

# Résumé — Actuariat Non-Vie

## Formules usages

Basé sur : Cours Actuariat Non-Vie (ESSAI)

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à l'Assurance Non-Vie</b>	<b>2</b>
1.1	Concepts Fondamentaux . . . . .	2
1.2	Branches d'Assurance Non-Vie . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Tarification</b>	<b>2</b>
2.1	Composition de la Prime . . . . .	2
2.2	Modèle Fréquence-Coût . . . . .	2
2.3	Système Bonus-Malus . . . . .	2
2.4	Modèles Statistiques . . . . .	3
2.5	Méthodes de Sélection de Variables . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Provisionnement</b>	<b>3</b>
3.1	Provisions sur Primes . . . . .	3
3.2	Provisions sur Sinistres . . . . .	3
3.3	Méthodes Déterministes . . . . .	4
3.4	Méthodes Stochastiques . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Solvabilité II</b>	<b>5</b>
4.1	Les Trois Piliers . . . . .	5
4.2	Calcul des Provisions Techniques . . . . .	5
4.3	Calcul du Capital Requis . . . . .	5
4.4	Modèle de Merz-Wüthrich (Risque à 1 an) . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Validation des Modèles</b>	<b>6</b>
5.1	Tests Statistiques . . . . .	6
5.2	Critères de Sélection . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Mesures de Performance</b>	<b>6</b>
6.1	Ratios Techniques . . . . .	6
6.2	Indicateurs de Rentabilité . . . . .	6
<b>7</b>	<b>Application au Marché Tunisien</b>	<b>7</b>
7.1	Caractéristiques du Marché . . . . .	7
7.2	Tarification Tunisienne . . . . .	7
<b>8</b>	<b>Conseils Pratiques et Bonnes Pratiques</b>	<b>7</b>
8.1	Recommandations Générales . . . . .	7
8.2	Choix des Méthodes . . . . .	7
8.3	Gestion des Incertitudes . . . . .	7

# 1 Introduction à l'Assurance Non-Vie

## 1.1 Concepts Fondamentaux

- **Mutualisation** : Principe où beaucoup d'assurés paient pour indemniser les quelques sinistrés
- **Transfert de risque** : Cession du risque au réassureur
- **Rétrocession** : Réassureur se réassure à son tour
- **Cycle de production inversé** : Prime encaissée avant de connaître le coût réel des sinistres

## 1.2 Branches d'Assurance Non-Vie

- **IARD** : Incendie, Accidents, Risques Divers
- **Principales branches** : Automobile, Santé, Transport, Incendie, Risques Divers, Engineering
- **Marché tunisien** : 78% des primes proviennent du non-vie (2019)

# 2 Tarification

## 2.1 Composition de la Prime

$$\text{Prime Commerciale} = \underbrace{\text{Prime pure}}_{\mathbb{E}[\text{pertes}] + \text{Frais et Taxes} + \text{Marge Bénéficiaire}$$

Décomposition détaillée :

- **Prime pure** : Espérance mathématique des pertes
- **Frais de gestion** : Coûts de traitement des dossiers
- **Taxes** : Taxe d'assurance (2% en général)
- **Marge bénéficiaire** : Profit de l'assureur

## 2.2 Modèle Fréquence-Coût

Formule générale :

$$S = \sum_{i=1}^N C_i + I_G \times G$$

- $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$  : Nombre de sinistres
- $C_i \sim \text{Gamma ou Log-normal}$  : Coût unitaire
- $I_G$  : Indicatrice de sinistre grave
- $G \sim \text{Pareto}$  : Coût sinistre grave

**Prime pure conditionnelle :**

$$E[S|X] = E[N - I_G|X] \times E[C|X] + P(I_G = 1|X) \times E(G|X)$$

## 2.3 Système Bonus-Malus

- **Bonus** : Réduction de prime après année sans sinistre
- **Malus** : Majoration après sinistre
- Coefficient conservé en cas de changement d'assureur

## 2.4 Modèles Statistiques

### Modèle Linéaire Classique

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Usage : Modélisation de variables continues (coûts moyens)

### GLM (Generalized Linear Models)

Structure générale :

