ANALISIS MODEL SISTEM ANTRIAN SOAL QANDA MATHPRESSO MENGGUNAKAN ALJABAR MAKS-PLUS INTERVAL

oleh

ARDHAN ARBYANTONO

M0119013

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan

memeroleh gelar Sarjana Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

SURAKARTA

2023

ANALISIS MODEL SISTEM ANTRIAN SOAL QANDA MATHPRESSO MENGGUNAKAN ALJABAR MAKS-PLUS INTERVAL

SKRIPSI

ARDHAN ARBYANTONO
NIM. M0119013

dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Drs. Siswanto, M.Si.	Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si.
NIP. 19670813 199203 1 002	NIP. 19620203 199103 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
dan dinyatakan telah memenuhi syarat
pada hari Jum'at tanggal 14 April 2023

Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Vika Yugi Kurniawan, S.Si., M.Sc.		31-05-2023
	NIP. 19870701 201504 1 001	....	....
Sekretaris	Ririn Setiyowati, S.Si., M.Sc.		31-05-2023
	NIP. 19890924 202012 2 013	....	....
Anggota	Dr. Drs. Siswanto, M.Si.		05-06-2023
Penguji	NIP. 19670813 199203 1 002	....	....
	Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si.		05-06-2023
	NIP. 19620203 199103 1 001	....	....

Disahkan
di Surakarta pada tanggal 05 JUN 2023

Plt. Kepala Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta

Dr. Drs. Siswanto, M.Si.
NIP. 19670813 199203 1 002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Analisis Model Sistem Antrian Soal Qanda Mathpresso Menggunakan Aljabar Maks-Plus Interval" belum pernah diajukan untuk memeroleh gelar kesarjanaan pada suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga belum pernah ditulis atau dipublikasikan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar rujukan.

Surakarta, April 2023

Ardhan Arbyantono

RINGKASAN

Ardhan Arbyantono, 2023. ANALISIS MODEL SISTEM ANTRIAN SOAL QANDA MATHPRESSO MENGGUNAKAN ALJABAR-MAKS PLUS INTERVAL. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Proses antrian yang efektif dan efisien perlu memerhatikan langkah penjadwalan dengan baik. Proses antrian termasuk dalam Sistem Event Diskrit (SED). Variabel bebas SED pada umumnya bergantung pada kejadian bukan bergantung waktu. Aljabar maks-plus interval dapat diaplikasikan dalam masalah SED untuk mengubah sistem persamaan nonlinier yang diperoleh menjadi sistem persamaan linier. Aljabar maks-plus merupakan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ digabung dengan $\varepsilon = -\infty$ dilengkapi operasi maks $\oplus$ dan plus $\otimes$ atau dapat dinotasikan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ dengan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. Sistem persamaan yang terbentuk kemudian disajikan dalam bentuk $x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)$ dan $y(k) = C \otimes x(k)$. Waktu periodik dan waktu awal sistem antrian ditentukan dari nilai eigen dan vektor eigen matriks $\overline{A}$ dengan $\overline{A} = A \oplus B \otimes C$.

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan jadwal antrian soal Qanda Mathpresso dan mengetahui pengaruh dari penerapan jadwal tersebut. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan studi lapangan. Studi literatur dilakukan dengan memelajari referensi berupa buku, jurnal, skripsi, dan disertasi mengenai aljabar maks-plus interval, terutama materi yang berkaitan dengan masalah penjadwalan. Sedangkan studi lapangan dilakukan pada proses pengambilan data berupa alur antrian soal Qanda Mathpresso dan asumsi waktu kerja tiap pemrosesnya.

Hasil dari penelitian diperoleh periode sistem antrian untuk memulai fase antrian selanjutnya adalah 2 menit 30 detik (waktu tersingkat) dan 12 menit (waktu terlama). Penerapan jadwal ini membuat penanya soal mengetahui kapan perkiraan jawaban soal akan diterima, sedangkan bagi penjawab soal akan dapat memperkirakan berapa banyak jawaban yang ia kerjakan jika perkiraan selesainya satu jawaban mengacu pada hasil penelitian.

Kata Kunci: *aljabar maks-plus interval, proses antrian, penjadwalan*

SUMMARY

Ardhan Arbyantono,2023. ANALYSIS OF THE QANDA MATHPRESSO QUESTION QUEUING SYSTEM MODEL USING MAX-PLUS INTERVAL ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Universitas Sebelas Maret.

An effective and efficient queuing process needs to pay close attention to the scheduling steps. Queuing processes are included in the Discrete Event System (DES). DES independent variables are generally event dependent not time dependent. Interval max-plus algebra can be applied in DES problems to convert the obtained system of nonlinear equations into a system of linear equations. Max-plus algebra is a set of real numbers $\mathbb{R}$ combined with $\varepsilon = -\infty$ equipped with max $\oplus$ and plus $\otimes$ operations or can be denoted $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ with $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$. The resulting system of equations is then presented in the form $x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)$ and $y(k) = C \otimes x(k)$. The periodic time and the initial time of the queuing system are determined from the eigenvalues and matrix eigenvector $\overline{A}$ with $\overline{A} = A \oplus B \otimes C$.

The purpose of this research is to determine the queue schedule for Qanda Mathpresso questions and find out of the effect of implementing the schedule. The research method used in this research is literature study and field study. Literature study is carried out by studying references in the form of books, journals, theses, and dissertations regarding interval max-plus algebra, especially material related to scheduling problems. While the field study was carried out on the data collection process in the form of queue lines for Qanda Mathpresso questions and the assumptions of working time for each process.

The results of the study obtained that the queuing system period to start the next queuing phase was 2 minutes 30 seconds (the shortest time) and 12 minutes (the longest time). The application of this schedule allows the questioner to know when the estimated answer to the question will be received, while the answerer will be able to estimate how many answers he will complete if the estimated completion of one answer refers to the results of the research.

Keywords: *interval max-plus algebra, queuing process,scheduling*

MOTO

"Bagaimana aku merasa kalah, sedangkan aku tidak merasa berkompetisi dengan siapapun. Jika memang harus berkompetisi, maka satu-satunya lawan adalah diriku sendiri."

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk mamah, ayah, kakak, dan teman-teman
yang telah memberi bantuan dan dukungan penuh kepadaku.

PRAKATA

Bismillahirrahmanirrahim,

puji syukur kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam semoga dihanturkan kepada Nabi Muhammad *shallalahu'alaihi wa sallam*. Penulis menyadari bahwa terwujudnya skripsi ini tidak akan berhasil dengan baik tanpa bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada

1. Dr. Drs. Siswanto, M.Si. sebagai pembimbing I yang telah memberikan bimbingan mengenai materi dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini,
2. Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si. sebagai pembimbing II yang telah memberikan bimbingan mengenai penulisan dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, dan
3. keluarga serta teman-teman yang telah membantu dan senantiasa memberikan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, April 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

$\mathbb{R}$	:	Himpunan semua bilangan *real*
ε	:	$-\infty$
$\bigcup$	:	Operasi *union*
$\mathbb{R}_\varepsilon$	:	Himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$
$+$	:	Operasi penjumlahan
$\oplus$	:	Operasi maksimum pada aljabar maks-plus
$\otimes$	:	Operasi penjumlahan pada aljabar maks-plus
$(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$	:	Aljabar maks plus yang dilengkapi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ merupakan semiring idempotent
$\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$	:	Himpunan matriks atas aljabar maks-plus berukuran $m \times n$
$\mathbb{N}$	:	Himpunan bilangan asli
$\lambda(A)$	:	Nilai eigen dari matriks A
v	:	Vektor eigen dari suatu matriks
$D = (V, E)$	:	Graf berarah
D_A	:	Graf berarah berbobot yang bersesuaian dengan matriks interval A
$l(\sigma)$	:	Panjang *cycle* σ
$w(\sigma, A)$	:	Bobot pada *cycle* σ pada matriks A
$\mu(\sigma, A)$	:	Rata-rata bobot dari sikel σ
V	:	Himpunan tak kosong berhingga yang anggotanya disebut titik
E	:	Matriks identitas atas aljabar maks-plus terhadap operasi $\otimes$
$E(A)$	:	Titik-titik kritis dari matriks A
S	:	Himpunan terurut parsial dengan relasi $\leq$
$\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$	:	Himpunan interval atas $\mathbb{R}_\varepsilon$
$\overline{\oplus}$	:	Operasi maksimum pada aljabar maks-plus interval
$\overline{\otimes}$	:	Operasi penjumlahan pada aljabar maks-plus interval

$\overline{\varepsilon} = [\varepsilon, \varepsilon]$	:	Elemen netral aljabar maks-plus interval terhadap operasi $\overline{\oplus}$
$\overline{0} = [0, 0]$	:	Elemen identitas aljabar maks-plus interval terhadap operasi $\overline{\otimes}$
$(\mathrm{I}(\mathbb{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$	:	Aljabar maks-plus interval (himpunan $\mathrm{I}(\mathbb{R})_{\varepsilon}$) yang dilengkapi operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$
$\in$	:	Anggota
$<$	:	Kurang dari
$>$	:	Lebih dari
$\leq$	:	Kurang dari atau sama dengan
$\underline{x}$	:	Batas bawah dari x
$\overline{x}$	:	Batas atas dari x
$x = [\underline{x}, \overline{x}]$	:	Interval dari $\underline{x}$ sampai $\overline{x}$
$\underline{A}$	:	Matriks batas bawah dari A
$\overline{A}$	:	Matriks batas atas dari A
A= $[\underline{A}, \overline{A}]$	:	Matriks interval A direpresentasikan dengan interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}]$
$\mathrm{I}(\mathbb{R})_{\varepsilon}^{m \times n}$	:	Matriks atas aljabar maks-plus interval
$\Gamma(A_{\lambda})$	:	Matriks yang digunakan untuk menentukan vektor eigen-vektor eigen matriks A_{λ} yang bebas linear

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu dalam kehidupan manusia yang memiliki lingkup penerapan yang sangat luas. Sistem produksi, sistem antrian, masalah tranportasi, dan masalah penjadwalan adalah sebagian kecil dari contoh penerapan matematika dalam kehidupan manusia, dimana aplikasi tersebut termasuk ke dalam contoh Sistem Kejadian Diskrit (SKD). Subiono [10] menjelaskan bahwa SKD merupakan sistem yang bekerja pada suatu komponen yang akan bekerja jika komponen lain telah selesai bekerja. Salah stau karakteristik dari SKD adalah dinamika berjalan, artinya yaitu proses operasi tidak dapat dimulai sebelum semua proses sebelumnya terselesaikan.

