

# exercice a probabilités inégales

## exercice 1:

$$\pi_1 = P\{1,3\} + P\{1,2\} = 3/4$$

$$\pi_2 = P\{1,2\} + P\{2,3\} = 3/4$$

$$\pi_3 = P\{1,3\} + P\{2,3\} = 1/2$$

$$\Delta_{11} = \pi_1 - \pi_1^2 = |3/4| - (3/4)^2 = 3/16$$

$$\Delta_{22} = \pi_2 - \pi_2^2 = 3/16$$

$$\Delta_{33} = \pi_3 - \pi_3^2 = (1/2) - (1/2)^2 = 1/4 = 4/16$$

Calculons les probabilités d'inclusion d'ordre 2

$$\pi_{12} = 1/2 = 8/16 \quad \pi_{13} = 1/4 \quad \pi_{23} = 1/4$$

$$\Delta_{12} = \pi_{12} - \pi_1 \pi_2 = -1/16 \quad \Delta_{13} = \pi_{13} - \pi_1 \pi_3 = -1/8 \quad \Delta_{23} = -1/8$$

$$\Rightarrow \text{La matrice de variance-covariance} \quad = -\frac{2}{16} \quad = -\frac{2}{16}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2:

1)  $\sum_{i=1}^m \pi_i = m$ , si le plan est de taille fixe, on a  $\#E = m = \sum_{i \in E} 1\{i \in E\}$

$$\text{Cov}(1\{i \in E\}, 1\{j \in E\}) = \sum_{j \in E} \text{Cov}(1\{i \in E\}, 1\{j \in E\}) ; \text{ soit } i \in \mathcal{P}$$

$$= \text{Cov}(1\{i \in E\}, \sum_{j \in \mathcal{P}} 1\{j \in E\}) = \text{Cov}(1\{i \in E\}, m) = 0$$

$$\text{donc } \text{Cov}(1\{i \in E\}, 1\{j \in E\}) = 0 \neq \sum L_i$$

donc le plan n'est pas de taille fixe

2)  $\pi_i = \pi_i(1 - \pi_i) = 6/2r \Rightarrow \pi_i - \pi_i^2 = \frac{6}{2r} = 0$  donc  $\pi_i \in \{2/r, 3/r\}$

or  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 > \pi_4 = \pi_r$  alors  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 3/r$  et  $\pi_4 = \pi_r = 2/r$

3)  $\pi_{ij} = \pi_{ij} - \pi_i \pi_j \quad \forall i \in \mathcal{P}, j \in \mathcal{P}, i \neq j \quad \pi_{ij} = \pi_{ji} = P\{\underbrace{1, j, \dots}_{\text{ech}}\}$

$$\pi_{ij} = \pi_{ij} + \pi_i \pi_j \quad \pi_{12} = \frac{6}{2r} + \frac{9}{2r} = \frac{15}{2r}$$

$$\pi_{13} = \frac{6}{2r} + \frac{9}{2r} = \frac{15}{2r} \quad \pi_{14} = \frac{-6}{2r} + \frac{6}{2r} = 0 \quad \pi_{1r} = \frac{-6}{2r} + \frac{6}{2r} = 0$$

$$\pi_{23} = \frac{6}{2r} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{2r}$$

$$\pi_{4u} = \pi_{4r} = 0$$

$$\pi_{3u} = \pi_{3r} = 0$$

$$\pi_{45} = \frac{6}{2r} + \frac{4}{2r} = \frac{10}{2r}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 15/2r & 15/2r & 0 & 0 \\ 15/2r & 0 & 15/2r & 0 & 0 \\ 15/2r & 15/2r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10/2r \\ 0 & 0 & 0 & 10/2r & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice des probas  
d'inclusion d'ordre 2

4)  $\{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{4,5\}; \{1,2,3\};$

Oma  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{23}$

$\Rightarrow$  La proba de sélectionner  $\{1\} =$  La proba de sélectionner  $\{1,2\}$

La proba de sélectionner  $\{2\} =$  La proba de sélectionner  $\{1,2\}$

La proba de sélectionner  $\{3\} =$  La proba de sélectionner  $\{1,3\}$  et  $\{2,3\}$

La proba de sélectionner  $\{1,2,3\} =$  La proba de sélectionner  $\{1\}$  ou  $\{2\}$  ou  $\{3\} = 3/r$

il s'agit donc d'une plume grappe où on choisit peut la grappe  $\{1,2,3\}$  ou  $\{4,5\}$