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}, \quad \mu_i = \mathbb{E}[Y_i]$$

Lois utilisées en tarification :

- Montants sinistres : Gamma, Log-normal, Exponentielle
- Nombre sinistres : Poisson, Binomiale Négative
- Vie/décès : Bernoulli, Binomiale

Fonction de vraisemblance famille exponentielle :

$$f(y_{i,j}, \theta_{i,j}, \phi) = \exp \left\{ \frac{y_{i,j} \cdot \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{a(\phi)} \omega_{i,j} + c(y_{i,j}; \phi; \omega_{i,j}) \right\}$$

## 2.5 Méthodes de Sélection de Variables

- Ascendante : Ajout progressif des variables
- Descendante : Élimination progressive
- Critères : AIC, BIC, Déviance

## 3 Provisionnement

### 3.1 Provisions sur Primes

PPNA (Provision pour Primes Non Acquises)

$$\text{PPNA} = \frac{\text{Jours restants}}{\text{Période couverture totale}} \times \text{Prime nette}$$

PANE (Primes Acquises Non Emises)

$$\text{PANE} = \frac{\text{Jours écoulés}}{\text{Période couverture totale}} \times \text{Prime nette}$$

### 3.2 Provisions sur Sinistres

Cycle de Vie d'un Sinistre

1. Survenance → Déclaration → Ouverture dossier
2. Évaluation initiale → Paiements partiels
3. Recours → Clôture (ou réouverture)

## Décomposition Solvabilité II

$$\text{PSAP} = \text{Provision Dossier/Dossier} + \text{Provision IBNR}$$

$$\text{IBNR} = \text{IBNER} + \text{IBNYR}$$

- **IBNER** : Incurred But Not Enough Reported (sous-estimation dossiers connus)
- **IBNYR** : Incurred But Not Yet Reported (sinistres survenus non déclarés)

### 3.3 Méthodes Déterministes

#### Chain Ladder

Facteurs de développement :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Projection :

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} \times \hat{f}_j$$

Calcul des provisions :

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i}$$
$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Facteur de Queue (Tail Factor)

$$f_{ult} = \prod_{j=J}^{J(\text{ultime})-1} f_j$$
$$C_{i,\text{ultime}} = C_{i,J} \times f_{ult}$$

Bornhuetter-Ferguson

$$\hat{R}_i = \overline{LR}_i \times P_i \times (1 - \hat{Z}_{n+1-i})$$
$$\hat{Z}_k = \frac{1}{\hat{f}_k \times \hat{f}_{k+1} \times \dots \times \hat{f}_n}$$

London Chain Ladder

$$C(i, j+1) = f_j^{LC} \cdot C(i, j) + a_j^{LC}$$
$$f_j^{LC} = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2}$$
$$a_j^{LC} = \bar{C}_{j+1} - f_j^{LC} \bar{C}_j$$

### 3.4 Méthodes Stochastiques

Modèle de Mack

Variance des facteurs :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

**MSEP (Mean Squared Error of Prediction) :**

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = C_{i,n}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left( \frac{1}{C_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)$$

**MSEP provision totale :**

$$MSEP(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left\{ MSEP(\hat{R}_i) + C_{i,n} \left( \sum_{k=i+1}^n C_{k,n} \right) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \cdot \sum_{u=0}^{n-j} C_{u,j}} \right\}$$

**Bootstrap avec GLM**

**Procédure :**

1. Ajustement du modèle et estimation des  $\hat{\mu}_{ij}$
2. Calcul des résidus de Pearson :  $r_{ij}^p = \frac{x_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$
3. Rééchantillonnage avec remise des résidus
4. Construction des pseudo-triangles
5. Estimation des provisions pour chaque échantillon

**Estimation finale :**

$$E^B(\hat{R}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}^b$$

$$sep = \sqrt{\hat{V}(R) + Var^B(\hat{R})}$$

## 4 Solvabilité II

### 4.1 Les Trois Piliers

- **Pilier I** : Exigences quantitatives (SCR, MCR, provisions)
- **Pilier II** : Exigences qualitatives (gouvernance, ORSA)
- **Pilier III** : Discipline de marché (transparence)

