

Résumé complet — Actuariat de l'assurance vie

Cours: Actuariat de l'assurance vie (Med Achraf SLAMIA) — synthèse LaTeX

Table des matières

1	Introduction et définitions	2
2	Notations usuelles	3
3	Tables de mortalité	3
4	Rappels de mathématiques financières	3
4.1	Capitalisation et actualisation	3
4.2	Principe d'équivalence financière	3
5	Valeur actuelle probable (VAP)	3
5.1	Formule générale	4
5.2	Formule fondamentale	4
6	Fonctions de commutation	4
7	Rentes viagères	4
7.1	Rente viagère immédiate (perpétuelle)	4
7.2	Rente temporaire n années	5
7.3	Rente différée (s années) puis temporaire t ans	5
7.4	Rentes croissantes	5
8	Capitaux au décès	5
8.1	Capital versé en fin d'année du décès (1 unité)	5
8.2	Capital temporaire décès n années	5
8.3	Capital différé et temporaire	5
8.4	Usage :	5
9	Contrats mixtes	5
9.1	Exemple : Mixte classique	6
10	Tarification et primes	6
10.1	Principe d'équité actuarielle	6
10.2	Composition des primes	6
10.3	Primes pures	6
10.4	Chargements	6
10.5	Formules de prime commerciale	6
11	Provisions mathématiques (PM)	6
11.1	Définition et objectif	6
11.2	Méthode prospective	7
11.3	Cas particuliers	7
11.4	Autres méthodes	7

12 Assurance Non-Vie (Complément)	7
12.1 Modèle fréquence-coût	7
12.2 Prime pure en non-vie	7
12.3 Système Bonus-Malus	7
12.4 GLM (Generalized Linear Models)	7
13 Provisions techniques en non-vie	8
13.1 PPNA (Provision Pour Primes Non Acquises)	8
13.2 PANE (Primes Acquises Non Emises)	8
13.3 PSAP (Provisions pour Sinistres À Payer)	8
14 Types de Sinistres	8
15 Modèles de mortalité	8
15.1 Gompertz (1825)	8
15.2 Makeham (1860)	8
15.3 Lee-Carter (1992)	8
16 Exemples de Calculs Concrets	9
16.1 Prime commerciale avec chargements	9
16.2 Mixte à primes annuelles	9
16.3 Temporaire décès à primes annuelles	9
17 Aspects pratiques & conseils pour les calculs	9
18 Annexes : formules utiles résumées	10

1 Introduction et définitions

- **Contrat d'assurance vie** : engagement de l'assureur de verser un capital ou une rente conditionné par la survie ou le décès d'un assuré.
- **Principes fondamentaux** : mutualisation, transfert de risque, réassurance, rétrocession
- **Objectifs** : protection, épargne, retraite
- **Types de contrats** : cas de vie, cas de décès, contrats mixtes
- **Notions clés** : prime, prestation, table de mortalité, provision mathématique, valeur actuelle probable

2 Notations usuelles

T : durée de vie aléatoire (âge futur de décès)

x : âge de référence (actuel)

$T_x = T - x$: durée de vie résiduelle

l_x : nombre de survivants à l'âge x

$d_x = l_x - l_{x+1}$

$q_x = d_x/l_x$: probabilité de décès entre x et $x + 1$

$p_x = 1 - q_x$

${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$: probabilité de survie de x à $x + n$

${}_nq_x = 1 - {}_np_x$

i : taux d'intérêt actuariel (annuel)

$v = (1 + i)^{-1}$: facteur d'actualisation par période

$V^k = v^k = (1 + i)^{-k}$

w : âge limite de la table

3 Tables de mortalité

- **Table du moment** (statique) : mortalité observée sur une année calendaire, hypothèse de mortalité constante
- **Table de génération** (prospective) : dépend à la fois de l'âge et de l'année (prise en compte de l'évolution de la mortalité)
- **Utilisation** : calcul des probabilités ${}_np_x$ et ${}_nq_x$ nécessaires au calcul des valeurs actuelles probables (VAP)
- **Construction** : observation d'une cohorte l_x individus, suivi des décès d_x

4 Rappels de mathématiques financières

4.1 Capitalisation et actualisation

$C(T, i) = C(1 + i)^T$ (capitalisation composée)

Valeur actuelle : $VA = C(1 + i)^{-T} = Cv^T$

Facteur d'escompte : $v = \frac{1}{1 + i}$

4.2 Principe d'équivalence financière

- Capital C aujourd'hui $\equiv C(1 + i)^T$ dans T années
- Capital C dans T années $\equiv \frac{C}{(1 + i)^T}$ aujourd'hui

5 Valeur actuelle probable (VAP)

Principe : on pondère chaque flux par la probabilité qu'il soit effectivement versé (survie/décès) puis on actualise.

