Chap I : La notion de stationnarité

I) Définition :

Pour étudier la stationnarité d'une série chronologique, il faut tout d'abord, étudier ses caractéristiques stochastiques càd ses moments d'ordre 1 et 2, E, var, et cov. Si ces caractéristiques se trouvent modifiés dans le temps alors la série est considérée comme non stationnaire. En revanche, lorsque le processus stochastique est invariant dans le temps alors la série chronologique est qualifiée de stationnaire. Par définition, un processus $\{y_t\}$ est stationnaire lorsque ses moments d'ordre 1 et 2 sont indépendants du temps.

- $\{y_t\}$ est stationnaire si :
  * $E(y_t) = \text{constante} = \mu = E(y_{t-k})$ $\forall t$
  * $Var(y_t) = \text{constante} = \gamma_0 = Var(y_{t-k})$
  * $cov(y_t, y_{t-k}) = cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k$ dépend du décalage temporel k

Exemple de processus stationnaire : terme d'erreur $\{u_t\}$:

* $E(u_t) = 0$ $\forall t$
* $V(u_t) = \sigma^2$ $\forall t$ (constante)
* $cov(u_t, u_{t-k}) = 0$ $\forall t \neq s$

$\Rightarrow$ (u_t) est processus stationnaire il s'agit d'un bruit blanc (white noise) (gaussien) $\Rightarrow u_t \sim N(0, \sigma^2)$

- si les 3 conditions précédentes de stationnaire sont vérifiées alors le processus stationnaire est qualifié au sens faible
- si de plus la loi de proba jointe de la série est invariante dans le temps : $f(y_1, y_2 \ldots y_T) = f(y_{1+k}, y_{k+2}, \ldots y_{T+k})$ alors la série est qualifiée de stationnaire au sens strict / fort.

avec f : densité de proba.

à partir de ces propriétés on peut conclure les coeff d'autocorrélation notés, ρ_k et calculés comme suit :

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Va(y_t)\, Va(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Ex dlice :

On considère le modèle suivant $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_t$ $\forall t = 1 \ldots T$ avec $\{a_t\}$ une séquence de variables aléatoires non corrélées

$E(a_t) = 0$ et $V(a_t) = \sigma^2$

le processus $\{Z_t\}$ est-il stationnaire ? justifie la réponse

Réponse :

$E(Z_t) = E(\beta_0 + \beta_1 t + a_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \underbrace{E(a_t)}_{0}$

$E(Z_t) = \beta_0 + \beta_1 t$ dépend du temps

$\Rightarrow \{Z_t\}$ est un processus non stationnaire.

II) Estimation des caractéristiques stochastiques d'un processus stationnaire :

Généralement les moments d'ordre 1 et 2 d'une série temporelle sont inconnus, on les estime par les moments empiriques calculés à partir de l'échantillon $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$:

* $\underbrace{E(y_t)}_{\text{de pop}} = \mu \Rightarrow \underbrace{\hat{\mu}}_{\text{d'éch}} = \frac{1}{T}\sum^{T} y_t = \bar{y}$: empirique

* $V(y_t) = \gamma_0 \Rightarrow \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T}\sum^{T}(y_t - \bar{y})^2$

* $cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k \Rightarrow \hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum^{T-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})$

* $\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum (y_t - \bar{y})^2}$

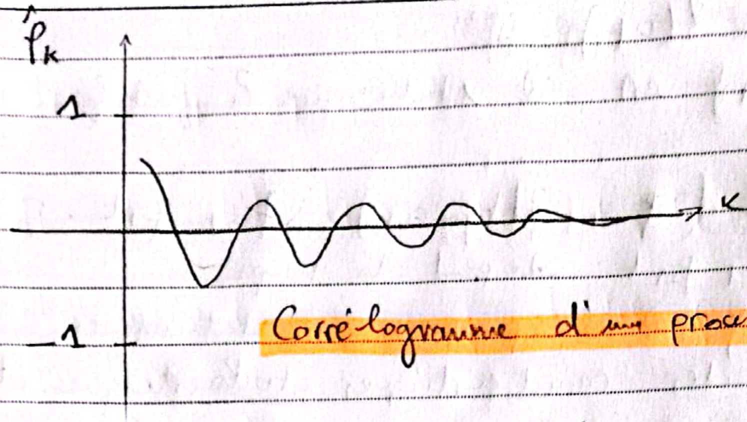
empirique calculé de l'éch : estimé.

→ si $\hat{\rho}_k = 0 \Rightarrow$ cela veut dire qu'on a absence d'autocorrélation entre y_t et y_{t+k}.

→ La représentation des auto-corrélations empiriques en fct de plusieurs décalages k permet de définir d'une manière graphique la nature du processus en question (étudié). cette représentation graphique est appelée : Corrélogramme

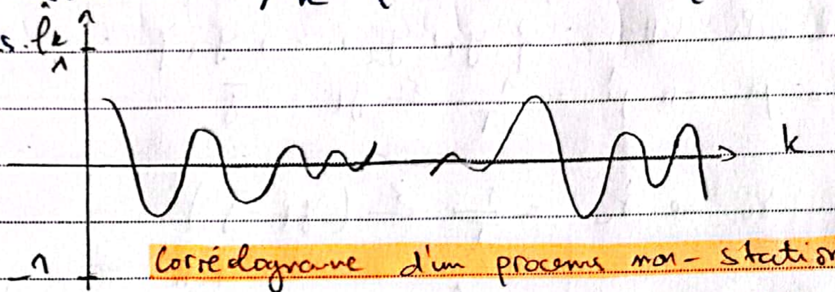
Généralement, le corrélogramme n'inclue qu'un nbre limité d'autocorrélation empirique de décalage k qui ne dépasse pas $\frac{T}{4}$ $\left(k \leq \frac{T}{4}\right)$

– Si un processus est stationnaire alors son évolution subit un amortissement au cours du temps, celui se traduit par une décroissance rapide des coeffs de corrélation ρ_k.



Corrélogramme d'un processus stationnaire

→ En revanche un processus non-stationnaire peut avoir une raisonnance (réapparition) à une période plus éloignée de sorte que des vals élevées de $\hat{\rho}_k$ peuvent exister pour des délais assez lointains.



Corrélogramme d'un processus non-stationnaire

→ Les processus non-stationnaire ne sont pas intéressants sur le plan prévisionnel par conséquent lorsqu'on étudie une série chronologique la 1ère opération à effectuer consiste à bien étudier la stationnarité de la série càd la décroissance rapide des autocorrélations empiriques.