3- Croissance économique avec taux d'épargne exogène

- 3-1 Modèle de Harrod-Domar
- 3-2 Modèle de Solow
- 3-3 Optimum Social et Equilibre Concurrentiel instantanés
- 3-4 Optimalité Dynamique

3-1- Le modèle de Harrod-Domar

- Le modèle se base sur le coefficient de capital c_K et le coefficient de travail c_L

avec $c_K = \frac{K}{Y}$ et $c_L = \frac{L}{Y}$

- Les coefficients c_K et c_L sont supposés constants, ce qui revient à supposer que le capital et le travail ne sont pas des facteurs de production substituables

- Le taux d'épargne s est aussi supposé constant
- L'égalité épargne=investissement donne $I = sY$ où Y est le revenu national total et I l'investissement.
- Par ailleurs, on a $I = \Delta K$
- Donc $\Delta K = sY = s\dfrac{K}{c_K}$
- Le taux de croissance du capital est donc

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{s}{c_K}$$

- A priori, rien n'oblige le taux de croissance du travail g, qui n'est autre que le taux de croissance démographique, à être égal à $\dfrac{s}{c_K}$

- La relation de proportionnalité entre et et imposée par les coefficients de capital et de travail nous amène à conclure que le taux de croissance de la population effectivement employée est nécessairement $\dfrac{s}{c_K}$

- Par conséquent, si $g > \frac{s}{c_K}$ on aura du chômage
- Si $g < \frac{s}{c_K}$, on aura une accumulation de

capital excédentaire, ce qui signifie l'existence de capacités de production inutilisées
- Si $g = \frac{s}{c_K}$, l'économie évoluera dans un

chemin de croissance équilibrée.

- Conclusion:

L'égalité $g = \dfrac{s}{c_K}$ est improbable car elle met en relation des paramètres qui ne semblent pas naturellement reliés.

L'économie est donc le plus souvent en déséquilibre.

3-2- Le modèle de Solow

- Solow a construit son modèle sur la base de la remise en question de la constance des coefficient de capital et de travail
- La production est représentée par une fonction de production homogène de degré 1, croissante et nulle en *K=0*:

$$Y = F(K, L)$$

- Les coefficients $c_L = \dfrac{L}{F(K,L)}$ et $c_K = \dfrac{K}{F(K,L)}$ ne sont plus constants

- Le capital subit une dépréciation annuelle au taux *a.*
- En temps continu, la variation annuelle du capital est

$$\dot{K} = I - aK$$

- L'égalité épargne=investissement s'écrit:

$$S = sY = sF(K, L) = I = \dot{K} + aK$$

- d'où $\dot{K} = sF(K, L) - aK$ (1)
- On utilise l'hypothèse que la fonction de production est homogène de degré 1 pour exprimer la production par tête en fonction du revenu par tête:

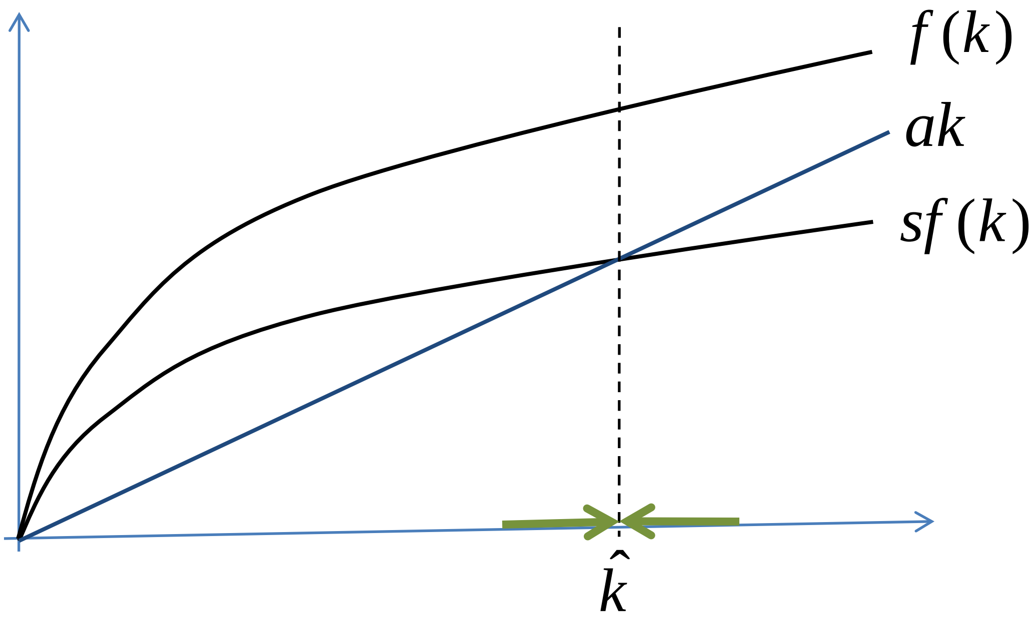
$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = F(k, 1)$$