5.1 Formule générale

Si un flux S est versé à l'instant k seulement si l'assuré est en vie (ou décédé) selon la condition, la VAP est :

$$VAP = \sum_k v^k \cdot S_k \cdot P(\text{condition à } k).$$

5.2 Formule fondamentale

Pour un capital S versé dans T années à une personne d'âge x :

$$VAP(x, i, T) = S \cdot v^T \cdot \frac{L_{x+T}}{L_x}$$

Usage : évaluation de tout engagement conditionnel à la survie ou au décès

6 Fonctions de commutation

Ces fonctions condensent des sommes pondérées (pratiques en calcul actuariel). Pour un taux i et $v = (1 + i)^{-1}$ on définit :

$$\begin{aligned} D_x &= l_x v^x \\ N_x &= \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k} \\ S_x &= \sum_{k=0}^{w-x} N_{x+k} \\ C_x &= d_x v^{x+1} \\ M_x &= \sum_{k=0}^{w-x} C_{x+k} \\ R_x &= \sum_{k=0}^{w-x} M_{x+k} \end{aligned}$$

Usage : simplifier l'écriture des rentes et des capitaux ; ex. $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ et $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$.

7 Rentes viagères

7.1 Rente viagère immédiate (perpétuelle)

— Rente versée à *terme échu* (fin de période) de 1 unité si la personne est en vie :

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

— Rente versée à *terme anticipé* (début de période) :

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

— Relation : $a_x = \ddot{a}_x - 1$.

7.2 Rente temporaire n années

$${}_n|a_x = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

7.3 Rente différée (s années) puis temporaire t ans

$${}_{s|t}a_x = \sum_{k=s+1}^{s+t} v^k {}_k p_x = {}_s p_x {}_t a_{x+s}.$$

7.4 Rentes croissantes

— Rente croissante (1,2,3,...) à terme anticipé :

$$I \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_k p_x.$$

— Rente croissante différée :

$${}_{s|t}(I\ddot{a})_x = \sum_{k=s}^{s+t-1} (k+1) v^k {}_k p_x.$$

Usage : modéliser rentes indexées linéairement.

8 Capitaux au décès

8.1 Capital versé en fin d'année du décès (1 unité)

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}.$$

8.2 Capital temporaire décès n années

$${}_n A_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

8.3 Capital différé et temporaire

$${}_{s|t}A_x = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = {}_s p_x \cdot {}_t A_{x+s}.$$

8.4 Usage :

- Tarification des garanties décès
- Calcul des primes pures (ex : prime unique $\Pi = K A_x$ pour capital K)
- Évaluation des engagements de l'assureur

9 Contrats mixtes

Assurance mixte (capital en vie ou au décès) : combinaison de A_x et ${}_n p_x$ selon le contrat.

9.1 Exemple : Mixte classique

Capital K payé au décès si avant n ans, sinon à terme n :

$$VAP = {}_n p_x K v^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} K = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

10 Tarification et primes

10.1 Principe d'équité actuarielle

La prime doit satisfaire l'égalité entre la VAP des flux payés par l'assuré et la VAP des engagements de l'assureur :

$$VAP_{\text{assuré}}(\text{primes}) = VAP_{\text{assureur}}(\text{prestations}).$$

10.2 Composition des primes

- **Prime pure** = Coût du risque seul
- **Prime d'inventaire** = Prime pure + Chargements de gestion
- **Prime commerciale** = Prime d'inventaire + Chargements d'acquisition

10.3 Primes pures

- **Prime unique** pour un capital K au décès : $\Pi = K A_x$
- **Prime périodique** avec paiement annuel (primes constantes) :

$$\Pi \ddot{a}_x = K A_x \quad \Rightarrow \quad \Pi = K \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

10.4 Chargements

- **Frais d'acquisition** : commercialisation, commissions
- **Frais de gestion** : administration, relation client
- **Frais de règlement** : paiement des sinistres
- **Marge de profit** : bénéfice de l'assureur

10.5 Formules de prime commerciale

- **Prime unique commerciale** :

$$\Pi'' = \frac{\Pi(1+r) + f + g_2 \ddot{a}_G}{(1-\alpha)}$$

- **Prime annuelle commerciale** :

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2 \frac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H} + f}{(1-\alpha)}$$

11 Provisions mathématiques (PM)

11.1 Définition et objectif

Les PM représentent la dette probable de l'assureur vis-à-vis des assurés. Ce sont des réserves financières pour faire face aux engagements futurs.

11.2 Méthode prospective

La provision à la date t pour un contrat sur une tête d'âge x est :

$${}_tV_x = VAP_{\text{assureur restant}} - VAP_{\text{assuré restant}} = \text{VAP des engagements futurs} - \text{VAP des primes futures.}$$

11.3 Cas particuliers

- **Capital décès prime unique** : ${}_tV_x = C A_{x+t}$
- **Contrat retraite** :

$$\text{Si } 0 < k < n : {}_kV_x = R \cdot {}_{n-k}|a_{x+k} - \Pi \cdot {}_{n-k}\ddot{a}_{x+k}$$

$$\text{Si } k \geq n : {}_kV_x = R \cdot a_{x+k}$$

11.4 Autres méthodes

- **Méthode rétrospective** : PM = capitalisation viagère de l'écart entre primes versées et prestations payées
- **Méthode comptable** : itérative, fondée sur hypothèses de provisionnement (taux technique, tables, chargements)

