Modèles Linéaires
Chapitre 2: Régression Linéaire Multiple

Pr. Mokhtar KOUKI

Université de Carthage (ESSAI)
mokhtar.kouki@essai.ucar.tn

Novembre 2021

Contenu

1. Représentation, Hypothèses et Estimation par MCO
2. Estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO)
3. Propriétés des estimateurs
4. Propriétés des variables normales multidimensionnelles
5. Analyse de la variance et indicateurs de qualité de modèle
6. Tests d'hypothèse
7. Exercice
8. Tests basés sur la SCR : Modèle contraint vs Modèle non contraint
9. Exercice 2

On rappelle qu'un modèle de régression linéaire multiple est défini comme suit :

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, \;\; i = 1, 2, \cdots, n \quad (1)$$

avec

- Y : La variable endogène (expliquée)
- $X_1, X_2, \cdots, X_k$: k variables explicatives (exogènes)
- $\alpha, \beta_1, \cdots \beta_k$: des paramètres à estimer

L'écriture de l'équation précédente pour toutes les observations donne :

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 x_{21} + \cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\ \vdots \\ Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_2 X_{2n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_n \end{cases}$$

On pose :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} ; \theta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} ; Z = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'écriture matricielle du modèle de régression linéaire multiple devient :

$$Y = Z\theta + \varepsilon \quad (4)$$

avec Z et ε vérifient les hypothèses suivantes :

1. H_1 : $E(\varepsilon) = 0$
2. H_2 : $V(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$ (homoskédasticité et absence de corrélation des termes d'erreur
3. H_3 : La matrice Z est de plein rang (absence de colinéarité, les variables explicatives sont linéairement indépendantes)
4. H_4 : X et ε sont orthogonaux ($E(X\varepsilon') = 0$)

Les estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) sont définis par :

$$\widehat{\theta} = \arg \underset{\theta}{Min} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = (Y - Z\theta)' (Y - Z\theta) \tag{5}$$

Les conditions nécessaires de premier ordre sont :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\partial \alpha} &= 0 \\
\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\partial \beta_1} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{\partial \beta_k} &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\widehat{\varepsilon}_i &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} X_{ki}\widehat{\varepsilon}_i &= 0
\end{aligned}$$

avec

$$\widehat{\varepsilon}_i = Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \widehat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki}$$

Les conditions nécessaires de premières ordres peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$Z'(Y - Z\widehat{\theta}) = 0$$

Sachant que Z est de pelin rang, l'estimateur de θ par la méthode MCO est donné par la relation :

Les conditions nécessaires de premières ordres peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$Z'(Y - Z\widehat{\theta}) = 0$$

Sachant que Z est de pelin rang, l'estimateur de θ par la méthode MCO est donné par la relation :

$$\widehat{\theta} = \left(Z'Z\right)^{-1} Z'Y$$

Observation :

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \widehat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki}\right) = 0$$

Les conditions nécessaires de premières ordres peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$Z'(Y - Z\widehat{\theta}) = 0$$

Sachant que Z est de pelin rang, l'estimateur de θ par la méthode MCO est donné par la relation :

$$\widehat{\theta} = \left(Z'Z\right)^{-1} Z'Y$$

Observation :

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}_1 X_{1i} - \widehat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k X_{ki}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \widehat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \cdots - \widehat{\beta}_k \bar{X}_k \tag{6}$$

La substitution de $\widehat{\alpha}$ par son expression dans $\widehat{\varepsilon}$ et les autres conditions nécessaires de premier ordre permet d'écrire les CN1 en fonction des variables contrées :

$$\widehat{\varepsilon}_i = y_i - \widehat{\beta}_1 x_{1i} - \widehat{\beta}_2 x_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k x_{ki}$$

La substitution de $\widehat{\alpha}$ par son expression dans $\widehat{\varepsilon}$ et les autres conditions nécessaires de premier ordre permet d'écrire les CN1 en fonction des variables contrées :

$$\widehat{\varepsilon}_i = y_i - \widehat{\beta}_1 x_{1i} - \widehat{\beta}_2 x_{2i} - \cdots - \widehat{\beta}_k x_{ki}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\widehat{\varepsilon}_i &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ki}\widehat{\varepsilon}_i &= 0
\end{aligned}$$

avec $y_i = Y_i - \bar{Y}$ et $x_{li} = X_{li} - \bar{X}_l$, $\text{pour} l = 1, \cdots, k$

Si on considère x la matrice des données centrées, les CN1 peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$x'(y - x\beta)x'\widehat{\varepsilon} = x'(y - x\beta) = 0$$

Si on considère x la matrice des données centrées, les CN1 peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$x'(y - x\beta)x'\widehat{\varepsilon} = x'(y - x\beta) = 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \left(x'x\right)^{-1} x'y \\
\widehat{\alpha} &= \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \widehat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \cdots - \widehat{\beta}_k \bar{X}_k \\
&= \bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta}
\end{aligned}$$

Et $\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \cdots, \bar{X}_k)$ et $\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\beta}_k \end{pmatrix}$

Estimateurs sans biais

On a :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \left(x'x\right)^{-1}x'y = \left(x'x\right)^{-1}x'(x\beta+\varepsilon)\\ &= \beta+\left(x'x\right)^{-1}x'\varepsilon\end{aligned}$$

Estimateurs sans biais

On a :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \left(x'x\right)^{-1}x'y = \left(x'x\right)^{-1}x'(x\beta+\varepsilon)\\ &= \beta + \left(x'x\right)^{-1}x'\varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$E\left(\widehat{\beta}\right) = \beta + \left(x'x\right)^{-1}x'E(\varepsilon) = \beta$$

et

$$E\left(\widehat{\alpha}\right) = E\left(\bar{Y} - \bar{X}\widehat{\beta}\right) = E\left(\alpha + \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon} - \bar{X}\widehat{\beta}\right) = \alpha$$

Estimateurs sans biais

On a :

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \left(x'x\right)^{-1}x'y = \left(x'x\right)^{-1}x'(x\beta+\varepsilon)\\ &= \beta+\left(x'x\right)^{-1}x'\varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$E\left(\widehat{\beta}\right)=\beta+\left(x'x\right)^{-1}x'E(\varepsilon)=\beta$$

et

$$E\left(\widehat{\alpha}\right)=E\left(\bar{Y}-\bar{X}\widehat{\beta}\right)=E\left(\alpha+\bar{X}\beta+\bar{\varepsilon}-\bar{X}\widehat{\beta}\right)=\alpha$$

Conclusion : $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ sont, respectivement, des estimateurs sans biais de β et α

Calcul des variances

$$V\left(\widehat{\beta}\right) = V\left(\beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon\right) = \left(x'x\right)^{-1} x' V(\varepsilon) x \left(x'x\right)^{-1}$$

Calcul des variances

$$\begin{aligned}
V\left(\widehat{\beta}\right) &= V\left(\beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon\right) = \left(x'x\right)^{-1} x' V(\varepsilon) x \left(x'x\right)^{-1} \\
&= \left(x'x\right)^{-1} x'\sigma^2 I x \left(x'x\right)^{-1} = \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1} \\
V(\widehat{\alpha}) &= V\left(\alpha + \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon} - \bar{X}\widehat{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Calcul des variances

$$\begin{aligned}
V\left(\widehat{\beta}\right) &= V\left(\beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon\right) = \left(x'x\right)^{-1} x' V(\varepsilon) x \left(x'x\right)^{-1} \\
&= \left(x'x\right)^{-1} x'\sigma^2 I x \left(x'x\right)^{-1} = \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1} \\
V(\widehat{\alpha}) &= V\left(\alpha + \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon} - \bar{X}\widehat{\beta}\right) \\
&= V(\bar{\varepsilon}) + \bar{X} V(\widehat{\beta}) \bar{X}' = \left\{\frac{1}{n} + \bar{X}(x'x)^{-1}\bar{X}'\right\} \sigma^2
\end{aligned}$$

Estimateurs sans biais de σ^2

On a :

$$\widehat{\varepsilon} = Y - Z\hat{\theta} = Y - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'Y = \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] Y = M_Z Y$$

avec $M_Z = I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'$

La matrice M_Z est une matrice symétrique, idempotente et $M_Z Z = 0$.