- Si L est constant, on divise l'équation d'évolution de *K* par *L :*

$$\dot{k} = sF(k, 1) - ak$$

- On note $f(k) = F(k,1)$
- f est concave et croissante et $f(0) = 0$
- On obtient l'équation d'évolution de *k*:

$$\dot{k} = sf(k) - ak$$



- L'équilibre asymptotique $\hat{k}$ vérifie:

$$sf(\hat{k}) = a\hat{k}$$

- En utilisant le coefficient de capital, cette relation s'écrit:

$$\frac{s}{c_K(\hat{k})} = a \qquad (2)$$

- Si L n'est pas constant, mais croît au taux g:

$$\frac{\dot{L}}{L} = g$$

on a: $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$. Par conséquent, l'équation

(1) devient: $\dot{k} = sf(k) - (a+g)k$

L'équation (2) devient: $\frac{s}{c_K(\hat{k})} = a + g$

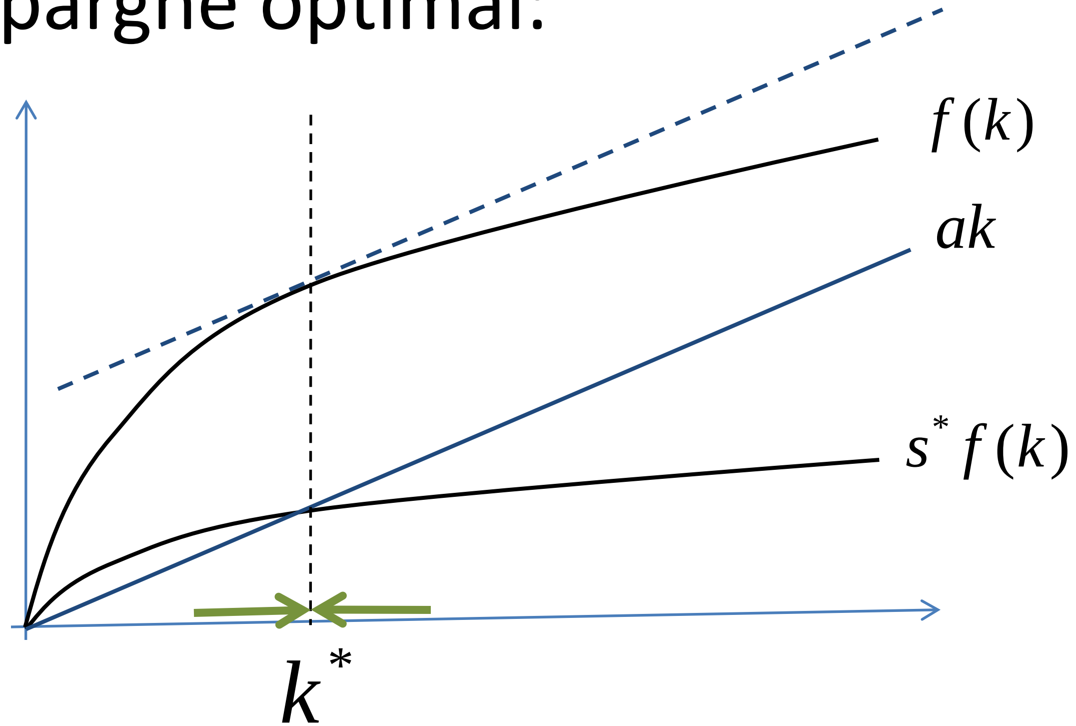
- Si *a=0*, on retrouve l'équation d'équilibre de Harrod-Domar:

$$\frac{s}{c_K(\hat{k})} = g$$

- La différence avec Harrod-Domar est qu'ici le coefficient c_K n'est plus constant, mais il s'ajuste de sorte que l'équilibre soit toujours réalisé.
- Une économie qui a un excédent de croissance démographique va voir son coefficient de capital baisser et vice-versa.

