ECOLE SUPÉRIEURE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

Méthodes de simulation
2023-2024(P3)
2$^{\text{ème}}$ année

Chapitre 2: Fondements de la Simulation Monte Carlo

Tasnime Hamdeni

February 4, 2024

Sommaire

1- Introduction

1- Introduction

Ce chapitre apporte une réponse (partielle) à comment simule-t-on suivant une loi donnée?

On introduit notamment les principes généraux de la **méthode d'inversion**.

2- Simulation suivant la loi uniforme

2- Simulation suivant la loi uniforme

Comment ça marche?

Un générateur de nombres aléatoires (GNA) uniforme sur $[0, 1]$ est un outil fondamental en informatique, notamment pour la simulation et les algorithmes stochastiques.

2- Simulation suivant la loi uniforme

Comment ça marche?

Un générateur de nombres aléatoires (GNA) uniforme sur $[0, 1]$ est un outil fondamental en informatique, notamment pour la simulation et les algorithmes stochastiques.
Les ordinateurs sont des machines déterministes et ne peuvent pas générer de vrais aléas.

2- Simulation suivant la loi uniforme

Comment ça marche?

Un générateur de nombres aléatoires (GNA) uniforme sur $[0,1]$ est un outil fondamental en informatique, notamment pour la simulation et les algorithmes stochastiques.
Les ordinateurs sont des machines déterministes et ne peuvent pas générer de vrais aléas.
Ainsi, les GNA sont des programmes déterministes qui produisent des séquences de nombres paraissant aléatoires.

Comment ça marche?

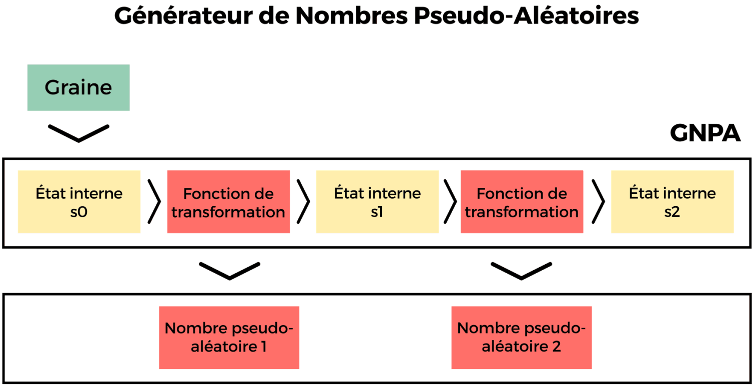
Un générateur de nombres aléatoires (GNA) uniforme sur $[0, 1]$ est un outil fondamental en informatique, notamment pour la simulation et les algorithmes stochastiques.
Les ordinateurs sont des machines déterministes et ne peuvent pas générer de vrais aléas.
Ainsi, les GNA sont des programmes déterministes qui produisent des séquences de nombres paraissant aléatoires.
Ces séquences doivent être **uniformément distribuées** et ne pas montrer de motifs prévisibles pour être considérées comme "suffisamment désordonnées".

2- Simulation suivant la loi uniforme

Comment ça marche?

Un générateur de nombres aléatoires (GNA) uniforme sur $[0, 1]$ est un outil fondamental en informatique, notamment pour la simulation et les algorithmes stochastiques.
Les ordinateurs sont des machines déterministes et ne peuvent pas générer de vrais aléas.
Ainsi, les GNA sont des programmes déterministes qui produisent des séquences de nombres paraissant aléatoires.
Ces séquences doivent être **uniformément distribuées** et ne pas montrer de motifs prévisibles pour être considérées comme "suffisamment désordonnées".
Ces générateurs sont essentiels pour simuler des comportements aléatoires dans divers domaines comme la cryptographie, la modélisation statistique ...

