① ML

VI) Estimation sous contrainte et autres tests de Fisher.

1) Estimation des moindres carrés contraints ou MCC

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

$\forall\ t = 1, \dots, T$

$\Rightarrow \boxed{Y = X\beta + \varepsilon}$

~~Après~~

on souhaite estimer le vecteur des paramètres β sous contraintes linéaires

Exemples

(1) $\beta_1 = 0 \xrightarrow[\text{matricielle}]{\text{écriture}} (0\ 1\ 0\ \dots\ 0) \cdot \beta = 0$

(2) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② ML

3) : $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 6 \\ 2\beta_1 - \beta_3 = 9 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Dans le cas général une contrainte linéaire s'écrit comme suit : $\boxed{R.\beta = r}$

dimension

Avec : • R = une matrice $(q \times k)$ M_{qk}

• β = Vecteur des paramètres à estimer $(K \times 1)$.

• r = vecteur $(q \times 1)$

• q = nbr de contraintes prises en compte.

• R et r sont connus.

• $Rang(R) = q < K$.

$\Rightarrow$ pas de contraintes redondantes.

③ ML

- **Définition**

On appelle estimateur des moindre carré contraints (ou MCC) la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ \text{s.c. : } R.\beta = r \end{cases}$$

Cette solution est l'estimateur des moindre carrés contraints par $R.\beta = r$ qu'on note : $\boxed{\hat{\beta}_{MCC}}$

et est égal à : $\cancel{\hat{\beta}_{MCC} \quad \hat{\beta}_{MCC} = (X'X)^{-1}R'}$

$$\boxed{\hat{\beta}_{MCC} = \hat{\beta}_{MCO} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\hat{\beta}_{MCO} - r)}$$

Démonstration : voir lien.

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}.X'.Y.$$

④ HL

2) Test de l'hypothèse linéaire générale :

* $H_0 : R.\beta = r$ contre $H_1 : R.\beta \neq r$.

- Théorème (admis) :

Sous H_0 vraie :

$$F_c = \frac{(SCR_c - SCR_{NC})/q}{SCR_{NC}/(T-K)} \rightsquigarrow F_\alpha(q, T-K)$$

Avec :

$SCR_c = SCR_{H_0}$ = SCR du modèle contraint

$SCR_{NC} = SCR_{H_1}$ = SCR du modèle non contraint

- Règle de décision

. $F_c \leq F_t = F_\alpha(q, T-k)$ alors H_0 est vraie

⇒ on retient le modèle avec contrainte.

- Si $F_c > F_t$ alors H_1 est vraie

⇒ on rejette le modèle sous contrainte.

(5) ML

3) Test de stabilité ou test de Chow :

Ce test permet de savoir si un modèle est stable ou non sur une période donnée.

Un modèle instable a des coeffs qui varient durant la période considérée.

Le test de Chow se construit comme un test de Fisher.

- modèle initial : $t = 1, \ldots, T$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = X\beta + \varepsilon}$$

- modèle 1 (M1) : $t = 1, \ldots, T_1$

$$Y_t = \beta_0' + \beta_1' x_{1t} + \cdots + \beta_k' x_{kt} + u_t \Rightarrow \boxed{Y = X\beta' + U}$$

- modèle 2 (M2) : $t = 1, \ldots, T_2$

$$Y_t = \beta_0'' + \beta_1'' x_{1t} + \cdots + \beta_k'' x_{kt} + v_t \Rightarrow \boxed{Y = X\beta'' + V}$$

⑥ ML

avec $T = T_1 + T_2$

- Hypothèses du test :

$\underbrace{H_0 : \beta' = \beta'' = \beta}$ contre $\underbrace{H_1 : \beta' \neq \beta'' \neq \beta}$

Le modèle est stable au cours de la période étudiée.

Le modèle est instable au cours de la période étudiée.

⇓

$SCR_C = SCR_{H_0}$

contraint → C

$= SCR$ du modèle initial estimé sur toute la période

⇓

$SCR_{NC} = SCR_{H_1}$

non contraint → NC

$= \underbrace{SCR_{T1}}_{T_1 - k} + \underbrace{SCR_{T2}}_{T_2 - k}$

- Statistique et loi :

$$F_c = \frac{(SCR_c - SCR_{NC})/k}{SCR_{NC}/(\underbrace{T_1+T_2}_{=T} - 2k)}$$

$\rightsquigarrow F_\alpha(k, T-2k)$

(7) II.L

• Règle de décision :

- Si $F_c \leq F_t = F_\alpha(K, T-2k)$ alors H_0 est vraie
  ⟹ le modèle est stable au cours de la période considérée.

- Si $F_c > F_t$ alors H_1 est vraie
  ⟹ le modèle est instable.

• Remarques

1) Composition des matrices :

$$X'X = \begin{pmatrix} T & \Sigma x_{1t} & \Sigma x_{2t} & \cdots & \Sigma x_{kt} \\ \vdots & \Sigma x_{1t}^2 & \Sigma x_{1t}x_{2t} & \cdots & \Sigma x_{1t}x_{kt} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \cdots & \Sigma x_{kt}^2 \end{pmatrix}$$

8) RL

$$X'Y = \begin{pmatrix} \Sigma y_t \\ \Sigma x_{1t} y_t \\ | \\ \Sigma x_{kt} y_t \end{pmatrix}$$

2) Utilisation des variables indicatrices :

Il peut s'avérer important dans certaines spécifications d'un modèle de tenir compte de l'effet de variables qualitatives sur la variable endogène.

Exemple : le genre d'individu Homme/Femme

la nature de l'entr public/priv

Ces facteurs qualitatifs sont mesurés par des variables indicatrices appelés aussi variables muettes ou variables dummy.

Ce sont des variables explicatives particulières qui ne prennent que des valeurs 0 ou 1.