- Le modèle de Solow résoud le problème d’instabilité posé par le modèle de Harrod-Domar.
- La tendance spontanée de l’économie à l’équilibre est retrouvée. Le principe de la main invisible d’Adam Smith est sauvé!

- Taux d'épargne optimal:



- La consommation à l'équilibre est $c = f(k) - ak$
- Elle atteint son maximum en k^* défini par $f'(k^*) = a$ (règle d'or)

- Le taux d'épargne optimal est tel que la solution de l'équation en k $s^* f(k) = ak$

tombe exactement en k^*

3-3- Optimum social et équilibre concurrentiel instantanés et dynamiques

Les premier et deuxième théorème de bien-être (first and second welfare theorems)

- Hypothèses principales: convexité des ensembles de production et des préférences (donc concavité des fonctions de production et d'utilité), price-taker behavior
- Premier théorème: Tout EC est un OS
- Deuxième théorème: Pour tout OS il existe un système de prix et de dotations initiales tels que l'EC atteint sous ces prix et dotations coincide avec l'OS
- Qu'est ce qu'un optimum de Pareto?
- Liens:
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_efficiency
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorems_of_welfare_economics
  - https://www.youtube.com/watch?v=dtYyk5j0oLk

3-3-1 Modèle de Solow à 1 bien et 2 facteurs

- La méthode consiste à séparer les décisions en deux groupes de décision: le groupe de décision qui n'agissent que sur les choix intra-période et le groupe de décisions prises en une période donnée qui agissent sur les périodes à venir.
- L'optimisation qui ne concerne que les variables intra-période donne les optima instantanés et l'optimisation qui agit sur les variables intra-période et inter-période donne les optima dynamiques.

- On a $I = sY = sF(K, L)$ donc $\dot{K} + aK = sF(K, L)$

la fonction *F* vérifiant les conditions de la section 3-2

- Le taux d'épargne étant éxogène, la donnée de K_0 et de $L = L_0$ détermine complètement la trajectoire

économique.

- Cette trajectoire étant unique, c'est un optimum social pour le taux d'épargne *s*.

- L’optimum social peut-il être atteint par un équilibre concurrentiel?
  - Il s’agit de trouver un système de prix (p_t, r_t, w_t) tel que si on l’impose aux consommateurs et aux producteurs, les décisions qu’ils prennent sur la base de la maximisation de leurs utilités ou profits respectifs, amènent l’ensemble de l’économie vers L’OS.
  - On note R_t le revenu du concommateur représentatif à la date t

- revenu total = revenu des consommateurs + revenu des entreprises
- revenu des entreprises = profits

$$\max \pi_t = \max[p_t F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t]$$

- Grâce à la concavité de *F*, les conditions suivantes sont suffisantes pour maximiser π_t :

$$\frac{r_t}{p_t} = \frac{\partial F}{\partial K}, \frac{w_t}{p_t} = \frac{\partial F}{\partial L}$$

- Par l'homogénéité de *F*, on a : $F(K_t, L_t) = K_t \frac{\partial F}{\partial K} + L_t \frac{\partial F}{\partial L}$

donc $\max \pi_t = p_t[F(K_t, L_t) - K_t \frac{\partial F}{\partial K} - L_t \frac{\partial F}{\partial L}] = 0$

- On en déduit que le revenu des consommateurs est égal au revenu total =

$$F(K_t, L_t) = K_t \frac{\partial F}{\partial K} + L_t \frac{\partial F}{\partial L} = R_t$$

- Si on impose au consommateur le même taux d'épargne $s_m = s$ que le taux d'épargne total appliqué pour l'OS, le programme du consommateur s'écrit:

$$\max u(C_1, C_2, C_3, ...)$$
$$s.c.\{p_t C_t \leq (1 - s_m) R_t\}_t$$

$$\Longrightarrow \quad p_t C_t = (1 - s) R_t, \forall t$$

- On en déduit $C_t = (1-s)F(K_t, L_t)$
- Or $C_t + I_t = Y_t = F(K_t, L_t)$
- Donc $\dot{K}_t - aK_t = I_t = sF(K_t, L_t)$

- On retrouve l'équation caractérisant l'optimum social. Par conséquent, **<u>l'équilibre concurrentiel est un optimum social</u>** pour le taux d'épargne *s*

- Comment évoluent les prix?

