Propriété *Si* $|a| < 1$

$$(1-aL)^{-1}x_t = \frac{x_t}{(1-aL)} = \lim_{j\to\infty}\left(1+aL+a^2L^2+...+a^jL^j\right)x_t$$

Cette dernière propriété est particulièrement utile pour inverser des polynômes d'ordre 1 définis en l'opérateur retard. La démonstration de cette propriété est la suivante. Démontrons que :

$$(1-aL)\lim_{j\to\infty}\left(1+aL+a^2L^2+...+a^jL^j\right)x_t = x_t$$

En développant le terme de gauche, il vient :

$$\lim_{j\to\infty}\left(1-aL+aL-a^2L^2+a^2L^2+..-a^{j-1}L^{j-1}+a^{j-1}L^{j-1}+a^jL^j\right)x_t = \lim_{j\to\infty}\left(1+a^jL^j\right)x_t$$

De là, on montre que sous l'hypothèse $|a| < 1$, on a bien :

$$\lim_{j\to\infty}\left(1+a^jL^j\right)x_t = x_t$$