Chapitre 6 : COUTS DES DETTES

I LA COTATION DES TAUX D'INTERET

1- TAUX FACIAUX ET TAUX EQUIVALENTS ACTUARIELS (OU TAUX ANNUEL EFFECTIF TAE) :

Le TAE (*effective annual rate* ou *EAR*) indique le montant total à percevoir dans un an.

Dire que le taux d'intérêt est de 10% avec intérêts payables semestriellement revient à dire que le taux d'intérêt est de 5% pour 6 mois. Il faut alors calculer **le taux équivalent actuariel** sur une base commune annuelle qui est un préalable indispensable à la comparaison de placements ou de prêts avec des échéanciers de flux de revenus différents.

Deux taux se rapportant à des périodes différentes sont dits « équivalents » si la valeur future d'une même somme à une même date est la même avec chacun des deux taux.

Si le taux apparent t_a implique le versement d'intérêts n fois dans l'année, le taux actuariel équivalent t s'obtient en capitalisant n fois ce taux apparent :

$(1+TAE) = (1+t_a/n)^n$

Où n est le nombre de périodes de versements des intérêts dans l'année

$t_a/n = r$ = taux d'intérêt sur une période

$TAE = (1+t_a/n)^n-1$

2- TAUX ANNUEL PROPORTIONEL (TAP) ET TAUX PERIODE

10% sur 1 an est appelé taux annuel proportionnel à 5% sur 6 mois. Deux taux sont dits proportionnels s'ils sont dans le même rapport que les périodes auxquelles ils s'appliquent.

Il s'agit d'un taux d'intérêt simple, càd sans l'effet de la capitalisation. Il ne reflète donc pas le montant effectif des intérêts annuels. Par conséquent, le taux annuel proportionnel ne doit pas être utilisé comme taux d'actualisation.

Les taux proportionnels n'ont pas d'autre intérêt que de permettre de calculer les intérêts effectivement versés.

Taux période = TAP/n

$1+TAE = (1+\text{Taux période})^n = (1+TAP/n)^n$

Exercice 1 :

Quel est le taux d'intérêt d'un investissement qui transforme 120 en 172,8 sur 2 ans ? Quel est le taux actuariel équivalent ? Donner-en le taux proportionnel sur 3 mois.

Exercice 2 :

Est-il préférable de disposer de :

a- un compte bancaire offrant 5% par an pendant trois ans (taux annuel effectif) ou :
b- Un compte offrant 2,5% tous les six mois pendant trois ans
c- Un compte offrant 7,5% tous les 18 mois pendant trois ans
d- Un compte offrant 0,5% tous les mois pendant trois ans.

3- TAUX ANNUEL EFFECTIF GLOBAL

Pour rendre les diverses propositions de crédit comparables, les établissements financiers présentent généralement le Taux Annuel Effectif global (TAEG), qui prend en compte, outre le taux d'intérêt, tous les frais annexes à caractère obligatoire. Ce taux exprime ainsi le coût final réel pour l'emprunteur.

Exercice 3 :

Mathieu souhaite acquérir à crédit un scooter d'une valeur de 3000d. Le concessionnaire lui propose l'offre de financement suivante : prêt sur 1 an au taux annuel proportionnel de 9% avec capitalisation mensuelle des intérêts ; le principal et les intérêts sont payés en une seule fois en fin de période ; les frais de dossier sont de 150d payable comptant. Quel est le TAEG ?

II LES METHODES DE REMBOURSEMENT D'UN EMPRUNT

Que l'emprunt soit indivis ou obligataire, il existe quatre façons de le rembourser, appelées modes d'amortissement : constant, in fine, par annuités constantes, à coupon zéro.

Notations :

C_0 : le principal ou capital initial : c'est le montant emprunté à la date 0

n : la maturité de l'emprunt (nombre de périodes de remboursement)

i : le taux période

I_k : l'intérêt payé à la fin de la période k $\rightarrow i \times C_{k-1}$

R_k : l'amortissement du capital ou montant du principal remboursé à la fin de la période k

$C_{k-1} - C_k$ → kadech bch nrajaa principal à chaque périodeK

a_k : l'annuité payé à la fin de la période k ; $a_k = I_k + R_k$

C_k : la capital restant dû à la fin de la période k ; $C_k = C_{k-1} - R_k$

A l'échéance de l'emprunt, après paiement de la dernière annuité, le capital restant dû doit être égal à zéro ($C_n = 0$)