En effet :

$$\begin{aligned} M_Z' &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right]' = I - \left[Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right]' \\ &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] = M_Z \end{aligned}$$

Estimateurs sans biais de σ^2

On a :

$$\widehat{\varepsilon} = Y - Z\hat{\theta} = Y - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'Y = \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] Y = M_Z Y$$

avec $M_Z = I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'$

La matrice M_Z est une matrice symétrique, idempotente et $M_Z Z = 0$.

En effet :

$$\begin{aligned} M_Z' &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right]' = I - \left[Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right]' \\ &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] = M_Z \\ M_Z Z &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] Z = Z - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'Z = Z - Z = 0 \end{aligned}$$

Estimateurs sans biais de σ^2

On a :

$$\widehat{\varepsilon} = Y - Z\hat{\theta} = Y - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'Y = \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] Y = M_Z Y$$

avec $M_Z = I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'$

La matrice M_Z est une matrice symétrique, idempotente et $M_Z Z = 0$.

En effet :

$$\begin{aligned}
M_Z' &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right]' = I - \left[Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right]' \\
&= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] = M_Z \\
M_Z Z &= \left[I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right] Z = Z - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'Z = Z - Z = 0 \\
M_Z^2 &= M_Z\left(I - Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right) = M_Z - M_Z * Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z' = M_Z
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} &= M_Z Y = M_Z(Z\theta + \varepsilon) = M_Z \varepsilon \\
SCR &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2 = \widehat{\varepsilon}' \widehat{\varepsilon} = \varepsilon' M_X \varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon} &= M_Z Y = M_Z(Z\theta + \varepsilon) = M_Z\varepsilon \\ SCR &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2 = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \varepsilon' M_X \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}\right) &= E\left(\varepsilon' M_Z \varepsilon\right) = E\left(\text{trace}\left(\varepsilon' M_Z \varepsilon\right)\right) = E\left(\text{trace}\left(M_Z \varepsilon\varepsilon'\right)\right) \\ &= \text{trace}\left(E\left(\varepsilon\varepsilon'\right) M_Z\right) = \text{trace}\left(\sigma^2 I \times M_Z\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} &= M_Z Y = M_Z(Z\theta + \varepsilon) = M_Z\varepsilon \\
SCR &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2 = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \varepsilon' M_X \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E\left(\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}\right) &= E\left(\varepsilon' M_Z \varepsilon\right) = E\left(\text{trace}\left(\varepsilon' M_Z \varepsilon\right)\right) = E\left(\text{trace}\left(M_Z \varepsilon\varepsilon'\right)\right) \\
&= \text{trace}\left(E\left(\varepsilon\varepsilon'\right) M_Z\right) = \text{trace}\left(\sigma^2 I \times M_Z\right) \\
&= \sigma^2 \,\text{trace}\left(M_Z\right) = \sigma^2 \left(\text{trace}(I) - \text{trace}\left(Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right)\right)
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon} &= M_Z Y = M_Z(Z\theta + \varepsilon) = M_Z\varepsilon \\
SCR &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2 = \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} = \varepsilon' M_X \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E\left(\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}\right) &= E\left(\varepsilon' M_Z \varepsilon\right) = E\left(\text{trace}\left(\varepsilon' M_Z \varepsilon\right)\right) = E\left(\text{trace}\left(M_Z \varepsilon\varepsilon'\right)\right) \\
&= \text{trace}\left(E\left(\varepsilon\varepsilon'\right) M_Z\right) = \text{trace}\left(\sigma^2 I \times M_Z\right) \\
&= \sigma^2\, \text{trace}\left(M_Z\right) = \sigma^2 \left(\text{trace}(I) - \text{trace}\left(Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\right)\right) \\
&= \sigma^2\left(\text{trace}\left(I_n\right) - \text{trace}\left(I_{k+1}\right)\right) = \sigma^2(n - (k+1))
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SCR}{n-(k+1)} \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2$$

Lemme

On considère X un vecteur de variables aléatoires normales centrées et réduites. On a les propriétés suivantes :

i. $V = AX + B \rightsquigarrow N(B, AA')$
ii. *Si M est une matrice idempotente* $Q = X'MX \rightsquigarrow \chi^2(trace(M))$
iii. *Soient $V = AX + B$ et $W = CX + D$. Les deux variables V et W sont indépendantes si et seulement si $AC' = 0$*

Lemme

On considère X un vecteur de variables aléatoires normales centrées et réduites. On a les propriétés suivantes :

i. $V = AX + B \rightsquigarrow N(B, AA')$
ii. *Si M est une matrice idempotente* $Q = X'MX \rightsquigarrow \chi^2(trace(M))$
iii. *Soient $V = AX + B$ et $W = CX + D$. Les deux variables V et W sont indépendantes si et seulement si $AC' = 0$*

Ce qui implique que si $T \rightsquigarrow N(m, V)$ (distribution non dégénérée)

$$Q = (T - m)' V^{-1} (T - m) \rightsquigarrow \chi^2(dim(T))$$

Ainsi, sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur ($\varepsilon \rightsquigarrow N(0, \sigma^2 I)$),

$$\widehat{\beta} \;=\; \beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

Ainsi, sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur ($\varepsilon \rightsquigarrow N(0, \sigma^2 I)$),

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right) \\
\frac{SCR}{\sigma^2} &= \frac{\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{\left(M_Z\varepsilon\right)'\left(M_Z\varepsilon\right)}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z' M_Z \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z M_Z \bar{\varepsilon}}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur $(\varepsilon \rightsquigarrow N(0, \sigma^2 I))$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right) \\
\frac{SCR}{\sigma^2} &= \frac{\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{\left(M_Z\varepsilon\right)'\left(M_Z\varepsilon\right)}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z' M_Z \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z M_Z \bar{\varepsilon}}{\sigma^2} \\
&= \frac{\varepsilon' M_Z^2 \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z \varepsilon}{\sigma^2} = \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)' M_Z \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur $(\varepsilon \rightsquigarrow N(0, \sigma^2 I)$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \beta + \left(x'x\right)^{-1} x'\varepsilon \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right) \\
\frac{SCR}{\sigma^2} &= \frac{\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}}{\sigma^2} = \frac{(M_Z\varepsilon)'(M_Z\varepsilon)}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z' M_Z \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z M_Z \bar{\varepsilon}}{\sigma^2} \\
&= \frac{\varepsilon' M_Z^2 \varepsilon}{\sigma^2} = \frac{\varepsilon' M_Z \varepsilon}{\sigma^2} = \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)' M_Z \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Sachant que $\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \rightsquigarrow N(0, I$ et M_Z idempotente de trace égale à $n - (k+1)$,

$$\frac{SCR}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n - (k+1))$$

Exercise 1

Sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur, montrez que $\widehat{\theta}$ et $\widehat{\varepsilon}$ sont 2 v.a.r indépendantes.

On a les deux relation suivantes :

$$Y_i \quad = \quad \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} + \widehat{\varepsilon}_i = \widehat{Y}_i + \widehat{\varepsilon}$$

On a les deux relation suivantes :

$$\begin{aligned} Y_i &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} + \widehat{\varepsilon}_i = \widehat{Y}_i + \widehat{\varepsilon} \\ \bar{Y} &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} = \bar{\widehat{Y}}_i \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$Y_i - \bar{Y} = \widehat{Y}_i - \bar{Y} + \widehat{\varepsilon}$$

On a les deux relation suivantes :

$$\begin{aligned} Y_i &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} + \widehat{\varepsilon}_i = \widehat{Y}_i + \widehat{\varepsilon} \\ \bar{Y} &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} = \bar{\widehat{Y}}_i \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= \widehat{Y}_i - \bar{Y} + \widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{\beta}_1 \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right) + \widehat{\beta}_2 \left(X_{2i} - \bar{X}_2\right) + \cdots + \widehat{\beta}_K \left(X_{ki} - \bar{X}_k\right) + \widehat{\varepsilon} \end{aligned}$$

On a les deux relation suivantes :

$$\begin{aligned} Y_i &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} + \widehat{\varepsilon}_i = \widehat{Y}_i + \widehat{\varepsilon} \\ \bar{Y} &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} = \bar{\widehat{Y}}_i \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= \widehat{Y}_i - \bar{Y} + \widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{\beta}_1 \left(X_{1i} - \bar{X}_1 \right) + \widehat{\beta}_2 \left(X_{2i} - \bar{X}_2 \right) + \cdots + \widehat{\beta}_K \left(X_{ki} - \bar{X}_k \right) + \widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{\beta}_1 x_{1i} + \widehat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_k x_{ki} + \widehat{\varepsilon} \end{aligned}$$