3-3-2 Modèle à 2 biens et 2 facteurs

On considère un modèle de croissance économique à 2 secteurs.

Le secteur 1 consomme le capital que le secteur 2 produit selon la fonction de production croissante concave:

$$Y_1 = F_1(L_1, K)$$

Le capital est constitué uniquement de produits du secteur 2.

La fonction de production croissante et concave du secteur 2 est : $Y_2 = F_2(L_2)$

Les consommateurs sont modélisés par un consommateur représentatif dont la fonction d'utilité croissante et concave est : $U(C_1, C_2)$

La quantité de travail totale disponible chaque année est : $L = L_1 + L_2$

On note p_1 et p_2 les prix respectifs des biens 1 et 2, w le salaire (supposé le même dans les 2 secteurs) et r le taux de rémunération du capital (sous forme d'intérêts ou de dividendes).

- **Optimum social instantané**
  - Le capital à la date *t* prend une valeur exogène

$$\overline{K}_t$$

  - L'investissement est donc aussi exogène

$$\overline{I}_t = \dot{\overline{K}}_t + a\overline{K}_t$$

  - Programme mathématique qui détermine l'**optimum social** à la date t (optimum social instantané) :

$$\max U(C_1, C_2)$$

$$s.c. \begin{cases} C_1 \le F_1(\overline{K}_t, L_1) \\ C_2 + \overline{I}_t \le F_2(L_2) \\ L_1 + L_2 \le L \end{cases}$$

- Résolution avec le lagrangien:

$$\ell\left(C_1, C_2, L_1, L_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) =$$

$$U\left(C_1, C_2\right) + \lambda_1\left(C_1 - F_1(\overline{K}_t, L_1)\right) + \lambda_2\left(C2 + \overline{I} - F_2\left(L_2\right)\right) + \lambda_3\left(L_1 + L_2 - L\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \ell}{\partial C_1} = \dfrac{\partial \ell}{\partial C_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial L_1} = \dfrac{\partial \ell}{\partial L_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \lambda_1} = \dfrac{\partial \ell}{\partial \lambda_2} = \dfrac{\partial \ell}{\partial \lambda_3} = 0 \end{cases}$$

- En éliminant les λ_i , on trouve:

$$\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{F_2'}{\frac{\partial F_1}{\partial L_1}}$$

- où $U_1' = \frac{\partial U}{\partial C_1}$ et $U_2' = \frac{\partial U}{\partial C_2}$

- Méthode variationnelle : $L_1' = L_1 + \delta$
$L_2' = L_2 - \delta$

- On applique une petite variation sur les valeurs de contrôle et on calcule la variation correspondante de la fonction-objectif *U.*

- On obtient

$$\Delta C_1 = \frac{\partial F_1}{\partial L_1} \cdot \delta$$

$$\Delta C_2 = -F_2 ' \cdot \delta$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial C_1} \Delta C_1 + \frac{\partial U}{\partial C_2} \Delta C_2 = U_1 ' \frac{\partial F_1}{\partial L_1} \delta - U_2 ' F_2 ' \delta$$

- A l'optimum, la variation de *U* doit être nulle sinon il serait possible d'augmenter *U* en choisissant le signe approprié de δ

$$\Rightarrow U_1 ' \frac{\partial F_1}{\partial L_1} - U_2 ' F_2 ' = 0$$

- **<u>Equilibre concurrentiel instantané:</u>**
  - on ajoute les prix, salaires, interêts et revenus
- Programme du consommateur :

$$\max U(C_1, C_2)$$

$$s.c. p_1 C_1 + p_2 C_2 \leq R$$

où *R* est le revenu du consommateur

- Programme du secteur 1 :

$$\max_{K, L_1} \pi_1 = p_1 F_1(K, L_1) - wL_1 - rK$$

- Notez qu'il n'y a pas de contradiction entre le fait que le secteur 1 considère *K* variable et le fait que *K* suit une trajectoire déterminée $\overline{K}_t$
  - En effet, il s'agit de déterminer les conditions exogènes pour lesquelles le secteur 1 est amené à choisir $\overline{K}_t$

