i)}{3!\Delta x^3}
\end{aligned}$$