On a les deux relation suivantes :

$$\begin{aligned} Y_i &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} + \widehat{\varepsilon}_i = \widehat{Y}_i + \widehat{\varepsilon} \\ \bar{Y} &= \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}_1 X_{1i} + \widehat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_2 X_{ki} = \bar{\widehat{Y}}_i \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= \widehat{Y}_i - \bar{Y} + \widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{\beta}_1 \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right) + \widehat{\beta}_2 \left(X_{2i} - \bar{X}_2\right) + \cdots + \widehat{\beta}_K \left(X_{ki} - \bar{X}_k\right) + \widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{\beta}_1 x_{1i} + \widehat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \widehat{\beta}_k x_{ki} + \widehat{\varepsilon} \end{aligned}$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$y = x\widehat{\beta} + \widehat{\varepsilon} = \widehat{y} + \widehat{\varepsilon}$$

Et l'équation de la variance est donnée par :

$$SCT = y'y \quad = \quad (\widehat{y} + \widehat{\varepsilon})' (\widehat{y} + \widehat{\varepsilon}) = \widehat{y}' \widehat{y} + \widehat{\varepsilon}' \widehat{\varepsilon} + 2\widehat{y}' \widehat{\varepsilon}$$

Et l'équation de la variance est donnée par :

$$
\begin{aligned}
SCT = y'y &= (\widehat{y} + \widehat{\varepsilon})' (\widehat{y} + \widehat{\varepsilon}) = \widehat{y}'\widehat{y} + \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} + 2\widehat{y}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y} + \widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} + 2\widehat{\beta}'x'\widehat{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Et l'équation de la variance est donnée par :

$$\begin{aligned} SCT = y'y &= (\widehat{y}+\widehat{\varepsilon})'(\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}) = \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{y}'\widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{\beta}'x'\widehat{\varepsilon} \\ &= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \end{aligned}$$

Et l'équation de la variance est donnée par :

$$\begin{aligned}
SCT = y'y &= (\widehat{y}+\widehat{\varepsilon})'(\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}) = \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{y}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{\beta}'x'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{\beta}'x'x\widehat{\beta}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \\
&= SCE + SCR
\end{aligned}$$

Et l'équation de la variance est donnée par :

$$\begin{aligned}
SCT = y'y &= (\widehat{y}+\widehat{\varepsilon})'(\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}) = \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{y}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{\beta}'x'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{\beta}'x'x\widehat{\beta}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \\
&= SCE + SCR
\end{aligned}$$

Observation :

Sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur :
$\widehat{\beta} \rightsquigarrow N(\beta, \sigma^2(x'x)^{-1})$

Et l'équation de la variance est donnée par :

$$
\begin{aligned}
SCT = y'y &= (\widehat{y}+\widehat{\varepsilon})'(\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}) = \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{y}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon}+2\widehat{\beta}'x'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{y}'\widehat{y}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \\
&= \widehat{\beta}'x'x\widehat{\beta}+\widehat{\varepsilon}'\widehat{\varepsilon} \\
&= SCE + SCR
\end{aligned}
$$

Observation :

Sous l'hypothèse de la normalité des termes d'erreur :
$\widehat{\beta} \rightsquigarrow N(\beta, \sigma^2(x'x)^{-1})$
et par conséquent

$$Q = \left(\widehat{\beta}-\beta\right)' \frac{x'x}{\sigma^2} \left(\widehat{\beta}-\beta\right) \rightsquigarrow \chi^2(k)$$

Et sous l'hypothèse que $\beta = 0$, on :

$$Q = \widehat{\beta}' \frac{x'x}{\sigma^2} \widehat{\beta} = \frac{SCE}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(k)$$

Et sous l'hypothèse que $\beta = 0$, on :

$$Q = \widehat{\beta}' \frac{x'x}{\sigma^2} \widehat{\beta} = \frac{SCE}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(k)$$

Et le tableau d'analyse de la variance est définie comme suit :

Source	Somme des carrés	degrè de liberté (ddl)	Carré moyen
Modèle	SCE	k	$\frac{SCE}{k}$
Résidu	SCR	$n-k-1$	$\frac{SCR}{n-k-1}$
Total	$SCT = SCE + SCR$	$n-1$	

Le coefficient de détermination linéaire : R^2

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

Le coefficient de détermination linéaire : R^2

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT - SCR}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

Observation : Le coefficient de détermination linéaire croit avec le nombre de variables explicatives

Considérons les deux modèles suivants :

$$\begin{aligned} M1 : Y &= Z_1\theta_1 + \varepsilon \\ M2 : Y &= Z_1\omega_1 + Z_2\omega_2 + \eta \end{aligned}$$

Z_1 et Z_2 deux matrices (de données) et ε et η les termes d'erreur des deux modèles.

Les résidus des deux modèles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon} &= Y - Z_1\widehat{\theta}_1 = Y - \widehat{Y} \\ \widehat{\eta} &= Y - Z_1\widehat{\omega}_1 - Z_2\widehat{\omega}_2 = Y - \widetilde{Y}\end{aligned}$$

Les résidus des deux modèles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon} &= Y - Z_1\widehat{\theta}_1 = Y - \widehat{Y}\\ \widehat{\eta} &= Y - Z_1\widehat{\omega}_1 - Z_2\widehat{\omega}_2 = Y - \widetilde{Y}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widehat{\varepsilon} - \widehat{\eta} = \widetilde{Y} - \widehat{Y}$$

ou bien

$$\widehat{\varepsilon} = \widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}$$

Les résidus des deux modèles sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon} &= Y - Z_1\widehat{\theta}_1 = Y - \widehat{Y} \\ \widehat{\eta} &= Y - Z_1\widehat{\omega}_1 - Z_2\widehat{\omega}_2 = Y - \widetilde{Y} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widehat{\varepsilon} - \widehat{\eta} = \widetilde{Y} - \widehat{Y}$$

ou bien

$$\widehat{\varepsilon} = \widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}$$

avec

$$\widetilde{Y} - \widehat{Y} = Z_1(\widehat{\omega}_1 - \widehat{\theta}_1) + Z_2\widehat{\omega}_2$$

$$\text{et } Z_1'\widehat{\eta} = 0, Z_2'\widehat{\eta} = 0(\text{ CN1})$$

Et la somme des carrés des résidus du modèle M_1

$$SCR_1 = \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)$$

Et la somme des carrés des résidus du modèle M_1

$$
\begin{aligned}
SCR_1 &= \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) \\
&= \widehat{\eta}'\widehat{\eta} + \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) + 2\left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \widehat{\eta}
\end{aligned}
$$

Et la somme des carrés des résidus du modèle M_1

$$\begin{aligned}
SCR_1 &= \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) \\
&= \widehat{\eta}'\widehat{\eta} + \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) + 2\left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \widehat{\eta} \\
&= SCR_2 + \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) > SCR_2
\end{aligned}$$

Et la somme des carrés des résidus du modèle M_1

$$\begin{aligned} SCR_1 &= \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widehat{\eta} + \widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) \\ &= \widehat{\eta}'\widehat{\eta} + \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) + 2\left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \widehat{\eta} \\ &= SCR_2 + \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right)' \left(\widetilde{Y} - \widehat{Y}\right) > SCR_2 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que :

$$R_2^2 = 1 - \frac{SCR_2}{SCT} > 1 - \frac{SCR_2}{SCT} = R_1^2$$

D'où l'idée d'introduire d'autres indicateurs de **comparaison** entre modèles :

D'où l'idée d'introduire d'autres indicateurs de **comparaison** entre modèles :

Le Coefficient de détermination ajusté : $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SCR}{n-(k+1)}}{\frac{SCT}{n-1}} =$$

D'où l'idée d'introduire d'autres indicateurs de **comparaison** entre modèles :

Le Coefficient de détermination ajusté : $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SCR}{n-(k+1)}}{\frac{SCT}{n-1}} = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-(k+1)}$$

Le critère d'information d'Akaike : AIC

D'où l'idée d'introduire d'autres indicateurs de **comparaison** entre modèles :

Le Coefficient de détermination ajusté : $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SCR}{n-(k+1)}}{\frac{SCT}{n-1}} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-(k+1)}$$

