IML – ex4

יאיר שטרן

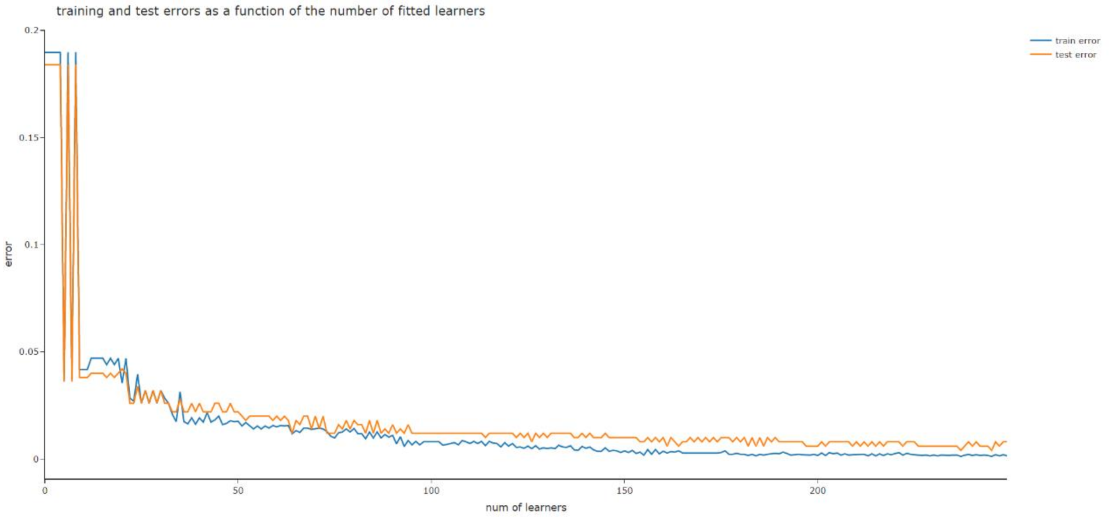
ת.ז. 318442241

חלק פרקטי:

שאלה 1

noise = 0 :

ניתן לראות שככל שנוסיף week learners ל adaboost השגיאה יורדת.

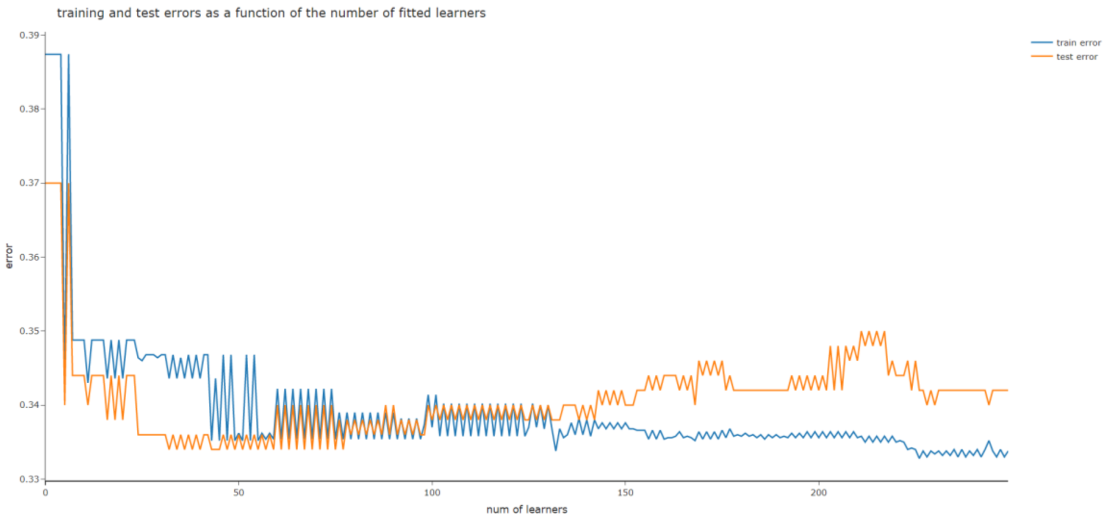


noise = 0.4 :

