Lois discrètes du tirage avec remise

Nom	$\mathbf{X}(\Omega)$	**Loi** $(\mathbf{P}(X=k))$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$	**Cas d'utilisation**
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$p^k(1-p)^{1-k}$ $P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$	Expérience aléatoire à <u>deux issues possibles</u> : réussite avec une proba p ou échec avec une proba 1-p (dichotomie)
Loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ $(n-\mathcal{B}(n,p)=\mathcal{B}(n,1-p)$	$\{0,...,n\}$	$\complement_n^k \; p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	<u>Nombre de succès obtenus</u> lors d'une succession de n essais indépendants d'une expérience aléatoire à deux issues possibles : réussite avec une proba p ou échec avec une proba 1-p
Loi géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	<u>Rang d'apparition du premier succès</u> lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles : réussite avec une proba p ou échec avec une proba 1-p
Loi de Pascal $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r,p)$	$\{r,r+1,...\}$	$\complement_{k-1}^{r-1} \; p^r(1-p)^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	<u>Rang d'apparition du r-ième succès</u> lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles: réussite avec une proba p ou échec avec une proba 1-p
Loi Binomiale négative $X \hookrightarrow \mathcal{J}(r,p)$	$\mathbb{N}$	$\complement_{k+r-1}^{k} p^r(1-p)^k$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	<u>Nombre d'échecs précédant le r-ième succès</u> lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles: réussite avec une proba p ou échec avec une proba 1-p
Loi multinomiale $N \hookrightarrow \mathcal{M}(n;p_1,p_2,...,p_m)$ $N=\begin{pmatrix} N_1 \\ .... \\ N_m \end{pmatrix}$ $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$	$\{0,...,n\}^m$ ensemble de $m-$uplets	$P(N=K)=$ $P\begin{pmatrix} N_1=k_1 \\ .... \\ N_m=k_m \end{pmatrix}=$ $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$	$\begin{pmatrix} np_1 \\ .... \\ np_m \end{pmatrix}$	$V(N_i)=$ $np_i(1-p_i)$ et $Cov(N_i,N_j)$ $=-np_ip_j$	Succession de <u>n essais identiques et indépendants</u> d'une expérience aléatoire à <u>m issues possibles</u>; l'issue i ayant la probabilité p_i d'être réalisée On s'intéresse au vecteur aléatoire formé par le <u>nombre de réalisations de chaque issue.</u>

Lois discrètes du tirage sans remise

Nom	$\mathbf{X}(\Omega)$	**Loi** $(\mathbf{P}(X=k))$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$	**Cas d'utilisation**
Loi hypergéométrique $X \hookrightarrow \mathcal{H}y(N,n,p)$	$\left\{ \begin{array}{l} \sup\{0, n-(1-p)N\}, \\ \text{...............}, \inf\{n, pN\} \end{array} \right\}$	$\dfrac{C_{pN}^{k} C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_{N}^{n}}$	np	$np(1-p)\frac{(N-n)}{N-1}$	<u>Nombre de succès obtenus</u> lors d'une succession de n tirages aléatoires sans remise (dépendants) avec une dichotomie (p= proba de succès)
Loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k}}{k!}$	λ	λ	<u>Nombre d'apparitions</u> d'un évènement <u>rare</u> durant un intervalle de temps ou d'espace fixe

Lois usuelles continues

Loi	**Densité** $f(x)$	**Fonction de répartition** $F(x)$	$\mathbf{E}(X)$ $\mathbf{V}(X)$
Loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$	$\frac{1}{b-a} \; \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$ $\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \lambda > 0$ $\mathcal{E}(\lambda) = \gamma(1, \lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \; \mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$ ex: temps d'attente avant l'arrivée d'un $\frac{1}{\lambda^2}$ phénomène.
Loi de Laplace-Gauss ou loi normale $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$	$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ tabulée pour le cas centré réduit	μ la combinaison de v.a. normales suit une σ^2 normale.
Loi Log-normale $X \hookrightarrow L\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $(\ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2 \; \mathbb{1}_{\{x>0\}}$	$X = e^Y$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $\left(e^{\sigma^2} - 1\right)\left(e^{2\mu} + \sigma^2\right)$
Loi Gamma $X \hookrightarrow \gamma(a, \lambda)$	$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \; \mathbb{1}_{\{x>0\}}$	$1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ...\right)$	$\frac{a}{\lambda}$ $\gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$ $\frac{a}{\lambda^2}$
Loi Bêta $X \hookrightarrow \beta(a, b)$ $\frac{\gamma(a,1)}{\gamma(b,1)} = \beta(a, b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \; \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$		$\frac{a}{a+b}$ $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Loi de Cauchy $X \hookrightarrow \mathcal{C}(\theta)$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x-\theta)^2} \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R}\}}$		

Lois usuelles continues (suite)

Loi	**Densité** $f(x)$	$\mathbf{E}(X)$ $\mathbf{V}(X)$	**Construction**
Loi de khi-deux à n degrés de liberté $X \hookrightarrow \chi^2_{(n)}$	$\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\ \mathbb{1}_{\{x\geqslant 0\}}$	n $2n$	C'est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites élevées au carré utilisée souvent pour les variances. $\chi^2_{(n)} = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Loi de Student à n degrés de liberté $X \hookrightarrow \mathcal{T}(n)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)n^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}$	0 car symétrique $\frac{n}{n-2}\quad n>2$	C'est la loi du quotient d'une normale centrée réduite et de la racine d'une khi-deux divisée par son nombre de degrés de liberté; les deux variables aléatoires étant indépendantes $\left(\mathcal{T}(n) = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2/n}}\right)$ utilisée souvent pour les v.a. réduites
Loi de Fisher-Snédécor à n et m degrés de liberté $X \hookrightarrow \mathcal{F}(n,m)$	$\frac{n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{n}{2},\frac{m}{2}\right)}\frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{(n+m)}{2}}}\ \mathbb{1}_{\{x>0\}}$	$\frac{m}{m-2}\quad m>2$ $2\frac{m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}\quad m>4$	C'est la loi du quotient de deux khi-deux indépendantes divisées chacune par son nombre de degrés de liberté $\left(\frac{\chi^2/n}{\chi^2/m}\right)$