Le critère d'information d'Akaike : AIC

$$AIC = log\left(\frac{SCR}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

D'où l'idée d'introduire d'autres indicateurs de **comparaison** entre modèles :

Le Coefficient de détermination ajusté : $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SCR}{n-(k+1)}}{\frac{SCT}{n-1}} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-(k+1)}$$

Le critère d'information d'Akaike : AIC

$$AIC = log\left(\frac{SCR}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

Indication : Un modèle M_1 est préféré à un modèle M_2 si $\bar{R}_1^2 > \bar{R}_2^2$ et/ou $AIC_1 < AIC_2$

Théorème

On considère R *une matrice de* plein rang *de dimension* $J \times k$ et r *un vecteur de dimension* $J \times 1$, *sous les hypothèse* $H_1 - H_5$, *la statistique du test de l'hypothèse* $H_0 : R\beta = r$ *est définie par :*

Théorème

On considère R *une matrice de* plein rang *de dimension* $J \times k$ *et* r *un vecteur de dimension* $J \times 1$, *sous les hypothèse* $H_1 - H_5$, *la statistique du test de l'hypothèse* $H_0 : R\beta = r$ *est définie par :*

$$F = \frac{(R\widehat{\beta} - r)' \left[R\left(x'x\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\widehat{\beta} - r)}{J \times \widehat{\sigma}^2} \rightsquigarrow F\left(J, n - (k+1)\right)$$

Démonstration.

Par ailleurs, on sait que :

$$\widehat{\beta} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

Théorème

On considère R *une matrice de* plein rang *de dimension* $J \times k$ *et* r *un vecteur de dimension* $J \times 1$*, sous les hypothèse* $H_1 - H_5$*, la statistique du test de l'hypothèse* $H_0 : R\beta = r$ *est définie par :*

$$F = \frac{(R\widehat{\beta} - r)' \left[R\left(x'x\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\widehat{\beta} - r)}{J \times \widehat{\sigma}^2} \rightsquigarrow F\left(J, n - (k+1)\right)$$

Démonstration.

Par ailleurs, on sait que :

$$\widehat{\beta} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right) \text{ ET } R\widehat{\beta} \rightsquigarrow N\left(R\beta, \sigma^2 R\left(x'x\right)^{-1} R'\right)$$

$\square$

Démonstration.

car
$E(R\widehat{\beta}) = RE(\widehat{\beta}) = R\beta$ et $V(R\widehat{\beta}) = RV(\widehat{\beta})R' = \sigma^2 R\left(x'x\right)^{-1} R'$

Démonstration.

car

$E(R\widehat{\beta}) = RE(\widehat{\beta}) = R\beta$ et $V(R\widehat{\beta}) = RV(\widehat{\beta})R' = \sigma^2 R\left(x'x\right)^{-1} R'$

Et en utilisation les formes quadratiques de lois normales (FQLN) on obtient :

Démonstration.

car
$E(R\widehat{\beta}) = RE(\widehat{\beta}) = R\beta$ et $V(R\widehat{\beta}) = RV(\widehat{\beta})R' = \sigma^2 R\left(x'x\right)^{-1} R'$
Et en utilisation les formes quadratiques de lois normales (FQLN) on obtient :

$$W = \frac{(R\widehat{\beta} - R\beta)' \left[R\left(x'x\right)^{-1} R'\right]^{-1} (R\widehat{\beta} - R\beta)}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(rang(R) = J)$$

Démonstration.

car

$E(R\widehat{\beta}) = RE(\widehat{\beta}) = R\beta$ et $V(R\widehat{\beta}) = RV(\widehat{\beta})R' = \sigma^2 R\left(x'x\right)^{-1} R'$

Et en utilisation les formes quadratiques de lois normales (FQLN) on obtient :

$$W = \frac{(R\widehat{\beta} - R\beta)'\left[R\left(x'x\right)^{-1} R'\right]^{-1}(R\widehat{\beta} - R\beta)}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(rang(R) = J)$$

et sous $H_0 : R\beta = r$

$$W = \frac{(R\widehat{\beta} - r)'\left[R\left(x'x\right)^{-1} R'\right]^{-1}(R\widehat{\beta} - r)}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(J)$$

□

Démonstration.

On sait par ailleurs que : $\frac{SCR}{\sigma^2} = (n-(k+1))\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi(n-(k+1))$

Démonstration.

On sait par ailleurs que : $\frac{SCR}{\sigma^2} = (n-(k+1))\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi(n-(k+1))$

$$F = \frac{(R\widehat{\beta}-r)'\left[R\left(x'x\right)^{-1}R'\right]^{-1}(R\widehat{\beta}-r)}{J\sigma^2\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

Démonstration.

On sait par ailleurs que : $\frac{SCR}{\sigma^2} = (n-(k+1))\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi(n-(k+1))$

$$\begin{aligned} F &= \frac{(R\widehat{\beta}-r)'\left[R\,(x'x)^{-1}\,R'\right]^{-1}(R\widehat{\beta}-r)}{J\sigma^2\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{\frac{\chi^2(J)}{J}}{\frac{\chi^2(n-(k+1))}{n-(k+1)}} \rightsquigarrow F(J, n-(k+1)) \end{aligned}$$

Démonstration.

On sait par ailleurs que : $\frac{SCR}{\sigma^2} = (n-(k+1))\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi(n-(k+1))$

$$F = \frac{(R\widehat{\beta}-r)'\left[R\,(x'x)^{-1}\,R'\right]^{-1}(R\widehat{\beta}-r)}{J\sigma^2\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{\frac{\chi^2(J)}{J}}{\frac{\chi^2(n-(k+1))}{n-(k+1)}} \rightsquigarrow F(J, n-(k+1))$$

$\square$

Cas particulier : $R = I$ et $r = 0$ ou $H_0 : \beta = 0$

Démonstration.

On sait par ailleurs que : $\frac{SCR}{\sigma^2} = (n-(k+1))\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi(n-(k+1))$

$$\begin{aligned} F &= \frac{(R\widehat{\beta}-r)'\left[R\,(x'x)^{-1}\,R'\right]^{-1}(R\widehat{\beta}-r)}{J\sigma^2\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{\frac{\chi^2(J)}{J}}{\frac{\chi^2(n-(k+1))}{n-(k+1)}} \rightsquigarrow F(J, n-(k+1)) \end{aligned}$$

□

Cas particulier : $R = I$ et $r = 0$ ou $H_0 : \beta = 0$

$$F = \frac{\widehat{\beta}'x'x\widehat{\beta}}{k\widehat{\sigma}^2} = \frac{SCE/k}{SCR/n-k+1)} \rightsquigarrow F(k, n-(k+1))$$

Exercice

On considère la relation entre le logarithme de l'investissement (Y), le taux d'intérêt (X_1), le taux d'inflation (X_2) et le logarithme du produit intérieur brut (X_3) :

$$Y_i = \alpha + \beta_1 \ X_{1i} + \beta_2 \ X_{2i} + \beta_3 \ X_{3i} + \epsilon_i, \ \ i = 1, 2, \cdots, 44$$

Exercice

On considère la relation entre le logarithme de l'investissement (Y), le taux d'intérêt (X_1), le taux d'inflation (X_2) et le logarithme du produit intérieur brut (X_3) :

$$Y_i = \alpha + \beta_1\ X_{1i} + \beta_2\ X_{2i} + \beta_3\ X_{3i} + \epsilon_i,\ \ i = 1, 2, \cdots, 44$$

où ϵ_i, sont des termes aléatoires iid selon la loi normale centrée et de variance σ^2. On dispose des statistiques suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum y_i^2 &= 135; \sum x_{1i}^2 = 206; \sum x_{2i}^2 = 442,\ \sum x_{3i}^2 = 1619,\\
\sum y_i x_{1i} &= -112\ ,\ \sum y_i x_{2i} = 70\ ,\sum y_i x_{3i} = 135\\
\sum x_{1i} x_{2i} &= 65\ \sum x_{1i} x_{3i} = -309 \text{ et } \sum x_{2i} x_{3i} = -624
\end{aligned}$$

Q1. Déterminer l'expression de l'estimateur de $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ par la méthode mco :

Q1. Déterminer l'expression de l'estimateur de $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ par la méthode mco :
On considère x la matrice des données centrées et y le vecteur de la variable explicative (centrée).