Aljabar maks-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum ($\oplus$) dan plus ($\otimes$). Himpunan $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut, $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ merupakan *semifield*. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dapat diperluas ke dalam bentuk matriks. Matriks atas aljabar maks-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon^n$. Himpunan $(\mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan *semifield* idempoten.

Masalah nilai eigen dan vektor eigen adalah salah satu konsep yang terdapat pada matriks atas aljabar maks-plus. Penyelesaian masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus adalah dengan menentukan nilai eigen (λ) dan vektor eigen (v) yang memenuhi persamaan $A \otimes v = \lambda \otimes v$, dengan matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$, konstanta $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$, dan $v \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ (Tam [11]). Menurut Rudhito [5] masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis jaringan, seperti penjadwalan proyek, sistem produksi, jaringan antrian, dan sebagainya. Dalam melakukan pendekatan aljabar maks-plus, kita diijinkan untuk menentukan dan menganalisa berbagai sifat sistem, tetapi pendekatan-pendekatan tersebut hanya dapat diterapkan pada sebagian kelas SED yang dapat diuraikan dengan model waktu invarian SED deterministik yang dapat digunakan untuk menganalisis perilaku suatu sistem yang ada.

Qanda Mathpresso adalah platform pendidikan global yang menyediakan data dan menghubungkan pendidikan dengan kesetaraan pendidikan. Kesenjangan pendidikan yang semakin memburuk, bahkan mulainya pendidikan setiap anak pun berbeda. Qanda Mathpressso mempunyai tujuan yaitu ingin mewujudkan kesetaraan pendidikan bersama dengan para guru di berbagai belahan dunia. Pilihan mata pelajaran yang disediakan pun sangat bervariasi, sehingga siswa-siswa akan terbantu dalam proses belajarnya. Semua kegiatan dalam aplikasi Qanda Mathpresso dioperasikan menggunakan koin. Mulai dari penyelesaian soal, hadiah penilaian jawaban, pembelian produk, dan lain-lain semuanya dilakukan dengan menggunakan koin. Banyaknya penanya di aplikasi ini, dan tutor yang hanya diijinkan untuk menngerjakan satu per satu pertanyaan dari siswa, membuat proses menjawab soal harus mengantri terlebih dahulu apabila dilihat dari sudut pandang tutor. Oleh karena itu, di dalam aplikasi ini dapat dikatakan terdapat suatu proses antrian, yang selanjutnya dapat dibentuk suatu sistem antrian.

Penelitian yang telah dilaksanakan oleh Bacelli *et al.* [1] bahwa suatu matriks dapat ditentukan suatu proyektor spektralnya. Kemudian Rudhito [6],[7] telah membahas aljabar maks-plus interval dan matriks atas aljabar maks-plus interval. Siswanto [8] telah membahas ruang vektor eigen suatu matriks atas aljabar maks-plus interval. Selain itu, Pramesthi [3] telah menjelaskan dan memberikan contoh penerapan aljabar maks-plus interval pada sistem antrian 5 server. Dari uraian tersebut, menarik untuk dikaji ulang tentang nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar maks-plus interval sekaligus memberikan contoh pada sistem antrian soal.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, didapatkan rumusan masalah yaitu bagaimana menentukan jadwal antrian soal Qanda Mathpresso dan analisis pengaruhnya menggunakan aljabar maks-plus interval.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diperoleh tujuan, yaitu dapat menentukan jadwal antrian soal Qanda Mathpresso dan analisis pengaruhnya.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yaitu diharapkan hasil analisis pengaruh sistem antrian yang diperoleh dapat mempermudah penanya soal untuk mengetahui kapan waktunya mendapatkan jawaban dari penyedia layanan/server. Selanjutnya penelitian ini juga diharapkan dapat menambah pengetahuan di bidang matematika, khususnya mengenai penerapan aljabar maks-plus interval pada sistem antrian.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini terdiri dari tiga bagian yaitu tinjauan pustaka, teori penunjang, dan kerangka pemikiran. Tinjauan pustaka memuat uraian hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu yang ada hubungannya dengan penelitian ini. Teori penunjang berisi definisi dan teori yang menjadi dasar dalam penelitian ini. Kemudian kerangka pemikiran berisi alur pemikiran sebagai tuntutan dalam pemecahan masalah penelitian.

2.1 Tinjauan Pustaka

Pada tahun 2001, Bacelli *et al.* [1] melakukan penelitian tentang aljabar maks. Kemudian pada tahun 2008, Rudhito [6] dan [7] mengembangkan aljabar maks-plus ke aljabar maks-plus interval dan matriks atas aljabar maks-plus interval. Lebih lanjut, pada tahun 2017, Siswanto [9] meneliti mengenai optimalisasi norma jangkauan vektor eigen atas aljabar maks-plus interval. Terakhir, pada tahun 2019, Pramesthi dan F. Adibah meneliti mengenai jadwal pelayanan sistem antrean 5 server dalam aljabar maks-plus interval.

Penelitian ini merupakan bentuk pengembangan penelitian dengan mengganti objek pengamatan menjadi antrian soal Qanda Mathpresso yang memiliki pemroses lebih kompleks jika dibanding hasil penelitian sebelumya yaitu terdapat n titik server di dalamnya, yang mana masing-masing titik server akan menjadi tempat-tempat terjadinya antrian soal.

2.2 Teori Penunjang

Berikut dijelaskan teori terkait konsep aljabar maks-plus, matriks atas aljabar maks-plus, nilai eigen dan vektor eigen, aljabar maks-plus interval, matriks atas aljbar maks-plus interval, masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus interval dan sistem antrian.

2.2.1 Aljabar Maks-Plus

Aljabar maks-plus adalah aljabar linear atas semiring $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ yang dilengkapi operasi maksimum ($\oplus$) dan penjumlahan ($\otimes$) (Tam [11]). Didefinisikan ($\forall x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$) berlaku

$$x \oplus y = \text{maks}(x, y) \text{ dan } x \otimes y = x + y.$$

Operasi aljabar maks-plus memiliki kemiripan dengan operasi $+$ dan $\times$ pada aljabar konvensional, sehingga beberapa konsep dan sifat-sifat dari aljabar konvensional dapat juga diterapkan dalam konsep aljabar maks-plus. Bacelli *et al.* [1] menyatakan bahwa $\mathbb{R}_\varepsilon$ merupakan *semifield* idempoten sedemikian sehingga untuk sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}_\varepsilon$ memenuhi

1. asosiatif

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= maks(maks(x, y), z) \\
&= maks(x, y, z) \\
&= maks(x, maks(y, z)) \\
&= x \oplus (y \oplus z) \\
(x \otimes y) \otimes z &= (x \otimes y) \otimes z \\
&= x \otimes y \otimes z \\
&= x \otimes (y \otimes z)
\end{aligned}$$

2. komutatif

$$x \oplus y = maks(x, y) = maks(y, x) = y \oplus x$$

$$x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$$

3. distributif

$$(x \oplus y) \otimes z = maks(x, y) + z = maks(x + z, y + z) = x \otimes z \oplus y \otimes z$$

$$x \otimes (y \oplus z) = x + maks(y, z) = maks(x + y, x + z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$$

4. memiliki elemen netral terhadap operasi $\oplus$, yaitu $\varepsilon = -\infty$

$$x \oplus \varepsilon = maks(x, -\infty) = x$$

$$\varepsilon \oplus x = maks(-\infty, x) = x$$

5. memiliki elemen satuan terhadap operasi $\otimes$, yaitu $0 = e$

$$x \otimes 0 = x + 0 = x$$

$$0 \otimes x = 0 + x = x$$

6. memiliki invers terhadap operasi $\otimes$, yaitu $(-x)$

$$x \otimes (-x) = x + (-x) = 0 = e$$

7. memiliki elemen penyerap sehingga $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$

8. idempoten terhadap $\oplus$, sehingga berlaku $x \oplus x = x$.

Definisi 2.2.1. *Untuk semua $n \in N$ dan $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$, pangkat n dari x dalam aljabar maks-plus adalah:*

$$x^{\otimes^n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{\text{sebanyak n}} = n \times x.$$

Secara umum: $x^{\otimes^n} = n \times x$, jika:

1. $x = \varepsilon$, untuk $n \in \mathbb{R}$,
   a. $n > 0$ maka $\varepsilon^{\otimes^n} = \varepsilon$,
   b. Sedangkan untuk $n \leq 0$ maka $\varepsilon^{\otimes^n}$ tidak terdefinisi.

2. $x \neq \varepsilon, x \in \mathbb{R}_\varepsilon$, untuk $n \in \mathbb{R}$,
   a. untuk $n = 0$ maka $\varepsilon^0 = 0$,
   b. sedangkan untuk $n \neq 0$, maka $x^{\otimes^n} = n \times x$.

Definisi 2.2.2. *Untuk $m, n \in N$ dan $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ maka berlaku:*

1. $(x \oplus y)^{\otimes^n} = x^{\otimes^n} \oplus y^{\otimes^n}$
2. $x^{\otimes^m} \otimes x^{\otimes^n} = x^{\otimes(m \otimes n)}$
3. $(x^{\otimes^m})^{\otimes^n} = x^{\otimes^{m \otimes^n}}$.

2.2.2 Matriks Atas Aljabar Maks-plus

Matriks dalam aljabar maks-plus memiliki kesamaan dengan matriks dalam aljabar konvensional/biasa. Menurut Subiono [10], himpunan matriks $m \times n$ dalam aljabar maks-plus dinyatakan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$ dengan $i = \{1, 2, \ldots, m\}$ dan $j = \{1, 2, \ldots, n\}$ dimana $m, n \in N$. Elemen matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$ pada baris ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan A_{ij}, untuk $i \in m$ dan $j \in n$. Matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$ dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Selanjutnya $(\forall m, n, p \in \mathbb{N})$, $(\forall A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n})$, $(\forall C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times p})$, $(\forall D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m \times m})$, dan $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon)$ berlaku

1. $A \oplus B$ dinyatakan sebagai $[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = maks(a_{ij}, b_{ij})$,
2. $B \otimes C$ dinyatakan sebagai
$$[B \otimes C]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} b_{ik} \otimes c_{kj} = maks_{k \in \{1,2,\ldots n\}}(b_{ik} + c_{kj}),$$
3. $\alpha \otimes A$ dinyatakan sebagai $[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$, dan
4. $D^{\otimes n} = \underbrace{D \otimes D \otimes \cdots \otimes D}_{\text{sebanyak n}}$.