2- Simulation suivant la loi uniforme



2- Simulation suivant la loi uniforme

Définiton: Générateur pseudo-aléatoire

Un générateur de nombres pseudo-aléatoire est un algorithme qui, à partir d'une valeur initiale u_0, appelée graine (seed), et une transformation D, produit une suite $(u_n)_{n\geq 1} = \{D^n(u_0)\}$ dans [0,1]. Pour tout n, les valeurs $u_1, \ldots, u_n$ reproduisent le comportement d'un échantillon i.i.d. de loi uniforme vis-à-vis des tests usuels.

3- Méthode de la fonction inverse

3- Méthode de la fonction inverse

Cette méthode permet, **étant donné un générateur aléatoire uniforme**, de simuler suivant la loi d'une variable aléatoire réelle lorsque l'on est **capable de calculer l'inverse généralisé de sa fonction de répartition**.

3- Méthode de la fonction inverse

Cette méthode permet, **étant donné un générateur aléatoire uniforme**, de simuler suivant la loi d'une variable aléatoire réelle lorsque l'on est **capable de calculer l'inverse généralisé de sa fonction de répartition**.

Définition: Inverse généralisé

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle inverse généralisé (ou fonction quantile) de F, noté F^{-1}, la fonction définie pour tout $u \in [0, 1]$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

Cette méthode permet, **étant donné un générateur aléatoire uniforme**, de simuler suivant la loi d'une variable aléatoire réelle lorsque l'on est **capable de calculer l'inverse généralisé de sa fonction de répartition**.

Définition: Inverse généralisé

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle inverse généralisé (ou fonction quantile) de F, noté F^{-1}, la fonction définie pour tout $u \in [0, 1]$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

Remarque.

L'inverse généralisé ne correspond à l'inverse (au sens bijection) que lorsque F est continue et strictement croissante.

3- Méthode de la fonction inverse

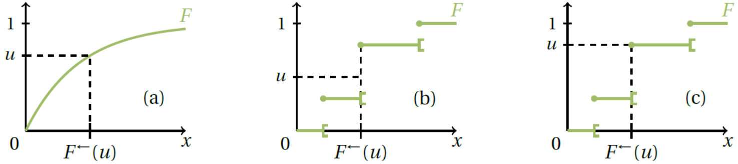


FIGURE 2.1 – Lecture graphique de $F^{\leftarrow}(u)$, *i.e.*, quantile de la loi d'ordre u. (a) L'équation $F(x) = u$ a une unique solution. (b) L'équation $F(x) = u$ n'a pas de solutions. (c) L'équation $F(x) = u$ a une infinité de solutions.

Par construction, l'inverse généralisé est une fonction croissante : pour $0 \leq u \leq v \leq 1$, F étant croissante, on a

$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq v \geq u\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$$

donc

$$F^{-1}(u) \leq F^{-1}(v).$$

3- Méthode de la fonction inverse

Remarque: Mesurabilité de l'inverse généralisé

L'inverse généralisé est donc en particulier mesurable et sa composition avec une variable aléatoire demeure donc une variable aléatoire.

3- Méthode de la fonction inverse

Remarque: Mesurabilité de l'inverse généralisé

L'inverse généralisé est donc en particulier mesurable et sa composition avec une variable aléatoire demeure donc une variable aléatoire.

Lemme: Méthode de la fonction inverse ou méthode d'inversion

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et $U \sim \mathrm{U}([0,1])$. Alors $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire suivant la loi de X.

Remarque: Mesurabilité de l'inverse généralisé

L'inverse généralisé est donc en particulier mesurable et sa composition avec une variable aléatoire demeure donc une variable aléatoire.

Lemme: Méthode de la fonction inverse ou méthode d'inversion

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et $U \sim \mathrm{U}([0,1])$. Alors $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire suivant la loi de X.

Exemple:

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit X une v.a.r définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la loi est donnée par :
$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{4}$.