ניתן לראות שבניגוד למקרה הקודם כשיש רעש כאשר יש יותר מידי לומדים נגיע ל overfit

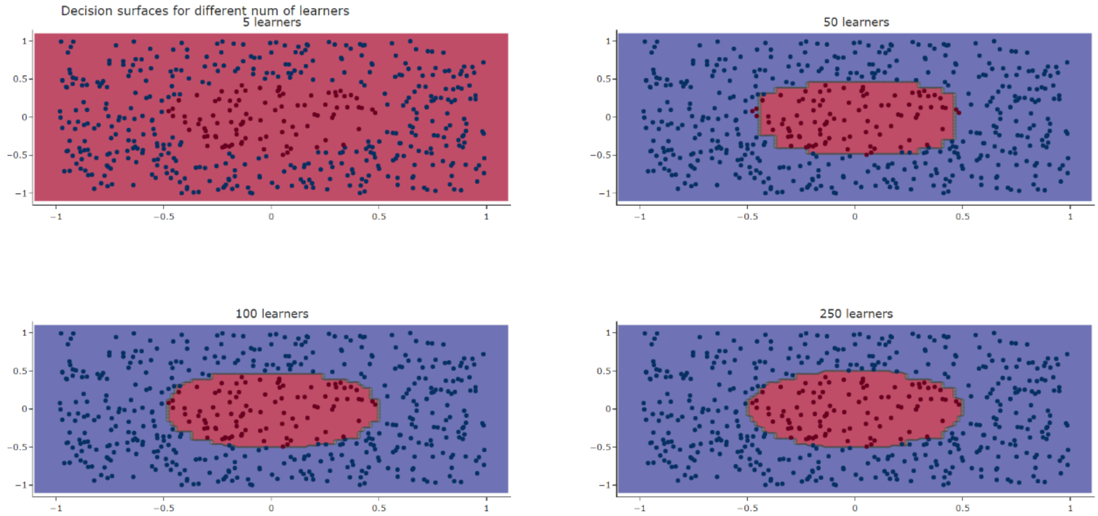
ניתן לראות זאת בגרף בכך שהחל משלב מסוים השגיאה על הטסט גדלה (והשגיאה על סט האימון נמוכה יותר)

ז"א שיש bias נמוך אבל variance גבוה.

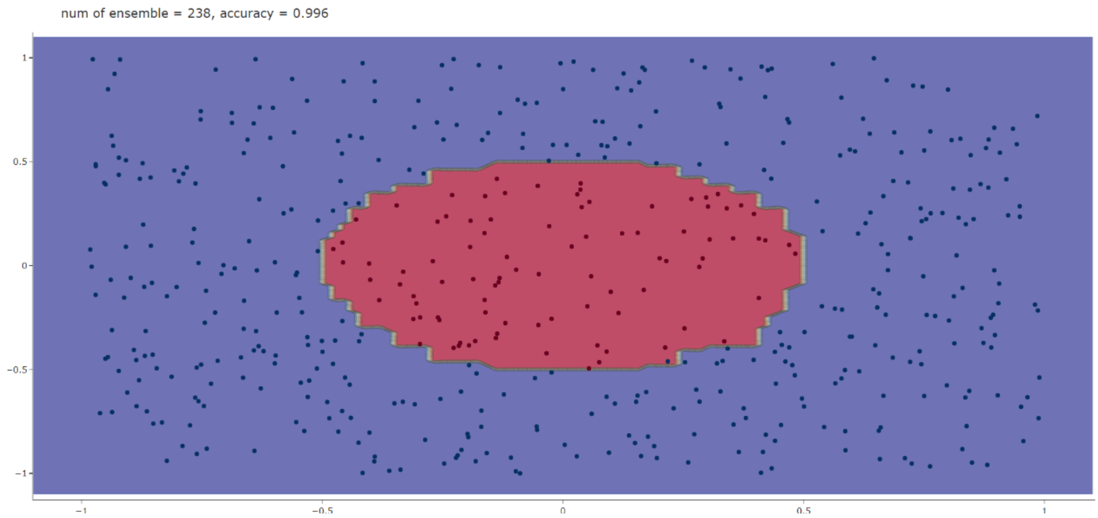


שאלה 2

ניתן לראות שככל שיש יותר לומדים כך מספר הנקודות שנטעה בהן קטן.