2.2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi nilai eigen dan vektor eigen berikut mengacu pada Farlow [2].

Definisi 2.2.3. *Diberikan* $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{m\times n}$ *merupakan matriks bujursangkar. Jika* $\lambda \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ *merupakan skalar* $v \in \mathbb{R}_{\varepsilon}$ *merupakan skalar yang memuat paling sedikit satu elemen tidak nol, dan*

$$A \otimes v = \lambda \otimes v.$$

maka λ *disebut nilai eigen dari* A *dan* v *merupakan vektor eigen dari* A.

Definisi 2.2.4. *Diketahui himpunan* $V \neq \varnothing$ *dan* $E \subset V \times V$ *dengan* V *merupakan himpunan dengan anggota berhingga yang disebut node atau anggota dari E yang berupa pasangan berurutan disebut busur (edge atau arc). Selanjutnya,* $D = (V, E)$ *disebut sebagai graf berarah (directed graph).*

Definisi 2.2.5. *Suatu matriks* $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$ *dan* D_A *merupakan graf berarah berbobot yang bersesuaian dengan* A*. Matriks* A *disebut tak tereduksi jika* D_A *terhubung kuat. Jika tidak demikian, maka* A *disebut tereduksi.*

Selanjutnya, definisi berikut mengacu pada Rudhito [5], akan memberikan syarat perlu dan syarat cukup suatu matriks irredusibel.

Definisi 2.2.6. *Matriks* $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$ *irredusibel jika dan hanya jika* $(A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{n-1}})_{ij} \neq \varepsilon$ *untuk setiap* i, j *dengan* $i \neq j$.

Definisi 2.2.7. *Misalkan* $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$ *dan* D_A *merupakan graf berarah berbobot yang bersesuian dengan* A*. Misalkan* σ *adalah sikel dalam* D_A*. Didefinisikan* $\mu(\sigma, A) = \frac{w(\sigma,A)}{l(\sigma)}$ *dengan* $w(\sigma)$ *merupakan bobot dari sikel dan* $l(\sigma)$ *merupakan panjang dari sikel. Bilangan* $\mu(\sigma, A)$ *disebut rata-rata bobot dari sikel* σ *dan* $\lambda(A) = maks_{\sigma}\mu(\sigma, A)$ *yaitu rata-rata bobot maksimum dari* A.

Definisi 2.2.8. *Jika* $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$ *dan* $\lambda(A) > \varepsilon, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ *maka* $\lambda(\alpha\otimes A) = \alpha\otimes\lambda(A)$.

Untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks dalam aljabar maks-plus digunakan suatu algoritme menurut Subiono [10], yaitu:

1. mulai dari sebarang vektor awal $v(0) \neq \varepsilon$,

2. iterasi persamaan $x(k+1) = A \otimes k, k = 0, 1, 2, \ldots$, sampai ada bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sehingga suatu peristiwa periodik terjadi, yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$,

3. hitung nilai eigen $\lambda = \frac{c}{p-q}$,

4. hitung vektor eigen $v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$.

2.2.4 Aljabar Maks-Plus Interval

Aljabar maks-plus interval adalah himpunan $\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ yang didefinisikan

$$I(\mathbb{R})_\varepsilon = \{x = [\underline{x}, \overline{x}] | \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}_\varepsilon, \varepsilon < \underline{x} \leq \overline{x}\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

Pada $\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan $\forall x, y \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ sehingga berlaku $x \overline{\oplus} y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan $x \overline{\otimes} y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan $(\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral $\overline{\varepsilon} = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen identitas $\overline{0} = [0, 0]$. Lebih lanjut, karena $(\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten komutatif, maka $(\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif. Relasi " $\leq$ " " $\leq$ " yang didefinisikan pada $\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ sebagai berikut: $x \leq y \leftrightarrow x \overline{\oplus} y = y$ yang merupakan urutan parsial pada $\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$. Perhatikan bahwa $x \overline{\oplus} y = y \leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y}$ dan $\overline{x} \leq \overline{y}$.

Semiring idempoten komutatif $(\mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ bukan merupakan *semifield*, karena tidak setiap elemen tak netralnya mempunyai invers. Elemen satuan, yaitu $0 = [0, 0]$ berupa bilangan real $x = [x, x]$ dengan $x \neq 0$. Sementara untuk $x = [\underline{x}, \overline{x}]$ dengan $\varepsilon <_m \underline{x} <_m \overline{x}$ tidak mempunyai invers. Perhatikan untuk $-x = [-\underline{x}, -\overline{x}]$ didapat bahwa $x \overline{\otimes} (-x) = [\underline{x} \otimes (-\overline{x}), \overline{x} \otimes -\underline{x}]$ yang berupa interval dengan panjang $2\overline{x} - 2\underline{x}$.

Definisi 2.2.9. *Misalkan S adalah himpunan terurut parsial dengan relasi $\preceq$. Suatu interval tak sejati dalam S adalah bentuk $[\underline{x}, \overline{x}]$ dengan $\underline{x}, \overline{x} \in S$ dan $\overline{x} \preceq$*

$\underline{x}$. *Suatu interval tak sejati dalam S, kadang akan cukup dituliskan dengan* x^*, *dimana* $x^* = [\underline{x}, \overline{x}]$. *Interval* $x = [\underline{x}, \overline{x} \in \mathrm{I}(S)]$ *disebut interval sejati.*

Definisi 2.2.10. *Diberikan* $(S, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ *adalah suatu* semifield, *maka* $(\mathrm{I}(S)^*, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ *dengan definisi operasi pada* $\mathrm{I}(S)$ *merupakan* semifield.

Definisi 2.2.11. *Aljabar* $\mathrm{I}(\mathbb{R})^*_\varepsilon = (\mathrm{I}(\mathbb{R})^*_\varepsilon, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ *merupakan semifield.*

2.2.5 Matriks Atas Aljabar Maks-Plus Interval

Definisi 2.2.12. *Didefinisikan* $\mathrm{I}(\mathbb{R})^{m\times n}_\varepsilon := \{A = (A_{ij}) | A_{ij} \in (\mathbb{R})_\varepsilon$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}$. *Matriks anggota* $\mathrm{I}(\mathbb{R})^{m\times n}_\varepsilon$ *disebut matriks atas aljabar maks-plus interval.*

Definisi 2.2.13. *Matriks* $A, B \in \mathrm{I}(\mathbb{R})^{m\times n}_\varepsilon$ *dikatakan sama jika* $A_{ij} = B_{ij}$, *yaitu jika* $\underline{A_{ij}} = \underline{B_{ij}}$ *dan* $\overline{A_{ij}} = \overline{B_{ij}}$ *untuk setiap* i *dan* j.

Definisi 2.2.14. *Didefinisikan* $A, B \in \mathrm{I}(\mathbb{R})^{m\times n}_\varepsilon$.

1. *Diketahui* $\alpha \in I(\mathbb{R})^{m\times n}_\varepsilon$. *Didefinisikan operasi perkalian skalar dengan* $\alpha \overline{\otimes} A$ *adalah matriks yang unsur ke*$-_{ij}$: $(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$, *dan operasi* $\overline{\oplus}$ *dengan* $A \overline{\oplus} B$ *adalah matriks yang unsur ke*$-_{ij}$*-nya:*$(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$ *untuk* $i = 1, 2, \ldots, m$ *dan* $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. *Diketahui* $A \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^{m\times p}_\varepsilon), B \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^{p\times n}_\varepsilon)$. *Didefinisikan operasi* $\overline{\otimes}$ *dengan* $A \overline{\otimes} B$ *adalah matriks yang unsur ke*$-_{ij}$*:*$(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \overline{\bigoplus} A_{ik} \overline{\otimes} B_{kj}$ *untuk* $i = 1, 2, \ldots, m$ *dan* $j = 1, 2, \ldots n$.

Definisi 2.2.15. *Untuk setiap matriks interval* $A \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_\varepsilon)$ *didefinisikan matriks* $\underline{A} = (\underline{A_{ij}}) \in \mathbb{R}^{m\times n}_\varepsilon$ *dan* $\overline{A} = (\overline{A_{ij}}) \in \mathbb{R}^{m\times n}_\varepsilon$ *yang berturut-turut disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas interval* A.

Definisi 2.2.16. *Interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ *dan* $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_\varepsilon)^b$ *dikatakan sama jika* $\underline{A} = \underline{B}$ *dan* $\overline{A} = \overline{B}$. *Untuk setiap* $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^{m\times n}_\varepsilon)^b$ *dan* $\alpha \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon$ *berlaku* $\underline{A} \preceq_m \overline{A}$ *dan* $\underline{B} \preceq_m \overline{B}$.

Selanjutnya, disajikan konsep graf berarah berbobot interval. Diberikan graf berarah $D = (N, E)$ dengan $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Graf berarah dikatakan berbobot interval jika setiap busur $(j, i) \in E$ dikawankan dengan suatu interval tertutup bilangan real $A_{ij} \in (I(\mathbb{R}_\varepsilon) - \{[\varepsilon, \varepsilon]\})$. Interval bilangan real A_{ij} disebut bobot interval busur (j, i) dinotasikan dengan $w(i, j)$. Didefinisikan graf perseden interval (graf komunikasi interval) dari matriks $A \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})$ adalah graf berbobot interval $D_A = (N, E)$ dengan $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ dan $E = \{(j, i)|w(i, j) = A_{ij} \neq [\varepsilon, \varepsilon]\}$.

Sebaliknya untuk setiap graf berarah berbobot interval $D_A = (N, E)$ selalu dapat didefinisikan suatu $A \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ yang disebut sebagai matriks bobot interval graf D dengan $A_{ij} = \begin{cases} w(j,i), \text{ jika } (i,j) \in E \\ [\varepsilon, \varepsilon], \text{ jika } (i,j) \in E \end{cases}$.

2.2.6 Masalah Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Atas Aljabar Maks-Plus Interval

Definisi masalah nilai eigen dan vektor eigen berikut mengacu pada Siswanto [9].