Q1. Déterminer l'expression de l'estimateur de $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ par la méthode mco :

On considère x la matrice des données centrées et y le vecteur de la variable explicative (centrée). L'estimateur par la méthode mco vérifie :

$$x'(y - x\widehat{\beta}) = 0 \Longrightarrow \widehat{\beta} = \left(x'x\right)^{-1} x'y$$

avec

$$x'x = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{1i}x_{3i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{1i}x_{3i} & \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{pmatrix}$$

Q1. Déterminer l'expression de l'estimateur de $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ par la méthode mco :

On considère x la matrice des données centrées et y le vecteur de la variable explicative (centrée). L'estimateur par la méthode mco vérifie :

$$x'(y - x\widehat{\beta}) = 0 \Longrightarrow \widehat{\beta} = \left(x'x\right)^{-1} x'y$$

avec

$$x'x = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{1i}x_{3i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{1i}x_{3i} & \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{pmatrix} \text{ et } x'y = \begin{pmatrix} \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{2i} \end{pmatrix}$$

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

- $\beta_1 < 0$: Si le taux d'intérêt augmente, l'investissement diminue

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

- $\beta_1 < 0$: Si le taux d'intérêt augmente, l'investissement diminue
- $\beta_2 > 0$: Si le taux d'inflation augmente, l'investissement augmente

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

- $\beta_1 < 0$: Si le taux d'intérêt augmente, l'investissement diminue
- $\beta_2 > 0$: Si le taux d'inflation augmente, l'investissement augmente
- $\beta_3 > 0$: Si le PIB augmente, l'investissement augmente

Q3. Calculer les valeurs des estimateurs par la méthode mco des paramètres β_1, β_2 et β_3.

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

- $\beta_1 < 0$: Si le taux d'intérêt augmente, l'investissement diminue
- $\beta_2 > 0$: Si le taux d'inflation augmente, l'investissement augmente
- $\beta_3 > 0$: Si le PIB augmente, l'investissement augmente

Q3. Calculer les valeurs des estimateurs par la méthode mco des paramètres β_1, β_2 et β_3.

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 & 65 & -309 \\ 65 & 442 & -624 \\ -309 & -624 & 1619 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix}$$

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

- $\beta_1 < 0$: Si le taux d'intérêt augmente, l'investissement diminue
- $\beta_2 > 0$: Si le taux d'inflation augmente, l'investissement augmente
- $\beta_3 > 0$: Si le PIB augmente, l'investissement augmente

Q3. Calculer les valeurs des estimateurs par la méthode mco des paramètres β_1, β_2 et β_3.

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 & 65 & -309 \\ 65 & 442 & -624 \\ -309 & -624 & 1619 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix}$$

$$= 10^{-3} \begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix} =$$

Q2. Quels sont les signes attendus des paramètres β_1, β_2 et β_3.

- $\beta_1 < 0$: Si le taux d'intérêt augmente, l'investissement diminue
- $\beta_2 > 0$: Si le taux d'inflation augmente, l'investissement augmente
- $\beta_3 > 0$: Si le PIB augmente, l'investissement augmente

Q3. Calculer les valeurs des estimateurs par la méthode mco des paramètres β_1, β_2 et β_3.

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 & 65 & -309 \\ 65 & 442 & -624 \\ -309 & -624 & 1619 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix}$$

$$= 10^{-3} \begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.403 \\ 0.499 \\ 0.199 \end{pmatrix}$$

Q4. Calculer la somme des carrés expliqués par le modèle

Q4. Calculer la somme des carrés expliqués par le modèle

$$SCE = \widehat{\beta}' x' y = \begin{pmatrix} -0.403 \\ 0.499 \\ 0.199 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix}$$

Q4. Calculer la somme des carrés expliqués par le modèle

$$SCE = \widehat{\beta}' x' y = \begin{pmatrix} -0.403 \\ 0.499 \\ 0.199 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix} = 106.931$$

Q4. Calculer la somme des carrés expliqués par le modèle

$$SCE = \widehat{\beta}'x'y = \begin{pmatrix} -0.403 \\ 0.499 \\ 0.199 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix} = 106.931$$

et $SCT = \sum y_i^2 = 135$;
$SCR = SCT - SCE = 135 - 106.931 = 28.069$
Le tableau d'analyse de la variance est défini comme suit :

Q4. Calculer la somme des carrés expliqués par le modèle

$$SCE = \widehat{\beta}'x'y = \begin{pmatrix} -0.403 \\ 0.499 \\ 0.199 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} -112 \\ 70 \\ 135 \end{pmatrix} = 106.931$$

et $SCT = \sum y_i^2 = 135$;
$SCR = SCT - SCE = 135 - 106.931 = 28.069$
Le tableau d'analyse de la variance est défini comme suit :

Source	Somme des carrés	degrè de liberté (ddl)	Carré moyen
Modèle	106.931	3	35.644
Résidu	28.069	40	0.702
Total	135	43	

Q5. Tester, au seuil de 5%, la significativité globale du modèle. On considère le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$.

Q5. Tester, au seuil de 5%, la significativité globale du modèle.
On considère le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$.
La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{\frac{SCE}{k}}{\frac{SCR}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{SCE}{3}}{\frac{SCR}{40}} = \frac{35.644}{0.702} = 50.774 >> F^{5\%}(3, 40)$$

Conclusion : Le modèle est globalement significatif.

Q5. Tester, au seuil de 5%, la significativité globale du modèle.
On considère le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$.
La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{\frac{SCE}{k}}{\frac{SCR}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{SCE}{3}}{\frac{SCR}{40}} = \frac{35.644}{0.702} = 50.774 >> F^{5\%}(3, 40)$$

Conclusion : Le modèle est globalement significatif.

Q6. Calculer le coefficient de détermination linéaire. Commenter

Q5. Tester, au seuil de 5%, la significativité globale du modèle.
On considère le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$.
La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{\frac{SCE}{k}}{\frac{SCR}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{SCE}{3}}{\frac{SCR}{40}} = \frac{35.644}{0.702} = 50.774 >> F^{5\%}(3, 40)$$

Conclusion : Le modèle est globalement significatif.

Q6. Calculer le coefficient de détermination linéaire. Commenter

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{106.931}{135} = 0.792$$

Q5. Tester, au seuil de 5%, la significativité globale du modèle.
On considère le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$.
La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{\frac{SCE}{k}}{\frac{SCR}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{SCE}{3}}{\frac{SCR}{40}} = \frac{35.644}{0.702} = 50.774 >> F^{5\%}(3,40)$$

Conclusion : Le modèle est globalement significatif.

Q6. Calculer le coefficient de détermination linéaire. Commenter

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{106.931}{135} = 0.792$$

Les trois variables taux d'intérêt, taux d'inflation et PIB expliquent 79.2% des variations de l'investissement.

Q5. Tester, au seuil de 5%, la significativité globale du modèle.
On considère le test de l'hypothèse $H_0 : \beta = 0$.
La statistique du test est définie par :

$$F = \frac{\frac{SCE}{k}}{\frac{SCR}{n-(k+1)}} = \frac{\frac{SCE}{3}}{\frac{SCR}{40}} = \frac{35.644}{0.702} = 50.774 >> F^{5\%}(3,40)$$

Conclusion : Le modèle est globalement significatif.

Q6. Calculer le coefficient de détermination linéaire. Commenter

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{106.931}{135} = 0.792$$

Les trois variables taux d'intérêt, taux d'inflation et PIB expliquent 79.2% des variations de l'investissement.

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) = \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} =$$

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) = \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} = 0.702 * 10^{-3} \begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix}$$

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\begin{aligned}\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) &= \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} = 0.702 * 10^{-3}\begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \\ &= 10^{-3}\begin{pmatrix} 5.265 & 1.404 & 1.544 \\ 1.404 & 3.861 & 1.755 \\ 1.544 & 1.755 & 1.404 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Test $H_0 : \beta_l = 0$ pour $l = 1, 2, 3$.

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\begin{aligned}\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) &= \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} = 0.702 * 10^{-3}\begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \\ &= 10^{-3}\begin{pmatrix} 5.265 & 1.404 & 1.544 \\ 1.404 & 3.861 & 1.755 \\ 1.544 & 1.755 & 1.404 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Test $H_0 : \beta_l = 0$ pour $l = 1, 2, 3$.