1- L'AMORTISSEMENT CONSTANT

Ce mode d'amortissement tient compte du fait que le principal remboursé chaque période (généralement l'année) est constant. Les intérêts vont donc diminuer au fur et à mesure que le principal est remboursé ; ce qui implique que les annuités (principal+intérêts) versées au prêteur vont diminuer avec le temps

Périodes	Capital restant dû en début de période C_{k-1}	Intérêt I_k	Amortissement du capital R_k	Capital restant dû en fin de période C_k	Annuité a_k
1	C_0	$I_1 = i\ C_0$	R	$C_1 = C_0 - R$	$a_1 = R + I_1$
2	C_1	$I_2 = i\ C_1$	R	$C_2 = C_1 - R$	$a_2 = R + I_2$
3	C_2	$I_3 = i\ C_2$	R	$C_2 = C_1 - R$	$a_3 = R + I_3$
.	.	.	.		.
.	.	.	.	$C_{n-1} = C_{n-2} - R$	.
n	C_{n-1}	$I_n = i\ C_{n-1}$	R	$C_n = 0$	$a_n = R + I_n$

Avec $R = C_0/n$

Les annuités de remboursement diminuent avec le temps et constituent une suite arithmétique de premier terme $C_0\ (i + 1/n)$ et de raison $-i\ C_0/n$

Exercice 4 :

Une entreprise contracte un prêt de 1 million de dinars sur une durée de 5 ans au taux annuel proportionnel de 8% remboursable en cinq versements annuels (en fin de période). Le remboursement du capital se fait par amortissement constant : une même fraction du capital est remboursée chaque année. Quelles sont les sommes décaissées par l'entreprise pour faire face au remboursement de son emprunt ?

2- L'AMORTISSEMENT IN FINE

La totalité du capital emprunté, à la date 0, est remboursé en une seule fois, à la date d'échéance du prêt en n. Pendant toute la durée du prêt (de1 à n), l'emprunteur ne paye que les intérêts. Si l'intérêt est fixe, les sommes payées annuellement sont les mêmes, sauf pour la dernière année du remboursement (on y rajoute le capital).

Périodes	Capital restant dû en début de période C_{k-1}	Intérêt I_k	Amortissement du capital R_k	Capital restant dû en fin de période C_k	Annuité a_k
1	C_0	$I_1 = i\ C_0$	0	C_0	$a_1 = I_1$
2	C_0	$I_2 = i\ C_0$	0	C_0	$a_2 = I_2$
3	C_0	$I_3 = i\ C_0$	0	.	$a_3 = I_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	C_0	.
n	C_0	$I_n = i\ C_0$	$R_n = C_0$	0	$a_n = I_n + C_0$

3- L'AMORTISSEMENT PAR ANNUITES CONSTANTES

Ce type d'amortissement permet d'avoir des annuités identiques à chaque période. Le capital se réduisant chaque année, les intérêts vont croitre pour maintenir les annuités constantes

Périodes	Capital restant dû en début de période C_{k-1}	Intérêt I_k	Amortissement du capital R_k	Capital restant dû en fin de période C_k	Annuité a_k
1	C_0	$I_1 = i\,C_0$	$R_1 = a - I_1$	$C_1 = C_0 - R_1$	a
2	C_1	$I_2 = i\,(C_0 - R_1)$	$R_2 = a - I_2$	$C_2 = C_1 - R_2$	a
3	C_2	$I_3 = i\,(C_1 - R_2)$	$R_3 = a - I_3$	.	a
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	$C_{n-1} = C_{n-2} - R_{n-1}$	.
n	C_{n-1}	$I_n = i\,(C_{n-2} - R_{n-1})$	$R_n = a - I_n$	$C_n = 0$	a

L'annuité de remboursement $a = i\,C_0 / (1-(1+i)^{-n})$

$C_0 = a/(1+i) + a/(1+i)^2 + \ldots + a/(1+i)^n$

Le taux facial est alors égal au taux de rentabilité actuariel.

Exercice 5 :

Une entreprise a emprunté 3 millions de dinars il y a 10 ans afin d'acheter un immeuble. Le crédit a un taux annuel proportionnel de 7,8% et prévoit des versements mensuels constants pendant 30 ans. Combien l'entreprise doit-elle à sa banque aujourd'hui ?

4- L'AMORTISSEMENT A COUPON ZERO

L'emprunteur ne verse rien au prêteur pendant toutes la durée de l'emprunt. A l'échéance, il rembourse le capital initial augmenté des intérêts capitalisés. En fait, tout se passe comme si le capital dû à chaque période s'alourdissant des intérêts courus.

