Resumé simulation

* Mque $\boxed{Z = F^{\leftarrow}(U)}$ une v a suivant la loi de X

$$F_Z = P(Z \leq z) = P(F^{\leftarrow}(U) \leq z)$$

$$= P(U \leq F(z))$$

$F^{\leftarrow}(U) = z \iff U \leq F(z)$

$$= F_U(F(z))$$

$$= F(z) \quad \text{car } F(z) \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ Z et X ~~suit~~ la même loi

* Mque si F est bijective alors $F^{\leftarrow} = F^{-1}$

soit $q \in]0,1[\ : \exists! x \in \mathbb{R} / F(x) = q$

$$y > x \Rightarrow F(y) > F(x) = q$$

$$z < x \Rightarrow F(z) < F(x) = q$$

$$F^{\leftarrow}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq q\} = \inf A_q$$

$$F^{-1}(q) = x = F^{\leftarrow}(q)$$

* Mque $\forall x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$
on a $F(x) \geq y \iff x \geq F^{-1}(y)$

$$F(x) \geq y \Rightarrow x \in A_y \Rightarrow x \geq \inf A_y$$

$$x \geq F^{\leftarrow}(y)$$

$$x \geq F^{\leftarrow}(y) \Rightarrow F(x) \geq F(F^{\leftarrow}(y))$$

F est croissante $\geq y$

* Exemple sur la méthode de l'inverse :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta) \qquad \theta > 0$$

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - e^{-\theta x} \iff x = \frac{-\log(1-y)}{\theta} \quad y \in]0,1[$$

$$Z = -\frac{1}{\theta} \log(1-y) \quad y \in]0,1[$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta)$$

on peut remplacer $1 - U$ par $V \rightsquigarrow U(]0,1[)$

$$T = -\frac{1}{\theta} \log V$$

Scanné avec CamScanner

Simulation exacte de lois :

Déf 1 :

X v.a.r de fct de répartition F

$$F^{\leftarrow} :]0,1[\longmapsto \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq y\} = q_y^F$$

$F^{\leftarrow}$ s'appelle l'inverse généralisé de F

à gauche de F

Fonction quantile

Proposition :

1 - F est bij $\Rightarrow F^{\leftarrow} = F^{-1}$ (inverse classique)

2 - $F^{\leftarrow}$ est croissante

3 - $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0,1[$, on a :

$$\boxed{F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{\leftarrow}(y)}$$

Corollaire :

X v.a.r de fct de répartition F. $\boxed{Z = F^{\leftarrow}(U)}$

si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$

X et Z ont la même loi

Preuve à apprendre :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(F^{\leftarrow}(U) \leq z) = P(U \leq F(z))$$
$$\underset{F(z) \in [0,1]}{=} F_U(F(z))$$
$$= F(z)$$

$\Rightarrow X$ et Z suivent la même loi.

$$F_U(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leq 0 \\ v & \text{si } v \in]0,1] \\ 1 & \text{si } v \geq 1 \end{cases}$$

Algo :

1_ Tirer U ($\rightsquigarrow \mathcal{U}(]0,1[)$)

2_ Posons $Z = F^{\leftarrow}(U)$

Exemple 1 :

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta) \quad \theta > 0$

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - e^{-\theta x} \iff e^{-\theta x} = 1 - y \quad y \in]0,1[$$

$$-\theta x = \log(1-y)$$

$$\iff x = -\frac{1}{\theta}\log(1-y)$$

$$-\frac{1}{\theta}\log(1-U) = Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta)$$

a) En remarquant que

$$1 - U \rightsquigarrow \mathcal{U}(]0,1[)$$

$$T = -\frac{1}{\theta}\log V \quad \text{où } V \rightsquigarrow \mathcal{U}(]0,1[)$$

$$T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta)$$

Lemme : $q \in]0,1[\quad F(F^{\leftarrow}(q)) \geq q$

Méthode de rejet.

D

f et g deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ tq

$$f(x) \leq M g(x) \qquad M \text{ cst} > 0$$

on considère $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes, telle que :

- les U_n $(n \geq 1)$ sont v.a.r. i.i.d $\sim \mathcal{U}(]0,1[)$
- les X_n $(n\geq 1)$ sont des v.a.r. (à val dans $\mathbb{R}^d$) i.i.d de densité g

$$\boxed{T = \inf \left\{ k \geq 1 \,/\, \frac{f(X_k)}{M g(X_k)} \geq U_k \right\}}$$

$$\boxed{Y = X_T}$$

P :

Alors :

- $\boxed{T}$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de param $\boxed{\frac{1}{M}}$
- Y a pour densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$
- T et Y sont indep

Algo de rejet :

1. Tirer u et x jusqu'à $u \leq \dfrac{f(x)}{M g(x)}$
2. Posons $y = x$ (dernier appel)

$\longrightarrow$ On a besoin de savoir simuler une v.a de densité g, tq $f(x) \leq M g(x)$ pour simuler une v.a Y de densité f

---

Théorème : "Box Muller

Soit U et V deux v.a.r. indep $\sim \mathcal{U}(]0,1[)$

Posons $\boxed{X = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V)}$ $\boxed{Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)}$

$\Rightarrow$ $T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tq : $T \sim \mathcal{N}_2(0_{\mathbb{R}^2}, I_{2\times 2})$

(c'à'd : X et Y sont indep, $\boxed{X \text{ (resp } Y) \sim \mathcal{N}(0,1)}$)