$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_1)} = -5.554$,

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\begin{aligned}\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) &= \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} = 0.702 * 10^{-3}\begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \\ &= 10^{-3}\begin{pmatrix} 5.265 & 1.404 & 1.544 \\ 1.404 & 3.861 & 1.755 \\ 1.544 & 1.755 & 1.404 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Test $H_0 : \beta_l = 0$ pour $l = 1, 2, 3$.

$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_1)} = -5.554$, $t_{\widehat{\beta}_2} = \frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_2)} = 8.030$

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\begin{aligned}\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) &= \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} = 0.702 * 10^{-3}\begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \\ &= 10^{-3}\begin{pmatrix} 5.265 & 1.404 & 1.544 \\ 1.404 & 3.861 & 1.755 \\ 1.544 & 1.755 & 1.404 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Test $H_0 : \beta_l = 0$ pour $l = 1, 2, 3$.

$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_1)} = -5.554$, $t_{\widehat{\beta}_2} = \frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_2)} = 8.030$ et $t_{\widehat{\beta}_3} = \frac{\widehat{\beta}_3}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_3)} = 5.311$

Q7. Calculer l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des paramètres β_1, β_2 et β_3.et tester, au seuil de 5%, la significativité individuelle de ces paramètres.

$$\begin{aligned}
\widehat{V}\left(\widehat{\beta}\right) &= \widehat{\sigma}^2(x'x)^{-1} = 0.702 * 10^{-3}\begin{pmatrix} 7.5 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 5.5 & 2.5 \\ 2.2 & 2.5 & 2.0 \end{pmatrix} \\
&= 10^{-3}\begin{pmatrix} 5.265 & 1.404 & 1.544 \\ 1.404 & 3.861 & 1.755 \\ 1.544 & 1.755 & 1.404 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Test $H_0 : \beta_l = 0$ pour $l = 1, 2, 3$.
$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_1)} = -5.554$, $t_{\widehat{\beta}_2} = \frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_2)} = 8.030$ et $t_{\widehat{\beta}_3} = \frac{\widehat{\beta}_3}{\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}_3)} = 5.311$
Les $t_{\widehat{\beta}_l}$ sont en valeurs absolues supérieures à $t^{0.975}(40) = 2.329$.
Tous ces coefficients sont significativement différents de zéro.

Q8. Tester, au seuil de 5%, l'hypothèse : $H_0 : \begin{cases} \beta_1 = -\beta_2 \\ \beta_3 = 0.25 \end{cases}$

Q8. Tester, au seuil de 5%, l'hypothèse : $H_0 : \begin{cases} \beta_1 = -\beta_2 \\ \beta_3 = 0.25 \end{cases}$

C'est une hypothèse de la forme $R\beta = r$ avec :

Q8. Tester, au seuil de 5%, l'hypothèse : $H_0 : \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -\beta_2 \\ \beta_3 = 0.25 \end{array} \right.$

C'est une hypothèse de la forme $R\beta = r$ avec : $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ et $R\widehat{\beta} - r = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 - 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.096 \\ -0.051 \end{pmatrix}$.

Q8. Tester, au seuil de 5%, l'hypothèse : $H_0 : \begin{cases} \beta_1 = -\beta_2 \\ \beta_3 = 0.25 \end{cases}$

C'est une hypothèse de la forme $R\beta = r$ avec : $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ et $R\widehat{\beta} - r = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 - 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.096 \\ -0.051 \end{pmatrix}$.

la statistique du test de cette hypothèse est définie par (sachant que $rang(R) = 2$) :

Q8. Tester, au seuil de 5%, l'hypothèse : $H_0 : \begin{cases} \beta_1 = -\beta_2 \\ \beta_3 = 0.25 \end{cases}$

C'est une hypothèse de la forme $R\beta = r$ avec : $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ et $R\widehat{\beta} - r = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 - 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.096 \\ -0.051 \end{pmatrix}$.

la statistique du test de cette hypothèse est définie par (sachant que $rang(R) = 2$) :

$$F = \frac{(R\widehat{\beta} - r)' \left[R\,(x'x)^{-1}\,R'\right]^{-1} (R\widehat{\beta} - r)}{2\widehat{\sigma}^2} \rightsquigarrow F(2, 40)$$

$$R\left(x'x\right)^{-1}R' = 10^{-3}\begin{pmatrix} 17 & 4.7 \\ 4.7 & 2 \end{pmatrix},\ \text{et } \widehat{\sigma}^2 = 0.702$$

Et $F = 6.5 * 10^{-5}$;

$$R\left(x'x\right)^{-1}R' = 10^{-3}\begin{pmatrix} 17 & 4.7 \\ 4.7 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \widehat{\sigma}^2 = 0.702$$

Et $F = 6.5 * 10^{-5}$;

On accepte l'hypothèse H_0

Q9. On suppose que les investisseurs ne tiennent compte **que du taux d'intérêt réel**. Donner le modèle correspondent à cette stratégie ; puis estimer ce modèle.

Q9. On suppose que les investisseurs ne tiennent compte **que du taux d'intérêt réel**. Donner le modèle correspondent à cette stratégie ; puis estimer ce modèle.
Le modèle devient :

$$Y_i = \eta + \lambda(X_{1i} - X_{2i}) + \epsilon_i$$

On pose $Z = X_1 - X_2$.

Q9. On suppose que les investisseurs ne tiennent compte **que du taux d'intérêt réel**. Donner le modèle correspondent à cette stratégie ; puis estimer ce modèle.
Le modèle devient :

$$Y_i = \eta + \lambda(X_{1i} - X_{2i}) + \epsilon_i$$

On pose $Z = X_1 - X_2$.
L'estimateur de λ par la méthode mco est défini par :

Q9. On suppose que les investisseurs ne tiennent compte **que du taux d'intérêt réel**. Donner le modèle correspondent à cette stratégie ; puis estimer ce modèle.
Le modèle devient :

$$Y_i = \eta + \lambda(X_{1i} - X_{2i}) + \epsilon_i$$

On pose $Z = X_1 - X_2$.
L'estimateur de λ par la méthode mco est défini par :

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$

Q9. On suppose que les investisseurs ne tiennent compte **que du taux d'intérêt réel**. Donner le modèle correspondent à cette stratégie ; puis estimer ce modèle.
Le modèle devient :

$$Y_i = \eta + \lambda(X_{1i} - X_{2i}) + \epsilon_i$$

On pose $Z = X_1 - X_2$.
L'estimateur de λ par la méthode mco est défini par :

$$\widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i}}{\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + \sum x_{2i}^2 - 2\sum x_{1i} x_{2i}}$$

Q9. On suppose que les investisseurs ne tiennent compte **que du taux d'intérêt réel**. Donner le modèle correspondent à cette stratégie ; puis estimer ce modèle.
Le modèle devient :

$$Y_i = \eta + \lambda(X_{1i} - X_{2i}) + \epsilon_i$$

On pose $Z = X_1 - X_2$.
L'estimateur de λ par la méthode mco est défini par :

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^n y_i x_{2i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + \sum x_{2i}^2 - 2\sum x_{1i} x_{2i}} \\ &= \frac{-112 - 70}{206 + 442 - 2 * 65} = -0.351\end{aligned}$$

L'estimateur par mco sous la contrainte $H_0 : R\beta = r$ est défini par (avec $rang(R) = J$) :

$$\begin{cases} \underset{\beta,\lambda}{Min} \varepsilon'\varepsilon = (y - x\beta)' (y - x\beta) \\ \text{sc. } R\beta = r \end{cases}$$

L'estimateur par mco sous la contrainte $H_0 : R\beta = r$ est défini par (avec $rang(R) = J$) :

$$\begin{cases} \underset{\beta,\lambda}{Min} \varepsilon'\varepsilon = (y - x\beta)' (y - x\beta) \\ \text{sc. } R\beta = r \end{cases}$$

On considère λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à $R\beta = r$.

