

Lois discrètes du tirage avec remise

Nom	$\mathbf{X}(\Omega)$	Loi ($\mathbf{P}(X = k)$)	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$	Cas d'utilisation
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$p^k (1-p)^{1-k}$ $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$	Expérience aléatoire à <u>deux issues possibles</u> : réussite avec une proba p ou échec avec une proba $1-p$ (dichotomie)
Loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ $(n - \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(n, 1-p))$	$\{0, \dots, n\}$	$\mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	<u>Nombre de succès obtenus</u> lors d'une succession de n essais indépendants d'une expérience aléatoire à deux issues possibles : réussite avec une proba p ou échec avec une proba $1-p$
Loi géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	\mathbb{N}^*	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	<u>Rang d'apparition du premier succès</u> lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles : réussite avec une proba p ou échec avec une proba $1-p$
Loi de Pascal $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$	$\{r, r+1, \dots\}$	$\mathbb{C}_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	<u>Rang d'apparition du r-ième succès</u> lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles: réussite avec une proba p ou échec avec une proba $1-p$
Loi Binomiale négative $X \hookrightarrow \mathcal{J}(r, p)$	\mathbb{N}	$\mathbb{C}_{k+r-1}^k p^r (1-p)^k$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	<u>Nombre d'échecs précédant le r-ième succès</u> lors d'une succession d'expériences aléatoires indépend- antes n'ayant que deux issues possibles: réussite avec une proba p ou échec avec une proba $1-p$
Loi multinomiale $N \hookrightarrow \mathcal{M}(n; p_1, p_2, \dots, p_m)$ $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_m \end{pmatrix}$ $\sum_{i=1}^m p_i = 1$	$\{0, \dots, n\}^m$ ensemble de m -uplets	$P(N = K) =$ $P \begin{pmatrix} N_1 = k_1 \\ \dots \\ N_m = k_m \end{pmatrix} =$ $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$	$\begin{pmatrix} np_1 \\ \dots \\ np_m \end{pmatrix}$	$V(N_i) =$ $np_i(1-p_i)$ et $Cov(N_i, N_j)$ $= np_i p_j$	Succession de <u>n essais identiques et indépendants</u> d'une expérience aléatoire à <u>m issues possibles</u> ; l'issue i ayant la probabilité p_i d'être réalisée On s'intéresse au vecteur aléatoire formé par le <u>nombre de réalisations de chaque issue.</u>

Lois discrètes du tirage sans remise

Nom	$\mathbf{X}(\Omega)$	Loi ($\mathbf{P}(X = k)$)	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$	Cas d'utilisation
Loi hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}y(N, n, p)$	$\left\{ \sup\{0, n - (1 - p)N\}, \dots, \inf\{n, pN\} \right\}$	$\frac{\mathbb{C}_{pN}^k \mathbb{C}_{(1-p)N}^{n-k}}{\mathbb{C}_N^n}$	np	$np(1-p) \frac{(N-n)}{N-1}$	<u>Nombre de succès obtenus</u> lors d'une succession de n tirages aléatoires sans remise (dépendants) avec une dichotomie (p= proba de succès)
Loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$	\mathbb{N}	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	<u>Nombre d'apparitions</u> d'un évènement <u>rare</u> durant un intervalle de temps ou d'espace fixe

Lois usuelles continues

Loi	Densité $f(x)$	Fonction de répartition $F(x)$	$\mathbf{E}(X)$ $\mathbf{V}(X)$
Loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$	$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x \geq b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$ $\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \lambda > 0$ $\mathcal{E}(\lambda) = \gamma(1, \lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$ ex: temps d'attente avant l'arrivée d'un phénomène. $\frac{1}{\lambda^2}$
Loi de Laplace-Gauss ou loi normale $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$	$\int_{-\infty}^x f(t) dt$ tabulée pour le cas centré réduit	μ la combinaison de v.a. normales suit une normale. σ^2
Loi Log-normale $X \hookrightarrow L\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ($\ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2 \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$	$X = e^Y$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $(e^{\sigma^2} - 1)(e^{2\mu} + \sigma^2)$
Loi Gamma $X \hookrightarrow \gamma(a, \lambda)$	$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x > 0\}}$	$1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)$	$\frac{a}{\lambda}$ $\frac{a}{\lambda^2}$ $\gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$
Loi Bêta $X \hookrightarrow \beta(a, b)$ $\frac{\gamma(a, 1)}{\gamma(b, 1)} = \beta(a, b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$		$\frac{a}{a+b}$ $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Loi de Cauchy $X \hookrightarrow \mathcal{C}(\theta)$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - \theta)^2} \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R}\}}$		

Lois usuelles continues (suite)

Loi	Densité $f(x)$	$\mathbf{E}(X)$ $\mathbf{V}(X)$	Construction
Loi de khi-deux à n degrés de liberté $X \hookrightarrow \chi^2_{(n)}$	$\frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$	n $2n$	C'est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites élevées au carré utilisée souvent pour les variances. $\frac{1}{2}\chi^2_{(n)} = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Loi de Student à n degrés de liberté $X \hookrightarrow \mathcal{T}(n)$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})n^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}$	0 car symétrique $\frac{n}{n-2} \quad n > 2$	C'est la loi du quotient d'une normale centrée réduite et de la racine d'une khi-deux divisée par son nombre de degrés de liberté; les deux variables aléatoires étant indépendantes $\left(\mathcal{T}(n) = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2/n}}\right)$ utilisée souvent pour les v.a. réduites
Loi de Fisher-Snédecor à n et m degrés de liberté $X \hookrightarrow \mathcal{F}(n, m)$	$\frac{n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{(n+m)}{2}}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$	$\frac{m}{m-2} \quad m > 2$ $2 \frac{m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \quad m > 4$	C'est la loi du quotient de deux khi-deux indépendantes divisées chacune par son nombre de degrés de liberté $\left(\frac{\chi^2/n}{\chi^2/m}\right)$