12 Assurance Non-Vie (Complément)

12.1 Modèle fréquence-coût

$$S = \sum_{i=1}^N C_i + I_G \cdot G$$

Usage : Modélisation de la charge sinistre en IARD, avec :

- N : nombre de sinistres (loi de Poisson)
- C : coût unitaire (loi Gamma ou log-normale)
- I_G : indicatrice de sinistre grave
- G : coût sinistre grave (loi Pareto)

12.2 Prime pure en non-vie

$$E[S|X] = E[N - I_G|X] \times E[C|X] + P(I_G = 1|X) \times E[G|X]$$

12.3 Système Bonus-Malus

Modulation de prime selon sinistralité passée :

- **Bonus** : réduction de prime en l'absence de sinistre
- **Malus** : majoration de prime après sinistre
- Coefficient BM évolue à chaque échéance

12.4 GLM (Generalized Linear Models)

Cadre pour modéliser fréquence et coût :

- **Fonction de lien** : $g(E[Y_i]) = x'_i\beta$
- **Lois utilisées** : Poisson (fréquence), Gamma (coût), Binomiale négative
- **Méthodes de sélection** : ascendante/descendante
- **Critères** : AIC, BIC, Déviance

13 Provisions techniques en non-vie

13.1 PPNA (Provision Pour Primes Non Acquises)

$$PPNA = \frac{\text{Jours restants}}{\text{Période totale}} \times \text{Prime nette}$$

Usage : constater la part des primes se rapportant à la période après l'inventaire

13.2 PANE (Primes Acquises Non Emises)

$$PANE = \frac{\text{Jours écoulés}}{\text{Période totale}} \times \text{Prime nette}$$

Usage : produits non encore facturés mais acquis

13.3 PSAP (Provisions pour Sinistres À Payer)

$$PSAP = \text{Provision Dossier/Dossier} + \text{Provision IBNR}$$

avec $\text{IBNR} = \text{IBNER} + \text{IBNYR}$

- **IBNER** : sinistres déclarés mais sous-estimés
- **IBNYR** : sinistres survenus mais non déclarés

14 Types de Sinistres

- **Attritionnels** : Forte fréquence, faible gravité (ex : petits dommages)
- **Graves** : Faible fréquence, forte gravité (ex : accident corporel)
- **CAT (catastrophes)** : Très faible fréquence, impact extrême (ex : tremblement de terre)

15 Modèles de mortalité

15.1 Gompertz (1825)

Force de mortalité : $\mu_x = b c^x$ (avec $c > 1, b > 0$)

Usage : modélisation croissante de la mortalité par âge (vieillesse)

15.2 Makeham (1860)

$\mu_x = a + b c^x$ (ajoute un terme constant a pour risques exogènes)

Usage : meilleure adaptation lorsque accidents/maladies externes sont importants

15.3 Lee-Carter (1992)

Modèle temporel pour la projection des taux instantanés :

$$\log \mu_x(t) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t},$$

avec contraintes d'identifiabilité : $\sum_x b_x = 1, \sum_t k_t = 0$

Usage : projection de la mortalité et calcul de provisions pour risque de longévité

16 Exemples de Calculs Concrets

16.1 Prime commerciale avec chargements

$$P'' = \frac{P(1+r) + g_1 + g_2 \frac{\ddot{a}_G}{\ddot{a}_H} + f}{(1-\alpha)}$$

où :

- P = prime pure
- f = frais fixes
- α = frais d'acquisition (% prime)
- g_1, g_2 = frais de gestion
- r = marge de risque

16.2 Mixte à primes annuelles

$$P_r = C_{ap} \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$$

Usage : calcul de prime annuelle pour contrat mixte

16.3 Temporaire décès à primes annuelles

$$P_a = C \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}$$

17 Aspects pratiques & conseils pour les calculs

- **Vérifier les conventions** : paiement à terme échu vs anticipé, périodicité des flux
- **Utiliser les commutations** : fonctions D, N, C, M pour gagner en efficacité et réduire les erreurs
- **Inclure tous les chargements** : acquisition, gestion, risque dans les primes commerciales
- **Contrôler les hypothèses** : taux technique, tables de mortalité, durée de paiement
- **Sensibilité aux paramètres** : petite modification des bases peut changer fortement les résultats
- **Validation** : utiliser outils informatiques (R, Python, Excel) pour les calculs complexes

18 Annexes : formules utiles résumées

$$\begin{aligned}
 v &= (1+i)^{-1}, \\
 {}_n p_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_n q_x = 1 - {}_n p_x, \\
 a_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}, \\
 \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x = \frac{N_x}{D_x}, \\
 A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}, \\
 {}_n A_x &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \\
 {}_{s|t} a_x &= {}_s p_{xt} a_{x+s}, \\
 \Pi_{\text{prime unique capital}} &= K A_x, \\
 {}_t V_x &= VAP_{\text{assureur futur}} - VAP_{\text{assuré futur}}.
 \end{aligned}$$

Remarque : Ce document est un résumé complet destiné à couvrir l'ensemble du programme d'actuariat vie. Pour des calculs professionnels, toujours vérifier rigoureusement les conventions utilisées et les hypothèses de provisionnement.