- Programme du secteur 2 :

$$\max_{L_2} \pi_2 = p_2 F_2(L_2) - wL_2$$

- L'équilibre concurrentiel instantané est un optimum social instantané. En effet
  - Le programme du secteur 1 implique la nullité de la dérivée partielle du profit par rapport au travail. D'où: $$\frac{\partial F_1}{\partial L_1} = \frac{w}{p_1}$$
  - De même pour le secteur 2 : $$F_2' = \frac{w}{p_2}$$
  - Pour le programme du consommateur, on applique soit la méthode du Lagrangien (ou la méthode variationnelle). D'où: $$\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Finalement : $$\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{F_2'}{\frac{\partial F_1}{\partial L_1}}$$
- Cette relation est une condition nécessaire pour avoir l'optimum social instantané. Elle est suffisante puisque le programme d'optimalité sociale est convexe (fonctions de production et d'utilité concaves)
- Par conséquent, on peut conclure que l'équilibre concurrentiel instantané est un optimum social instantané.

- Bien que le capital soit exogène, le secteur 1 le considère comme variable.
  - Cette manière de faire permet de determiner les conditions pour que, sous des comportements individualistes, le chemin du capital tombe effectivement sur $(\overline{K}_t)_t$
- Le programme d'optimisation du secteur 1 implique donc la nullité de la dérivée partielle du profit par rapport au capital:

$$\frac{\partial F_1}{\partial K} = \frac{r}{p_1}$$

- **<u>Sentier concurrentiel à taux d'épargne constant</u>**
  - Un sentier concurrentiel est une succession d'équilibres concurrentiels instantanés. On cherche à voir si un tel sentier peut être réalisé avec un taux d'épargne constant.
  - Le revenu total est $p_1 Y_1 + p_2 Y_2$
  - L'épargne est donc $S = s \cdot (p_1 Y_1 + p_2 Y_2)$
    - Que se passe-t-il si on distingue épargne des ménages et épargnes des entreprises?

- Si on note *a* le taux d'amortissement du capital, la relation entre investissement brut et capital est $I = \dot{K} + aK$
- Par ailleurs, l'équation de bilan des biens et services en économie fermée donne $p_2 I = S$
- D'où

$$p_2(\dot{K} + aK) = s\left(p_1 Y_1 + p_2 Y_2\right)$$

$$\dot{K} + aK = s\left(\frac{p_1}{p_2} Y_1 + Y_2\right) = s\left(\frac{F_2'}{F_1'_L} Y_1 + Y_2\right)$$

- on obtient le système différentiel de 5 équations à 6 inconnues $\dot{K}, L_1, L_2, C_1, C_2, K$
  - investissement: $\dot{K} + aK = s\left(\frac{F_2'}{F_1{}'_L} F_1(K, L_1) + F_2(L_2) \right)$
  - market clearing, bien 1 $C_1 = F_1(K, L_1)$
  - market clearing, bien 2 $C_2 + \dot{K} + aK = F_2(L_2)$
  - market clearing, travail $L_1 + L_2 = L$
  - condition de premier ordre $\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{F_2'}{F_1{}'_L}$

- Ce système permet de déterminer les variables $\dot{K}, L_1, L_2, C_1, C_2$ en fonction de K
- En particulier, on obtient $\dot{K} = \varphi(K)$
- Cette relation entre $\dot{K}$ et K, qui est une équation différentielle du premier ordre, et la donnée de K_0 permet de calculer la trajectoire de K et, par conséquent, le sentier de croissance de l'économie.

- Sentier concurrentiel stationnaire à taux d'épargne constant
  - Dans les 5 equations définissant un sentier concurrentiel à taux d'épargne constant, on impose $\dot{K} = 0$
  - On obtient alors un système à 5 équations et 5 inconnues, ce qui détermine le capital asymptotique K_∞ en fonction de s
    - Pour un *s* donné, tout sentier concurrentiel stationnaire converge-t-il nécessairement vers K_∞ indépendamment de K_0 comme dans le cas à un seul bien?