Definisi 2.2.17. *Diketahui $A \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_{maks}^{n\times n}$, dengan $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ dan D_A terhubung kuat. Suatu interval $\lambda(A) = [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})]$ merupakan suatu nilai eigen maks-plus interval matriks A sehingga berlaku $\bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}(A^{\otimes^k})_{ii})$.*

Lemma ini menjelaskan tentang vektor eigen matriks A, jika $\lambda(A) = [\varepsilon, \varepsilon]$. Selanjutnya, akan dibicarakan untuk $[\varepsilon, \varepsilon] < [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})] = \lambda(A)$. Misalkan $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^n, A = [\underline{A}, \overline{A}] \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$ dan $\lambda(A) = [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})] > [\varepsilon, \varepsilon]$ merupakan nilai eigen matriks A. Karena $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$ masing-masing nilai eigen matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ dengan $\underline{\lambda}(\underline{A}) > \varepsilon$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A}) > \varepsilon$ maka dapat ditentukan matriks-matriks $\Gamma(\underline{A}_\lambda) = (\underline{g}_{ij})$ dan $\Gamma(\overline{A}_\lambda) = (\overline{g}_{ij})$.

Teorema 2.2.1. *Diketahui $A \in \mathrm{I}(\mathbb{R})_\varepsilon^n, A \approx [\underline{A}, \overline{A}] \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_\varepsilon^n)_b$ dan $\lambda(A)$ merupakan nilai eigen matriks A. Jika $[\varepsilon, \varepsilon] < \lambda(A)$, maka kolom-kolom dari $\Gamma(A_\lambda)$ yang* *batas bawah elemen diagonalnya 0 dan batas atasnya sebagai vektor eigen matriks A, merupakan vektor eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda(A)$.*

Dibentuk matriks $\Gamma(A_\lambda)$ dengan kolom-kolomnya ditentukan sebagai berikut:

1. Jika untuk suatu k pasangan $\underline{g}_k$ dan $\overline{g}_k$ berlaku $\underline{g}_k \leq \overline{g}_k$, maka dapat ditentukan kolom-k sebagai vektor interval $g_k \approx [\underline{g}_k, \overline{g}_k]$.

2. Jika untuk suatu k pasangan $\underline{g}_k$ dan $\overline{g}_k$ tidak berlaku $\underline{g}_k \leq \overline{g}_k$, maka ditentukan $\overline{g}_k^* = \gamma \otimes \overline{g}_k$ dengan $\gamma = \text{maks}_i\ ((\underline{g}_k)_i - (\overline{g}_k)_i), i = 1, 2, ..., n$ dan kolom-k sebagai vektor interval $g_k \leq [\underline{g}_k, \overline{g}_k^*]$.

2.2.7 Sistem Antrian

Sistem antrian merupakan himpunan yang terdiri dari pelayan, *customer*, dan aturan yang mengatur kedatangan *customer*. Proses antrian merupakan proses yang berkaitan dengan kedatangan *customer* pada suatu sistem antrian kemudian menunggu di antrian sampai pegawai melayani *customer* sesuai disiplin *customer* dan akhirnya *customer* meninggalkan sistem antrian ketika selesai mendapatkan pelayanan.

Misalkan $u(k)$ adalah waktu kedatangan *customer* ke-k, B adalah lama waktu kedatangan *customer* ke-(*k+1*) pada titik i dimana i menyatakan *place* pada sistem. Sedangkan k merupakan urutan dari sistem dengan $k = 1, 2, \ldots, n$. A merupakan lama waktu pada sistem, $x(k)$ adalah waktu pemroses ke-i mulai bekerja untuk proses ke-k, $y(k)$ adalah waktu saat *customer* meninggalkan sistem untuk proses ke-k, serta C adalah lama waktu *customer* yang selesai dilayani. Jika dimisalkan $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)]^T$ untuk persamaan $x_i(k+1) = A_{ij} \otimes x_i(k) \oplus B \otimes u(k)$, maka dapat disajikan dalam persamaan

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k)$$
$$y(k) = C \otimes x(k).$$

Oleh karena diasumsikan bahwa $u(k+1) = y(k)$, maka

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1) \\ y(k) &= C \otimes x(k). \end{aligned}$$

Jadi diperoleh persamaan keadaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes C \otimes x(k) \\ x(k+1) &= (A \oplus B \otimes C) \otimes x(k). \end{aligned}$$

Jadwal proses antrian dapat dibentuk dengan menentukan waktu periodik proses antrian dari nilai eigen matriks A dan waktu awal masing-masing pemroses mulai bekerja ditentukan dari vektor eigen matriks A.

2.3 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka dapat disusun kerangka pemikiran untuk menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini. Pertama-tama, akan dijelaskan profil perusahaan Qanda Mathpresso. Kemudian setelah memahami profil tersebut, akan dipahami tentang penerapan masalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus interval pada sistem antrian. Dalam menerapkannya, diperlukan data tahapan-tahapan proses antrian dan waktu di tiap-tiap unit pemrosesnya yang diambil dari pengamatan langsung. Data yang diperoleh dapat digunakan untuk menyusun bagan alur dari antrian soal dan konstruksi model sistem linear atas aljabar maks-plus menjadi berbentuk $x(k+1) = (A \oplus B \otimes C) \otimes x(k)$.

Kemudian dapat digunakan asumsi waktu saat soal masuk ke dalam sistem dengan waktu saat soal meninggalkan sistem, sehingga diperoleh matriks $\bar{A} = A \oplus B \otimes C$. Jadwal proses antrian dapat dibentuk dengan menentukan waktu periodik proses antrian dari nilai eigen matriks A dan waktu awal masing-masing pemroses mulai bekerja ditentukan dari vektor eigen matriks $\overline{A}$.

2.4 Asumsi Penelitian

Asumsi yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini, yaitu

1. sistem antrian adalah sistem yang dimulai sejak pelanggan masuk ke sistem sampai dengan pelanggan meninggalkan sistem,

2. waktu antrian setiap soal tetap sesuai dengan data, dan

3. beberapa hal yang diabaikan peneliti, seperti kesalahan teknis yang dialami aplikasi Qanda dan kesalahan teknis yang dialami oleh penjawab soal.

BAB III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan studi lapangan. Studi literatur dilakukan dengan mempelajari referensi berupa buku, jurnal, skripsi, dan tesis mengenai aljabar maks-plus interval, terutama materi yang berkaitan dengan masalah sistem antrian, sedangkan studi lapangan dilakukan pada proses pengambilan data berupa waktu kerja setiap pemroses pada aplikasi Qanda Mathpresso sampai jawaban soal diterima oleh penanya soal. Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini, yaitu

1. menjelaskan profil sistem antrian soal Qanda Mathpresso,
2. membuat bagan alur proses antrian Qanda Mathpresso,
3. membangun matriks atas aljabar maks-plus interval dari bagan alur proses antrian,
4. menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks yang diperoleh,
5. menentukan jadwal antrian, dan
6. menentukan pengaruh penerapan jadwal antrian yang diperoleh terhadap perkiraan lama waktu penyelesaian soal dan banyak soal yang bisa diselesaikan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diberikan hasil penelitian dan pembahasan yang terdiri dari dua bagian. Bagian pertama dijelaskan mengenai profil sistem antrian soal Qanda Mathpresso. Bagian kedua dijelaskan pemecahan masalah sistem antrian soal Qanda Mathpresso dan penyusunan jadwal antrian.

4.1 Profil Sistem Antrian Soal Qanda Mathpresso

Qanda adalah platform pendidikan global, menyediakan data dan menghubungkan pendidikan dengan kesetaraan peluang pendidikan. Platform Qanda ini sudah dirilis pada 25 Maret 2017 dan sampai tahun ini sudah diunduh lebih dari 65 juta murid yang berasal dari 50+ negara. Qanda memiliki visi untuk mewujudkan kesetaraan pendidikan bersama dengan para guru sehingga tidak menjadikan perbedaan dalam belajar meskipun murid-murid berbeda asal daerahnya. Semua kegiatan dalam aplikasi Qanda dioperasikan menggunakan koin. Penyelesaian soal, hadiah penilaian jawaban, pembelian produk, dan lain-lain, semuanya dilakukan dengan menggunakan koin. Jawaban atas pertanyaan yang masuk selalu dijawab dengan lengkap dan berkualitas tinggi sebab akan berpengaruh pada pemberian hadiah koin apabila murid merasa puas dengan jawaban tutor.

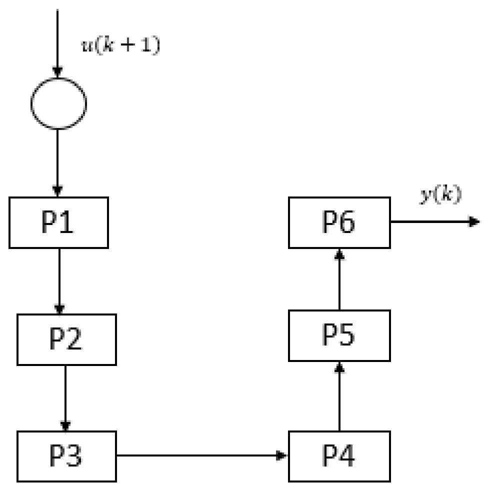
Proses antrian soal Qanda Mathpresso melalui beberapa proses. Berikut adalah urutan tahap proses antrian soal Qanda Mathpresso beserta interval waktunya.

1. Penjawab mengambil soal yang masuk di aplikasi dengan waktu d_1 detik.

2. Penjawab memberikan perkiraan lama waktu penyelesaian soal berlangsung selama d_2 detik.

3. Penjawab mengerjakan soal yang masuk di halaman beranda aplikasi, berlangsung selama d_3 detik.
4. Penjawab memfoto jawaban soal selama d_4 detik.
5. Penanya menerima jawaban soal dan mengecek selama d_5 detik.
6. Penanya menyetujui jawaban dan memberikan ulasan kepada penjawab soal selama d_6 detik.

Berdasarkan hasil studi lapangan yang telah dilakukan, diperoleh bagan alur antrian soal Qanda Mathpresso seperti pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Bagan Alur Antrian Soal Qanda Mathpresso

Pada Gambar 4.1 notasi $P_1, P_2, \cdots, P_6$ merupakan tahapan proses antrian soal Qanda Mathpresso secara berurutan dan waktu yang diperlukan oleh setiap proses dinotasikan $d_1, d_2, \cdots, d_6$. Waktu saat informasi soal tambahan masuk ke sistem untuk proses ke-$k+1$ dinotasikan $u_1(k+1)$, sedangkan $y(k)$ merupakan notasi yang menyatakan waktu saat penanya meninggalkan sistem untuk proses ke-k dengan $k \in \mathbb{N}$.