- Déterminer et tracer la fonction de répartition de X
- Simuler X par la méthode d'inversion

3- Méthode de la fonction inverse

Exemple: Loi discrète

Soit X une variable aléatoire discrète de support $\{x_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*\}$. Notons, pour $k \geq 1$, $p_k = \mathbb{P}[X = x_k]$, $\quad s_0 = 0, \quad$ et $\quad s_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$. Pour tout $u \in [0,1]$, l'inverse généralisé est donné par:

$$F^{-1}(u) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} p_k 1_{\{x_k \leq x\}} \geq u\right\} = \{x_k : s_{k-1} \leq u \leq s_k\}.$$

Alors pour $U \sim \mathrm{U}([0,1])$, la variable aléatoire Z définie ci-dessous suit la même loi que X

$$Z = \begin{cases} x_1 & \text{si } u \in [0, s_1], \\ x_k & \text{si } u \in (s_{k-1}, s_k], \quad k \geq 2. \end{cases}$$

3- Méthode de la fonction inverse

Remarque

En pratique, il suffit donc de trouver, pour une réalisation u suivant la loi U([0, 1]), l'unique indice k tel que $s_{k-1} \leq u \leq s_k$. Ceci est facile à mettre en œuvre lorsque le support est fini mais peut être plus complexe lorsque le support est infini dénombrable.

3- Méthode de la fonction inverse

Remarque

En pratique, il suffit donc de trouver, pour une réalisation u suivant la loi $U([0,1])$, l'unique indice k tel que $s_{k-1} \leq u \leq s_k$. Ceci est facile à mettre en œuvre lorsque le support est fini mais peut être plus complexe lorsque le support est infini dénombrable.

Exercice:

Simuler des variable aléatoires qui suivent la **loi de poisson** en utilisant la méthode de la fonction inverse.

Exemple: Loi exponentielle

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Rappel. La loi exponentielle a pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x \geq 0\}}$ et pour fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donner l'inverse généralisé

3- Méthode de la fonction inverse

Exemple: Loi exponentielle

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Rappel. La loi exponentielle a pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x \geq 0\}}$ et pour fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donner l'inverse généralisé F est bijective (la bijection réciproque et l'inverse généralisé coïncident) et pour tout $u \in [0, 1]$,

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u).$$

Ainsi pour $U \sim U([0, 1])$, $F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim -\frac{1}{\lambda} \ln(U) \sim \mathrm{E}(\lambda)$, car $1 - U$ et U ont même loi sur [0,1].

3- Méthode de la fonction inverse

Exemple: Loi de Weibull

La loi de Weibull est utilisée dans différents domaines (ingénierie, fiabilité, assurances, hydrologie,...). On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Weibull de paramètres $\lambda, k \in \mathbb{R}^*$ lorsque sa fonction de répartition est donnée, pour tout réel $x \geq 0$, par

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right).$$

Donner l'inverse généralisé

3- Méthode de la fonction inverse

Exemple: Loi de Weibull

La loi de Weibull est utilisée dans différents domaines (ingénierie, fiabilité, assurances, hydrologie,...). On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Weibull de paramètres $\lambda, k \in \mathbb{R}^*$ lorsque sa fonction de répartition est donnée, pour tout réel $x \geq 0$, par

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right).$$

Donner l'inverse généralisé Comme pour la loi exponentielle, la fonction de répartition est bijective et

$$F^{-1}(u) = \lambda\left(-\ln(1-u)\right)^{1/k}.$$

Ainsi pour $U \sim U([0,1])$, $\lambda\left(-\ln(U)\right)^{1/k}$ suit une loi de Weibull de paramètres $\lambda, k \in \mathbb{R}^*$.

Homework

Soit X une v.a. discrète qui prend les valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$. On considère la loi de X par: $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.2$, $P(X = 3) = 0.3$ et $P(X = 4) = 0.4$. On souhaite simuler la variable aléatoire discrète.

1. Trouver la fonction de répartition de X.
2. Générer un nombre aléatoire u compris entre 0 et 1.
3. Simuler une réalisation de X. Il s'agit de trouver l'indice j tel que $F(j-1) < u \leq F(j)$ et associer la valeur $X = j$.
4. Simuler plusieurs réalisations de X.
5. Vérifier que la distribution empirique de X correspond à la distribution théorique en traçant un histogramme.