- Taux d’épargne optimal
  - Quel taux d’épargne réalise la meilleure situation stationnaire à long terme?
  - Il s’agit de chercher le taux d’épargne qui maximise l’utilité asymptotique

$$U(C_1, C_2) = U\left[F_1\left(K, L_1\right), F_2\left(L - L_1\right) - aK\right]$$

  - On pose

$$\Phi\left(K, L_1\right) = U\left[F_1\left(K, L_1\right), F_2\left(L - L_1\right) - aK\right]$$

  - A l’optimum, la différentielle doit être nulle:

$$d\Phi\left(K, L_1\right) = [\frac{\partial U}{\partial C1}\frac{\partial F_1}{\partial K} - a \cdot \frac{\partial U}{\partial C_2}]dK + [\frac{\partial U}{\partial C1}\frac{\partial F_1}{\partial L_1} - \frac{\partial U}{\partial C_2}\frac{dF_2}{dL_1}]dL_1 = 0$$

$$\Rightarrow [\frac{\partial U}{\partial C1}\frac{\partial F_1}{\partial K} - a\cdot\frac{\partial U}{\partial C_2}] = [\frac{\partial U}{\partial C1}\frac{\partial F_1}{\partial L_1} - \frac{\partial U}{\partial C_2}\frac{dF_2}{dL_1}] = 0$$

- ce qui s'écrit $\frac{\partial F_1}{\partial K} = F_{1K}' = a\cdot\frac{U_2'}{U_1'}$
- et $\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{F_2'}{F_{1L}'}$
- La deuxième équation est déjà vérifiée pour tout sentier concurrentiel à taux dépargne constant
- La première équation s'ajoute aux 5 équations définissant les sentiers concurrentiels à taux d'épargne constants pour déterminer le taux d'épargne optimal s^*

  -> La théorie néoclassique de la répartition est-elle valable dans ce cas?

  -> Que devient la dynamique si le taux d'épargne des ménages diffère de celui des entreprises ou de l'Etat?

3-4- Optimalité dynamique

- Pour définir l'optimalité sociale dynamique, il faut avoir un critère inter-temporel.
  – Par exemple, dans le cas d'un modèle à un consommateur représentatif, il faut une fonction d'utilité dont les arguments sont

$$C_1, C_2, \ldots\ldots C_t, \ldots$$

  dans le cas de modèles à temps discret
  – Ce critère est appelé « social welfare function »

- Dans le cas de modèles à temps continu, la « social welfare function » a comme ensemble de départ l'ensemble des trajectoires possibles $\left\{ \left(C_t \right)_t \right\}$
- Programme de l'optimalité sociale

$$\max_{\left(C_t , K_t , I_t \right)_t} U\left(\left(C_t \right)_t \right)$$

$$s.c. \begin{cases} C_t + I_t \leq F(K_t, L_t) \\ \dot{K}_t + aK_t = I_t \end{cases}$$

où la trajectoire démographique $\left(L_t \right)_t$ est supposée exogène

- Trajectoire de consommation associée à une trajectoire du capital:
  - Pour chaque trajectoire du capital $K' = \left(K'_t\right)_t$ on peut lui associer la trajectoire de consommation $C' = C\left(K'\right)$ définie par les equations:

$$\begin{cases} C'_t + I'_t \leq F(K'_t, L_t) \\ \dot{K}'_t + aK'_t = I'_t \end{cases}$$

- Programme d'optimalité de Pareto
  - On désigne par $C(K')_t$ la consommation à la date *t* pour la trajectoire de consommation associée à ue trajectoire de capital K'
  - une trajectoire de capital K est dite Pareto-optimal si elle est solution aux programmes $P_t(K)$ pour tout *t*

$$P_t(K) = \begin{cases} \max\limits_{K'} C(K')_t \\ s.c. \{C(K')_{t'} \geq C(K)_{t'} \forall t'\} \end{cases}$$

-> Un optimum social est-il un optimum de Pareto?

- Equilibre concurrentiel dynamique
  - Le consommateur représentatif maximise son utilité intertemporelle en considérant les prix, salaires et intérêts $p_i(t), w(t), r(t)$ comme donnés
  - Les producteurs maximisent chacun leurs profits à prix donnés aussi.
  - Dans cette approche de l'équilibre concurrentiel dynamique, seul le consommateur représentatif a une vision intertemporelle. Il existe d'autres approches où les entreprises ont aussi une approche intertemporelle. Pour cela, il faut que les profits soient aussi inter-temporels.

-> Un équilibre concurrentiel dynamique est-il une succession d'équilibres concurrentiels instantanés?

-> Un équilibre concurrentiel dynamique est-il un otimum de Pareto? un optimum social?