Périodes	Capital restant dû en début de période C_{k-1}	Intérêt I_k	Amortissement du capital R_k	Capital restant dû en fin de période C_k	Annuité a_k
1	C_0	$I_1 = i\,C_0$	$R_1 = -\,i\,C_0$	$C_1 = C_0\,(1+i)$	0
2	$C_0\,(1+i)$	$I_2 = i\,C_0\,(1+i)$	$R_2 = -i\,C_0\,(1+i)$	$C_2 = C_0\,(1+i)^2$	0
3	$C_0\,(1+i)^2$	$I_3 = i\,C_0\,(1+i)^2$	$R_3 = -i\,C_0\,(1+i)^2$	$C_3 = C_0\,(1+i)^3$	0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	$C_4 = C_0\,(1+i)^{n-1}$	.
n	$C_0\,(1+i)^{n-1}$	$I_n = i\,C_0\,(1+i)^{n-1}$	$R_n = C_0\,(1+i)^{n-1}$	$C_n = 0$	$a_n = C_0\,(1+i)^n$

Dans tous les cas, $a_n = R_n + I_n$ or $I_n = i\,C_{n-1}$ et $C_{n-1} = R_n$

D'où $a_n = R_n\,(1+i)$

l'intérêt –

III COUT D'UN EMRPUNT INDIVIS

Quel que soit le mode de remboursement adopté, l'évaluation du coût d'un emprunt se détermine par le recours aux modèles d'équilibre basés sur l'égalisation, à un moment donnée, des entrées et sorties de fonds. Dans le cas d'un financement par dette :

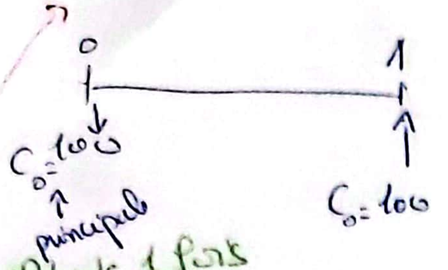
- les entrées de fonds sont le principal encaissé par l'entreprise à l'instant 0

- les sorties de fonds sont les intérêts et le remboursement du capital qui doivent avoir lieu entre la première et la dernière échéance.

Le coût de la dette, appelé taux de rentabilité à l'échéance (ou encore *YTM Yield to maturity*), est le taux de rentabilité annuel ou d'actualisation qui égalise la valeur actuelle des flux futurs espérés et le prix courant de la dette.

Coûts des Dettes

taux d'intérêt → taux annuelle



* Rbst 1 fois

$i = 10\%$ /an → $100 + 10\% \times 100$ $(1 + 10\%) \times 100$

→ remboursement du principal

Mode Rbst pl → $\hat{m}$ → à $t = 1$

* Rbst 2 fois/an

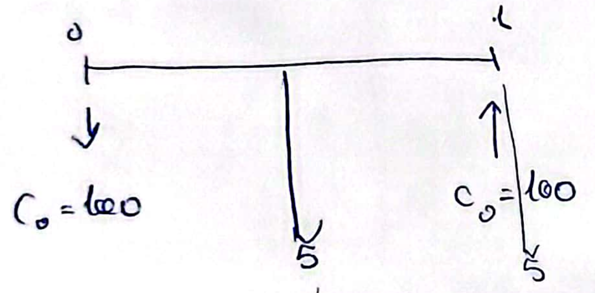
$$\underbrace{TP}_{\text{taux périodale}} = \frac{TAP}{nbP/an} = \frac{10\%}{2} = 5\%$$

→ taux d'intérêt

TAP: taux annuel proportionnel

TP: taux périodale

taux proportionnel



$5(1+TP)$

li tertshou
Pbamba
howlinakhrou ena

à $t = 0,5$ → 5

$t = 1$ → $5 + 5(1+5\%) = 10,25$

* $i_p = TP$

C_0 = principal

$$\underbrace{i_p \times C_0}_{5} + \underbrace{i_p C_0 \times (1 + i_p)}_{5,25} = 2 i_p \cdot C_0 + i_p^2 \cdot C_0$$