Didefinisikan $x_i(k)$ adalah waktu saat pemroses ke-i mulai bekerja untuk proses ke-k dengan $i = 1, 2, \cdots, 6$. Selanjutnya ditentukan $x_1(k+1)$, $x_2(k+1)$,

$\cdots$, $x_6(k+1)$ yaitu waktu saat $P_1, P_2, \cdots, P_6$ mulai bekerja untuk proses ke-$(k+1)$ sebagai berikut.

Ditentukan waktu pemroses P_1 mulai bekerja untuk proses ke-$(k+1)$. Ketika foto informasi soal tambahan masuk ke sistem pada proses ke-$(k+1)$, maka informasi soal tambahan ini menjadi input P_1 pada waktu $u_1(k+1)$. Namun, P_1 hanya dapat mulai bekerja setelah proses ke-k dengan waktu d_1 detik selesai dikerjakan. Waktu proses P_1 selesai pada saat $x_1(k) + d_1$. Sehingga diperoleh waktu P_1 mulai bekerja untuk proses ke-$k+1$ yaitu

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= maks\{x_1(k) + d_1, u_1(k+1)\} \\ &= d_1 \otimes x_1(k) \oplus u_1(k+1). \end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan waktu ketika pemroses P_2 mulai bekerja untuk proses ke $-(k+1)$. Pemroses P_2 dapat mulai bekerja untuk proses ke-$(k+1)$ setelah P_1 menyelesaikan proses ke-$k+1$ selama d_1 detik dan setelah P_2 menyelesaikan proses ke-k selama d_2 detik. Waktu pemroses P_1 akan selesai pada saat $x_1(k+1)+d_1$ dan waktu pemroses P_2 akan selesai pada saat $x_2(k) + d_2$. Sehingga waktu P_2 mulai bekerja untuk proses ke-$(k+1)$ adalah

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= maks\{x_1(k+1) + d_1, x_2(k) + d_2\} \\ &= 2d_1 \otimes x_1(k) \oplus d_2 \otimes x_2(k) \oplus d_1 \otimes u_1(k+1). \end{aligned}$$

Berikutnya waktu pemroses P_3, P_4, P_5 dan P_6 mulai bekerja untuk proses ke-$(k+1)$ ditentukan menggunakan cara yang sama sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= maks\{x_2(k+1) + d_2, x_3(k) + d_3\} \\ &= (2d_1 + d_2) \otimes x_1(k) \oplus 2d_2 \otimes x_2(k) \oplus d_3 \otimes x_3(k) \oplus (d_1 + d_2) \otimes u_1(k+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(k+1) &= maks\{x_3(k+1) + d_3, x_4(k) + d_4\} \\ &= (2d_1 + d_2 + d_3) \otimes x_1(k) \oplus (2d_2 + d_3) \otimes x_2(k) \oplus 2d_3 \otimes x_3(k) \oplus d_4 \otimes x_4(k) \\ &\quad \oplus (d_1 + d_2 + d_3) \otimes u_1(k+1). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_5(k+1) &= maks\{x_4(k+1)+d_4, x_5(k)+d_5\}\\
&= (2d_1+d_2+d_3+d_4)\otimes x_1(k)\oplus(2d_2+d_3+d_4)\otimes x_2(k)\oplus(2d_3+d_4)\otimes x_3(k)\\
&\quad \oplus 2d_4\otimes x_4(k)\oplus d_5\otimes x_5(k)\oplus(d_1+d_2+d_3+d_4)\otimes u_1(k+1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_6(k+1) &= maks\{x_5(k+1)+d_5, x_6(k)+d_6\}\\
&= (2d_1+d_2+d_3+d_4+d_5)\otimes x_1(k)\oplus(2d_2+d_3+d_4+d_5)\otimes x_2(k)\oplus\\
&\quad (2d_3+d_4+d_5)\otimes x_3(k)\oplus(2d_4+d_5)\otimes x_4(k)\oplus 2d_5\otimes x_5(k)\oplus d_6\otimes x_6(k)\\
&\quad \oplus(d_1+d_2+d_3+d_4+d_5)\otimes u_1(k+1).
\end{aligned}
$$

4.2 Pemecahan Masalah Sistem Antrian Soal Qanda Mathpresso dan Penyusunan Jadwal Antrian

Andaikan diberikan nilai waktu dari beberapa peubah yaitu $d_1 = [5,10], d_2 = [5,10], d_3 = [120,600], d_4 = [5,20], d_5 = [10,60], d_6 = [5,10]$. Setelah melewati semua tahapan proses antrian, diperoleh waktu saat soal meninggalkan sistem untuk proses ke-k yaitu $y(k) = x_6(k) + [10,20] = [10,20] \otimes x_6(k)$. Berdasarkan data tersebut diperoleh

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= d_1\otimes x_1(k)\oplus u_1(k+1)\\
&= [5,10]\otimes x_1(k)\oplus u_1(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2(k+1) &= 2d_1\otimes x_1(k)\oplus d_2\otimes x_2(k)\oplus d_1\otimes u_1(k+1)\\
&= 2[5,10]\otimes x_1(k)\oplus[5,10]\otimes x_2(k)\oplus[5,10]\otimes u_1(k+1)\\
&= [10,20]\otimes x_1(k)\oplus[5,10]\otimes x_2(k)\oplus[5,10]\otimes u_1(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3(k+1) &= (2d_1+d_2)\otimes x_1(k)\oplus 2d_2\otimes x_2(k)\oplus d_3\otimes x_3(k)\oplus(d_1+d_2)\otimes u_1(k+1)\\
&= (2[5,10]+[5,10])\otimes x_1(k)\oplus 2[5,10]\otimes x_2(k)\oplus[120,600]\otimes x_3(k)\oplus\\
&\quad ([5,10]+[5,10])\otimes u_1(k+1)\\
&= [15,30]\otimes x_1(k)\oplus[10,20]\otimes x_2(k)\oplus[120,600]\otimes x_3(k)\oplus[10,20]\otimes u_1(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_4(k+1) &= (2d_1+d_2+d_3)\otimes x_1(k)\oplus(2d_2+d_3)\otimes x_2(k)\oplus 2d_3\otimes x_3(k)\oplus d_4\otimes x_4(k)\\
&\quad\oplus(d_1+d_2+d_3)\otimes u_1(k+1)\\
&= (2[5,10]+[5,10]+[120,600])\otimes x_1(k)\oplus(2[5,10]+[120,600])\otimes x_2(k)\\
&\quad\oplus 2[120,600]\otimes x_3(k)\oplus[5,20]\otimes x_4(k)\oplus([5,10]+[5,10]+[120,600])\otimes u_1(k+1)\\
&= [135,630]\otimes x_1(k)\oplus[130,620]\otimes x_2(k)\oplus[240,1200]\otimes x_3(k)\oplus[5,20]\\
&\quad\otimes x_4(k)\oplus[130,620]\otimes u_1(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_5(k+1) &= (2d_1+d_2+d_3+d_4)\otimes x_1(k)\oplus(2d_2+d_3+d_4)\otimes x_2(k)\oplus(2d_3+d_4)\otimes x_3(k)\\
&\quad\oplus 2d_4\otimes x_4(k)\oplus d_5\otimes x_5(k)\oplus(d_1+d_2+d_3+d_4)\otimes u_1(k+1)\\
&= (2[5,10]+[5,10]+[120,600]+[5,20])\otimes x_1(k)\oplus(2[5,10]+[120,600]+[5,20])\\
&\quad\otimes x_2(k)\oplus(2[120,600]+[5,20])\otimes x_3(k)\oplus 2[5,20]\otimes x_4(k)\oplus[10,60]\otimes x_5(k)\oplus\\
&\quad([5,10]+[5,10]+[120,600]+[5,20])\otimes u_1(k+1)\\
&= [140,650]\otimes x_1(k)\oplus[135,640]\otimes x_2(k)\oplus[245,1220]\otimes x_3(k)\oplus[10,40]\otimes x_4(k)\\
&\quad\oplus[10,60]\otimes x_5(k)\oplus[135,640]\otimes u_1(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_6(k+1) &= (2d_1+d_2+d_3+d_4+d_5)\otimes x_1(k)\oplus(2d_2+d_3+d_4+d_5)\otimes x_2(k)\oplus\\
&\quad(2d_3+d_4+d_5)\otimes x_3(k)\oplus(2d_4+d_5)\otimes x_4(k)\oplus 2d_5\otimes x_5(k)\oplus d_6\otimes x_6(k)\\
&\quad\oplus(d_1+d_2+d_3+d_4+d_5)\otimes u_1(k+1)\\
&= (2[5,10]+[5,10]+[120,600]+[5,20]+[10,60])\otimes x_1(k)\oplus\\
&\quad(2[5,10]+[120,600]+[5,20]+[10,60])\otimes x_2(k)\oplus(2[120,600]+[5,20]+[10,60])\\
&\quad\otimes x_3(k)\oplus(2[5,20]+[10,60])\otimes x_4(k)\oplus 2[10,60]\otimes x_5(k)\oplus[5,10]\otimes x_6(k)\\
&\quad\oplus([5,10]+[5,10]+[120,600]+[5,20]+[10,60])\otimes u_1(k+1)\\
&= [150,710]\otimes x_1(k)\oplus[145,700]\otimes x_2(k)\oplus[255,1280]\otimes x_3(k)\oplus[20,100]\otimes\\
&\quad x_4(k)\oplus[20,120]\otimes x_5(k)\oplus[5,10]\otimes x_6(k)\oplus[145,700]\otimes u_1(k+1)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, diperoleh matriks interval $A=[\underline{A},\overline{A}]$ yaitu matriks *adjacent* interval lama waktu pada sistem jaringan antrian sebagai berikut:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & \varepsilon \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{A} = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & \varepsilon \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & \varepsilon \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 10 \end{bmatrix}$$

Untuk menjalankan evolusi dari $u(k+1)$, maka diperlukan matriks interval B yaitu

$$B = \begin{bmatrix} [0,0] & [5,10] & [10,20] & [130,620] & [135,640] & [145,700] \end{bmatrix}^T.$$

Selanjutnya diberikan interval lama waktu penanya yang telah selesai mendapatkan pelayanan $C = [5,10]$, sehingga diperoleh matriks interval C yaitu

$$C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & [5,10] \end{bmatrix}.$$

Apabila telah ditentukan matriks interval A, matriks interval B, dan matriks interval C, maka didapatkan matriks dengan mengoperasikan matriks interval A, matriks interval B, dan matriks interval C dengan menggunakan operasi aljabar maks-plus interval yakni $x(k+1) = (A \oplus B \otimes C) \otimes x(k)$. Misalkan matriks $D = (A \oplus B \otimes C) = [\underline{D}, \overline{D}]$, berarti

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & 15 \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & 135 \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & 140 \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 150 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{D} = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & 640 \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & 660 \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 720 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Teorema 2.2.1, diperoleh cara untuk menentukan himpunan vektor eigen-vektor eigen suatu matriks sebagai pembangun ruang vektor eigen. Berikut ini ilustrasi bagaimana menentukan vektor eigen-vektor eigen untuk matriks $D = [\underline{D}, \overline{D}]$.

Nilai eigen matriks $\underline{D}$ yaitu

$$\begin{aligned}\underline{\lambda}(\underline{D}) &= \bigoplus_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}(\underline{D}^{\otimes^k})_{ii})\\ &= (150) \oplus \frac{1}{2}(300) \oplus \frac{1}{3}(450) \oplus \frac{1}{4}(600) \oplus \frac{1}{5}(700) \oplus \frac{1}{6}(900)\\ &= 150.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\underline{D}_{\underline{\lambda}} = -\underline{\lambda}(\underline{D}) \otimes \underline{D} = -150 \otimes \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & 15 \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & 135 \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & 140 \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 150 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -145 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -145 \\ -140 & -145 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -140 \\ -135 & -140 & -30 & \varepsilon & \varepsilon & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & \varepsilon & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix}$$

Berarti,

$$\Gamma(\underline{D_{\gamma}}) = \underline{D}_{\underline{\lambda}} \oplus \underline{D}_{\underline{\lambda}}^{\otimes 2} \oplus \underline{D}_{\underline{\lambda}}^{\otimes 3} \oplus \underline{D}_{\underline{\lambda}}^{\otimes 4} \oplus \underline{D}_{\underline{\lambda}}^{\otimes 5} \oplus \underline{D}_{\underline{\lambda}}^{\otimes 6}$$

$$= \begin{bmatrix} -145 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -145 \\ -140 & -145 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -140 \\ -135 & -140 & -30 & \varepsilon & \varepsilon & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & \varepsilon & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks $\overline{D}$ yaitu

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}(\overline{D}) &= \bigoplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\bigoplus_{i=1}^{n}(\overline{D}^{\otimes^k})_{ii}\right) \\ &= (720) \oplus \frac{1}{2}(1440) \oplus \frac{1}{3}(2160) \oplus \frac{1}{4}(2880) \oplus \frac{1}{5}(3600) \oplus \frac{1}{6}(4320) \\ &= 720. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\overline{D}_{\overline{\lambda}} = -\overline{\lambda}(\overline{D}) \otimes \overline{D} = -720 \otimes \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & 640 \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & 660 \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 720 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -710 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -700 \\ -700 & -710 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -690 \\ -690 & -700 & -120 & \varepsilon & \varepsilon & -680 \\ -90 & -100 & 480 & -700 & \varepsilon & -80 \\ -70 & -80 & 500 & -680 & -660 & -60 \\ -10 & -20 & 560 & -620 & -600 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berarti,

$$\Gamma(\overline{D}_{\overline{\gamma}}) = \overline{D}_{\overline{\lambda}} \oplus \overline{D}_{\overline{\lambda}}^{\otimes 2} \oplus \overline{D}_{\overline{\lambda}}^{\otimes 3} \oplus \overline{D}_{\overline{\lambda}}^{\otimes 4} \oplus \overline{D}_{\overline{\lambda}}^{\otimes 5} \oplus \overline{D}_{\overline{\lambda}}^{\otimes 6}$$

$$= \begin{bmatrix} -710 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -700 \\ -700 & -710 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -690 \\ -690 & -700 & -120 & \varepsilon & \varepsilon & -680 \\ -90 & -100 & 480 & -700 & \varepsilon & -80 \\ -70 & -80 & 500 & -680 & -660 & -60 \\ -10 & -20 & 560 & -620 & -600 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots$$

$$\oplus \begin{bmatrix} -710 & -720 & -140 & -1320 & -1300 & -700 \\ -700 & -710 & -130 & -1310 & -1290 & -690 \\ -690 & -700 & -120 & -1300 & -1280 & -680 \\ -90 & -100 & 480 & -700 & -680 & -80 \\ -70 & -80 & 500 & -680 & -660 & -60 \\ -10 & -20 & 560 & -620 & -600 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -710 & -720 & -140 & -1320 & -1300 & -700 \\ -700 & -710 & -130 & -1310 & -1290 & -690 \\ -690 & -700 & -120 & -1300 & -1280 & -680 \\ -90 & -100 & 480 & -700 & -680 & -80 \\ -70 & -80 & 500 & -680 & -660 & -60 \\ -10 & -20 & 560 & -620 & -600 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan memperhatikan matriks $\Gamma(\underline{D}_{\underline{\lambda}})$ dan $\Gamma(\overline{D}_{\overline{\lambda}})$, diperoleh $E(\underline{D}) = \{1, 6\}$ dan $E(\overline{D}) = \{6\}$, berarti $E(D) = \{6\}$. Selanjutnya, diperhatikan kolom-kolom yang bersesuaian dari matriks $\Gamma(\underline{D}_{\underline{\lambda}})$ dan $\Gamma(\overline{D}_{\overline{\lambda}})$.

1. Kolom pertama, $\underline{g}_1 = \begin{bmatrix} -145 & -140 & -135 & -15 & -10 & 0 \end{bmatrix}^T$ tidak lebih kecil atau sama dengan $\overline{g}_1 = \begin{bmatrix} -710 & -700 & -690 & -90 & -70 & -10 \end{bmatrix}^T$. Ambil $\delta = \text{maks}_i\,((\underline{g}_1)_i - (\overline{g}_1)_i) = \text{maks}\,(565, 560, 555, 75, 60, 10) = 565$. Berarti, $\overline{g}_1^* = \begin{bmatrix} -145 & -135 & -125 & 475 & 495 & 555 \end{bmatrix}^T$.

2. Kolom kedua, $\underline{g}_2 = \begin{bmatrix} -150 & -145 & -140 & -20 & -15 & -5 \end{bmatrix}^T$ tidak lebih kecil atau sama dengan $\overline{g}_2 = \begin{bmatrix} -720 & -710 & -700 & 100 & -80 & -20 \end{bmatrix}^T$. Ambil $\delta = \text{maks}_i\,((\underline{g}_2)_i - (\overline{g}_2)_i) = \text{maks}\,(570, 565, 560, -120, 65, 15) = 570$. Berarti, $\overline{g}_2^* = \begin{bmatrix} -150 & -140 & -130 & 670 & 490 & 550 \end{bmatrix}^T$.

3. Kolom ketiga, $\underline{g}_3 = \begin{bmatrix} -40 & -35 & -30 & 90 & 95 & 105 \end{bmatrix}^T$ tidak lebih kecil atau sama dengan $\overline{g}_3 = \begin{bmatrix} -140 & -130 & -1200 & 480 & 500 & 560 \end{bmatrix}^T$. Ambil $\delta = \text{maks}_i\,((\underline{g}_3)_i - (\overline{g}_3)_i) = \text{maks}\,(100, 95, 90, -390, -405, -455) = 100$. Berarti, $\overline{g}_3^* = \begin{bmatrix} -40 & -30 & -20 & 580 & 600 & 660 \end{bmatrix}^T$.

4. Kolom keempat, $\underline{g}_4 = \begin{bmatrix} -275 & -270 & -265 & -145 & -140 & -130 \end{bmatrix}^T$ tidak lebih kecil atau sama dengan $\overline{g}_4 =$ $\begin{bmatrix} -1320 & -1310 & -1300 & -700 & -680 & -620 \end{bmatrix}^T$. Ambil $\delta = \text{maks}_i\,((\underline{g}_4)_i - (\overline{g}_4)_i) = \text{maks}\,(1045, 1040, 1035, 555, 540, 490) = 1045$. Berarti, $\overline{g}_4^* =$ $\begin{bmatrix} -275 & -265 & -255 & 345 & 365 & 425 \end{bmatrix}^T$.

5. Kolom kelima, $\underline{g}_5 = \begin{bmatrix} -275 & -270 & -265 & -145 & -140 & -130 \end{bmatrix}^T$ tidak lebih

kecil atau sama dengan $\overline{g}_5 = \begin{bmatrix} -1300 & -1290 & -1280 & -680 & -660 & -600 \end{bmatrix}^T$. Ambil $\delta = \text{maks}_i\ ((\underline{g}_5)_i - (\overline{g}_5)_i) = \text{maks}\ (1025, 1020, 1015, 535, 520, 470) = 1025$. Berarti, $\overline{g}_5^* = \begin{bmatrix} -275 & -265 & -255 & 345 & 365 & 425 \end{bmatrix}^T$.

6. Kolom keenam, $\underline{g}_6 = \begin{bmatrix} -145 & -140 & -135 & -15 & -10 & 0 \end{bmatrix}^T$ tidak lebih kecil atau sama dengan $\overline{g}_6 = \begin{bmatrix} -700 & -690 & -680 & -80 & -60 & 0 \end{bmatrix}^T$. Ambil $\delta = \text{maks}_i\ ((\underline{g}_6)_i - (\overline{g}_6)_i) = \text{maks}\ (555, 550, 545, 65, 50, 0) = 555$. Berarti, $\overline{g}_6^* = \begin{bmatrix} -145 & -135 & -125 & 475 & 495 & 555 \end{bmatrix}^T$.

Oleh karena itu, diperoleh $\Gamma(\underline{D}_{\underline{\lambda}}) = \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -140 & -145 & -35 & -270 & -270 & -140 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -15 & -20 & 90 & -145 & -145 & -15 \\ -10 & -15 & 95 & -140 & -140 & -10 \\ 0 & -5 & 105 & -130 & -130 & 0 \end{bmatrix}$

dan $\Gamma(\overline{D}_{\overline{\lambda}}) = \begin{bmatrix} -145 & -150 & -40 & -275 & -275 & -145 \\ -135 & -140 & -30 & -265 & -265 & -135 \\ -125 & -130 & -20 & -255 & -255 & -125 \\ 475 & 670 & 580 & 345 & 345 & 475 \\ 495 & 490 & 600 & 365 & 365 & 495 \\ 555 & 550 & 680 & 425 & 425 & 555 \end{bmatrix}$.

Dari matriks $\Gamma(D)$ diperoleh $\{([-145, -145], [-140, -135], [-135, -125], [-15, 475], [-10, 495], [0, 555])^T\}$ merupakan himpunan vektor eigen-vektor eigen matriks D yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda(D) = [150, 720]$. Oleh karena itu $E^*(D) = 6$, sedangkan $V^+(D) = \{\alpha \overline{\otimes} ([-145, -145], [-140, -135], [-135, -125], [-15, 475], [-10, 495], [0, 555])^T \,|\alpha \in I(\mathbb{R})\}$.

Selain itu, terdapat cara lain untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus interval. Diketahui matriks interval $A \in I(\mathbb{R})_\varepsilon^{n\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})_b$, sehingga skalar interval $\lambda(A) = [\underline{\lambda}(\underline{A}), \overline{\lambda}(\overline{A})]$ merupakan suatu nilai eigen maks-plus interval dari matriks interval A, dengan $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$ berturut-turut adalah nilai eigen matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A. Sehingga berdasarkan yang telah disampaikan pada subbab 2.2.3, maka $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$ dapat diperoleh menggunakan algoritma *power*, yaitu dengan melakukan iterasi secara berulang kali pada persamaan linear

$$x(k+1) = A \otimes x(k),\ k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.1}$$

Iterasi dimulai dari sebarang vektor awal $x(0) \neq \varepsilon_{n\times 1}$ sampai diperoleh bilangan bulat $p > q \geq 0$ dan bilangan real c sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu $x(p) = c \otimes x(q)$. Kemudian menghitung nilai eigen dengan rumus

$$\lambda = \frac{c}{p-q}. \tag{4.2}$$

Agar lebih mudah untuk memahami konsep menentukan nilai eigen matriks interval maks-plus menggunakan algoritma *power* tersebut, berikut diberikan ilustrasi untuk menghitung nilai eigen matriks interval D.
Ambil sebarang vektor awal $\underline{x}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Selanjutnya, dilakukan iterasi secara berulang kali persamaan linear (4.1) untuk matriks $\underline{D}$.

$$\underline{x}(1) = \underline{D} \otimes \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & 15 \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & 135 \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & 140 \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 150 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 120 \\ 240 \\ 245 \\ 255 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(2) = \underline{D} \otimes \underline{x}(1) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & 15 \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & 135 \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & 140 \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 150 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 120 \\ 240 \\ 245 \\ 255 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 265 \\ 270 \\ 390 \\ 395 \\ 405 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(3) = \underline{D} \otimes \underline{x}(2) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & 15 \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & 135 \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & 140 \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 150 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 260 \\ 265 \\ 270 \\ 390 \\ 395 \\ 405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 \\ 415 \\ 420 \\ 540 \\ 645 \\ 555 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(4) = \underline{D} \otimes \underline{x}(3) = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 10 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 10 \\ 15 & 10 & 120 & \varepsilon & \varepsilon & 15 \\ 135 & 130 & 240 & 5 & \varepsilon & 135 \\ 140 & 135 & 245 & 10 & 10 & 140 \\ 150 & 145 & 255 & 20 & 20 & 150 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 410 \\ 415 \\ 420 \\ 540 \\ 645 \\ 555 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560 \\ 565 \\ 570 \\ 690 \\ 695 \\ 705 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh perilaku periodik $\underline{x}(3) = 150 \otimes \underline{x}(2)$, sehingga nilai $p = 3, q = 2$, dan $c = 150$. Dengan demikian

$$\underline{\lambda}(\underline{D}) = \tfrac{150}{3-2} = 150.$$

Selanjutnya, dilakukan iterasi secara berulang persamaan linear untuk matriks $\overline{D}$ dengan vektor awal $\overline{x}(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.

$$\overline{x}(1) = \overline{D} \otimes \overline{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & 640 \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & 660 \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 720 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 600 \\ 1200 \\ 1220 \\ 1280 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}(2) = \overline{D} \otimes \overline{x}(1) = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & 640 \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & 660 \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 720 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 600 \\ 1200 \\ 1220 \\ 1280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 1310 \\ 1320 \\ 1920 \\ 1940 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}(3) = \overline{D} \otimes \overline{x}(2) = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & 640 \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & 660 \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 720 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1300 \\ 1310 \\ 1320 \\ 1920 \\ 1940 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2020 \\ 2030 \\ 2040 \\ 2640 \\ 2660 \\ 2720 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}(4) = \overline{D} \otimes \overline{x}(3) = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 20 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 \\ 30 & 20 & 600 & \varepsilon & \varepsilon & 40 \\ 630 & 620 & 1200 & 20 & \varepsilon & 640 \\ 650 & 640 & 1220 & 40 & 60 & 660 \\ 710 & 700 & 1280 & 100 & 120 & 720 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2020 \\ 2030 \\ 2040 \\ 2640 \\ 2660 \\ 2720 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2740 \\ 2750 \\ 2760 \\ 3360 \\ 3380 \\ 3440 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh perilaku periodik $\overline{x}(3) = 720 \otimes \overline{x}(2)$, sehingga nilai $p = 3, q = 2$, dan $c = 720$. Dengan demikian

$$\overline{\lambda}(\overline{D}) = \tfrac{720}{3-2} = 720.$$

Diberikan matriks interval $A \in I(\mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n})$, dapat diperoleh matriks $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$ dengan nilai eigen $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$. Berdasarkan algoritma *power*, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\underline{\lambda}(\underline{A})$ dan $\overline{\lambda}(\overline{A})$ dapat dihitung menggunakan rumus

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)). \tag{4.3}$$

Konsep algoritma *power* dalam menentukan vektor eigen dari matriks interval maks-plus yang tak-tereduksi dimungkinkan hanya menghasilkan satu vektor eigen yang merupakan hasil dari kombinasi linear dari basis ruang eigen. Berikut diberikan ilustrasi agar lebih mudah dalam memahami konsep menentukan vektor eigen dari matriks interval maks-plus yang tak tereduksi menggunakan contoh matriks D.

Nilai eigen matriks $\underline{D}$ dan $\overline{D}$ masing-masing adalah $\underline{\lambda}(\underline{D}) = 150$ dan $\overline{\lambda}(\overline{D}) = 720$. Dengan memperhatikan matriks D tersebut, algoritma *power* pada rumus (4.3) dapat digunakan untuk menentukan vektor eigen matriks $\underline{D}$ dan $\overline{D}$ yaitu

$$\underline{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q}(\underline{\lambda}^{\otimes(p-q-i)} \otimes \underline{x}(q+i-1)) = \bigoplus_{i=1}^{1}(\underline{\lambda}^{\otimes(1-i)} \otimes \underline{x}(1+i))$$

$$=(150)^{\otimes 0} \otimes \underline{x}(2) = 0 \otimes \begin{bmatrix} 260 \\ 265 \\ 270 \\ 390 \\ 395 \\ 405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 265 \\ 270 \\ 390 \\ 395 \\ 405 \end{bmatrix}$$

dan

$$\overline{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q}(\overline{\lambda}^{\otimes(p-q-i)} \otimes \underline{x}(q+i-1)) = \bigoplus_{i=1}^{1}(\overline{\lambda}^{\otimes(1-i)} \otimes \overline{x}(1+i))$$

$$=(720)^{\otimes 0} \otimes \overline{x}(2) = 0 \otimes \begin{bmatrix} 1300 \\ 1310 \\ 1320 \\ 1920 \\ 1940 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 1310 \\ 1320 \\ 1920 \\ 1940 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Mengingat graf berarah matriks D pada model sistem antrian disini terhubung kuat, maka matriks D *irredusibel*. Kemudian menurut Definisi 2.2.4, matriks D mempunyai nilai eigen maks-plus interval tunggal, yaitu $\lambda_{maks}(D)$, dengan vektor eigen fundamental v dimana $V_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Agar proses yang sudah selesai dan soal yang lain bisa segera dikerjakan, digunakan vektor eigen yang memiliki elemen non negatif minimum. Vektor eigen $v' = \alpha \otimes v$ dengan komponen non negatif minimum diperoleh ketika dipilih $\underline{\alpha} = 260$ dan $\overline{\alpha} = 1300$, sehingga komponen terkecil vektor eigen tersebut berubah menjadi nol, yaitu

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 130 & 135 & 145 \end{bmatrix}^T$$

dan

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 620 & 640 & 700 \end{bmatrix}^T.$$

Jadi, matriks D memiliki vektor eigen v serta v' yang bersesuaian dengan $\underline{\lambda} = 150$ dan $\overline{\lambda} = 720$. Selanjutnya nilai eigen λ dan vektor eigen v' digunakan sebagai acuan dalam menentukan jadwal antrian soal Qanda Mathpresso.

Waktu awal tiap pemroses mulai bekerja ditentukan dari vektor eigen matriks D yaitu v'. Waktu periodik antar proses antrian ditentukan dari nilai eigen matriks D yaitu 150 detik atau 720 detik. Tabel dibawah ini menunjukkan waktu awal terbaik untuk tiap pemroses sehingga dapat berjalan secara periodik.

Tabel 4.1. Jadwal periodik sistem antrian

Proses	Waktu Mulai Bekerja (Batas Bawah)	Proses	Waktu Mulai Bekerja (Batas Atas)
P_1	20:00:00	P_1	20:00:00
P_2	20:00:05	P_2	20:00:10
P_3	20:00:10	P_3	20:00:20
P_4	20:02:10	P_4	20:10:20
P_5	20:02:15	P_5	20:10:20
P_6	20:02:30	P_6	20:12:00

Jadwal antrian setelah mengacu pada jam kerja tampak pada Tabel 4.1. Setelah menerapkan jadwal antrian seperti tabel tersebut, proses antrian pertama dapat dimulai pada pukul 20:00:00 WIB kemudian antrian kedua dimulai pukul 20:02:30. Penerapan jadwal ini membuat penanya soal mengetahui kapan perkiraan jawaban soal akan diterima, sedangkan bagi penjawab soal akan dapat memperkirakan berapa banyak jawaban yang dapat ia kerjakan jika perkiraan satu jawaban seperti pada Tabel 4.1. Model antrian yang dibahas pada skripsi ini masih tergolong sederhana yaitu antrian hanya dengan satu server (tutor), hal ini untuk memberikan suatu ide awal menurunkan model antrian dengan menggunakan aljabar maks-plus interval. Kedepannya, kajian penelitian bisa diperluas untuk antrian yang lebih dari satu server dan memerhatikan adanya kendala di luar kendali sistem.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan, yaitu jadwal antrian berdasarkan matriks $D = [\underline{D}, \overline{D}]$ yang diperoleh ditunjukkan pada Tabel 4.1 dan setelah menerapkan jadwal antrian sesuai Tabel 4.1 dalam satu hari kerja penanya soal mengetahui kapan perkiraan waktu jawaban soal akan diterima, sedangkan bagi penjawab soal akan dapat memperkirakan berapa banyak jawaban yang dapat ia kerjakan.

5.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas aplikasi aljabar maks-plus interval dalam penentuan jadwal antrian soal Qanda Mathpresso yang hanya dengan satu server (tutor), hal ini untuk memberikan suatu ide awal menurunkan model antrian dengan menggunakan aljabar maks-plus interval. Kedepannya, kajian penelitian bisa diperluas untuk antrian yang lebih dari satu server dan memerhatikan adanya kendala di luar kendali sistem.

DAFTAR RUJUKAN

[1] Bacelli, F.,G. Cohen, G., J. Olsder, and J. P. Quadrat, *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event System*, John Wiley and Sons, New York, 1992.

[2] Farlow, K. G., *Max-Plus Algebra*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2009.

[3] Pramesthi, S, dan F. Adibah, *Jadwal Pelayanan Sistem Antrean 5 Server dalam Aljabar Maks-Plus Interval*, Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, **Vol 13** (2019), 039-046.

[4] Qanda, qanda.ai/id, diakses 20 Juni 2022.

[5] Rudhito, M. Andy, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, 2016.

[6] Rudhito, M. Andy, S. Wahyuni, A. Suparwanto, dan F. Susilo, *Aljabar Max-Plus Interval*, Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika , (2008), 1442.

[7] Rudhito, M. Andy, S. Wahyuni, A. Suparwanto, dan F. Susilo, *Matriks Aljabar Maks-Plus Interval*, Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika, (2008), 23-32.

[8] Siswanto, A. Suparwanto, M. Andy Rudhito, *Ruang Vektor Eigen Suatu Matriks Atas Aljabar Maks-Plus Interval*, Jurnal Matematika Sains, **Vol 19**, (2014).

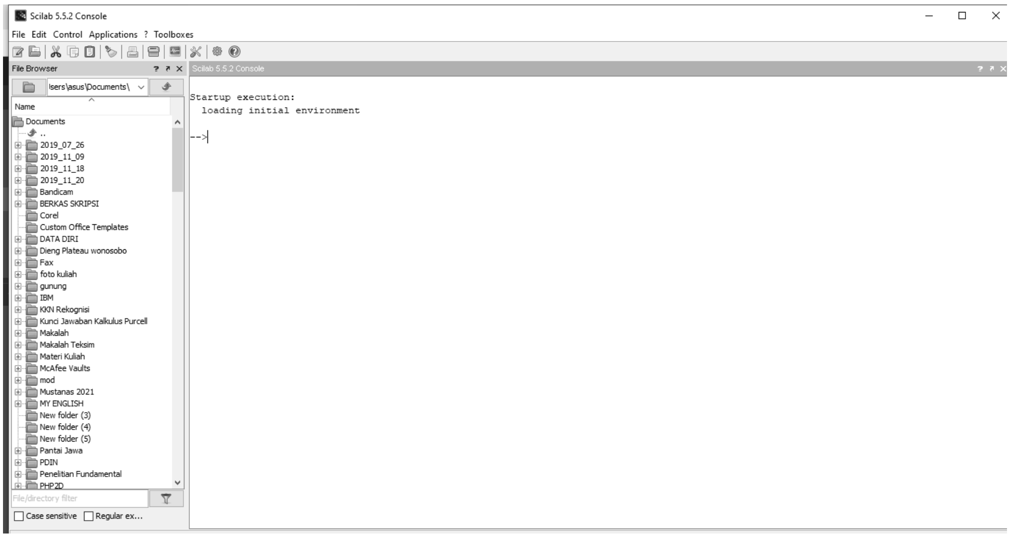
[9] Siswanto, *Optimalisasi Norma Jangkauan Vektor Eigen atas Aljabar Maks-Plus Interval*, Disertasi untuk Memperoleh Derajat Doktor dalam Matematika pada Universitas Gadjah Mada, 2017.

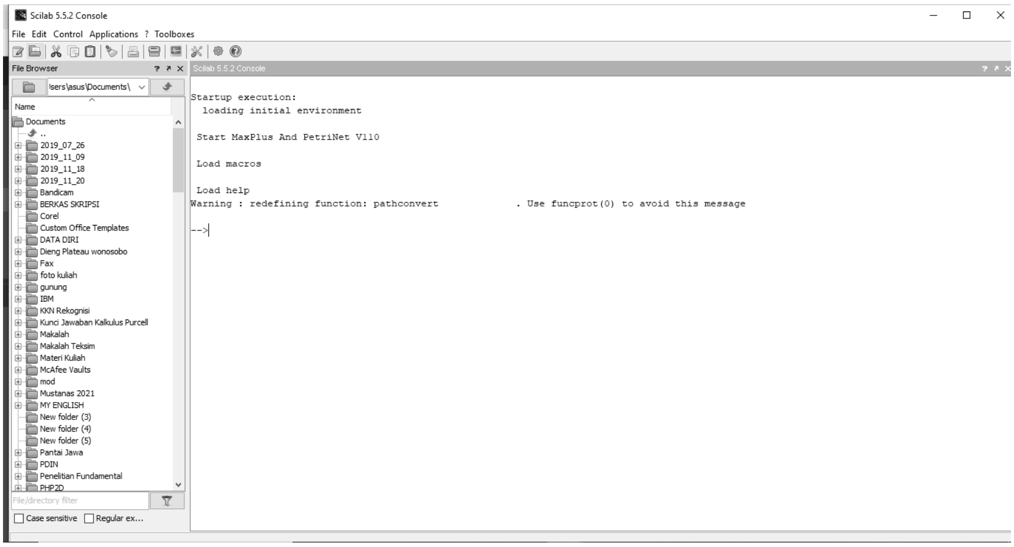
[10] Subiono, *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya, 2013.

[11] Tam, K.P., *Optimizing and Approximating Eigenvectors in Max Algebra*, A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD), 2010.

LAMPIRAN

1. Tampilan Scilab 5.5.2 dan *toolbox for maxplus algebra* (Subiono, Dieky Adzkiya dan Kistosil Fahim (2017)).





2. Contoh perhitungan

a. Matriks batas bawah:

```
 D  =

    5.     - Inf    - Inf    - Inf   - Inf     5.
    10.      5.     - Inf    - Inf   - Inf     10.
    15.      10.      120.   - Inf   - Inf     15.
    135.     130.     240.     5.    - Inf     135.
    140.     135.     245.     10.     10.     140.
    150.     145.     255.     20.     20.     150.

-->alp=-150
 alp  =

  - 150.

-->D1=maxplusotimes(D,alp)
 D1  =

  - 145.  - Inf    - Inf    - Inf    - Inf    - 145.
  - 140.  - 145.   - Inf    - Inf    - Inf    - 140.
  - 135.  - 140.   - 30.    - Inf    - Inf    - 135.
  - 15.   - 20.      90.    - 145.   - Inf    - 15.
  - 10.   - 15.      95.    - 140.   - 140.   - 10.
    0.    - 5.       105.   - 130.   - 130.     0.

-->D2=maxpluspwr(D1,2)
 D2  =

  - 145.  - 150.  - 40.    - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.    - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.    - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.    - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.    - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.   - 130.  - 130.    0.
```

```
-->D3=maxpluspwr(D1,3)
 D3  =

  - 145.  - 150.  - 40.    - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.    - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.    - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.    - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.    - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.   - 130.  - 130.    0.

-->D4=maxpluspwr(D1,4)
 D4  =

  - 145.  - 150.  - 40.    - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.    - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.    - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.    - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.    - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.   - 130.  - 130.    0.

-->D5=maxplupwr(D1,5)
                   !--error 4
Undefined variable: maxplupwr


-->D5=maxpluspwr(D1,5)
 D5  =

  - 145.  - 150.  - 40.    - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.    - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.    - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.    - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.    - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.   - 130.  - 130.    0.
```

```
-->D6=maxpluspwr(D1,6)
 D6  =

  - 145.  - 150.  - 40.   - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.   - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.   - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.   - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.   - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.  - 130.  - 130.    0.

-->E=maxplusoplus(D1,D2)
 E  =

  - 145.  - 150.  - 40.   - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.   - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.   - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.   - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.   - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.  - 130.  - 130.    0.

-->E2=maxplusoplus(E,D3)
 E2  =

  - 145.  - 150.  - 40.   - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.   - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.   - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.   - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.   - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.  - 130.  - 130.    0.

-->E3=maxplusoplus(E2,D4)
 E3  =

  - 145.  - 150.  - 40.   - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.   - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.   - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.   - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.   - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.  - 130.  - 130.    0.

-->E4=maxplusoplus(E3,D5)
 E4  =

  - 145.  - 150.  - 40.   - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.   - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.   - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.   - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.   - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.  - 130.  - 130.    0.

-->E5=maxplusoplus(E4,D6)
 E5  =

  - 145.  - 150.  - 40.   - 275.  - 275.  - 145.
  - 140.  - 145.  - 35.   - 270.  - 270.  - 140.
  - 135.  - 140.  - 30.   - 265.  - 265.  - 135.
  - 15.   - 20.     90.   - 145.  - 145.  - 15.
  - 10.   - 15.     95.   - 140.  - 140.  - 10.
    0.    - 5.      105.  - 130.  - 130.    0.
```

3. Contoh Perhitungan

a. Untuk matriks batas bawah

```
-->D=[5 -%inf -%inf -%inf -%inf 5;10 5 -%inf -%inf -%inf 10;15 10 120 -%inf -%inf 15;135 130 240 5 -%inf 135;140 135 245 10 10 140;150 145 255 20 20 150]
 D  =

    5.     - Inf   - Inf   - Inf  - Inf    5.
    10.      5.    - Inf   - Inf  - Inf    10.
    15.      10.     120.  - Inf  - Inf    15.
    135.     130.    240.    5.   - Inf    135.
    140.     135.    245.    10.    10.    140.
    150.     145.    255.    20.    20.    150.

-->x0=[0;0;0;0;0;0]
 x0  =

    0.
    0.
    0.
    0.
    0.
    0.

-->X=maxplussys(D,x0,4)
 X  =

    0.    5.      260.    410.    560.
    0.    10.     265.    415.    565.
    0.    120.    270.    420.    570.
    0.    240.    390.    540.    690.
    0.    245.    395.    545.    695.
    0.    255.    405.    555.    705.

-->
```