### 4.2 Calcul des Provisions Techniques

**Best Estimate**

$BE$  = Valeur actuelle des flux de trésorerie futurs probables

**Marge pour Risque**

$$RM = CoC \times \sum_{m>0} \frac{SCR_{RU_m}}{(1 + r_{m+1})^{m+1}}$$

### 4.3 Calcul du Capital Requis

**SCR Global**

$$SCR_{global} = BSCR + SCR_{op} + Adj$$

## Formule d'agrégation

$$SCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

## Value-at-Risk

$$VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

### 4.4 Modèle de Merz-Wüthrich (Risque à 1 an)

#### Claims Development Result (CDR)

$$CDR_i(I+1) = E[R_i^I | D_I] - \left( X_{i,I-i+1} + E[R_i^{I+1} | D_{I+1}] \right)$$

#### MSEP du CDR

$$MSEP_{CDR_i | D_I}(\overline{CDR}_i(I+1)) = E \left[ (CDR_i(I+1) - \overline{CDR}_i(I+1))^2 | D_I \right]$$

## 5 Validation des Modèles

### 5.1 Tests Statistiques

- Normalité : Shapiro-Wilk
- Indépendance : Ljung-Box
- Homoscédasticité : Test de White, Breusch-Pagan

### 5.2 Critères de Sélection

- AIC :  $AIC = -2 \log(L) + 2k$
- BIC :  $BIC = -2 \log(L) + k \log(n)$
- Déviance : Mesure de la qualité d'ajustement

## 6 Mesures de Performance

### 6.1 Ratios Techniques

#### Loss Ratio

$$\text{Loss ratio} = \frac{\text{Sinistres réglés} + \text{Provisions}}{\text{Primes acquises}}$$

#### Ratio Combiné

$$\text{Ratio combiné} = \text{Loss ratio} + \text{Expense ratio}$$

### 6.2 Indicateurs de Rentabilité

- Combined Ratio < 100% : Rentabilité technique positive
- Return on Equity : Rentabilité des fonds propres
- Return on Assets : Rentabilité des actifs

## 7 Application au Marché Tunisien

### 7.1 Caractéristiques du Marché

- **Taux de pénétration** : 2.4% (2022)
- **Densité d'assurance** : 270 DT/habitant (2022)
- **Nombre de compagnies** : 24 (dont 1 réassureur)
- **Répartition** : 40.4% Automobile, 28.4% Vie, 14.6% Maladie

### 7.2 Tarification Tunisienne

#### RC Automobile (Classe 4 - Usage privé)

- 2 CV : 85.000 DT
- 3-4 CV : 99.000 DT
- 5-6 CV : 127.000 DT
- 7-10 CV : 141.000 DT

#### Garanties Complémentaires

- **Vol** : 15.000 DT + 2.6% de la valeur vénale
- **Incendie** : 10.000 DT + 3% de la valeur vénale
- **Défense et recours** : 20.000 DT

## 8 Conseils Pratiques et Bonnes Pratiques

### 8.1 Recommandations Générales

- **Segmentation** : Toujours séparer fréquence et coût
- **Validation** : Tester les hypothèses des modèles
- **Documentation** : Bien documenter les choix méthodologiques
- **Actualisation** : Mettre à jour régulièrement les modèles

### 8.2 Choix des Méthodes

- **Chain Ladder** : Données stables, historique suffisant
- **Bornhuetter-Ferguson** : Données récentes peu fiables
- **GLM** : Segmentation fine nécessaire
- **Bootstrap** : Estimation de la distribution des provisions

### 8.3 Gestion des Incertitudes

- **Analyse de sensibilité** : Variation des paramètres
- **Scénarios** : Tests sous différentes hypothèses
- **Back-testing** : Comparaison prévisions/réalisations

## Conclusion

Ce résumé couvre l'ensemble des concepts, formules et méthodes vus dans le cours d'actuariat non-vie. Il sert de référence pour :

- La tarification des produits d'assurance
- Le provisionnement des engagements
- Le calcul du capital réglementaire
- L'analyse de la rentabilité technique

## Références

Résumé basé sur le cours fourni : *Cours Actuariat Non-Vie (ESSAI)*, année académique 2025-2026.