$$= C_0 (i_p^2 + 2 i_p) = C_0 [(1+i_p)^2 - 1]$$

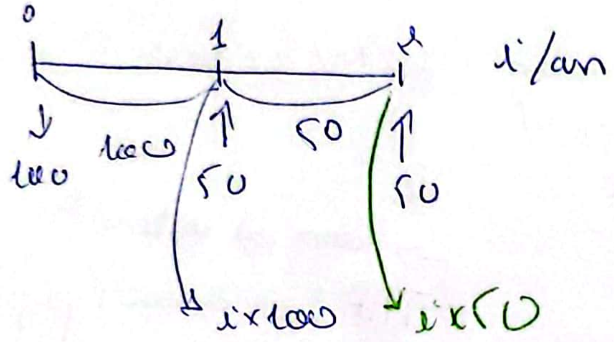
$= C_0 \times i_a$

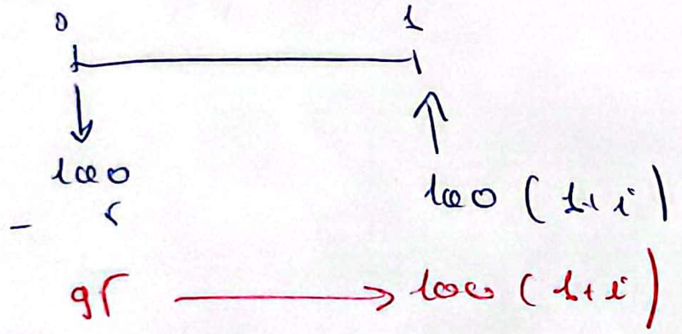
$\Rightarrow i_a = (1+i_p)^2 - 1$ → taux annuel effectif

nb de période/an :

$TAE = (1+TP)^n - 1$

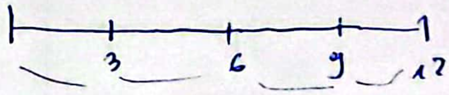
$TP = \frac{TAP}{m}$



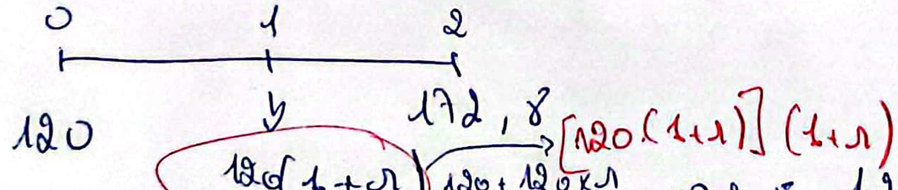


sur 3 mois

Yaani 4 périodes



Exercice 1 :



s en une période de 2 ans : $\frac{172{,}8 - 120}{120} = 44\%$ /2ans

$120(1 + T_{r\acute{e}el}) = 172{,}8$

$E\ r\acute{e}el/an = 120(1+r)^2$

$= 172{,}8$

$\Rightarrow r = 20\%$

$T_{Prop} = \frac{20\%}{4} = 5\%$ /3mois

L3

exercice 2 :

5% / an → 3 ans

TAP = 5%/an 2,5% / 6 mois → "

TAP = 5% 7,5% / 18 mois → "

TAP = 6% 0,5% / mois → "

→ $S_0(1+5\%)^3 = S_0 \times 1,1576$

→ $S_0(1+2,5\%)^6 = S_0 \times 1,1596$

→ $S_0(1+7,5\%)^2 = S_0 \times 1,1556$

→ $S_0(1+0,5\%)^{36} = S_0 \times 1,1966$

→ TAE = 5%

→ TAE = $(1+2,5\%)^2 - 1 = 5,06\%$

→ TAE = $(1+7,5\%)^{2/3} - 1 = 4,93\%$

TAE = $(1+0,5\%)^{12} - 1 = 6,163\%$

Exercice 3 :

2850 (3000 - 150)

l'intérêt calculé au 3000 ↑ principal

0 ——— 1

$3000(1+9,38\%) = 3280,14$

TAP = 9% → capitalisation mensuelle des intérêts

$TP = \frac{9\%}{12} = 0,75\%$ mois

$TAE = (1+0,75\%)^{12} - 1$
$= 9,38\%$

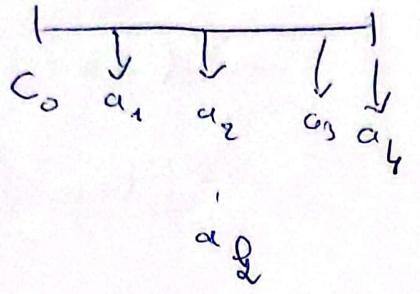
$$TAEG = \frac{3280,14 - 2850}{2850} = 15,13\%$$