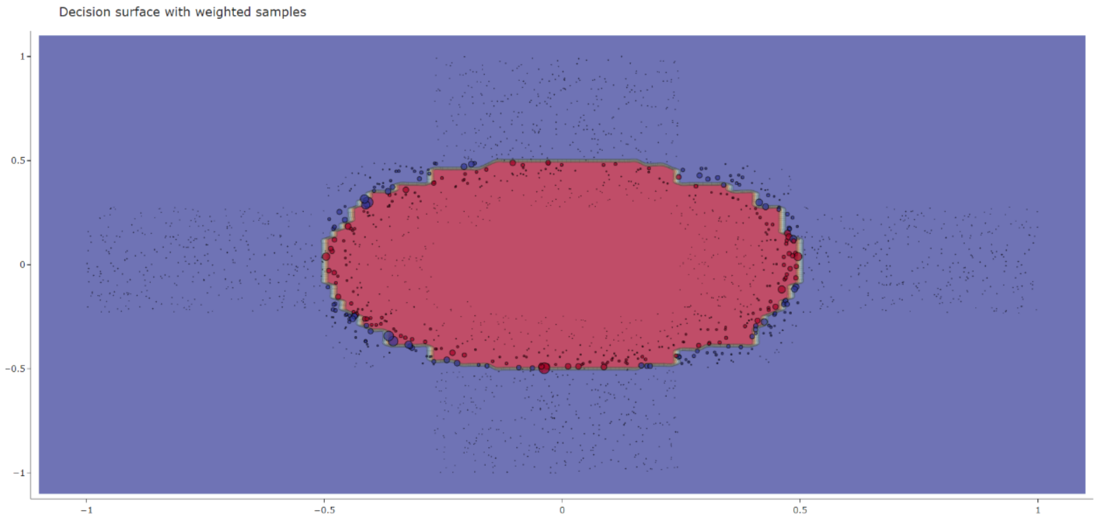
שאלה 3



שאלה 4

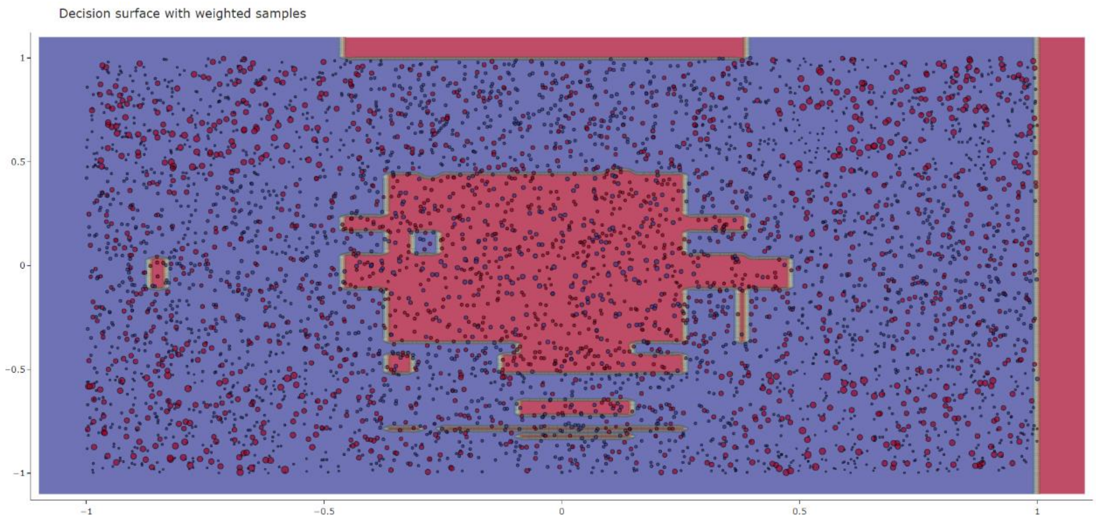
noise = 0 :

ניתן לראות שהנקודות שהאלגוריתם התקשה בהן אלו נקודות על הגבול שבין הנקודות האדומות והכחולות ניתן לראות זאת מכך שהנקודות באיזורים האלו גדולות ומאיך שהגדרנו את הגודל (לפי D) ניתן להבין כי האלגוריתם טעה בהן יותר מבשאר הנקודות.



noise = 0.4 :

ניתן לראות שבניגוד למקרה הקודם כאשר יש רעש האלגוריתם טועה במידה שווה על נקודות בכל האזורים.