L'estimateur par mco sous la contrainte $H_0 : R\beta = r$ est défini par (avec $rang(R) = J$) :

$$\begin{cases} \underset{\beta,\lambda}{Min} \varepsilon'\varepsilon = (y - x\beta)'(y - x\beta) \\ \text{sc. } R\beta = r \end{cases}$$

On considère λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à $R\beta = r$.
Le Lagrangien du programme précédent est :

$$\mathcal{L} = (y - x\beta)'(y - x\beta) + 2\lambda'(R\beta - r)$$

L'estimateur par mco sous la contrainte $H_0 : R\beta = r$ est défini par (avec $rang(R) = J$) :

$$\begin{cases} \underset{\beta,\lambda}{Min} \varepsilon'\varepsilon = (y - x\beta)'(y - x\beta) \\ \text{sc. } R\beta = r \end{cases}$$

On considère λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à $R\beta = r$.
Le Lagrangien du programme précédent est :

$$\mathcal{L} = (y - x\beta)'(y - x\beta) + 2\lambda'(R\beta - r)$$

Observation : Le multiplicateur de lagrange est à un coefficient-près : $\gamma = 2\lambda$ pour pourvoir simplifier

Et les CN1 sont définies par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -2x'\left(y - x\widehat{\beta}_c\right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0$$

Et les CN1 sont définies par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \text{-}2x'\left(y - x\widehat{\beta}_c\right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0 \Longrightarrow x'x\widehat{\beta}_c = x'y - R'\widehat{\lambda}$$

Et les CN1 sont définies par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= \text{-}2x' \left(y - x\widehat{\beta}_c \right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0 \Longrightarrow x'x\widehat{\beta}_c = x'y - R'\widehat{\lambda} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= R\widehat{\beta}_c - r = 0
\end{aligned}$$

Et les CN1 sont définies par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= -2x'\left(y - x\widehat{\beta}_c\right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0 \Longrightarrow x'x\widehat{\beta}_c = x'y - R'\widehat{\lambda} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= R\widehat{\beta}_c - r = 0
\end{aligned}$$

La première équation permet d'exprimer $\widehat{\beta}_c$ en fonction de $\widehat{\lambda}$:

$$\widehat{\beta}_c = (x'x)^{-1} x' y - (x'x)^{-1} R'\widehat{\lambda} =$$

Et les CN1 sont définies par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= -2x'\left(y - x\widehat{\beta}_c\right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0 \Longrightarrow x'x\widehat{\beta}_c = x'y - R'\widehat{\lambda} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= R\widehat{\beta}_c - r = 0
\end{aligned}$$

La première équation permet d'exprimer $\widehat{\beta}_c$ en fonction de $\widehat{\lambda}$:

$$\widehat{\beta}_c = \left(x'x\right)^{-1} x'y - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda} = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda}$$

Et les CN1 sont définies par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= \text{-}2x'\left(y - x\widehat{\beta}_c\right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0 \Longrightarrow x'x\widehat{\beta}_c = x'y - R'\widehat{\lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= R\widehat{\beta}_c - r = 0\end{aligned}$$

La première équation permet d'exprimer $\widehat{\beta}_c$ en fonction de $\widehat{\lambda}$:

$$\widehat{\beta}_c = \left(x'x\right)^{-1} x' y - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda} = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda}$$

La substitution dans la deuxième équation permet d'exprimer $\widehat{\lambda}$:

Et les CN1 sont définies par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= -2x'\left(y - x\widehat{\beta}_c\right) + 2R'\widehat{\lambda} = 0 \Longrightarrow x'x\widehat{\beta}_c = x'y - R'\widehat{\lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= R\widehat{\beta}_c - r = 0\end{aligned}$$

La première équation permet d'exprimer $\widehat{\beta}_c$ en fonction de $\widehat{\lambda}$:

$$\widehat{\beta}_c = \left(x'x\right)^{-1} x'y - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda} = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda}$$

La substitution dans la deuxième équation permet d'exprimer $\widehat{\lambda}$:

$$R\widehat{\beta}_c - r = R\left(\widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda}\right) - r = 0$$

Ainsi : :

$$\Longrightarrow R\left(x'x\right)^{-1}R'\widehat{\lambda} = R\widehat{\beta}_{nc} - r$$

Ainsi : :

$$\Longrightarrow R\left(x'x\right)^{-1}R'\widehat{\lambda} = R\widehat{\beta}_{nc} - r$$

Si R est de plein rang :

$$\widehat{\lambda} = \left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \qquad \text{(e1)}$$

Ainsi : :

$$\Longrightarrow R\left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda} = R\widehat{\beta}_{nc} - r$$

Si R est de plein rang :

$$\widehat{\lambda} = \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \qquad \text{(e1)}$$

Et en remplaçant dans l'expression de $\widehat{\beta}_c$, on obtient :

Ainsi : :

$$\Longrightarrow R\left(x'x\right)^{-1} R'\widehat{\lambda} = R\widehat{\beta}_{nc} - r$$

Si R est de plein rang :

$$\widehat{\lambda} = \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \qquad \text{(e1)}$$

Et en remplaçant dans l'expression de $\widehat{\beta}_c$, on obtient :

$$\widehat{\beta}_c = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \qquad \text{(e2)}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\widehat{\beta}_{nc} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

Par ailleurs, on sait que

$$\widehat{\beta}_{nc} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

et par conséquent

$$R\widehat{\beta}_{nc} - r \rightsquigarrow N\left(R\beta - r, \sigma^2 R \left(x'x\right)^{-1} R'\right)$$

Par ailleurs, on sait que

$$\widehat{\beta}_{nc} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

et par conséquent

$$R\widehat{\beta}_{nc} - r \rightsquigarrow N\left(R\beta - r, \sigma^2 R \left(x'x\right)^{-1} R'\right)$$

Et sous $H_0 : R\beta = r$

$$\widehat{\lambda} = \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \rightsquigarrow$$

Par ailleurs, on sait que

$$\widehat{\beta}_{nc} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

et par conséquent

$$R\widehat{\beta}_{nc} - r \rightsquigarrow N\left(R\beta - r, \sigma^2 R \left(x'x\right)^{-1} R'\right)$$

Et sous $H_0 : R\beta = r$

$$\widehat{\lambda} = \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \rightsquigarrow N\left(0, \sigma^2 \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1}\right)$$

Par ailleurs, on sait que

$$\widehat{\beta}_{nc} \rightsquigarrow N\left(\beta, \sigma^2 \left(x'x\right)^{-1}\right)$$

et par conséquent

$$R\widehat{\beta}_{nc} - r \rightsquigarrow N\left(R\beta - r, \sigma^2 R \left(x'x\right)^{-1} R'\right)$$

Et sous $H_0 : R\beta = r$

$$\widehat{\lambda} = \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \rightsquigarrow N\left(0, \sigma^2 \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1}\right)$$

Et en utilisant les formes quadratiques de lois normales :

$$LM = \widehat{\lambda}' \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\} \widehat{\lambda} / \sigma^2 \rightsquigarrow ?$$

Pour cela, détaillant les calculs pour $\sigma^2 LM$:

Pour cela, détaillant les calculs pour $\sigma^2 LM$:

$$\begin{aligned}\sigma^2 LM &= \left[\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)\right]'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}\\ &\times \left[\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)\right]\end{aligned}$$

Pour cela, détaillant les calculs pour $\sigma^2 LM$:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 LM &= \left[\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)\right]'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\} \\
&\times \left[\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)\right] \\
&= \left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\} \\
&\times \left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)
\end{aligned}
$$

Pour cela, détaillant les calculs pour $\sigma^2 LM$:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 LM &= \left[\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)\right]'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\} \\
&\times \left[\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)\right] \\
&= \left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\} \\
&\times \left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right) \\
&= \left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc}-r\right)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$LM = \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(J)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$LM = \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(J)$$

Observation : Ce test est souvent appelé test du multiplicateur de lagrange d'où la notation LM

Calculons maintenant la somme des carrés des résidus pour le modèle contraint.