Scanné avec CamScanner

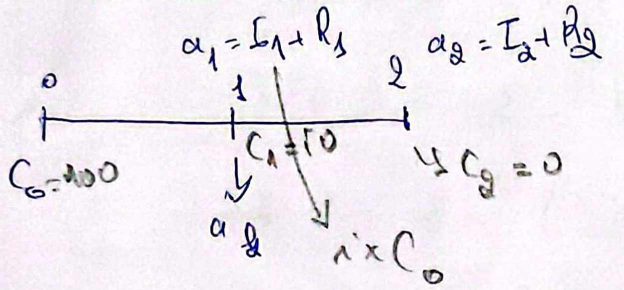
I. Modes de remboursement d'un emprunt :

$i = TRA$ / $C_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^t}$

i seul dans le cas d'investissement



$3000 - 150 = \frac{3280{,}14}{(1+i)^1}$



$a_k = I_k + R_k$

intérêt $i \times C_{k-1}$

remboursement du principal $C_{k-1} - C_k$

R_k = Rbst pl.

I_k = int. payé période K

C_k = K^l restant dû en fin de période

$a_k = i\,C_{k-1} + C_{k-1} - C_k$

$= (1+i)\,C_{k-1} - C_k$

$C_{k-1} = \frac{a_k + C_k}{1+i}$

$= \frac{a_k}{1+i} + \frac{a_{k+1}}{(1+i)^2} + \frac{a_{k+2}}{(1+i)^3} + \dots + \frac{a_n}{(1+i)^{n-(k-1)}}$

$$R_k = R = \frac{C_0}{n}$$

$$a_1 = \frac{C_0}{n} + iC_0 = C_0\left(i + \frac{1}{n}\right)$$

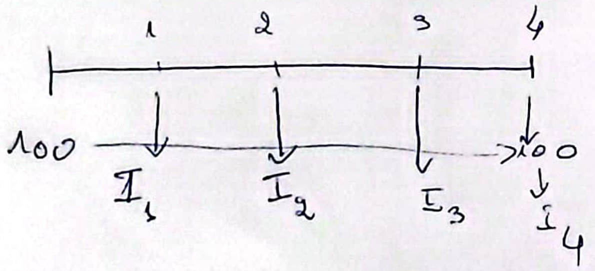
$$a_2 = \frac{C_0}{n} + i\left(C_0 - \frac{C_0}{n}\right) = C_0\left(i + \frac{1}{n}\right) - i\frac{C_0}{n}$$

$$a_3 = \frac{C_0}{n} + i\left(C_0 - 2\frac{C_0}{n}\right) = C_0\left(i + \frac{1}{n}\right) - 2i\frac{C_0}{n}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{C_0}{n} + i\left(C_0 - (n-1)\frac{C_0}{n}\right) = \underbrace{C_0\left(i + \frac{1}{n}\right)}_{1^{\circ}T} + (n-1)\left(\underbrace{-i\frac{C_0}{n}}_{r}\right)$$

2- Amortissement in fine



nb P_k	C_{k-1}	I_k	Amt du K^l : R_k	K^l restant dû après paiement C_k	a_k
1	C_0	iC_0	0	C_0	iC_0
2	C_0	iC_0	0	C_0	iC_0
3					
⋮					
n	C_0	iC_0	C_0	0	$iC_0 + C_0$

3- Amt par annuités cst :

$$a_k = a = C^{ste}$$

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(1+i)^k} = \frac{a}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{a}{i} \cdot \left(1 - (1+i)^{-n}\right)$$

$$\boxed{a = \frac{i\, C_0}{1-(1+i)^{-n}}}$$

Kaaed yonbess akal mel amt cst

nb P_k	C_{k-1}	I_k	$K^P = R_k$	C_k	a_k
1	C_0	$I_1 = i C_0$	$R_1 = a - I_1$	$C_1 = C_0 - R_1$	a
2	C_1	$I_2 = i C_1$	$R_2 = a - I_2$	$C_2 = C_1 - R_2$	a
3					
⋮					
n	C_{n-1}	$I_n = i C_{n-1}$	$R_n = a - I_n = C_{n-1}$	0	a

Yokeedb akthar K^P a' amtoumé

15

4- Amt à coupon zéro : yelzed

nb P_k	C_{k-1}	I_k	K^P R_k	C_k	a_k
1	C_0	$i C_0$	$-i C_0$	$C_0 + i C_0 = C_1$	0
2	$C_1 = C_0 + i C_0 = C_0(1+i)$	$i C_1$		$C_0(1+i)^2 = C_2$	0
⋮	⋮				
n	$C_0(1+i)^{n-1}$	$i C_0(1+i)^{n-1}$	$C_0(1+i)^{n-1}$	0	$C_0(1+i)^n$

coupon in fine
annuités
Amt cst

ahsen wahed