IML - תרגיל 4 - חלק תאורטי   יאיר שטק - 318442241

2.1 PAC Learnability

1. For $\mathcal{A}$ some learning algorithm, $\mathcal{D}$ a probability distribution over $\mathcal{X}$ and the 0-1 loss function (i.e misclassification), prove the following are equivalent:

   $(a)\quad \forall\varepsilon,\delta>0\quad \exists m(\varepsilon,\delta)\quad \text{s.t}\quad \forall m\geq m(\varepsilon,\delta)\quad \mathbb{P}_{S\sim\mathcal{D}^m}[L_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}(S))\leq\varepsilon]\geq 1-\delta$

   $(b)\quad \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}[L_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}(S))]=0$

   Hints:
   - For $(a)\Rightarrow(b)$ show that $\forall\varepsilon,\delta>0$ and $\forall m\geq m(\varepsilon,\delta)$ it holds that $\mathbb{E}_{S\sim\mathcal{D}^m}[L_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}(S))]\leq\varepsilon+\delta$.
   - For $(b)\Rightarrow(a)$ use Markov's inequality

כיוון ראשון: $(\Uparrow)$

יהיו $\varepsilon,\delta>0$ ונניח ש- $\lim_{m\to\infty} E_{S\sim D^m}[L_D(A(S))]=0$

מא"ש מרקוב

$$P_{S\sim D^m}[L_D(A(S))\leq\varepsilon]=1-P_{S\sim D^m}[L_D(A(S))>\varepsilon]\geq 1-\frac{E[L_D(A(S))]}{\varepsilon}$$

כעת נראה ש- $1-\frac{E[L_D(A(S))]}{\varepsilon}\geq 1-(1-\delta)=\delta$

נבחין שמספיק שנראה שלכל $m\geq m(\varepsilon,\delta)$ מתקיים $E[L_D(A(S))]\leq\delta\varepsilon$

ואכן בהינתן $\lim_{m\to\infty} E_{S\sim D^m}[L_D(A(S))]=0$, מהגדרת הגבול לכל $m\geq m_0$

מתקיים $\lim_{m\to\infty} E_{S\sim D^m}[L_D(A(S))]<\varepsilon\delta$ לכן אם נגדיר $m(\varepsilon,\delta)=m_0$ נקבל

מה שרצינו.

כיוון שני: $(\Downarrow)$

נרצה להוכיח ש- $\lim_{m\to\infty} E_{S\sim D^m}[L_D(A(S))]=0$ צ"ל לפי הגדרת הגבול

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists m_0\in\mathbb{N}\quad \forall m>m_0\quad E_{S\sim D^m}[L_D(A(S))]<\varepsilon$$

כאשר נתון $P_{S\sim D^m}[L_D(A(S)) \le \varepsilon] \ge 1-\delta$ לכל $m \ge m(\varepsilon,\delta)$

$$\mathbb{E}_{S\sim D^m}[L_D(A(S))] = \int_0^1 x\cdot P[L_D(A(S))=x]\,dx \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\varepsilon}{4}} \frac{\varepsilon}{4}\cdot P[L_D(A(S))=x]\,dx + \int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1 xP[L_D(A(S))=x]\,dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}P\left[L_D(A(S))\le \frac{\varepsilon}{4}\right] + P\left[L_D(A(S))>\frac{\varepsilon}{4}\right] = \frac{\varepsilon}{4}(1-\delta)+(1-(1-\delta))$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\delta\varepsilon}{4}$$

ואם נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ נקבל את הנדרש

2. Let $\mathcal{X} := \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Y} := \{0,1\}$ and let $\mathcal{H}$ be the class of concentric circles in the plane, i.e.,

$$\mathcal{H} := \{h_r : r \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{where} \quad h_r(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{[||\mathbf{x}||_2 \le r]}$$

Prove that $\mathcal{H}$ is PAC-learnable and its sample complexity is bounded by

$$m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta) \le \frac{\log(1/\delta)}{\varepsilon}$$

When proving, *do not* use a VC-Dimension argument. Instead prove the claim directly from the PAC learnability definition by showing a specific algorithm and analyzing its sample complexity.
Hint: Remember that for every $\varepsilon > 0$ it holds that $1-\varepsilon \le e^{-\varepsilon}$

אינטואיציה: בהינתן S קב' דגימות על מעגלים קונצנטריים נרצה לבחור

את המעגל עם הרדיוס המקסימלי שמקבל 1 - זהו ממש ERM

פורמליזציה: אם מניחים ריאליזביליות כאשר $f = h_r \in \mathcal{H}$

ותהי S קב' דגימות הנדגמות באופן בת"ז ובהתפלגות כלשהי D

נבחר את הרדיוס המקסימלי:

$r_{max} = \max_i \|x_i\| \quad (y_i = 1)$, $h_r^{max} = \mathbb{1}\{\|x\| \le max\}$

כעת יהי $\varepsilon, \delta > 0$ (נחשב את הסיכוי שהשגיאה שלנו גדולה מ-ε וזה

הסיכוי שכל m הדוגמאות x נדגמות כך שהרדיוס של b x_i לא במרחק ε

מ-r הגאוסית ולכן:

$$P\left[L_{D,f}\left(h_r^{max}\right) \geq \varepsilon\right] = P\left[\left\{\forall i \in [m] : \left| \|x_i\| - r \right| > \varepsilon \right\}\right] =$$

$$\overset{\text{ש"ה}}{=} P\left(\left| \|x_1\| - r \right| > \varepsilon\right)^m = (1-\varepsilon)^m \leq e^{-\varepsilon m}$$

מונוטוניות נקבל $\ln(e^{-\varepsilon m}) \leq \ln(\delta) \iff -\varepsilon m \leq \ln(\delta)$

$$\iff m \geq \frac{\ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon}$$

וסה"כ $m_H(\varepsilon, \delta) \leq \frac{\log(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon}$ כנדרש.

2.2 VC-Dimension

3. Let $\mathcal{X} = \{0,1\}^n$ and $\mathcal{Y} = \{0,1\}$, for each $I \subseteq [n]$ define the parity function:

$$h_I(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i \in I} x_i\right) \bmod 2.$$

לכל $(x_1, \ldots, x_n)$ וקטורים - h תחזיר את השארית חלוקה

הסכום שלהם ב-2.

ישנן 2^n אפשרויות לבחור את I עבור 2^n תתי קבוצות של $[n]$

הגודל סופי ובפרט $|h_I(x)| = 2^n$ ולכן יש חסם עליון על VCdim

$$VCdim(H_I) \leq \log(|H|) \leq \log(2^n) = n$$

נוכיח שזה שוויון בכך שנמצא תת קבוצה C רק ש- $|C| = n$

וגם H_I מנתצת את C.

לדוגמא: $e_1,\dots,e_n$ וקטורי היחידה, ותהי השמה $y_1,\dots,y_n$

עבור הוקטורים הללו, תהי תת קבוצה $I\subseteq[n]$

מספיק שנבחר מסווג h כך ש- $h(e_i)=1$ לכל $j\in I$ כי לכל

$j\in I$ סכום הקואורדינטות הוא 1 ולכל $j\notin I$ הסכום 0

פורמלית:
$$h(e_j)=\begin{cases}1 & j\in I\\ 0 & j\notin I\end{cases}$$

4. Given an integer k, let $([a_i,b_i])_{i=1}^k$ be any set of k intervals on $\mathbb{R}$ and define their union $A=\cup_{i=1}^k[a_i,b_i]$. The hypothesis class $\mathcal{H}_{k-intervals}$ includes the functions: $h_A(x):=\mathbb{1}_{[x\in A]}$, for all choices of k intervals. Find the VC-dimension of $\mathcal{H}_{k-intervals}$ and prove your answer. Show that if we let A be any finite union of intervals (i.e. k is unlimited), then the resulting class $\mathcal{H}_{intervals}$ has VC-dimension ∞.

נראה ש- $vcdim\geq 2k$. כלומר קיימת קבוצה בגודל $2k$ ש- H_{k-int} מנתצת

תהי - $|C|=2k$, $C\subseteq\mathbb{R}$ נסדר את איברי c בסדר עולה $C=\{c_1<c_2<\dots<c_{2k}\}$

H_{k-int} מנתצת את C כמו - כי יהי סיווג כלשהי של איברי c

אזי בכל פעם שאיבר c_i מקבל סיווג 1 נצטרך לכסות אותו ע"י קטע שימשך עד

עוד האיברים אחריו גם מקבלים 1 - לכן המקרה "הגרוע" ביותר הוא כשהסיווג

באופן צמוד $1,0,1,0\dots$ ונקבל k מקטעים ונוכל לכסות עם k קטעים,

כעת נראה ש $vcdim<2k+1$: תהי $|C|=2k+1$ נסדר שוב בסדר עולה

כאשר נסווג את האי זוגיים ל- 1. נקבל סיווג ש- H_{k-int} לא מנפץ

כי יש $K+1$ איזורים עם 1 המופרדים ב k איזורים עם 0,

לעומת זאת אם ניתן ל- H להיות איחוד סופי כלשהו של קטעים

ללא הגבלה על k - המימד יהיה אינסוף.

2.3 Monotonicity

5. Let $\mathcal{H}$ be a hypothesis class for a binary classification task. Suppose that $\mathcal{H}$ is PAC learnable and its sample complexity is given by $m_{\mathcal{H}}(\cdot,\cdot)$. Show that $m_{\mathcal{H}}$ is monotonically non-increasing in each of its parameters. That is:
   - Show that given $\delta \in (0,1)$, and given $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2 < 1$, we have that $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon_1,\delta) \ge m_{\mathcal{H}}(\varepsilon_2,\delta)$.
   - Similarly, show that given $\varepsilon \in (0,1)$, and given $0 < \delta_1 \le \delta_2 < 1$, we have that $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta_1) \ge m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta_2)$.

- תהי $\delta\in(0,1)$ ויהי $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_2<1$

עבור מדגם בגודל $m\ge m_H(\varepsilon_1,\delta)$ או גדול מובטח לנו כי בהסתברות

של $1-\delta$ לפחות נקבל כל החלטה $\hat{h}$ עם שגיאה ε_1 לכל היותר.

$$m \ge m_H(\varepsilon_1,\delta) \Rightarrow P[L_{D,h}(\hat{h}) \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_2] \ge 1-\delta$$

אם נניח בשלילה ש- $m_H(\varepsilon_1,\delta) < m_H(\varepsilon_2,\delta)$ נקבל סתירה

למינימליות של סיבוכיות המדגם.

באופן דומה ויהי $\varepsilon\in(0,1)$ ו- $0<\delta_1\le\delta_2\le 1$

$$m \ge m_H(\varepsilon,\delta_1) \Rightarrow P[L_{D,h}(\hat{h}) \le \varepsilon] \ge 1-\delta_1 \ge 1-\delta_2$$

6. Let $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ be two classes for binary classification, such that $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$. Show that $VC-dim(\mathcal{H}_1) \le VC-dim(\mathcal{H}_2)$.

יהיו H_1, H_2 2 מחלקות היפותזות ותהי C קבוצה כלשהי

בהינתן $H_1 \subseteq H_2$ נקבל ש- אם H_1 מנתצת את C אז:

גם H_2 מנתצת את C. ולכן $vcdim(H_1) \le vcdim(H_2)$

שהרי: אם H_1 מנתצת את C אז: $vcdim(H_1) \ge |C|$ ואם H_2

מנתצת את C $vcdim(H_2) \ge |C|$

2.4 Agnostic-PAC

7. Prove that if $\mathcal{H}$ has the uniform convergence property with function $m_{\mathcal{H}}^{UC} : (0,1)^2 \to \mathbb{N}$, then $\mathcal{H}$ is Agnostic-PAC learnable with sample complexity $m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta) \le m^{UC}(\varepsilon/2,\delta)$.

נניח ש- H בעלת תכונת ההתכנסות הסטנדרטית עם הפונ' $m_h^{uc}(0,1)^2 \to \mathbb{N}$

כלומר לכל $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ ולכל התפלגות D מעל $X \times Y$ מתקיים:

$$D^m(\{S \in (X,Y)^m \mid S \text{ נציג-}\varepsilon\}) \ge 1-\delta$$

S נציג-ε לפי D, H, l אם לכל $h \in H$ מתקיים

$|L_S(h) - L_D(h)| < \varepsilon$. ולכן לכל $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ נקבל:

$$D^m(\{S \in (X,Y)^m \mid S \text{ נציג-}\tfrac{\varepsilon}{2}\}) \ge 1-\delta$$

כלומר לכל $h \in H$ מתקיים:

$$|L_S(h) - L_D(h)| > \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < L_S(h) - L_D(h) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$L_D(h) < L_S(h)+\frac{\epsilon}{2} \quad \wedge \quad L_S(h) < L_D(h)+\frac{\epsilon}{2}$$

נגדיר $h_D=\arg\min_{h\in H} L_D(h)$, $h_S=\arg\min_{h\in H} L_S(h)$ ונקבל:

$$L_D(h_S)\le L_S(h_S)+\frac{\epsilon}{2}\le L_S(h_D)+\frac{\epsilon}{2}\le L_D(h_D)+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=L_D(h_D)+\epsilon$$

ולכן:

$$P_{S\sim D^m}\left(L_D(h_S)\le \min_{h\in H} L_D(h)+\epsilon\right)\ge$$

$$\ge D^m\left(\{S\in(X\times Y)^m \mid \epsilon\text{-מייצג-}S\}\right)\ge 1-\delta$$

בפרט H למידה PAC - אגנוסטי עם $m_H(\epsilon,\delta)\le m^{UC}(\frac{\epsilon}{2},\delta)$

8. Let $\mathcal{H}$ be a hypothesis class over a domain $\mathcal{Z}=\mathcal{X}\times\{\pm 1\}$, and consider the 0-1 loss function. Assume that there exists a function $m_{\mathcal{H}}$, for which it holds that for every distribution $\mathcal{D}$ over $\mathcal{Z}$ there is an algorithm $\mathcal{A}$ with the following property: when running $\mathcal{A}$ on $m\ge m_{\mathcal{H}}$ i.i.d. examples drawn from $\mathcal{D}$, it is guaranteed to return, with probability at least $1-\delta$, a hypothesis $h_S:\mathcal{X}\to\{\pm 1\}$ with $L_{\mathcal{D}}(h_S)\le \min_{h\in\mathcal{H}} L_{\mathcal{D}}(h)+\epsilon$. Is $\mathcal{H}$ agnostic PAC learnable? Prove or show a counter example.

לא. (הבעיה שהאלגו' ניבחר בהתאם ל- D)

דוגמא נגדית: H תהיה מח' היפותזות של איחוד כל האיחודים הסופיים של קטעים משאלה 5 שמימד VC שלה כמובן אינסופי

ולכן היא לא למידת PAC.

בהינתן התפלגות D ו- m_H דגימות הנדגמות אחיד מהתפ'

ויהי כלל למידה - h_S כך שבהינתן דגימה x h_S מחשב את ההסתברות p ש- x יקבל ערך 1 - מטילים מטבע עם הסת' p לקבל 1 ומחזירים את התשובה.

H לא למיד PAC כמו שראינו בשאלה 5

אבל כן מתקיים $L_D(h_S) \le \min_{h\in H} L_D(h) + \varepsilon$ כי אנחנו מסתמכים

על ההתפלגות האמיתית.

- התנאים מתקיימים אבל H לא למידה PAC - לכן הטענה שגויה.