Calculons maintenant la somme des carrés des résidus pour le modèle contraint. Partant du fait que :

$$\widehat{\beta}_c = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R' \left\{ R \left(x'x\right)^{-1} R' \right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r \right) \qquad \text{(e2)}$$

Calculons maintenant la somme des carrés des résidus pour le modèle contraint. Partant du fait que :

$$\widehat{\beta}_c = \widehat{\beta}_{nc} - (x'x)^{-1} R' \left\{ R (x'x)^{-1} R' \right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r \right) \qquad \text{(e2)}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{y}_c = x\widehat{\beta}_c =$$

Calculons maintenant la somme des carrés des résidus pour le modèle contraint. Partant du fait que :

$$\widehat{\beta}_c = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \qquad \text{(e2)}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\widehat{y}_c \quad = \quad x\widehat{\beta}_c = x \left[\widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right]$$

Calculons maintenant la somme des carrés des résidus pour le modèle contraint. Partant du fait que :

$$\widehat{\beta}_c = \widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \qquad \text{(e2)}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \widehat{y}_c &= x\widehat{\beta}_c = x\left[\widehat{\beta}_{nc} - \left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right] \\ &= x\widehat{\beta}_{nc} - x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R \left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire $\widehat{y}_c$ en fonction de $\widehat{y}_{nc}$:

$$\widehat{y}_c = \widehat{y}_{nc} - x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)$$

Ce qui permet d'écrire $\widehat{y}_c$ en fonction de $\widehat{y}_{nc}$:

$$\widehat{y}_c = \widehat{y}_{nc} - x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)$$

et le vecteur des résidus du modèle contraint :

$$\widehat{\varepsilon}_c \quad = \quad y - \widehat{y}_c =$$

Ce qui permet d'écrire $\widehat{y}_c$ en fonction de $\widehat{y}_{nc}$:

$$\widehat{y}_c = \widehat{y}_{nc} - x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)$$

et le vecteur des résidus du modèle contraint :

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}_c &= y - \widehat{y}_c = y - \widehat{y}_{nc} \\ &+ x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire $\widehat{y}_c$ en fonction de $\widehat{y}_{nc}$:

$$\widehat{y}_c = \widehat{y}_{nc} - x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)$$

et le vecteur des résidus du modèle contraint :

$$\begin{aligned}
\widehat{\varepsilon}_c &= y - \widehat{y}_c = y - \widehat{y}_{nc} \\
&\quad + x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \\
&= \widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)
\end{aligned}$$

Et

$$SCR_c = \widehat{\varepsilon}'_c \widehat{\varepsilon}_c$$

Et

$$\begin{aligned} SCR_c &= \widehat{\varepsilon}'_c \widehat{\varepsilon}_c \\ &= \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1} R' \left\{ R\left(x'x\right)^{-1} R' \right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r \right) \right]' \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
SCR_c &= \widehat{\varepsilon}_c'\widehat{\varepsilon}_c \\
&= \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1}R'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right]' \\
&\times \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1}R'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right]
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
SCR_c &= \widehat{\varepsilon}'_c \widehat{\varepsilon}_c \\
&= \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1} R'\left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right]' \\
&\times \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1} R'\left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right] \\
&= \widehat{\varepsilon}'_{nc}\widehat{\varepsilon}_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)'\left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)
\end{aligned}$$

Et

$$
\begin{aligned}
SCR_c &= \widehat{\varepsilon}_c'\widehat{\varepsilon}_c \\
&= \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1}R'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right]' \\
&\times \left[\widehat{\varepsilon}_{nc} + x\left(x'x\right)^{-1}R'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)\right] \\
&= \widehat{\varepsilon}_{nc}'\widehat{\varepsilon}_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \\
&\quad + 2\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)'\left\{R\left(x'x\right)^{-1}R'\right\}^{-1}R\left(x'x\right)^{-1}x'\widehat{\varepsilon}_{nc}
\end{aligned}
$$

Ainsi (sachant que $x'\widehat{\varepsilon}_{nc} = 0$) :

Ainsi (sachant que $x'\widehat{\varepsilon}_{nc} = 0$) :

$$SCR_c = \widehat{\varepsilon}'_{nc}\widehat{\varepsilon}_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)$$

Ainsi (sachant que $x'\widehat{\varepsilon}_{nc} = 0$) :

$$\begin{aligned} SCR_c &= \widehat{\varepsilon}'_{nc}\widehat{\varepsilon}_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \\ &= SCR_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \end{aligned}$$

Ainsi (sachant que $x'\widehat{\varepsilon}_{nc} = 0$) :

$$\begin{aligned} SCR_c &= \widehat{\varepsilon}'_{nc}\widehat{\varepsilon}_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \\ &= SCR_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{SCR_c - SCR_{nc}}{\sigma^2} =$$

Ainsi (sachant que $x'\widehat{\varepsilon}_{nc} = 0$) :

$$\begin{aligned} SCR_c &= \widehat{\varepsilon}'_{nc}\widehat{\varepsilon}_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \\ &= SCR_{nc} + \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{SCR_c - SCR_{nc}}{\sigma^2} = \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(J)$$

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

$$F = \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{J\widehat{\sigma}^2}$$

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{J\widehat{\sigma}^2} \\
&= \frac{SCR_c - SCR_{nc}}{J\widehat{\sigma}^2}
\end{aligned}
$$

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{J\widehat{\sigma}^2} \\ &= \frac{SCR_c - SCR_{nc}}{J\widehat{\sigma}^2} \\ &= \frac{\left(SCR_c - SCR_{nc}\right) \big/ J}{SCR_{nc} \big/ n - (k+1)} \rightsquigarrow F\left(J, n-(k+1)\right) \end{aligned}$$

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{J\widehat{\sigma}^2} \\ &= \frac{SCR_c - SCR_{nc}}{J\widehat{\sigma}^2} \\ &= \frac{\left(SCR_c - SCR_{nc}\right) \big/ J}{SCR_{nc} \big/ n - (k+1)} \rightsquigarrow F\left(J, n - (k+1)\right) \end{aligned}$$

Cas particulier : $R = I$ **et** $r = 0$ **:**

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{J\widehat{\sigma}^2} \\
&= \frac{SCR_c - SCR_{nc}}{J\widehat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(SCR_c - SCR_{nc}\right) \diagup J}{SCR_{nc} \diagup n - (k+1)} \rightsquigarrow F\left(J, n - (k+1)\right)
\end{aligned}$$

Cas particulier : $R = I$ **et** $r = 0$ **:**$SCR_c = SCT$**,**$J = k$**,** $SCR_c - SCR_{nc} = SCE$, ce qui donne :

Et en reprenant la statistique de Fisher de l'hypothèse $H_0 : R\beta = r$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)' \left\{R\left(x'x\right)^{-1} R'\right\}^{-1} \left(R\widehat{\beta}_{nc} - r\right)}{J\widehat{\sigma}^2} \\
&= \frac{SCR_c - SCR_{nc}}{J\widehat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(SCR_c - SCR_{nc}\right) \big/ J}{SCR_{nc} \big/ n - (k+1)} \rightsquigarrow F\left(J, n - (k+1)\right)
\end{aligned}
$$

Cas particulier : $R = I$ **et** $r = 0$ **:**$SCR_c = SCT$**,**$J = k$**,**
$SCR_c - SCR_{nc} = SCE$, ce qui donne :

$$
F = \frac{SCE \big/ k}{SCR_{nc} \big/ n - (k+1)} \rightsquigarrow F\left(k, n - (k+1)\right)
$$

On considère les trois modèles suivants :

$$\begin{cases} M_1 : Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \epsilon_i, i = 1, 2, \cdots, 24 \\ M_2 : Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_{1i} + \theta_2 X_{2i} + \epsilon_i, i = 1, 2, \cdots, 24 \\ M_3 : Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1i} + \gamma_2 X_{2i} + \gamma_3 X_{3i} + \epsilon_i, i = 1, 2, \cdots, 24 \end{cases}$$

On condispose des données sur les variables centrées :
$\sum x_{1i} y_i = 68$, $\sum x_{2i} y_i = 150$, $\sum x_{3i} y_i = 102$, $\sum y_i^2 = 800$

$$x'x = \begin{pmatrix} 8.691 & 13.134 & 11.128 \\ 13.134 & 30.163 & 22.170 \\ 11.128 & 22.170 & 20.170 \end{pmatrix}$$

$$(x'x)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.415 & -0.065 & -0.158 \\ -0.065 & 0.183 & -0.165 \\ -0.158 & -0.165 & 0.318 \end{pmatrix}$$

Q1. Pour chacun des modèles définis précédemment dresser le tableau d'analyse de la variance, Calculer le coefficient de détermination ajusté et le critère d'information d'Akaike (AIC)

Q2. Lequel des 3 modèles choisir

Q3. Tester de deux manières différentes et au seuil de 5%, l'hypothèse $H_0 : \begin{cases} 2\gamma_1 = \gamma_2 \\ \gamma_1 = -\gamma_3 \end{cases}$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION